

Treball de Fi de Grau en Física

Introducció a l'efecte Hawking

JULIOL 2021

Alumne: Pablo Mateu Hoyos

Tutor: Alessandro Fabbri

Índex

1	Introducció	2
2	Fonaments de Relativitat General	3
2.1	L'espai-temps de Minkowski	3
2.2	Els principis de la Relativitat General	4
2.3	Geometria de l'espai-temps en Relativitat General	5
2.4	Equacions de camp d'Einstein	6
2.4.1	La solució de Schwarzschild	7
3	Estructura causal de la solució de Schwarzschild	7
3.1	Els cons de llum de l'espai-temps de Schwarzschild	7
3.2	Naturalesa de l'horitzó d'esdeveniments	8
3.3	Coordenades d'Eddington-Finkelstein	10
3.4	Diagrames de Penrose	11
3.4.1	Diagrama de Penrose de l'espai-temps de Minkowski	11
3.4.2	Diagrama de Penrose de l'espai-temps de Schwarzschild	12
4	Fonaments de Teoria Quàntica de Camps	14
4.1	Teoria clàssica de camps	14
4.1.1	El camp de Klein-Gordon real	15
4.2	Quantització en l'espai-temps de Minkowski	15
4.3	Quantització en un espai-temps corbat	16
4.3.1	Transformacions de Bogolubov	17
5	Efecte Hawking	19
5.1	Espai-temps de Vaidya	19
5.2	Càlcul dels coeficients de Bogolubov	21
5.2.1	Paquets d'ona	23
5.3	Espectre de radiació	25
6	Discussió dels resultats	26
7	Conclusions	28

Abstract

The aim of this final degree thesis is to derive and characterize one of the fundamental properties of black holes: Hawking radiation, that is, the existence of spontaneously emitted thermal radiation as a consequence of the formation of an event horizon during the gravitational collapse.

Hawking radiation is a quantum phenomenon in an extreme context of General Relativity, so the thesis will be structured in two parts. First of all, we will introduce the reader to the fundamental aspects of the theory of General Relativity and we will discuss the properties of the most elementary black hole solution: the Schwarzschild solution. Then, we will present the quantization process of a matter (scalar) field in a curved space-time and we will analyse its implications in a collapse process. In particular, we will build a simple model of black hole formation that will allow us to show how, by defining the quantum vacuum states before and after the collapse, this leads to the spontaneous emission of particles. Finally, we will calculate the emission spectrum and analyse its features, putting them in context with the implemented example and its possible generalisation.

Resum

L'objectiu d'aquest treball de fi de grau és derivar i caracteritzar una de les propietats fonamentals dels forats negres: la radiació Hawking, és a dir, l'existència d'un espectre tèrmic d'emissió espontània com a conseqüència de la formació d'un horitzó d'esdeveniments durant el col·lapse gravitatori.

La radiació Hawking és un fenomen quàntic en un context extrem de la Relativitat General, de manera que el treball estarà estructurat en dues parts. Primerament, introduïrem al lector en els aspectes fonamentals de la teoria de la Relativitat General i discutirem les propietats de la solució de forat negre més elemental: la solució de Schwarzschild. A continuació, presentarem el procés de quantització d'un camp (escalar) de matèria en un espai-temps corbat i analitzarem les seues implicacions sobre un procés de col·lapse. En particular, construirem un model senzill de formació de forat negre que ens permetrà mostrar com, mitjançant la definició dels estats de buit quàntic anterior i posterior al col·lapse, s'origina l'emissió espontània de partícules. Finalment, calcularem l'espectre d'emissió i analitzarem les seues qualitats, tot posant-les en context amb l'exemple implementat i amb la seua possible generalització.

1 Introducció

El concepte de forat negre té el seu origen en el segle XVIII, quan el geòleg i filòsof John Mitchell va plantejar l'existència d'unes *estrelles fosques* de la superfície de les quals res, inclosa la llum, podria escapar. No obstant això, la seua aparent impossibilitat observacional i la concepció ondulatoria de la llum van condemnar a l'ostracisme aquesta idea fins a la publicació en 1915 de la teoria de la Relativitat General d'Einstein i la consegüent reformulació del concepte de gravetat. Començant per Schwarzschild en 1916, foren trobades múltiples solucions exactes de les equacions de camp que manifestaven de forma natural l'existència de regions de l'espai-temps compatibles amb la definició de les estrelles fosques de Mitchell, regions que John Wheeler batejà en 1967 com *forats negres* [1]. Paral·lelament, en 1967 Werner Israel demostrà la unicitat de les solucions existents, postulant, mitjançant el teorema *No-Hair*, que tots els forats negres es poden caracteritzar unívocament per la massa, la càrrega i el moment angular [2]; i en 1969 Zeldovich et al. obtingueren la primera evidència experimental de la seua existència [1].

Finalment, en 1973 Bekenstein suggerí l'equivalència física entre les lleis termodinàmiques i les lleis dinàmiques dels forats negres [3].

Va ser en aquest context d'auge que, en 1975, Stephen Hawking [4] va mostrar que els forats negres emetien radiació tèrmica espontàniament quan es tenien en consideració efectes quàntics. El resultat de Hawking ha sigut desenvolupat mitjançant diferents interpretacions físiques [5, 6] i ha sigut implementat experimentalment en *forats negres anàlegs* [7], tot aplegant sempre a la mateixa conclusió: un flux tèrmic de partícules quàntiques, conseqüència directa de la formació d'un *horitzó d'esdeveniments* en un procés de col·lapse gravitatori, que, hipotèticament, ha de portar a l'evaporació del forat negre [8]. La impossibilitat de seguir el procés d'evaporació fins a escales quàntiques en absència d'una Teoria Quàntica de la Gravetat convertix, a més, l'efecte Hawking en un camp actiu d'investigació. Tant és així, que el mateix Hawking [5] va argüir que aquest podria implicar, si el forat negre desapareguera, la violació de la llei de conservació del nombre bariònic, i estudis posteriors [9, 10] han incidit en la termalitat de l'espectre com a motor de la *paradoxa de la pèrdua d'informació*, és a dir, la destrucció de qualsevol informació sobre l'estat inicial del forat negre més enllà de la massa, la càrrega i el moment angular fruit de la seua completa evaporació. Això últim ha guiat, a més a més, a la formulació d'algunes teories especulatives com la *teoria hologràfica* [1].

En definitiva, *l'efecte Hawking* és un fenomen de gran rellevància teòrica, doncs és un dels pocs càlculs desenvolupables combinant la teoria quàntica amb la Relativitat General i es troba directament connectat a l'origen, estructura i evolució dels forats negres i, per tant, del propi univers. Addicionalment, l'efecte Hawking estableix un límit conceptual entre allò que podem determinar i allò que requereix una Teoria Quàntica de la Gravetat [1]. És per això que en aquest treball cercarem d'entendre les seues propietats fonamentals. Amb tal propòsit, construirem les bases matemàtiques per a obtenir l'espectre d'emissió Hawking en la situació matemàticament més senzilla possible: un *forat negre de Schwarzschild* format per la implosió d'una ona de xoc esfèrica i nul·la en un espai-temps buit; situació que conté, però, una gran quantitat d'informació física.

2 Fonaments de Relativitat General

Els forats negres són una situació física extrema de les equacions de camp d'Einstein, les quals governen el comportament dels cossos en Relativitat General. Llavors, per a comprendre el funcionament d'un forat negre, ja siga clàssic o quàntic, és necessari un coneixement dels conceptes fonamentals de la Relativitat General. L'objectiu d'aquesta secció és proporcionar el lector un recorregut pels elements de la teoria que ens permetran, posteriorment, desenvolupar el tema central del treball.

2.1 L'espai-temps de Minkowski

L'espai-temps de Minkowski, \mathcal{M}^4 , és l'espai mètric¹ que adapta matemàticament la física en Relativitat Especial. Conèixer-lo és no només essencial per poder fer una transició natural a la Relativitat General, sinó que és necessari per la derivació de la radiació Hawking que farem al final d'este treball.

La modificació fonamental que introdueix la Relativitat Especial respecte a la física newtoniana és l'eliminació del concepte de temps absolut i la seua interpretació com una coordenada més del sistema. Això comporta dos fets [11]: l'espai euclidi \mathbb{R}^3 és reemplaçat per un continu

¹Un espai mètric és un espai vectorial sobre el qual hi ha definida una distància

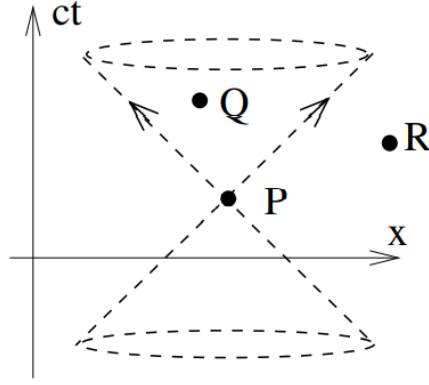


Figura 1: Con de llum de l'espai-temps de Minkowski. Extreta de [14].

espai-temps en què cada esdeveniment ve representat per un vector de posició² $x^\mu = (t, x, y, z)$ respecte d'un cert origen, i les transformacions de Galileu entre sistemes de referència inercials són substituïdes per les transformacions de Lorentz. \mathcal{M}^4 és, llavors, l'espai mètric resultant de definir sobre l'espai vectorial \mathbf{R}^4 una distància entre esdeveniments invariant Lorentz, l'element infinitesimal de la qual és (amb el conveni de signes de [12, 13])

$$ds^2 \equiv \vec{dl} \cdot \vec{dl} = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2, \quad (2.1)$$

i rep el nom *d'element de línia de Minkowski*. Aquesta expressió admet la reescriptura en forma tensorial

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (2.2)$$

on el tensor 2-covariant $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$ s'anomena *mètrica de Minkowski*.

L'espai-temps de Minkowski és el que en Relativitat General es denomina un *espai pla*, ja que permet construir sistemes de referència inercials *globals*. El signe de l'element de línia (2.1) permet classificar la distància entre dos esdeveniments com *temporal* ($ds^2 < 0$), *espacial* ($ds^2 > 0$) o *nul·la* ($ds^2 = 0$) [14]. Similarment, ens referim als vectors com temporals, espacials o nuls segons si la seua norma és negativa, positiva o nul·la, i designem les trajectòries lliures o *geodèsiques* pel caràcter del seu vector tangent. Les trajectòries amb $ds^2 = 0$ són les seguides pels raigs de llum i defineixen els *cons de llum* (veure Figura 1). L'observador en l'origen del con (P) està connectat causalment amb tots els esdeveniments separats temporalment, çò és interiors al con (Q), i està desconnectat dels separats espacialment, és a dir, exteriors al con de llum³ (R). Diem, doncs, que els cons de llum en \mathcal{M}^4 determinen *l'estructura causal* de \mathcal{M}^4 .

2.2 Els principis de la Relativitat General

Existeixen diverses escoles de pensament en la qüestió de quins són els principis de la Relativitat General. Per a la comprensió d'aquest treball, resulta convenient presentar la Relativitat General com una teoria construïda sobre tres principis [11]:

1. **El principi d'equivalència:** estableix que els sistemes de referència en caiguda lliure constitueixen sistemes de referència *localment inercials* en la Relativitat General, però no poden unir-se per formar un sistema inercial global degut a la no uniformitat del camp gravitatori. És el principi responsable de la interpretació geomètrica de l'espai-temps: en

²En aquesta expressió en concret i en endavant emprarem unitats geomètriques: $c = G = 1$.

³Dos esdeveniments estan connectats causalment quan pot existir una relació causa-efecte entre els dos. Hi estan desconnectats quan calen velocitats de propagació de la informació superiors a la de la llum.

absència de gravetat, l'espai-temps és pla, sense curvatura, vist que podem descriure'l globalment amb un mateix sistema de referència, mentre en presència de gravetat l'espai-temps és localment pla a primer ordre, però globalment presenta les propietats d'una geometria corbada.

2. **El principi de covariància:** també conegut amb el nom de *principi d'equivalència forta*, postula que, expressades en forma tensorial, les lleis de la física són covariants sota canvis de sistema de referència. En particular, una llei tensorial de la Relativitat Especial serà, pel principi d'equivalència, vàlida en un sistema de referència localment inercial en Relativitat General i, pel principi de covariància, generalitzable a qualsevol sistema de referència no inercial.
3. **El principi de correspondència:** és un principi elemental de totes les teories no clàssiques. En aquest cas, indica que la Relativitat General s'ha de reduir a la Relativitat Especial en absència de gravetat i a la gravitació newtoniana en el límit de camp feble i velocitats reduïdes.

Si bé és cert que existeix una forta càrrega axiomàtica en la formulació d'aquests principis, en 1919 el físic britànic sir Arthur Eddington va aprofitar un dia d'eclipsi solar per mesurar la *deflexió de la llum* d'objectes llunyans produïda per el Sol, tot validant la interpretació geomètrica derivada del principi d'equivalència [15]. Aquests principis no només doten la Relativitat General de la consistència matemàtica que requereix la seua construcció, sinó que connecten de manera considerablement intuïtiva la física en l'espai-temps de Minkowski amb la seua descripció en un espai-temps corbat.

2.3 Geometria de l'espai-temps en Relativitat General

La mètrica de Minkowski representa matemàticament les característiques geomètriques de \mathcal{M}^4 . A més d'això, satisfà les següents propietats tensorials evidents: és *simètrica* ($\eta_{\mu\nu} = \eta_{\nu\mu}$), *no degenerada* ($\det \eta_{\mu\nu} \equiv \eta \neq 0$) i *plana* ($\partial_\gamma \eta_{\mu\nu} \equiv \eta_{\mu\nu,\gamma} = 0$).

La generalització de la geometria plana (Relativitat Especial) a la corbada (Relativitat General) s'efectua substituint la mètrica $\eta_{\mu\nu}$ per una mètrica arbitrària, $g_{\mu\nu}$, que conté les propietats geomètriques de l'espai-temps que descriu [12]. Pel principi d'equivalència, la mètrica $g_{\mu\nu}$ satisfà

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \mathcal{O}(x^2) \quad (2.3)$$

en un sistema de referència localment inercial. A més a més, el principi de covariància imposa a la mètrica les propietats tensorials abans esmentades, correctament adaptades al marc de la Relativitat General. Llavors, la geometria d'un cert espai-temps en Relativitat General ve descrita per una mètrica $g_{\mu\nu}$ simètrica, no degenerada i *localment plana*, és a dir, tal que $\nabla_\gamma g_{\mu\nu} = 0$. El símbol ∇_γ rep el nom de *derivada covariant*, es defineix com

$$\nabla_\gamma v^\alpha \equiv v^\alpha_{;\gamma} \equiv v^\alpha_{,\gamma} + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} v^\beta \quad (2.4)$$

i constitueix l'adaptació de les equacions en derivades parcials a la presència de curvatura⁴. Per altre costat, els termes $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$ són els símbols de la *connexió afí*. Quan es construeix compatible amb la mètrica, els símbols d'aquesta connexió, ara anomenada de Levi-Civita, assumeixen l'expressió [12]

$$\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = \frac{1}{2} g^{\alpha\delta} (g_{\delta\beta,\gamma} + g_{\gamma\delta,\beta} - g_{\beta\gamma,\delta}) \quad (2.5)$$

⁴Note's [11] que podrien afegir-se termes de curvatura que foren nuls en qualsevol sistema inercial i no modificaren la física. La seua no inclusió se sol presentar amb el nom de principi d'acoblament mínim.

i determinen la forma de les geodèsiques en presència de curvatura. Quan l'espai-temps és pla els símbols són idènticament nuls i les geodèsiques es redueixen a línies rectes.

Posteriorment, Riemann provà que, a causa que aquests símbols foren diferents de zero, el transport paral·lel⁵ d'un vector no retorna el vector inicial [12]. En particular, l'element darrere d'aquesta diferència és el *tensor de curvatura de Riemann*,

$$R_{\mu\gamma\beta}^{\alpha} = \Gamma_{\mu\beta,\gamma}^{\alpha} - \Gamma_{\mu\gamma,\beta}^{\alpha} + \Gamma_{\nu\gamma}^{\alpha}\Gamma_{\mu\beta}^{\nu} - \Gamma_{\nu\beta}^{\alpha}\Gamma_{\mu\gamma}^{\nu}, \quad (2.6)$$

que depén de derivades segones de la mètrica i és, aleshores, responsable de l'acceleració relativa experimentada entre geodèsiques. Com el seu nom indica, aquest tensor descriu la curvatura de l'espai-temps, motiu pel qual les seues components són idènticament nul·les si i sols si l'espai-temps és pla. A partir del tensor de Riemann es defineixen el *tensor de Ricci*,

$$R_{\alpha\beta} \equiv R_{\alpha\mu\beta}^{\mu}, \quad (2.7)$$

i l'*escalar de Ricci* o escalar de curvatura,

$$R \equiv R_{\alpha}^{\alpha} = g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta}. \quad (2.8)$$

Finalment, a partir de (2.7) i (2.8), es construeix el *tensor d'Einstein*⁶,

$$G^{\alpha\beta} \equiv R^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}R. \quad (2.9)$$

que és l'únic tensor de divergència nul·la, és a dir, $\nabla_{\beta}G^{\alpha\beta} = 0$, que es pot construir amb la mètrica i les seues derivades segones [12].

2.4 Equacions de camp d'Einstein

En la mecànica newtoniana, el camp gravitatori degut a una distribució de massa satisfà l'equació de Poisson,

$$\Delta\Phi = 4\pi G\rho, \quad (2.10)$$

on Φ és el potencial gravitatori generat per la densitat de massa ρ . L'expressió (2.10) va portar a Einstein a plantejar-se l'existència d'una relació similar adaptada a la Relativitat General, això és, tensorial. En substitució de la massa, la quantitat tensorial que descriu una certa distribució de massa i energia en relativitat és el tensor *energia-moment*, $T_{\mu\nu}$. Per altra banda, donat que la gravetat és un efecte de la curvatura de l'espai-temps, Einstein considerà l'emplaçament d'un cert tensor de curvatura al lloc del terme esquerre en (2.10). Les lleis de conservació d'energia i moment impliquen que el tensor $T_{\mu\nu}$ té divergència nul·la. Per consegüent, Einstein postulà una relació de la forma $G^{\alpha\beta} \propto T^{\alpha\beta}$. La proporcionalitat es calcula aplicant el principi de correspondència, arran del qual es dedueix que l'expressió final de les equacions de camp és [12]

$$G^{\alpha\beta} = 8\pi T^{\alpha\beta}. \quad (2.11)$$

La fórmula (2.11) conté un total de 10 equacions diferencials que permeten obtenir la geometria de l'univers, $g_{\mu\nu}$, en funció de la distribució de matèria present, $T_{\mu\nu}$. Malgrat que en general és impossible trobar-hi una solució analítica, Israel va demostrar que no només era possible extraure solucions exactes sota certes condicions de simetria, sinó que a més estes solucions eren úniques [2].

⁵El transport paral·lel és senzillament el desplaçament d'un vector al llarg d'un camí mantenint la seua direcció paral·lela a la que tenia en el desplaçament immediatament anterior.

⁶Este tensor pot contindre un terme addicional, $\Lambda g^{\alpha\beta}$, on Λ és la constant cosmològica. Einstein la va afegir per a contrarestar l'expansió accelerada de l'univers, en el que posteriorment va descriure com el major error de la seua vida [16].

2.4.1 La solució de Schwarzschild

Per al propòsit d'este treball ens centrarem en l'anomenada solució de Schwarzschild, la qual descriu la geometria d'un espai-temps buit, *estàtic*, de simetria esfèrica i asimptòticament pla⁷ [2].

Un espai-temps és buit, trivialment, quan no presenta matèria, cosa que es llig com la condició $T_{\mu\nu} = 0$. Per altra banda, definim un espai-temps *estàtic* com aquell en què és possible trobar una coordenada temporal t tal que totes les components de la mètrica hi són independents i tal que són invariants sota l'operació d'inversió temporal, $t \rightarrow -t$. De la mateixa manera, un espai-temps és a simetria esfèrica quan cadascun dels seus punts llau sobre la superfície d'una esfera, i es diu asimptòticament pla si la seua mètrica es redueix a la de Minkowski en el límit $r \rightarrow \infty$. L'aplicació d'estes condicions a les equacions (2.11) va portar Schwarzschild⁸ a la solució per a l'element de línia

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (2.12)$$

on $d\Omega^2 \equiv d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2$, que representa l'aproximació més simplificada a l'espai-temps exterior a una estrella estàtica i amb simetria esfèrica.

3 Estructura causal de la solució de Schwarzschild

La mètrica de Schwarzschild, en la forma (2.12), esdevé singular en $r = 0$ i $r = 2M$. Les singularitats en les components de la mètrica poden ser *singularitats coordenades*, çò és, fruit d'una mala elecció de les coordenades o bé autèntiques *singularitats espai-temporals*. El mètode més immediat per establir una primera classificació és calcular les components de l'escalar $\tilde{R} \equiv R_{\mu\nu\alpha\beta} R^{\mu\nu\alpha\beta}$, definit a partir del tensor de Riemann (2.6), i analitzar el seu comportament [17]. En el cas de la mètrica de Schwarzschild, el valor d'aquest escalar és $48M^2/r^6$, d'on es llig que el punt $r = 0$ és una singularitat espai-temporal. Tanmateix, per a $r = 2M$ trobem una situació més delicada, doncs és en general fals afirmar que la singularitat és fictícia quan \tilde{R} no explota.

3.1 Els cons de llum de l'espai-temps de Schwarzschild

La superfície $r = 2M$ defineix el que es denomina *horitzó d'esdeveniments*. L'horitzó d'esdeveniments és la frontera espai-temporal entre els esdeveniments causalment connectats amb observadors llunyans i els esdeveniments que no ho estan [2]. Intuïtivament, es pot entendre com l'embolcall d'una singularitat i delimita el que anomenem forat negre. Per a comprendre la seua rellevància hem d'estudiar l'estructura causal de la solució de Schwarzschild.

El primer pas en l'anàlisi de l'estructura causal és la construcció dels cons de llum. Sense pèrdua de generalitat en les conseqüències físiques, ens restringirem a cons de llum radials, és a dir, tals que $d\Omega^2 = 0$ [12]. Imposant, llavors, $ds^2 = 0$ en l'element de línia (2.12) s'aplega a l'expressió

$$\frac{dt}{dr} = \pm \frac{1}{1 - 2M/r}, \quad (3.1)$$

⁷40 anys abans del teorema de Israel, Birkhoff va demostrar que la solució de Schwarzschild era l'única amb les característiques descrites.

⁸Schwarzschild va presentar aquesta solució en 1916, un any després de la publicació de les equacions de camp, ja que el mateix Schwarzschild va assistir a la presentació d'aquestes equacions realitzada per Einstein durant una de les seues classes.

on els dos signes corresponen, respectivament, a les geodèsiques ixents i entrants. Integrant l'expressió (3.1) obtenim l'equació explícita de les geodèsiques nul·les que tracen els cons de llum en l'espai-temps de Minkowski,

$$t(r) = \pm \left(r + 2M \ln \frac{|r - 2M|}{2M} \right) + C. \quad (3.2)$$

La primera característica rellevant de l'equació (3.2) és que esdevé singular per a $r = 2M$, forçant a qualsevol partícula a emprar un temps coordinat infinit per a aplegar a l'horitzó [2]. Analitzem ara la trajectòria d'un raig de llum ixent. Si invertim l'equació (3.1) és fàcil distingir tres comportaments: quan $r > 2M$, el radi descriu una trajectòria creixent amb el temps, per a $r = 2M$ la solució és constant, mentre que per a $r < 2M$ la coordenada radial és decreixent. Això sembla indicar [3] que en $r = 2M$ té lloc un canvi de comportament, de manera tal que qualsevol partícula exterior pot escapar a l'infinit, però no així les partícules interiors, inclosos els fotons, que es veuen arrastrades cap a la singularitat física en $r = 0$, o bé eternament atrapats en la frontera $r = 2M$. És per això que sovint es parla de l'horitzó com una superfície de *redshift* infinit. Aquest argument està també connectat amb una característica addicional de la mètrica (2.12): per a $r < 2M$, el temps esdevé una coordenada espacial i l'espai una coordenada temporal.

3.2 Naturalesa de l'horitzó d'esdeveniments

Certament, la superfície $r = 2M$ no és només una singularitat de la mètrica de Schwarzschild, sinó una regió espai-temporal causalment aïllada que defineix una superfície de no retorn per a qualsevol partícula que hi penetra [3]. Tot i així, el fet que els cons de llum no estan definits sobre $r = 2M$ i que les coordenades radial i temporal permuten són forts indicadors que, efectivament, la singularitat és fictícia [12]. L'argument final en aquesta discussió prové de l'estudi dels *observadors en caiguda lliure*.

Un observador radial en caiguda lliure descriu una geodèsica temporal correctament parametritzada pel *temps propi*, τ , i de 4-moment $p^\mu \equiv m dx^\mu/d\tau \equiv m(\dot{t}, \dot{r}, 0, 0)$. En Relativitat General, la presència de simetries es reflecteix en l'existència de *vectors de Killing*. Els vectors de Killing, ξ^μ , són camps vectorials que indiquen les direccions de simetria d'un determinat espai-temps, de manera tal que, quan la mètrica és independent d'una coordenada, el vector coordinat associat a aquesta és un camp de Killing i la quantitat $f \equiv \xi^\mu p_\mu$ és una quantitat conservada al llarg de les geodèsiques temporals [2]. Vist que la mètrica de Schwarzschild és independent del temps, el vector coordinat temporal, $\partial_t^\mu \equiv \delta_0^\mu$, és un camp de Killing amb quantitat conservada associada p_0 . Diem, aleshores, que *l'energia*,

$$E \equiv -\frac{p_0}{m} = \left(1 - \frac{2M}{r} \right) \dot{t}, \quad (3.3)$$

on hem emprat $p_0 = g_{00} p^0$, és conservada al llarg de la trajectòria de l'observador [12].

Per altre costat, el 4-vector velocitat, $u^\mu \equiv p^\mu/m$, és un vector normalitzat, $u^\mu u_\mu = -1$, al llarg de qualsevol geodèsica temporal. Tenint en compte la forma del vector 4-moment, aquest producte escalar esdevé [12]

$$-\left(1 - \frac{2M}{r} \right) \dot{t}^2 + \left(1 - \frac{2M}{r} \right)^{-1} \dot{r}^2 = -1. \quad (3.4)$$

Substituint el valor de \dot{t} de l'equació (3.3) en (3.4) i aïllant \dot{r} , s'aplega a l'expressió

$$\frac{d\tau}{dr} = -\frac{1}{\sqrt{E^2 - 1 + 2M/r}}, \quad (3.5)$$

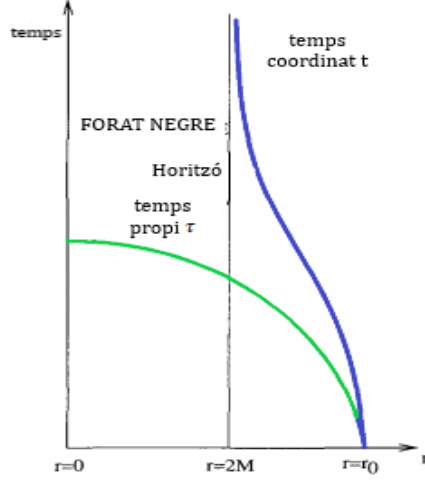


Figura 2: Trajectòria de caiguda de l'observador en funció del temps propi (verd) i el temps coordinat (blau). La línia negra vertical indica l'horitzó. Adaptada de [13].

on el signe negatiu prové d'imposar la trajectòria entrant. L'equació (3.3), a més, implica un valor de l'energia $E = 1$ per a observadors que partixen de l'infinit des del repós. Sota aquesta hipòtesi, l'equació (3.5) és analíticament integrable, amb solució

$$\Delta\tau(r_0 \longrightarrow r) = \frac{\sqrt{2}}{3M}(r_0^{3/2} - r^{3/2}), \quad (3.6)$$

la interpretació de la qual és clara: un observador que cau en direcció a la singularitat no només abastix l'horitzó en una quantitat finita de temps propi, sinó que també en un temps propi finit el pot travessar i, fins i tot, aplegar a la singularitat [2].

Si ara, en canvi, considerem el mateix raonament per al temps coordinat, t , multiplicant les equacions (3.3) i (3.5), apleguem a una expressió completament diferent:

$$\frac{dt}{dr} = -\frac{E}{\left(1 - \frac{2M}{r}\right) \sqrt{E^2 - 1 + \frac{2M}{r}}}. \quad (3.7)$$

Com a conseqüència del factor $(1 - 2M/r)$ addicional al denominador, la integral d'aquesta equació diferencial, encara que imposem $E = 1$, divergeix quan ens apropem a $r = 2M$. La interpretació física és també immediata: l'observador en caiguda lliure requereix d'un temps coordinat infinit per assolir l'horitzó, i no podem parlar ni tan sols de travessar-ho [2].

Els resultats obtinguts per als temps coordinat i propi estan graficats en la Figura 2. El temps propi representa la coordenada temporal que descriu naturalment el sistema de referència comòbil a l'observador en caiguda, mentre el temps coordinat és la coordenada temporal naturalment associada a un observador que veu aquesta caiguda externament [13]. Així doncs, podem agrupar les dues conseqüències derivades com segueix: un observador extern, suficientment allunyat de l'horitzó, mai vorà l'observador problema travessar l'horitzó, és més, per a ell quedarà atrapat en una caiguda eterna al voltant de $r = 2M$, mentre l'observador mateix, des del seu propi punt de vista, travessarà l'horitzó i aplegarà a la singularitat en un temps finit. En conseqüència, la superfície $r = 2M$ de la mètrica de Schwarzschild en la forma (2.12) és, definitivament, una singularitat coordinada.

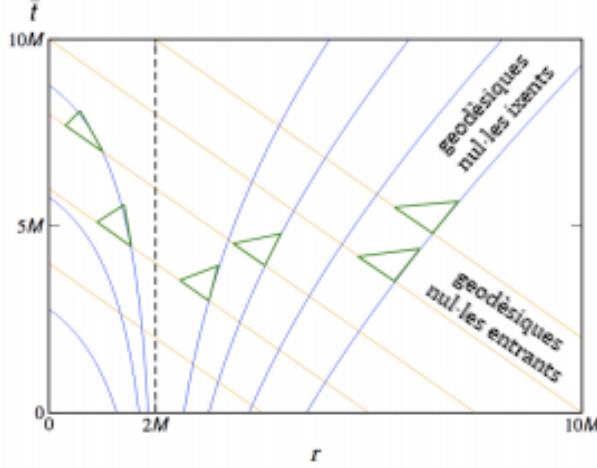


Figura 3: Geodèsiques nul·les i cons de llum (verd) en el pla \bar{T} -R. Adaptada de [12].

3.3 Coordenades d'Eddington-Finkelstein

El fet que la mètrica de Schwarzschild en la forma (2.12) no tinga validesa sobre l'horitzó fa necessària la recerca d'un nou set de coordenades que la regularitzen amb la finalitat no només d'ampliar la descripció matemàtica de l'espai-temps, sinó també de poder respondre què és l'horitzó d'esdeveniments [12]. En la part restant d'aquesta secció discutirem l'extensió de la mètrica de Schwarzschild. En concret, serà d'especial rellevància el gauge treballat en aquest apartat.

El canvi de coordenades proposat està inspirat en la forma de les geodèsiques nul·les de l'equació (3.2). Es defineixen les *coordenades d'Eddington-Finkelstein* com [12, 13]:

$$v \equiv t + r^* \quad , \quad u \equiv t - r^* , \quad (3.8)$$

sent r^* una nova coordenada radial,

$$r^* = r + 2M \ln \frac{|r - 2M|}{2M} , \quad (3.9)$$

que rep el nom de *coordenada tortuga* i linealitzava l'expressió de les geodèsiques nul·les (3.2). Ambdues coordenades són, per construcció, nul·les. També per construcció, a la coordenada v se l'anomena *entrant* i a la coordenada u *ixent*. En endavant, ens centrarem únicament en la coordenada nul·la entrant i deixarem d'una banda l'ixent. La causa d'aquesta tria quedarà clara en la següent secció. En termes de les coordenades (v, r) l'element de línia (2.12) adopta l'expressió

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r} \right) dv^2 + 2drdv + r^2 d\Omega^2 . \quad (3.10)$$

Note's que la tria $dv = 0$ implica automàticament $ds^2 = 0$, fet que confirma que la coordenada és nul·la. A banda d'això, aquest element de línia és manifestament no singular a $r = 2M$, per la qual cosa soluciona el problema de les coordenades originals de Schwarzschild. Hem trobat, per tant, una representació de la mètrica l'única singularitat de la qual és $r = 0$, és a dir, que estén el nostre espai-temps, però amb un significat físic que encara no és evident.

L'estructura causal de l'espai-temps en aquestes coordenades apareix representada en la Figura 3⁹. Les geodèsiques entrants són corbes constants i les geodèsiques ixents són corbes

⁹Note's que la representació ve feta en termes del temps de Schwarzschild, $\bar{t} \equiv t + 2M \ln \frac{|r-2M|}{2M}$. Les conclusions obtingudes són les mateixes.

orientades cap a valors creixents (decreixents) de r quan $r > 2M$ ($r < 2M$). De la mateixa manera, per a valors finits de la coordenada radial (és a dir, mètriques no Minkowskianes), els cons de llum es troben inclinats cap a la singularitat, amb una inclinació que és creixent a mesura que augmenta l'efecte de la curvatura. Malgrat això, la transició a l'interior del forat negre té lloc de forma regular, per la qual cosa diem que el set de coordenades (v, r) descriu una geometria de col·lapse gravitatori en què el volum $r < 2M$ representa el forat negre, i es correspon amb l'espai físic observable [12]. Es pot demostrar, raonant de manera anàloga, que la parella (u, r) correspon a la imatge temporal especular d'aquesta, amb una situació de repulsió gravitatòria i la subsegüent presència d'un *forat blanc* en la singularitat [13]. Aquesta imatge, però, no s'adapta a la física observable ni a la discutida en aquest treball.

3.4 Diagrames de Penrose

La descripció de l'espai-temps obtinguda en l'apartat anterior presenta l'inconvenient que les dues coordenades triades tenen un rang infinit. Això, tot i que a nivell conceptual no suposa cap problema ulterior, és incòmode per a treballar perquè implica dimensions infinites per als diagrames espai-temporals.

Els *diagrames de Penrose* consisteixen [13] en la projecció de l'espai-temps en un diagrama finit l'estructura causal del qual és la mateixa que la de l'espai-temps original, i s'implementen mitjançant la transformació

$$ds^2 \longrightarrow d\bar{s}^2 = \Omega^2(x^\mu) ds^2, \quad (3.11)$$

que rep el nom de *transformació conforme* o de Weyl. Note's que aquesta transformació, en canviar l'element de línia, està canviant la mètrica i consegüentment l'espai-temps. Malgrat això, com que la funció Ω^2 és definida positiva en tots els punts de l'espai-temps, el signe que té l'element de línia transformat és el mateix que té l'element original, de manera que, si bé estem modificant l'espai-temps, no així la seua estructura causal. A més a més, la funció Ω^2 ha de complir que $\Omega^2 \longrightarrow 0$ asimptòticament, operació que apropa els punts de l'infinit a posicions finites en el nou diagrama.

3.4.1 Diagrama de Penrose de l'espai-temps de Minkowski

Per a il·lustrar la tècnica dels diagrames de Penrose construïrem en aquesta secció el diagrama corresponent a l'espai-temps de Minkowski [13]. El punt de partida és la mètrica escrita en termes de les coordenades nul·les: $v = t + r$ i $u = t - r$,

$$ds^2 = -dudv + \frac{(v-u)^2}{4}d\Omega^2, \quad (3.12)$$

amb un rang de validesa $-\infty < v, u < +\infty$. Considerem, aleshores, el canvi a les variables (\bar{v}, \bar{u}) tals que $(v, u) = (\tan \bar{v}, \tan \bar{u})$. En termes d'aquesta dupla, l'element de línia assumeix la forma

$$ds^2 = (2 \cos \bar{u} \cos \bar{v})^{-2} (-4d\bar{u}d\bar{v} + \sin^2(\bar{v} - \bar{u})d\Omega^2). \quad (3.13)$$

Si apliquem la transformació de Weyl amb factor conforme $\Omega^2 = (2 \cos \bar{u} \cos \bar{v})^2$ l'element de línia transformat esdevé

$$d\bar{s}^2 = -4d\bar{u}d\bar{v} + \sin^2(\bar{v} - \bar{u})d\Omega^2. \quad (3.14)$$

Com a conseqüència de la transformació, el rang de les variables \bar{u}, \bar{v} redueix el de les variables originals a $-\pi/2 < \bar{u}, \bar{v} < \pi/2$, és a dir, a un rang finit. En la Figura 4 podem veure representats tant el diagrama original com el diagrama modificat per a la regió físicament rellevant, $r \geq 0$.

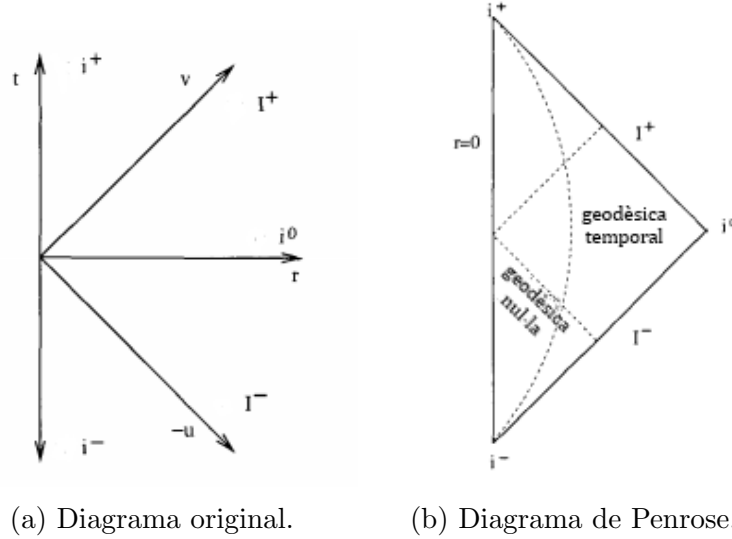


Figura 4: Estructura causal de l'espai-temps de Minkowski. Adaptades de [13].

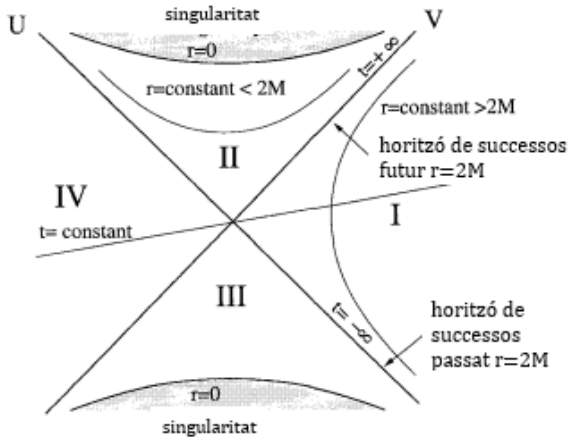
La manera de caracteritzar el diagrama de Penrose és identificant la transformació de les diferents regions asimptòtiques i la forma de les geodèsiques en el diagrama conforme, ja que això determina completament l'estructura causal [13]. Així doncs, els punts i^+ , i^- , i^0 es corresponen, respectivament, amb els infinits futur temporal, passat temporal i espacial, mentre que les rectes I^+ i I^- són els infinits futur i passat nuls. Els dos primers infinits representen el futur i passat remots d'un observador en una posició fixada, el tercer és la posició asimptòtica a un fixat instant de temps, i els dos últims són els punts a l'infinít que cobreix o que ha cobert un raig de llum que passa per l'origen i constitueixen el que es diu *superfícies nul·les*. Per altre costat, les geodèsiques que parteixen del punt i^- seran temporals si apleguen a i^+ i espacials si ho fan a i^0 . En canvi, les geodèsiques nul·les són entrants quan parteixen de I^- i ixents quan van en direcció a I^+ , són sempre rectes perpendiculars a la superfície nul·la associada i l'altura a què s'originen depén del valor de v (si són entrants) o u (si són ixents) que tinguen associat. A més a més, tota geodèsica nul·la ixent es pot obtenir com la reflexió en l'origen d'una determinada geodèsica nul·la entrant, la qual cosa implica que deu ser possible relacionar unívocament els valors de la coordenada u en I^+ amb valors de la coordenada v en I^- .

3.4.2 Diagrama de Penrose de l'espai-temps de Schwarzschild

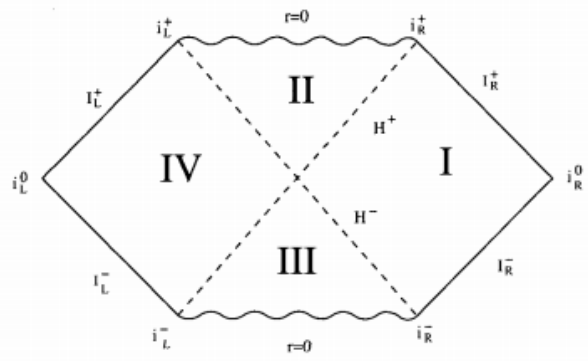
Per la deducció del diagrama de Penrose de l'espai-temps de Schwarzschild és necessària l'obtenció de la seua *extensió maximal*. L'extensió maximal consisteix [12, 13] en la unificació, en una única transformació consistent, de les dues imatges especulars de l'espai-temps, l'existència de la qual explota el fet que la mètrica és estàtica i, per tant, presenta simetria sota inversions temporals i s'efectua emprant les anomenades *coordenades de Kruskal-Szekeres*, $V \equiv 4M e^{\frac{v}{4M}}$ i $U \equiv -4M e^{-\frac{u}{4M}}$, en termes de les quals la mètrica assumeix la forma

$$ds^2 = -\frac{2M e^{-r/2M}}{r} dU dV + r^2 d\Omega^2. \quad (3.15)$$

El resultat és el que apareix en la Figura 5a. L'extensió maximal divideix l'espai-temps en un total de quatre regions [13]: les regions I i II ($U \leq 0$, $V > 0$), que es corresponen, respectivament, amb l'exterior i l'interior del forat negre, i les regions III i IV ($U \geq 0$, $V < 0$), que són la seua imatge especular; les quals estan separades per dos rectes obliques anomenades horitzons.



(a) Diagrama original: extensió maximal.



(b) Diagrama de Penrose.

Figura 5: Estructura causal de l'espai-temps de Schwarzschild. Adaptades de [13].

En particular, l'horitzó que separa les regions I i II és l'horitzó d'esdeveniments futur que ja hem definit amb anterioritat, i aquell que separa les regions I i III rep el nom d'horitzó d'esdeveniments passat i és la imatge especular de l'anterior: al seu interior, qualsevol cos i la llum són inevitablement expulsats cap a l'exterior. Addicionalment, l'espai-temps està delimitat per dues singularitats: la corresponent a la regió II és el forat negre, mentre que la corresponent a la regió III és el forat blanc. Un aspecte molt rellevant de l'extensió maximal [17] és que les singularitats tenen un caràcter manifestament espacial, al contrari de com hauria suggerit una interpretació enganyada de la mètrica original.

Imitant el procediment de l'espai-temps de Minkowski, podem definir la transformació $(V, U) = (4M \tan \bar{V}, 4M \tan \bar{U})$ i el factor conforme $\Omega^2 = (2M)^{-3} r e^{r/2M} (\cos \bar{U} \cos \bar{V})^2$, amb els quals l'element de línia (3.11) esdevé [13]

$$d\bar{s}^2 = -4d\bar{U}d\bar{V} + \frac{r^3 e^{r/2M} (\cos \bar{U} \cos \bar{V})^2}{8M^3} d\Omega^2. \quad (3.16)$$

Aquesta transformació compacta l'espai-temps complet al domini $-\pi/2 \leq \bar{U} + \bar{V} \leq +\pi/2$, $-\pi/2 < \bar{U}, \bar{V} < +\pi/2$, traçant el diagrama de Penrose que apareix en la Figura 5b.

Com que nosaltres estem interessats en els processos derivats de la formació de forats negres, només és físicament rellevant la superfície exterior al cos que ha col·lapsat, que comprén part de les dues primeres regions. Tant és així que en el cas d'un escenari d'asimetria temporal les regions III i IV no existrien, perquè no són físicament accessibles. Llavors, el diagrama de Penrose reduït que descriu un escenari real de col·lapse gravitatori és com el que apareix en la Figura 6 [4]. La regió ombrejada representa el volum interior al cos en col·lapse, la corba ondulada és la singularitat espai-temporal, mentre que la recta H^+ constitueix l'horitzó d'esdeveniments futur, de manera que qualsevol geodèsica nul·la o temporal que creue la frontera H^+ acabarà el seu recorregut inevitablement en la singularitat. Tot i que la complexitat del diagrama és major, els punts de l'infinit tenen el mateix significat que en el cas de l'espai-temps de Minkowski (Figura 4b) i les geodèsiques satisfan les mateixes condicions, però a diferència del cas anterior, la presència d'un l'horitzó té implicacions fonamentals que discutirem al llarg d'aquest treball [13].

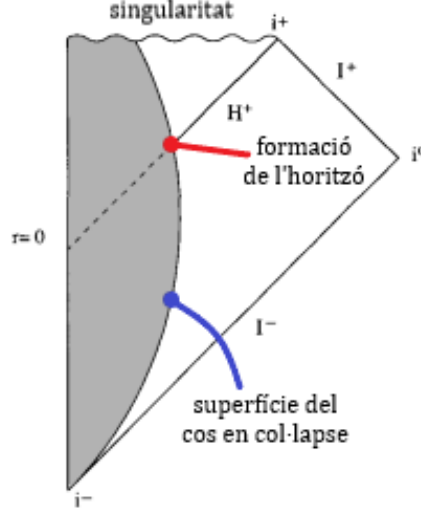


Figura 6: Porció rellevant en un col·lapse gravitatori del diagrama de Penrose de l'espai-temps de Schwarzschild. Adaptada de [13].

4 Fonaments de Teoria Quàntica de Camps

L'efecte Hawking naix de la inclusió de la mecànica quàntica en els escenaris de col·lapse gravitatori i formació d'un forat negre. En les dues seccions anteriors hem analitzat els trets fonamentals de la teoria de la Relativitat General. Ara, en aquesta secció, ens disposem a presentar els elements de la Teoria Quàntica de Camps necessaris per a la posterior formulació de l'efecte Hawking.

4.1 Teoria clàssica de camps

La Teoria Quàntica de Camps és el resultat de la quantització dels camps de matèria en un espai-temps clàssic [18]. Llavors, a fi d'entendre les implicacions d'aquesta quantització és necessari, en primer lloc, construir la teoria clàssica en el marc de la Relativitat Especial.

Considerem un sistema físic discret que ve descrit per un nombre finit de variables q_i , com per exemple podria ser un sistema de N molls interpretant q_i com els desplaçaments de la posició d'equilibri. Imaginem ara que fem tendir a infinit el nombre de molls del nostre sistema, mantenint fixada l'extensió total. En eixa situació, la distància entre molls consecutius tendeix a zero i les variables q_i deixen de ser un conjunt discret per a formar una única variable continua, $q(x)$, que rep el nom de *camp*. En general, un sistema físic continu ve caracteritzat per un nombre finit de camps, $\phi_i(x^\mu)$, i la seua dinàmica ve determinada per l'acció [19]

$$S = \int d^4x \mathcal{L}(\phi_i, \partial_\mu \phi_i; x^\mu), \quad (4.1)$$

on el funcional \mathcal{L} rep el nom de *densitat lagrangiana* (en endavant *Lagrangià*). Note's [18] que la densitat lagrangiana tracta explícitament la posició, x , com el que realment és: un paràmetre al mateix nivell que el temps. A més a més, la forma (4.1) de l'acció és manifestament invariant Lorentz sempre i quan la densitat lagrangiana també ho siga¹⁰, requisit que els camps físics asseguruen.

¹⁰En realitat, no cal que siga invariant Lorentz, sinó simplement que la seua transformació canvie la densitat original únicament en una divergència. Este és el cas dels camps fermiònics.

Les equacions dinàmiques d'un sistema continu es dedueixen aplicant el principi de Hamilton [19]: les trajectòries físiques són aquelles que corresponen a extrems de l'acció. Per tant, si efectuem una pertorbació dels camps, $\delta\phi_i(x^\mu)$, en una certa configuració estacionària, s'ha de verificar $\delta S = 0$. Suposant zero les fluctuacions dels camps en la superfície del volum d'integració, això és únicament possible si la densitat lagrangiana satisfà les equacions de Euler-Lagrange:

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_i)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i} = 0. \quad (4.2)$$

Donat un cert Lagrangiana, les equacions (4.2) ens donen el mecanisme per obtenir les lleis dinàmiques d'evolució dels seus camps.

4.1.1 El camp de Klein-Gordon real

En la derivació de l'efecte Hawking de l'última secció estudiarem l'emissió de partícules sense espí i sense massa. Aquesta tria està feta, a més de per simplicitat, tenint en compte que, si bé és possible construir teories de camps per a partícules d'espí arbitrari, aquelles amb $s > 1$ no tenen una generalització natural a espai-temps corbats [17]. A més a més, és possible demostrar que els resultats per al camp real i sense massa són immediatament generalitzables a un camp massiu i complex [17].

La dinàmica d'una partícula real (sense càrrega) i escalar (sense espí) ve descrita per l'anomenada *equació de Klein-Gordon* ($x \equiv x^\mu$) [18],

$$(\square + m^2) \phi(x) = 0, \quad (4.3)$$

on ϕ és el *camp de Klein-Gordon* real. La solució més general de l'equació de Klein-Gordon real *sense massa* s'expressa com una combinació arbitrària de modes $u_i(x)$ (c.c) de freqüència definida positiva (negativa) [13],

$$\phi(x) = \sum_i [a_i u_i(x) + a_i^\dagger u_i^*(x)], \quad (4.4)$$

que s'implementen a través de la condició

$$\frac{\partial}{\partial t} u_j(t, \mathbf{x}) = -i\omega_j u_j(t, \mathbf{x}), \quad \omega_j > 0 \quad (4.5)$$

i conformen una base ortonormal respecte al producte de Klein-Gordon,

$$(f_1, f_2) = (f_2, f_1)^* \equiv -i \int d^3x (f_1 \partial_t f_2^* - f_2^* \partial_t f_1). \quad (4.6)$$

4.2 Quantització en l'espai-temps de Minkowski

La transició d'una teoria clàssica de la mecànica a una teoria quàntica es produeix quan s'imposen les relacions de commutació canòniques entre els operadors posició i moment [20],

$$[x_i, p_j] = i\hbar \delta_{ij}, \quad (4.7)$$

amb les quals s'està acceptant la fonamental diferència entre el procés de mesura quàntic i el clàssic. En el cas d'una teoria de camps, el procediment per a obtenir aquesta quantització és formalment molt similar. En substitució de l'operador de posició, la variable dinàmica del problema és ara l'operador camp $\phi_i(x)$, i en el lloc de l'operador moment hem de considerar el

moment canònic conjugat del camp, $\pi_j(x) \equiv \partial \mathcal{L} / \partial \dot{\phi}_j$. En conseqüència, quantitzar una teoria clàssica de camps consisteix en imposar les relacions fonamentals [13]

$$\begin{aligned} [\phi_i(\mathbf{x}, t), \pi_j(\mathbf{x}, t)] &= i\hbar \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \delta_{ij}, \\ [\phi_i(\mathbf{x}, t), \phi_j(\mathbf{x}, t)] &= 0 = [\pi_i(\mathbf{x}, t), \pi_j(\mathbf{x}, t)]. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Observem que la quantització canònica és a temps iguals. Les relacions de quantització a temps diferents defineixen els *propagadors de Feynmann*, que determinen com es propaga la interacció deguda a la partícula entre punts diferents de l'espai-temps i asseguruen que els commutadors s'anul·len quan aquestos estan causalment desconnectats, garantint així l'absència d'intercanvi d'informació [18]. La solució, en la imatge de Heisenberg¹¹, assumeix la forma (4.4), però els factors a_i i a_i^\dagger no són pas amplituds, sinó operadors que satisfan l'àlgebra [13]

$$\begin{aligned} [a_i, a_j^\dagger] &= \delta_{ij}, \\ [\mathcal{N}_i, a_j] &= -\hbar^{-1} \delta_{ij} a_j, \quad [\mathcal{N}_i, a_j^\dagger] = \hbar^{-1} \delta_{ij} a_j^\dagger, \end{aligned} \quad (4.9)$$

sent $\mathcal{N}_j \equiv \hbar^{-1} a_j^\dagger a_j$ l'operador nombre d'excitacions del mode j -èssim. De les relacions (4.9) es dedueix que els operadors a_j i a_j^\dagger són, respectivament, els operadors destrucció i creació del camp, és a dir, són tals que, actuant sobre un cert estat de nombre definit en el mode j -èssim, $|n_j\rangle$, retornen l'estat $|(n \mp 1)_j\rangle$ [18]. Es demostra també que la forma de l'expansió (4.4) implica que l'hamiltonià que el teorema de Noether associa al camp (4.4) és definit positiu, cosa que garanteix l'existència d'un estat de buit, $|0\rangle$, tal que [13]

$$a_j |0\rangle = 0, \quad \forall j. \quad (4.10)$$

Definit l'estat de buit a través de (4.10), és possible construir, per aplicacions successives de l'operador creació sobre el mateix, els estats d'una i moltes partícules,

$$\begin{aligned} |1_j\rangle &= \hbar^{-1/2} a_j^\dagger |0\rangle, \\ |n_{j_1}^{(1)}, \dots, n_{j_N}^{(N)}\rangle &= (\hbar^N n^{(1)}! \dots n^{(N)}!)^{-\frac{1}{2}} (a_{j_1}^\dagger)^{n^{(1)}} \dots (a_{j_N}^\dagger)^{n^{(N)}} |0\rangle, \end{aligned} \quad (4.11)$$

i en definitiva l'espai vectorial que els conté, anomenat *espai de Fock*. Notem, per tant, que la possibilitat d'expandir el camp en la forma (4.4) és imprescindible per a la definició del buit, que al seu torn és condició necessària i suficient per a la construcció de l'espai de Fock.

4.3 Quantització en un espai-temps corbat

Fins a aquest moment tot el procés de quantització s'ha efectuat sobre una teoria vàlida en el marc de la Relativitat Especial. No obstant això, sabem que hi ha certs aspectes l'extensió dels quals a la Relativitat General o bé no és possible o bé és excessivament delicada com a conseqüència de l'absència d'una Teoria Quàntica de la Gravetat [17]. El resultat que obtindrem nosaltres per a la radiació Hawking requereix fer certes assumpcions que discutirem a continuació sobre la quantització dels camps en el marc de la Relativitat General.

A causa de simetria sota inversió temporal de \mathcal{M}^4 , la quantització és independent del *temps inercial* t triat per a la definició (4.5). Aleshores, l'expansió del camp també és independent i, en conseqüència, ho són l'hamiltonià, l'estat buit i l'espai de Fock en la seua totalitat. En Relativitat General, però, aquesta afirmació no és pas certa, doncs en general l'espai-temps no

¹¹La imatge de Heisenberg és la que ens garanteix que les solucions mantenen la forma clàssica [20].

presentarà aquesta mateixa simetria i no existirà una divisió natural en modes de freqüència positiva i negativa. Únicament quan l'espai-temps és *estacionari*¹² és possible trobar una generalització de la condició (4.5) amb una definició unívoca dels modes de freqüència positiva [13]:

$$\xi^\mu \nabla_\mu u_j = -i\omega_j u_j, \quad \omega_j > 0, \quad (4.12)$$

on ξ^μ és un vector de Killing temporal que permet definir, de manera natural, un temps inercial o *temps de Killing* t : $\xi^\mu \nabla_\mu t = 1$ amb què es recupera la definició (4.5). Note's [13] que l'expressió (4.12) depèn directament de la presència d'una simetria en la component temporal de la mètrica i, per tant, no és realitzable quan la mètrica no és ni estàtica ni estacionària, casos en els quals no serà possible donar una expansió en sèrie del camp. Però com que la construcció de l'espai de Fock i la interpretació dels estats de partícula està lligada a l'existència d'aquesta expansió i a la possibilitat de definir els operadors creació i destrucció de manera no ambigua, apleguem a la conclusió que la interpretació mateixa del que és una partícula i del que és el buit quàntic està directament connectada a l'estructura geomètrica de l'espai-temps. És a dir, el que designem per buit quàntic i el que designem per partícula en un espai-temps corbat és, en general, diferent en diferents geometries, segons com canvie la forma de l'expansió (4.4). Aquesta propietat l'explotarem en l'últim apartat i és a la base de l'emissió de partícules en els forats negres.

A més dels modes de freqüència definida, la transició a la Relativitat General també requereix adaptar l'equació de moviment (4.3) i el producte intern (4.6) a través del principi d'equivalència forta [13]. Així doncs, el camp de Klein-Gordon sense massa satisfà l'equació d'ones lliures

$$\square \phi \equiv \nabla_\mu \nabla^\mu \phi = 0, \quad (4.13)$$

i els modes de freqüència definida hauran de ser ortonormals respecte al producte de Klein-Gordon

$$(f_1, f_2) \equiv -i \int_\Sigma d\Sigma^\mu (f_1 \partial_t f_2^* - f_2^* \partial_t f_1), \quad (4.14)$$

on Σ és una *hipersuperfície de Cauchy* de l'elecció de la qual no depèn el resultat. El concepte de superfície de Cauchy quedarà més clar en l'última secció del treball.

4.3.1 Transformacions de Bogolubov

En la discussió precedent hem aplegat a la conclusió que si l'espai-temps no és estacionari, aleshores no és possible definir de forma natural modes de freqüència positiva. L'escenari físic que origina la producció de partícules és, però, aquell no estacionari que estudia el forat negre en tot el seu procés de formació i no només en la seua configuració final [4]. Quan l'espai-temps és no estacionari existeix, encara així, un context en què és possible construir solucions de l'equació (4.13) de la forma (4.4): si l'espai-temps presenta *regions asimptòtiques estacionàries* [17]. Aquesta és la situació física que tractarem en endavant.

Considerem un espai-temps de formació de forat negre amb dues regions asimptòticament estacionàries: la regió “in”, prèvia al col·lapse, i la regió “out”, posterior al col·lapse. En aquestes regions, el camp de Klein-Gordon admet una solució en la forma (4.4) [13]:

$$\phi(x) = \sum_i [a_i^{in} u_i^{in}(x) + a_i^{in\dagger} u_i^{in*}(x)] \quad (4.15)$$

¹²Això és, que és possible trobar un set de coordenades que fan la mètrica independent de la corresponent coordenada temporal. Tota geometria estàtica és estacionària, però no ocorre a la inversa [2].

per la regió “in” i

$$\phi(x) = \sum_i [a_i^{out} u_i^{out}(x) + a_i^{out\dagger} u_i^{out*}(x)] \quad (4.16)$$

per a la regió “out”. Aquests modes satisfan les relacions d’ortonormalitat

$$(u_i^{in(out)}, u_j^{in(out)}) = \delta_{ij}, \quad (u_i^{in*(out*)}, u_j^{in*(out*)}) = -\delta_{ij}, \quad (u_i^{in(out)}, u_j^{in*(out*)}) = 0, \quad (4.17)$$

però res no ens suggereix que els modes o els operadors de creació i destrucció siguin els mateixos en ambdues regions. Dit d’altra manera, no tenim cap motiu per a suposar que l’espai-temps no s’haja vist modificat per la fase de col·lapse, sinó tot el contrari [17]. L’equació de Klein-Gordon (4.13) sí és vàlida per qualsevol punt de l’espai-temps i, per extensió, també ho és el camp que descriu el sistema. Aquesta propietat és, de fet, la que garanteix que les solucions (4.15) i (4.16) són ambdues possibles, i també implica l’existència d’un operador que connecta els modes en ambdues regions de l’espai temps, amb la subsegüent expansió en sèrie [13]

$$u_i^{out} = \sum_k (\alpha_{ik} u_k^{in} + \beta_{ik} u_k^{in*}). \quad (4.18)$$

Els coeficients α_{ik} i β_{ik} reben el nom de *coeficients de Bogolubov*, es poden obtenir a partir de les relacions d’ortonormalitat (4.17):

$$\alpha_{ij} = (u_i^{out}, u_j^{in}), \quad \beta_{ij} = -(u_i^{out}, u_j^{in*}) \quad (4.19)$$

i verifiquen la relació de completesa

$$\sum_k (\alpha_{ik} \alpha_{jk}^* - \beta_{ik} \beta_{jk}^*) = \delta_{ij}. \quad (4.20)$$

Addicionalment, l’acció de les relacions (4.17) sobre (4.16) permet escriure $a_j^{out} = (\phi, u_j^{out})$. Si hi substituïm ara les equacions (4.15) i (4.18) podem expandir els operadors aniquilació i creació d’una de les regions en termes dels de l’altra

$$a_i^{out} = \sum_k (\alpha_{ik}^* a_k^{in} - \beta_{ik}^* a_k^{in\dagger}). \quad (4.21)$$

Aquesta última equivalència és l’extensió lògica de (4.18) i naix també de l’existència d’una transformació que connecta ambdues regions de l’espai-temps [4]. D’acord amb el raonament precedent, si el procés de col·lapse altera les característiques de l’espai-temps també modificarà les propietats de la quantització dels camps, en particular, els estats de buit. Això és senzill de veure a través de la relació (4.21). Si denotem els estats de buit per $|in\rangle$ i $|out\rangle$, podem definir-los formalment mitjançant les condicions [13]

$$a_j^{in} |in\rangle = a_j^{out} |out\rangle = 0, \quad \forall j. \quad (4.22)$$

Avaluem ara el valor esperat de l’operador nombre $\mathcal{N}_j^{out} \equiv \hbar^{-1} a_j^{out\dagger} a_j^{out}$ sobre l’estat $|in\rangle$:

$$\begin{aligned} \langle in | \mathcal{N}_j^{out} | in \rangle &= \hbar^{-1} \langle in | a_j^{out\dagger} a_j^{out} | in \rangle = \\ &= \hbar^{-1} \langle in | \sum_l (-\beta_{jl} a_l^{in}) \sum_k (-\beta_{jk}^* a_k^{in\dagger}) | in \rangle = \sum_k |\beta_{jk}|^2. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Si qualsevol dels coeficients β_{jk} és diferent de zero aleshores també ho és el valor esperat del nombre de partícules contingudes en l’estat $|in\rangle$, mentre que si efectuem este mateix càlcul

per a l'operador nombre de la regió “in” obtenim, trivialment, $\langle in | \mathcal{N}_j^{in} | in \rangle = 0$. Seguint la nostra interpretació dels operadors creació-destrucció, l'expressió (4.23) implica no només que $|in\rangle \neq |out\rangle$, sinó que l'estat $|in\rangle$ és, en la regió espai-temporal “out”, un estat amb contingut en partícules. Considerem, llavors, que la regió “in” correspon a la geometria exterior a una estrella i que el camp es troba inicialment en l'estat quàntic $|in\rangle$. Tenint en compte el fet que, en la imatge de Heisenberg, els estats quàntics no evolucionen, en l'espai-temps exterior al forat negre format després del col·lapse (regió “out”), el camp vindrà caracteritzat pel mateix estat quàntic $|in\rangle$ [8]. En conseqüència, un observador en la regió “in” no mesurarà cap flux de partícules, però un observador en la regió “out” mesurarà un nombre de partícules diferent de zero sempre i quan algun $\beta_{jk} \neq 0$ i ho interpretarà, necessàriament, com una emissió espontània de partícules per part del forat negre [4].

Podem anar encara un pas més enllà, doncs invertint la relació (4.21) es pot demostrar que l'expressió de l'estat $|in\rangle$ en termes de l'estat $|out\rangle$ ve donada per [13]

$$|in\rangle = \langle out | in \rangle \exp \left(-\frac{1}{2\hbar} \sum_{ijk} \beta_{ji}^* \alpha_{ik}^{-1} a_i^{out\dagger} a_j^{out\dagger} \right) |out\rangle. \quad (4.24)$$

Quan els coeficients β_{ij} s'anul·len, l'exponencial esdevé la identitat, reflectint que ambdós estats de buit són equivalents i no hi ha emissió de partícules. De la mateixa manera, com que els operadors de creació, quan desenvolupem en sèrie l'exponencial de (4.24), apareixen en quantitats parelles, trobem que l'amplitud de probabilitat de produir un nombre senar de partícules és zero quan els coeficients són diferents de zero,

$$\langle 1_{j_1}, \dots, 1_{j_n} | in \rangle = 0, \quad n \text{ senar}, \quad (4.25)$$

cosa que es pot interpretar dient que les partícules es produeixen per parells. En particular, en una teoria escalar complexa el nombre de partícules i antipartícules creat és el mateix, això és, l'emissió ocorre mitjançant la producció de parells partícula-antipartícula [13, 17].

5 Efecte Hawking

En la secció anterior hem presentat els ingredients necessaris per a calcular l'espectre de radiació d'un forat negre per emissió espontània, també anomenat *efecte Hawking*. En particular, hem demostrat que són requisits tant la quantització dels camps (escalars) en l'espai-temps que descriu el sistema com l'existència d'una fase de col·lapse amb dues regions asimptòticament estacionàries en les quals siga possible definir els estats de partícules i en què els estats de buit quàntic siguin diferents. En aquesta última secció plantejarem el model més simplificat d'un escenari amb aquestes característiques i analitzarem les conseqüències físiques que s'hi deriven. Trobarem, això no obstant, que les modificacions del resultat introduïdes per un col·lapse més realista deixen invariants les principals conclusions físiques de l'escenari simplificat.

5.1 Espai-temps de Vaidya

La solució més senzilla de les equacions d'Einstein (2.11) que descriu la formació d'un forat negre ve donada per *l'espai-temps de Vaidya*, l'element de línia del qual és [13]

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M(v)}{r} \right) dv^2 + 2drdv + r^2 d\Omega^2. \quad (5.1)$$

Note's que aquest element de línia coincideix exactament amb el corresponent a l'espai de Schwarzschild en el gauge d'Eddington-Finkelstein avançat (3.10) quan $M(v) = M = cte$. En el cas en què $M(v) \neq cte$, l'espai-temps de Vaidya representa, però, una situació sensiblement diferent. Com que $M(v)$ depèn exclusivament v , es demostra que l'element de línia (5.1) és solució exacta de les equacions de camp (2.11) per a un tensor energia-moment [13]

$$T_{vv} = \frac{1}{4\pi r^2} \frac{dM(v)}{dv}. \quad (5.2)$$

Aquest tensor descriu un flux de radiació esfèric íntegrament entrant, ja que només la component associada a la coordenada nul·la entrant és diferent de zero. En una situació de col·lapse realista, però, existiran fluxos de radiació i matèria tant entrants com ixents, així com deformacions no esfèriques [2].

En l'aproximació que nosaltres estem tractant, podem imaginar el flux de radiació iniciat en un cert instant de temps, v_i , i finalitzat en un cert instant posterior, v_f . L'espai-temps es divideix, aleshores, en tres regions: una regió de Minkowski buida per a $v < v_i$, una regió intermèdia de col·lapse compresa entre $v_i < v < v_f$ i una regió final de tipus forat negre de Schwarzschild per a $v > v_f$ [4]. Les regions inicial i final són estacionàries i clarament diferents, reflectint la situació general descrita en la secció anterior en què el procés de col·lapse altera el tipus de geometria estacionària que domina asimptòticament. Com que nosaltres no estem interessats en la regió intermèdia, sinó en la comparativa de les regions inicial i final, considerarem a més que la separació entre els instants v_i i v_f tendeix a zero¹³. En este límit, el forat negre serà el resultat de la formació d'una ona de xoc de radiació entrant en l'instant v_0 i la funció $M(v)$ satisfarà

$$M(v) = M\Theta(v - v_0), \quad (5.3)$$

motiu pel qual l'espai-temps global del procés serà simplement la unió de les dues porcions estacionàries al llarg de la línia $v = v_0$, tal i com es mostra en la Figura 7 [13]. D'acord amb la notació de la secció anterior, és clar que haurem d'interpretar la regió de Minkowski ($v < v_0$) com la regió “in” i el forat negre final ($v > v_0$) com la regió “out”.

Considerem també el camp quàntic de matèria associat a aquest flux de radiació més simple possible: el camp de Klein-Gordon sense massa. La motivació física d'aquesta tria es va discutir amb detall en la secció precedent i es pot entendre com una qüestió de consistència amb la simplicitat del raonament global. Fruit de la simetria esfèrica de l'espai-temps, resulta convenient adoptar l'expansió en sèrie d'harmònics esfèrics $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ per al camp de Klein-Gordon [13]

$$\phi(x) = \sum_{l,m} \frac{f_l(t,r)}{r} Y_{lm}(\theta, \varphi). \quad (5.4)$$

Substituint aquesta expressió en l'equació de moviment (4.13) obtenim, en la regió “in”,

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} \right) f_l(t,r) = 0, \quad (5.5)$$

i en la regió “out” (amb r^* la coordenada tortuga (3.9)),

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial r^{*2}} - V_l(r) \right) f_l(t,r) = 0, \quad V_l(r) = \left(1 - \frac{2M}{r} \right) \left(\frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{2M}{r^3} \right). \quad (5.6)$$

¹³Esta aproximació pot semblar molt forta, però notem que els resultats no depenen explícitament de res associat a la regió intermèdia [13]

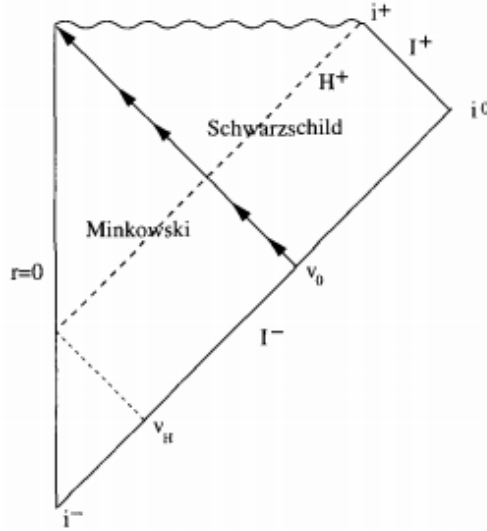


Figura 7: Diagrama de Penrose d'un forat negre de Schwarzschild produït per una ona de xoc nul·la i esfèrica en l'instant $v = v_0$. Extreta de [13].

L'aproximació que farem en endavant serà la de menysprear el potencial en tots els punts de l'espai-temps. Encara que puga semblar una aproximació dolenta, troba justificació en el fet que la física que nosaltres estudiarem és rellevant només en les proximitats de l'horitzó, $r_{out} = 2M$, sobre el qual el potencial $V_l(r)$ s'anul·la [13]. A més a més, el càlcul dels coeficients de Bogolubov és possible només si els modes tenen freqüència definida, raó per la qual podem suposar dependència harmònica per a les solucions, $f(t, r) = e^{-i\omega t} f(r)$, sent $t \equiv t_{in(out)}$ [8]. Amb aquestes hipòtesis, la funció $f(t, r)$ no depèn del moment angular l i les expressions (5.5) i (5.6) adopten l'equació d'oscil·ladors harmònics simples:

$$\frac{d^2 f(r)}{dr^2} + \omega^2 f(r) = 0, \quad (5.7)$$

en a la regió “in” i

$$\frac{d^2 f(r)}{dr^{*2}} + \omega^2 f(r) = 0 \quad (5.8)$$

per a la regió “out”. Naturalment, les solucions de (5.7) i (5.8) són les exponencials $e^{\pm i\omega r}$ i $e^{\pm i\omega r^*}$, amb la qual cosa les funcions $f(t, r)$ representen ones entrants, $e^{-i\omega v}$, i ixents, $e^{-i\omega u}$. Amb tot, mentre la variable v és general del problema, la variable u depèn explícitament de la regió considerada, pel que tindrem $u \equiv u_{in} = t_{in} - r_{in}$ en la regió “in” i $u \equiv u_{out} = t_{out} - r_{out}^*$ en la regió “out”.

5.2 Càlcul dels coeficients de Bogolubov

L'expressió (4.23) mostra que per avaluar el nombre de partícules mesurades per un observador exterior al forat negre és necessari calcular els coeficients de Bogolubov, cosa per a la qual cal identificar els modes de freqüència definida d'ambdues regions i assignar una hipersuperfície de Cauchy a cadascuna. Segons la definició (4.12), només podem parlar de modes de freqüència definida en les regions en què existeix un temps de Killing associat. En l'espai-temps que nosaltres estem considerant, resulta natural associar a l'espai de Fock “in” la coordenada temporal en I^- i a l'espai de Fock “out” la coordenada temporal en I^+ , doncs aquestes constitueixen les dues regions més asimptòtiques [13]. Qualitativament, els modes vindran definits per les

línies normals a la superfície nul·la que estableix la coordenada temporal, que seran en general combinacions lineals d'ones entrants i ixents. De la Figura 7 observem que les línies normals a la superfície I^- són línies coordenades de v , mentre en la superfície I^+ ho són de u . Per tant [13], i tenint en compte la simetria esfèrica, els modes de la regió “in” són ones esfèriques purament entrants¹⁴,

$$u_{\omega}^{in} = \frac{1}{4\pi\sqrt{\omega}} \frac{e^{-i\omega v}}{r}, \quad (5.9)$$

amb freqüència definida positiva respecte a I^- , i els de la regió “out” en són purament ixents amb freqüència definida positiva respecte a I^+ ,

$$u_{\omega}^{out} = \frac{1}{4\pi\sqrt{\omega}} \frac{e^{-i\omega u_{out}}}{r}. \quad (5.10)$$

Ambdós modes satisfan, a més, les condicions d'ortonormalitat (4.17), però adaptades al fet que ω és un subíndex continu:

$$(u_{\omega}^{in}, u_{\omega'}^{in}) = (u_{\omega}^{out}, u_{\omega'}^{out}) = \delta(\omega - \omega'). \quad (5.11)$$

En el càlcul dels productes (5.11) hem assumit implícitament que les superfícies I^- i I^+ en què estan definits els modes són també superfícies de Cauchy. El que és més encara, per a associar els espais de Fock “in” i “out” als temps naturals de I^- i I^+ és necessari que aquestes dues superfícies siguin superfícies de Cauchy [4]. El concepte de superfície de Cauchy és gràficament fàcil d'entendre: una superfície es diu de Cauchy si un escombratge que parteix de la mateixa permet cobrir tot el diagrama de Penrose corresponent. Segons aquesta definició, la superfície I^- de la Figura 7 és una superfície de Cauchy, però no així la superfície I^+ , que és incapaç de cobrir la regió interna a l'horitzó. La conseqüència d'això és que els modes u_{ω}^{out} no són complets i la correcta construcció de l'espai de Fock “out” requereix l'addició dels modes u_{ω}^H que creuen l'horitzó H^+ [13]. Dit d'altra manera, la presència del forat negre genera una ambigüitat en la definició de l'estat de buit futur i en la subsegüent construcció de l'espai de Fock que obliga a considerar com a superfície de Cauchy $I^+ \cup H^+$, malgrat que en els punts sobre H^+ no existeix una elecció natural de la coordenada temporal. Notem que aquesta mateixa problemàtica tindria lloc amb l'estat de buit passat si consideràrem la presència del forat blanc, el qual podem suprimir per incoherència física [17]. A pesar d'això, es pot demostrar que el nostre resultat final és independent de la contribució dels modes u_{ω}^H , doncs aquests són rellevants únicament quan estudiem la producció de partícules en veïnatge de l'horitzó i nosaltres l'estudiarem en punts de l'espai-temps allunyats del mateix [4].

Una volta caracteritzats els modes i la seua estructura matemàtica, hem d'obtenir el coeficient de Bogolubov $\beta_{\omega, \omega'}$ a partir de la relació (4.19),

$$\beta_{\omega, \omega'} = - (u_{\omega}^{out}, u_{\omega'}^{in*}) = i \int_{I^-} dv r^2 d\Omega (u_{\omega}^{out} \partial_v u_{\omega'}^{in} - u_{\omega'}^{in} \partial_v u_{\omega}^{out}). \quad (5.12)$$

Per simplicitat hem triat¹⁵ com a superfície de Cauchy I^- , però això ens obliga a cercar l'expressió dels modes u_{ω}^{out} en termes de les coordenades de la regió I^- o, el que és el mateix, a propagar-los enrere en el temps per trobar la seua forma sobre I^- . Això s'aconsegueix imposant dues condicions de regularitat: la continuïtat de la mètrica en $v = v_0$ i la regularitat de les solucions en $r = 0$ [13]. Desenvolupant la primera condició s'aplega a una relació de la forma

$$u_{out}(u_{in}) = u_{in} - 4M \ln \frac{|v_0 - 4M - u_{in}|}{4M}, \quad (5.13)$$

¹⁴No confondre la notació $u_{in(out)}$, que designa les coordenades, amb $u_{\omega}^{in(out)}$, que designa els modes.

¹⁵Recordem que el resultat és indiferent a aquesta tria [13].

que garanteix la continuïtat de ds^2 en la superfície $v = v_0$. La segona condició és més subtil i implica que tota línia coordinada de v es reflecteix en l'origen i emergeix com una línia coordinada de u , doncs en cas contrari les solucions (5.9) i (5.10) serien singulars en $r = 0$. Dit d'altra manera, ha d'existir una relació entre els valors de u en I^+ i els de v en I^- . En particular, és possible generar l'horitzó H^+ amb una corba v_H concreta, la qual cosa implica que, per a $v < v_H$, els modes u_ω^{out} han de tindre una contribució addicional deguda a la coordenada v , però no així per a $v > v_H$. Aquest raonament es pot entendre més fàcilment mitjançant la Figura 7: per a $v > v_H$, les línies coordenades de v es reflecteixen de l'origen directament en direcció a la singularitat, de manera que no generen cap contribució apreciable, lluny de l'horitzó, als valors de u_{out} ; en canvi, quan $v < v_H$, les geodèsiques nul·les entrants sí que generen geodèsiques nul·les ixents que finalitzen en I^+ i poden ser detectades per un observador [13].

Aplicant l'equació (5.13) per a $u_{out}(v)$ sobre l'expressió genèrica (5.10) es troba que en el límit $u_{out} \rightarrow -\infty$ ($v \rightarrow -\infty$) el terme lineal és dominant i els modes u_ω^{out} continuen tenint freqüència definida,

$$u_\omega^{out} \approx -\frac{1}{4\pi\sqrt{\omega}} \frac{e^{-i\omega v}}{r}, \quad (5.14)$$

però en el límit $u_{out} \rightarrow +\infty$ ($v \rightarrow v_H$) sobreviuen tots els termes i el resultat és fruit d'una combinació de modes de freqüència positiva i negativa respecte al temps inercial en I^- [13],

$$u_\omega^{out} \approx -\frac{1}{4\pi\sqrt{\omega}} \frac{e^{-i\omega(v_H - 4M \ln \frac{v_H - v}{4M})}}{r} \Theta(v_H - v). \quad (5.15)$$

La diferència fonamental entre les expressions (5.14) i (5.15) és la presència d'un terme logarítmic en la segona. Com veurem en el pròxim apartat, és justament aquest terme logarítmic el responsable de l'emissió de partícules. Note's que aquest factor és generat per la diferent dependència en les coordenades en diferents punts de l'espai-temps ($u_{out} \neq u_{in}$) i és, per tant, una conseqüència directa del canvi de geometria en el col·lapse. De la mateixa manera, l'argument del logaritme conté una dependència explícita en l'horitzó d'esdeveniments i és precisament en v_H quan aquest esdevé singular, condició sense la qual el flux de partícules seria intranscendent [13]. L'expressió (5.15) és, per tant, clau per a entendre el resultat final, perquè és l'única que posa de manifest que la formació d'un horitzó d'esdeveniments és imprescindible per a l'emissió de partícules. És a dir, conté una dependència amb l'horitzó d'esdeveniments i és el terme que conté aquesta dependència el que va a donar forma a l'espectre de radiació.

5.2.1 Paquets d'ona

Amb les expressions (5.9) i (5.15) per als modes de freqüència definida podríem, en un principi, aplicar l'expressió (5.12) per a calcular el coeficient de Bogolubov i avaluar la producció de partícules mitjançant l'adaptació de (4.23) al continu:

$$\langle in | \mathcal{N}_\omega^{out} | in \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega' |\beta_{\omega\omega'}|^2. \quad (5.16)$$

No obstant això, es pot demostrar que el resultat d'aquesta integral és infinit [13]. El motiu és que aquesta quantitat representa el valor esperat de partícules produïdes per emissió espontània en I^+ a una freqüència ω definida, cosa que, d'acord amb el principi de Heisenberg, comporta una indeterminació absoluta en el temps. Per tant, mitjançant (5.16) estem realment considerant una ràtio d'emissió finita durant un període infinit de temps, és a dir, en qualsevol instant u_{out} [4]. Nosaltres, però, estem interessats en avaluar el flux de partícules a temps avançats

($u_{out} \rightarrow +\infty$), en què la configuració és estacionària i, hipotèticament, estariem realitzant l'experiment, i no en instants de temps arbitraris, de manera que la quantitat (5.16) no representa allò que volem determinar. Hem de considerar, aleshores, la substitució de les ones esfèriques deslocalitzades per paquets d'ona.

Els paquets d'ona es construeixen com transformades de Fourier dels modes u_{ω}^{out} de freqüència definida respecte a I^+ [13],

$$u_{jn}^{out} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} \int_{j\epsilon}^{(j+1)\epsilon} d\omega e^{2\pi i \omega n / \epsilon} u_{\omega}^{out}. \quad (5.17)$$

D'acord amb les propietats de la transformada, els paquets del feix u_{jn}^{out} estan picats al voltant de $u_{out} = 2\pi n / \epsilon$ amb una amplada $2\pi / \epsilon$ i es troben molt centrats en la freqüència $\omega_j = j\epsilon$ si ϵ és xicotet. Per tant, el valor esperat $\langle in | \mathcal{N}_{jn}^{out} | in \rangle$ s'ha d'interpretar ara com el nombre de partícules mesurat per un detector en un rang ϵ al voltant de la freqüència ω_j quan es manté en funcionament un interval de temps $2\pi / \epsilon$ (finit) en l'instant $u_{out} = 2\pi n / \epsilon$ [13].

El resultat que nosaltres volem determinar és el valor de $\beta_{jn, \omega'}$ en el límit $u_{out} \rightarrow +\infty$, és a dir, quan $n \rightarrow +\infty$. El que s'observa analitzant la Figura 7 és que els modes amb valor elevat de n (corresponents a valors de u_{out} grans) estaran molt desplaçats cap a i^+ i, per tant, quan els traslladem enrere en el temps, després de la seua reflexió en l'origen, estaran concentrats al voltant de v_H [13]. En conseqüència, per avaluar els coeficients $\beta_{jn, \omega'}$ amb n gran podem fer servir l'expressió (5.15) per als modes de freqüència definida en I^+ en termes de les variables en I^- . Note's que hem discretitzat els modes "out", però no els modes en "in", de manera que els coeficients de Bogolubov són, en este cas,

$$\beta_{jn, \omega'} = - (u_{jn}^{out}, u_{\omega'}^{in*}) \quad , \quad \alpha_{jn, \omega'} = (u_{jn}^{out}, u_{\omega'}^{in}). \quad (5.18)$$

Comencem pel coeficient $\beta_{jn, \omega'}$. Tenint en compte que en els límits $v \rightarrow \pm\infty$ els modes u_{jn}^{out} s'anul·len [13], podem integrar per parts en dv el segon terme de la definició del producte intern (4.14) per a escriure

$$\beta_{jn, \omega'} = 2i \int_{I^-} dv r^2 d\Omega u_{jn}^{out} \partial_v u_{\omega'}^{in}. \quad (5.19)$$

Substituint ara les expressions (5.9) i (5.17) queda

$$\beta_{jn, \omega'} = \frac{-1}{2\pi\sqrt{\epsilon}} \int_{-\infty}^{v_H} dv \int_{j\epsilon}^{(j+1)\epsilon} d\omega e^{2\pi i n \omega / \epsilon} \sqrt{\frac{\omega'}{\omega}} e^{-i\omega(v_H - 4M \ln \frac{v_H - v}{4M})} e^{-i\omega'v}, \quad (5.20)$$

que podem reescriure introduint la variable $x \equiv v_H - v$ com

$$\beta_{jn, \omega'} = \frac{-e^{-i\omega'v_H}}{2\pi\sqrt{\epsilon}} \int_0^{+\infty} dx \int_{j\epsilon}^{(j+1)\epsilon} d\omega e^{2\pi i n \omega / \epsilon} \sqrt{\frac{\omega'}{\omega}} e^{-i\omega(v_H - 4M \ln \frac{x}{4M})} e^{i\omega'x}. \quad (5.21)$$

Com que nosaltres estem assumint $\epsilon \ll 1$ [13], la integral sobre la freqüència es pot efectuar immediatament considerant que $\omega \approx \omega_j = (j + 1/2)\epsilon$ en els termes que són independents de n i de x . El resultat és

$$\begin{aligned} \beta_{jn, \omega'} &\approx \frac{-e^{-i(\omega' + \omega_j)v_H}}{\pi\sqrt{\epsilon}} \sqrt{\frac{\omega'}{\omega_j}} \int_0^{+\infty} dx \int_{j\epsilon}^{(j+1)\epsilon} d\omega e^{iL\omega} e^{i\omega'x} = \\ &= \frac{-e^{-i(\omega' + \omega_j)v_H}}{\pi\sqrt{\epsilon}} \sqrt{\frac{\omega'}{\omega_j}} \int_0^{+\infty} dx e^{iL\omega_j} \frac{\sin \epsilon L/2}{L} e^{i\omega'x}, \end{aligned} \quad (5.22)$$

sent $L \equiv 2\pi n/\epsilon + 4M \ln(x/4M)$. Operant de manera del tot equivalent es dedueix també l'expressió d' $\alpha_{jn,\omega'}$ [13]:

$$\alpha_{jn,\omega'} \approx \frac{-e^{-i(\omega_j - \omega')v_H}}{\pi\sqrt{\epsilon}} \sqrt{\frac{\omega'}{\omega_j}} \int_0^{+\infty} dx e^{iL\omega_j} \frac{\sin \epsilon L/2}{L} e^{-i\omega'x}. \quad (5.23)$$

Notem que aquestes dues expressions difereixen únicament en un factor de mòdul unitat i en el signe de la segona exponencial en la integral. Això ens permet escriure ambdós coeficients en termes de la funció

$$I(\omega') \equiv \int_0^{+\infty} dx e^{-i\omega'x} \frac{\sin \epsilon L/2}{L} e^{iL\omega_j}, \quad (5.24)$$

agafant $\omega' > 0$ per a $\alpha_{jn,\omega'}$ i $\omega' < 0$ per a $\beta_{jn,\omega'}$.

5.3 Espectre de radiació

Per a obtenir l'espectre de radiació hem d'avaluar la integral (5.24). Amb tal propòsit, apliquem el teorema dels residus a la seua extensió analítica, emprant el circuit complex de la Figura 8. Hem assumit, sense pèrdua de generalitat, que el tall del logaritme llau sobre l'eix real negatiu [13]. La convergència del terme $e^{-i\omega'z} = e^{-i\omega'x}e^{\omega'y}$, sent $z \equiv x + iy$, determina per on hem de tancar el circuit. Quan $\omega' > 0$ el camí d'integració s'ha de tancar per baix de manera tal que $y < 0$. Tanmateix, quan $\omega' < 0$ el camí s'ha de tancar per dalt i $y > 0$. Com que no hi ha pols a l'interior del circuit, el teorema dels residus ens diu que

$$I(\omega' \gtrless 0) = - \int_{\gamma_{\mp}} dz e^{-i\omega'z} \frac{\sin \epsilon L_z/2}{L_z} e^{iL_z\omega_j}, \quad (5.25)$$

sent L_z l'extensió analítica de $L_x \equiv L$. Al llarg dels dos camins, γ_{\mp} , la variable z és complexa pura, $z = \mp iy$, amb $0 \leq y < +\infty$. En conseqüència,

$$L_z = \frac{2\pi n}{\epsilon} + 4M \ln \frac{\mp iy}{4M} = \frac{2\pi n}{\epsilon} + 4M \left(\ln \frac{y}{4M} \mp \frac{i\pi}{2} \right) = L_y \mp 2M\pi i. \quad (5.26)$$

Aplicant sobre (5.26) el límit $\epsilon \ll 1$ es verifica que $L_y \gg 2M\pi$, de manera que $\sin(\epsilon L_z/2)/L_z \approx \sin(\epsilon L_y/2)/L_y$, que és independent del camí triat. Amb aquestes consideracions, podem escriure l'expressió (5.25) en la forma

$$I(\omega' \gtrless 0) \approx \pm i e^{\pm 2\pi M\omega_j} \int_0^{+\infty} dy e^{\mp \omega'y} \frac{\sin \epsilon L_y/2}{L_y} e^{iL_y\omega_j}. \quad (5.27)$$

L'únic terme de la integral restant que canvia segons el camí és $e^{\mp \omega'y}$. Note's, però, que el canvi en el signe de ω d'un camí cap a l'altre fa aquest terme també igual per als dos camins. Llavors, l'única diferència significativa entre els dos circuits d'integració és el coeficient exponencial generat per la presència del logaritme, i és, per tant, aquest logaritme el responsable de la forma que pren l'espectre.

Les equacions (5.22), (5.23) i (5.24) i el resultat (5.27) permeten escriure la igualtat

$$|\alpha_{jn,\omega'}| = \frac{|I(\omega' > 0)|}{|I(\omega' < 0)|} |\beta_{jn,\omega'}| = e^{4\pi M\omega_j} |\beta_{jn,\omega'}|. \quad (5.28)$$

Així mateix, adaptant la relació de completesa (4.20) a una suma en l'índex continu ω es té

$$\int_0^{\infty} d\omega' (|\alpha_{jn,\omega'}|^2 - |\beta_{jn,\omega'}|^2) = 1. \quad (5.29)$$

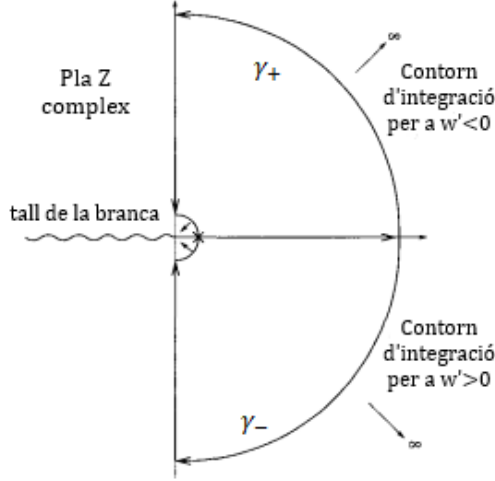


Figura 8: Circuit d'integració per al càlcul dels coeficients de Bogolubov. Adaptada de [13].

Emplaçant-hi la relació (5.28) i fent servir la definició (5.16) obtenim, per al valor esperat de la producció de partícules:

$$\langle in | \mathcal{N}_{jn}^{out} | in \rangle = \int_0^{+\infty} d\omega' |\beta_{jn,\omega'}|^2 = \frac{1}{e^{8\pi M\omega_j} - 1}, \quad (5.30)$$

que coincideix amb una distribució de Bose-Einstein a la *temperatura de Hawking* [13]

$$T_H = \frac{\hbar}{8\pi k_B M}. \quad (5.31)$$

6 Discussió dels resultats

Els resultats (5.30) i (5.31) constitueixen allò a què volíem aplegar en aquest treball. És necessària, però, una interpretació física que ens permeta concloure que la consistència dels resultats no és arbitrària.

Per tal de convèncer la comunitat científica del seu descobriment, Hawking [5] va plantejar, al poc de la publicació del paper original ([4]), una interpretació més intuïtiva de l'origen de l'emissió de partícules. D'acord amb el resultat (4.25) de que la producció ve en duets partícula-antipartícula en veïnatge de l'horitzó, Hawking va suggerir que en el temps finit entre la producció del parell virtual i la seua aniquilació, l'antipartícula seria absorbida pel forat negre i la partícula travessaria, per efecte túnel, la barrera de potencial gravitatori materialitzant-se com a una partícula mesurable. Seguint aquesta interpretació, Parikh i Wilczek [6] calcularen la temperatura de Hawking en l'aproximació semiclàssica de l'efecte túnel obtenint un resultat correcte. Cal emfatitzar, però, que aquesta interpretació no estudia les propietats de l'espectre de radiació, sinó que tracta d'explicar com aquestes partícules són creades i emeses en proximitat del forat negre. El resultat que nosaltres hem obtingut, al contrari, analitza les característiques del flux de partícules en una regió allunyada del forat negre i és conseqüència directa de la formació de l'horitzó d'esdeveniments durant el col·lapse: és aquest el que modifica l'espai de Fock i, a causa d'això, redefineix el que nosaltres, com a observadors, anomenem estat buit i estats de partícules. El fet que l'espectre obtingut siga de tipus bosònic es troba en acord amb el camp quàntic que hem assignat al sistema. Si haguerem emprat un camp fermiònic, el

resultat obtingut seria formalment el mateix, però amb la distribució de Fermi en substitució de la de Bose-Einstein [13]. Per altre costat, la distribució obtinguda és també la corresponent a la radiació tèrmica de bosons emesa per un cos negre. Operant de manera independent, es pot comprovar que la matriu densitat del sistema no presenta cap tipus de *correlació*, tret característic de la radiació de tipus tèrmic [13].

Hom podria pensar, llavors, que el resultat obtingut és una conseqüència fictícia de les simplifications efectuades sobre la geometria de l'espai-temps. Ha sigut també demostrat que l'aparició d'un espectre de radiació és intrínseca a la formació del forat negre, amb independència de la geometria que porta a la seua formació [13]. Consideracions ulteriors, com la inclusió de la barrera de potencial gravitatori o la imaginació d'un escenari més realista, mostren que l'espectre és de *cos gris* [3, 8] i que la temperatura de Hawking es veu modificada en presència de càrrega i/o moment angular [6], però es reconcilien sempre en l'existència de l'espectre de radiació, fins i tot mesurat en el laboratori amb sistemes de forats negres anàlegs [7]¹⁶. En particular, l'expressió (5.31) es generalitza immediatament com [4, 8]

$$T_H = \frac{\hbar}{2\pi k_B} \kappa, \quad (6.1)$$

on κ és la *gravetat superficial* de l'horitzó, el valor explícit de la qual depén del tipus de forat negre.

La demostració que el forat negre té una temperatura no nul·la permet obtenir una generalització del segon principi de la termodinàmica [3]. Sota la hipòtesis que l'entropia del forat negre ha de ser finita, Bekenstein va demostrar que la radiació emesa, independentment de la massa, càrrega o moment angular del forat negre, és principalment radiació tèrmica [5]. En conseqüència, si el forat negre desapareix degut a l'evaporació¹⁷ i és certa la hipòtesis de Bekenstein, de l'estat pur inicial només queda l'estat mescla associat a la radiació total emesa. Malgrat això, el principi d'evolució unitària de la mecànica quàntica exigeix que un estat pur com el que estem considerant nosaltres ha de mantindre's pur en la seua evolució temporal, fet que entra, per tant, en immediata contradicció amb la termalitat de l'espectre. Aquest resultat s'interpreta com que el forat negre destrueix informació sobre el seu estat inicial al llarg de la seua evaporació i es coneix amb el nom de *paradoxa de la pèrdua d'informació* [9, 10]. Únicament la massa, la càrrega i el moment angular, gràcies a les lleis de conservació clàssiques, sobreviuen al procés de destrucció i és per aquest motiu que són les variables que determinen íntegrament la geometria i la termodinàmica d'un forat negre [3, 5].

En la seua formulació original, Hawking [4] va justificar que el resultat final és també independent de l'estat quàntic inicial considerat, però irrealitzable sense la formació d'un horitzó d'esdeveniments. Tal i com Unruh [21] va argumentar, la radiació Hawking no és una conseqüència ni de la formació de la singularitat ni del col·lapse en si mateix, sinó concretament de la constitució d'un horitzó d'esdeveniments. Unruh demostrà que l'emissió ocorre una volta assolit l'estat estacionari final, doncs, en cas que l'efecte tinguera lloc en la fase de col·lapse, la radiació emesa podria superar la radiació entrant i evaporar el forat negre abans ni tan sols de la seua formació. No és difícil veure que aquesta condició és equivalent a dir que l'efecte Hawking apareix només una vegada s'ha format un horitzó d'esdeveniments i viceversa, que la formació de l'horitzó d'esdeveniments implica l'efecte Hawking, i es tracta d'una propietat essencial perquè permet extrapolar el resultat a forats negres més realistes, no estacionaris, encara que no

¹⁶El raonament original de Hawking no justificava la supressió de certs modes de freqüència elevada que podrien ser determinants en el resultat teòric final. Conegut amb el nom de *problema transplanquà*, aquest fet motivà Unruh a plantejar experiments en forats negres anàlegs.

¹⁷L'extinció del forat negre és una extrapolaració teòrica dels resultats de Hawking en un règim semiclàssic a una escala en què deuria dominar la Gravetat Quàntica. Per tant, és una hipòtesi no corroborada

sapiguem efectuar el càlcul explícitament. Efectivament, la dependència en l'horitzó d'esdeveniments és manifesta al llarg de tot el nostre càlcul i en particular en l'equació (6.1), doncs κ és la gravetat superficial sobre l'horitzó. Com hem mostrat, l'única contribució a l'espectre de radiació és la deguda al terme logarítmic. Recordem, però, que el logaritme prové directament de la forma (5.15) dels modes i és on es troba continguda la dependència explícita en l'horitzó d'esdeveniments, amb la qual cosa és anàleg afirmar que el terme logarítmic és responsable de l'efecte Hawking a que ho és l'horitzó d'esdeveniments. De fet, podríem plantejar-nos el mateix càlcul suposant que els modes u_{jn}^{out} tenen freqüència definida en I^- i aplegaríem a que no existeix cap espectre de radiació. Per tant, la formació d'un horitzó d'esdeveniments en el col·lapse és fonamental per a l'aparició d'efecte Hawking, doncs són els termes originats pel mateix horitzó els que configuren l'espectre d'emissió espontània.

7 Conclusions

Throughout this work we have introduced, step by step, the necessary elements of General Relativity (sec. 2,3) and Quantum Field Theory (sec. 4) to deduce the Hawking radiation spectrum from a Schwarzschild black hole .

We have proposed (sec. 5) a simple model of gravitational collapse that evolves from a void Minkowski spacetime to the formation of a Schwarzschild black hole, which has led us to find that, due to the quantization of the matter (scalar) fields in this scenario and the formation of an event horizon, the quantum vacuum states at the start and at the end are different. In particular, for an observer lying in the final region of the collapse, this must be interpreted as the existence of a spontaneous flow of thermal radiation coming from the black hole that guides it to its evaporation. Once we have obtained the spectrum, we have shown (sec. 6) that this flow is only possible when the collapse ends to a black hole, since it explicitly depends on the formation of an event horizon, and that it is thermal independently of the nature of the black hole and of the interpretation of the internal mechanism that generates the emitted particles. Finally, we have reasoned how this emission violates the unitary evolution principle of quantum mechanics, introducing the information loss paradox, and we have established the connection between the radiation and the thermodynamics of the black hole.

We can conclude, then, that the Hawking effect is of great relevance in the field of theoretical physics, since not only it is transcendental for the comprehension of black hole evaporation and the necessity of a Quantum Gravity Theory, but also for the formulation of its thermodynamic laws. As well, it is one of the few effects analytically calculable and which have been experimentally measured in the context of quantum black hole theory.

Conclusions

Al llarg d'aquest treball hem introduït, pas per pas, els elements necessaris de la teoria de la Relativitat General (sec. 2,3) i de la Teoria Quàntica de Camps (sec. 4) per deduir l'espectre de radiació Hawking d'un forat negre de Schwarzschild.

Hem plantejat (sec. 5) un model senzill de col·lapse gravitatori que evoluciona des d'un espai-temps de Minkowski buit fins a la formació d'un forat negre de Schwarzschild, amb el qual hem trobat que, fruit de la quantització dels camps (escalars) de matèria en aquest escenari i de la formació d'un horitzó d'esdeveniments, els estats de buit quàntic inicial i final són diferents. En particular, per un observador en la regió final del col·lapse, aquesta característica s'interpreta com l'existència d'un flux espontani de radiació tèrmica provinent del forat negre

que el guia a la seua evaporació. Una volta obtingut l'espectre, hem mostrat (sec. 6) que aquest flux només és possible quan el col·lapse desemboca en un forat negre, doncs depén explícitament de la formació d'un horitzó d'esdeveniments, i que és tèrmic independentment de la naturalesa del forat negre i de la interpretació del mecanisme intern que origina les partícules emeses. Finalment, hem argumentat com aquesta emissió viola el principi d'evolució temporal de la mecànica quàntica, tot introduint la paradoxa de la pèrdua d'informació, i hem establert la connexió entre la radiació i la termodinàmica dels forats negres.

Podem concloure, llavors, que l'efecte Hawking té una gran rellevància en el marc de la física teòrica, doncs no només és transcendental per la comprensió de l'evaporació dels forats negres i la necessitat d'una Teoria Quàntica de la Gravetat, sinó també per a la formulació de les seues lleis termodinàmiques. Endemés, és un dels pocs efectes analíticament calculables i que han sigut experimentalment mesurats en el context de la teoria quàntica dels forats negres.

Referències

- [1] Antxon Alberdi. *Los agujeros negros: Las fuerzas extremas de la gravedad*. RBA Contenidos Editoriales y Audiovisuales, S.A.U., 2015.
- [2] Bernard Schutz. *A first course in general relativity*. Cambridge university press, 2009.
- [3] Ted Jacobson. Introductory lectures on black hole thermodynamics. *Institute for Theoretical Physics University of Utrecht*, 1996.
- [4] Stephen W Hawking. Particle creation by black holes. *Communications in mathematical physics*, 43(3):199–220, 1975.
- [5] Stephen W Hawking. The quantum mechanics of black holes. *Scientific American*, 236(1):34–42, 1977.
- [6] Maulik K Parikh and Frank Wilczek. Hawking radiation as tunneling. *Physical Review Letters*, 85(24):5042, 2000.
- [7] Juan Ramón Muñoz De Nova, Katrine Golubkov, Victor I Kolobov, and Jeff Steinhauer. Observation of thermal hawking radiation and its temperature in an analogue black hole. *Nature*, 569(7758):688–691, 2019.
- [8] Jennie Traschen. An introduction to black hole evaporation. *arXiv preprint gr-qc/0010055*, 2000.
- [9] Shahar Hod. The hawking paradox and the bekenstein resolution in higher-dimensional spacetimes. *Nuclear Physics B*, 933:299–305, 2018.
- [10] Shahar Hod. Discrete black-hole radiation and the information loss paradox. *Physics Letters A*, 299(2-3):144–148, 2002.
- [11] Ray d'Inverno. *Introducing Einstein's Relativity*. Oxford University Press, 1995.
- [12] Antonio Font. *Apunts de l'assignatura Relativitat i Cosmologia de 4t curs en el grau de Física*. Universitat de València, 2021.
- [13] Alessandro Fabbri and José Navarro-Salas. *Modeling black hole evaporation*. World Scientific, 2005.

- [14] David Tong. *Dynamics and relativity*, 2012.
- [15] Alberto Casas. *La materia oscura: El elemento más misterioso del universo*. RBA Contenidos Editoriales y Audiovisuales, S.A.U., 2015.
- [16] David Galadí-Enríquez. *La evolución del universo: Los siete primeros trillones de minutos*. RBA Contenidos Editoriales y Audiovisuales, S.A.U., 2015.
- [17] Robert M Wald. *General relativity*. University of Chicago press, 2010.
- [18] Antonio Pich. *Apunts de l'assignatura Teoria Quàntica de Camps de 4t curs en el grau de Física*. Universitat de València, 2021.
- [19] María A Lledó. *Apunts de l'assignatura Mecànica II de 2n curs en el grau de Física*. Universitat de València, 2019.
- [20] David J Griffiths and Darrell F Schroeter. *Introduction to quantum mechanics*. Cambridge University Press, 2018.
- [21] William G Unruh. Origin of the particles in black-hole evaporation. *Physical Review D*, 15(2):365, 1977.