Estrutura de Dados 2
Roteiro de Laboratório 9 – Árvores Balanceadas

1 Objetivo

O objetivo deste laboratório é estudar, implementar e avaliar alguns dos diferentes métodos propostos para se manter uma **árvore binária de busca** (*binary search tree* – *BST*) razoavelmente balanceada. Essa propriedade é absolutamente essencial para as BSTs pois o desempenho de todas as suas operações (busca, inserção, etc) é totalmente dependente da altura da árvore.

2 BSTs com entrada aleatória

Uma BST com implementação padrão, isto é, que não cuida de balanceamento, é totalmente suscetível à ordenação da entrada (sequência de inclusão dos elementos na árvore). Como já visto anteriormente, o pior caso possível para a BST padrão ocorre quando a sequência de inserções é uma sequência ordenada (crescente ou decrescente) de chaves. Nesse caso, a árvore fica degenerada, com altura N, aonde N é o número de elementos inseridos (assumindo que não há repetição de chaves).

Para combater esse problema de forma simples, basta embaralhar a sequência de entrada, de forma similar ao que foi feito para o algoritmo de *quick sort*, garantindo assim um limite assintótico probabilístico de $N \lg N$. A maior desvantagem desse método, além do trabalho adicional de embaralhar a entrada, é a necessidade de termos todas as chaves que devem ser inseridas já no início. (Muitas aplicações de BSTs alternam as operações de inserção e consulta – também deleção – e nem sempre todas as chaves são conhecidas já no início.)

Uma BST totalmente balanceada possui altura $h = \lfloor \lg N \rfloor$, o limite inferior de todos os métodos de balanceamento de BSTs. Uma BST padrão construída com uma entrada aleatória possui uma altura esperada da ordem de $h \sim 4.311 \ln N$, conforme resultado obtido por Reed em 2003. (Veja os slides 16 e 17 da Aula 10.)

Para o experimento realizado nessa seção, não é estritamente necessário ler uma sequência de chaves de entrada e a seguir embaralhá-la. Uma forma ainda mais simples, conforme visto no Laboratório 02, é simplesmente gerar N números aleatórios e os inserir na BST na ordem que eles forem gerados. Isso garante as mesmas propriedades da BST descritas no parágrafo anterior.

Exercício 0. Implemente (ou recupere do Laboratório 02) uma BST padrão conforme descrição abaixo:

- O nó da BST é somente uma chave (um número inteiro positivo) e um ponteiro para os filhos da esquerda e direita.
- Implemente funções que criam e destroem uma BST.
- Implemente uma função que calcula e retorna a altura de uma BST.
- Implemente uma função que insere uma chave dada em uma BST.
- Implemente um programa cliente que gera $N = 10^6$ chaves aleatórias e as insere na BST. A seguir, o programa calcula a altura da árvore e exibe na tela. Repita esses passos 10 vezes, calculando a altura média da BST.

- Avalie a altura média obtida pelo seu cliente segundo os limites inferior e superior descritos acima.

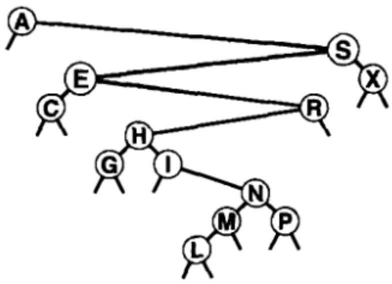
Obs.: Toda as funções que operam sobre a BST podem ser implementadas de forma recursiva ou iterativa, como você preferir. Entretanto, as versões recursivas tendem a ser mais simples.

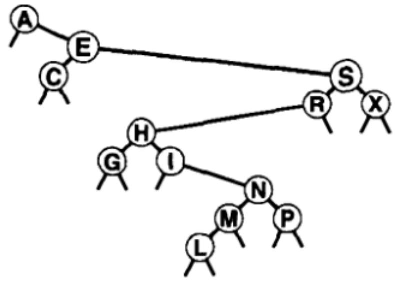
3 Inserção na raiz em BSTs

Na implementação da BST padrão, todo nó novo é inserido no final da árvore. No entanto, isso não é essencial mas somente uma consequência do algoritmo recursivo de inserção. Nessa seção, vamos considerar um método de inserção alternativo, aonde qualquer nova chave sempre é inserida na raiz da BST.

Para fazer a inserção na raiz funcionar, são necessárias duas operações básicas: *rotação à direita* e *rotação à esquerda.* Essas operações são transformações fundamentais em BSTs e essencialmente permitem trocar o papel da raiz e de um dos filhos da raiz, *preservando a ordenação da BST.*

Uma *rotação à direita* envolve a raiz e o seu filho da *esquerda.* A figura abaixo mostra um exemplo de uma BST antes e depois da rotação à direita sobre o nó S:



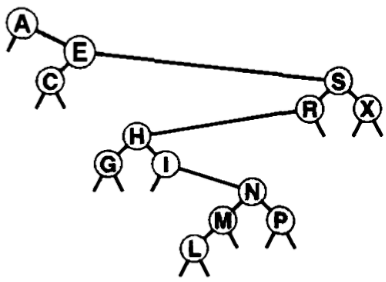


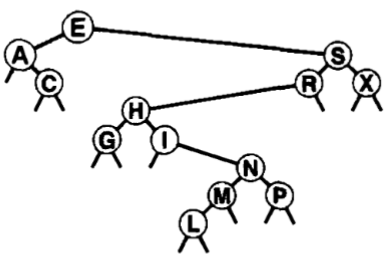
Essa operação pode ser implementada de forma bastante simples, como mostra a função abaixo:

```
BST* rotate_right(BST *n) {
    BST *t = n->l;
    n->l = t->r;
    t->r = n;
    return t;
}
```

Como pode ser visto no código acima, uma rotação é uma mudança local na árvore, envolvendo somente dois nós e três ponteiros.

Uma *rotação à esquerda* envolve a raiz e o o seu filho da *direita.* A figura abaixo mostra um exemplo de uma BST antes e depois da rotação à esquerda sobre o nó A:

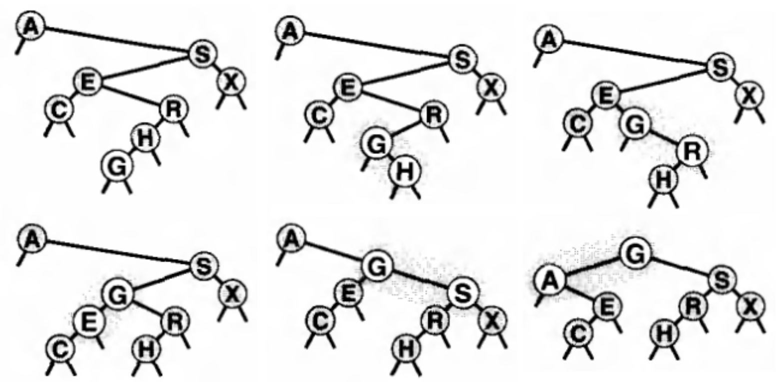




As operações de rotação nos levam a uma implementação recursiva para inserção na raiz: insira a nova chave na subárvore apropriada para manter a ordenação da BST e a seguir realize uma rotação apropriada para trazer a nova chave para a raiz. O algoritmo recursivo de inserção pode ser descrito como abaixo.

```
Entrada: nó n da BST, chave k a ser inserida.
Caso base: n é nulo. Retorne um novo nó com a chave k.
Passo recursivo:
    Se k é menor que a chave do nó:
        Insira recursivamente a chave na subárvore da esquerda.
        Realize uma rotação à direita, atualizando o ponteiro n.
    Se k é maior que a chave do nó:
        Insira recursivamente a chave na subárvore da direita.
        Realize uma rotação à esquerda, atualizando o ponteiro n.
    Retorne n.
```

A figura abaixo mostra o resultado de inserir G na BST superior esquerda, com rotações recursivas após a inserção para trazer o novo nó G para a raiz. Esse processo é equivalente a inserir G nas folhas e a seguir realizar uma sequência de rotações para trazer o nó para a raiz.



Exercício 1. Modifique a sua implementação do Exercício 0 conforme descrição abaixo:

- Implemente e teste as operações de rotação à direita e à esquerda.
- Implemente a inserção na raiz segundo o algoritmo descrito acima.
- Utilize o mesmo programa cliente do Exercício 0 para inserir (na raiz) as $N = 10^6$ chaves aleatórias e calcular a altura média da BST após 10 repetições.
- Compare a altura média obtida nesse exercício com a altura média obtida no Exercício 0.

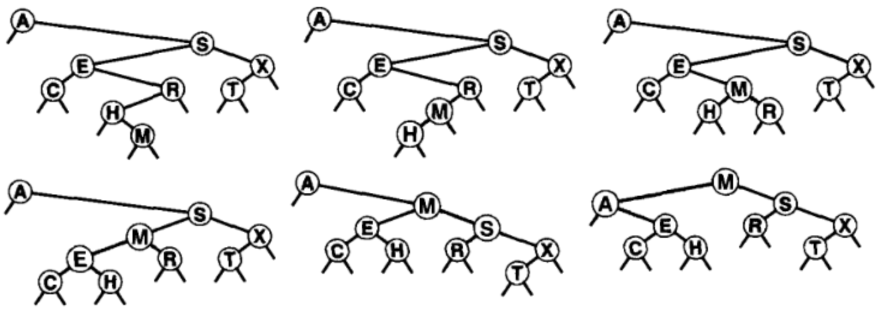
4 Particionamento e balanceamento de BSTs

4.1 Particionamento

Uma operação de *particionamento* da BST com parâmetro k rearruma a árvore de forma a colocar o k-ésimo menor elemento na raiz. Essa operação pode ser implementada de forma muito similar à definição recursiva de inserção na raiz vista na seção anterior: se colocarmos (recursivamente) o nó desejado na raiz de uma das subárvores, podemos então tornar esse nó a raiz geral com uma única rotação. O algoritmo abaixo ilustra esse método.

```
Entrada: nó n da BST, ordinal k da chave que deve ir para a raiz.
Seja t o tamanho da subárvore da esquerda de n.
Se t > k:
    Particione recursivamente a subárvore da esquerda de n com parâmetro k.
    Realize uma rotação à direita, atualizando o ponteiro n.
Se t < k:
    Particione recursivamente a subárvore da direita de n com parâmetro k-t-1.
    Realize uma rotação à esquerda, atualizando o ponteiro n.
Retorne n.
```

A figura abaixo ilustra o particionamento da BST superior esquerda pela chave *mediana* M, usando rotações (recursivas) da mesma forma que na inserção na raiz.



Um ponto fundamental do algoritmo de particionamento apresentado acima é a necessidade de se saber o *tamanho* de uma subárvore começando em um determinado nó. Isso pode ser feito incluindo um novo campo `size` em cada nó da BST e atualizando esse campo a cada operação que modifique uma subárvore. Veja um exemplo de código no slide 24 da Aula 10 e no código correspondente disponibilizado no AVA.

4.2 Balanceamento

Em um cenário ideal, nós gostaríamos que todas as BSTs fossem perfeitamente balanceadas, de forma a garantir um desempenho da ordem de $\lg N$ para qualquer busca na árvore. Até agora, nós nos baseamos na *aleatoriedade da entrada* para termos uma garantia probabilística de que as BSTs não são muito desequilibradas.

Um outro método para se produzir BSTs melhores é rebalanceá-las periodicamente de forma explícita. É possível, por exemplo, balancear uma BST em tempo linear, usando um algoritmo recursivo como abaixo.

```
Entrada: nó n da BST.
Se tamanho da árvore em n é < 2: retorne n.
Execute o particionamento no nó n, com k = (tamanho de n) / 2.
Balanceie recursivamente a subárvore da esquerda de n.
Balanceie recursivamente a subárvore da direita de n.
Retorne n.
```

Embora um balanceamento como acima possa ser muito custoso em alguns casos, em outros ele vale a pena, por tornar a árvore totalmente balanceada. Um exemplo de tal uso é quando sabemos que vai ser necessário realizar uma grande quantidade de buscas na BST. Assim, o custo do balanceamento fica *amortizado* entre as buscas.

Exercício 2. Modifique a sua implementação do Exercício 1 conforme descrição abaixo:

- Modifique a implementação do nó da BST para incluir um campo de tamanho.
- Modifique a implementação das rotações e da função de inserção para ajustar corretamente o tamanho das subárvores a cada operação. *Obs.: Cuidado a tentar acessar o campo de tamanho de nós nulos. A forma mais segura é implementar uma função de tamanho que cuida desse caso. Veja a função* `size()` *no slide 24 da Aula 10.*
- Implemente uma função de particionamento conforme algoritmo descrito na seção 4.1.
- Implemente uma função de balanceamento conforme algoritmo descrito na seção 4.2.
- Utilize o mesmo programa cliente do Exercício 1 para inserir (na raiz) as $N = 10^6$ chaves aleatórias. A seguir balanceie a BST. Meça a altura antes e depois do balanceamento.
- Analise a altura da árvore balanceada para se certificar que a sua implementação está correta.

5 BSTs aleatórias

Até agora, para manter as BSTs razoavelmente balanceadas nós assumimos que as chaves são inseridas em uma ordem aleatória. A principal consequência dessa suposição é que cada nó da árvore tem a mesma probabilidade de estar na raiz, e essa propriedade também vale (recursivamente) para as subárvores. Vamos agora introduzir aleatoriedade diretamente no algoritmo de inserção, *sem fazer nenhuma suposição sobre a ordem em que os itens são inseridos.*

A ideia é simples: para inserir um novo nó em uma árvore com N nós, o novo nó deve aparecer na raiz com probabilidade $1/(N + 1)$. Assim, tomamos uma decisão randomizada de usar inserção na raiz com essa probabilidade. Caso contrário, usamos a inserção randomizada recursivamente na subárvore apropriada. Essas ideias estão resumidas no algoritmo abaixo:

```
Entrada: nó n da BST, chave k a ser inserida.
Caso base: n é nulo. Retorne um novo nó com a chave k.
Passo recursivo:
    Com probabilidade = 1 / ((tamanho de n) + 1),
        retorne o resultado da inserção na raiz em n.
    Se k é menor que a chave do nó:
        Execute recursivamente inserção randomizada na subárvore da esquerda.
    Se k é maior que a chave do nó:
        Execute recursivamente inserção randomizada na subárvore da direita.
    Ajuste o tamanho de n.
    Retorne n.
```

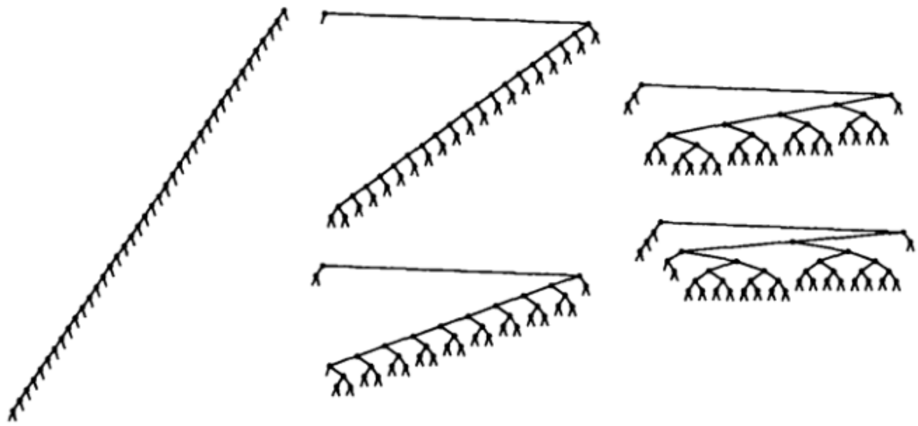
Exercício 3. Modifique a sua implementação do Exercício 2 conforme descrição abaixo:

- Implemente o algoritmo de inserção aleatória descrito acima.
- Utilize o mesmo programa cliente do Exercício 2 para inserir (na raiz) as $N = 10^6$ chaves aleatórias e calcule a altura média das BSTs após 10 execuções.
- Modifique o cliente para inserir a sequência ordenada de chaves $0, \ldots, N - 1$. Calcule novamente a altura média das BSTs após 10 execuções.
- Compare as alturas encontradas em cada um dos clientes.

6 *Splay trees* (extra)

Splay trees são um tipo de BST criada por Sleator e Tarjan em 1985. Todas as operações de uma BST são combinadas com uma única operação básica, chamada de *splaying*. Fazer *splaying* para um certo elemento da BST rearranja a árvore de forma que o nó do elemento vira a nova raiz da árvore. Note que, embora isso pareça inserção na raiz, a operação de *splaying* também pode ser aplicada durante uma busca, por exemplo.

A inserção de chaves ordenadas em uma *splay tree* gera uma árvore degenerada. No entanto, as operações de *splaying* são muito eficientes em balancear uma BST. Algumas poucas operações de busca são suficientes para levar a um bom balanceamento, como pode ser visto na figura abaixo.



Exercício 4.

- Leia a descrição de *splay tree* em `https://en.wikipedia.org/wiki/Splay_tree`.
- Veja um exemplo de uma implementação em Java de uma *splay tree* em `https://algs4.cs.princeton.edu/33balanced/SplayBST.java.html`.
- Modifique a sua implementação do Exercício 3 para incluir a operação de *splaying*.
- Utilize o seu programa cliente para inserir a sequência ordenada de chaves $0, \ldots, N-1$. A seguir, remova as 10 menores chaves, de $0, \ldots, 9$. Vá acompanhando como fica a altura da árvore a cada remoção.
- *Obs. 1:* Para esse exercício é suficiente usar um N menor, por exemplo, $N = 10^4$.
- *Obs. 2:* Como não há aleatoriedade nesse algoritmo, não é necessário repetir o experimento várias vezes.