

Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Departamento de Engenharia Elétrica
Laboratório de Controle Digital

Experimento 2 - Linearização e Discretização de Sistemas

15 de dezembro de 2022

1 Introdução

Processos térmicos são frequentemente encontrados na indústria em geral. Exemplos disto são os fornos industriais, as centrais de ar-condicionado, estufas, chocadeiras, câmaras de refrigeração, etc.

O processo térmico a ser estudado é um Reator de tanque com agitação contínua (CSTR - *continuous stirred tank reactor*), que consiste em um recipiente onde ocorre uma reação química a uma temperatura controlada por um fluido que circula por envoltório numa jaqueta térmica.

O CSTR pode ser utilizado, por exemplo, como um reator químico, onde dois ou mais componentes estão reagindo para produzir um ou mais produtos. Frequentemente essa reação deve ocorrer a uma certa temperatura, que deve ser mantida constante ao manipular o fluxo do fluido de aquecimento pela jaqueta.

O objetivo deste experimento é verificar os conceitos de modelagem, através da construção do modelo matemático do sistema de secagem de grãos. A partir do modelo obtido, serão aplicadas técnicas de linearização ao sistema, a fim de obter um sistema linear invariante no tempo (LTI), em torno de um ponto de operação, que represente aproximadamente o modelo do sistema. Finalmente, um modelo discreto será construído a partir do modelo linear obtido.

2 Modelagem de Sistemas

A modelagem de um sistema é baseada não só no conhecimento técnico, como também no bom senso e experiência. Para facilitar, o processo de modelagem de um sistema pode ser subdividido em três fases distintas, que serão descritas em seguida.

- **Fase 1: Descrição do problema**

Esta é a fase em que os passos iniciais são dados, através da estruturação do problema físico, e da intenção do uso do modelo (predição, controle, etc). Deve-se buscar, sempre que possível, dividir o sistema em subsistemas menores, e verificar as relações existentes. Também devem ser enumeradas quais as variáveis são importantes, tanto para entrada como saída do sistema. Relações de causa e efeito devem ser localizadas e indicadas. O resultado final desta fase é um diagrama em blocos que descreve o sistema.

- **Fase 2: Relações entre variáveis**

Nesta fase, deve-se examinar os subsistemas obtidos na fase anterior, formando as relações entre as variáveis e as constantes. Aqui são aplicadas leis da natureza e equações físicas básicas para relacionar tais variáveis. Muitas vezes, são necessárias aproximações e/ou idealizações para se chegar às equações.

- **Fase 3: Modelo em espaço de estados**

Finalmente, a obtenção de uma representação em espaço de estados é feita escolhendo-se variáveis de estado apropriadas, expressando suas derivadas temporais como funções das variáveis de estado e das entradas, e expressando a saída como função das variáveis de estado e das entradas. Em outras palavras, dado o vetor de estados x , que contém as

variáveis de estado escolhidas, deve-se agrupar as equações obtidas na fase 2 na seguinte forma:

$$\dot{x} = f(x, u, t) \quad (1)$$

$$y = h(x, u, t) \quad (2)$$

2.1 Modelo do Reator de Tanque com Agitação Contínua

2.1.1 Descrição do Sistema

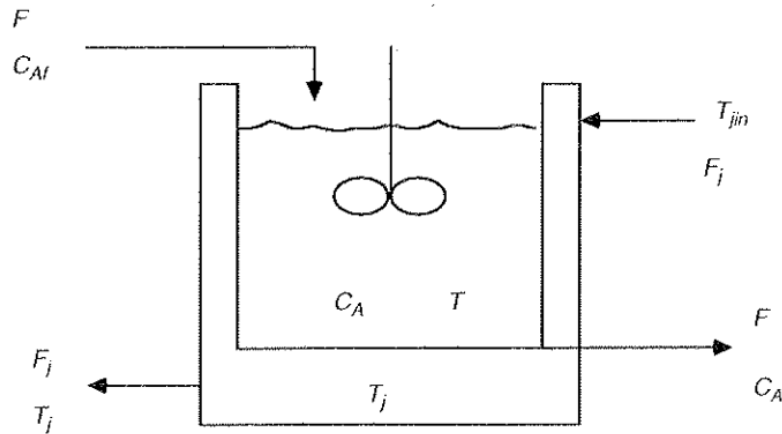


Figura 1: Reator de tanque com agitação contínua (CSTR)

Considere o sistema da figura 1, onde ocorre uma reação de primeira ordem $A \rightarrow B$, a uma temperatura regulada por troca de calor com um fluido contido em uma jaqueta ao redor do tanque.

A substância é adicionada no tanque a uma vazão F , temperatura T_f e concentração C_{Af} , e retirada com a mesma vazão F , temperatura T e concentração C_A . O fluido de aquecimento é adicionado na jaqueta a uma vazão F_j e temperatura T_{ji} , e retirado com uma vazão F_j e temperatura T_j .

Dessa forma, as variáveis F , C_{af} , T_f e T_j são entradas do sistema, enquanto C_a é a variável que se deseja controlar.

2.1.2 Equações

Algumas suposições devem ser feitas para simplificar a formulação matemática do problema:

1. Não há mudança de fase dos fluidos;
2. O volume, densidade e capacidade calorífica dos fluidos dentro do tanque e da jaqueta são constantes;
3. Se houver mais de uma substância do mesmo tanque, assume-se que estão perfeitamente misturadas;

A	Área da superfície de troca de calor
C_A	Concentração da substância A no reator
C_{Af}	Concentração da substância A na alimentação
c_p	Capacidade calorífica
F	Vazão volumétrica
k_0	fator pré-exponencial
R	Constante dos gases ideais
r	Taxa de reação
C_{Af}	Concentração da substância A na alimentação
t	Tempo
T	Temperatura no reator
T_f	Temperatura na alimentação
T_j	Temperatura na jaqueta
U	Coefficiente global de transferência térmica
V	Colume do tanque
ΔE	Energia de ativação
ΔH	Calor de reação
ρ	Densidade

4. As entradas manipuláveis são F , C_{Af} , T_f e T_j
5. A taxa de transferência de calor entre a jaqueta e o tanque é expressa pela equação $Q = UA(T_j - T)$, onde U é o coeficiente de transferência de calor e A é a área da superfície em que ocorre a transferência de calor.
6. A taxa de reação é expressa pela equação de Arrhenius:

$$r = k_o \exp\left(\frac{-\Delta E}{RT}\right) C_A \quad (3)$$

Os parâmetros do sistema são:

Para obter um modelo matemático do sistema, são utilizados os princípios da conservação da massa e energia, estabelecido de forma esquemática nos diagramas em seguida.

$$\begin{bmatrix} \text{Variação de massa} \\ \text{total no sistema} \\ \text{por unidade de tempo} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{Fluxo de massa} \\ \text{entrando no sistema} \\ \text{por unidade de tempo} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \text{Fluxo de de massa} \\ \text{saindo do sistema} \\ \text{por unidade de tempo} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \text{Variação na concentração} \\ \text{da substância} \\ \text{por unidade de tempo} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{Concentração do fluxo} \\ \text{entrando no sistema} \\ \text{por unidade de tempo} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \text{Concentração do fluxo} \\ \text{saindo do sistema} \\ \text{por unidade de tempo} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \text{Substância produzida} \\ \text{na reação} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{l} \text{Variação de energia} \\ \text{total no sistema} \\ \text{por unidade de tempo} \end{array} \right] &= \left[\begin{array}{l} \text{Fluxo de energia total} \\ \text{entrando no sistema} \\ \text{por unidade de tempo} \end{array} \right] - \left[\begin{array}{l} \text{Fluxo de de energia total} \\ \text{saindo do sistema} \\ \text{por unidade de tempo} \end{array} \right] \\ &+ \left[\begin{array}{l} \text{Calor} \\ \text{entrando no sistema} \\ \text{por unidade de tempo} \end{array} \right] - \left[\begin{array}{l} \text{Trabalho executado} \\ \text{pelo sistema} \\ \text{por unidade de tempo} \end{array} \right] \end{aligned}$$

Para o tanque, obtém-se a seguinte relação ao aplicar a lei de conservação da massa:

$$\frac{dV\rho}{dt} = F_i\rho - F\rho \quad (4)$$

Considerando o volume (V) e a densidade (ρ) constantes:

$$F_i = F \quad (5)$$

De forma análoga, a lei de conservação da massa aplicada ao fluido na jaqueta resulta em:

$$F_{ji} = F_j \quad (6)$$

O balanço de componentes resulta na equação:

$$V \frac{dC_A}{dt} = FC_{Af} - FC_A - rV \quad (7)$$

A aplicação da lei de conservação da energia para o tanque resulta na seguinte equação:

$$V\rho c_p \frac{dT}{dt} = F\rho c_p (T_f - T) + (-\Delta H)V_r - UA(T - T_j) \quad (8)$$

onde r é expresso conforme a equação de Arrhenius.

Dessa forma, o reator pode ser modelado pelo seguinte conjunto de equações diferenciais:

$$\begin{aligned} \frac{dC_A}{dt} &= \frac{F}{V} (C_{Af} - C_A) - k_o \exp\left(\frac{-\Delta E}{RT}\right) C_A \\ \frac{dT}{dt} &= \frac{F}{V} (T_f - T) + \left(\frac{-\Delta H}{\rho c_p}\right) k_o \exp\left(\frac{-\Delta E}{RT}\right) C_A - \frac{UA}{V\rho C_p} (T - T_j) \end{aligned} \quad (9)$$

2.1.3 Representação em Espaço de Estados

O modelo representado nas equações em 9 é não linear em relação as entradas e aos estados C_A e T . Para aplicar os métodos de controle usuais faz-se necessário linearizar o modelo.

O método é baseado na expansão da função não-linear em série de Taylor, em torno do ponto de operação, que são valores em regime permanente ($\dot{x} = 0$).

Os vetores de estados, entrada, perturbações e saída são descritos como desvios em torno desse ponto de operação, isto é:

$$x = \begin{bmatrix} C_A - C_{As} \\ T - T_s \end{bmatrix} = \text{Variaveis de estado} \quad (10)$$

$$u = F - F_s = \text{Entrada} \quad (11)$$

$$d = \begin{bmatrix} C_{Af} - C_{Afs} \\ T_f - T_{fs} \\ T_j - T_{js} \end{bmatrix} = \text{Perturbações} \quad (12)$$

$$y = C_A - C_{As} = \text{Saída} \quad (13)$$

onde os termos com o índice s são os valores no ponto de operação.

Deseja-se obter um sistema linear da forma:

$$\dot{x} = Ax + B_u u + B_d d \quad (14)$$

$$y = Cx \quad (15)$$

Para um sistema não-linear qualquer:

$$\dot{x} = F(x, u, d) \quad y = h(x, u, d)$$

A linearização em torno de um ponto de operação (x_s, u_s, d_s) consiste em obter matrizes A , B_u , B_d e C tais que para pequenas variações $\tilde{x} = x - x_s$, $\tilde{u} = u - u_s$ e $\tilde{d} = d - d_s$ em torno do ponto de operação:

$$\dot{\tilde{x}} = A\tilde{x} + B_u\tilde{u} + B_d\tilde{d} \quad (16)$$

Estas matrizes são dadas por:

$$A = \left. \frac{\partial F(x, u, d)}{\partial x} \right|_{\substack{x = x_s \\ u = u_s \\ d = d_s}} \quad B_u = \left. \frac{\partial F(x, u, d)}{\partial u} \right|_{\substack{x = x_s \\ u = u_s \\ d = d_s}} \\ B_d = \left. \frac{\partial F(x, u, d)}{\partial d} \right|_{\substack{x = x_s \\ u = u_s \\ d = d_s}} \quad C = \left. \frac{\partial h(x, u, d)}{\partial x} \right|_{\substack{x = x_s \\ u = u_s \\ d = d_s}}$$

No caso do CSTR, representado por:

$$\begin{aligned} \frac{dC_A}{dt} &= f_1(C_A, T, F, C_{Af}, T_f, T_j) = \frac{F}{V} (C_{Af} - C_A) - k_o \exp\left(\frac{-\Delta E}{RT}\right) C_A \\ \frac{dT_j}{dt} &= f_2(C_A, T, F, C_{Af}, T_f, T_j) = \frac{F}{V} (T_f - T) + \left(\frac{-\Delta H}{\rho c_p}\right) k_o \exp\left(\frac{-\Delta E}{RT}\right) C_A - \frac{UA}{V\rho C_p} (T - T_j) \end{aligned} \quad (17)$$

A matriz A é calculada da seguinte forma:

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \quad (18)$$

onde:

$$\begin{aligned} A_{11} &= \frac{\partial f_1}{\partial x_1} = \frac{\partial f_1}{\partial (C_A - C_{As})} = \frac{\partial f_1}{\partial C_A}, & A_{12} &= \frac{\partial f_1}{\partial x_2} = \frac{\partial f_1}{\partial (T - T_s)} = \frac{\partial f_1}{\partial T}, \\ A_{21} &= \frac{\partial f_2}{\partial x_1} = \frac{\partial f_2}{\partial (C_A - C_{As})} = \frac{\partial f_2}{\partial C_A}, & A_{22} &= \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = \frac{\partial f_2}{\partial (T - T_s)} = \frac{\partial f_2}{\partial T}. \end{aligned} \quad (19)$$

Para a matriz B_u :

$$B_u = \begin{bmatrix} B_{u1} \\ B_{u2} \end{bmatrix}, \quad (20)$$

onde:

$$B_{u1} = \frac{\partial f_1}{\partial u} = \frac{\partial f_1}{\partial (F - F_s)} = \frac{\partial f_1}{\partial F}, \quad B_{u2} = \frac{\partial f_2}{\partial u} = \frac{\partial f_2}{\partial (F - F_s)} = \frac{\partial f_2}{\partial F}. \quad (21)$$

Para a matriz B_d :

$$B_d = \begin{bmatrix} B_{d11} & B_{d12} & B_{d13} \\ B_{d21} & B_{d22} & B_{d23} \end{bmatrix}, \quad (22)$$

onde:

$$\begin{aligned} B_{d11} &= \frac{\partial f_1}{\partial d_1} = \frac{\partial f_1}{\partial (C_{Af} - C_{Af})} = \frac{\partial f_1}{\partial C_{Af}}, & B_{d12} &= \frac{\partial f_1}{\partial d_2} = \frac{\partial f_1}{\partial (T_f - T_{fs})} = \frac{\partial f_1}{\partial T_f}, \\ B_{d13} &= \frac{\partial f_1}{\partial d_3} = \frac{\partial f_1}{\partial (T_j - T_{js})} = \frac{\partial f_1}{\partial T_j}, \\ B_{d21} &= \frac{\partial f_2}{\partial d_1} = \frac{\partial f_2}{\partial (C_{Af} - C_{Af})} = \frac{\partial f_2}{\partial C_{Af}}, & B_{d22} &= \frac{\partial f_2}{\partial d_2} = \frac{\partial f_2}{\partial (T_f - T_{fs})} = \frac{\partial f_2}{\partial T_f}, \\ B_{d23} &= \frac{\partial f_2}{\partial d_3} = \frac{\partial f_2}{\partial (T_j - T_{js})} = \frac{\partial f_2}{\partial T_j}. \end{aligned} \quad (23)$$

Como $y = C_A - C_{As} = x_1$, a matriz C é obtida diretamente:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (24)$$

Preparação 1: Obtenha as matrizes A , B_u e B_d da representação em espaço de estados do sistema CSTR linearizado.

3 Modelos no Domínio de Laplace

Relembrando, a função de transferência entre a entrada e saída expressa em função das matrizes do espaço de estados é:

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B_u \quad (25)$$

De maneira similar, para as entradas de perturbação:

$$G_d(s) = C(sI - A)^{-1}B_d \quad (26)$$

No caso do STH, $G_d(s)$ é uma matriz de funções de transferência entre y e as perturbações d_1 , d_2 e d_3 . Cada elemento de G_d é calculado separadamente para as colunas B_d , da seguinte forma:

$$G_{d_1}(s) = C(sI - A)^{-1} \begin{bmatrix} B_{d_{11}} \\ B_{d_{21}} \end{bmatrix} \quad (27)$$

$$G_{d_2}(s) = C(sI - A)^{-1} \begin{bmatrix} B_{d_{12}} \\ B_{d_{22}} \end{bmatrix} \quad (28)$$

$$G_{d_3}(s) = C(sI - A)^{-1} \begin{bmatrix} B_{d_{13}} \\ B_{d_{23}} \end{bmatrix} \quad (29)$$

Preparação 2: Obtenha as funções de transferência do sistema CSTR linearizado.

Preparação 3: O que poderia se esperar da saída do sistema linear se fosse aplicada uma entrada dez vezes maior.

4 Modelos em Variáveis de Estado Discretos no Tempo

O sistema contínuo linear invariante no tempo,

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t). \end{aligned}$$

discretizado a uma taxa de amostragem T_a é dado por

$$\begin{aligned} x(k+1) &= \Phi x(k) + \Gamma_u u(k) + \Gamma_d u(k) \\ y(k) &= Cx(k) \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} \Phi &= e^{AT} \\ \Gamma_u &= \int_0^{T_a} e^{A\tau} d\tau B_u \\ \Gamma_d &= \int_0^{T_a} e^{A\tau} d\tau B_d \end{aligned}$$

Preparação 4: Faça a discretização do sistema linearizado em espaço de estados, considerando três casos de tempo de amostragem: $T_a = 0.2 h$, $0.5 h$ e $1.5 h$.

5 Atividade Experimental

Utilize como dados para simulação os seguintes valores:

Parâmetros:	Ponto de operação:
$V = 1 \text{ m}^3$	$F_s = 1 \text{ m}^3/h$
$\Delta E = 11843 \text{ J/mol}$	$C_{Afs} = 10 \text{ kgmol/m}^3$
$\rho c_p = 500 \text{ J/Km}^3$	$T_{fs} = 298 \text{ K}$
$R = 1.987 \text{ L/molK}$	$T_{js} = 298 \text{ K}$
$UA = 150 \text{ J/Kh}$	$T_s = 311.2 \text{ K}$
$k_0 = 9703 \times 3600 \text{ h}^{-1}$	$C_{As} = 8.564 \text{ kgmol/m}^3$
$\Delta H = -5960 \text{ J/mol}$	

No Simulink, navegue para *Modeling* → *ModelSettings* e altere o tempo de simulação para 15 h, o solver para passo fixo, e o passo de simulação para 0.01 h, conforme destacado na figura 2.

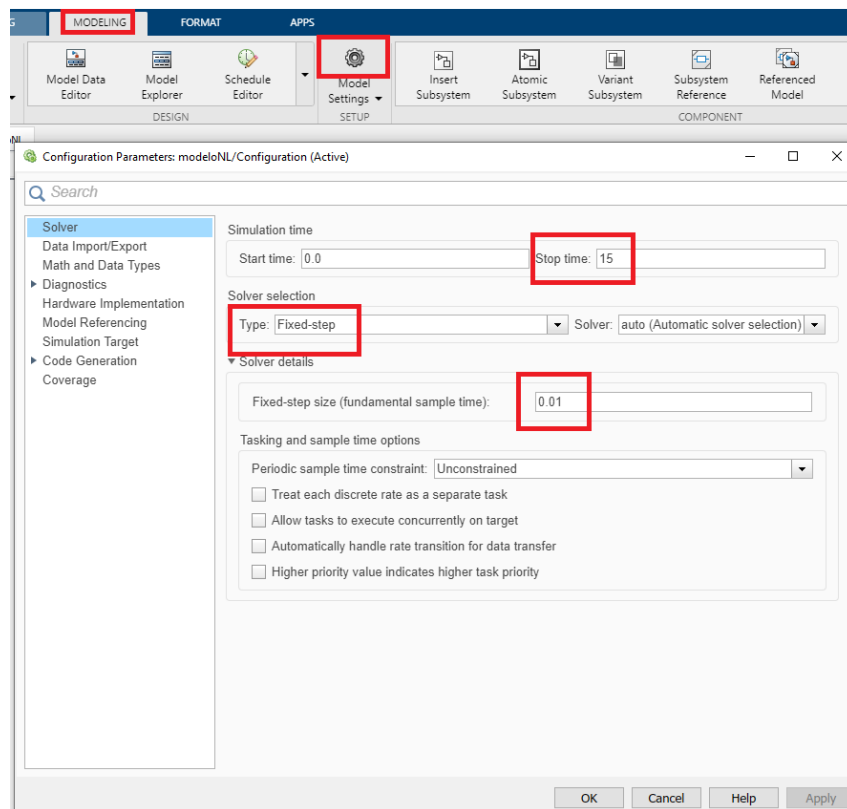


Figura 2: Configurações da simulação.

1. Simule as equações diferenciais em (9). Utilize como base o diagrama da figura 3.

As equações diferenciais podem ser facilmente implementadas utilizando o bloco MATLAB Function. No final do guia é apresentado um exemplo de utilização.

As entradas aplicadas são degraus com amplitudes variando em torno do ponto de operação. Utilize $dF = 0.01$, $dC_{af} = 0$, $dT_f = 0$ e $dT_j = 0$.

Para a saída, calcule o tempo de subida, tempo de acomodação e overshoot.

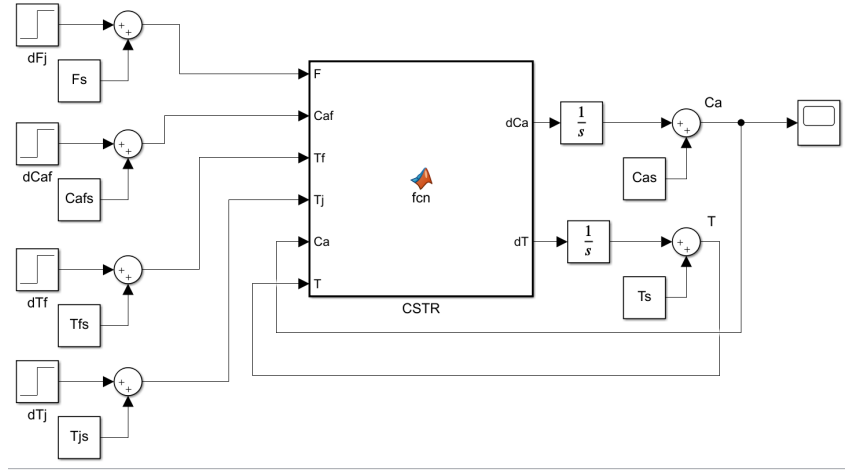


Figura 3: Diagrama de simulação do modelo não linear do CSTR

- Obtenha as matrizes A , B_u e B_d da representação em espaço de estados do sistema linearizado. Simule o sistema utilizando como base o diagrama da figura 4.

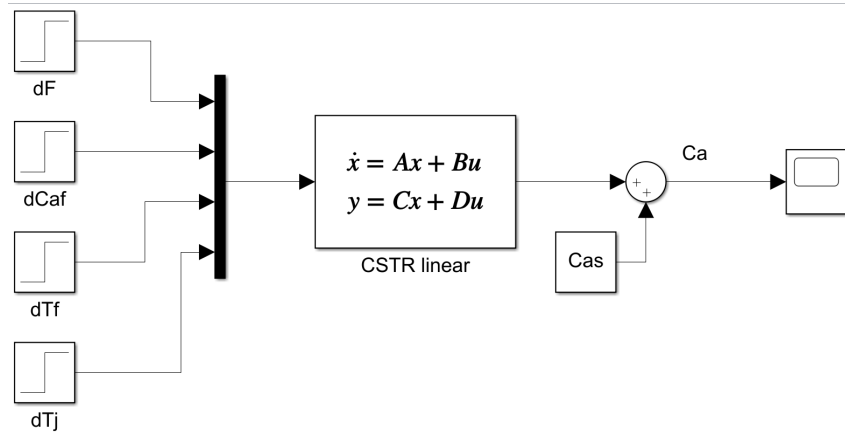


Figura 4: Diagrama de simulação do modelo linearizado em espaço de estados do CSTR

Note que a matriz B no bloco será uma junção de B_u e B_d , isto é, $B = [B_u \ B_d]$. Como o sistema não possui ganho direto, $D = 0_{1 \times 4}$.

As entradas aplicadas são degraus com amplitudes variando em torno do ponto de operação. Utilize $dF = 0.01$, $dC_{af} = 0$, $dT_f = 0$ e $dT_j = 0$.

Para a saída, calcule o tempo de subida, tempo de acomodação e overshoot.

- Obtenha as funções de transferência do sistema linearizado. Simule o sistema utilizando como base o diagrama da figura 5.

As entradas aplicadas são degraus com amplitudes variando em torno do ponto de operação. Utilize $dF = 0.01$, $dC_{af} = 0$, $dT_f = 0$ e $dT_j = 0$. Como tempo de simulação, utilize 15 h.

Para a saída, calcule o tempo de subida, tempo de acomodação e overshoot.

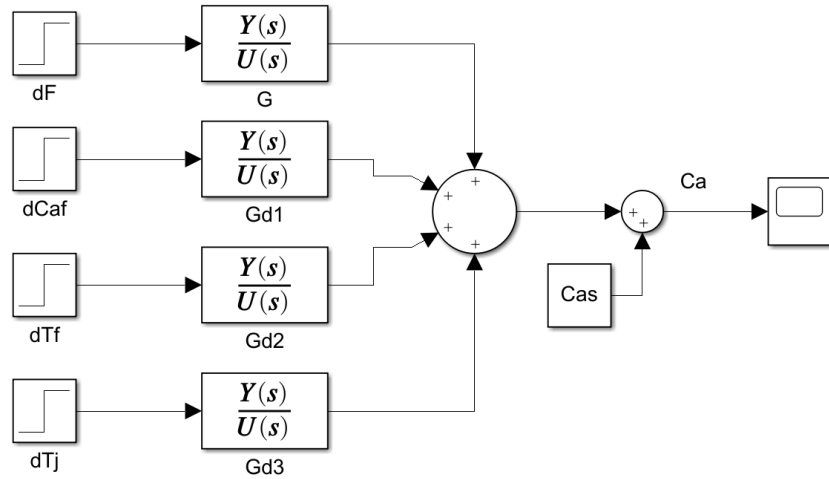


Figura 5: Diagrama de simulação do modelo linearizado em funções de transferência do STH

4. Em um mesmo gráfico, plote as saídas obtidas nas simulações dos exercícios 1, 2 e 3.
5. O que se poderia esperar da saída do sistema linear se o valor da entrada dF fosse dez vezes maior? Simule os casos não linear e linear para esse valor de entrada alterado, plote as saídas de cada caso em um mesmo gráfico, e comente os resultados.
6. Faça a discretização do sistema linearizado em espaço de estados, utilizando os tempos de amostragem $T_a = 0.2 \text{ h}$, 0.5 h e 1.5 h . Simule o sistema utilizando como base o diagrama da figura 6.

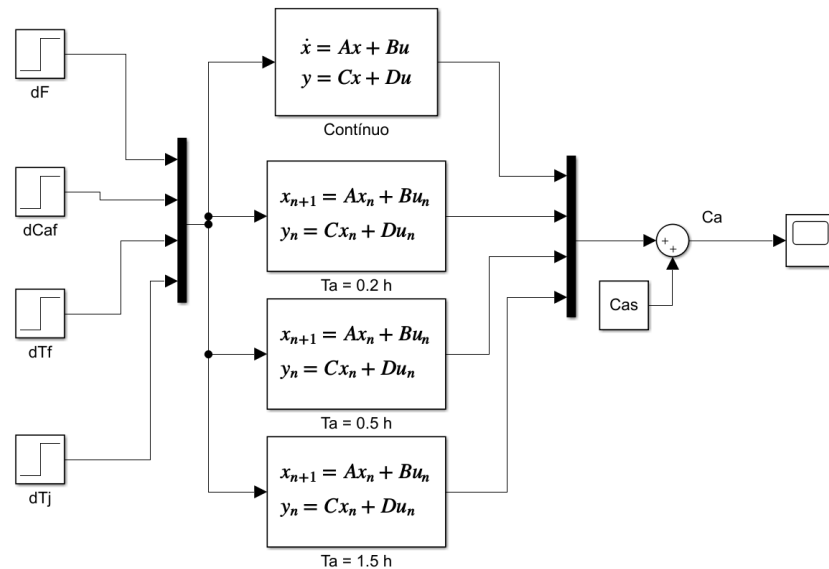


Figura 6: Diagrama de simulação do modelo linearizado discretizado

Note que nos blocos de espaço de estados discretos, além das matrizes é necessário especificar o tempo de amostragem correto para cada caso.

As entradas aplicadas são degraus com amplitudes variando em torno do ponto de operação. Utilize $dF = 0.01$, $dC_{af} = 0$, $dT_f = 0$ e $dT_j = 0$. Nos blocos de degrau, colocar Step Time = 0.

Comente os resultados obtidos para cada sistema discretizado. Com base na frequência de Nyquist, os valores de amostragem são adequados?

6 Exemplo de utilização do bloco MATLAB Function

Supondo um sistema de equações diferenciais da seguinte forma:

$$\frac{dy_1}{dt} = a_1 y_1 + b_1 u_1 \quad \frac{dy_2}{dt} = a_2 y_2 + b_2 u_1 \quad (30)$$

onde $a_1 = a_2 = b_1 = b_2 = 1$. Deseja-se obter as curvas de y_1 e y_2 para uma variação em degrau na entrada u_1 .

Essas equações podem ser escritas no Simulink utilizando o bloco MATLAB Function, localizado na aba de user-defined functions:

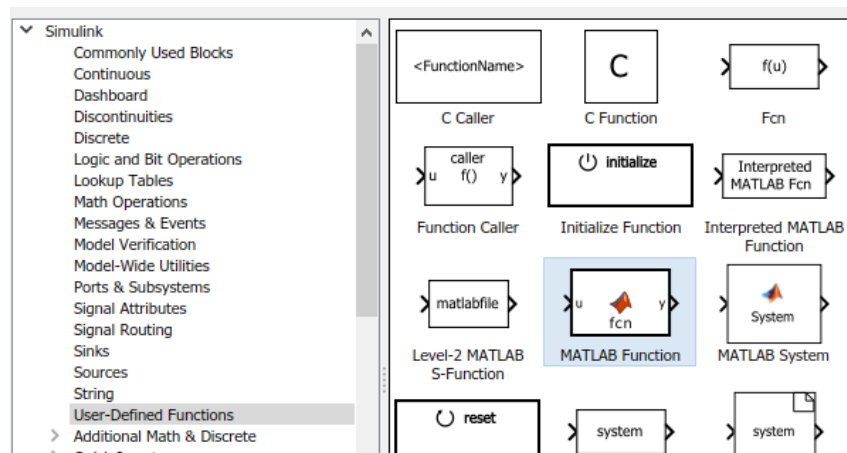


Figura 7: Localização do bloco MATLAB Function

As equações diferenciais podem ser escritas diretamente. Ao dar duplo clique no bloco, a área para implementação da função é mostrada no editor:

```
function [dy1, dy2] = fcn(u1, y1, y2)

a1 = 1; b1 = 1;
a2 = 1; b2 = 1;

dy1 = a1*y1 + b1*u1;
dy2 = a2*y2 + b2*u2;
```

Figura 8: Implementação das equações diferenciais

Note que as entradas e retornos da função devem ser ajustadas para o problema, e os valores das constantes devem ser definidos, mesmo que já estejam no workspace.

Uma vez descritas as equações diferenciais e acrescentados os integradores e blocos de entrada e saída, o diagrama de simulação deve ser semelhante ao mostrado a seguir:

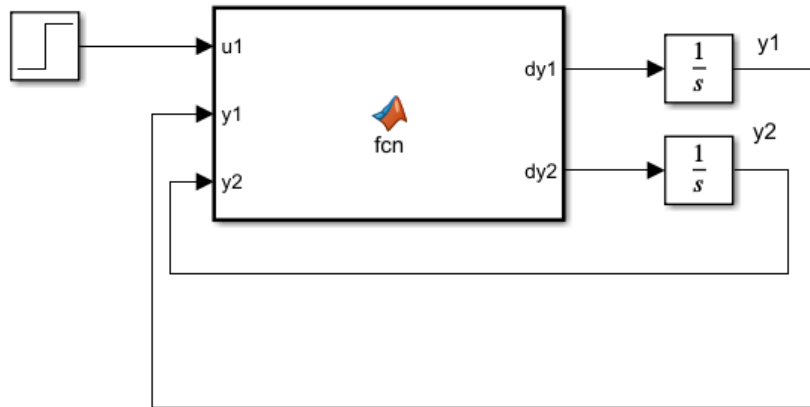


Figura 9: Diagrama de simulação de um sistema de equações diferenciais