

Tipos, Categorias e Lógicas

Notas em Teoria dos Tipos, Teoria das Categorias e Lógica.

edição 0.0

Autores: Mateus Galdino

2024-06-01

Contents

1	Prefácio	3
I	O Cubo Lambda	5
1	Cálculo Lambda não-tipado	5
1.1	O Cálculo	5
1.1.1	Definições	5
1.1.2	Sintáxe do Cálculo Lambda	6
1.1.3	Conversão	8
1.1.4	Substituição	8
1.1.5	Beta redução	9
1.1.6	Forma Normal	10
1.1.7	Teorema do ponto fixo	12
1.1.8	Eta redução	12
1.1.9	Codificações dentro do Cálculo λ	13
1.2	Modelos	15
1.2.1	Estruturas Aplicativas	15
1.2.2	Modelos interpretativos algébricos	16
1.2.3	Modelos livres de Sintaxe	17
1.2.4	Ordens Parciais Completas	18
1.2.5	O Modelo de Scott	22
2	Teoria dos Tipos Simples	25
2.1	Cálculo lambda simplesmente tipado (STLC)	25
2.1.1	Tipos simples	25
2.1.2	Abordagens para a tipagem	26
2.1.3	Regras de derivação e Cálculo de sequêntes	27
2.1.4	Problemas resolvidos no STLC	29
2.1.5	Bem-tipagem no STLC	30
2.1.6	Checagem de tipos no STLC	31
2.1.7	Encontrar termos no STLC	32
2.1.8	Propriedades gerais do STLC	33
2.1.9	Redução no STLC	36
2.2	Extensões ao STLC e as Teorias dos Tipos Simples	37
3	O Sistema F	38
3.1	O Cálculo Lambda com tipagem de Segunda Ordem	39
3.1.1	Regras de Inferência	39
3.1.2	O Sistema Lambda2	39
3.1.3	Exemplos de Derivação	41
3.1.4	Propriedades do λ_2	42
3.2	O sistema F de Girard	42

4	A Teoria $\lambda\omega$	43
4.1	A Teoria $\lambda\omega$	43
4.1.1	Regra sort e regra var em $\lambda\omega$	44
4.1.2	A regra do enfraquecimento em $\lambda\omega$	44
4.1.3	A regra de formação de $\lambda\omega$	45
4.1.4	Regras de abstração e aplicação	45
4.1.5	Regra da Conversão	46
4.1.6	Propriedades	46
4.2	O Sistema \mathcal{F}_ω de Girard	46
II	Construções paralelas ao cubo	47
III	Semântica Categorical das teorias do cubo lambda	48
1	Introdução à Teoria das Categorias	48
1.1	Categorias	48
1.2	Categorias novas das antigas	50
1.3	Funtores	52
IV	Teorias Homotópicas de Tipos	55
V	Semântica Categorical das teoria homotópicas de tipos	56
VI	Lógica	57
VII	Apêndices	58
1	Apêndice Histórico	58

1 Prefácio

A Teoria dos Tipos é uma área nova crescente de ampla interseção com outras áreas também novas ou áreas já consolidadas. Essa interseção dá frutos práticos interessantes para as áreas envolvidas. Por exemplo: no campo da computação, a maioria das linguagens de programação possui tipagem e, sem entrar no mérito das diferentes abordagens de tipagem para cada linguagem, é possível descrever a tipagem delas utilizando uma teoria dos tipos adequada. Já no campo da matemática, é possível perceber que as teorias dos tipos descritas aqui possuem modelos conhecidos na teoria das categorias que permitem formulações de objetos matemáticos já conhecidos (como Grupos, Espaços Topológicos, etc). No meio desses dois exemplos, existe a tentativa de aproximar a computação dos fundamentos da matemática a partir de assistentes de prova.

Essas notas foram escritas por dois fins. O primeiro é expor em língua portuguesa a vasta gama de conceitos explorados na teoria dos tipos, deixando essa área da matemática e da computação o mais acessível possível para iniciantes vindos de diversos ambientes. Em língua inglesa, já existem várias fontes possíveis para adentrar essa teoria, que serão referenciadas a partir dessas notas, mas em português as poucas fontes que existem estão em dissertações acadêmicas pouco preocupadas com a difusão das ideias para fora de seus nichos. O segundo fim é, em certa medida, conseguir, através dessa exposição, que mais e mais pessoas tenham interesse pelo assunto e comecem a pesquisar, visto que nos centros e departamentos brasileiros, sejam de matemática ou de computação, essa área recebe pouca a nenhuma atenção, já que os professores especializados nesses assuntos já não estão comprometidos a ensinar os alunos de graduação essa área. Dessa forma, essas notas também se colocam como um desafio: ensinar o máximo de teoria dos tipos possível para alunos de graduação.

Essas notas então podem ser utilizadas sem dúvida por professores que queiram se aventurar no ensino da teoria dos tipos.

A primeira parte tenta desenvolver as diversas teorias de tipos denominadas de λ -cubo. Essa primeira parte usa como base (o primeiro subcapítulo de cada capítulo) o livro *Type Theory and Formal Proof* de Nederpelt e Geuvers, mas adentra tópicos mais profundos em cada teoria.

Já a segunda parte desenvolve outras construções paralelas ao λ -cubo, derivadas do λ -cálculo não-tipado, como o $\lambda\mu$ -cálculo e o κ -cálculo. Cada cálculo é retirado de artigos diferentes e compilados no mesmo lugar.

A parte três desenvolve a teoria das categorias necessária para a semântica de cada uma das teorias dos tipos desenvolvidas nas partes I e II, desenvolvendo o conceito de categorias até a teoria dos Topos e construções paralelas. Essa parte é bastante influenciada pelo livro *Introduction to Higher Order Categorical Logic* de Lambek e Scott.

A parte IV entra nas diversas teorias homotópicas de tipos, desde sua precursora, a *Teoria dos Tipos de Martin-Löf*, e a original do livro *Homotopy Type Theory* até construções mais recentes. A maioria dessas teorias está espalhada em diversos artigos, então o trabalho aqui se torna compilá-las em um único lugar de forma a criar um fio condutor entre elas.

A parte V desenvolve a semântica categorial das HoTT utilizando conceitos da teoria das ∞ -categorias, teoria das homotopias (em suas versões simpliciais e cúbicas) e conceitos já trabalhados na parte III.

A parte VI é a parte final e serve como apêndice para colocar definições

voltadas para a lógica e a teoria da prova, com a exposição do cálculo de seqüentes, da dedução natural e de outras áreas correlatas. Essa parte trás inspiração no livro *Logic and Structure* do Dirk van Dalen e *An Introduction to Proof Theory* de Galvan et al.

Links importantes:

- Caso o leitor encontre algum erro ou problema nas notas, por favor avisar em <https://github.com/MateusGaldinoLG/notasTT/issues>.
- Caso o leitor queira contribuir no geral com adição ou escrita de temas: <https://github.com/MateusGaldinoLG/notasTT>
- Para verificar o progresso da escrita do livro: <https://github.com/MateusGaldinoLG/notasTT/blob/main/README.md>

Part I

O Cubo Lambda

1 Cálculo Lambda não-tipado ($\lambda_{\beta\eta}$)

A teoria dos tipos possui como história de origem algumas tentativas falhas. O conceito de tipos pode ser mapeado para dois matemáticos importantes que fizeram usos bem diferentes dele: Bertrand Russel (e Walfred North Whitehead) na Principia Mathematica e Alonzo Church no seu Cálculo λ simplesmente tipado (ST λ C).

A teoria dos tipos que é usada hoje, provém do segundo autor e de outros autores que vêm dessa tradição. Por isso, o início dessas notas se propõe a começar do básico, definindo o que é o Cálculo λ não tipado e quais questões levaram Church a desenvolver a teoria dos tipos em cima dele.

Aqui, será traduzido "λ-calculus" como "Cálculo λ", decisão que perde a estética do hífen, mas que mantém a unidade com outras traduções de "X calculus" no corpo matemático brasileiro, como o "Cálculo Diferencial e Integral", o "Cálculo de sequentes", o "Cálculo de variações", etc.

1.1 O Cálculo

1.1.1 Definições

O cálculo lambda serve como uma abstração em cima do conceito de função. Uma função é uma estrutura que pega um *input* e retorna um *output*, por exemplo a função $f(x) = x^2$ pega um input x e retorna seu valor ao quadrado x^2 . No cálculo lambda, essa função pode ser denotada por $\lambda x.x^2$, onde λx simboliza que essa função espera receber como entrada x . Quando se quer saber qual valor a função retorna para uma entrada específica, são usados números no lugar das variáveis, como por exemplo $f(3) = 3^2 = 9$. No cálculo lambda, isso é feito na forma de $(\lambda x.x^2)(3)$.

Esses dois princípios de construção são definidos como:

- **Abstração:** Seja M uma expressão e x uma variável, podemos construir uma nova expressão $\lambda x.M$. Essa expressão é chamada de Abstração de x sobre M
- **Aplicação:** Sejam M e N duas es expressões, podemos construir uma expressão MN . Essa expressão é chamada de Aplicação de M em N .

Dadas essas operações, é preciso também de uma definição que dê conta do processo de encontrar o resultado após a aplicação em uma função. Esse processo é chamado de β -redução. Ela faz uso da substituição e usa como notação os colchetes.

Definição 1.1 (β -redução). A β -redução é o processo de rescrita de uma expressão da forma $(\lambda x.M)N$ em outra expressão $M[x := N]$, ou seja, a expressão M na qual todo x foi substituído por N .

1.1.2 Sintáxe do Cálculo Lambda

É interessante definir a sintaxe do cálculo lambda de forma mais formal. Para isso, são utilizados métodos que podem ser familiares para aqueles que já trabalharam com lógica proposicional, lógica de primeira ordem ou teoria de modelos.

Primeiro, precisamos definir a linguagem do Cálculo λ .

Definição 1.2. (i) Os *termos lambda* são palavras em cima do seguinte alfabeto:

- variáveis: v_0, v_1, \dots
- abstrator: λ
- parentesis: $(,)$

(ii) O conjunto de λ -termos Λ é definido de forma indutiva da seguinte forma:

- Se x é uma variável, então $x \in \Lambda$
- $M \in \Lambda \rightarrow (\lambda x.M) \in \Lambda$
- $M, N \in \Lambda \rightarrow MN \in \Lambda$

Na teoria dos tipos e no cálculo lambda, é utilizada uma forma concisa de definir esses termos chamada de Formalismo de Backus-Naur ou Forma Normal de Backus (BNF, em inglês). Nessa forma, a definição anterior é reduzida à:

$$\Lambda = V | (\Lambda\Lambda) | (\lambda V\Lambda)$$

Onde V é o conjunto de variáveis $V = \{x, y, z, \dots\}$

Para expressar igualdade entre dois termos de Λ utilizamos o simbolo \equiv .

Algumas definições indutivas podem ser formadas a partir da definição dos λ -termos.

Definição 1.3 (Multiconjunto de subtermos).

1. (Base) $Sub(x) = \{x\}$, para todo $x \in V$
2. (Aplicação) $Sub(MN) = Sub(M) \cup Sub(N) \cup \{(MN)\}$
3. (Abstração) $Sub((\lambda x.M)) = Sub(M) \cup \{(\lambda x.M)\}$

Observações:

- (i) Um subtermo pode ocorrer múltiplas vezes, por isso é escolhido chamar de multiconjunto
- (ii) A abstração de vários termos ao mesmo tempo pode ser escrita como $\lambda x.(\lambda y.x)$ ou como $\lambda xy.x$.

Lema 1.1 (Propriedades de Sub).

- (Reflexividade) Para todo λ -termo M , temos que $M \in Sub(M)$
- (Transitividade) Se $L \in Sub(M)$ e $M \in Sub(N)$, então $L \in Sub(N)$.

Definição 1.4 (Subtermo próprio). L é um subtermo próprio de M se L é subtermo de M e $L \neq M$

Exemplos:

1. Seja o termo $\lambda x.\lambda y.xy$, vamos calcular seus subtermos:

$$\begin{aligned}
Sub(\lambda x.\lambda y.xy) &= \{\lambda x.\lambda y.xy\} \cup Sub(\lambda y.xy) \\
&= \{\lambda x.\lambda y.xy\} \cup \{\lambda y.xy\} \cup Sub(xy) \\
&= \{\lambda x.\lambda y.xy\} \cup \{\lambda y.xy\} \cup Sub(x) \cup Sub(y) \\
&= \{\lambda x.\lambda y.xy, \lambda y.xy, x, y\}
\end{aligned}$$

2. Seja o termo $(y(\lambda x.(xyz)))$, vamos calcular os seus subtermos:

$$\begin{aligned}
Sub(y(\lambda x.(xyz))) &= Sub(y) \cup Sub((\lambda x.(xyz))) \\
&= \{y\} \cup \{(\lambda x.(xyz))\} \cup Sub((xyz)) \\
&= \{y\} \cup \{(\lambda x.(xyz))\} \cup Sub(x) \cup Sub(y) \cup Sub(z) \\
&= \{y\} \cup \{(\lambda x.(xyz))\} \cup \{x\} \cup \{y\} \cup \{z\} = \{y, (\lambda x.(xyz)), x, y, z\}
\end{aligned}$$

Outro conjunto importante para a sintaxe do cálculo lambda é o de variáveis livres. Uma variável é dita *ligante* se está do lado do λ . Em um termo $\lambda x.M$, x é uma variável ligante e toda aparição de x em M é chamada de *ligada*. Se existir uma variável em M que não é ligante, então dizemos que ela é *livre*. Por exemplo, em $\lambda x.xy$, o primeiro x é ligante, o segundo x é ligado e y é livre.

O conjunto de todas as variáveis livres em um termo é denotado por FV e definido da seguinte forma:

Definição 1.5 (Multiconjunto de variáveis livres).

1. (Base) $FV(x) = \{x\}$, para todo $x \in V$
2. (Aplicação) $FV((MN)) = FV(M) \cup FV(N) \cup \{(MN)\}$
3. (Abstração) $FV((\lambda x.M)) = FV(M) \setminus \{x\}$

Exemplos:

1. Seja o termo $\lambda x.\lambda y.xyz$, vamos calcular seus subtermos:

$$\begin{aligned}
FV(\lambda x.\lambda y.xyz) &= FV(\lambda y.xyz) \setminus \{x\} \\
&= FV(xyz) \setminus \{y\} \setminus \{x\} \\
&= FV(x) \cup FV(y) \cup FV(z) \setminus \{y\} \setminus \{x\} \\
&= \{x, y, z\} \setminus \{y\} \setminus \{x\} \\
&= \{z\}
\end{aligned}$$

Vamos definir os termos fechados da seguinte forma:

Definição 1.6. O λ -termo M é dito *fechado* se $FV(M) = \emptyset$. Um λ -termo fechado também é chamado de *combinador*. O conjunto de todos os λ -termos fechados é chamado de Λ^0 .

Os combinadores são muito utilizados na *Lógica Combinatória*, mas vamos explorá-los mais a frente.

1.1.3 Conversão

No cálculo Lambda, é possível renomear variáveis ligantes/ligadas, pois a mudança dos nomes dessas variáveis não muda a sua interpretação. Por exemplo, $\lambda x.x^2$ e $\lambda u.u^2$ podem ser utilizadas de forma igual, mesmo que com nomes diferentes. A Renomeação será definida da seguinte forma:

Definição 1.7. Seja $M^{x \rightarrow y}$ o resultado da troca de todas as livre-ocorrências de x em M por y . A relação de renomeação é expressa pelo símbolo $=_\alpha$ e é definida como: $\lambda x.M =_\alpha \lambda y.M^{x \rightarrow y}$, dado que $y \notin FV(M)$ e y não seja ligante em M .

Podemos estender essa definição para a definição do renomeamento, chamado de α -conversão.

Definição 1.8 (α -conversão).

1. (Renomeamento) $\lambda x.M =_\alpha \lambda y.M^{x \rightarrow y}$
2. (Compatibilidade) Sejam M, N, L termos. Se $M =_\alpha N$, então $ML =_\alpha NL$, $LM =_\alpha LN$
3. (Regra ξ) Para um z qualquer, se $M =_\alpha N$, então $\lambda z.M =_\alpha \lambda z.N$
4. (Reflexividade) $M =_\alpha M$
5. (Simetria) Se $M =_\alpha N$, então $N =_\alpha M$
6. (Transitividade) Se $L =_\alpha M$ e $M =_\alpha N$, então $L =_\alpha N$

A partir dos pontos (4), (5) e (6) dessa definição, é possível dizer que a α -conversão é uma relação de equivalência, chamada de α -equivalência.

Exemplos:

1. $(\lambda x.x(\lambda z.xy)) =_\alpha (\lambda u.u(\lambda z.uy))$
2. $(\lambda x.xy) \neq_\alpha (\lambda y.yy)$

1.1.4 Substituição

Podemos definir agora a substituição de um termo por outro da seguinte forma:

Definição 1.9 (Substituição).

1. $x[x := N] \equiv N$
2. $y[y := x] \equiv y$, se $x \neq y$
3. $(PQ)[x := N] \equiv (P[x := N])(Q[x := N])$
4. $(\lambda y.P)[x := N] \equiv (\lambda z.P^{y \rightarrow z})[x := N]$ se $(\lambda z.P^{y \rightarrow z})$ é α -equivalente a $(\lambda y.P)$ e $z \notin FV(N)$

A notação $[x := N]$ é uma meta-notação, pois não está definida na sintaxe do cálculo lambda. Na literatura também é possível ver a notação $[N/x]$ para definir a substituição.

1.1.5 Beta redução

Voltando à aplicação, agora com a substituição em mente, podemos dizer que a aplicação de um termo N em $\lambda x.M$, na forma de $(\lambda x.M)N$ é a mesma coisa que $M[x := N]$. Nesse caso, essa única substituição entre termos pode ser descrita na seguinte definição:

Definição 1.10 (β -redução para único passo).

1. (Base) $(\lambda x.M)N \rightarrow_\beta M[x := N]$
2. (Compatibilidade) Se $M \rightarrow_\beta N$, então $ML \rightarrow_\beta NL$, $LM \rightarrow_\beta LN$ e $\lambda x.M \rightarrow_\beta \lambda x.N$

O termo $(\lambda x.M)N$ é chamado de *redex*, vindo do inglês "reducible expression" (expressão reduzível), e o subtermo $M[x := N]$ é chamado de *contractum* do redex.

Exemplos:

1. $(\lambda x.x(xy))N \rightarrow_\beta N(Ny)$
2. $(\lambda x.xx)(\lambda x.xx) \rightarrow_\beta (\lambda x.xx)(\lambda x.xx)$
3. $(\lambda x.(\lambda y.yx)z)v \rightarrow_\beta (\lambda y.yv)z \rightarrow_\beta zv$

Os exemplos 2 e 3 são importantes por duas razões:

- Com o exemplo 3 é possível ver que é possível concatenar várias reduções seguidas, vamos colocar uma definição mais geral a diante que lide com isso.
- Com o exemplo 2 é possível ver que existem termos que, quando beta-reduzidos, retornam eles mesmos. Isso faz com que cálculo l ambda não tipado tenha propriedades interessantes, pois muitas vezes a simplificação não termina. Ou seja,    possível haver cadeias de beta redução que não possuem termo mais simples.

Definição 1.11 (β -redução para zero ou mais passos). $M \twoheadrightarrow_\beta N$ (l  -se: M beta reduz para N em vários passos) se existe um $n \geq 0$ e existem termos M_0 até M_n tais que $M_0 \equiv M$, $M_n \equiv N$ e para todo i tal que $0 \leq i < n$:

$$M_i \rightarrow_\beta M_{i+1}$$

Ou Seja:

$$M \equiv M_0 \rightarrow_\beta M_1 \rightarrow_\beta \cdots \rightarrow_\beta M_{n-1} \rightarrow_\beta M_n \equiv N$$

Lema 1.2.

1. \twoheadrightarrow_β    uma extensão de \rightarrow_β , ou seja: se $M \rightarrow_\beta N$, então $M \twoheadrightarrow_\beta N$
2. \twoheadrightarrow_β é reflexivo e transitivo, ou seja:
 - (reflexividade) Para todo M , $M \twoheadrightarrow_\beta M$
 - (transitividade) Para todo L , M , e N . Se $L \twoheadrightarrow_\beta M$ e $M \twoheadrightarrow_\beta N$, então $L \twoheadrightarrow_\beta N$

Prova

1. Na definição 1.11, seja $n = 1$, então $M \equiv M_0 \rightarrow_\beta M_1 \equiv N$, que é a mesma coisa que $M \rightarrow_\beta N$
2. Se $n = 0$, $M \equiv M_0 \equiv N$
3. A transitividade também segue da definição

Uma extensão dessa β -redução geral é a β - conversão, definida como:

Definição 1.12 (β -conversão). $M =_\beta N$ (lê-se: M e N são β -convertíveis) se existe um $n \geq 0$ e existem termos M_0 até M_n tais que $M_0 \equiv M$, $M_n \equiv N$ e para todo i tal que $0 \leq i < n$: Ou $M_i \rightarrow_\beta M_{i+1}$ ou $M_{i+1} \rightarrow_\beta M_i$

Lema 1.3.

1. $=_\beta$ é uma extensão de \rightarrow_β em ambas as direções, ou seja: se $M \rightarrow_\beta N$ ou $N \rightarrow_\beta M$, então $M =_\beta N$
2. $=_\beta$ é uma relação de equivalência, ou seja, possui reflexividade, simetria e transitividade
 - (reflexividade) Para todo M , $M =_\beta M$
 - (Simetria) Para todo M e N , se $M =_\beta N$, então $N =_\beta M$
 - (transitividade) Para todo L , M , e N . Se $L =_\beta M$ e $M =_\beta N$, então $L =_\beta N$

1.1.6 Forma Normal

Podemos definir a hora de parar de reduzir, para isso vamos introduzir o conceito de forma Normal

Definição 1.13 (Forma normal β ou β -normalização).

1. M está na forma normal β se M não possui nenhum redex
2. M possui uma forma normal β , ou é β -normalizável, se existe um N na forma normal β tal que $M =_\beta N$. N é chamado de a *forma normal β* de M .

Lema 1.4. Se M está em sua forma normal β , então $M \rightarrow_\beta N$ implica em $M \equiv N$

Exemplos:

1. $(\lambda x.(\lambda y.yx)z)v$ tem como forma normal β zv , pois $(\lambda x.(\lambda y.yx)z)v \rightarrow_\beta zv$ (como visto nos exemplos anteriores) e zv está na forma normal β
2. Vamos definir um termo $\Omega := (\lambda x.xx)(\lambda x.xx)$, Ω não está na forma normal β , pois pode ser β -reduzido, mas não possui também forma normal β , pois ele sempre é β -reduzido para ele mesmo.
3. Seja $\Delta := (\lambda x.xxx)$, então $\Delta\Delta \rightarrow_\beta \Delta\Delta\Delta \rightarrow_\beta \Delta\Delta\Delta\Delta \rightarrow_\beta \dots$ Logo $\Delta\Delta$ não possui forma normal.

Definição 1.14 (Caminho de Redução).

Um caminho de redução finito de M é uma sequência finita de termos N_0, N_1, \dots, N_n tais que $N_0 \equiv M$ e $N_i \rightarrow_\beta N_{i+1}$, para todo $0 \leq i < n$.

Um caminho de redução infinito de M é uma sequência infinita de termos N_0, N_1, \dots tais que $N_0 \equiv M$ e $N_i \rightarrow_\beta N_{i+1}$, para todo $i \in \mathbb{N}$

Considerando esses dois tipos de caminhos de redução, vamos definir dois tipos de normalização

Definição 1.15 (Normalização Fraca e Forte).

1. M é *fracamente normalizável* se existe um N na forma normal β tal que $M \twoheadrightarrow_\beta N$
2. M é *fortemente normalizável* se não existem caminhos de redução infinitos começando de M .

Todo termo M que é fortemente normalizável é fracamente normalizável.

Os termos Ω e Δ não são nem fortemente normalizáveis, nem fracamente normalizáveis.

É possível relacionar a normalização fraca com a forma normal β usando a intuição que, se M reduz para ambos N_1 e N_2 , então existe um termo N_3 que exista no caminho de redução de ambos N_1 e N_2 .

Teorema 1.1 (Teorema de Church-Rosser ou Teorema da Confluência).

Suponha que para um λ -termo M , tanto $M \rightarrow_\beta N_1$ e $M \rightarrow_\beta N_2$. Então existe um λ -termo N_3 tal que $N_1 \rightarrow_\beta N_3$ e $N_2 \rightarrow_\beta N_3$

A prova desse teorema pode ser encontrada no Livro de Barendregt.

Uma consequência importante desse teorema é que o resultado do calculo feito em cima do termo não depende da ordem que esses cálculos são feitos. A escolha dos redexes não interfere no resultado final.

Corolário 1.1.

Suponha que $M =_\beta N$. Então existe um termo L tal que $M \twoheadrightarrow_\beta L$ e $N \twoheadrightarrow_\beta L$.

prova. Como $M =_\beta N$, então, pela definição, existe um $n \in \mathbb{N}$ tal que:

$$M \equiv M_0 \rightrightarrows_\beta M_1 \dots M_{n-1} \rightrightarrows_\beta M_n \equiv N$$

. Onde $M_i \rightrightarrows_\beta M_{i+1}$ significa que ou $M_i \rightarrow_\beta M_{i+1}$ ou $M_{i+1} \rightarrow_\beta M_i$. Vamos provar por indução em n :

1. Quando $n = 0$: $M \equiv N$. Então sendo $L \equiv M$, $M \twoheadrightarrow_\beta L$ e $N \twoheadrightarrow_\beta L$ (por zero passos)
2. Quando $n = k > 0$, então existe M_{k-1} . Logo temos que $M \equiv M_0 \rightrightarrows_\beta M_1 \dots M_{k-1} \rightrightarrows_\beta M_k \equiv N$. Por indução, existe um L' tal que $M_0 \twoheadrightarrow_\beta L'$ e $M_{k-1} \twoheadrightarrow_\beta L'$. Vamos dividir $M_{k-1} \rightrightarrows_\beta M_k$ em dois casos
 - (a) Se $M_{k-1} \rightarrow_\beta M_k$, então como $M_{k-1} \rightarrow_\beta M_k$ e $M_{k-1} \twoheadrightarrow_\beta L'$, então, pelo Teorema de Church-Rosser, existe um L tal que $L' \twoheadrightarrow_\beta L$ e $M_k \rightarrow_\beta L$. Logo encontramos L .
 - (b) Se $M_k \rightarrow_\beta M_{k-1}$, então como $M_0 \twoheadrightarrow_\beta L'$ e $M_k \twoheadrightarrow_\beta L'$, L' é o próprio L .

□.

Lema 1.5.

1. Se M possui forma normal β N , então $M \rightarrow_{\beta} N$.
2. Um λ -termo tem no máximo uma forma normal β

Prova

1. Seja $M =_{\beta} N$, com N como forma normal β . Então, pelo corolário anterior, existe um L tal que $M \rightarrow_{\beta} L$ e $N \rightarrow_{\beta} L$. Como N é a forma normal, N não é mais redutível e $N \equiv L$. Então $M \rightarrow_{\beta} L \equiv N$, logo $M \rightarrow_{\beta} N$.
2. Suponha que M possui duas formas normais β N_1 e N_2 . Então por (1), $M \rightarrow_{\beta} N_1$ e $M \rightarrow_{\beta} N_2$. Pelo teorema de Church-Rosser, existe um L tal que $N_1 \rightarrow_{\beta} L$ e $N_2 \rightarrow_{\beta} L$. Mas como N_1 e N_2 estão na forma normal, $L \equiv N_1$ e $L \equiv N_2$. Então pela transitividade da equivalência, $N_1 \equiv N_2$.

□.

1.1.7 Teorema do ponto fixo

No Cálculo λ , todo λ -termo L possui um *ponto fixo*, ou seja, existe um λ -termo M tal que $LM =_{\beta} M$. O termo Ponto Fixo vem da análise funcional: seja f uma função, então f possui um ponto fixo a se $f(a) = a$.

Teorema 1.2. Para todo $L \in \Lambda$, existe um $M \in \Lambda$ tal que $LM =_{\beta} M$.

prova: Seja L um λ -termo e defina $M := (\lambda x.L(xx))(\lambda x.L(xx))$. M é um redex, logo:

$$\begin{aligned} M &\equiv (\lambda x.L(xx))(\lambda x.L(xx)) \\ &\rightarrow_{\beta} L((\lambda x.L(xx))(\lambda x.L(xx))) \\ &\equiv LM \end{aligned}$$

Logo $LM =_{\beta} M$. □

Pela prova anterior, podemos perceber que M pode ser generalizado para todo λ -termo. Esse M será denominado de *Combinador de ponto fixo* e escrito na forma:

$$Y \equiv \lambda y.(\lambda x.y(xx))(\lambda x.y(xx))$$

1.1.8 Eta redução

A junção da definição 0.8 com as definições de β -redução gera uma teoria que será chamada aqui de λ_{β} . Para essa teoria, faltam alguns detalhes que podem, ou não, ser introduzidos a depender do que se precisa.

A η -redução é a segunda redução possível dentro do cálculo λ . Através dela é possível remover uma abstração que não faz nada para o termo interior. Sua definição é:

Definição 1.16 (η -redução).

1. $(\lambda x.Mx) \rightarrow_{\eta} M$, onde $x \notin FV(M)$.

A junção da teoria λ com a η -redução será chamada aqui de $\lambda_{\beta\eta}$.

Uma outra adição possível à teoria λ é chamada de extencionalidade e definida da seguinte forma:

Definição 1.17 (extencionalidade **Ext**). Dados os termos M e N , se $Mx = Nx$ para todo λ -termo x , com $x \notin FV(MN)$, então $M = N$.

Ext introduz no cálculo λ a noção presente na teoria dos conjuntos de igualdade entre funções. Na teoria dos conjuntos, duas funções $f : A \rightarrow B$ e $g : A \rightarrow B$ são iguais se, para todo $x \in A$, $f(x) = g(x)$.

A união da teoria λ com **Ext** é chamada de $\lambda + \mathbf{Ext}$.

Teorema 1.3 (Teorema de Curry). As teorias $\lambda_{\beta\eta}$ e $\lambda + \mathbf{Ext}$ são equivalentes.

Prova: Primeiro, é necessário mostrar que η é derivável de $\lambda + \mathbf{Ext}$. Seja a igualdade $(\lambda x.Mx)x = Mx$, por **Ext**, $\lambda x.Mx = M$.

Segundo, é necessário mostrar que dado $Mx = Nx$, é possível derivar $M = N$ em $\lambda_{\beta\eta}$. Para isso, seja $Mx = Nx$, realizando ξ -redução, tem-se que $\lambda x.Mx = \lambda x.Nx$. Fazendo η -redução dos dois lados, $M = N$. \square

Existe uma outra formulação da extencionalidade dentro do cálculo λ chamado de regra ω . É necessário um equivalente à **Ext** para restrições do cálculo λ que só possuem termos fechados, para isso, é desenvolvida a regra ω :

Definição 1.18 (Regra ω). Dados os termos M e N , se $MQ = NQ$ para todo termo fechado Q , então $M = N$.

Da regra ω é possível deduzir **Ext**, mas não o oposto. A prova dessa dedução não será mostrada.

Posteriormente, será feita uma discussão de teorias dos tipos que aceitam **Ext** como um axioma no estilo de $\lambda + \mathbf{Ext}$ e outras que conseguem derivar a extencionalidade através de outras propriedades, como $\lambda_{\beta\eta}$.

1.1.9 Codificações dentro do Cálculo λ

O primeiro exemplo de transformação de funções em λ -termos, $f(x) = x^2$ para $\lambda x.x^2$, pode parecer correto, mas supõe mais que foi definido até então. Pois partindo somente da sintaxe e das transformações vistas nas seções anteriores, não foi definido coisas básicas como o que significa a exponenciação ou o número 2. Se o cálculo *lambda* é colocado como um possível substituto para a teoria das funções baseada na teoria dos conjuntos, então ele deve ser capaz de definir todas essas coisas de forma interna. Por isso, foram desenvolvidas as *codificações*, das quais a primeira e mais conhecida é a *Codificação de Church* (Church Encoding).

Primeiro, é necessário definir os números naturais e, para isso, é preciso de combinadores que traduzam os axiomas de Peano para os números naturais. Ou seja, precisamos definir o número 0 e a função sucessor $suc(x) = x + 1$. Para isso, diferente das outras definições indutivas vistas anteriormente, primeiro serão definidos os números e depois as operações.

Definição 1.19 (Numerais de Church).

1. $zero := \lambda f.x$

2. $um := \lambda f x. f x$
3. $dois := \lambda f x. f(fx)$
- ...
4. $n := \lambda f x. f^n x$

Onde $f^n x$ é $f(f(f \dots x))$ n vezes.

As operações são descritas na forma:

Definição 1.20 (Operações aritméticas).

1. $sum := \lambda m. \lambda n. \lambda f x. m f (n f x)$
2. $mult := \lambda m. \lambda n. \lambda f x. m (n f) x$
3. $suc := \lambda m. \lambda f x. f (m f x)$

Nessas definições os primeiros m e n são os números m e n , como por exemplo $m + n$, $m \times n$, $m + 1$, etc.

Exemplos:

1. Prova que $sum\ one\ one \rightarrow_{\beta} two$ na codificação:

$$\begin{aligned}
 sum\ one\ one &\equiv (\lambda m. \lambda n. \lambda f x. m f (n f x))\ one\ one \\
 &\rightarrow_{\beta} (\lambda f x. one\ f (one\ f x)) \\
 &\rightarrow_{\beta} (\lambda f x. (\lambda g x. g x) f ((\lambda g x. g x) f x)) \\
 &\rightarrow_{\beta} (\lambda f x. (\lambda x. f x) (f x)) \\
 &\rightarrow_{\beta} (\lambda f x. f (f x)) \\
 &\equiv two
 \end{aligned}$$

2. Prova que $mult\ two\ two \rightarrow_{\beta} four$ na codificação:

$$\begin{aligned}
 mult\ two\ two &\equiv (\lambda m. \lambda n. \lambda f x. m (n f) x)\ two\ two \\
 &\rightarrow_{\beta} (\lambda f x. two\ (two\ f) x) \\
 &\rightarrow_{\beta} (\lambda f x. (\lambda g y. g (g y)) (two\ f) x)
 \end{aligned}$$

Uma vez definida a multiplicação e a soma, é possível definir outras operações como o fatorial e a exponenciação. Isso fica como exercício para o leitor.

Tendo definido operações relacionadas aos números naturais, pode-se perguntar se é possível construir algo lógico dentro do cálculo λ não-tipado. Para isso, é necessário definir a noção de "verdadeiro" e "falso", na forma:

Definição 1.21 (Booleanos).

1. $true := \lambda x y. x$
2. $false := \lambda x y. y$
3. $not := \lambda z. z\ false\ true$
4. $'if\ x\ then\ u\ else\ v' := \lambda x. x u v$

Exemplos:

1. Prova que $\text{not}(\text{not } p) \equiv p$ na codificação:

$$\begin{aligned}
\text{not}(\text{not } p) &\equiv \text{not}((\lambda z.z \text{ false true })p) \\
&\rightarrow_{\beta} \text{not}(p \text{ false true }) \\
&\rightarrow_{\beta} \text{not}(p(\lambda xy.y)(\lambda xy.x)) \\
&\rightarrow_{\beta} (\lambda z.z \text{ false true })(p(\lambda xy.y)(\lambda xy.x)) \\
&\rightarrow_{\beta} (p(\lambda xy.y)(\lambda xy.x)) \text{ false true}
\end{aligned}$$

Se $p \rightarrow_{\beta} \text{true}$,

$$\begin{aligned}
\text{not}(\text{not true}) &\rightarrow_{\beta} ((\lambda xy.x)(\lambda xy.y)(\lambda xy.x)) \text{ false true} \\
&\rightarrow_{\beta} ((\lambda xy.y)) \text{ false true} \\
&\rightarrow_{\beta} \text{true}
\end{aligned}$$

Se $p \rightarrow_{\beta} \text{false}$,

$$\begin{aligned}
\text{not}(\text{not false}) &\rightarrow_{\beta} ((\lambda xy.y)(\lambda xy.y)(\lambda xy.x)) \text{ false true} \\
&\rightarrow_{\beta} ((\lambda xy.x)) \text{ false true} \\
&\rightarrow_{\beta} \text{false}
\end{aligned}$$

1.2 Modelos

Na matemática, um **modelo** é uma forma de dar sentido à estrutura sintática desenvolvida. No Cálculo λ , os primeiros modelos só foram desenvolvidos posteriormente à sintaxe, pois a simples descrição do cálculo na teoria dos conjuntos gerava inconsistências com os axiomas da teoria dos conjuntos.

1.2.1 Estruturas Aplicativas

Primeiro, antes de definir o que é um modelo, é necessário definir um tipo de estrutura algébrica:

Definição 1.22. Uma *Estrutura Aplicativa* é um par $\langle D, \bullet \rangle$, onde D é um conjunto com ao menos dois elementos, chamado de *domínio* da estrutura, e \bullet é um mapeamento de $\bullet : D \times D \rightarrow D$.

Os modelos do Cálculo λ serão estruturas aplicativas acrescidas de propriedades extras. A condição de se ter pelo menos dois elementos em D é importante para evitar modelos triviais.

Seja $\mathcal{M} = \langle D, \bullet \rangle$ uma estrutura aplicativa, escreve-se $a \in \mathcal{M}$ caso $a \in D$.

Definição 1.23. Uma estrutura aplicativa $\mathcal{M} = \langle D, \bullet \rangle$ é *extensional* se para $a, b \in D$, têm-se que $\forall x \in D, a \bullet x = b \bullet x \Rightarrow a = b$. a e b são chamadas de *extensionalmente iguais* e são escritos como $a \sim b$.

Definição 1.24. Seja $\mathcal{M} = \langle D, \bullet \rangle$ uma estrutura aplicativa e seja $n \geq 1$. Uma função $\theta : D^n \rightarrow D$ é *representável* se, e somente se, D possui um membro a tal que:

$$(\forall d_1, \dots, d_n \in D) a \bullet d_1 \bullet d_2 \bullet \dots \bullet d_n = \theta(d_1, \dots, d_n)$$

Usando a convenção de associação à esquerda, essa equação é lida como:

$$(\dots((a \bullet d_1) \bullet d_2) \bullet \dots \bullet d_n) = \theta(d_1, \dots, d_n)$$

Cada a é chamado de *representante* de θ . O conjunto de todas as funções representáveis de D^n para D é chamado de $(D^n \rightarrow D)_{rep}$.

Definição 1.25. Uma *Algebra Combinatória* é uma estrutura aplicativa $\mathbb{D} = \langle D, \bullet \rangle$, onde dados $k, s \in D$,

1. $(\forall a, b \in D) k \bullet a \bullet b = a$
2. $(\forall a, b, c \in D) s \bullet a \bullet b \bullet c = a \bullet c \bullet (b \bullet c)$.

Uma Algebra combinatória também é chamada de uma estrutura *combinatorialmente completa*

1.2.2 Modelos interpretativos algébricos

O primeiro tipo de modelo para o Cálculo λ surge através das estruturas aplicativas da seguinte forma:

Definição 1.26. Um *modelo* de $\lambda\beta$ é uma tripla $\mathbb{D} = \langle D, \bullet, \llbracket \cdot \rrbracket \rangle$, onde $\langle D, \bullet \rangle$ é uma estrutura aplicativa e $\llbracket \cdot \rrbracket$ é um mapeamento que leva para cada λ -termo M e cada valuação ρ , um membro $\llbracket M \rrbracket_\rho$ de D tal que:

1. Para toda variável x , $\llbracket x \rrbracket_\rho = \rho(x)$
2. Para todos os termos M e N , $\llbracket MN \rrbracket_\rho = \llbracket M \rrbracket_\rho \bullet \llbracket N \rrbracket_\rho$
3. Para toda variável x , termo M e elemento $d \in D$, $\llbracket \lambda x.M \rrbracket_\rho \bullet d = \llbracket M \rrbracket_{[d/x]\rho}$
4. Para todo termo M e valuações ρ e σ , $\llbracket x \rrbracket_\rho = \llbracket x \rrbracket_\sigma$, toda vez que $\rho(x) = \sigma(x)$ para todas as variáveis livres x de M
5. Para todo termo M e todas variáveis x e y , $\llbracket \lambda x.M \rrbracket_\rho = \llbracket \lambda y.[y/x]M \rrbracket_\rho$, dado que $y \notin FV(M)$.
6. Para todo termo M e N , se para todo $d \in D$ tem-se que $\llbracket M \rrbracket_{[d/x]\rho} = \llbracket N \rrbracket_{[d/x]\rho}$, então $\llbracket \lambda x.M \rrbracket_\rho = \llbracket \lambda x.N \rrbracket_\rho$

$\llbracket M \rrbracket_\rho$ também pode ser escrito como $\llbracket M \rrbracket_\rho^{\mathbb{D}}$ ou simplesmente $\llbracket M \rrbracket$, quando já se sabe que a interpretação é independente de ρ .

As condições 1 - 6 imitam o comportamento que um modelo de $\lambda\beta$ precisa ter. A condição 6 fornece a interpretação no modelo da regra ξ . Porém, essas condições não são suficientes para mapear $\lambda\beta\eta$, pois elas não dizem nada sobre a η -conversão. Para isso, é necessário adicionar a seguinte definição:

Definição 1.27. Um modelo de $\lambda\beta\eta$ é um λ -modelo que satisfaz a equação $\lambda x.Mx = M$ para todo termo M e $x \notin FV(M)$.

Dada essa definição, pode-se supor que:

Teorema 1.4. Um λ -modelo \mathbb{D} é extensional se, e somente se, ele é um modelo de $\lambda\beta\eta$.

1.2.3 Modelos livres de Sintaxe

O modelo definido anteriormente não define bem o que a estrutura aplicativa precisa ter como propriedades para ser um λ -modelo, já que se prende à sintaxe dos termos de $\lambda\beta$. Seria interessante definir um modelo onde não fosse necessário definir os termos antes de definir a estrutura aplicativa.

Primeiro, é necessário definir uma propriedade sobre modelos no geral:

Definição 1.28. Seja $\mathbb{D} = \langle D, \bullet, \llbracket _ \rrbracket \rangle$ um λ -modelo. Seja \sim a *equivalência extensional* definida na definição 1.23:

$$a \sim b \iff (\forall d \in D)(a \bullet d = b \bullet d)$$

Para cada $a \in D$, a classe de equivalência extensional \tilde{a} é o conjunto definido por:

$$\tilde{a} = \{b \in D : b \sim a\}$$

Para todo $a \in D$ existem M, x, ρ tais que $\llbracket \lambda x.M \rrbracket_\rho \in \tilde{a}$. Por exemplo, sejam $M \equiv ux$ e $\rho = [a/u]\sigma$ para toda valuação σ , então $\rho(u) = a$ e $\llbracket \lambda x.ux \rrbracket_\rho$ é equivalente extensionalmente a a , pois:

$$\llbracket \lambda x.ux \rrbracket_\rho \bullet d = \llbracket ux \rrbracket_{[d/x]\rho} = a \bullet d$$

Definição 1.29. (O mapeamento Λ) Seja $a \in D$ e M, x, ρ tais que $\llbracket \lambda x.M \rrbracket_\rho \in \tilde{a}$. Somente um membro de \tilde{a} é igual a $\llbracket \lambda x.M \rrbracket_\rho$, esse membro será denominado de $\Lambda(a)$, onde $\Lambda : D \rightarrow D$ possui as seguintes propriedades:

1. $\Lambda(a) \sim a$
2. $\Lambda(a) \sim \Lambda(b) \iff \Lambda(a) = \Lambda(b)$
3. $a \sim b \iff \Lambda(a) = \Lambda(b)$
4. $\Lambda(\Lambda a) = \Lambda a$
5. Existe $e \in D$ tal que $e \bullet a = \Lambda(a)$ para todo $a \in D$.

Um desses e é o membro em D que corresponde ao numeral de Church 1, pois

$$e = \llbracket 1 \rrbracket_\sigma = \llbracket \lambda xy.xy \rrbracket_\sigma$$

e

$$\llbracket \lambda xy.xy \rrbracket_\sigma \bullet a = \llbracket \lambda y.xy \rrbracket_{[a/x]\sigma} = \Lambda(a)$$

Definição 1.30. (λ -modelos livres de sintaxe) Um λ -modelo livre de sintaxe é uma tripla $\langle D, \bullet, \Lambda \rangle$ onde $\langle D, \bullet \rangle$ é uma estrutura aplicativa e Λ é um mapeamento de D para D , e

1. $\langle D, \bullet \rangle$ é uma álgebra combinatória (estrutura aplicativa combinatorialmente completa)
2. Para todo $a \in D$, $\Lambda(a) \sim a$
3. Para todo $a, b \in D$, se $a \sim b$, então $\Lambda(a) = \Lambda(b)$

4. Existe um elemento $e \in D$ tal que para todo $a \in D$, $\Lambda(a) = e \bullet a$

Teorema 1.5. Se $\langle D, \bullet, \Lambda \rangle$ é um λ -modelo livre de sintaxe, então é possível construir um λ -modelo $\langle D, \bullet, \llbracket \cdot \rrbracket \rangle$ definindo:

1. $\llbracket x \rrbracket_\rho = \rho(x)$, se x é uma variável
2. $\llbracket MN \rrbracket_\rho = \llbracket M \rrbracket_\rho \bullet \llbracket N \rrbracket_\rho$
3. $\llbracket \lambda x. N \rrbracket_\rho = \Lambda(a)$, onde a é qualquer elemento de D tal que $a \bullet d = \llbracket N \rrbracket_{[d/x]\rho}$ para todo $d \in D$.

De forma contrária, se $\langle D, \bullet, \llbracket \cdot \rrbracket \rangle$ é um λ -modelo então é possível construir um modelo livre de sintaxe $\langle D, \bullet, \Lambda \rangle$ definindo $\Lambda(a) = e \bullet a$, onde $e = \llbracket \lambda yz. yz \rrbracket_\rho$ para qualquer valuação ρ .

A existência de Λ pode ser caracterizada por um elemento e da seguinte forma:

Teorema 1.6. Seja $\mathbb{D} = \langle D, \bullet \rangle$ uma estrutura aplicativa tal que \mathbb{D} é combinatorialmente completa e existe um elemento $e \in D$ tal que:

1. para todo $a, b \in D$, $e \bullet a \bullet b = a \bullet b$
2. para todo $a, b \in D$, se $a \sim b$, então $e \bullet a = e \bullet b$.

Então $\langle D, \bullet, \Lambda \rangle$ é um λ -modelo livre de contexto, onde $\Lambda : D \rightarrow D$ é definida por $\Lambda(a) = e \bullet a$ para todo $a \in D$.

Uma tripla $\langle D, \bullet, e \rangle$ que satisfaça a hipótese do teorema anterior é chamada de λ -modelo frouxo de Scott-Meyer.

1.2.4 Ordens Parciais Completas

O modelo mais conhecido para o Cálculo λ é o Modelo de Dana Scott, o D_∞ . O modelo de Dana Scott utiliza a noção de Reticulados (Lattices) Completos, mas é possível fazer uma generalização para Ordens Parciais Completas (CPOs). Alguns modelos do Cálculo λ podem ser descritos mais facilmente por CPOs do que por reticulados.

Para não precisar supor muito, é necessário voltar algumas etapas:

Definição 1.31. Seja P um conjunto. Uma *ordem*, também chamada de *ordem parcial*, em P é uma relação binária \leq em P tal que, para todo $x, y, z \in P$,

1. (Reflexividade) $x \leq x$
2. (antissimetria) Se $x \leq y$ e $y \leq x$, então $x = y$
3. (Transitividade) Se $x \leq y$ e $y \leq z$, então $x \leq z$

O par (P, \leq) é chamado de *Conjunto ordenado*, ou *Poset* (Do inglês, Partially Ordered set).

Exemplos:

- O conjunto \mathbb{N} dos números naturais, junto com a ordem crescente usual é um poset.

- O conjunto $\{A \mid A \subseteq X\}$ dos subconjuntos de um conjunto X , escrito como $\mathcal{P}(X)$ e denominado de *Conjunto Potência*, é um poset com ordem dada pela inclusão de subconjuntos $A \subseteq B$. Essa ordem é antissimétrica pois se A e A' são subconjuntos de X onde $A \subseteq A'$ e $A' \subseteq A$, então $A = A'$. Reflexividade e transitividade se seguem da mesma maneira.

Existem várias formas de mapear um conjunto ordenado em outro de forma a manter suas propriedades:

Definição 1.32. Sejam P e Q conjuntos ordenados. Um mapeamento $\phi : P \rightarrow Q$ é dito:

1. **preservante de ordem** (também chamado de **monótono**) se $x \leq y$ em P implica em $\phi(x) \leq \phi(y)$ em Q
2. **imersivo de ordem**, escrito como $\phi : P \hookrightarrow Q$, se $x \leq y$ em P se, e somente se, $\phi(x) \leq \phi(y)$ em Q
3. **isomorfismo de ordem** se é uma imersão de ordem que mapeia P em Q

Alguns conjuntos possuem um valor menor possível ou um valor maior possível, definidos da seguinte forma:

Definição 1.33. Seja P um conjunto ordenado. P possui um elemento *mínimo* se existe $\perp \in P$ tal que $\perp \leq x$ para todo $x \in P$. De forma dual, P possui um elemento *máximo* $\top \in P$ tal que $x \leq \top$ para todo $x \in P$.

Exemplos:

- O mínimo do conjunto ordenado (\mathbb{N}, \leq) é o 0, mas não existe máximo.
- No conjunto ordenado $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$, tem-se que $\perp = \emptyset$ e $\top = X$.

Subconjuntos de conjuntos ordenados também podem possuir elementos mínimos e máximos:

Definição 1.34. Seja P um conjunto ordenado e $Q \subseteq P$. Então o elemento $u \in P$ tal que $x \leq u$ para todo $x \in Q$ é chamado de *cota superior* de Q . O elemento $l \in P$ é chamado de *menor cota superior* ou *supremo* de Q se para toda cota superior $u \in P$, $l \leq u$.

Dualmente, o elemento $u \in P$ tal que $u \leq x$ para todo $x \in Q$ é chamado de *cota inferior* de Q . O elemento $l \in P$ é chamado de *maior cota inferior* ou *infimo* de Q se para toda cota inferior $u \in P$, $u \leq l$.

Exemplo: Seja $S = \{1, 3, 5\} \subset \mathbb{N}$, então são cotas inferiores 0 e 1 e são cotas superiores todo número maior que 5.

Supremos e ínfimos podem ser tratados algebricamente da seguinte forma:

Definição 1.35.

1. O *Join* de x e y , $x \vee y$, é o supremo $\sup\{x, y\}$. O supremo de um conjunto qualquer é denotado por $\bigvee S$
2. O *meet* de x e y , $x \wedge y$ é o infimo $\inf\{x, y\}$. O infimo de um conjunto qualquer S é denotado por $\bigwedge S$.

Um reticulado pode ser definido por:

Definição 1.36. (Reticulado) Seja P um conjunto ordenado não vazio, então:

1. Se $x \vee y$ e $x \wedge y$ existem para todo $x, y \in P$, então P é chamado de *Reticulado*
2. Se $\bigvee S$ e $\bigwedge S$ existem para todo $S \subseteq P$, então P é chamado de *Reticulado Completo*

Definição 1.37. Um subconjunto X de P é dito *direcionado* se, e somente se, X é não vazio e para cada par de elementos $x, y \in X$, existe um elemento $z \in X$ tal que $x \leq z$ e $y \leq z$.

Agora finalmente a definição de uma ordem parcialmente completa:

Definição 1.38. Uma *Ordem Parcialmente Completa* (CPO) é um conjunto ordenado parcial (D, \leq) tal que:

1. D possui um elemento mínimo
2. Todo subconjunto direcionado X de D possui um supremo. Ou seja $\bigvee X$ existe para todo $X \subseteq D$

Dessa forma, é possível ver em que medida um CPO é mais geral que um reticulado, pois ele retira a condição que o ínfimo exista para todo $X \subseteq D$.

Exemplo: Seja um objeto $\perp \notin \mathbb{N}$ e seja $\mathbb{N}^+ = \mathbb{N} \cup \{\perp\}$. Defina um ordenamento em \mathbb{N}^+ como:

$$a \sqsubseteq b \text{ sse } (a = \perp \text{ e } b \in \mathbb{N}) \text{ ou } a = b$$

. O par $(\mathbb{N}^+, \sqsubseteq)$ é um CPO.

É possível descrever *morfismos* entre CPOs:

Definição 1.39. Sejam D e D' cpos e $\phi : D \rightarrow D'$ uma função,

1. ϕ é chamada *monotônica* sse $a \leq b$ implica em $\phi(a) \leq' \phi(b)$
2. ϕ é chamada *contínua* sse para todo subconjunto direcionado X de D , $\phi(\bigvee X) = \bigvee \phi(X)$.

O conjunto de todas as funções contínuas entre D e D' é denotado por $[D \rightarrow D']$.

Em $[D \rightarrow D']$ é possível definir uma relação \preceq tal que:

$$\phi \preceq \psi \leftrightarrow \phi(d) \leq' \psi(d) \text{ para todo } d \in D$$

Então \preceq é uma ordem parcial em $[D \rightarrow D']$ e $[D \rightarrow D']$ possui um elemento final:

$$\perp(d) = \perp' \text{ para todo } d \in D$$

E, se Φ é um subconjunto direcionado de $[D \rightarrow D']$, então para todo $d \in D$ o conjunto $\{\phi(d) | \phi \in \Phi\}$ é um subconjunto direcionado de D' . Com isso, é possível definir uma função $\psi : D \rightarrow D'$ como:

$$\psi(d) = \bigvee \{\phi(d) | \phi \in \Phi\} \text{ para todo } d \in D$$

Então, é possível mostrar a seguinte proposição:

Proposição 1.1. Se D e D' são cpos, então $[D \rightarrow D']$ também é um cpo pelo ordenamento parcial \preceq definido anteriormente. Seu último elemento é dado por \perp' e para qualquer subconjunto direcionado Φ de $[D \rightarrow D']$, $\bigvee \Phi$ é uma função ψ definida como anteriormente.

Dado um cpo D_0 , pode-se construir uma sequência $\{D_n\}_{n=0}^\infty$ de cpos definidos indutivamente como $D_{n+1} = [D_n \rightarrow D_n]$ para todo $n \geq 0$. O modelo D_∞ de Scott parte de $D_0 = \mathbb{N}^+$

Para estudar a relação das sequências $\{D_n\}_{n=0}^\infty$ entre si, é interessante pensar a relação de como um cpo pode estar *mergulhado* em outro.

Definição 1.40. Sejam D e D' cpos. Uma *projeção* de D em D' é um par $\langle \phi, \psi \rangle$ de funções com $\phi \in [D \rightarrow D']$ e $\psi \in [D' \rightarrow D]$ tais que:

$$\psi \circ \phi = I_D \text{ e } \phi \circ \psi \preceq I'_{D'}$$

Onde I_D e $I'_{D'}$ são as funções identidade em D e D' respectivamente.

Se $\langle \phi, \psi \rangle$ é uma projeção de D' em D então ϕ mergulha D em D' .

Para entender a composição de ϕ e ψ é necessário definir o seguinte lema:

Lema 1.6. A composição de funções contínuas entre cpos é contínua. Ou seja, se D , D' e D'' são cpos e $\psi \in [D \rightarrow D']$ e $\phi \in [D' \rightarrow D'']$ e $\phi \circ \psi$ é definido por

$$\text{para todo } d \in D (\phi \circ \psi)(d) = \phi(\psi(d))$$

Então

$$\phi \circ \psi \in [D \rightarrow D'']$$

Usando a definição de $\{D_n\}_{n=0}^\infty$ é possível construir uma projeção $\langle \phi_n, \psi_n \rangle$ de D_{n+1} para D_n para cada n . A projeção inicial de D_1 em D_0 pode ser montada da seguinte forma: Para cada $d \in D_0$, seja κ_d uma função constante $\kappa_d(c) = d$ para $c \in D_0$. κ_d é contínua, então $\kappa_d \in [D_0 \rightarrow D_0] = D_1$. Seja $\phi_0 : D_0 \rightarrow D_1$ e $\psi_0 : D_1 \rightarrow D_0$ tais que $\phi_0(d) = \kappa_d$ para $d \in D_0$ e $\psi_0(c) = c(\perp_0)$ para $c \in D_1$ (onde \perp_0 é o menor elemento de D_0). ϕ_0 e ψ_0 são contínuas e é possível ver que

$$(\psi_0 \circ \phi_0)(d) = \kappa_d(\perp_0) = d = I_{D_0}$$

e

$$(\phi_0 \circ \psi_0)(f) = \kappa_d(f(\perp_0)) \preceq I_{D_1}$$

Logo $\langle \phi_0, \psi_0 \rangle$ é uma projeção de D_1 em D_0 . Agora seja $\phi_n : D_n \rightarrow D_{n+1}$ e $\psi_n : D_{n+1} \rightarrow D_n$ gerados indutivamente por:

$$\phi_n(\sigma) = \phi_{n-1} \circ \sigma \circ \psi_{n-1} \text{ e } \psi_n(\tau) = \psi_{n-1} \circ \tau \circ \phi_{n-1}$$

para $\sigma \in D_n$ e $\tau \in D_{n+1}$. É possível mostrar que $\phi_n \in [D_n \rightarrow D_{n+1}]$ e $\psi_n \in [D_{n+1} \rightarrow D_n]$. Logo o par $\langle \phi_n, \psi_n \rangle$ é uma projeção de D_{n+1} em D_n .

As funções ψ_n e ϕ_n só elevam n um número por vez, então é possível definir uma função $\phi_{m,n}$ da seguinte forma:

Definição 1.41. Para qualquer $m, n \geq 0$, $\phi_{m,n} : D_m \rightarrow D_n$ é definido da seguinte forma:

$$\phi_{m,n} = \begin{cases} \phi_{n-1} \circ \phi_{n-2} \circ \cdots \circ \phi_{m+1} \circ \phi_m & \text{se } m < n \\ I_{D_n} & \text{se } m = n \\ \psi_n \circ \psi_{n+1} \circ \cdots \circ \psi_{m-2} \circ \psi_{m-1} & \text{se } m > n \end{cases}$$

Uma vez definida essa função, é possível mostrar o seguinte lema:

Lema 1.7. Sejam $m, n \geq 0$, então:

1. $\phi_{m,n} \in [D_m \rightarrow D_n]$
2. Se $m \leq n$, então $\phi_{n,m} \circ \phi_{m,n} = I_{D_m}$
3. Se $m > n$, então $\phi_{n,m} \circ \phi_{m,n} \preceq I_{D_m}$
4. Se k é um número entre m e n , então $\phi_{k,n} \circ \phi_{m,k} = \phi_{m,n}$

Prova:

1. Em $\phi_{m,n}$ existem três casos:
 - (a) Se $n > m$, então $\phi_{m,n} = \phi_{n-1} \circ \phi_{n-2} \circ \dots \circ \phi_{m+1} \circ \phi_m$. É fácil ver que, pelo lema da composição, sendo $\phi_m \in [D_m \rightarrow D_{m+1}]$ o início da cadeia de composições e $\phi_{n-1} \in [D_{n-1} \rightarrow D_n]$ o fim dessas cadeia, e sendo essa cadeia de composições contínua, então $\phi_{m,n} \in [D_m \rightarrow D_n]$
 - (b) Se $n = m$, $\phi_{n,n} = I_{D_n}$, mas $I_{D_n} \in [D_n \rightarrow D_n]$, logo $\phi_{n,n} \in [D_n \rightarrow D_n]$
 - (c) Se segue de forma análoga a (a)
2. Existem dois casos:
 - (a) Se $m = n$, $\phi_{n,n} \circ \phi_{n,n} = I_{D_n}$
 - (b) Se $m < n$, $\phi_{m,n} \in [D_m \rightarrow D_n]$ e $\phi_{n,m} \in [D_n \rightarrow D_m]$. Pelo lema da composição, $\phi_{n,m} \circ \phi_{m,n} \in [D_n \rightarrow D_n]$. O valor de $\phi_{n,m} \circ \phi_{m,n} \preceq I_{D_n}$ se segue da definição de projeção.
3. Deixado para o leitor
4. Deixado para o leitor

1.2.5 O Modelo de Scott

Uma vez feitas essas definições sobre cpos, é possível definir o modelo de Scott. Para isso, é necessário definir D_∞ :

Definição 1.42. • D_∞ é o conjunto de todas as sequências infinitas na forma

$$d = \langle d_0, d_1, d_2, \dots \rangle$$

tais que para todo $n \geq 0$ tem-se $d_n \in D_n$ e $\psi_n(d_{n+1}) = d_n$

- A relação \sqsubseteq em D_∞ possui a forma:

$$d = \langle d_0, d_1, d_2, \dots \rangle \sqsubseteq \langle d'_0, d'_1, d'_2, \dots \rangle \text{ se } d_n \sqsubseteq d'_n \text{ para todo } n \geq 0$$

- Se X é um subconjunto de D_∞ , então $X_n = \{a_n | a \in X\}$ é o conjunto dos n -ésimos termos de cada sequência $a \in X$.

Lema 1.8. O par $\langle D_\infty, \sqsubseteq \rangle$ definido acima é um cpo com menor elemento

$$\perp = \langle \perp_0, \perp_1, \perp_2, \dots \rangle$$

onde \perp_n é o menor elemento de D_n e menor cota superior do subconjunto direcionado X de D_∞ dado por:

$$\bigvee X = \langle \bigvee X_0, \bigvee X_1, \bigvee X_2, \dots \rangle$$

Para cada $n \geq 0$ é possível definir um par de funções contínuas que formam uma projeção de D_∞ em D_n definidas como:

Definição 1.43. Para cada $n \geq 0$, seja $\phi_{n,\infty} : D_\infty \rightarrow D_n$ e $\phi_{\infty,n} : D_n \rightarrow D_\infty$ definidas por:

$$\phi_{n,\infty} = \langle \phi_{n,0}(d), \phi_{n,1}(d), \phi_{n,2}(d), \dots \rangle$$

para todo $d \in D_n$ e

$$\phi_{\infty,n}(d) = d_n$$

para todo $d \in D_\infty$

Lema 1.9. Sejam $m, n \geq 0$ com $m \leq n$ e $a, b \in D_\infty$, então

1. O par $\langle \phi_{n,\infty}, \phi_{\infty,n} \rangle$ é uma projeção de D_∞ em D_n
2. $\phi_{m,n}(a_m) \sqsubseteq a_n$
3. $\phi_{m,\infty}(a_m) \sqsubseteq \phi_{n,\infty}(a_n)$
4. $a = \bigvee_{n \geq 0} \phi_{n,\infty}(a_n)$
5. $\phi_{n,\infty}(a_{n+1}(b_n)) \sqsubseteq \phi_{n+1,\infty}(a_{n+2}(b_{n+1}))$

A parte 4 sugere que os termos a_n servem como aproximações cada vez mais certas de a em D_∞ . Com isso, é possível ver a aplicação $(a_{n+1}(b_n))$ quando $n \rightarrow \infty$ como uma aproximação cada vez melhor da aplicação ab . Logo, é possível definir uma relação binária em D_∞ da seguinte forma:

Definição 1.44. Para todo $a, b \in D_\infty$,

$$a \bullet b = \bigvee \{ \phi_{n,\infty}(a_{n+1}(b_n)) \mid n \geq 0 \}$$

A autoaplicação presente no Cálculo λ pode ser implementada utilizando a aplicação $a_{n+1}(a_n)$.

Uma vez definida a relação binária, pode-se ver que o par $\langle D_\infty, \bullet \rangle$ é uma estrutura aplicativa. Pode-se definir um modelo livre de sintaxe a partir dessa estrutura. Para isso, é necessário mostrar que o par $\langle D_\infty, \bullet \rangle$ é uma álgebra combinatória, ou seja mostrar que existem k e s que satisfaçam as condições da Definição 1.25.

Definição 1.45 (k_n, s_n) .

1. Seja $n \geq 2$. Para $a \in D_{n-1}$, $\kappa_a : D_{n-2} \rightarrow D_{n-2}$ é a função constante $\kappa_a = \psi_{n-2}(a)$ para todo $b \in D_{n-2}$. Então $k_n : D_{n-1} \rightarrow D_{n-1}$ é $k_n(a) = \kappa_a$ para todo $a \in D_{n-1}$.

2. Seja $n \geq 3$. Para $a \in D_{n-1}$ e $a \in D_{n-2}$, $\tau_{a,b} : D_{n-3} \rightarrow D_{n-3}$ é a função constante $\tau_{a,b} = a(\phi_{n-3}(c))(b(c))$ para todo $c \in D_{n-3}$ e $\sigma_a : D_{n-2} \rightarrow D_{n-2}$ tal que $\sigma_a = \tau_{a,b}$ para todo $b \in D_{n-2}$. Então $s_n : D_{n-1} \rightarrow D_{n-1}$ é $s_n(a) = \sigma_a$ para todo $a \in D_{n-1}$.

Lema 1.10.

1. Para todo $n \geq 2$, tem-se que $k_n \in D_n$ e $\psi_n(k_{n+1}) = k_n$. Logo $\psi_1(k_2) = I_{D_0} \in D_1$.
2. Para todo $n \geq 3$, tem-se que $s_n \in D_n$ e $\psi_n(s_{n+1}) = s_n$. Logo $\psi_1(\psi_2(s_3)) = I_{D_0} \in D_1$.

Agora finalmente pode-se definir k e s :

Definição 1.46. Sejam k e s as seguintes sequências:

$$k = \langle \perp_0, I_{D_0}, k_2, k_3, \dots \rangle \text{ e } s = \langle \perp_0, I_{D_0}, \psi_2(s_3), k_3, k_4, \dots \rangle$$

Lema 1.11. As sequências k e s são elementos de D_∞

Lema 1.12. Para todo $a, b, c \in D_\infty$, $k \bullet a \bullet b = a$ e $s \bullet a \bullet b \bullet c = a \bullet c \bullet (b \bullet c)$

Logo, pelo lema anterior, é possível ver que o par $\langle D_\infty, \bullet \rangle$ é uma álgebra combinatória. O que falta para provar que esse par é um modelo é mostrar que ele é extensional.

Lema 1.13. $\langle D_\infty, \bullet \rangle$ é uma álgebra combinatória extensional

Prova: Sejam a e b elementos de D_∞ tais que $a \sim b$, ou seja, $a \bullet c = b \bullet c$ para todo $c \in D_\infty$. Seja $m \geq 0$ e d um elemento arbitrário de D_m . Seja $c = \phi_{m,\infty}(d)$. Pode ser provado que $(a \bullet c)_m = a_{m+1}(d)$ e $(b \bullet c)_m = b_{m+1}(d)$. Logo $a_{m+1} = (a \bullet c)_m = (b \bullet c)_m(d) = b_{m+1}$ e $a_{m+1} = b_{m+1}$. Ou seja $a_n = b_n$ para $n > 0$ e $a_0 = \psi_0(a_1) = \psi_0(b_1) = b_0$ (Pois ψ é contínua), logo $a = b$. Logo, $\langle D_\infty, \bullet \rangle$ é extensional.

Com isso, fica provado que $\langle D_\infty, \bullet \rangle$ é um λ -modelo livre de sintaxe

2 Teoria dos Tipos Simples

O cálculo λ não-tipado possui alguns entraves ao tentar traduzir as funções matemáticas para seus termos. Um desses entraves é o fato que as funções matemáticas são mapeamentos entre dois conjuntos. Ou seja, essas funções possuem em sua definição os valores que vão esperar e os possíveis valores que vão retornar. A função soma $+$: $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ não pode aceitar os valores *true* ou *false*. Porém, nas codificações do cálculo λ descrito até então (Sem contar com os modelos), isso é possível. Por exemplo, é possível perceber que *false* e 0 são definidos pelo mesmo termo $\lambda xy.y$ (a definição de 0 é α -equivalente a essa), o que pode gerar confusão em sua aplicação.

Outro problema do Cálculo λ não-tipado é o fato de poder existir recursões infinitas através de termos como Ω e Δ . A tipagem dos termos faz com que esse tipo de fenômeno não ocorra. O que retira a Turing-completude, mas facilita outras coisas.

Para fazer essa descrição ser mais detalhada e evitar esse tipo de erro, Church introduziu tipos.

2.1 Cálculo λ simplesmente tipado (ST λ C)

2.1.1 Tipos simples

Uma forma simples de começar a tipagem dos λ -termos é considerando uma coleção de variáveis de tipos e uma forma de produzir mais tipos através dessa coleção, chamado de *tipo funcional*

Seja \mathbb{V} a coleção infinita de variáveis de tipos $\mathbb{V} = \{\alpha, \beta, \gamma, \dots\}$, então:

Definição 2.1 (A coleção de todos os tipos simples). A coleção dos tipos simples \mathbb{T} é definida por:

1. (Variável de tipos) Se $\alpha \in \mathbb{V}$, então $\alpha \in \mathbb{T}$
2. (Tipo funcional) Se $\sigma, \tau \in \mathbb{T}$, então $(\sigma \rightarrow \tau) \in \mathbb{T}$.

Na BNF, $\mathbb{T} = \mathbb{V} | \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$

Os parênteses no tipo funcional são associativos à direita, ou seja o tipo $\alpha_1 \rightarrow \alpha_2 \rightarrow \alpha_3 \rightarrow \alpha_4$ é $(\alpha_1 \rightarrow (\alpha_2 \rightarrow (\alpha_3 \rightarrow \alpha_4)))$

Tipos simples arbitrários serão escritos com letras gregas minúsculas (Com exceção do λ) como σ, τ, \dots , mas também podem ser escrito como letras latinas maiúsculas A, B, \dots na literatura.

As variáveis de tipos são representações abstratas de tipos básicos como os números naturais \mathbb{N} ou a coleção de todas as listas \mathbb{L} . Esses tipos serão explorados mais à frente. Já os tipos funcionais representam funções na matemática como por exemplo $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, o conjunto de funções que leva dos naturais para os naturais, ou $(\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$, o conjunto de funções que recebem como entrada uma função que leva dos naturais aos inteiros e um inteiro e retorna um natural.

A sentença "O termo M possui tipo σ " é escrita na forma $M : \sigma$. Todo termo possui um tipo único, logo se x é um termo e $x : \sigma$ e $x : \tau$, então $\sigma \equiv \tau$.

Como os tipos foram introduzidos para lidar com o cálculo λ , eles devem ter regras para lidar com as operações de aplicação e abstração.

1. (*Aplicação*): No cálculo λ , sejam M e N termos, podemos fazer uma aplicação entre eles no estilo MN . Para entender como entram os tipos, é possível recordar de onde surge a intuição para a aplicação. Seja $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ a função $f(x) = x^2$, então, a aplicação de 3 em f é $f(3) = 3^2$. Nesse exemplo, omite-se o fato que para aplicar 3 a f , 3 tem que estar no domínio de f , ou seja, $3 \in \mathbb{N}$. No caso do cálculo λ , para aplicar N em M , M deve ter um tipo funcional, na forma $M : \sigma \rightarrow \tau$, e N deve ter como tipo o primeiro tipo que aparece em M , ou seja $N : \sigma$.
2. (*Abstração*): No cálculo λ , seja M um termo, podemos escrever um termo $\lambda x.M$. A abstração "constroi" a função. Para a tipagem, seja $M : \tau$ e $x : \sigma$, então $\lambda x : \sigma.M : \sigma \rightarrow \tau$. É possível omitir o tipo da variável, escrevendo no estilo: $\lambda x.M : \sigma \rightarrow \tau$.

Alguns exemplos:

1. Seja x do tipo σ , a função identidade é escrita na forma $\lambda x.x : \sigma \rightarrow \sigma$.
2. O combinador $\mathbf{B} \equiv \lambda xyz.x(yz)$ é tipado na forma $\mathbf{B} : (\sigma \rightarrow \tau) \rightarrow (\rho \rightarrow \sigma) \rightarrow \rho \rightarrow \tau$.
3. O combinador $\Delta \equiv \lambda x.xxx$ não possui tipagem. Isso ocorre pois, na aplicação xx , x precisa ter como tipo $\sigma \rightarrow \tau$ e σ , mas como x só pode ter um tipo, então $\sigma \rightarrow \tau \equiv \sigma$. O que não é possível em \mathbb{T} . Logo Δ (e Ω por motivos similares), não faz parte da teoria dos tipos simples.

O último exemplo mostra que o teorema do ponto fixo não ocorre para todos os termos na teoria dos tipos simples e que não existe recursão infinita, fazendo com que a teoria dos tipos simples deixe de ser turing-completa.

2.1.2 Abordagens para a tipagem

Existem duas formas de tipar um λ -termo:

1. (*Tipagem à la Church / Tipagem explícita / Tipagem intrínseca / Tipagem ontológica*) Nesse estilo de tipagem, só termos que possuem tipagem que satisfaz a construção de tipos interna à teoria são aceitos. Cada termo possui um tipo único.
2. (*Tipagem à la Curry / Tipagem implícita / Tipagem extrínseca / Tipagem semântica*) Nesse estilo de tipagem, os termos são os mesmos do cálculo λ não tipado e pode-se não definir o tipo do termo na sua introdução, mas deixá-lo aberto. Os tipos são buscados para o termo, por tentativa e erro.

Exemplos

1. (Tipagem intrínseca): Seja x do tipo $\alpha \rightarrow \alpha$ e y do tipo $(\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \beta$, então yx possui o tipo β . Se z possui tipo β e u possui tipo γ , então $\lambda zu.z$ tem tipo $\beta \rightarrow \gamma \rightarrow \beta$ e a aplicação $(\lambda zu.z)(yx)$ é permitida pois o tipo β de yx equivale ao tipo β que $\lambda zu.z$ recebe.

2. (Tipagem extrínseca): Nessa tipagem, começa-se com o termo $M \equiv (\lambda z u.z)(yx)$ e tenta-se adivinhar qual seu tipo e o tipo de suas variáveis. É possível notar que $(\lambda z u.z)(yx)$ é uma aplicação, então $(\lambda z u.z)$ precisa ter um tipo $A \rightarrow B$, yx precisa ter um tipo A e M terá um tipo B . Mas se $\lambda z u.z$ possui o tipo $A \rightarrow B$, então $\lambda u.z$ possui o tipo B e, como o termo é uma abstração, B precisa ser um tipo funcional, ou seja $B \equiv C \rightarrow D$. Logo $u : C$ e $z : D$. Já no caso de $yx : A$, y precisa ter um tipo funcional para ser aplicado a x , logo sendo $x : E$, $y : E \rightarrow F$. Logo temos que $x : E, y : E \rightarrow A, z : A, u : C$. Só é necessário então substituir A, C, E com tipos variáveis como α, β, γ : $x : \alpha, y : \alpha \rightarrow \beta, z : \beta, u : \gamma$.

No caso do exemplo 2, é possível escrever $x : \alpha, y : \alpha \rightarrow \beta, z : \beta, u : \gamma \vdash (\lambda z : \beta. \lambda u : \gamma. z)(yx) : \gamma \rightarrow \beta$. A lista à esquerda da \vdash (lê-se catraca) é chamada de *contexto*.

2.1.3 Regras de derivação e Cálculo de sequêntes

É necessário, na tipagem intrínseca, definir a coleção de todos os λ -termos tipados:

Definição 2.2 (λ -termos pré-tipados). A coleção $\Lambda_{\mathbb{T}}$ de λ -termos pré-tipados é definida pela BNF:

$$\Lambda_{\mathbb{T}} = V | (\Lambda_{\mathbb{T}} \Lambda_{\mathbb{T}}) | (\lambda V : \mathbb{T}. \Lambda_{\mathbb{T}})$$

Para expressar as tipagens dos λ -termos, é necessário desenvolver um conjunto de definições que ainda não foram mostradas:

Definição 2.3.

1. Uma *sentença* é $M : \sigma$, onde $M \in \Lambda_{\mathbb{T}}$ e $\sigma \in \mathbb{T}$. Nessa sentença, M é chamado de *sujeito* e σ de *tipo*
2. Uma *declaração* é uma sentença com uma *variável* como sujeito
3. Um *Contexto* é uma lista, possivelmente nula, de declarações com diferentes sujeitos
4. Um *Juizo* possui a forma $\Gamma \vdash M : \sigma$, onde Γ é o contexto e $M : \sigma$ é uma sentença.

Para estudar a tipagem, será utilizado um sistema de derivações trazido da lógica chamado de *Cálculo de sequêntes*. O cálculo de sequêntes dá a possibilidade de gerar juízos de forma formal utilizando árvores de derivação no estilo:

$$\frac{\text{premissa 1} \quad \text{premissa 2} \quad \dots \quad \text{premissa } n}{\text{Conclusão}}$$

Acima da linha horizontal estão as premissas, que são cada uma um juízo, e abaixo da linha horizontal está a conclusão, que é em si um juízo também. A linha marca uma regra de derivação específica da teoria que se está trabalhando.

Definição 2.4 (Regras de derivação para o ST λ C).

- (*var*) $\Gamma \vdash x : \sigma$, dado que $x : \sigma \in \Gamma$.

- (*appl*)

$$\frac{\Gamma \vdash M : \sigma \rightarrow \tau \quad \Gamma \vdash N : \sigma}{\Gamma \vdash MN : \tau} \text{ appl}$$

- (*abst*)

$$\frac{\Gamma, x : \sigma \vdash M : \tau}{\Gamma \vdash \lambda x : \sigma. M : \sigma \rightarrow \tau} \text{ abst}$$

A regra (*var*) não possui premissas e possui como conclusão o fato que dado um contexto Γ , se existe uma declaração em Γ , essa declaração é derivável através de Γ . Essa primeira regra é tratada como axioma em (Hindley, 1997), pois, assim como todo axioma, ela é derivável sem precisar de premissas. Na construção da árvore de dedução, essa regra está no topo como uma "raiz".

A regra (*appl*) é equivalente no cálculo ao que foi feito antes. Essa regra também é chamada na literatura de \rightarrow -*elim* ou $\rightarrow E$.

A regra (*abs*) é equivalente no cálculo à abstração e pode ser chamada na literatura de \rightarrow -*intro* ou $\rightarrow I$.

Exemplo:

$$\frac{\begin{array}{c} (1) y : \alpha \rightarrow \beta, z : \alpha \vdash y : \alpha \rightarrow \beta \quad (2) y : \alpha \rightarrow \beta, z : \alpha \vdash z : \beta \\ \hline (3) y : \alpha \rightarrow \beta, z : \alpha \vdash yz : \beta \\ \hline (4) y : \alpha \rightarrow \beta \vdash \lambda z : \alpha. yz : \alpha \rightarrow \beta \quad \text{abs} \\ \hline (5) \emptyset \vdash \lambda y : \alpha \rightarrow \beta. \lambda z : \alpha. yz : (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \alpha \rightarrow \beta \quad \text{abs} \end{array}}{\text{appl}}$$

Dada a derivação já montada, sua leitura pode ser feita de baixo para cima, feito levando em conta as premissas mais fundamentais até a conclusão final, de forma a adicionar informação aos juízos a cada passo, ou de cima para baixo, feito para entender qual caminho leva até o objetivo final.

1. Os passos (1) e (2) usam a regra (*var*)
2. O passo (3) usa a regra (*app*) usando (1) e (2) como premissas
3. O passo (4) usa a regra ((*abs*)) com (3) como premissa
4. O passo (5) usa a regra ((*abs*)) com (4) como premissa

As regras de derivação podem ser entendidas em outros contextos:

Matemática: Seja $A \rightarrow B$ o conjunto de todas as funções de A para B , então as regras se tornam:

1. (*aplicação funcional*)

$$\frac{\text{se } f \text{ é um membro de } A \rightarrow B \quad \text{e se } c \in A}{\text{então } f(c) \in B}$$

2. (*abstração funcional*)

$$\frac{\text{Se para } x \in A \text{ segue-se que } f(x) \in B}{\text{então } f \text{ é membro de } A \rightarrow B}$$

Lógica: Seja $A \Rightarrow B$ "A implica em B", então pode-se ler $A \rightarrow B$ como $A \Rightarrow B$. As regras se tornam:

1. $(\Rightarrow -elim)$

$$\frac{A \rightarrow B \quad A}{B}$$

2. $(\Rightarrow -intro)$

$$\frac{A}{\vdots} \frac{}{B}$$

A regra de eliminação é denominada de *Modus Ponens*. Ambas as regras como estão escritas aí são parte das regras definidas na *Dedução Natural*, um cálculo análogo ao cálculo de seqüentes (Toda árvore definida na dedução natural possui um equivalente no cálculo de seqüentes). Esse estilo de dedução natural é chamado de *Dedução natural no estilo de Gentzen*, para diferenciá-lo da *Dedução natural no estilo de Fitch* que é escrito como:

Definição 2.5 (λ_{\rightarrow} -termos legais). Um termo M pré-tipado em λ_{\rightarrow} é chamado *legal* se existe um contexto Γ e um tipo ρ tal que $\Gamma \vdash M : \rho$.

2.1.4 Problemas resolvidos no STLC

No geral, existem três tipos de problemas relacionados a julgamentos na teoria dos tipos:

1. *Bem-tipagem* (*Well-typedness*) ou *Tipabilidade*: esse problema surge da questão

$$? \vdash \text{termo} : ?$$

Ou seja, saber se um termo é legal e, se não é, mostrar onde sua construção falha.

(1a) *Atribuição de tipos*, que surge da questão:

$$\text{contexto} \vdash \text{termo} : ?$$

. Ou seja, dado um contexto e um termo, derive seu tipo.

2. *Checagem de tipos*, que surge da questão

$$\text{contexto} \vdash^? \text{termo} : \text{tipo}$$

. Ou seja, se é realmente verdadeiro que o termo possui o tipo no determinado contexto.

3. *Encontrar o termo*, que surge da questão:

$$\text{contexto} \vdash ? : \text{tipo}$$

. Um tipo particular desse problema é quando o contexto é vazio, ou seja

$$\emptyset \vdash ? : \text{tipo}$$

.

Todos esses problemas são *decidíveis* em λ_{\rightarrow} . Ou seja, para cada um deles existe um *algoritmo* (um conjunto de passos) que produz a resposta. Em outros sistemas, encontrar um termo se torna *indecidível*.

2.1.5 Bem-tipagem em λ_{\rightarrow}

Para exemplificar os passos necessários para resolver a bem-tipagem em λ_{\rightarrow} , será utilizado o exemplo descrito em 1.1.3, dessa vez passo a passo.

O objetivo é mostrar que o termo $M \equiv \lambda y : \alpha \rightarrow \beta. \lambda z : \alpha. yz$ é um termo legal. Logo, precisamos encontrar um contexto Γ e um tipo ρ tal que $\Gamma \vdash M : \rho$.

Primeiro, como não existem variáveis livres em M , o contexto inicial pode ser considerado vazio: $\Gamma = \emptyset$.

Inicialmente, o primeiro passo é descobrir qual a premissa, ou premissas, que gera o termo e a regra de dedução:

$$\frac{?}{\emptyset \vdash \lambda y : \alpha \rightarrow \beta. \lambda z : \alpha. yz : \dots} ?$$

Como a primeira parte do termo é um λy , a única regra possível inicialmente é a abstração:

$$\frac{\frac{?}{y : \alpha \rightarrow \beta \vdash \lambda z : \alpha. yz : \dots} ?}{\emptyset \vdash \lambda y : \alpha \rightarrow \beta. \lambda z : \alpha. yz : \dots} \text{abs}$$

Novamente, a única regra possível é a abstração:

$$\frac{\frac{\frac{?}{y : \alpha \rightarrow \beta, z : \alpha \vdash yz : \dots} ?}{y : \alpha \rightarrow \beta \vdash \lambda z : \alpha. yz : \dots} \text{abs}}{\emptyset \vdash \lambda y : \alpha \rightarrow \beta. \lambda z : \alpha. yz : \dots} \text{abs}$$

Sobrou do lado direito da catraca o termo yz que, vendo o contexto, é a aplicação de outros dois termos, logo a única regra possível é a aplicação:

$$\frac{\frac{\frac{y : \alpha \rightarrow \beta, z : \alpha \vdash y : \alpha \rightarrow \beta \quad y : \alpha \rightarrow \beta, z : \alpha \vdash z : \beta}{y : \alpha \rightarrow \beta, z : \alpha \vdash yz : \dots} \text{appl}}{\frac{y : \alpha \rightarrow \beta \vdash \lambda z : \alpha. yz : \dots}{\emptyset \vdash \lambda y : \alpha \rightarrow \beta. \lambda z : \alpha. yz : \dots} \text{abs}} \text{abs}$$

Como as premissas mais superiores são geradas de (*var*), não há mais nenhum passo de premissas e a tipagem pode ser realizada de cima para baixo.

$$\frac{\frac{\frac{\frac{y : \alpha \rightarrow \beta, z : \alpha \vdash y : \alpha \rightarrow \beta \quad y : \alpha \rightarrow \beta, z : \alpha \vdash z : \beta}{y : \alpha \rightarrow \beta, z : \alpha \vdash yz : \beta} \text{appl}}{\frac{y : \alpha \rightarrow \beta \vdash \lambda z : \alpha. yz : \beta}{\emptyset \vdash \lambda y : \alpha \rightarrow \beta. \lambda z : \alpha. yz : \beta} \text{abs}} \text{abs}}{\frac{y : \alpha \rightarrow \beta, z : \alpha \vdash y : \alpha \rightarrow \beta \quad y : \alpha \rightarrow \beta, z : \alpha \vdash z : \beta}{y : \alpha \rightarrow \beta, z : \alpha \vdash yz : \beta} \text{appl}} \text{abs}$$

$$\frac{\frac{\frac{y : \alpha \rightarrow \beta, z : \alpha \vdash y : \alpha \rightarrow \beta \quad y : \alpha \rightarrow \beta, z : \alpha \vdash z : \beta}{y : \alpha \rightarrow \beta, z : \alpha \vdash yz : \beta} \text{ appl}}{y : \alpha \rightarrow \beta \vdash \lambda z : \alpha. yz : \alpha \rightarrow \beta} \text{ abs}}{\emptyset \vdash \lambda y : \alpha \rightarrow \beta. \lambda z : \alpha. yz : (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \alpha \rightarrow \beta} \text{ abs}$$

Se existisse algum problema no caso de encontrar variáveis com tipagem incongruente nas últimas premissas ou não ter mais nenhum passo, então o termo não seria bem-tipado.

2.1.6 Checagem de tipos em λ_{\rightarrow}

Seja o juízo

$$x : \alpha \rightarrow \alpha, y : (\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \beta \vdash (\lambda z : \beta. \lambda u : \gamma. z)(yx) : \gamma \rightarrow \beta$$

é necessário construir uma árvore de inferências que demonstre que $\gamma \rightarrow \beta$ é o tipo correto do termo do lado direito.

$$\frac{?}{x : \alpha \rightarrow \alpha, y : (\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \beta \vdash ? \quad (\lambda z : \beta. \lambda u : \gamma. z)(yx) : \gamma \rightarrow \beta} ?$$

Usando a regra da aplicação, tem-se:

$$\frac{\frac{?}{x : \alpha \rightarrow \alpha, y : (\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \beta \vdash \lambda z : \beta. \lambda u : \gamma. z : ?} ? \quad \frac{?}{x : \alpha \rightarrow \alpha, y : (\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \beta \vdash yx : ?} ?}{x : \alpha \rightarrow \alpha, y : (\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \beta \vdash ? \quad (\lambda z : \beta. \lambda u : \gamma. z)(yx) : \gamma \rightarrow \beta} \text{ appl}$$

O lado direito se segue da regra da aplicação:

$$\frac{x : \alpha \rightarrow \alpha, y : (\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \beta \vdash x : \alpha \rightarrow \alpha \quad x : \alpha \rightarrow \alpha, y : (\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \beta \vdash y : (\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \beta}{x : \alpha \rightarrow \alpha, y : (\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \beta \vdash yx : ?} \text{ appl}$$

Usando essa subárvore, pode-se ver que yx possui o tipo $yx : \beta$.

O lado esquerdo se segue da abstração:

$$\frac{\frac{?}{x : \alpha \rightarrow \alpha, y : (\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \beta, z : \beta \vdash \lambda u : \gamma. z : ?} ?}{x : \alpha \rightarrow \alpha, y : (\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \beta \vdash \lambda z : \beta. \lambda u : \gamma. z : ?} \text{ abst}$$

abstraindo novamente:

$$\frac{\frac{x : \alpha \rightarrow \alpha, y : (\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \beta, z : \beta, u : \gamma \vdash z : \beta}{x : \alpha \rightarrow \alpha, y : (\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \beta, z : \beta \vdash \lambda u : \gamma. z : ?} \text{ abst}}{x : \alpha \rightarrow \alpha, y : (\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \beta \vdash \lambda z : \beta. \lambda u : \gamma. z : ?} \text{ abst}$$

Agora, é possível "descer" novamente "coletando" os tipos que foram deixados para trás:

$$\frac{\frac{x : \alpha \rightarrow \alpha, y : (\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \beta, z : \beta, u : \gamma \vdash z : \beta}{x : \alpha \rightarrow \alpha, y : (\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \beta, z : \beta \vdash \lambda u : \gamma. z : \gamma \rightarrow \beta} \text{ abst}}{x : \alpha \rightarrow \alpha, y : (\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \beta \vdash \lambda z : \beta. \lambda u : \gamma. z : ?} \text{ abst}$$

e

$$\frac{\frac{x : \alpha \rightarrow \alpha, y : (\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \beta, z : \beta, u : \gamma \vdash z : \beta}{x : \alpha \rightarrow \alpha, y : (\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \beta, z : \beta \vdash \lambda u : \gamma. z : \gamma \rightarrow \beta} \text{ abst}}{x : \alpha \rightarrow \alpha, y : (\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \beta \vdash \lambda z : \beta. \lambda u : \gamma. z : \beta \rightarrow \gamma \rightarrow \beta} \text{ abst}$$

Seja $\Gamma \equiv x : \alpha \rightarrow \alpha, y : (\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \beta$, a árvore completa fica:

$$\frac{\frac{\frac{\Gamma, z : \beta, u : \gamma \vdash z : \beta}{\Gamma, z : \beta \vdash \lambda u : \gamma. z : \gamma \rightarrow \beta} \text{ abst}}{\Gamma \vdash \lambda z : \beta. \lambda u : \gamma. z : \beta \rightarrow \gamma \rightarrow \beta} \text{ abst} \quad \frac{\Gamma \vdash x : \alpha \rightarrow \alpha \quad \Gamma \vdash y : (\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \beta}{\Gamma \vdash yx : \beta} \text{ appl}}{\Gamma \vdash (\lambda z : \beta. \lambda u : \gamma. z)(yx) : \gamma \rightarrow \beta} \text{ appl}$$

Dessa forma, é possível perceber que sim, a aplicação de $\lambda z : \beta. \lambda u : \gamma. z : \beta \rightarrow \gamma \rightarrow \beta$ com $yx : \beta$ possui o tipo $\gamma \rightarrow \beta$.

2.1.7 Encontrar termos em λ_{\rightarrow}

Seja o tipo $A \rightarrow B \rightarrow A$. A pergunta que fica é: é possível encontrar um termo para esse tipo? Essa pergunta é, vista do ponto da lógica, a mesma coisa que "é possível computar uma prova para essa proposição?" (Isso será visto mais adiante). Isso é a mesma coisa que: $? : A \rightarrow B \rightarrow A$. Pelas regras de inferência:

$$\frac{?}{? \vdash ? : A \rightarrow B \rightarrow A} ?$$

Supondo um termo $x : A$, pode-se escrever a árvore como:

$$\frac{\frac{?}{x : A \vdash ? : B \rightarrow A} ?}{x : A \vdash ? : A \rightarrow B \rightarrow A} \text{ abst}$$

E supondo um outro termo $y : B$, pode-se escrever como:

$$\frac{\frac{\frac{?}{x : A, y : B \vdash ? : A} ?}{x : A, y : B \vdash ? : B \rightarrow A} \text{ abst}}{x : A, y : B \vdash ? : A \rightarrow B \rightarrow A} \text{ abst}$$

Como já existe um termo de tipo A , pode-se substituir o termo desconhecido por x :

$$\frac{\frac{x : A, y : B \vdash x : A}{x : A, y : B \vdash ? : B \rightarrow A} \text{ abst}}{x : A, y : B \vdash ? : A \rightarrow B \rightarrow A} \text{ abst}$$

Usando a regra da abstração:

$$\frac{\frac{x : A, y : B \vdash x : A}{x : A, y : B \vdash \lambda y. x : B \rightarrow A} \text{ abst}}{x : A, y : B \vdash ? : A \rightarrow B \rightarrow A} \text{ abst}$$

Novamente:

$$\frac{\frac{x : A, y : B \vdash x : A}{x : A, y : B \vdash \lambda y. x : B \rightarrow A} \text{ abst}}{x : A, y : B \vdash \lambda xy. x : A \rightarrow B \rightarrow A} \text{ abst}$$

2.1.8 Propriedades gerais do ST λ C

Ficaram faltando nas definições anteriores a explicação de algumas propriedades gerais da sintaxe do ST λ C.

Algumas propriedades sobre os contextos:

Definição 2.6 ((Domínio, subcontexto, permutação, projeção)).

1. Se $\Gamma \equiv x_1 : \sigma_1, \dots, x_n : \sigma_n$, então o *domínio* de Γ ou $dom(\Gamma)$ é a lista (x_1, \dots, x_n) .
2. Um contexto Γ' é um *subcontexto* do contexto Γ , ou $\Gamma' \subseteq \Gamma$ se todas as declarações que ocorrem em Γ' também ocorrem em Γ na mesma ordem.
3. Um contexto Γ' é uma *permutação* do contexto Γ , ou $\Gamma' \subseteq \Gamma$ se todas as declarações que ocorrem em Γ' também ocorrem em Γ e vice-versa.
4. Se Γ é um contexto e Φ o conjunto de variáveis, então a *projeção* de Γ em Φ , ou $\Gamma \upharpoonright \Phi$, é o subcontexto Γ' de Γ com $dom(\Gamma') = dom(\Gamma) \cap \Phi$.

Em uma lista, a ordem dos elementos importa.

Exemplo: Seja $\Gamma \equiv y : \sigma, x_1 : \rho_1, x_2 : \rho_2, z : \tau, x_3 : \rho_3$, então:

1. $dom(\emptyset) = ()$, onde \emptyset é chamado de lista vazia;
2. $dom(\Gamma) = (y, x_1, x_2, z, x_3)$
3. $\emptyset \subseteq (x_1 : \rho_1, z : \tau) \subseteq \Gamma$
4. $\Gamma \upharpoonright \{z, u, x_1\} = x_1 : \rho_1, z : \tau$

Uma propriedade importante de λ_{\rightarrow} é a seguinte:

Lema 2.1. (Lemma das variáveis livres)

Se $\Gamma \vdash L : \sigma$, então $FV(L) \subseteq dom(\Gamma)$.

Como consequência desse lema, seja x uma variável livre que ocorre em L , então x possui um tipo, o qual é declarado no contexto Γ . Em um juízo, não é possível ocorrer confusão sobre o tipo de qualquer variável, pois todas as variáveis ligadas possuem seu tipo, antes da ligação λ .

Para provar esse lema, é necessário usar uma técnica de prova chamada de *indução estrutural*. Essa indução ocorre da seguinte forma:

Seja \mathcal{P} a propriedade geral que se quer provar para uma expressão arbitrária \mathcal{E} , procede-se da seguinte forma:

- Assumindo que \mathcal{P} é verdadeira para toda expressão \mathcal{E}' usada no construto \mathcal{E} (*Hipótese Indutiva*),
- e provando que \mathcal{P} também é verdadeira para \mathcal{E} .

Prova do Lema: Seja $\mathcal{J} \equiv \Gamma \vdash L : \sigma$, e suponha que \mathcal{J} é a conclusão final de uma derivação e assumamos que o conteúdo do Lema vale para as premissas usadas para inferir a conclusão.

Pela definição das regras de inferência, existem três possibilidades de regra para conclusão: (*var*), (*appl*) e (*abst*). Provando por casos:

1. Se \mathcal{J} é a conclusão da regra (*var*)
Então \mathcal{J} possui a forma $\Gamma \vdash x : \sigma$ se seguindo de $x : \sigma \in \Gamma$. O L do lemma é o x e precisamos provar que $FV(x) \subseteq dom(\Gamma)$. Mas isso é consequência direta de $x : \sigma \in \Gamma$.
2. Se \mathcal{J} é a conclusão da regra (*appl*)
Então \mathcal{J} deve ter a forma $\Gamma \vdash MN : \tau$ e precisa-se provar que $FV(MN) \in dom(\Gamma)$. Por indução, a regra já é válida para as premissas de (*appl*), que são $\Gamma \vdash M : \sigma \rightarrow \tau$ e $\Gamma \vdash N : \sigma$.
Assim, pode-se assumir que $FV(M) \subseteq dom(\Gamma)$ e $FV(N) \subseteq dom(\Gamma)$. Como $FV(MN) = FV(M) \cup FV(N)$, então $FV(MN) \subseteq dom(\Gamma)$.
3. Se \mathcal{J} é a conclusão da regra (*abst*)
Então \mathcal{J} deve ter a forma $\Gamma \vdash \lambda x : \sigma. M : \sigma \rightarrow \tau$ e precisa-se provar que $FV(\lambda x : \sigma. M) \in dom(\Gamma)$. Por indução, a regra já é válida para a premissa de (*abst*), que é $\Gamma, x : \sigma \vdash M : \tau$.
Assim, pode-se assumir que $FV(M) \subseteq dom(\Gamma) \cup \{x\}$. Como $FV(\lambda x : \sigma. M) = FV(M) \setminus \{x\}$, então $FV(M) \setminus \{x\} \subseteq dom(\Gamma)$.

Outras propriedades também podem ser provadas no mesmo estilo de indução:

Lema 2.2. (Afinamento, Condensação, Permutação)

1. (*Afinamento*) Sejam Γ' e Γ'' contextos tais que $\Gamma' \subseteq \Gamma''$. Se $\Gamma' \vdash M : \sigma$, então $\Gamma'' \vdash M : \sigma$
2. (*Condensação*) Se $\Gamma \vdash M : \sigma$, então também $\Gamma \upharpoonright FV(M) \vdash M : \sigma$
3. (*Permutação*) Se $\Gamma \vdash M : \sigma$ e Γ' é uma permutação de Γ , então Γ' também é um contexto e $\Gamma' \vdash M : \sigma$.

explicação:

- O "afinamento" de um contexto é uma extensão do contexto obtida ao adicionar declarações extras com novas variáveis. O lema anterior diz que: se M é tem tipo σ em um contexto Γ' , então M também terá um tipo σ em um contexto "mais fino" Γ' . Ou seja, a validade do tipo de M não muda ao adicionar novas declarações ao contexto.
- O lema da "condensação" diz que declarações $x : \rho$ podem ser retiradas de Γ caso x não ocorra livre em M . Ou seja, ele só deixa declarações relevantes à M .
- O lema da "permutação" diz que não importa o jeito que o contexto foi ordenado e também que declarações no contexto são mutualmente independentes, então não existe impedimento teórico para a permutação do contexto. (Isso não vai ser verdadeiro em todas as teorias)

Prova do (1): A prova será feita por indução no juízo $\mathcal{J} \equiv \Gamma' \vdash M : \sigma$, assumindo que $\Gamma' \subseteq \Gamma''$. Existem três casos para considerar correspondentes a cada regra de inferência:

1. Se \mathcal{J} é a conclusão da regra (*var*)
Então \mathcal{J} possui a forma $\Gamma' \vdash x : \sigma$ se seguindo de $x : \sigma \in \Gamma'$. Mas se $\Gamma' \subseteq \Gamma''$, então $x : \sigma \in \Gamma''$. Desse modo, usando (*var*) tem-se que $\Gamma'' \vdash x : \sigma$.

2. Se \mathcal{J} é a conclusão da regra (*appl*)
Então \mathcal{J} possui a forma $\Gamma' \vdash MN : \tau$ e precisa-se provar que $\Gamma'' \vdash MN : \tau$.
Por indução, o afinamento é válido em $\Gamma' \vdash M : \sigma \rightarrow \tau$ e $\Gamma' \vdash N : \tau$. Mas, sendo assim, tem-se que $M \in \Gamma'$ e $N \in \Gamma'$, logo: $M \in \Gamma''$ e $N \in \Gamma''$ e, usando a regra (*appl*) em cima de $\Gamma'' \vdash M : \sigma \rightarrow \tau$ e $\Gamma'' \vdash N : \tau$, tem-se que $\Gamma'' \vdash MN : \tau$.
3. Se \mathcal{J} é a conclusão da regra (*abst*)
Então \mathcal{J} tem que ter a forma $\Gamma' \vdash \lambda x : \rho. L : \rho \rightarrow \tau$. Temos que provar que $\Gamma' \vdash \lambda x : \rho. L : \rho \rightarrow \tau$, assumindo que $x \notin \text{dom}(\Gamma'')$. Por indução na regra, temos que o "afinamento" também é válido para $\Gamma', x : \rho \vdash L : \tau$. Mas, como $x \notin \text{dom}(\Gamma'')$, então podemos criar o contexto $\Gamma'', x : \rho$. É possível ver que $\Gamma', x : \rho \subseteq \Gamma'', x : \rho$. Dessa forma, se segue que: $\Gamma'', x : \rho \vdash L : \tau$ e, através da regra, $\Gamma'' \vdash \lambda x : \rho. L : \rho \rightarrow \tau$.

As provas das outras duas partes se seguem de forma similar e são deixadas para o leitor como exercício.

Outro lema importante é o seguinte:

Lema 2.3. (Lema da Geração)

1. Se $\Gamma \vdash x : \sigma$, então $x : \sigma \in \Gamma$
2. Se $\Gamma \vdash MN : \tau$, então existe um tipo σ tal que $\Gamma \vdash M : \sigma \rightarrow \tau$ e $\Gamma \vdash N : \sigma$
3. Se $\Gamma \vdash \lambda x : \sigma. M : \rho$, então existe um τ tal que $\Gamma, x : \sigma \vdash M : \tau$ e $\rho \equiv \sigma \rightarrow \tau$.

prova: Pela inspeção das regras de inferência de λ_{\rightarrow} , é possível ver que não existe outra possibilidade a não ser as listadas no lema.

Lema 2.4. (Lema do subtermo) Se M é legal, então todo subtermo de M é legal.

Então, se existem Γ_1 e σ_1 tal que $\Gamma_1 \vdash M : \sigma_1$ e se L é um subtermo de M , então existem Γ_2 e σ_2 tais que $\Gamma_2 \vdash L : \sigma_2$. Com essa descrição, é possível ver que a prova também se segue da indução nas regras.

prova: Usando a indução e supondo $\Gamma \vdash x : \sigma$ como caso base, tem-se dois casos:

- Se $M \equiv NL : \tau$, então tem-se que $\Gamma \vdash NL : \tau$, onde N e L são subtermos de M . Pelo lema da geração, existe um tipo σ tal que $\Gamma \vdash N : \sigma \rightarrow \tau$ e $\Gamma \vdash L : \sigma$. Dessa forma, N e L são legais
- Se $M \equiv \lambda x. N : \rho$, então tem-se que $\Gamma \vdash \lambda x. N : \rho$, onde N é subtermo de M . Pelo lema da geração, existe um tipo τ tal que $\Gamma, x : \sigma \vdash N : \tau$ e $\rho \equiv \sigma \rightarrow \tau$. Dessa forma M é legal e $\Gamma_2 \equiv \Gamma_1, x : \sigma$.

Uma propriedade importante da Teoria dos Tipos de Church é que cada termo possui um tipo único, que pode ser descrito no seguinte lema:

Lema 2.5. (Unicidade dos tipos) Assuma que $\Gamma \vdash M : \sigma$ e $\Gamma \vdash M : \tau$, então $\sigma \equiv \tau$.

Prova: Por indução na construção de M

Teorema 2.1. (Decidibilidade) Em λ_{\rightarrow} , os seguintes problemas são decidíveis:

1. Boa-tipagem: $? \vdash term : ?$
2. Checagem de tipos: contexto $\vdash ?$ termo : tipo
3. Encontrar termos: contexto $\vdash ?$: tipo

Prova: A prova pode ser encontrada em (Barendregt, 1992).

2.1.9 Redução no ST λ C

Até agora, não havia sido definido o comportamento da β -redução no ST λ C. Para fazer isso, é necessário introduzir o seguinte lema:

Lema 2.6. (Lema da Substituição) Seja $\Gamma', x : \sigma, \Gamma'' \vdash M : \tau$ e $\Gamma' \vdash N : \sigma$, então $\Gamma', \Gamma'' \vdash M[x := N] : \tau$.

Esse lema diz que se em um termo legal M for substituído todas as ocorrências da variável do contexto x por um termo N de mesmo tipo que x , então o resultado $M[x := N]$ possui o mesmo tipo que M .

prova: Usando indução em cima do juízo $\mathcal{J} \equiv \Gamma', x : \sigma, \Gamma'' \vdash M : \tau$.

1. Se \mathcal{J} é a conclusão da regra (*var*)
Então \mathcal{J} possui a forma $\Gamma', x : \sigma, \Gamma'' \vdash x : \sigma$. Se o contexto é bem formado, então $x : \sigma$ não está em Γ'' e $x \notin FV(N)$. Com isso, pode-se inferir que $x[x := N] : \sigma$.
2. Se \mathcal{J} é a conclusão da regra (*appl*)
Então \mathcal{J} possui a forma $\Gamma' \vdash MN : \tau$, pela regra de inferência, temos dois juízos $\mathcal{J}' \equiv \Gamma' \vdash M : \rho \rightarrow \tau$ e $\mathcal{J}'' \equiv \Gamma'x : \sigma \vdash N : \rho$ para os quais vale o lema, logo supondo $\Gamma' \vdash L : \sigma$, temos que: $\Gamma', \Gamma'' \vdash M[x := N] : \rho \rightarrow \tau$ e $\Gamma', \Gamma'' \vdash N[x := L] : \rho$. Usando a regra da aplicação, temos: $\Gamma', \Gamma'' \vdash (M[x := N])N(x := L) : \tau$ que é a mesma coisa que $\Gamma', \Gamma'' \vdash (MN)(x := L) : \tau$. \square
3. Se \mathcal{J} é a conclusão da regra (*abst*)
Então \mathcal{J} tem que ter a forma $\Gamma' \vdash \lambda u : \rho. L : \rho \rightarrow \tau$. Logo existe um outro juízo $\mathcal{J}' \equiv \Gamma', x : \sigma, \Gamma'', u : \rho \vdash L : \tau$. Mas em \mathcal{J}' , $x : \sigma$ não pode ocorrer em Γ' , logo como $\Gamma' \vdash N : \sigma$, $x \notin FV(N)$. Usando o lema, temos que $\Gamma', \Gamma'', u : \rho \vdash L[x := N] : \tau$. Usando a regra da abstração: $\Gamma', \Gamma'' \vdash \lambda u : \rho. (L[x := N]) : \rho \rightarrow \tau$, que é o mesmo que $\Gamma', \Gamma'' \vdash (\lambda u : \rho. L)[x := N] : \rho \rightarrow \tau$. \square

Tendo definido a substituição, pode-se definir a β -redução:

Definição 2.7. (β -redução de passo único para $\Lambda_{\mathbb{T}}$)

1. (Base) $(\lambda x : \sigma. M)N \rightarrow_{\beta} M[x := N]$
2. (Compatibilidade) Como na definição 1.10

Como os tipos não são importantes no processo de β -redução, o Teorema de Church-Rosser também se torna válido no λ_{\rightarrow} :

Teorema 2.2. (Teorema de Church-Rosser) A propriedade de Church-Rosser também é válida para λ_{\rightarrow}

Corolário 2.1. Suponha que $M =_{\beta} N$, então existe um L tal que $M \rightarrow_{\beta} L$ e $N \rightarrow_{\beta} L$

Lema 2.7. (Redução do sujeito) Se $\Gamma \vdash L : \rho$ e se $L \rightarrow_{\beta} L'$, então $\Gamma \vdash L' : \rho$.

Esse lema final mostra que a β -redução não afeta a tipabilidade e não muda o tipo do termo afetado, logo o mesmo contexto inicial serve para inferir.

Prova:

Teorema 2.3. (Teorema da normalização forte) Todo termo legal M é fortemente normalizável

Esse teorema garante que não existam termos que não são reduzíveis, ou seja, todo termo legal em λ_{\rightarrow} possui uma forma normal e nem todo termo legal possui um ponto fixo. Isso faz com que o ST λ C não seja turing-completo. Essa característica não é muito desejável na implementação de linguagens de programação, pois na vida real, é necessário implementar códigos que podem não terminar. Por esse motivo, é necessário formar extensões do cálculo para que ele funcione nesses casos.

O fato do universo de funções legais possíveis ser reduzido bastante no ST λ C fez com que pesquisas em modelos partindo do Cálculo λ não tipado fossem desenvolvidas. Esses modelos como trabalhados na subseção 1.2 possuem vantagens (e desvantagens) em relação à tipagem.

2.2 Extensões ao ST λ C e as Teorias dos Tipos Simples

3 O Sistema F

No Cálculo-Lambda Simplesmente Tipado, é possível definir a função identidade, a função que pega um valor como input e retorna o próprio valor como output, para cada tipo definido no cálculo:

- Para os números naturais, $\lambda x : \mathbb{N}.x$
- Para os booleanos, $\lambda x : \text{bool}.x$
- Para o tipo das funções dos naturais nos booleanos, $\lambda x : (\mathbb{N} \rightarrow \text{bool}).x$
- ...

Mas dessa forma, quanto mais tipos a teoria suportar, mais formais diferentes são possíveis de serem criadas. Isso faz com que existam vários termos análogos sem qualquer possibilidade de relação entre eles. O máximo que se pode dizer é fazer uma quantificação além de λ_{\rightarrow} e construir um tipo arbitrário α com uma função $f \equiv \lambda x : \alpha.x$ que seria a função identidade arbitrária.

Porém, dado um termo $M : \mathbb{N}$, não é possível escrever fM pois $\alpha \neq \mathbb{N}$. Para fazer isso, é necessário que a função receba também o tipo específico que ela precisa ter para receber o termo M , fazendo um segundo processo de abstração em cima da função da seguinte forma:

$$\lambda \alpha : *. \lambda x : \alpha.x$$

Nesse caso, α se torna uma variável de tipo e $*$ o tipo de todos os tipos. Esse termo é chamado de *polimórfico*, pois pode possuir diversas formas diferentes a depender do tipo escolhido:

- $(\lambda \alpha : *. \lambda x : \alpha.x) \mathbb{N} \rightarrow_{\beta} \lambda x : \mathbb{N}.x$

Para fazer essa extensão, é necessário adicionar regras de inferência e regras de tipagem que lidem com essa abstração de segunda ordem.

A tipagem para a função identidade $\lambda \alpha : *. \lambda x : \alpha.x$ é o tipo $\Pi \alpha : *. \alpha \rightarrow \alpha$, onde Π é o operador que tem como função ligar os tipos, chamado de Tipo Π ou Tipo Produto

Exemplos:

- A função de iteração D que recebe uma função $f : \alpha \rightarrow \alpha$ e retorna a aplicação dela duas vezes em cima de um termo $x : \alpha$ pode ser escrita da seguinte forma:

$$D \equiv \lambda \alpha : *. \lambda f : \alpha \rightarrow \alpha. \lambda x : \alpha. f(fx)$$

Nesse caso, D é a mesma coisa que $f \circ f$. Para os números naturais:

$$D\mathbb{N} \equiv \lambda f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}. \lambda x : \mathbb{N}. f(fx)$$

e sendo f a função sucessor s que mapeia $n : \mathbb{N}$ em $n + 1 : \mathbb{N}$, então:

$$D\mathbb{N}s \rightarrow_{\beta} \lambda x : \mathbb{N}. s(sx)$$

O tipo de D é: $D : \Pi \alpha : *. (\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha \rightarrow \alpha$

- A composição de duas funções é a aplicação de uma função em outra. É possível definir o operador de composição \circ da seguinte forma:

$$\circ \equiv \lambda\alpha : *. \lambda\beta : *. \lambda\gamma : *. \lambda f : \alpha \rightarrow \beta. \lambda g : \beta \rightarrow \gamma. \lambda x : \alpha. g(fx)$$

A sua tipagem é: $\circ : \Pi\alpha : *. \Pi\beta : *. \Pi\gamma : *. (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow \alpha \rightarrow \gamma$

3.1 O Cálculo Lambda com tipagem de Segunda Ordem

3.1.1 Regras de Inferência

Uma vez inseridas as regras de abstração e aplicação de segunda ordem, é necessário estender as regras de inferência em relação ao ST λ C

Definição 3.1 (Regra de Inferência para a Abstração).

$$\frac{\Gamma, \alpha : * \vdash M : A}{\Gamma \vdash \lambda\alpha : *. M : \Pi\alpha : *. A} \text{ } abst_2$$

Essa regra define basicamente que, sendo M um termo de tipo A em um contexto onde α possui tipo $*$, então a abstração $\alpha : *. M$ possui o tipo $\Pi\alpha : *. A$. Essa regra da abstração difere da primeira por permitir a definição de α no contexto.

Definição 3.2 (Regra de Inferência para a Aplicação).

$$\frac{\Gamma \vdash M : \Pi\alpha : *. A \quad \Gamma \vdash B : *}{\Gamma \vdash MB : A[\alpha := B]} \text{ } appl_2$$

3.1.2 O Sistema λ_2

A sintaxe de λ_2 segue de forma análoga a λ_σ , sendo descrita pela seguinte BNF:

$$\mathbb{T}2 = \mathbb{V} | (\mathbb{T}2 \rightarrow \mathbb{T}2) | (\Pi \mathbb{V} : *. \mathbb{T}2)$$

onde \mathbb{V} é a coleção dos tipos variáveis, denominados de $\alpha, \beta, \gamma, \dots$

Para os termos pré-tipados:

Definição 3.3. A coleção dos λ -termos pré-tipados de segunda ordem, ou λ_2 -termos, é definido na seguinte BNF:

$$\Lambda_{\mathbb{T}2} = V | (\Lambda_{\mathbb{T}2} \Lambda_{\mathbb{T}2}) | (\Lambda_{\mathbb{T}2} \mathbb{T}2) | (\lambda V : \mathbb{T}2. \Lambda_{\mathbb{T}2}) | (\lambda \mathbb{V} : *. \Lambda_{\mathbb{T}2})$$

Onde V é a coleção das variáveis de termos (x, y, z, \dots) . Como existem ambos \mathbb{V} e V , então a BNF possui duas formas de aplicação, uma de primeira ordem $(\lambda V : \mathbb{T}2. \Lambda_{\mathbb{T}2})$ para variáveis de termo e outra de segunda ordem $(\lambda \mathbb{V} : *. \Lambda_{\mathbb{T}2})$ para variáveis de tipo.

Da mesma forma, também existe a aplicação de primeira ordem $(\Lambda_{\mathbb{T}2} \Lambda_{\mathbb{T}2})$ e de segunda ordem $(\Lambda_{\mathbb{T}2} \mathbb{T}2)$.

As regras de parenteses em aplicação e abstração segue as regras vistas anteriormente para o ST λ C e para o $\lambda_{\beta\eta}$:

- Parenteses mais externos podem ser omitidos
- Aplicação é associativa à esquerda

- Aplicação e \rightarrow precedem ambas abstrações λ e Π
- Abstrações λ e Π sucessivas com o mesmo tipo podem ser combinadas de forma associativa à direita
- Tipos funcionais são escritos de forma associativa à direita

Exemplo: $(\Pi\alpha : *.(\Pi\beta : *.(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha))))$ pode ser escrito como $\Pi\alpha, \beta : *. \alpha \rightarrow \beta \rightarrow \alpha$.

A definição para declarações e sentenças pode ser estendida da seguinte forma:

Definição 3.4 (Declarações, sentenças).

- Uma *sentença* possui a forma $M : \sigma$ onde $M \in \Lambda_{\mathbb{T}2}$ e $\sigma \in \mathbb{T}2$ ou da forma $\sigma : *$, onde $\sigma \in \mathbb{T}2$
- Uma *declaração* é uma sentença com uma variável de termo ou uma variável de tipo como sujeito

Para $\lambda 2$ como é possível que uma variável de termo faça uso de uma variável de tipo, é necessário que a ordem da aparição dessas variáveis siga uma regra, para que uma variável não seja usada antes de ser declarada. O contexto pode ser descrito como um *domínio* da seguinte forma:

Definição 3.5 (Contexto de $\lambda 2$).

1. \emptyset é um contexto válido de $\lambda 2$
 $dom(\emptyset) = ()$, a lista vazia
2. Se Γ for um contexto de $\lambda 2$, $\alpha \in \mathbb{V}$ e $\alpha \notin dom(\Gamma)$, então $\Gamma, \alpha : *$ é um contexto de $\lambda 2$
 $dom(\Gamma, \alpha : *) = (dom(\Gamma), \alpha)$, ou seja $dom(\Gamma)$ concatenado com α
3. Se Γ for um contexto de $\lambda 2$, se $\rho \in \mathbb{T}2$ tal que $\alpha \in dom(\Gamma)$ para toda variável de tipo livre α existente em ρ e se $x \notin dom(\Gamma)$, então $\Gamma, x : \rho$ é um contexto de $\lambda 2$
 $dom(\Gamma, x : \rho) = (dom(\Gamma), x)$

Exemplos

- \emptyset é um contexto de $\lambda 2$ por (1)
- $\alpha : *$ é um contexto de $\lambda 2$ por (2)
- $\alpha : *, x : \alpha \rightarrow \alpha$ é um contexto de $\lambda 2$ por (3)
- logo $\alpha : *, x : \alpha \rightarrow \alpha, \beta : *$ é um contexto de $\lambda 2$ por (2)
- e $\alpha : *, x : \alpha \rightarrow \alpha, \beta : *, y : (\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \beta$ é um contexto de $\lambda 2$ por (3), sendo $dom(\Gamma) = (\alpha, x, \beta, y)$

A regra *var* pode ser reconstruída para lidar com os tipos de $\lambda 2$:

Definição 3.6. (Regra var em $\lambda 2$) (*var*) $\Gamma \vdash x : \sigma$ se Γ for um contexto de $\lambda 2$ e $x : \sigma \in \Gamma$

O problema é que, usando as regras até então, não é possível chegar ao juízo $\Gamma \vdash B : *$. Por isso, será introduzida uma nova regra:

Definição 3.7. (Regra de formação) $(form)$ $\Gamma \vdash B : *$ se Γ é um contexto de $\lambda 2$, $B \in \mathbb{T}2$ e todas as variáveis de tipo livres em B sejam declaradas em Γ

Regras de $\lambda 2$:

- (var) $\Gamma \vdash x : \sigma$ se Γ for um contexto de $\lambda 2$ e $x : \sigma \in \Gamma$
- $(appl)$

$$\frac{\Gamma \vdash M : \sigma \rightarrow \tau \quad \Gamma \vdash N : \sigma}{\Gamma \vdash MN : \tau} \text{ appl}$$

- $(abst)$

$$\frac{\Gamma, x : \sigma \vdash M : \tau}{\Gamma \vdash \lambda x : \sigma. M : \sigma \rightarrow \tau} \text{ abst}$$

- $(form)$ $\Gamma \vdash B : *$ se Γ é um contexto de $\lambda 2$, $B \in \mathbb{T}2$ e todas as variáveis de tipo livres em B sejam declaradas em Γ
- $(appl_2)$

$$\frac{\Gamma \vdash M : \Pi \alpha : *. A \quad \Gamma \vdash B : *}{\Gamma \vdash MB : A[\alpha := B]} \text{ appl}_2$$

- $(abst_2)$

$$\frac{\Gamma, \alpha : * \vdash M : A}{\Gamma \vdash \lambda \alpha : *. M : \Pi \alpha : *. A} \text{ abst}_2$$

Definição 3.8. ($\lambda 2$ -termos legais) Um termo M em $\Lambda_{\mathbb{T}2}$ é chamado de *legal* se existe um contexto de $\lambda 2$ Γ e um tipo ρ em $\mathbb{T}2$ tal que $\Gamma \vdash M : \rho$

3.1.3 Exemplos de Derivação

Seja a seguinte árvore de inferência incompleta:

$$\frac{?}{\emptyset \vdash \lambda \alpha : *. \lambda f : \alpha \rightarrow \alpha. \lambda x : \alpha. f(fx) : \Pi \alpha : *. (\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha \rightarrow \alpha} ?$$

Primeiro, é necessário utilizar a regra $(abst_2)$:

$$\frac{\frac{?}{\alpha : * \vdash \lambda f : \alpha \rightarrow \alpha. \lambda x : \alpha. f(fx) : (\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha \rightarrow \alpha} ?}{\emptyset \vdash \lambda \alpha : *. \lambda f : \alpha \rightarrow \alpha. \lambda x : \alpha. f(fx) : \Pi \alpha : *. (\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha \rightarrow \alpha} \text{ abst}_2$$

Após isso as regras que precisam ser utilizadas já são conhecidas a partir do ST λ C:

primeiro dois absts seguidos para f e x :

$$\frac{\frac{\frac{?}{\alpha : *, f : \alpha \rightarrow \alpha, x : \alpha \vdash f(fx) : \alpha} ?}{\alpha : *, f : \alpha \rightarrow \alpha \vdash \lambda x : \alpha. f(fx) : \alpha \rightarrow \alpha} \text{ abst}}{\alpha : * \vdash \lambda f : \alpha \rightarrow \alpha. \lambda x : \alpha. f(fx) : (\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha \rightarrow \alpha} \text{ abst} \text{ } \frac{}{\emptyset \vdash \lambda \alpha : *. \lambda f : \alpha \rightarrow \alpha. \lambda x : \alpha. f(fx) : \Pi \alpha : *. (\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha \rightarrow \alpha} \text{ abst}_2$$

O resto da Derivação fica como exercício para o leitor

3.1.4 Propriedades de $\lambda 2$

A definição de α -conversão deve ser acomodada para lidar com tipos Π :

Definição 3.9 (α -conversão ou α -equivalência).

1. (Renomeando variáveis de termo)
 $\lambda x : \sigma. M =_\alpha \lambda y : \sigma. M^{x \rightarrow y}$ se $y \notin FV(M)$ e y não ocorre como ligante em M
2. (Renomeando variáveis de tipo)
 $\lambda \alpha : *. M =_\alpha \lambda \beta : *. M[\alpha := \beta]$ se β não ocorre em M
 $\Pi \alpha : *. M =_\alpha \Pi \beta : *. M[\alpha := \beta]$ se β não ocorre em M
3. O resto das definições se segue da definição 1.8

Também é possível estender a regra de β -redução:

Definição 3.10. (β -redução de passo único)

1. (Base, de primeira ordem) $(\lambda : \sigma. M)N \rightarrow_\beta M[x := N]$
2. (Base, de segunda ordem) $(\lambda \alpha : *. M)T \rightarrow_\beta M[\alpha := T]$
3. (Compatibilidade) da mesma forma que definição 1.10

Os lemmas definidos no capítulo 2 também podem ser utilizados aqui:

Lema 3.1. Os seguintes lemas e teoremas também são válidos para $\lambda 2$:

- Lema das variáveis livres
- Lema do afinamento
- Lema da condensação
- Lema da geração
- Lema do subtermo
- Unicidade dos tipos
- Lema da substituição
- Teorema de Church-Rosser
- Redução do sujeito
- Teorema da normalização forte

Lema 3.2 (Lema da permutação). Se $\Gamma \vdash M : \sigma$ e Γ' é uma permutação de Γ e um contexto de $\lambda 2$ válido, então Γ' também é um contexto e $\Gamma' \vdash M : \sigma$.

3.2 O Sistema \mathcal{F} de girard

4 A Teoria λ_{ω}

4.1 A Teoria λ_{ω}

Na seção anterior, foi introduzida a abstração em relação termos que podiam aceitar um tipo como parâmetro. Mas também é interessante construir tipos que aceitem tipos como parâmetros. Por exemplo, os tipos $\beta \rightarrow \beta$ e $\gamma \rightarrow \gamma$ possuem uma estrutura geral $\diamond \rightarrow \diamond$, com o tipo na mesma posição em relação à seta. Uma abstração em relação a \diamond faz com que seja possível descrever uma família de tipos de forma mais simples.

Para isso, será introduzido aqui um *construtor de tipos* que gera uma função que recebe um tipo como valor e retorna um tipo como resultado, por exemplo $\lambda\alpha : *. \alpha \rightarrow \alpha$. Quando outros tipos são aplicados a essa função, ela muda seu comportamento:

$$(\lambda\alpha : *. \alpha \rightarrow \alpha)\beta \rightarrow_{\beta} \beta \rightarrow \beta$$

$$(\lambda\alpha : *. \alpha \rightarrow \alpha)\gamma \rightarrow_{\beta} \gamma \rightarrow \gamma$$

A questão que fica é definir o tipo dessas expressões. Pois sendo $\alpha : *$ e $\alpha \rightarrow \alpha : *$, então $\lambda\alpha : *. \alpha \rightarrow \alpha : * \rightarrow *$. Logo serão adicionados tipos como $* \rightarrow *$, $* \rightarrow (* \rightarrow *)$, etc. à sintaxe.

Os tipos $*$ e as setas entre $*$ são chamados de *espécies* (*kinds* em inglês). A BNF para o conjunto de todas as espécies é:

$$\mathbb{K} = * | \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$$

A notação dos parenteses segue a notação para os tipos simples introduzida anteriormente.

O tipo de todas as espécies é denotado por \square . Sendo assim $* : \square$ e $* \rightarrow * : \square$, etc. Se κ é uma espécie, então qualquer termo M "do tipo" κ é chamado de construtor de tipos, ou somente *construtor*. Então $\alpha : *. \alpha \rightarrow \alpha$ é um construtor, assim como somente $\alpha \rightarrow \alpha$ também.

Definição 4.1 (Construtores, construtores próprios).

1. Se $\kappa : \square$ e $M : \kappa$, então M é um *construtor*. Se $\kappa \neq *$, então M é um *construtor próprio*
2. O conjunto de todas as variedades (*sorts*) é $\{*, \square\}$

Para falar de uma variedade qualquer, será introduzido o símbolo s como meta variável.

Definição 4.2 (níveis). Com essa construção, existem quatro níveis na sintaxe: Nível 1: termos Nível 2: construtores e tipos com construtores próprios Nível 3: espécies Nível 4: consiste somente em \square

Ao unir esses níveis é possível escrever correntes de juízos como $t : \sigma : * \rightarrow * : \square$, onde $t : \sigma$, $\sigma : * \rightarrow *$ e $* \rightarrow * : \square$ são juízos.

4.1.1 Regra sort e regra var em $\lambda\omega$

É necessário escrever novas regras de inferência para $\lambda\omega$, a primeira delas sendo a regra das espécies:

Definição 4.3 (Regra das variedades, Sort-rule).

(*sort*) $\emptyset \vdash * : \square$

A próxima regra é a regra de que todo termo ocorrendo em um contexto é derivável naquele contexto, para isso é necessário ter como base que o tipo do termo escolhido seja bem formado, então a regra (*var*) vai mudar em relação às teorias vistas anteriormente:

Definição 4.4 (Var-rule).

$$(var) \frac{\Gamma \vdash A : s}{\Gamma, x : A \vdash x : A} \text{ se } x \notin \Gamma$$

A premissa dessa regra de derivação requer que A seja ou um tipo, se $s \equiv *$, ou uma espécie (se $s \equiv \square$). Então x pode ser ou um tipo variável ou um termo variável.

Exemplo de derivação:

$$\frac{\frac{\emptyset \vdash * : \square}{\alpha : * \vdash \alpha : *} (var)}{\alpha : *, x : \alpha \vdash x : \alpha} (var)$$

A primeira linha é formada utilizando a sort-rule, a segunda linha usa a var-rule com $s \equiv \square$ e a terceira linha usa a var-rule com $s \equiv *$

4.1.2 A regra do enfraquecimento em $\lambda\omega$

Somente usando as regras (*var*) e (*sort*) não é possível derivar $\alpha : *, \beta : * \vdash \alpha : *$, então é interessante desenvolver uma regra que permita fazer isso. A regra desejada seria uma regra que, partindo de $\alpha : * \vdash \alpha : *$, chegasse em $\alpha : *, \beta : * \vdash \alpha : *$. Ou seja, uma regra que adicionasse mais informação ao contexto do que o "necessario", que o enfraquecesse.

A regra do enfraquecimento segue a seguinte forma:

Definição 4.5 (Regra do enfraquecimento, (*weak*)).

$$(weak) \frac{\Gamma \vdash A : B \quad \Gamma \vdash C : s}{\Gamma, x : C \vdash A : B} \text{ se } x \notin \Gamma$$

Ou seja, assumindo que tenha sido derivado o juízo $\Gamma \vdash A : B$, é possível enfraquecer o contexto Γ ao adicionar uma declaração arbitrária no final.

Então a derivação anterior se torna:

$$\frac{\frac{\emptyset \vdash * : \square}{\alpha : * \vdash \alpha : *} (var) \quad \frac{\emptyset \vdash * : \square \quad \emptyset \vdash * : \square}{\alpha : * \vdash * : \square} (weak)}{\alpha : *, \beta : * \vdash \alpha : *} (weak)$$

Também é possível fazer a seguinte derivação:

$$\frac{\frac{\emptyset \vdash * : \square \quad \emptyset \vdash * : \square}{\alpha : * \vdash * : \square} (weak)}{\alpha : *, \beta : * \vdash \beta : *} (var)$$

4.1.3 A regra de formação de $\lambda\omega$

A regra de inferência para formar tipos e espécies é descrita como:

$$\textbf{Definição 4.6} \text{ (Regra de Formação, (form)).}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A : s \quad \Gamma \vdash B : s}{\Gamma \vdash A \rightarrow B : s} \text{ (form)}$$

Note que não existem tipos dependentes de tipos em $\lambda\omega$, logo não existem tipos Π .

Exemplo:

$$\frac{\frac{\dots}{\alpha : *, \beta : * \vdash \alpha : *} (\dots) \quad \frac{\dots}{\alpha : *, \beta : * \vdash \beta : *} (\dots)}{\alpha : *, \beta : * \vdash \alpha \rightarrow \beta : *} \text{ (form)}$$

As duas subárvores geradas pela regra de formação nesse caso já foram detalhadas na subseção anterior, logo foram omitidas aqui.

Exemplo:

$$\frac{\frac{\dots}{\alpha : * \vdash * : \Box} (\dots) \quad \frac{\dots}{\alpha : * \vdash * : \Box} (\dots)}{\alpha : * \vdash * \rightarrow * : \Box} \text{ (form)}$$

4.1.4 Regras de abstração e aplicação

As regras de abstração e aplicação são definidas da seguinte forma:

Definição 4.7.

- (*appl*)

$$\frac{\Gamma \vdash M : A \rightarrow B \quad \Gamma \vdash N : A}{\Gamma \vdash MN : B} \text{ (appl)}$$

- (*abst*)

$$\frac{\Gamma, x : A \vdash M : B \quad \Gamma \vdash A \rightarrow B : s}{\Gamma \vdash \lambda x : A. M : A \rightarrow B} \text{ (abst)}$$

Exemplo: derivação de $(\lambda\alpha : *. \alpha \rightarrow \alpha)\beta$

$$\frac{\frac{?}{? \vdash \lambda\alpha : *. \alpha \rightarrow \alpha} ? \quad \frac{?}{? \vdash \beta : *} ?}{? \vdash (\lambda\alpha : *. \alpha \rightarrow \alpha)\beta} \text{ (appl)}$$

A única regra que resolve o lado direito é a (*var*), logo o contexto deve ser também $\beta : *$:

$$\frac{\frac{?}{\beta : * \vdash \lambda\alpha : *. \alpha \rightarrow \alpha} ? \quad \frac{\emptyset \vdash * : \Box}{\beta : * \vdash \beta : *} \text{ (var)}}{\beta : * \vdash (\lambda\alpha : *. \alpha \rightarrow \alpha)\beta} \text{ (appl)}$$

Já no lado esquerdo, é necessário usar a regra (*abst*):

$$\frac{\frac{\beta : *, \alpha : * \vdash \alpha \rightarrow \alpha : * \quad \beta : * \vdash * \rightarrow * : \Box}{\beta : * \vdash \lambda\alpha : *. \alpha \rightarrow \alpha} \text{ (abst)} \quad \frac{\emptyset \vdash * : \Box}{\beta : * \vdash \beta : *} \text{ (var)}}{\beta : * \vdash (\lambda\alpha : *. \alpha \rightarrow \alpha)\beta} \text{ (appl)}$$

O resto das duas subárvores do lado esquerdo se segue das derivações feitas anteriormente.

4.1.5 Regra da Conversão

A regra da conversão faz com que termos que possuem um tipo que possa ser β -reduzido a outro, possa passar a possuir o tipo mais simples:

Definição 4.8 (Regra de Conversão, (*form*)).

$$\frac{\Gamma \vdash A : B \quad \Gamma \vdash B' : s}{\Gamma \vdash A : B'} \text{ se } B =_{\beta} B'$$

Regras de $\lambda\omega$:

- (*sort*) $\emptyset \vdash * : \square$
- (*var*)

$$(\text{var}) \frac{\Gamma \vdash A : s}{\Gamma, x : A \vdash x : A} \text{ se } x \notin \Gamma$$

- (*weak*)

$$(\text{weak}) \frac{\Gamma \vdash A : B \quad \Gamma \vdash C : s}{\Gamma, x : C \vdash A : B} \text{ se } x \notin \Gamma$$

- (*form*)

$$\frac{\Gamma \vdash A : s \quad \Gamma \vdash B : s}{\Gamma \vdash A \rightarrow B : s} (\text{form})$$

- (*appl*)

$$\frac{\Gamma \vdash M : A \rightarrow B \quad \Gamma \vdash N : A}{\Gamma \vdash MN : B} (\text{appl})$$

- (*abst*)

$$\frac{\Gamma, x : A \vdash M : B \quad \Gamma \vdash A \rightarrow B : s}{\Gamma \vdash \lambda x : A. M : A \rightarrow B} (\text{abst})$$

- (*conv*)

$$\frac{\Gamma \vdash A : B \quad \Gamma \vdash B' : s}{\Gamma \vdash A : B'} \text{ se } B =_{\beta} B'$$

4.1.6 Propriedades

O sistema $\lambda\omega$ satisfaz a maioria das propriedades de sistemas anteriores. A única modificação necessária é no Lema da Unicidade dos tipos, pois tipos não são mais literalmente unicos, mas são únicos a menos de β -conversão:

Lema 4.1 (Unicidade dos tipos a menos de conversão). Se $\Gamma \vdash A : B_1$ e $\Gamma \vdash A : B_2$, então $B_1 =_{\beta} B_2$

4.2 O Sistema \mathcal{F}_{ω} de Girard

Part II

Construções paralelas ao cubo

Part III

Semântica Categorical das teorias do cubo lambda

1 Introdução à Teoria das Categorias

A teoria das categorias é uma área de matemática que relaciona diversas áreas, como por exemplo, Teoria dos Grupos, Teoria dos Anéis, Topologia, Teoria dos Grafos, etc. Cada uma dessas teorias tem em comum a definição de seus objetos (Grupos, Anéis, Espaços topológicos, grafos) e formas de relacionar esses objetos (Homomorfismos de grupos, homomorfismos de anéis, homeomorfismos, homomorfismos entre grafos).

1.1 Categorias

Para estudar categorias, primeiro é necessário defini-las:

Definição 1.1 (Categoria, (AWODEY, 2010)). Uma *categoria* \mathbf{C} consiste em:

- *Objetos*: A, B, C, \dots
- *Setas* (Morfismos): f, g, h, \dots
- Para cada seta f existem objetos:

$$\text{dom}(f), \text{cod}(f)$$

chamados de *domínio* e *contradomínio* de f . A escrita

$$f : A \rightarrow B$$

indica que $A = \text{dom}(f)$ e $B = \text{cod}(f)$

- Sejam setas $f : A \rightarrow B$ e $g : B \rightarrow C$ com:

$$\text{cod}(f) = \text{dom}(g)$$

existe uma seta $g \circ f : A \rightarrow C$ chamada de *composição* de f com g

- Para cada objeto A existe uma seta

$$1_A : A \rightarrow A$$

chamada de *seta identidade* de A

Esses dados precisam satisfazer os seguintes axiomas:

- (Associatividade) Sejam $f : A \rightarrow B$, $g : B \rightarrow C$ e $h : C \rightarrow D$ setas, então:

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

- (Identidade) Seja $f : A \rightarrow B$ uma seta, então

$$f \circ 1_A = f = 1_B \circ f$$

Para quaisquer objetos A e B em uma categoria C , a coleção de setas de A para B é escrito $Hom_C(A, B)$

Alguns exemplos de categorias são:

1. A categoria **Set** que possui conjuntos como objetos e funções como morfismos.
2. Os conjuntos ordenados descritos na Definição 1.31 também podem formar uma categoria junto com os mapeamentos monótonos descritos na Definição 1.32, chamada de **Pos**
3. Um monóide é um conjunto M equipado com uma operação binária $\cdot : M \times M \rightarrow M$ e um elemento unitário $e \in M$ tal que para todo $x, y, z \in M$:

$$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$$

e

$$e \cdot x = x = x \cdot e$$

. Por exemplo, o conjunto dos naturais \mathbb{N} , junto à operação de soma usual $+: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, pode ser considerado um monóide, com o 0 como elemento unitário.

Dois monóides (M, \cdot) e (N, \star) podem ser relacionados através de um *homomorfismo* $\phi : M \rightarrow N$ tal que

$$\phi(x \cdot y) = \phi(x) \star \phi(y)$$

e

$$\phi(e_M) = e_N$$

A categoria que possui monóides como objetos e homeomorfismos como morfismos é denominada de **Mon**

4. Um grupo G é um monóide onde para todo $a \in G$ existe um elemento $b \in G$ tal que $a \cdot b = e$. b é chamado de *inverso* de a e é escrito como a^{-1} . Um homomorfismo ϕ entre dois grupos (G, \cdot) e (H, \star) obedece as duas condições para homomorfismos entre monóides mais a seguinte:

$$\phi(a^{-1}) = \phi(a)^{-1}$$

A categoria que possui monóides como objetos e homomorfismos como morfismos é denominada de **Grp**

5. ((RIEHL, 2017)) Um grupo G (e também um monóide) define uma categoria BG com um único objeto. Os elementos do grupo são seus morfismos e a composição é dada por \cdot . O elemento unitário $e \in G$ age como o morfismo identidade para o objeto único dessa categoria.
Por exemplo, para $(\mathbb{Z}, +)$, $e = 0$ e será representado por $0 : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$. Sendo $1 : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ e $2 : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, então a composição $1 \circ 2$ é em $(\mathbb{Z}, +)$ equivalente a $1 + 2$ e $1 \circ 2 = 3$.

Definição 1.2 (Isomorfismos, (AWODEY, 2010)). Em qualquer categoria C , um morfismo $f : A \rightarrow B$ é chamado de *isomorfismo* se existe um morfismo $g : B \rightarrow A$ em C tal que

$$g \circ f = 1_A \text{ e } f \circ g = 1_B$$

g é chamado de inverso de f e, por ser único, pode ser denotado por f^{-1} . Os objetos A e B são ditos *isomórficos* e denotados por $A \cong B$.
Exemplos:

1. Os isomorfismos em **Set** são bijeções
2. Os isomorfismos em **Grp** são os homomorfismos bijetivos

Definição 1.3 (Categorias pequenas, (AWODEY, 2010)). Uma categoria C é chamada de *pequena* se a coleção C_0 de objetos em C e a coleção C_1 de morfismos em C são conjuntos. Caso contrário, C é chamada de *grande*.

Todas as categorias finitas são pequenas, assim como a categoria \mathbf{Sets}_{fin} de conjuntos finitos. Já a categoria **Sets** é grande (Pois caso a coleção de seus objetos fosse um conjunto, isso geraria o paradoxo de Russell).

Definição 1.4 (Categoria localmente pequena, (AWODEY, 2010)). Uma categoria C é chamada de *localmente pequena* se para quaisquer objetos X e Y em C , a coleção de morfismos $Hom_C(X, Y) = \{f \in C_1 | f : X \rightarrow Y\}$ é um conjunto (Chamado de *hom-set*).

1.2 Categorias novas das antigas

Dada a definição de categorias, é interessante analisar o que pode ser feito com uma categoria e como gerar novas categorias de categorias antigas.

Definição 1.5 (Categoria oposta, (AWODEY, 2010)). A categoria *oposta* (ou "dual") C^{op} de uma categoria C possui os mesmos objetos que C , mas para cada morfismo $f : A \rightarrow B$ em C existe um morfismo $f : B \rightarrow A$ em C^{op} .

A categoria oposta inverte todos os morfismos da categoria que parte. Então seja f^{op} o morfismo invertido, a composição na categoria oposta se torna: $f^{op} \circ g^{op} = (g \circ f)^{op}$.

É interessante perceber que cada resultado na Teoria das Categorias terá um resultado dual ganho "de graça" ao fazer esse resultado nas categorias duais.

Também é possível ver que $(C^{op})^{op} = C$.

Definição 1.6 (Categoria de setas, (ROSIK, 2022)). Seja uma categoria C , definimos a *categoria de setas* de C , denotada por C^{\rightarrow} , tendo:

- Objetos: morfismos $A \xrightarrow{f} B$ de C
- Morfismos: a partir de um objeto de C^{\rightarrow} $A \xrightarrow{f} B$ para outro $A' \xrightarrow{f'} B'$ um morfismo é um par $\langle A \xrightarrow{f} B, A' \xrightarrow{f'} B' \rangle$ de morfismos de C fazendo o diagrama

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{h} & A' \\ f \downarrow & & \downarrow f' \\ B & \xrightarrow{k} & B' \end{array}$$

comutar. Ou seja, $k \circ f = f' \circ h$ em C .

A composição das setas é feita ao colocar quadrados comutativos lado a lado da seguinte forma:

$$\begin{array}{ccccc}
 A & \xrightarrow{h} & A' & \xrightarrow{l} & A'' \\
 \downarrow f & & \downarrow f' & & \downarrow f'' \\
 B & \xrightarrow{k} & B' & \xrightarrow{m} & B''
 \end{array}$$

tal que $\langle l, m \rangle \circ \langle h, k \rangle = \langle l \circ h, m \circ k \rangle$

A identidade de um objeto $A \xrightarrow{f} B$ é dado pelo par $\langle id_A, id_B \rangle$

Outro tipo de categoria de interesse é a categoria slice:

Definição 1.7 (Categoria Slice, (AWODEY, 2010)). A categoria slice \mathbf{C}/C de uma categoria \mathbf{C} sobre um objeto $C \in \mathbf{C}$ possui:

- Objetos: todas as setas $f \in \mathbf{C}$ tal que $cod(f) = C$
- Morfismos: g de $f : X \rightarrow C$ e $f' : X' \rightarrow C$ é uma seta $g : X \rightarrow X'$ em \mathbf{C} tal que $f' \circ g = f$ como no diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{g} & X' \\
 & \searrow f & \swarrow f' \\
 & C &
 \end{array}$$

A composição desses morfismos é basicamente a junção de desses triângulos

Também é possível definir a categoria (C/\mathbf{C}) chamada de categoria de co-slice, onde os objetos são setas f de \mathbf{C} tal que $dom(f) = C$ e uma seta entre $f : C \rightarrow X$ e $f' : C \rightarrow X'$ é uma seta $h : X \rightarrow X'$ tal que $h \circ f = f'$ como no diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
 & C & \\
 f \nearrow & & \nwarrow f' \\
 X & \xrightarrow{g} & X'
 \end{array}$$

Também é possível definir a noção de subcategoria:

Definição 1.8 (Subcategoria, (ROSIK, 2022)). Uma categoria \mathbf{D} dita *subcategoria* de \mathbf{C} é obtida restringindo a coleção de objetos de \mathbf{C} para uma subcoleção (Ou seja, todo \mathbf{D} -objeto é um \mathbf{C} -objeto) e a coleção de morfismos é obtida restringindo a coleção de morfismos de \mathbf{C} onde:

- Se o morfismo $f : A \rightarrow B$ está em \mathbf{D} , então A e B estão em \mathbf{D}
- Se A está em \mathbf{D} , então também está o morfismo identidade id_A
- Se $f : A \rightarrow B$ e $g : B \rightarrow C$ estão em \mathbf{D} , então $g \circ f : A \rightarrow C$ também está e também:

Definição 1.9 (Subcategoria cheia, (ROSIK, 2022)). Seja \mathbf{D} uma subcategoria de \mathbf{C} . Então \mathbf{D} é uma *subcategoria cheia* de \mathbf{C} quando \mathbf{C} não possui setas $A \rightarrow B$ além dos que já existem em \mathbf{D} . Ou seja para quaisquer objetos A e B em \mathbf{D} , \mathbf{C} :

$$\text{Hom}_{\mathbf{D}}(A, B) = \text{Hom}_{\mathbf{C}}(A, B)$$

Exemplo:

- A categoria **FinSet** de conjuntos finitos é uma subcategoria de **Set**.
- Um grupo (G, \cdot) é dito *abeliano*, ou comutativo, caso para quaisquer dois elementos $a, b \in G$, $a \cdot b = b \cdot a$. A categoria de grupos abelianos **Ab** é uma subcategoria (cheia) de **Grp**

1.3 Funtores

Sendo categorias estruturas que se iniciam com objetos e morfismos entre esses objetos, é natural se perguntar se existem morfismos entre categorias. Esses morfismos deveriam também manter a estrutura entre categorias, como por exemplo os morfismos entre grupos mantêm a estrutura do grupo, mesmo que mudando-se os objetos e os morfismos internos à categoria. Esse tipo de morfismo entre categorias é chamado de *funtor* e definido da seguinte forma:

Definição 1.10 (Funtor, (AWODEY, 2010)). Um funtor $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ entre categorias \mathcal{C} e \mathcal{D} é um mapeamento de objetos em objetos e setas em setas tal que:

1. $F(f : A \rightarrow B) = F(f) : F(A) \rightarrow F(B)$
2. $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$
3. $F(1_A) = 1_{F(A)}$

A primeira parte define que para cada objeto A em \mathcal{C} , existe um objeto correspondente $F(A)$ em \mathcal{D} . Também define que Funtores preservam os domínios e codomínios de cada morfismo.

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ & \searrow g \circ f & \downarrow g \\ & & C \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} F(A) & \xrightarrow{F(f)} & F(B) \\ & \searrow F(g) \circ F(f) & \downarrow F(g) \\ & & F(C) \end{array}$$

$$\mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{D}$$

A segunda parte define que existindo uma composição de morfismos em \mathcal{C} , também existirá uma composição correspondente em \mathcal{D} .

A terceira parte define que as identidades também são preservadas.

Em algumas partes da matemática porém, os funtores não preservam a ordem dos morfismos. Os funtores que preservam como da regra 1 da parte anterior são chamados de *funtores covariantes*. É interessante também definir os funtores *contravariantes*:

Definição 1.11 (Funtor Contravariante, (AWODEY, 2010)). Um funtor da forma $F : \mathcal{C}^{op} \rightarrow \mathcal{D}$ é chamado de *funtor contravariante* em \mathcal{C} . Ou seja, as regras se tornam:

1. Seja $f : A \rightarrow B$ em \mathcal{C} , então: $F(f : A \rightarrow B) : F(B) \rightarrow F(A)$
2. Seja $g \circ f$ em \mathcal{C} , então $F(g \circ f) = F(f) \circ F(g)$
3. $F(1_A) = 1_{F(A)}$

Um exemplo essencial de funtor contravariante são os *pré-feixes*, definidos da seguinte forma:

Definição 1.12 (Pré-feixe, (ROSIK, 2022)). Um *pré-feixe* (com valor de conjunto) em \mathcal{C} , onde \mathcal{C} é uma categoria pequena, é um funtor $\mathcal{C}^{op} \rightarrow \mathbf{Set}$

O pré-feixe pode ser visto como uma atribuição de dados locais de acordo com a estrutura de \mathcal{C} .

Uma vez definidos funtores, o próximo passo é se perguntar se existe uma categoria que usa funtores como morfismos entre seus objetos, e a resposta é que existe tal categoria, onde objetos são categorias, definida da seguinte forma:

Definição 1.13 (**Cat**, (ROSIK, 2022)). A categoria de *categorias pequenas*, denotada por **Cat**, é a categoria que possui:

- objetos: categorias pequenas
- morfismos: funtores entre elas

Para demonstrar que essa é de fato uma categoria, é necessário definir um morfismo/funtor identidade e a ideia de composição entre morfismos/funtores.

Definição 1.14 ((ROSIK, 2022)). Dada uma categoria \mathcal{C} , o *funtor identidade* é o funtor $id_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ que faz o esperado: leva um objeto a ele mesmo e um morfismos a ele mesmo tal que:

- $id_{\mathcal{C}}(c) = c$
- $id_{\mathcal{C}}(f) = f$

Para a composição, sejam \mathcal{C} , \mathcal{D} e \mathcal{E} categorias pequenas, e $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ e $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{E}$ dois funtores, a composição de G com F , o funtor composição $G \circ F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{E}$, é definido tal que para objetos c em \mathcal{C} , $(G \circ F)(c) = G(F(c))$ e para um morfismo $f : c \rightarrow c'$ em \mathcal{C} $(G \circ F)(f) = G(F(f))$. Para definir que $G \circ F$ é um funtor é necessário pedir sua *funtorialidade*, ou seja, que ele obedeça às regras impostas na definição de funtores:

- (1) Sejam f, g funtores em \mathcal{C} tal que $g \circ f$ também está definido em \mathcal{C} , então:

$$\begin{aligned}
 (G \circ F)(g \circ f) &= G(F(g \circ f)) \\
 &= G(F(g) \circ F(f)) \\
 &= G(F(g)) \circ G(F(f)) \\
 &= (G \circ F)(g) \circ (G \circ F)(f)
 \end{aligned}$$

onde a primeira e a última linha são a definição da composição de funtores e o meio é a derivação dessa composição.

(2) Seja c qualquer objeto em \mathcal{C} , então:

$$\begin{aligned}(G \circ F)(1_c) &= G(F(1_c)) \\ &= G(1_{F(c)}) \\ &= 1_{G(F(c))} \\ &= 1_{(G \circ F)(c)}\end{aligned}$$

Part IV

Teorias Homotópicas de Tipos

Part V

Semântica Categorical da teoria homotópica de tipos

Part VI
Lógica

Part VII

Apêndices

1 Apêndice Histórico

Esse apêndice histórico serve como uma forma do leitor se localizar nos fatos mais importantes para as áreas do livro. Cada fato vêm com um parentese antes para definir para qual área, ou áreas, o fato é relevante

- 1984 - (HoTT, ∞ -cats) - Publicação por Grothendieck do seu *Esquisse d'un Programme* (Esboço de um programa) onde ele publica a **Hipótese da Homotopia** de que os n -tipos homotópicos podem ser equivalentes ao n -grupoide, com $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$
- 1991 - (HoTT, ∞ -cats) - Kapranov e Voevodsky publicam uma prova de que a categoria homotópica dos espaços é equivalente à categoria homotópica dos ∞ -grupoides fracos (Hipótese da homotopia para $n = \infty$). Essa prova possuía uma falha e essa falha foi a motivação para que Voevodsky desenvolvesse a Homotopy Type Theory
- 1998 - (∞ -cats) - Carlos Simpson publica um artigo que possuía um contraexemplo ao resultado principal do artigo de 1991 de Kapranov-Voevodsky

References

- AWODEY, S. **Category theory**. [S.l.]: OUP Oxford, 2010. v. 52.
- RIEHL, E. **Category theory in context**. [S.l.]: Courier Dover Publications, 2017.
- ROSIK, D. **Sheaf theory through examples**. [S.l.]: MIT Press, 2022.