

# 1 Introdução à Teoria das Categorias

A teoria das categorias é uma área de matemática que relaciona diversas áreas, como por exemplo, Teoria dos Grupos, Teoria dos Anéis, Topologia, Teoria dos Grafos, etc. Cada uma dessas teorias tem em comum a definição de seus objetos (Grupos, Anéis, Espaços topológicos, grafos) e formas de relacionar esses objetos (Homomorfismos de grupos, homomorfismos de anéis, homeomorfismos, homomorfismos entre grafos).

## 1.1 Categorias

Para estudar categorias, primeiro é necessário defini-las:

**Definição 1.1** (Categoria, (??)). Uma *categoria*  $\mathbf{C}$  consiste em:

- *Objetos*:  $A, B, C, \dots$
- *Setas* (Morfismos):  $f, g, h, \dots$
- Para cada seta  $f$  existem objetos:

$$\text{dom}(f), \text{cod}(f)$$

chamados de *domínio* e *contradomínio* de  $f$ . A escrita

$$f : A \rightarrow B$$

indica que  $A = \text{dom}(f)$  e  $B = \text{cod}(f)$

- Sejam setas  $f : A \rightarrow B$  e  $g : B \rightarrow C$  com:

$$\text{cod}(f) = \text{dom}(g)$$

existe uma seta  $g \circ f : A \rightarrow C$  chamada de *composição* de  $f$  com  $g$

- Para cada objeto  $A$  existe uma seta

$$1_A : A \rightarrow A$$

chamada de *seta identidade* de  $A$

Esses dados precisam satisfazer os seguintes axiomas:

- (Associatividade) Sejam  $f : A \rightarrow B$ ,  $g : B \rightarrow C$  e  $h : C \rightarrow D$  setas, então:

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

- (Identidade) Seja  $f : A \rightarrow B$  uma seta, então

$$f \circ 1_A = f = 1_B \circ f$$

Para quaisquer objetos  $A$  e  $B$  em uma categoria  $\mathbf{C}$ , a coleção de setas de  $A$  para  $B$  é escrito  $\text{Hom}_{\mathbf{C}}(A, B)$

Alguns exemplos de categorias são:

1. A categoria **Set** que possui conjuntos como objetos e funções como morfismos.
2. Os conjuntos ordenados descritos na Definição 1.31 também podem formar uma categoria junto com os mapeamentos monótonos descritos na Definição 1.32, chamada de **Pos**
3. Um monóide é um conjunto  $M$  equipado com uma operação binária  $\cdot : M \times M \rightarrow M$  e um elemento unitário  $e \in M$  tal que para todo  $x, y, z \in M$ :

$$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$$

e

$$e \cdot x = x = x \cdot e$$

. Por exemplo, o conjunto dos naturais  $\mathbb{N}$ , junto à operação de soma usual  $+: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ , pode ser considerado um monóide, com o 0 como elemento unitário.

Dois monóides  $(M, \cdot)$  e  $(N, \star)$  podem ser relacionados através de um *homomorfismo*  $\phi : M \rightarrow N$  tal que

$$\phi(x \cdot y) = \phi(x) \star \phi(y)$$

e

$$\phi(e_M) = e_N$$

A categoria que possui monóides como objetos e homeomorfismos como morfismos é denominada de **Mon**

4. Um grupo  $G$  é um monóide onde para todo  $a \in G$  existe um elemento  $b \in G$  tal que  $a \cdot b = e$ .  $b$  é chamado de *inverso* de  $a$  e é escrito como  $a^{-1}$ . Um homomorfismo  $\phi$  entre dois grupos  $(G, \cdot)$  e  $(H, \star)$  obedece as duas condições para homomorfismos entre monóides mais a seguinte:

$$\phi(a^{-1}) = \phi(a)^{-1}$$

A categoria que possui monóides como objetos e homomorfismos como morfismos é denominada de **Grp**

5. ((??)) Um grupo  $G$  (e também um monóide) define uma categoria  $BG$  com um único objeto. Os elementos do grupo são seus morfismos e a composição é dada por  $\cdot$ . O elemento unitário  $e \in G$  age como o morfismo identidade para o objeto único dessa categoria.  
Por exemplo, para  $(\mathbb{Z}, +)$ ,  $e = 0$  e será representado por  $0 : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ . Sendo  $1 : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  e  $2 : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ , então a composição  $1 \circ 2$  é em  $(\mathbb{Z}, +)$  equivalente a  $1 + 2$  e  $1 \circ 2 = 3$ .

**Definição 1.2** (Isomorfismos, (??)). Em qualquer categoria  $C$ , um morfismo  $f : A \rightarrow B$  é chamado de *isomorfismo* se existe um morfismo  $g : B \rightarrow A$  em  $C$  tal que

$$g \circ f = 1_A \text{ e } f \circ g = 1_B$$

$g$  é chamado de inverso de  $f$  e, por ser único, pode ser denotado por  $f^{-1}$ . Os objetos  $A$  e  $B$  são ditos *isomórficos* e denotados por  $A \cong B$

Exemplos:

1. Os isomorfismos em **Set** são bijeções
2. Os isomorfismos em **Grp** são os homomorfismos bijetivos

**Definição 1.3** (Categorias pequenas, (??)). Uma categoria  $C$  é chamada de *pequena* se a coleção  $C_0$  de objetos em  $C$  e a coleção  $C_1$  de morfismos em  $C$  são conjuntos. Caso contrário,  $C$  é chamada de *grande*

Todas as categorias finitas são pequenas, assim como a categoria  $\mathbf{Sets}_{fin}$  de conjuntos finitos. Já a categoria **Sets** é grande (Pois caso a coleção de seus objetos fosse um conjunto, isso geraria o paradoxo de Russell)

**Definição 1.4** (Categoria localmente pequena, (??)). Uma categoria  $C$  é chamada de *localmente pequena* se para quaisquer objetos  $X$  e  $Y$  em  $C$ , a coleção de morfismos  $Hom_C(X, Y) = \{f \in C_1 | f : X \rightarrow Y\}$  é um *conjunto* (Chamado de *hom-set*)

## 1.2 Categorias novas das antigas

Dada a definição de categorias, é interessante analisar o que pode ser feito com uma categoria e como gerar novas categorias de categorias antigas

**Definição 1.5** (Categoria oposta, (??)). A categoria *oposta* (ou "dual")  $C^{op}$  de uma categoria  $C$  possui os mesmos objetos que  $C$ , mas para cada morfismos  $f : A \rightarrow B$  em  $C$  existe um morfismo  $f : B \rightarrow A$  em  $C^{op}$

A categoria oposta inverte todos os morfismos da categoria que parte. Então seja  $f^{op}$  o morfismo invertido, a composição na categoria oposta se torna:  $f^{op} \circ g^{op} = (g \circ f)^{op}$

É interessante perceber que cada resultado na Teoria das Categorias terá um resultado dual ganho "de graça" ao fazer esse resultado nas categorias duais.

Também é possível ver que  $(C^{op})^{op} = C$

**Definição 1.6** (Categoria de setas, (??)). Seja uma categoria  $C$ , definimos a *categoria de setas* de  $C$ , denotada por  $C^{\rightarrow}$ , tendo:

- Objetos: morfismos  $A \xrightarrow{f} B$  de  $C$
- Morfismos: a partir de um objeto de  $C^{\rightarrow}$   $A \xrightarrow{f} B$  para outro  $A' \xrightarrow{f'} B'$  um morfismo é um par  $\langle A \xrightarrow{f} B, A' \xrightarrow{f'} B' \rangle$  de morfismos de  $C$  fazendo o diagrama

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{h} & A' \\ f \downarrow & & \downarrow f' \\ B & \xrightarrow{k} & B' \end{array}$$

comutar. Ou seja,  $k \circ f = f' \circ h$  em  $C$

A composição das setas é feita ao colocar quadrados comutativos lado a lado da seguinte forma:

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{h} & A' & \xrightarrow{l} & A'' \\ \downarrow f & & \downarrow f' & & \downarrow f'' \\ B & \xrightarrow{k} & B' & \xrightarrow{m} & B'' \end{array}$$

tal que  $\langle l, m \rangle \circ \langle h, k \rangle = \langle l \circ h, m \circ k \rangle$

A identidade de um objeto  $A \xrightarrow{f} B$  é dado pelo par  $\langle id_A, id_B \rangle$

Outro tipo de categoria de interesse é a categoria slice:

**Definição 1.7** (Categoria Slice, (??)). A categoria slice  $\mathbf{C}/C$  de uma categoria  $\mathbf{C}$  sobre um objeto  $C \in \mathbf{C}$  possui:

- Objetos: todas as setas  $f \in \mathbf{C}$  tal que  $cod(f) = C$
- Morfismos:  $g$  de  $f : X \rightarrow C$  e  $f' : X' \rightarrow C$  é uma seta  $g : X \rightarrow X'$  em  $\mathbf{C}$  tal que  $f' \circ g = f$  como no diagrama:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{g} & X' \\ & \searrow f & \swarrow f' \\ & C & \end{array}$$

A composição desses morfismos é basicamente a junção de desses triângulos

Também é possível definir a categoria  $(C/\mathbf{C})$  chamada de categoria de co-slice, onde os objetos são setas  $f$  de  $\mathbf{C}$  tal que  $dom(f) = C$  e uma seta entre  $f : C \rightarrow X$  e  $f' : C \rightarrow X'$  é uma seta  $h : X \rightarrow X'$  tal que  $h \circ f = f'$  como no diagrama:

$$\begin{array}{ccc} & C & \\ f \nearrow & & \nwarrow f' \\ X & \xrightarrow{g} & X' \end{array}$$

Também é possível definir a noção de subcategoria:

**Definição 1.8** (Subcategoria, (??)). Uma categoria  $\mathbf{D}$  dita *subcategoria* de  $\mathbf{C}$  é obtida restringindo a coleção de objetos de  $\mathbf{C}$  para uma subcoleção (Ou seja, todo  $\mathbf{D}$ -objeto é um  $\mathbf{C}$ -objeto) e a coleção de morfismos é obtida restringindo a coleção de morfismos de  $\mathbf{C}$  onde:

- Se o morfismo  $f : A \rightarrow B$  está em  $\mathbf{D}$ , então  $A$  e  $B$  estão em  $\mathbf{D}$
- Se  $A$  está em  $\mathbf{D}$ , então também está o morfismo identidade  $id_A$
- Se  $f : A \rightarrow B$  e  $g : B \rightarrow C$  estão em  $\mathbf{D}$ , então  $g \circ f : A \rightarrow C$  também está e também:

**Definição 1.9** (Subcategoria cheia, (??)). Seja  $\mathbf{D}$  uma subcategoria de  $\mathbf{C}$ . Então  $\mathbf{D}$  é uma *subcategoria cheia* de  $\mathbf{C}$  quando  $\mathbf{C}$  não possui setas  $A \rightarrow B$  além dos que já existem em  $\mathbf{D}$ . Ou seja para quaisquer objetos  $A$  e  $B$  em  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{C}$ :

$$\text{Hom}_{\mathbf{D}}(A, B) = \text{Hom}_{\mathbf{C}}(A, B)$$

Exemplo:

- A categoria **FinSet** de conjuntos finitos é uma subcategoria de **Set**.
- Um grupo  $(G, \cdot)$  é dito *abeliano*, ou comutativo, caso para quaisquer dois elementos  $a, b \in G$ ,  $a \cdot b = b \cdot a$ . A categoria de grupos abelianos **Ab** é uma subcategoria (cheia) de **Grp**

### 1.3 Funtores

Sendo categorias estruturas que se iniciam com objetos e morfismos entre esses objetos, é natural se perguntar se existem morfismos entre categorias. Esses morfismos deveriam também manter a estrutura entre categorias, como por exemplo os morfismos entre grupos mantêm a estrutura do grupo, mesmo que mudando-se os objetos e os morfismos internos à categoria. Esse tipo de morfismo entre categorias é chamado de *funtor* e definido da seguinte forma:

**Definição 1.10** (Funtor, (??)). Um funtor  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  entre categorias  $\mathcal{C}$  e  $\mathcal{D}$  é um mapeamento de objetos em objetos e setas em setas tal que:

1.  $F(f : A \rightarrow B) = F(f) : F(A) \rightarrow F(B)$
2.  $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$
3.  $F(1_A) = 1_{F(A)}$

A primeira parte define que para cada objeto  $A$  em  $\mathcal{C}$ , existe um objeto correspondente  $F(A)$  em  $\mathcal{D}$ . Também define que Funtores preservam os domínios e codomínios de cada morfismo.

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ & \searrow g \circ f & \downarrow g \\ & & C \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} F(A) & \xrightarrow{F(f)} & F(B) \\ & \searrow F(g) \circ F(f) & \downarrow F(g) \\ & & F(C) \end{array}$$

$$\mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{D}$$

A segunda parte define que existindo uma composição de morfismos em  $\mathcal{C}$ , também existira uma composição correspondente em  $\mathcal{D}$ .

A terceira parte define que as identidades também são preservadas.

Em algumas partes da matemática porém, os funtores não preservam a ordem dos morfismos. Os funtores que preservam como da regra 1 da parte anterior são chamados de *funtores covariantes*. É interessante também definir os funtores *contravariantes*:

**Definição 1.11** (Functor Contravariante, (??)). Um functor da forma  $F : \mathcal{C}^{op} \rightarrow \mathcal{D}$  é chamado de *functor contravariante* em  $\mathcal{C}$ . Ou seja, as regras se tornam:

1. Seja  $f : A \rightarrow B$  em  $\mathcal{C}$ , então:  $F(f : A \rightarrow B) : F(B) \rightarrow F(A)$
2. Seja  $g \circ f$  em  $\mathcal{C}$ , então  $F(g \circ f) = F(f) \circ F(g)$
3.  $F(1_A) = 1_{F(A)}$

Um exemplo essencial de functor contravariante são os *pré-feixes*, definidos da seguinte forma:

**Definição 1.12** (Pré-feixe, (??)). Um *pré-feixe* (com valor de conjunto) em  $\mathcal{C}$ , onde  $\mathcal{C}$  é uma categoria pequena, é um functor  $\mathcal{C}^{op} \rightarrow \mathbf{Set}$

O pré-feixe pode ser visto como uma atribuição de dados locais de acordo com a estrutura de  $\mathcal{C}$ .

Uma vez definidos funtores, o próximo passo é se perguntar se existe uma categoria que usa funtores como morfismos entre seus objetos, e a resposta é que existe tal categoria, onde objetos são categorias, definida da seguinte forma:

**Definição 1.13** ( $\mathbf{Cat}$ , (??)). A categoria de *categorias pequenas*, denotada por  $\mathbf{Cat}$ , é a categoria que possui:

- objetos: categorias pequenas
- morfismos: funtores entre elas

Para demonstrar que essa é de fato uma categoria, é necessário definir um morfismo/functor identidade e a ideia de composição entre morfismos/funtores.

**Definição 1.14** ((??)). Dada uma categoria  $\mathcal{C}$ , o *functor identidade* é o functor  $id_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  que faz o esperado: leva um objeto a ele mesmo e um morfismo a ele mesmo tal que:

- $id_{\mathcal{C}}(c) = c$
- $id_{\mathcal{C}}(f) = f$

Para a composição, sejam  $\mathcal{C}$ ,  $\mathcal{D}$  e  $\mathcal{E}$  categorias pequenas, e  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  e  $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{E}$  dois funtores, a composição de  $G$  com  $F$ , o functor composição  $G \circ F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{E}$ , é definido tal que para objetos  $c$  em  $\mathcal{C}$ ,  $(G \circ F)(c) = G(F(c))$  e para um morfismo  $f : c \rightarrow c'$  em  $\mathcal{C}$   $(G \circ F)(f) = G(F(f))$ . Para definir que  $G \circ F$  é um functor é necessário pedir sua *functorialidade*, ou seja, que ele obedeça às regras impostas na definição de funtores:

- (1) Sejam  $f, g$  funtores em  $\mathcal{C}$  tal que  $g \circ f$  também está definido em  $\mathcal{C}$ , então:

$$\begin{aligned} (G \circ F)(g \circ f) &= G(F(g \circ f)) \\ &= G(F(g) \circ F(f)) \\ &= G(F(g)) \circ G(F(f)) \\ &= (G \circ F)(g) \circ (G \circ F)(f) \end{aligned}$$

onde a primeira e a última linha são a definição da composição de funtores e o meio é a derivação dessa composição.

(2) Seja  $c$  qualquer objeto em  $\mathcal{C}$ , então:

$$\begin{aligned}(G \circ F)(1_c) &= G(F(1_c)) \\ &= G(1_{F(c)}) \\ &= 1_{G(F(c))} \\ &= 1_{(G \circ F)(c)}\end{aligned}$$

A seguir estão alguns exemplos de funtores:

1. Ao tratar monoides como categorias por si só, é interessante entender o que seria equivalente a funtores nesse caso. Normalmente, as relações entre monoides são *homomorfismos de monoides*. Sejam dois monoides  $(M, e, \cdot)$  e  $(N, e', \star)$ , um homomorfismo  $\phi : M \rightarrow N$  é um mapeamento tal que

$$\phi(m \cdot m') = \phi(m) \star \phi(m')$$

e

$$\phi(e) = e'$$

É possível ver que  $\phi$  possui a estrutura de funtor entre monoides.  $\phi$  seria contravariante se  $\phi(m \cdot m') = \phi(m') \star \phi(m)$

2. Existe um funtor  $Core : \mathbf{Mon} \rightarrow \mathbf{Grp}$  que pega um monoide e retorna um subconjunto desse monoide que possui elementos inversos, o que faz com que o monoide se torne um grupo, chamado de *cerne* (*Core*) do monoide.
3. Existe um funtor  $U : \mathbf{Grp} \rightarrow \mathbf{Mon}$  chamado de *Forgetful functor* (Funtor esquecido) que pega um grupo e retorna o monoide correspondente, "esquecendo" a estrutura a mais que caracteriza os grupos.
4. Outro funtor esquecido é  $U : \mathbf{Cat} \rightarrow \mathbf{Grph}$  que pega cada categoria e retorna o grafo correspondente a ela. Um Grafo  $G = (V, A, s, t)$  é composto de um conjunto de vertices  $V$ , um conjunto de arestas  $A$  que são direcionadas, e um par de funções  $s, t : A \rightarrow V$  que codifica a direção das arestas ao assinalar a cada aresta  $a \in A$  um início  $s(a) \in V$  e um fim  $t(a) \in V$ .

A coleção de objetos de uma categoria  $\mathcal{C}$  será denotada por  $\mathcal{C}_0$  e a coleção de morfismos será denotada por  $\mathcal{C}_1$  na próxima definição:

**Definição 1.15** ((??)). Um funtor  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  é dito:

- *injetivo em objetos* se a parte de objetos  $F_0 : \mathcal{C}_0 \rightarrow \mathcal{D}_0$  é injetiva, é *sobrejetora em objetos* se  $F_0$  é sobrejetora
- De forma similar,  $F$  é *injetiva* (resp. *sobrejetora*) em *setas* se a parte de setas  $F_1 : \mathcal{C}_1 \rightarrow \mathcal{D}_1$  é injetiva (resp. sobrejetora)
- $F$  é dito *fiel* (Faithful) se, para todo  $A, B \in \mathcal{C}_0$ , o mapa  $F_{A,B} : Hom_{\mathcal{C}}(A, B) \rightarrow Hom_{\mathcal{D}}(FA, FB)$  definido por  $f : F(f)$  é injetivo
- Similarmente  $F$  é dito *cheio* (full) se  $F_{A,B}$  é sempre sobrejetor

Exemplo: Seja o funtor esquecido  $U : \mathbf{Grp} \rightarrow \mathbf{Set}$ .  $U_0$  é basicamente o mapeamento dos conjuntos que forma o grupo para os próprios conjuntos, logo  $U_0$  é injetivo e sobrejetor em objetos.  $U_1$  mapeia os homomorfismos de grupo para as funções correspondentes. Mas dois homomorfismos de grupo com o mesmo domínio e codomínio são iguais se são dados pelas mesmas funções nos conjuntos internos. Porém, nem todas as funções em  $\mathbf{Set}$  são mapeadas por homomorfismos, logo  $U_1$  é injetivo em setas mas não sobrejetor em setas. Os motivos para dizer que  $U_1$  é injetor em setas podem ser usados para mostrar que  $U$  é fiel.

## 1.4 Transformações Naturais

Uma vez tendo definido morfismos entre categorias, se torna possível pensar morfismos entre esses morfismos. No caso, morfismos entre funtores:

**Definição 1.16** (Transformação Natural, (??)). Sejam duas categorias  $\mathcal{C}$  e  $\mathcal{D}$  e funtores  $F, G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ . Uma *Transformação Natural*  $\alpha : F \Rightarrow G$  representado em relação a seus dados como: Consiste no seguinte:

- Para cada objeto  $c \in \mathcal{C}$ , um morfismo  $\alpha_c : F(c) \rightarrow G(c)$  em  $\mathcal{D}$  chamado de  $c$ -componente de  $\alpha$ , a coleção do qual (para todo objeto em  $\mathcal{C}$ ) define os *componentes* da transformação natural
- Para cada morfismo  $f : c \rightarrow c'$  em  $\mathcal{C}$  o seguinte quadrado de morfismos, chamado de *quadrado de naturalidade* de  $f$ , que deve comutar em  $\mathcal{D}$ :

$$\begin{array}{ccccc} c & & F(c) & \xrightarrow{\alpha_c} & G(c) \\ \downarrow f & & \downarrow F(f) & & \downarrow G(f) \\ c' & & F(c') & \xrightarrow{\alpha_{c'}} & G(c') \end{array}$$

A coleção de transformações naturais entre  $F$  e  $G$  é por vezes denotada por  $\text{Nat}(F, G)$

É dito que morfismos em uma categoria possuem *naturalidade* quando possuem um comportamento parecido com o do *quadrado de naturalidade*, ou seja se  $G(f) \circ \alpha_c = \alpha_{c'} \circ F(f)$ .

Uma vez que as transformações naturais ajudam a comparar dois funtores entre si, é interessante saber quando os dois funtores são praticamente iguais. Para isso, vamos usar a seguinte definição:

**Definição 1.17** (Isomorfismo natural, (??)). Um *isomorfismo natural* é uma transformação natural  $\alpha : F \Rightarrow G$  para qual todo componente  $\alpha_c : F(c) \rightarrow G(c)$  em  $\mathcal{D}$  é um isomorfismo (na categoria alvo). Ou seja, cada  $\alpha_c$  possui um inverso  $\alpha_c^{-1} : G(c) \rightarrow F(c)$  onde os inversos formam componentes de uma transformação natural  $\alpha^{-1}$  de  $G$  para  $F$ .

Se  $\alpha$  for um isomorfismo, usa-se a notação  $\alpha : F \cong G$

Uma vez definida a equivalência entre funtores, é interessante definir equivalência entre categorias:



**Definição 1.18** (equivalência de categorias, (??)). Uma *equivalência de categorias* consiste de um par de funtores  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  e  $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$  junto com os isomorfismos naturais  $\eta : id_{\mathcal{C}} \cong G \circ F$  e  $\epsilon : F \circ G \cong id_{\mathcal{D}}$ . Outro jeito de dizer isso é que os funtores são inversos entre si "até o isomorfismo natural de funtores". As categorias  $\mathcal{C}$  e  $\mathcal{D}$  são ditas *equivalentes* se existe uma equivalência de categorias entre elas, isso é denotado por  $\mathcal{C} \simeq \mathcal{D}$

Uma construção interessante é a categoria de setas que possui funtores como objetos e transformações naturais como morfismos, definida como:

**Definição 1.19** ((??)). Para qualquer par fixo de categorias  $\mathcal{C}$  e  $\mathcal{D}$ , pode-se formar uma *categoria de funtores* denotada por  $\mathcal{D}^{\mathcal{C}}$  (Ou também  $Fun(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ ) que possui:

- objetos: todos os funtores de  $\mathcal{C}$  para  $\mathcal{D}$
- morfismos: todas as transformações naturais entre tais funtores

Para demonstrar o aspecto de morfismo das transformações naturais, é necessário definir a transformação natural identidade, dada simplesmente por  $id_F : F \Rightarrow F$ , e a composição entre transformações naturais, dada pela seguinte definição:

**Definição 1.20** ((??)). Sejam  $\alpha : F \Rightarrow G$  e  $\beta : G \Rightarrow H$  transformações naturais entre os funtores paralelos  $F, G, H$  entre  $\mathcal{C}$  e  $\mathcal{D}$  como no seguinte diagrama: Existe uma transformação natural  $\beta \circ \alpha : F \Rightarrow H$ , definida em cada componente como:  $(\beta \circ \alpha)_c := \beta_c \circ \alpha_c$  dada pela composição de  $\beta$  e  $\alpha$ .

Esse estilo de composição é denominado de *composição vertical*

Já a composição horizontal denotada pelo simbolo  $\diamond$  dado por  $\beta \diamond \alpha : F_2 \circ F_1 \Rightarrow G_2 \circ G_1$ , os quais cada componente em  $c$  de  $\mathcal{C}$  é definido como o composto do seguinte diagrama comutativo: