

Notas em Teoria dos Tipos

Mateus Galdino

Recife, 2023

Contents

1	Introdução à Teoria dos Tipos	3
1.1	História da Teoria dos Tipos	3
1.1.1	Russel e os problemas da teoria dos conjuntos	3
1.1.2	Alonzo Church e o Cálculo Lambda	4
1.1.3	A Teoria dos Tipos simplesmente tipada	4
1.1.4	O Sistema F de Gödel	4
1.1.5	A teoria dos tipos polimórfica de Martin-Löf	4
1.1.6	Tentativas de desenvolver uma semântica categorial para a teoria dos tipos	4
1.1.7	Voevodsky e A teoria dos tipos homotópica	4
2	Cálculo Lambda não-tipado ($\lambda_{\beta\eta}$)	5
2.1	Definições	5

Esse conjunto de notas reunidas aqui estão relacionadas à Teoria dos Tipos, suas subáreas (Por exemplo, a Teoria dos Tipos Homotópica) e suas áreas irmãs (Teoria das Categorias, etc). Para isso, vou me basear nos seguintes textos:

Para algumas situações que eu queria explicitar, usarei as seguintes abreviações:

[HoTT] = Homotopy Type Theory: Univalent foundations of mathematics. Voevodsky et al.

[TTFP] = Type Theory and Formal Proof. Geuvers e Nederpelt

[TPL] = Types and Programming Languages. Benjamin Pierce

[IHoTT] = Introduction to Homotopy Type Theory. Egbert Rijke

1 Introdução à Teoria dos Tipos

1.1 História da Teoria dos Tipos

Para entender um pouco do que é a teoria dos tipos, é necessário entender sua história de desenvolvimento. Para isso, é necessário voltar até sua criação.

1.1.1 Russel e os problemas da teoria dos conjuntos

Do final do século XIX até o início do século XX, um dos temas de maior relevância para a matemática era a chamada Teoria dos Conjuntos. A primeira publicação que tratava do conceito de **conjunto** foi o artigo de **Georg Cantor** "Über eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen" (Sobre uma propriedade da coleção de todos os números reais algébricos), no contexto de estudos em álgebra. Para Cantor, um conjunto (*Menge* ou *Inbegriff*) seria definido como "qualquer combinação M de certos objetos completamente distintos m em nossa intuição [Anschauung] ou em nosso pensamento (que são conhecidos como "Elementos" de M) como um todo."

Uma das primeiras pessoas a utilizar o conceito desenvolvido por Cantor para formular uma teoria sobre as bases da matemática seria **Gottlob Frege** no seu livro "Grundlagen der Arithmetik" (Fundamentos da aritmética). Nesse livro, Frege tenta explicar filosoficamente as bases da matemática e para isso ele se vale da teoria dos conjuntos, também da definição de número feita por **Giuseppe Peano**.

Um grande leitor das obras de Frege foi o matemático **Bertrand Russel**. Ele percebeu em seus estudos um problema na teoria dos conjuntos que fazia essa teoria, no seu estado naquela época, ser insuficiente para uma construção sólida das bases da matemática. Esse problema seria um paradoxo desenvolvido através das próprias definições de conjunto encontradas até então. De forma básica, o *Paradoxo de Russell* era construído através da seguinte definição. Seja o conjunto R definido por $R = \{x | x \notin x\}$, ou seja, o conjunto de todos os conjuntos que não possuem a si mesmos como elemento. A pergunta que fica é $R \in R$? Se sim, pela própria definição de R , então $R \notin R$. Mas se não, ou seja $R \notin R$, então, novamente pela definição de R , $R \in R$. Logo, chega-se a um paradoxo.

Tendo em vista essa questão, os autores **Bertrand Russel** e **Alfred North Whitehead** decidem desenvolver uma obra para a formalização completa da matemática desde suas bases até áreas mais avançadas, chamada de Principia Mathematica. Nessa obra, Russel coloca novamente a questão desse paradoxo, mas dessa vez ele introduz uma possível solução. Nessa solução, ele divide os conjuntos em tipos que só podem possuir elementos de outros tipos. Isso faz com que esses tipos não deem brecha para possuírem a si mesmos.

Dessa forma, a noção de tipos ainda estava vinculada à noção de conjuntos, mas aparecia para resolver problemas relacionados à, como ficou chamada posteriormente, Teoria Ingênua dos conjuntos.

1.1.2 Alonzo Church e o Cálculo Lambda

...

1.1.3 A Teoria dos Tipos simplesmente tipada

...

1.1.4 O Sistema F de Gödel

...

1.1.5 A teoria dos tipos polimórfica de Martin-Löf

...

1.1.6 Tentativas de desenvolver uma semântica categorial para a teoria dos tipos

...

1.1.7 Voevodsky e A teoria dos tipos homotópica

...

2 Cálculo Lambda não-tipado ($\lambda_{\beta\eta}$)

Para entender melhor o que motiva a criação da teoria dos tipos, essas notas serão iniciadas com o cálculo λ não tipado.

2.1 Definições

O cálculo lambda serve como uma abstração em cima do conceito de função. Uma função é algo que pega um *input* e retorna um *output*, por exemplo a função $f(x) = x^2$ pega um input x e retorna seu quadrado x^2 . No cálculo lambda, essa função é denotada por $\lambda x.x^2$, onde $\lambda x.$ simboliza que essa função espera receber como entrada x . Quando queremos receber uma resposta específica de uma função, usamos números no lugar das variáveis, como por exemplo $f(3) = 3^2 = 9$. No cálculo lambda, isso é feito na forma de $(\lambda x.x^2)(3)$.

Esses dois princípios de construção são definidos como:

Definition 2.1.

- **Abstração:** Seja M uma expressão e x uma variável, podemos construir uma nova expressão $\lambda x.M$. Essa expressão é chamada de Abstração de x sobre M
- **Aplicação:** Sejam M e N duas expressões, podemos construir uma expressão MN . Essa expressão é chamada de Aplicação de M em N .

Dadas essas definições, precisamos também de uma definição que dê conta do processo de encontrar o resultado após a aplicação em uma função. Esse processo é chamado de β -redução. Ela faz uso da substituição e usa como notação os colchetes.

Definition 2.2 (β -redução). A β -redução é o processo de resscrita de uma expressão da forma $(\lambda x.M)N$ em outra expressão $M[x := N]$, ou seja, a expressão M na qual todo x foi substituído por N .