1 Introdução à Teoria das Categorias

A teoria das categorias é uma área de matemática que relaciona diversas áreas, como por exemplo, Teoria dos Grupos, Teoria dos Anéis, Topologia, Teoria dos Grafos, etc. Cada uma dessas teorias tem em comum a definição de seus objetos (Grupos, Anéis, Espaços topológicos, grafos) e formas de relacionar esses objetos (Homomorfismos de grupos, homomorfismos de aneis, homeomorfismos, homomorfismos entre grafos).

1.1 Categorias

Para estudar categorias, primeiro é necessário defini-las:

Definição 1.1 (Categoria, (**??**))**.** Uma *categoria* **C** consiste em:

- *Objetos*: $A, B, C, \ldots$
- *Setas* (Morfismos): $f, g, h, \ldots$
- Para cada seta f existem objetos:

  $$dom(f), cod(f)$$

  chamados de *domínio* e *contradomínio* de f. A escrita

  $$f : A \to B$$

  indica que $A = dom(f)$ e $B = cod(f)$
- Sejam setas $f : A \to B$ e $g : B \to C$ com:

  $$cod(f) = dom(g)$$

  existe uma seta $g \circ f : A \to C$ chamada de *composição* de f com g
- Para cada objeto A existe uma seta

  $$1_A : A \to A$$

  chamada de *seta identidade* de A

Esses dados precisam satisfazer os seguintes axiomas:

- (Associatividade) Sejam $f : A \to B$, $g : B \to C$ e $h : C \to D$ setas, então:

  $$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

- (Identidade) Seja $f : A \to B$ uma seta, então

  $$f \circ 1_A = f = 1_B \circ f$$

Para quaisquer objetos A e B em uma categoria C, a coleção de setas de A para B é escrito $Hom_C(A, B)$

Alguns exemplos de categorias são:

1. A categoria **Set** que possui conjuntos como objetos e funções como morfismos.

2. Os conjuntos ordenados descritos na Definição 1.31 também podem formar uma categoria junto com os mapeamentos monótonos descritos na Definição 1.32, chamada de **Pos**

3. Um monóide é um conjunto M equipado com uma operação binária $\cdot : M \times M \to M$ e um elemento unitário $e \in M$ tal que para todo $x, y, z \in M$:

   $$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$$

   e

   $$e \cdot x = x = x \cdot e$$

   . Por exemplo, o conjunto dos naturais $\mathbb{N}$, junto à operação de soma usual $+ : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, pode ser considerado um monoide, com o 0 como elemento unitário.
   Dois monóides $(M, \cdot)$ e $(N, \star)$ podem ser relacionados através de um *homomorfismo* $\phi : M \to N$ tal que

   $$\phi(x \cdot y) = \phi(x) \star \phi(y)$$

   e

   $$\phi(e_M) = e_N$$

   A categoria que possui monóides como objetos e homeomorfismos como morfismos é denominada de **Mon**

4. Um grupo G é um monóide onde para todo $a \in G$ existe um elemento $b \in G$ tal que $a \cdot b = e$. b é chamado de *inverso* de a e é escrito como a^{-1}. Um homomorfismo ϕ entre dois grupos $(G, \cdot)$ e $(H, \star)$ obedece as duas condições para homomorfismos entre monóides mais a seguinte:

   $$\phi(a^{-1}) = \phi(a)^{-1}$$

   A categoria que possui monóides como objetos e homomorfismos como morfismos é denominada de **Grp**

5. ((**??**)) Um grupo G (e também um monóide) define uma categoria BG com um único objeto. Os elementos do grupo são seus morfismos e a composição é dada por $\cdot$. O elemento unitário $e \in G$ age como o morfismo identidade para o objeto único dessa categoria.
   Por exemplo, para $(\mathbb{Z}, +)$, $e = 0$ e será representado por $0 : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$. Sendo $1 : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ e $2 : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, então a composição $1 \circ 2$ é em $(\mathbb{Z}, +)$ equivalente a $1 + 2$ e $1 \circ 2 = 3$.

Definição 1.2 (Isomorfismos, (**??**))**.** Em qualquer categoria C, um morfismo $f : A \to B$ é chamado de *isomorfismo* se existe um morfismo $g : B \to A$ em C tal que

$$g \circ f = 1_A \text{ e } f \circ g = 1_B$$

g é chamado de inverso de f e, por ser único, pode ser denotado por f^{-1}. Os objetos A e B são ditos *isomórficos* e denotados por $A \cong B$

Exemplos:

1. Os isomorfismos em **Set** são bijeções
2. Os isomorfismos em **Grp** são os homomorfismos bijetivos

Definição 1.3 (Categorias pequenas, (**??**))**.** Uma categoria C é chamada de *pequena* se a coleção C_0 de objetos em C e a coleção C_1 de morfismos em C são conjuntos. Caso contrário, C é chamada de *grande*

Todas as categorias finitas são pequenas, assim como a categoria $Sets_{fin}$ de conjuntos finitos. Já a categoria **Sets** é grande (Pois caso a coleção de seus objetos fosse um conjunto, isso geraria o paradoxo de Russell)

Definição 1.4 (Categoria localmente pequena, (**??**))**.** Uma categoria C é chamada de *localmente pequena* se para quaisquer objetos X e Y em C, a coleção de morfismos $Hom_C(X, Y) = \{f \in C_1 | f : X \to Y\}$ é um *conjunto* (Chamado de *hom-set*)

1.2 Categorias novas das antigas

Dada a definição de categorias, é interessante analisar o que pode ser feito com uma categoria e como gerar novas categorias de categorias antigas

Definição 1.5 (Categoria oposta, (**??**))**.** A categoria *oposta* (ou "dual") C^{op} de uma categoria C possui os mesmos objetos que C, mas para cada morfismos $f : A \to B$ em C existe um morfismo $f : B \to A$ em C^{op}

A categoria oposta inverte todos os morfismos da categoria que parte. Então seja f^{op} o morfismo invertido, a composição na categoria oposta se torna: $f^{op} \circ g^{op} = (g \circ f)^{op}$

É interessante perceber que cada resultado na Teoria das Categorias terá um resultado dual ganho "de graça" ao fazer esse resultado nas categorias duais.

Também é possível ver que $(C^{op})^{op} = C$

Definição 1.6 (Categoria de setas, (**??**))**.** Seja uma categoria C, definimos a *categoria de setas* de C, denotada por $C^{\to}$, tendo:

- Objetos: morfismos $A \xrightarrow{f} B$ de C
- Morfismos: a partir de um objeto de $C^{\to}$ $A \xrightarrow{f} B$ para outro $A' \xrightarrow{f'} B'$ um morfismo é um par $\langle A \xrightarrow{f} B, A' \xrightarrow{f'} B' \rangle$ de morfismos de C fazendo o diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "h"] \arrow[d, "f"'] & A' \arrow[d, "f'"] \\ B \arrow[r, "k"'] & B' \end{tikzcd}$$

  comutar. Ou seja, $k \circ f = f' \circ h$ em C

A composição das setas é feita ao colocar quadrados comutativos lado a lado da seguinte forma:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "h"] \arrow[d, "f"'] & A' \arrow[r, "l"] \arrow[d, "f'"] & A'' \arrow[d, "f''"] \\
B \arrow[r, "k"'] & B' \arrow[r, "m"] & B''
\end{tikzcd}$$

tal que $\langle l, m\rangle \circ \langle h, k\rangle = \langle l \circ h, m \circ k\rangle$
A identidade de um objeto $A \xrightarrow{f} B$ é dado pelo par $\langle id_A, id_B\rangle$

Outro tipo de categoria de interesse é a categoria slice:

Definição 1.7 (Categoria Slice, (**??**))**.** A categoria slice $\mathbf{C}/C$ de uma categoria $\mathbf{C}$ sobre um objeto $C \in \mathbf{C}$ possui:

- Objetos: todas as setas $f \in \mathbf{C}$ tal que $cod(f) = C$
- Morfismos: g de $f : X \to C$ e $f' : X' \to C$ é uma seta $g : X \to X'$ em $\mathbf{C}$ tal que $f' \circ g = f$ como no diagrama:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, "f"'] & & X' \arrow[dl, "f'"] \\
& C &
\end{tikzcd}$$

A composição desses morfismos é basicamente a junção de desses triangulos

Também é possível definir a categoria $(C/\mathbf{C})$ chamada de categoria de co-slice, onde os objetos são setas f de $\mathbf{C}$ tal que $dom(f) = C$ e uma seta entre $f : C \to X$ e $f' : C \to X'$ é uma seta $h : X \to X'$ tal que $h \circ f = f'$ como no diagrama:

$$\begin{tikzcd}
& C & \\
X \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "g"] & & X' \arrow[ul, "f'"']
\end{tikzcd}$$

Também é possível definir a noção de subcategoria:

Definição 1.8 (Subcategoria, (**??**))**.** Uma categoria $\mathbf{D}$ dita *subcategoria* de $\mathbf{C}$ é obtida restringindo a coleção de objetos de $\mathbf{C}$ para uma subcoleção (Ou seja, todo $\mathbf{D}$-objeto é um $\mathbf{C}$-objeto) e a coleção de morfismos é obtida restringindo a coleção de morfismos de $\mathbf{C}$ onde:

- Se o morfismo $f : A \to B$ está em $\mathbf{D}$, então A e B estão em $\mathbf{D}$
- Se A está em $\mathbf{D}$, então também está o morfismo identidade id_A
- Se $f : A \to B$ e $g : B \to C$ estão em $\mathbf{D}$, então $g \circ f : A \to C$ também está

e também:

Definição 1.9 (Subcategoria cheia, (**??**))**.** Seja **D** uma subcategoria de **C**. ENtão **D** é uma *subcategoria cheia* de **C** quando **C** não possui setas $A \to B$ além dos que já existem em **D**. Ou seja para quaisquer objetos A e B em **D**, **C**:

$$Hom_{\mathbf{D}}(A, B) = Hom_{\mathbf{C}}(A, B)$$

Exemplo:

- A categoria **FinSet** de conjuntos finitos é uma subcategoria de **Set**.
- Um grupo $(G, \cdot)$ é dito *abeliano*, ou comutativo, caso para quaisquer dois elementos $a, b \in G$, $a \cdot b = b \cdot a$. A categoria de grupos abelianos **Ab** é uma subcategoria (cheia) de **Grp**

1.3 Funtores

Sendo categorias estruturas que se iniciam com objetos e morfismos entre esses objetos, é natural se perguntar se existem morfismos entre categorias. Esses morfismos deveriam também manter a estrutura entre categorias, como por exemplo os morfismos entre grupos mantém a estrutura do grupo, mesmo que mudando-se os objetos e os morfismos internos à categoria. Esse tipo de morfismo entre categorias é chamado de *funtor* e definido da seguinte forma:

Definição 1.10 (Funtor, (**??**))**.** Um funtor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ entre categorias $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ é um mapeamento de objetos em objetos e setas em setas tal que:

1. $F(f : A \to B) = F(f) : F(A) \to F(B)$
2. $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$
3. $F(1_A) = 1_{F(A)}$

A primeira parte define que para cada objeto A em $\mathcal{C}$, existe um objeto correspondente $F(A)$ em $\mathcal{D}$. Também define que Funtores preservam os domínios e codomínios de cada morfismo.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g \circ f"'] & B \arrow[d, "g"] \\
& C
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
F(A) \arrow[r, "F(f)"'] \arrow[dr, "F(g) \circ F(f)"'] & F(B) \arrow[d, "F(g)"'] \\
& F(C)
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[r, "F"'] & \mathcal{D}
\end{tikzcd}$$

A segunda parte define que existindo uma composição de morfismos em $\mathcal{C}$, também existira uma composição correspondente em $mathcalD$.

A terceira parte define que as identidades também são preservadas.

Em algumas partes da matemática porém, os funtores não preservam a ordem dos morfismos. Os funtores que preservam como da regra 1 da parte anterior são chamados de *funtores covariantes*. É interessante também definir os funtores *contravariantes*:

Definição 1.11 (Funtor Contravariante, (**??**))**.** Um funtor da forma $F : \mathcal{C}^{op} \to \mathcal{D}$ é chamado de *funtor contravarinate* em $\mathcal{C}$. Ou seja, as regras se tornam:

1. Seja $f : A \to B$ em $\mathcal{C}$, então: $F(f : A \to B) : F(B) \to F(A)$
2. Seja $g \circ f$ em $\mathcal{C}$, então $F(g \circ f) = F(f) \circ F(g)$
3. $F(1_A) = 1_{F(A)}$

Um exemplo essencial de funtor contravariante são os *pré-feixes*, definidos da seguinte forma:

Definição 1.12 (Pré-feixe, (**??**))**.** Um *pré-feixe* (com valor de conjunto) em $\mathcal{C}$, onde $\mathcal{C}$ é uma categoria pequena, é um funtor $\mathcal{C}^{op} \to \mathbf{Set}$

O pré-feixe pode ser visto como uma atribuição de dados locais de acordo com a estrutura de $\mathcal{C}$.

Uma vez definidos funtores, o próximo passo é se perguntar se existe uma categoria que usa funtores como morfismos entre seus objetos, e a resposta é que existe tal categoria, onde objetos são categorias, definida da seguinte forma:

Definição 1.13 (**Cat**, (**??**))**.** A categoria de *categorias pequenas*, denotada por **Cat**, é a categoria que possui:

- objetos: categorias pequenas
- morfismos: funtores entre elas

Para demonstrar que essa é de fato uma categoria, é necessário definir um morfismo/funtor identidade e a ideia de composição entre morfismos/funtores.

Definição 1.14 ((**??**))**.** Dada uma categoria $\mathcal{C}$, o *funtor identidade* é o funtor $id_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ que faz o esperado: leva um objeto a ele mesmo e um morfismos a ele mesmo tal que:

- $id_{\mathcal{C}}(c) = c$
- $id_{\mathcal{C}}(f) = f$

Para a composição, sejam $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ e $\mathcal{E}$ categorias pequenas, e $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ e $G : \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ dois funtores, a composição de G com F, o funtor composição $G \circ F : \mathcal{C} \to \mathcal{E}$, é definido tal que para objetos c em $\mathcal{C}$, $(G \circ F)(c) = G(F(c))$ e para um morfismo $f : c \to c'$ em $\mathcal{C}$ $(G \circ F)(f) = G(F(f))$. Para definir que $G \circ F$ é um funtor é necessário pedir sua *funtorialidade*, ou seja, que ele obedeça às regras impostas na definição de funtores:

(1) Sejam f, g funtores em $\mathcal{C}$ tal que $g \circ f$ também está definido em $\mathcal{C}$, então:

$$\begin{aligned}(G \circ F)(g \circ f) &= G(F(g \circ f)) \\ &= G(F(g) \circ F(f)) \\ &= G(F(g)) \circ G(F(f)) \\ &= (G \circ F)(g) \circ (G \circ F)(f)\end{aligned}$$

onde a primeira e a última linha são a definição da composição de funtores e o méio é a derivação dessa composição.

(2) Seja c qualquer objeto em $\mathcal{C}$, então:

$$\begin{aligned}(G \circ F)(1_c) &= G(F(1_C)) \\ &= G(1_{F(c)}) \\ &= 1_{G(F(c))} \\ &= 1_{(G \circ F)(c)}\end{aligned}$$

A seguir estão alguns exemplos de funtores:

1. Ao tratar monoides como categorias por si só, é interessante entender o que seria equivalente a funtores nesse caso. Normalmente, as relações entre monoides são *homomorfismos de monoides.* Sejam dois monoides $(M, e, \cdot)$ e $(N, e', \star)$, um homomorfismo $\phi : M \to N$ é um mapeamento tal que

   $$\phi(m \cdot m') = \phi(m) \star \phi(m')$$

   e

   $$\phi(e) = e'$$

   É possível ver que ϕ possui a estrutura de funtor entre monoides. ϕ seria contravariante se $\phi(m \cdot m') = \phi(m') \star \phi(m)$

2. Existe um funtor $Core$: **Mon** $\to$ **Grp** que pega um monoide e retorna um subconjunto desse monoide que possui elementos inversos, o que faz com que o monoide se torne um grupo, chamado de *cerne* ($Core$) do monoide.

3. Existe um funtor U : **Grp** $\to$ **Mon** chamado de *Forgetful functor* (Funtor esquecido) que pega um grupo e retorna o monoide correspondente, "esquecendo" a estrutura a mais que caracteriza os grupos.

4. Outro funtor esquecido é U : **Cat** $\to$ **Grph** que pega cada categoria e retorna o grafo correspondente a ela. Um Grafo $G = (V, A, s, t)$ é composto de um conjunto de vertices V, um conjunto de arestas A que são direcionadas, e um par de funções $s, t : A \to B$ que codifica a direção das arestas ao assinalar a cada aresta $a \in A$ um inicio $s(a) \in V$ e um fim $t(a) \in V$.

A coleção de objetos de uma categoria $\mathcal{C}$ será denotada por $\mathcal{C}_0$ e a coleção de morfismos será denotada por $\mathcal{C}_1$ na próxima definição:

Definição 1.15 ((**??**))**.** Um funtor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ é dito:

- *injetivo em objetos* se a parte de objetos $F_0 : \mathcal{C}_0 \to \mathcal{D}_0$ é injetiva, é *sobrejetora em objetos* se F_0 é sobrejetora
- De forma similar, F é *injetiva* (resp. *sobrejetora*) em *setas* se a parte de setas $F_1 : \mathcal{C}_1 \to \mathcal{D}_1$ é injetiva (resp. sobrejetora)
- F é dito *fiel* (Faithful) se, para todo $A, B \in \mathcal{C}_0$, o mapa $F_{A,B} : Hom_{\mathcal{C}}(A, B) \to Hom_{\mathcal{D}}(FA, FB)$ definido por $f : F(f)$ é injetivo
- Similarmente F é dito *cheio* (full) se $F_{A,B}$ é sempre sobrejetor

Exemplo: Seja o funtor esquecido $U : \mathbf{Grp} \to \mathbf{Set}$. U_0 é basicamente o mapeamento dos conjuntos que forma o grupo para os próprios conjuntos, logo U_0 é injetivo e sobrejetor em objetos. U_1 mapeia os homomorfismos de grupo para as funções correspondentes. Mas dois homomorfismos de grupo com o mesmo domínio e codomínio são iguais se são dados pelas mesmas funções nos conjuntos internos. Porém, nem todas as funções em **Set** são mapeadas por homomorfismos, logo U_1 é injetivo em setas mas não sobrejetor em setas. Os motivos para dizer que U_1 é injetor em setas podem ser usados para mostrar que U é fiel.

1.4 Transformações Naturais

Uma vez tendo definido morfismos entre categorias, se torna possível pensar morfismos entre esses morfismos. No caso, morfismos entre funtores:

Definição 1.16 (Transformação Natural, (**??**)). Sejam duas categorias $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ e funtores $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$. Uma *Transformação Natural* $\alpha : F \Rightarrow G$ representado em relação a seus dados como: Consiste no seguinte:

- Para cada objeto $c \in \mathcal{C}$, um morfismo $\alpha_c : F(c) \to G(c)$ em $\mathcal{D}$ chamado de c-componente de α, a coleção do qual (para todo objeto em $\mathcal{C}$) define os *componentes* da transformação natural
- Para cada morfismo $f : c \to c'$ em $\mathcal{C}$ o seguinte quadrado de morfismos, chamado de *quadrado de naturalidade* de f, que deve comutar em $\mathcal{D}$:

$$\begin{tikzcd} c \arrow[d, "f"'] & F(c) \arrow[r, "\alpha_c"'] \arrow[d, "F(f)"'] & G(c) \arrow[d, "G(f)"] \\ c' & F(c') \arrow[r, "\alpha_{c'}"'] & G(c') \end{tikzcd}$$

A coleção de transformações naturais entre F e G é por vezes denotada por $Nat(F, G)$

É dito que morfismos em uma categoria possuem *naturalidade* quando possuem um comportamento parecido com o do *quadrado de naturalidade*, ou seja se $G(f) \circ \alpha_c = \alpha_{c'} \circ F(f)$.

Uma vez que as transformações naturais ajudam a comparar dois funtores entre si, é interessante saber quando os dois funtores são praticamente iguais. Para isso, vamos usar a seguinte definição:

Definição 1.17 (Isomorfismo natural, (**??**)). Um *isomorfismo natural* é uma transformação natural $\alpha : F \Rightarrow G$ para qual todo componente $\alpha_c : F(c) \to G(c)$ em $\mathcal{D}$ é um isomorfismo (na categoria alvo). Ou seja, cada α_c possui um inverso $\alpha_c^{-1} : G(c) \to F(c)$ onde os inversos formam componentes de uma transformação natural α^{-1} de G para F.

Se α for um isomorfismo, usa-se a notação $\alpha : F \cong G$

Uma vez definida a equivalência entre funtores, é interessante definir equivalência entre categorias:

Definição 1.18 (equivalência de categorias, (??))**.** Uma *equivalência de categorias* consiste de um par de funtores $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ e $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ junto com os isomorfismos naturais $\eta : id_{\mathcal{C}} \cong G \circ F$ e $\epsilon : F \circ G \cong id_{\mathcal{D}}$. Outro jeito de dizer isso é que os funtores são inversos entre si "até o isomorfismo natural de funtores". As categorias $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ são ditas *equivalentes* se existe uma equivalência de categorias entre elas, isso é denotado por $\mathcal{C} \simeq \mathcal{D}$

Uma construção interessante é a categoria de setas que possui funtores como objetos e transformações naturais como morfismos, definida como:

Definição 1.19 ((??))**.** Para qualquer par fixo de categorias $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$, pode-se formar uma *categoria de funtores* denotada por $\mathcal{D}^{\mathcal{C}}$ (Ou também $Fun(\mathcal{C}, \mathcal{D})$) que possui:

- objetos: todos os funtores de $\mathcal{C}$ para $\mathcal{D}$
- morfismos: todas as transformações naturais entre tais funtores

Para demonstrar o aspecto de morfismo das transformações naturais, é necessário definir a transformação natural identidade, dada simplismente por $id_F : F \Rightarrow F$, e a composição entre transformações naturais, dada pela seguinte definição:

Definição 1.20 ((??))**.** Sejam $\alpha : F \Rightarrow G$ e $\beta : G \Rightarrow H$ transformações naturais entre os funtores paralelos F, G, H entre $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ como no seguinte diagrama: Existe uma transformação natural $\beta \circ \alpha : F \Rightarrow H$, definida em cada componente como: $(\beta \circ \alpha)_c := \beta_c \circ \alpha_c$ dada pela composição de β e α.

Esse estilo de composição é denominado de *compisição vertical*

Já a composição horizontal denotada pelo simbolo $\diamond$ dado por $\beta \diamond \alpha : F_2 \circ F_1 \Rightarrow G_2 \circ G_1$, os quais cada componente em c de $\mathcal{C}$ é definido como o composto do seguinte diagrama comutativo: