1 Introdução à Teoria das Categorias

A teoria das categorias é uma área de matemática que relaciona diversas áreas, como por exemplo, Teoria dos Grupos, Teoria dos Anéis, Topologia, Teoria dos Grafos, etc. Cada uma dessas teorias tem em comum a definição de seus objetos (Grupos, Anéis, Espaços topológicos, grafos) e formas de relacionar esses objetos (Homomorfismos de grupos, homomorfismos de aneis, homeomorfismos, homomorfismos entre grafos).

1.1 Categorias

Para estudar categorias, primeiro é necessário defini-las:

Definição 1.1 (Categoria, (**??**))**.** Uma *categoria* **C** consiste em:

- *Objetos*: $A, B, C, \ldots$
- *Setas* (Morfismos): $f, g, h, \ldots$
- Para cada seta f existem objetos:

  $$dom(f), cod(f)$$

  chamados de *domínio* e *contradomínio* de f. A escrita

  $$f : A \to B$$

  indica que $A = dom(f)$ e $B = cod(f)$
- Sejam setas $f : A \to B$ e $g : B \to C$ com:

  $$cod(f) = dom(g)$$

  existe uma seta $g \circ f : A \to C$ chamada de *composição* de f com g
- Para cada objeto A existe uma seta

  $$1_A : A \to A$$

  chamada de *seta identidade* de A

Esses dados precisam satisfazer os seguintes axiomas:

- (Associatividade) Sejam $f : A \to B$, $g : B \to C$ e $h : C \to D$ setas, então:

  $$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

- (Identidade) Seja $f : A \to B$ uma seta, então

  $$f \circ 1_A = f = 1_B \circ f$$

Alguns exemplos de categorias são:

1. A categoria **Sets** que possui conjuntos como objetos e funções como morfismos.

2. Os conjuntos ordenados descritos na Definição 1.31 também podem formar uma categoria junto com os mapeamentos monótonos descritos na Definição 1.32

3. Um monóide é um conjunto M equipado com uma operação binária $\cdot : M \times M \to M$ e um elemento unitário $u \in M$ tal que para todo $x, y, z \in M$:

$$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$$

   e

$$u \cdot x = x = x \cdot u$$

   . Por exemplo, o conjunto dos naturais, junto à operação de soma usual, pode ser considerado um monoide, com o 0 como elemento unitário. Existem duas formas de descrever o monoide em relação à teoria das categorias:

   - O monóide pode ser por si só uma categoria com um único objeto, ele mesmo, e mapas identidade
   - Um monóide pode se relacionar a outro a partir de homomorfismos de monoide e nesse caso ele gera uma categoria mais clássica.