# 1 Introdução à Teoria das Categorias

A teoria das categorias é uma área de matemática que relaciona diversas áreas, como por exemplo, Teoria dos Grupos, Teoria dos Anéis, Topologia, Teoria dos Grafos, etc. Cada uma dessas teorias tem em comum a definição de seus objetos (Grupos, Anéis, Espaços topológicos, grafos) e formas de relacionar esses objetos (Homomorfismos de grupos, homomorfismos de aneis, homeomorfismos, homomorfismos entre grafos).

## 1.1 Categorias

Para estudar categorias, primeiro é necessário defini-las:

**Definição 1.1** (Categoria, (**??**))**.** Uma *categoria* **C** consiste em:

- *Objetos*: $A, B, C, \ldots$
- *Setas* (Morfismos): $f, g, h, \ldots$
- Para cada seta $f$ existem objetos:

  $$dom(f), cod(f)$$

  chamados de *domínio* e *contradomínio* de $f$. A escrita

  $$f : A \to B$$

  indica que $A = dom(f)$ e $B = cod(f)$
- Sejam setas $f : A \to B$ e $g : B \to C$ com:

  $$cod(f) = dom(g)$$

  existe uma seta $g \circ f : A \to C$ chamada de *composição* de $f$ com $g$
- Para cada objeto $A$ existe uma seta

  $$1_A : A \to A$$

  chamada de *seta identidade* de $A$

Esses dados precisam satisfazer os seguintes axiomas:

- (Associatividade) Sejam $f : A \to B$, $g : B \to C$ e $h : C \to D$ setas, então:

  $$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

- (Identidade) Seja $f : A \to B$ uma seta, então

  $$f \circ 1_A = f = 1_B \circ f$$

Para quaisquer objetos $A$ e $B$ em uma categoria $C$, a coleção de setas de $A$ para $B$ é escrito $Hom_C(A, B)$

Alguns exemplos de categorias são:

1. A categoria **Set** que possui conjuntos como objetos e funções como morfismos.

2. Os conjuntos ordenados descritos na Definição 1.31 também podem formar uma categoria junto com os mapeamentos monótonos descritos na Definição 1.32, chamada de **Pos**

3. Um monóide é um conjunto $M$ equipado com uma operação binária $\cdot : M \times M \to M$ e um elemento unitário $e \in M$ tal que para todo $x, y, z \in M$:

$$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$$

   e

$$e \cdot x = x = x \cdot e$$

   . Por exemplo, o conjunto dos naturais $\mathbb{N}$, junto à operação de soma usual $+ : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, pode ser considerado um monoide, com o 0 como elemento unitário.
   Dois monóides $(M, \cdot)$ e $(N, \star)$ podem ser relacionados através de um *homomorfismo* $\phi : M \to N$ tal que

$$\phi(x \cdot y) = \phi(x) \star \phi(y)$$

   e

$$\phi(e_M) = e_N$$

   A categoria que possui monóides como objetos e homeomorfismos como morfismos é denominada de **Mon**

4. Um grupo $G$ é um monóide onde para todo $a \in G$ existe um elemento $b \in G$ tal que $a \cdot b = e$. $b$ é chamado de *inverso* de $a$ e é escrito como $a^{-1}$. Um homomorfismo $\phi$ entre dois grupos $(G, \cdot)$ e $(H, \star)$ obedece as duas condições para homomorfismos entre monóides mais a seguinte:

$$\phi(a^{-1}) = \phi(a)^{-1}$$

   A categoria que possui monóides como objetos e homomorfismos como morfismos é denominada de **Grp**

5. ((**??**)) Um grupo $G$ (e também um monóide) define uma categoria $BG$ com um único objeto. Os elementos do grupo são seus morfismos e a composição é dada por $\cdot$. O elemento unitário $e \in G$ age como o morfismo identidade para o objeto único dessa categoria.
   Por exemplo, para $(\mathbb{Z}, +)$, $e = 0$ e será representado por $0 : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$. Sendo $1 : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ e $2 : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, então a composição $1 \circ 2$ é em $(\mathbb{Z}, +)$ equivalente a $1 + 2$ e $1 \circ 2 = 3$.

**Definição 1.2** (Isomorfismos, (**??**))**.** Em qualquer categoria $C$, um morfismo $f : A \to B$ é chamado de *isomorfismo* se existe um morfismo $g : B \to A$ em $C$ tal que

$$g \circ f = 1_A \text{ e } f \circ g = 1_B$$

$g$ é chamado de inverso de $f$ e, por ser único, pode ser denotado por $f^{-1}$. Os objetos $A$ e $B$ são ditos *isomórficos* e denotados por $A \cong B$

Exemplos:

1. Os isomorfismos em **Set** são bijeções
2. Os isomorfismos em **Grp** são os homomorfismos bijetivos

**Definição 1.3** (Categorias pequenas, (**??**))**.** Uma categoria $C$ é chamada de *pequena* se a coleção $C_0$ de objetos em $C$ e a coleção $C_1$ de morfismos em $C$ são conjuntos. Caso contrário, $C$ é chamada de *grande*

Todas as categorias finitas são pequenas, assim como a categoria $Sets_{fin}$ de conjuntos finitos. Já a categoria **Sets** é grande (Pois caso a coleção de seus objetos fosse um conjunto, isso geraria o paradoxo de Russell)

**Definição 1.4** (Categoria localmente pequena, (**??**))**.** Uma categoria $C$ é chamada de *localmente pequena* se para quaisquer objetos $X$ e $Y$ em $C$, a coleção de morfismos $Hom_C(X, Y) = \{f \in C_1 | f : X \to Y\}$ é um *conjunto* (Chamado de *hom-set*)

## 1.2 Categorias novas das antigas

Dada a definição de categorias, é interessante analisar o que pode ser feito com uma categoria e como gerar novas categorias de categorias antigas

**Definição 1.5** (Categoria oposta, (**??**))**.** A categoria *oposta* (ou "dual") $C^{op}$ de uma categoria $C$ possui os mesmos objetos que $C$, mas para cada morfismos $f : A \to B$ em $C$ existe um morfismo $f : B \to A$ em $C^{op}$

A categoria oposta inverte todos os morfismos da categoria que parte. Então seja $f^{op}$ o morfismo invertido, a composição na categoria oposta se torna: $f^{op} \circ g^{op} = (g \circ f)^{op}$

É interessante perceber que cada resultado na Teoria das Categorias terá um resultado dual ganho "de graça" ao fazer esse resultado nas categorias duais.

Também é possível ver que $(C^{op})^{op} = C$

**Definição 1.6** (Categoria de setas, (**??**))**.** Seja uma categoria $C$, definimos a *categoria de setas* de $C$, denotada por $C^{\to}$, tendo:

- Objetos: morfismos $A \xrightarrow{f} B$ de $C$
- Morfismos: a partir de um objeto de $C^{\to}$ $A \xrightarrow{f} B$ para outro $A' \xrightarrow{f'} B'$ um morfismo é um par $\langle A \xrightarrow{f} B, A' \xrightarrow{f'} B' \rangle$ de morfismos de $C$ fazendo o diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "h"] \arrow[d, "f"'] & A' \arrow[d, "f'"] \\ B \arrow[r, "k"'] & B' \end{tikzcd}$$

comutar. Ou seja, $k \circ f = f' \circ h$ em $C$

A composição das setas é feita ao colocar quadrados comutativos lado a lado da seguinte forma:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "h"] \arrow[d, "f"'] & A' \arrow[r, "l"] \arrow[d, "f'"] & A'' \arrow[d, "f''"] \\ B \arrow[r, "k"'] & B' \arrow[r, "m"] & B'' \end{tikzcd}$$

tal que $\langle l, m\rangle \circ \langle h, k\rangle = \langle l \circ h, m \circ k\rangle$
A identidade de um objeto $A \xrightarrow{f} B$ é dado pelo par $\langle id_A, id_B\rangle$

Outro tipo de categoria de interesse é a categoria slice:

**Definição 1.7** (Categoria Slice, (**??**))**.** A categoria slice $\mathbf{C}/C$ de uma categoria $\mathbf{C}$ sobre um objeto $C \in \mathbf{C}$ possui:

- Objetos: todas as setas $f \in \mathbf{C}$ tal que $cod(f) = C$
- Morfismos: $g$ de $f : X \to C$ e $f' : X' \to C$ é uma seta $g : X \to X'$ em $\mathbf{C}$ tal que $f' \circ g = f$ como no diagrama:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, "f"'] & & X' \arrow[dl, "f'"] \\ & C & \end{tikzcd}$$

A composição desses morfismos é basicamente a junção de desses triangulos

Também é possível definir a categoria $(C/\mathbf{C})$ chamada de categoria de co-slice, onde os objetos são setas $f$ de $\mathbf{C}$ tal que $dom(f) = C$ e uma seta entre $f : C \to X$ e $f' : C \to X'$ é uma seta $h : X \to X'$ tal que $h \circ f = f'$ como no diagrama:

$$\begin{tikzcd} & C & \\ X \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "g"] & & X' \arrow[ul, "f'"'] \end{tikzcd}$$

Também é possível definir a noção de subcategoria:

**Definição 1.8** (Subcategoria, (**??**))**.** Uma categoria $\mathbf{D}$ dita *subcategoria* de $\mathbf{C}$ é obtida restringindo a coleção de objetos de $\mathbf{C}$ para uma subcoleção (Ou seja, todo $\mathbf{D}$-objeto é um $\mathbf{C}$-objeto) e a coleção de morfismos é obtida restringindo a coleção de morfismos de $\mathbf{C}$ onde:

- Se o morfismo $f : A \to B$ está em $\mathbf{D}$, então $A$ e $B$ estão em $\mathbf{D}$
- Se $A$ está em $\mathbf{D}$, então também está o morfismo identidade $id_A$
- Se $f : A \to B$ e $g : B \to C$ estão em $\mathbf{D}$, então $g \circ f : A \to C$ também está

e também:

**Definição 1.9** (Subcategoria cheia, (**??**))**.** Seja **D** uma subcategoria de **C**. ENtão **D** é uma *subcategoria cheia* de **C** quando **C** não possui setas $A \to B$ além dos que já existem em **D**. Ou seja para quaisquer objetos $A$ e $B$ em **D**, **C**:

$$Hom_{\mathbf{D}}(A, B) = Hom_{\mathbf{C}}(A, B)$$

Exemplo:

- A categoria **FinSet** de conjuntos finitos é uma subcategoria de **Set**.
- Um grupo $(G, \cdot)$ é dito *abeliano*, ou comutativo, caso para quaisquer dois elementos $a, b \in G$, $a \cdot b = b \cdot a$. A categoria de grupos abelianos **Ab** é uma subcategoria (cheia) de **Grp**