1 A Teoria $\lambda\underline{\omega}$

1.1 A Teoria $\lambda\underline{\omega}$

Na seção anterior, foi introduzida a abstração em relação termos que podiam aceitar um tipo como parâmetro. Mas também é interessante construir tipos que aceitem tipos como parametros. Por exemplo, os tipos $\beta \to \beta$ e $\gamma \to \gamma$ possuem uma estrutura geral $\diamond \to \diamond$, com o tipo na mesma posição em relação à seta. Uma abstração em relação a $\diamond$ faz com que seja possível descrever uma família de tipos de forma mais simples.

Para isso, será introduzido aqui um *construtor de tipos* que gera uma função que recebe um tipo como valor e retorna um tipo como resultado, por exemplo $\lambda\alpha : *.\alpha \to \alpha$. Quando outros tipos são aplicados a essa função, ela muda seu comportamento:

$$(\lambda\alpha : *.\alpha \to \alpha)\beta \to_\beta \beta \to \beta$$

$$(\lambda\alpha : *.\alpha \to \alpha)\gamma \to_\beta \gamma \to \gamma$$

A questão que fica é definir o tipo dessas expressões. Pois sendo $\alpha : *$ e $\alpha \to \alpha : *$, então $\lambda\alpha : *.\alpha \to \alpha : * \to *$. Logo serão adicionados tipos como $* \to *$, $* \to (* \to *)$, etc. à sintaxe.

Os tipos $*$ e as setas entre $*$ são chamados de *espécies* (*kinds* em inglês). A BNF para o conjunto de todas as espécies é:

$$\mathbb{K} = *|\mathbb{K} \to \mathbb{K}$$

A notação dos parenteses segue a notação para os tipos simples introduzida anteriormente.

O tipo de todas as espécies é denotado por $\square$. Sendo assim $* : \square$ e $* \to * : \square$, etc. Se κ é uma espécie, então qualquer termo M "do tipo" κ é chamado de construtor de tipos, ou somente *construtor*. Então $\alpha : *.\alpha \to \alpha$ é um construtor, assim como somente $\alpha \to \alpha$ também.

Definição 1.1 (Construtores, construtores próprios)**.**

1. Se $\kappa : \square$ e $M : \kappa$, então M é um *construtor*. Se $\kappa \not\equiv *$, então M é um *construtor próprio*

2. O conjunto de todas as variedades (*sorts*) é $\{*, \square\}$

Para falar de uma variedade qualquer, será introduzido o simbolo s como meta variável.

Definição 1.2 (níveis)**.** Com essa construção, existem quatro níveis na sintaxe: Nível 1: termos Nível 2: construtores e tipos com construtores próprios Nível 3: espécies Nível 4: consiste somente em $\square$

Ao unir esses níveis é possível escrever correntes de juizos como $t : \sigma : * \to * : \square$, onde $t : \sigma$, $\sigma : * \to *$ e $* \to * : \square$ são juizos.

1.1.1 Regra sort e regra var em $\lambda\underline{\omega}$

É necessário escrever novas regras de inferência para $\lambda\underline{\omega}$, a primeira delas sendo a regra das espécies:

Definição 1.3 (Regra das variedades, Sort-rule)**.**
$(sort)$ $\emptyset \vdash * : \square$

A próxima regra é a regra de que todo termo ocorrendo em um contexto é derivável naquele contexto, para isso é necessário ter como base que o tipo do termo escolhido seja bem formado, então a regra (var) vai mudar em relação às teorias vistas anteriormente:

Definição 1.4 (Var-rule)**.**

$$(var)\ \frac{\Gamma \vdash A : s}{\Gamma, x : A \vdash x : A}\ \text{se } x \notin \Gamma$$

A premissa dessa regra de derivação requer que A seja ou um tipo, se $s \equiv *$, ou uma espécie (se $s \equiv \square$). Então x pode ser ou um tipo variável ou um termo variável.

Exemplo de derivação:

$$\cfrac{\cfrac{\emptyset \vdash * : \square}{\alpha : * \vdash \alpha : *}\ (var)}{\alpha : *, x : \alpha \vdash x : \alpha}\ (var)$$

A primeira linha é formada utilizando a sort-rule, a segunda linha usa a var-rule com $s \equiv \square$ e a terceira linha usa a var-rule com $s \equiv *$

1.1.2 A regra do enfraquecimento em $\lambda\underline{\omega}$

Somente usando as regras (var) e $(sort)$ não é possível derivar $\alpha : *, \beta : * \vdash \alpha : *$, então é interessante desenvolver uma regra que permita fazer isso. A regra desejada seria uma regra que, partindo de $\alpha : * \vdash \alpha : *$, chegasse em $\alpha : *, \beta : * \vdash \alpha : *$. Ou seja, uma regra que adicionasse mais informação ao contexto do que o "necessario", que o enfraquecesse.

A regra do enfraquecimento segue a seguinte forma:

Definição 1.5 (Regra do enfraquecimento, $(weak)$)**.**

$$(weak)\ \frac{\Gamma \vdash A : B \qquad \Gamma \vdash C : s}{\Gamma, x : C \vdash A : B}\ \text{se } x \notin \Gamma$$

Ou seja, assumindo que tenha sido derivado o juizo $\Gamma \vdash A : B$, é possível enfraquecer o contexto Γ ao adicionar uma declaração arbitrária no final.

Então a derivação anterior se torna:

$$\cfrac{\cfrac{\emptyset \vdash * : \square}{\alpha : * \vdash \alpha : *}\ (var) \qquad \cfrac{\emptyset \vdash * : \square \qquad \emptyset \vdash * : \square}{\alpha : * \vdash * : \square}\ (weak)}{\alpha : *, \beta : * \vdash \alpha : *}\ (weak)$$

Também é possível fazer a seguinte derivação:

$$\cfrac{\cfrac{\emptyset \vdash * : \square \qquad \emptyset \vdash * : \square}{\alpha : * \vdash * : \square}\ (weak)}{\alpha : *, \beta : * \vdash \beta : *}\ (var)$$

1.1.3 A regra de formação de $\lambda\underline{\omega}$

A regra de inferência para formar tipos e espécies é descrita como:

Definição 1.6 (Regra de Formação, (*form*))**.**

$$\frac{\Gamma \vdash A : s \qquad \Gamma \vdash B : s}{\Gamma \vdash A \to B : s}\ (form)$$

Note que não existem tipos dependentes de tipos em $\lambda\underline{\omega}$, logo não existem tipos Π.

Exemplo:

$$\dfrac{\dfrac{\dots}{\alpha : *, \beta : * \vdash \alpha : *}\ (\dots) \qquad \dfrac{\dots}{\alpha : *, \beta : * \vdash \beta : *}\ (\dots)}{\alpha : *, \beta : * \vdash \alpha \to \beta : *}\ (form)$$

As duas subárvores geradas pela regra de formação nesse caso já foram detalhadas na subseção anterior, logo foram omitidas aqui.

Exemplo:

$$\dfrac{\dfrac{\dots}{\alpha : * \vdash * : \Box}\ (\dots) \qquad \dfrac{\dots}{\alpha : * \vdash * : \Box}\ (\dots)}{\alpha : * \vdash * \to * : \Box}\ (form)$$

1.1.4 Regras de abstração e aplicação

As regras de abstração e aplicação são definidas da seguinte forma:

Definição 1.7.

- (*appl*)

$$\frac{\Gamma \vdash M : A \to B \qquad \Gamma \vdash N : A}{\Gamma \vdash MN : B}\ \text{(appl)}$$

- (*abst*)

$$\frac{\Gamma, x : A \vdash M : B \qquad \Gamma \vdash A \to B : s}{\Gamma \vdash \lambda x : A.M : A \to B}\ \text{(abst)}$$

Exemplo: derivação de $(\lambda\alpha : *.\alpha \to \alpha)\beta$

$$\dfrac{\dfrac{?}{? \vdash \lambda\alpha : *.\alpha \to \alpha}\ ? \qquad \dfrac{?}{? \vdash \beta : *}\ ?}{? \vdash (\lambda\alpha : *.\alpha \to \alpha)\beta}\ \text{(appl)}$$

A única regra que resolve o lado direito é a (*var*), logo o contexto deve ser também $\beta : *$:

$$\dfrac{\dfrac{?}{\beta : * \vdash \lambda\alpha : *.\alpha \to \alpha}\ ? \qquad \dfrac{\emptyset \vdash * : \Box}{\beta : * \vdash \beta : *}\ \text{(var)}}{\beta : * \vdash (\lambda\alpha : *.\alpha \to \alpha)\beta}\ \text{(appl)}$$

Já no lado esquerdo, é necessário usar a regra (*abst*):

$$\dfrac{\dfrac{\beta : *, \alpha : * \vdash \alpha \to \alpha : * \qquad \beta : * \vdash * \to * : \Box}{\beta : * \vdash \lambda\alpha : *.\alpha \to \alpha}\ \text{(abst)} \qquad \dfrac{\emptyset \vdash * : \Box}{\beta : * \vdash \beta : *}\ \text{(var)}}{\beta : * \vdash (\lambda\alpha : *.\alpha \to \alpha)\beta}\ \text{(appl)}$$

O resto das duas subárvores do lado esquerdo se segue das derivações feitas anteriormente.

1.1.5 Regra da Conversão

A regra da conversão faz com que termos que possuem um tipo que possa ser β-reduzido a outro, possa passar a possuir o tipo mais simples:

Definição 1.8 (Regra de Conversão, (*form*))**.**

$$\frac{\Gamma \vdash A : B \qquad \Gamma \vdash B' : s}{\Gamma \vdash A : B'} \text{ se } B =_\beta B'$$

Regras de $\lambda\underline{\omega}$:

- (*sort*) $\emptyset \vdash * : \Box$
- (*var*)

$$(var)\ \frac{\Gamma \vdash A : s}{\Gamma, x : A \vdash x : A} \text{ se } x \notin \Gamma$$

- (*weak*)

$$(weak)\ \frac{\Gamma \vdash A : B \qquad \Gamma \vdash C : s}{\Gamma, x : C \vdash A : B} \text{ se } x \notin \Gamma$$

- (*form*)

$$\frac{\Gamma \vdash A : s \qquad \Gamma \vdash B : s}{\Gamma \vdash A \to B : s}\ (form)$$

- (*appl*)

$$\frac{\Gamma \vdash M : A \to B \qquad \Gamma \vdash N : A}{\Gamma \vdash MN : B}\ \text{(appl)}$$

- (*abst*)

$$\frac{\Gamma, x : A \vdash M : B \qquad \Gamma \vdash A \to B : s}{\Gamma \vdash \lambda x : A.M : A \to B}\ \text{(abst)}$$

- (*conv*)

$$\frac{\Gamma \vdash A : B \qquad \Gamma \vdash B' : s}{\Gamma \vdash A : B'} \text{ se } B =_\beta B'$$

1.1.6 Propriedades

O sistema $\lambda\underline{\omega}$ satisfaz a maioria das propriedades de sistemas anteriores. A única modificação necessária é no Lema da Unicidade dos tipos, pois tipos não são mais literalmente unicos, mas são únicos a menos de β-conversão:

Lema 1.1 (Unicidade dos tipos a menos de conversão)**.** Se $\Gamma \vdash A : B_1$ e $\Gamma \vdash A : B_2$, então $B_1 =_\beta B_2$

1.2 O Sistema $\mathcal{F}_\omega$ de Girard