Lista 02 - ALG

Mateus Henrique Souza Silva

1 -

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C(A) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad R(A) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$N(A) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \end{bmatrix} = 0$$

$$x_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

$$N(A) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

2- $R = M = N$: A_1 É $N \times N$, COM N COLUNAS LI, OU SEJA, DET $\neq 0$ E UMA SOLUÇÃO.

$R = M < N$: PARA QUE O SISTEMA $Ax = B$ POSSUA ∞ SOLUÇÕES, A_2 DEVE POSSUIR M COLUNAS LI E $N-M$ COLUNAS LD E O RANK $R = M$. O FATO DE MAPEAR $L: R^N \to R^M$ FAZ COM QUE O SISTEMA TENHA ∞ SOLUÇÕES.

$R = N < M$: SEGUE O RACIONIO DE A^2, PORÉM $A^3 = A_2^T$.

$R < M$, $R < N$: A_4 POSSUI MIN(M, N) LINHAS LI, OU SEJA, O SISTEMA TEM COORDENADAS QUE SE INFLUENCIAM, O QUE POSSIBILITA NENHUMA, OU ∞ SOLUÇÕES.

EXEMPLOS:

$$A_1: \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{2\times 2} \qquad A_2: \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}_{2\times 3}$$

$$A_3 = A_2^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{3\times 2} \qquad A_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

3. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

$Ax = \lambda x$

$M = A - \lambda I$

$= \begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 1 & 1-\lambda \end{bmatrix}$

$DET(M) = 0$

$(1-\lambda)^2 - 0 = 0$

$1 - 2\lambda - \lambda^2 = 0$

$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$

$\boxed{\lambda = 1}$

$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$M = B - \lambda I$

$= \begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 0 & 1-\lambda \end{bmatrix}$

$DET(M) = 0$

$(1-\lambda)^2 = 0$

$1 - 2\lambda - \lambda^2 = 0$

$-\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$

$\boxed{\lambda = 1}$

$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

$M = AB - \lambda I$

$\begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 1 & 3-\lambda \end{bmatrix}$

$DET(M) = 0$

$(1-\lambda)(3-\lambda) - 2 = 0$

$3 - \lambda - 3\lambda + \lambda^2 - 2 = 0$

$\lambda^2 - 4\lambda + 1 = 0$

$\boxed{\begin{matrix} \lambda' = 2 + \sqrt{3} \\ \lambda'' = 2 - \sqrt{3} \end{matrix}}$

$BA = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

$M = BA - \lambda I$

$= \begin{bmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 1 & 1-\lambda \end{bmatrix}$

$DET(M) = 0$

$(3-\lambda)(1-\lambda) - 2 = 0$

$3 - 3\lambda - \lambda + \lambda^2 - 2 = 0$

$\lambda^2 - 4\lambda + 1 = 0$

$\boxed{\begin{matrix} \lambda' = 2 + \sqrt{3} \\ \lambda'' = 2 - \sqrt{3} \end{matrix}}$

A) NÃO

B) Sim

4 - $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

$$\det(A - \lambda I) = \det\begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{pmatrix}$$
$$= (a-\lambda)(d-\lambda) - cb$$
$$= ad - a\lambda - d\lambda + \lambda^2 - cb$$
$$\det(A - \lambda I) = \lambda^2 - a\lambda - d\lambda + ad - cb$$

$A^T = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$

$$\det(A^T - \lambda I) = \det\begin{pmatrix} a-\lambda & c \\ b & d-\lambda \end{pmatrix}$$
$$= (a-\lambda)(d-\lambda) - bc$$
$$= ad - a\lambda - d\lambda + \lambda^2 - bc$$
$$\det(A^T - \lambda I) = \lambda^2 - a\lambda - d\lambda + ad - bc$$

Portanto, $\det(A - \lambda I) = \det(A^T - \lambda I)$