DCC639: Álgebra Linear Computacional **(Prazo para submissão: 05/07/21 23:59)**

Lista de Exercícios 03

Professores: Erickson e Fabricio

Política da Disciplina: Leia todas as instruções abaixo cuidadosamente antes de começar a resolver a lista, e antes de fazer a submissão.

- As questões podem ser discutidas entre até três alunos (conjuntos disjuntos). Os nomes dos colegas precisam ser incluídos na submissão.
- A submissão deve ser feita em formato PDF através do Moodle, mesmo que tenham sido resolvidas a mão e escaneadas.
- Todas as soluções devem ser justificadas.
- Todas as fontes de material precisam ser citadas. O código de conduta da UFMG será seguido à risca.

Problema 1: Quais das matrizes S_1, S_2, S_3, S_4 tem dois autovalores positivos? Use um teste, não calcule os $\lambda's$. Encontre também um vetor x tal que $\mathbf{x}^T S_1 \mathbf{x} < 0$, então S_1 não é uma matriz definida positiva.

$$S_1 = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} \qquad S_2 = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -5 \end{bmatrix} \qquad S_3 = \begin{bmatrix} 1 & 10 \\ 10 & 100 \end{bmatrix} \qquad S_4 = \begin{bmatrix} 1 & 10 \\ 10 & 101 \end{bmatrix}$$

Problema 2: Mostre que $\|v\|_2 \leq \sqrt{n}\|v\|_\infty$ sempre. Prove também que $\|v\|_1 \leq \sqrt{n}\|v\|_2$, escolhendo um vetor w adequado e aplicando a desigualdade de Cauchy-Schwarz.

Problema 3: Considere o uso do SVD truncado de posto k para compressão de imagens em escala de cinza (0 a 255) de tamanho 1024 x 768.

(a) No caso de uma única imagem decomposta usando SVD, quantos bytes precisam ser armazenados para reconstruir a imagem? Qual o valor máximo de k para o qual a compressão vale a pena?

(b) Agora suponha que queiramos usar um único SVD para comprimir várias imagens. Para isso, iremos representar as imagens como vetores de tamanho 786432 (= 1024×768). Quantos bytes serão necessários para armazenar 10 imagens? E quanto a 1000 imagens?

Problema 4: Seja Q uma matriz ortogonal. Mostre que: (a) os valores singulares de Q são todos iguais a 1, e que (b) $Q = U\Sigma V^\top$ com $U = Q$, $\Sigma = I$ e $V^\top = I$ é um SVD válido.

Problema 5: Sem fazer contas (i.e., sem fazer multiplicação de matrizes ou calcular polinômios característicos), encontre os $\sigma's$, $u's$ e $v's$ da matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = U\Sigma V^T$. Dica: as matrizes ortogonais U e V são matrizes de permutação.