Exemplos - Transformações Lineares

Exemplo 1: *Seja V um espaço vetorial. A seguinte aplicação é uma transformação linear:*

$$\begin{array}{rccl} T: & V & \longrightarrow & V \\ & v & \longmapsto & T(v) = v \end{array}$$

que é a **transformação identidade**.

Vamos mostrar que esta aplicação satisfaz as duas propriedades para ser transformação linear:

(a) Considere $v_1, v_2 \in V$, temos que:

$$T(v_1 + v_2) = v_1 + v_2 = T(v_1) + T(v_2)$$

pela forma como esta definida a aplicação.

(b) Considere $v \in V$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, temos:

$$T(\alpha v) = \alpha v = \alpha T(v)$$

pela forma como esta definida a aplicação.

Assim, mostramos que esta aplicação define uma transformação linear de V em V.

Exemplo 2: *Seja V um espaço vetorial. A seguinte aplicação é uma transformação linear:*

$$\begin{array}{rccl} T: & V & \longrightarrow & V \\ & v & \longmapsto & T(v) = e_V \end{array}$$

que é a **transformação nula***, ou seja, que leva todos os elementos do espaço vetorial no elemento nulo deste mesmo espaço vetorial.*

Para mostrar que T é uma transformação linear, basta mostrar que $T(v_1+\alpha v_2) = T(v_1)+\alpha T(v_2)$, para todo $v_1, v_2 \in V$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. De fato, temos que:

$$T(v_1 + \alpha v_2) = e_V = e_V + e_V = e_V + \alpha e_V = T(v_1) + \alpha T(v_2)$$

O que mostra que a aplicação é uma transformação linear de V em V.

Exemplo 3: *A seguinte aplicação de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$ é uma transformação linear:*

$$\begin{array}{rccl} T: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & v & \longmapsto & T(v) = \alpha v \end{array}$$

que é uma **expansão (ou contração)***, dependendo do valor α. Esta transformação leva cada vetor v do $\mathbb{R}^2$ num vetor de mesma direção de v, mas com sentido igual a v (caso $\alpha > 0$) ou sentido oposto (caso $\alpha < 0$) e módulo maior (caso $|\alpha| > 1$) ou menor (caso $|\alpha| < 1$). Para $\alpha = 1$ esta é a transformação identidade.*

De fato, para todo $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2$ e $\beta \in \mathbb{R}$, temos:

$$T(v_1 + \beta v_2) = \alpha(v_1 + \beta v_2) = \alpha v_1 + \alpha\beta v_2 = T(v_1) + \beta T(v_2)$$

Assim, T é uma transformação linear.

Por exemplo, para $\alpha = 2$, e $v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, temos: $T(x, y) = 2(x, y)$.

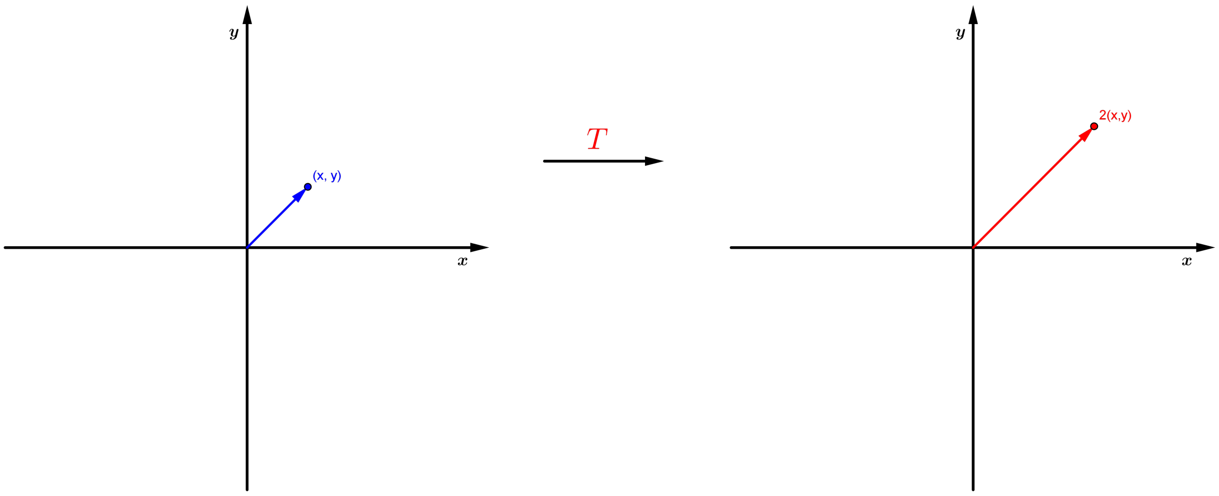

Figura 1: A transformação linear T leva todo elemento $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ no elemento $2(x, y)$.

Esta transformação aplicada a uma figura (conjunto de pontos do $\mathbb{R}^2$) irá expandir esta figura no dobro de seu tamanho.

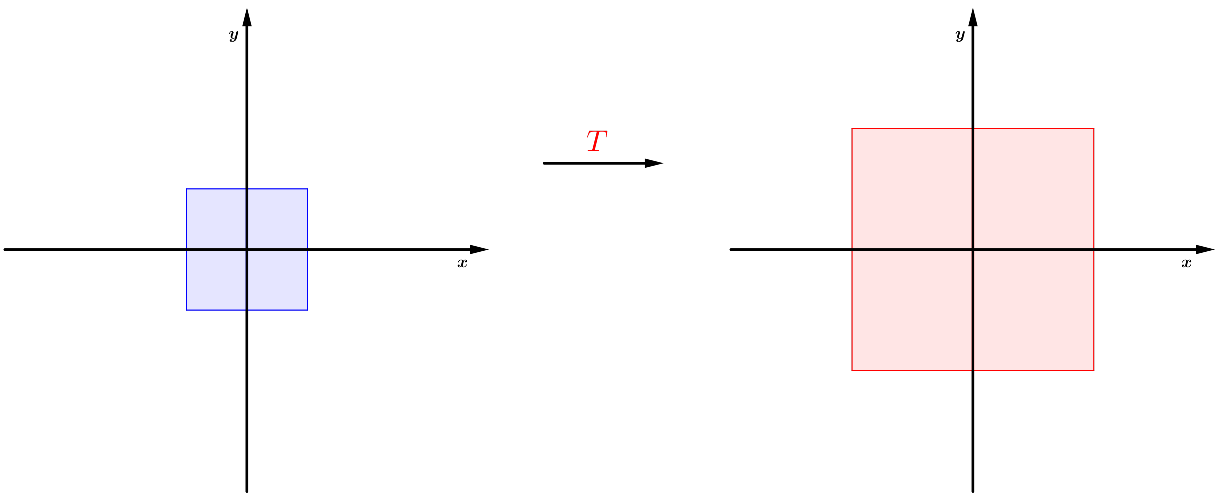

Figura 2: A transformação linear T leva uma figura no plano na mesma figura ampliada com o dobro do tamanho.

Exemplo 4: *A seguinte aplicação de* $\mathbb{R}^2$ *em* $\mathbb{R}^2$ *é uma transformação linear:*

$$\begin{array}{rlcl} T: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x, y) & \longmapsto & T((x, y)) = (x, -y) \end{array}$$

que é uma **reflexão em torno do eixo** x*.*

De fato, T é transformação linear, uma vez que, para todo $v_1 = (x_1, y_1), v_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, temos:

$$T(v_1 + \alpha v_2) = T((x_1, y_1) + \alpha(x_2, y_2)) = T(x_1 + \alpha x_2, y_1 + \alpha y_2) = (x_1 + \alpha x_2, -y_1 - \alpha y_2) =$$

$$= (x_1, -y_1) + (\alpha x_2, -\alpha y_2) = (x_1, -y_1) + \alpha(x_2, -y_2) = T(x_1, y_1) + \alpha T(x_2, y_2) = T(v_1) + \alpha T(v_2)$$

onde usamos o fato de que $\mathbb{R}^2$ é espaço vetorial e a forma como foi definida a aplicação T.

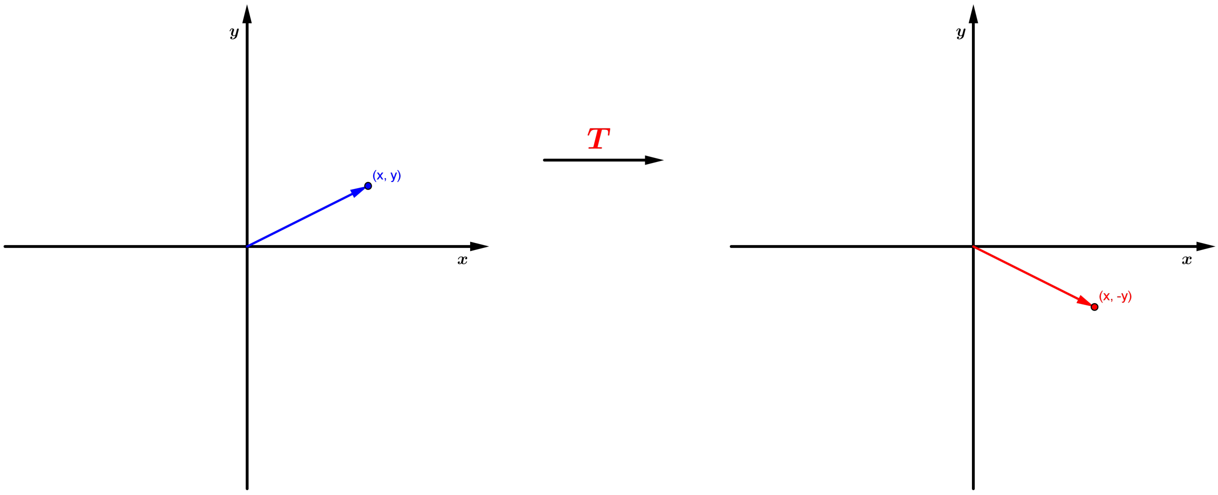

Figura 3: A transformação linear T é a reflexão em torno do eixo x.

Considere agora um triângulo ABC de vértices $A = (-1, 4)$, $B = (3, 1)$ e $C = (2, 6)$. Vamos aplicar a transformação linear T neste triângulo. Para saber qual a imagem do triângulo pela transformação, basta sabermos as imagens de seus vértices:

$$T(-1, 4) = (-1, -4)$$

$$T(3, 1) = (3, -1)$$

$$T(2, 6) = (2, -6)$$

Portanto, o triângulo ABC é levado no triângulo $A'B'C'$, com $A' = (-1, -4)$, $B' = (3, -1)$ e $C' = (2, -6)$, pela transformação linear T, que é a reflexão em torno do eixo x.

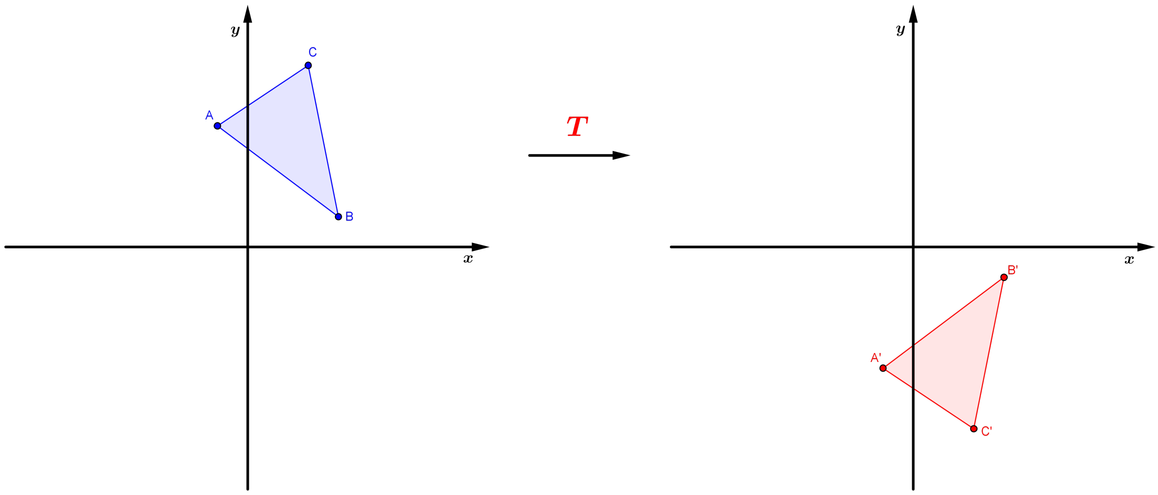

Figura 4: A transformação linear T leva o triângulo ABC no triângulo $A'B'C'$.

Exemplo 5: *A seguinte aplicação de* $\mathbb{R}^2$ *em* $\mathbb{R}^2$ *é uma transformação linear:*

$$\begin{array}{rccl} T: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x, y) & \longmapsto & T((x, y)) = (-x, -y) \end{array}$$

que é uma **reflexão em torno da origem**.

De fato, T é transformação linear, uma vez que, para todo $v_1 = (x_1, y_1), v_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, temos:

$$T(v_1 + \alpha v_2) = T((x_1, y_1) + \alpha(x_2, y_2)) = T(x_1 + \alpha x_2, y_1 + \alpha y_2) = (-x_1 - \alpha x_2, -y_1 - \alpha y_2) =$$

$$= (-x_1, -y_1) + (-\alpha x_2, -\alpha y_2) = (-x_1, -y_1) + \alpha(-x_2, -y_2) = T(x_1, y_1) + \alpha T(x_2, y_2) = T(v_1) + \alpha T(v_2)$$

onde usamos o fato de que $\mathbb{R}^2$ é espaço vetorial e a forma como foi definida a aplicação T.

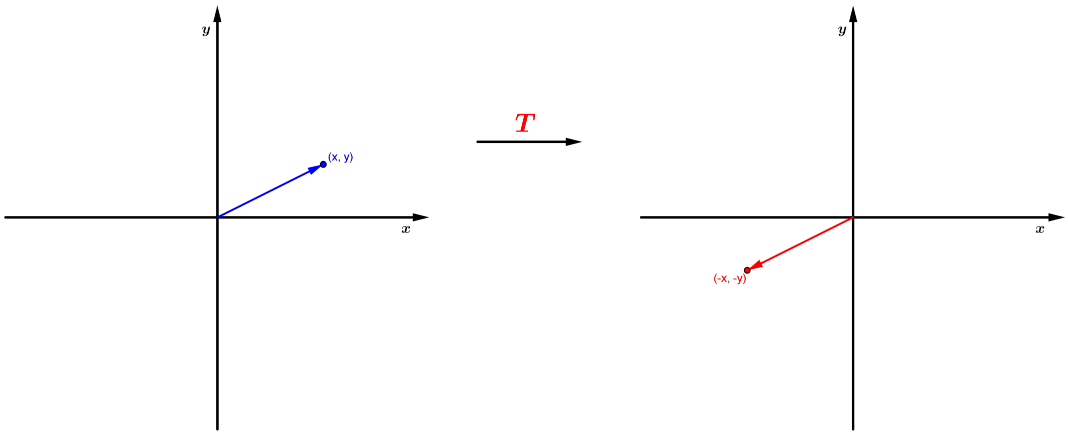

Figura 5: A transformação linear T é a reflexão em torno da origem.

Exemplo 6: *A aplicação T de $\mathbb{R}^3$ em $\mathbb{R}^3$, é uma transformação linear:*

$$\begin{array}{rccl} T: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x, y, z) & \longmapsto & T(x, y, z) = (x, y, -z) \end{array}$$

que é uma **reflexão em torno do plano** xy*.*

De fato, a aplicação T é transformação linear, pois, para todo $v_1 = (x_1, y_1, z_1) \in \mathbb{R}^3$, $v_2 = (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, temos:

$$T(v_1 + \alpha v_2) = T((x_1, y_1, z_1) + \alpha(x_2, y_2, z_2)) = T(x_1 + \alpha x_2, y_1 + \alpha y_2, z_1 + \alpha z_2) =$$

$$= (x_1 + \alpha x_2, y_1 + \alpha y_2, -z_1 - \alpha z_2) = (x_1, y_1, -z_1) + \alpha(x_2, y_2, -z_2) =$$

$$= T(x_1, y_1, z_2) + \alpha T(x_2, y_2, z_2) = T(v_1) + \alpha T(v_2)$$

onde usamos as propriedades de espaço vetorial para $\mathbb{R}^3$ e a regra da aplicação T.

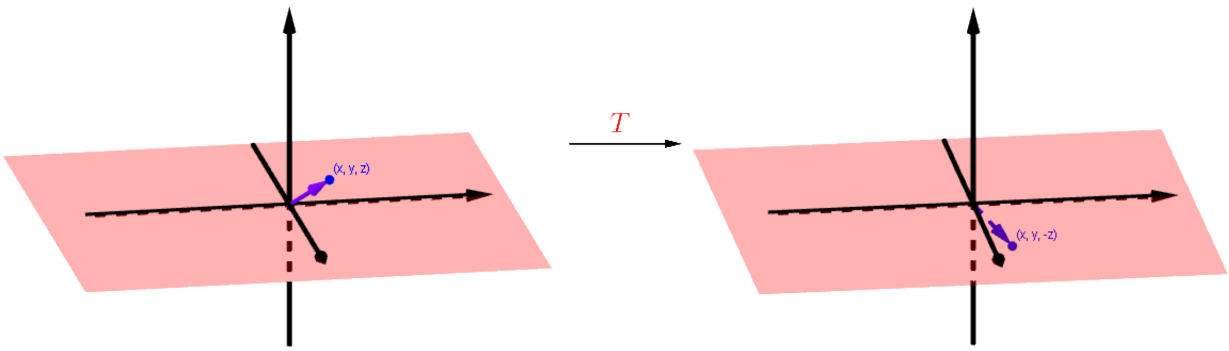

Figura 6: A transformação linear T é a reflexão em torno do plano xy.

Exemplo 7: *Considere a seguinte aplicação:*

$$\begin{array}{llcl} T: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \longmapsto & T(x,y) = (x+a, y) \end{array}$$

com $a \in \mathbb{R}$, que é uma **translação** *de comprimento a e direção do eixo x. Essa aplicação* **NÃO** *é uma transformação linear, a menos que $a = 0$, pois não satisfaz as condições para ser linear.*

Considere $v_1 = (x_1, y_1)$ e $v_2 = (x_2, y_2)$ pertencentes a $\mathbb{R}^2$, temos que:

$$T(v_1 + v_2) = T((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) = T(x_1 + x_2, y_1 + y_2) = (x_1 + x_2 + a, y_1 + y_2)$$

mas por outro lado,

$$T(v_1) + T(v_2) = T(x_1, y_1) + T(x_2, y_2) = (x_1 + a, y_1) + (x_2 + a, y_2) = (x_1 + x_2 + 2a, y_1 + y_2)$$

Ou seja, $T(v_1 + v_2) \neq T(v_1) + T(v_2)$, para $a \neq 0$, logo a aplicação T não é uma transformação linear.

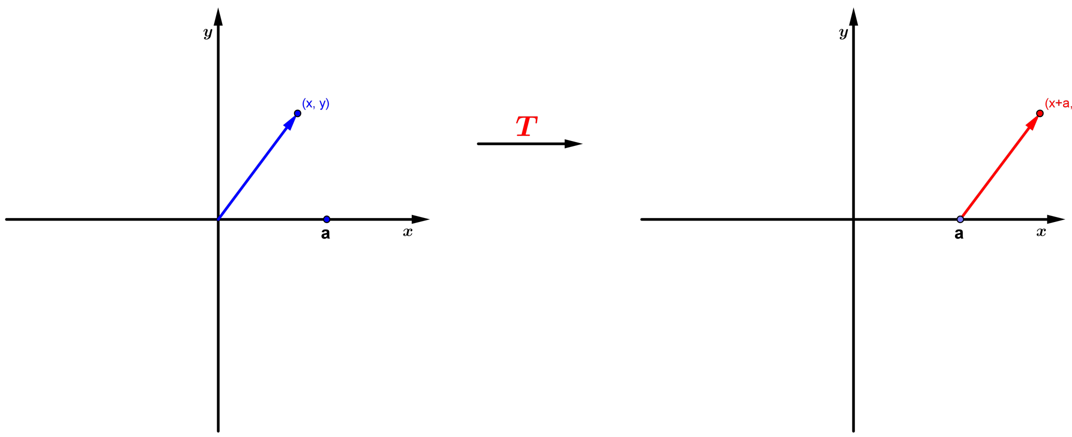

Figura 7: A aplicação T é a translação de comprimento a e direção do eixo x.

Exemplo 8: *Considere a seguinte transformação linear:*

$$\begin{array}{llcl} T: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \longmapsto & T(x,y) = (2x+y, x+2y) \end{array}$$

Considere o círculo $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$. Vamos obter a imagem do círculo S pela transformação linear T.

Temos que $T(x,y) = (2x+y, x+2y)$, assim, toda coordenada x é levada em $2x+y$ e toda coordenada y é lavada em $x+2y$, desta forma, o círculo $x^2+y^2 = 1$ é levado em $(2x+y)^2+(x+2y)^2 = 1 \Rightarrow 5x^2 + 8xy + 5y^2 = 1$, que é uma elipse em $\mathbb{R}^2$, com centro $(0,0)$, focos $(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3})$ e $(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$, medida do semi-eixo maior igual a 1 e medida do semi-eixo menor igual a $\frac{1}{3}$.

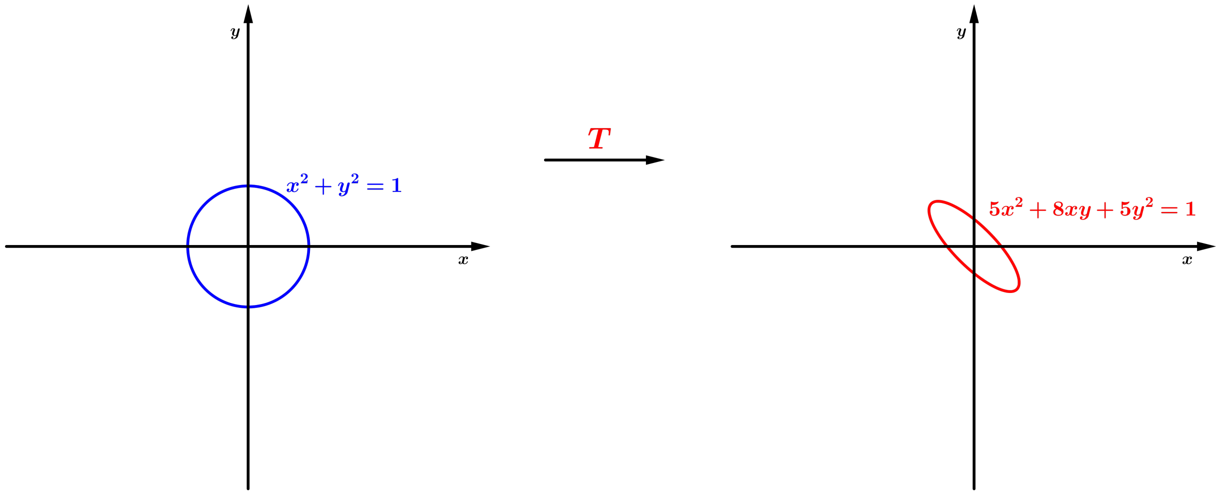

Figura 8: A transformação linear T leva o círculo $x^2 + y^2 = 1$ na elipse $5x^2 + 8xy + 5y^2 = 1$.

Exemplo 9: *Considere a seguinte transformação linear* $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *tal que:*

$$T(1,0,0) = (1,0), \quad T(0,1,0) = (1,-1), \quad T(0,0,1) = (0,1)$$

Vamos determinar explicitamente a expressão da transformação linear T.

Considerando o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ com a base

$$B = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$$

Dado um elemento qualquer $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, podemos representá-lo de modo único como combinação linear dos elementos da base B:

$$(x, y, z) = x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1)$$

Então:

$$T(x, y, z) = T(x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1))$$

e como T é transformação linear:

$$T(x, y, z) = xT(1,0,0) + yT(0,1,0) + zT(0,0,1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T(x, y, z) = x(1,0) + y(1,-1) + z(0,1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T(x, y, z) = (x + y, -y + z)$$

Assim, obtemos explicitamente a transformação linear T.

Exemplo 10: *Considere a transformação linear* $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *tal que:*

$$T(1,0) = (1,0), \qquad T(0,1) = (2,1)$$

Vamos determinar explicitamente a transformação linear T.

Estamos considerando o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ com a base canônica $B = \{(1,0), (0,1)\}$. Podemos escrever um elemento qualquer de $\mathbb{R}^2$ de forma única como:

$$(x, y) = x(1,0) + y(0,1)$$

Sabendo como a transformação T atua nos elementos da base B, e que T é transformação linear, temos que:

$$T(x,y) = T(x(1,0) + y(0,1)) = xT(1,0) + yT(0,1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T(x,y) = x(1,0) + y(2,1) \Rightarrow T(x,y) = (x+2y, y)$$

Assim, obtemos a expressão da transformação linear T.

Considere o quadrado de vértices $A = (0,0)$, $B = (1,0)$, $C = (1,1)$ e $D = (0,1)$. Temos que as imagens dos vértices do quadrado pela transformação T são:

$$T(0,0) = (0,0), \quad T(1,0) = (1,0), \quad T(1,1) = (3,1), \quad T(0,1) = (2,1)$$

Assim, o quadrado $ABCD$ é levado no paralelogramo $A'B'C'D'$ de vértices $A' = (0,0)$, $B' = (1,0)$, $C' = (3,1)$ e $D' = (2,1)$ pela transformação linear T.

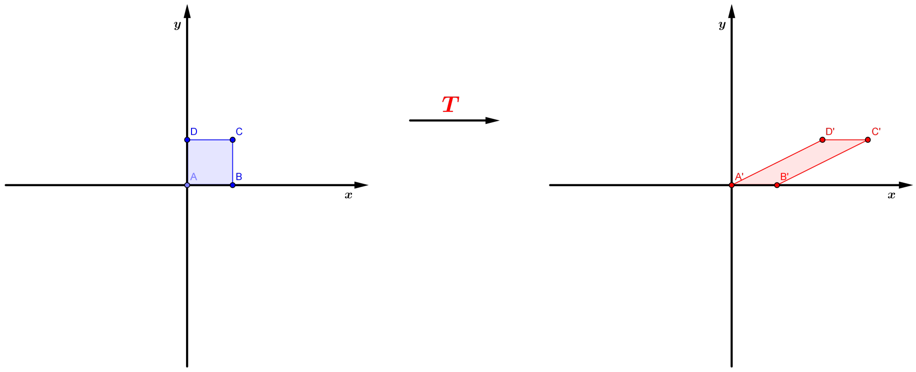

Figura 9: A transformação linear T leva o quadrado $ABCD$ no paralelogramo $A'B'C'D'$.