Potência de matrizes quadradas

$$A^0 = I_n$$
$$A^1 = A$$
$$A^2 = A \cdot A$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$A^k = A \cdot A^{k-1} = A^{k-1} \cdot A$$

Exemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -6 \\ -9 & 22 \end{pmatrix}.$$

$$A^3 = A^2 A = \begin{pmatrix} 7 & -6 \\ -9 & 22 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 & 38 \\ 57 & -106 \end{pmatrix}.$$

1) Se $f(x) = 2x^2 - 3x + 5 \Longrightarrow f(A) = 2A^2 - 3A + 5I \Longleftrightarrow$

$$f(A) = 2\begin{pmatrix} 7 & -6 \\ -9 & 22 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & -18 \\ -27 & 61 \end{pmatrix}.$$

Importante! $f(A)$ é uma matriz do mesmo tipo da matriz A.

2) Se $g(x) = x^2 + 3x - 10 \Longrightarrow g(A) = A^2 + 3A - 10I \Longleftrightarrow$

$$g(A) = \begin{pmatrix} 7 & -6 \\ -9 & 22 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} - 10\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Importante! A é um zero do polinômio $g(x)$.