Álgebra Linear I – Prof. José Luiz Neto – Resumo_A14

Livro de preparação do resumo: Álgebra Linear → Boldrine/Costa e Figueiredo/Wetzler (BOLDRINI, J. L. et al. Álgebra Linear. 3 ed. São Paulo: Harbra, 1986) e https://www.ufjf.br/andre_hallack/files/2018/04/linear17.pdf, acessado no dia 17/08/2020.

Coordenadas de um Vetor em Relação a uma Base Ordenada. Matriz de mudança de Base.
Exercício sobre soma de subespaço.

Coordenadas de um vetor em relação a uma base

Resultado importante!

Dada uma base $\beta = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ de V, cada vetor de V é escrito de maneira única como combinação linear de $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$.

Definição

Sejam $\beta = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ base de V e $\mathbf{v} \in V$ onde $\mathbf{v} = a_1\mathbf{v}_1 + \ldots + a_n\mathbf{v}_n$. Chamamos estes números $a_1, \ldots, a_n$ de *coordenadas* de $\mathbf{v}$ em relação à base β e denotamos por

$$[\mathbf{v}]_\beta = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

Exemplo: $V = \mathbf{R}^2$
$\beta = \{(1, 0), (0, 1)\}$
$(4, 3) = 4(1, 0) + 3(0, 1)$.

Portanto $[(4, 3)]_\beta = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$

Cuidado!

Se $\beta' = \{(1, 1), (0, 1)\}$, então $(4, 3) = x(1, 1) + y(0, 1)$, resultando $x = 4$ e $y = -1$.

Então $(4, 3) = 4(1, 1) - 1(0, 1)$, donde $[(4, 3)]_{\beta'} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix}$

Cuidado!

É fácil ver que

$\beta = \{\,(1,1), (-1,2)\}$ é base do $\mathbb{R}^2$. Dado, por exemplo, o vetor $w = (-8,1) \in \mathbb{R}^2$ temos

$$w = (-8,1) = (-5,-5) + (-3,6) = (-5).(1,1) + 3.(-1,2) \;\Rightarrow\; [w]_\beta = \begin{bmatrix} -5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Matriz de mudança de base

Considere duas bases β e β' de um espaço vetorial V.

A matriz $[I]_{\beta}^{\beta'}$ é chamada *matriz de mudança da base* β' *para a base* β.

Lembrando:

Cada elemento de β' se escreve como uma combinação linear dos elementos de β.

Importante!

As matrizes $[I]_{\beta}^{\beta'}$ e $[I]_{\beta'}^{\beta}$ são inversas uma da outra.

Exemplo

Sejam $V = \mathbb{R}^2$; $\beta = \{(1,2), (3,5)\}$ e $\beta' = \{(1,0), (0,1)\}$.

Calcule $[I]_{\beta}^{\beta'}$ e $[I]_{\beta'}^{\beta}$.

Solução:

$$[I]_{\beta'}^{\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}, \text{ pois } \begin{cases} (1,2) = 1\,(1,0) + 2\,(0,1) \\ (3,5) = 3\,(1,0) + 5\,(0,1) \end{cases}.$$

$$[I]_{\beta}^{\beta'} = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

$$(1,0) = a(1,2) + b(3,5) \Leftrightarrow \begin{cases} a + 3b = 1 \\ 2a + 5b = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2a - 6b = -2 \\ 2a + 5b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{b = 2 \text{ e } a = -5.}$$

$$(0,1) = c(1,2) + d(3,5) \Leftrightarrow \begin{cases} c + 3d = 0 \\ 2c + 5d = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} -2c - 6d = 0 \\ 2c + 5d = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{d = -1 \text{ e } c = 3.}$$

Mostre que

$$[I]_{\beta}^{\beta'} \, [I]_{\beta'}^{\beta} = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercício sobre soma de subespaço

Resultado importante!

Se U e W são subespaços de um espaço vetorial V que tem dimensão finita, então $\dim U \leqslant \dim V$ e $\dim W \leqslant \dim V$. Além disso,

$$\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)$$

Uma aplicação da formula acima

Considere os dois subespaços de R^3:

$$V = \{(x, y, z) \; ; x + y - z = 0\}$$
$$W = \{(x, y, z) \; ; x = y\}.$$

Encontre V + W.

Solução:

geradores de V:

$(x, y, x+y) = (x, 0, x) + (0, y, y) = x(1,0,1) + y(0,1,1)$

$\boxed{V = [(1,0,1), (0,1,1)]}$.

geradores de W:

$(x, x, z) = (x, x, 0) + (0, 0, z) = x(1,1,0) + z(0,0,1)$

$\boxed{W = [(1,1,0), (0,0,1)]}$.

Então,

$V = [(1, 0, 1), (0, 1, 1)]$
$W = [(1, 1, 0), (0, 0, 1)]$

$$\beta_V = \{(1,0,1), (0,1,1)\} \Longrightarrow \dim V = 2.$$

$$\beta_W = \{(1,1,0), (0,0,1)\} \Longrightarrow \dim W = 2.$$

Cuidado! A notação de base é diferente da notação de subespaço gerado.

"Juntando" todos os geradores de V com todos os geradores de W temos os geradores de V + W, isto é,

$V + W = [(1, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 1, 0), (0, 0, 1)]$

Extraindo uma base para V + W:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$\beta_{V+W} = \{(1,0,1), (0,1,-1), (0,0,2)\}$; $\boxed{\dim(V+W) = 3.}$

Portanto $V + W = \mathbf{R}^3$.

Conferindo a fórmula acima:

$$\dim \mathbf{R}^3 = \dim V + \dim W - \dim (V \cap W)$$

temos que $\dim (V \cap W) = 1$

Vamos determinar $V \cap W$.

$$\begin{aligned} V \cap W &= \{(x, y, z) \; ; x + y - z = 0 \text{ e } x = y\} \\ &= \{(x, y, z) \; ; x = y = z/2\} \\ &= [(1, 1, 1/2)] \end{aligned}$$

Exercício: Refaça o exemplo acima para:

$V = \mathbb{R}^3$; $U = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x = y = z\right\}$

e $W = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x - 2y - 3z = 0\right\}$.

U e W são subespaços de V.