Álgebra Linear I – Prof. José Luiz Neto – Resumo_A3

Livro de preparação do resumo: Álgebra Linear → Boldrine/Costa e Figueiredo/Wetzler (BOLDRINI, J. L. et al. Álgebra Linear. 3 ed. São Paulo: Harbra, 1986) e https://www.google.com/search?client=firefox-b-d&q=Apostila+de+Matrizes%2C+Determinantes+e+Sistemas+2008, acessado em 30/07/2020.

Matrizes

Transposta de uma Matriz. Propriedades. A álgebra das matrizes quadradas: potência de matrizes quadradas e cálculo de p(A), onde p é polinômio e A é uma matriz quadrada.

1)Transposta de uma Matriz (muito importante)

Transposição: Dada uma matriz $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{m \times n}$, podemos obter uma outra matriz $\mathbf{A}' = [b_{ij}]_{n \times m}$, cujas linhas são as colunas de $\mathbf{A}$, isto é, $b_{ij} = a_{ji}$. $\mathbf{A}'$ é denominada *transposta* de $\mathbf{A}$.

1.3.4 Exemplos

Exemplo 1:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}_{3 \times 2} \qquad \mathbf{A}' = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}_{2 \times 3}$$

Nota: Prefiro denotar a transposta da matriz A com A^T e não com A^t.

Exemplo:

$$\text{Se} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}_{3\times 2} \quad \text{então} \quad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}_{2\times 3}.$$

Importante!

$$AA^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}_{3\times 2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}_{2\times 3} = \begin{pmatrix} 5 & 11 & 17 \\ 11 & 25 & 39 \\ 17 & 39 & 61 \end{pmatrix}.$$

Nota: AA^T é uma matriz simétrica. Isto sempre ocorre?

Propriedades - Veja no livro texto.

2)A álgebra das matrizes quadradas: potência de matrizes quadradas e cálculo de p(A), onde p é polinômio e A é uma matriz quadrada.

Importante! 1)Fazer potência de matrizes quadradas se resume em fazer produto de matrizes. 2)Enquanto que calcular p(A), onde p é polinômio e A é uma matriz quadrada, se resume em fazer produtos de matrizes e adição de matrizes, simultaneamente. Este dois assuntos já foram apresentados.

Lembrando:

$$A^0 = I_n$$
$$A^1 = A$$
$$A^2 = A \cdot A$$
....
$$A^k = A \cdot A^{k-1} = A^{k-1} \cdot A$$

Exemplo:

Seja $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Então $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercício:

Se $p(x) = x^2 + 2x - 11$ e $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$.

Mostre que $p(A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

O que isto significa?