Momento Síncrono 8 – Data: 28/06/2022

Atenção!

Prova da Unidade2 - 30/06/2022 – quinta.

Reposição da Unidade2 – 07/07/2022 - quinta.

Agora vamos mais devagar!

Unidade 3. Transformações Lineares. Autovalores e Autovetores. Diagonalização de Operadores.

....

Postagem: Resumo das Aulas 15 e 16 + lista5 (4,5,6,7,8)+Vídeos (Profa. Rosely)

Assuntos a serem vistos hoje: Transformação Linear (definição e exemplo). Núcleo e Imagem de uma Transformação Linear. Transformação Linear (TL) injetora e sobrejetora. Um exemplo de Isomorfismo.

(Voltando ao Cálculo Diferencial e Integral I)

Definição: Sejam V e W dois espaços vetoriais. Uma *transformação linear* (aplicação linear) é uma função de V em W, $F : V \to W$, que satisfaz as seguintes condições:

i) Quaisquer que sejam $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ em V,

$$F(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = F(\mathbf{u}) + F(\mathbf{v})$$

ii) Quaisquer que sejam $k \in \mathbb{R}$ e $\mathbf{v} \in V$,

$$F(k\mathbf{v}) = kF(\mathbf{v})$$

Exemplo de uma Transformação Linear:

$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(x, y) = (x - y,\ x + y)$.

Exemplo de uma Aplicação $\boxed{\text{que não é uma}}$ Transformação Linear:

$T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $T(x) = x^2$.

Justificativa: $T(x+y) = (x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 \neq x^2 + y^2 = T(x) + T(y)$.

Importante!

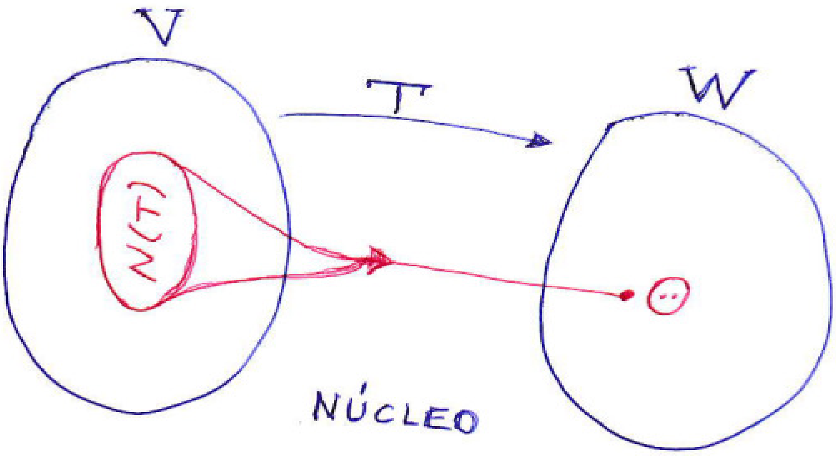
i) Toda Transformação Linear $T : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$, $\boxed{\text{leva o } 0_V \text{ no } 0_W.}$

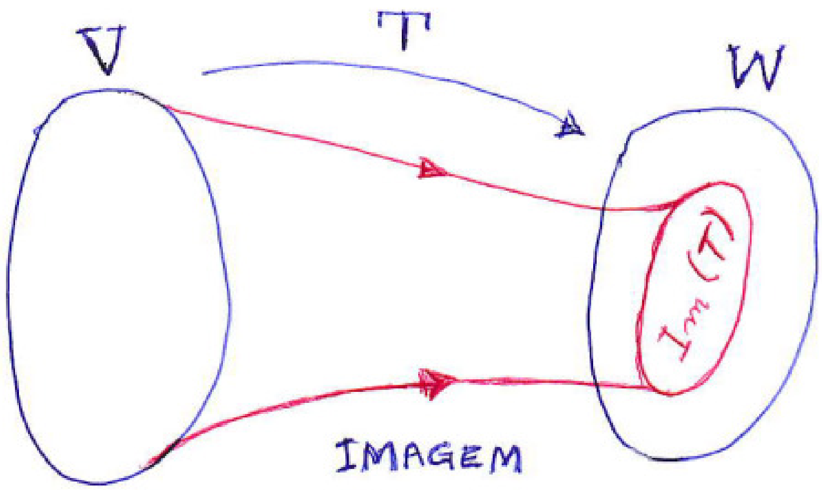
ii) $T(0_V) = 0_W$, $\boxed{\text{não garante}}$ que T é linear.

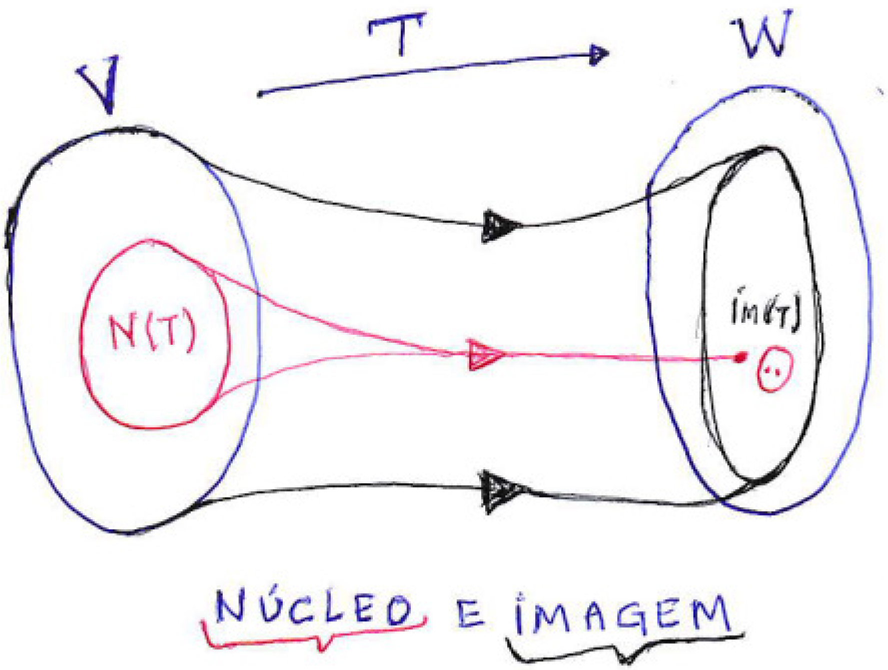
Por Exemplo $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(x, y) = (x + y^2, \ y)$,

$\boxed{\text{não é uma}}$ Transformação Linear.

Núcleo e Imagem de uma Transformação Linear (vídeo)







1)Como determinar o núcleo de T, N(T) ou Ker(T) (subespaço de V)?

Resposta: resolvendo um sistema linear homogêneo.

2)Como determinar a imagem de T, I_m(T) (subespaço de W)?

Resposta: encontrando os geradores de um subespaço vetorial.

Exemplo: Ache o Núcleo e Imagem da transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por $T(x, y) = (x,\ y,\ x+y)$.

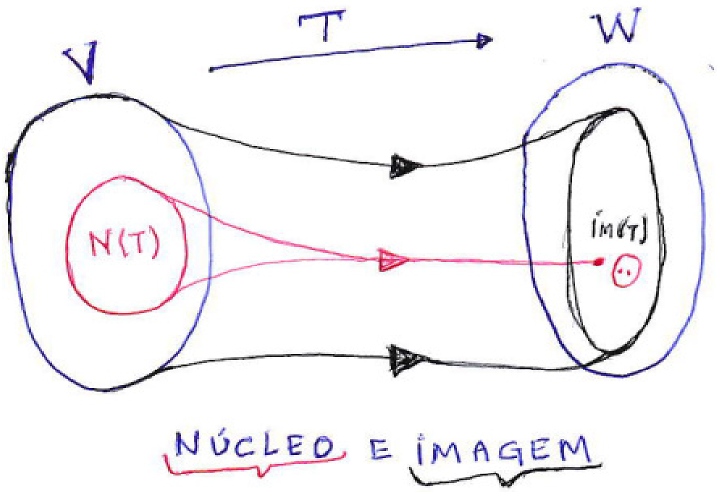
Núcleo de T :

$$\begin{aligned} N(T) &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / T(x,y) = (0,\ 0,\ 0)\right\} \\ &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / (x,\ y,\ x+y) = (0,\ 0,\ 0)\right\} \\ &= \{(0,0)\}. \end{aligned}$$

Imagem de T :

$$\begin{aligned} I_m(T) &= \{(x,\ y,\ x+y)\,/x, y \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(x,\ 0,\ x) + (0,\ y,\ y)\,/x, y \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x(1,\ 0,\ 1) + y(0,\ 1,\ 1)\,/x, y \in \mathbb{R}\} \\ &= [(1,\ 0,\ 1), (0,\ 1,\ 1)]. \end{aligned}$$

Lembrando:



Teorema do Núcleo e da imagem

Seja $T : V \to W$, uma Transformação Linear, então:

$$\boxed{\dim N(T) + \dim I_m(T) = \dim V. \quad \boxed{\text{Cuidado!}}}$$

Importante!

$$T \text{ é Injetora se } \; N(T) = \{0_V\}, \; \text{ isto é, } \dim N(T) = 0.$$

$$T \text{ é Sobrejetora se } I_m(T) = W, \text{ isto é, } \dim I_m(T) = \dim W.$$

Se T é ao mesmo tempo Injetora e Sobrejetora então $\boxed{T \text{ é Bijetora.}}$

Problema1: Existe alguma possibilidade da TL T: $R^2 \rightarrow R^3$, definida por T(x, y) = (x, x+y, x-y) ser:

a)Injetora? (Resposta:__) b)Sobrejetora? (Resposta:__).

Lembrando: $\dim N(T) + \dim I_m(T) = 2 = \dim R^2$.

Problema2: Existe alguma possibilidade da TL T: $R^3 \rightarrow R^2$, definida por T(x, y, z) = (x+y, x+y+z) ser:

a)Injetora? (Resposta:__) b)Sobrejetora? (Resposta:__).

Lembrando: $\dim N(T) + \dim I_m(T) = 3 = \dim R^3$.

Exemplo: Ache a dimensão do Núcleo e a dimensão da Imagem da transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por $T(x, y) = (x,\ y,\ x + y)$.

Dimensão do Núcleo de T :

$$\begin{aligned} N(T) &= \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / T(x, y) = (0,\ 0,\ 0)\right\} \\ &= \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / (x,\ y,\ x + y) = (0,\ 0,\ 0)\right\} \\ &= \left\{(0, 0)\right\}. \\ & \boxed{\dim N(T) = 0.} \end{aligned}$$

Dimensão da Imagem de T :

$$\begin{aligned} I_m(T) &= \{(x,\ y,\ x + y) / x, y \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(x,\ 0,\ x) + (0,\ y,\ y) / x, y \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x(1,\ 0,\ 1) + y(0,\ 1,\ 1) / x, y \in \mathbb{R}\} \\ &= [(1,\ 0,\ 1), (0,\ 1,\ 1)]. \\ & \beta_{I_m(T)} = \{(1,\ 0,\ 1), (0,\ 1,\ 1)\} \longrightarrow \boxed{\dim I_m(T) = 2.} \end{aligned}$$

Pergunta: a transformação linear $T : \boxed{\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3}$ definida por $T(x, y) = (x,\ y,\ x + y)$ é:

a) Injetora? Sim, pois $\boxed{N(T) = \{(0, 0)\}.}$

b) Sobrejetora? Não, pois $\boxed{\dim I_m(T) = 2 \neq 3 = \dim \mathbb{R}^3.}$

Resultados Importantes!

Seja $T : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$, uma Transformação Linear, com $\boxed{\dim V = \dim W.}$

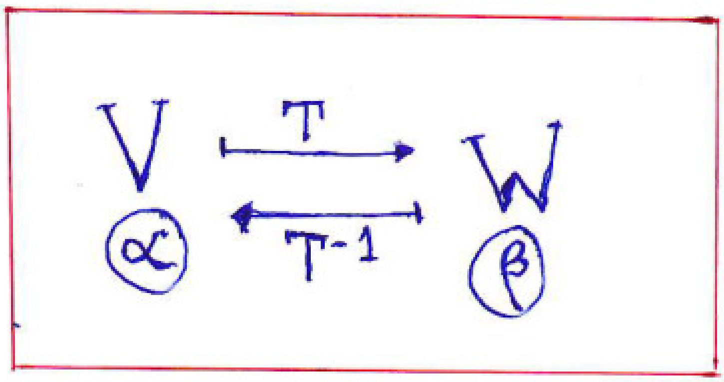
i) T é Injetora $\iff$ T é Sobrejetora.

ii) Se T é Injetora, T $\boxed{\text{leva base em base.}}$

iii) Se T é Injetora e Sobrejetora, então, T é Inversível, isto é, T é um $\boxed{\text{Isomorfismo.}}$

$$\boxed{\text{Lembrando: } \dim N(T) + \dim I_m(T) = \dim V.}$$

Transformação Linear Bijetora $\longrightarrow$ Isomorfismo



Dois exemplos de isomorfismo

Mostre que a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $T(x, y, z) = (x,\ x - y,\ x - z)$ é um isomorfismo.

Prova:

$$\begin{aligned} N(T) &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / T(x, y, z) = (0,\ 0,\ 0)\} \\ &= \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / (x,\ x - y,\ x - z) \overset{(*)}{=} (0,\ 0,\ 0)\right\} \\ &= \{(0,\ 0,\ 0)\}. \text{ Logo } T \text{ é injetora.} \end{aligned}$$

Como $\boxed{\dim V = \dim \mathbb{R}^3 = 3 = \dim W,}$ concluimos que T é sobrejetora. Portanto, T é um isomorfismo.

$$(*) \begin{cases} x & = 0 \\ x - y & = 0 \\ x - z & = 0 \end{cases} . \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 0 \\ 1 & -1 & 0 & | & 0 \\ 1 & 0 & -1 & | & 0 \end{bmatrix} \backsim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \end{bmatrix}.$$

$p(A) = 3 = p(M) = n$. O sistema linear $(*)$ admite uma única solução:

$$x = y = z = 0.$$

Mostre que a transformação linear $T : P_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$ definida por $T(ax^2 + bx + c) = (a - c,\ a + b + c,\ c)$ é um isomorfismo.

Prova:

$$\begin{aligned} N(T) &= \{(ax^2 + bx + c) \in P_2(\mathbb{R}) / T(ax^2 + bx + c) = (0,\ 0,\ 0)\} \\ &= \{(ax^2 + bx + c) \in P_2(\mathbb{R}) / (a - c,\ a + b + c,\ c) = (0,\ 0,\ 0)\} \\ &= \{0x^2 + 0x + 0\}. \text{ Logo } \boxed{T \text{ é injetora.}} \end{aligned}$$

Como $\dim P_2(\mathbb{R}) = 3 = \dim \mathbb{R}^3$, concluimos que $\boxed{T \text{ é sobrejetora.}}$ Portanto T é um isomorfismo.

\>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>> **Lista 5** <<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<

Atenção! Prepare-se para fazer muitas contas. Conviver com mais de uma resposta. Fazer muitos" mostre que". Notação também é um grande problema.

\>><<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<

Outros dois exemplos de isomorfismo

Exemplo 1: *A transformação linear* $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *dada por:* $T(x, y) = (x - 2y, y)$ *é um isomorfismo*

Para mostrar que T é injetora, basta determinar o núcleo de T. Um elemento do $\mathbb{R}^2$ pertence ao núcleo se:

$$T(x, y) = (x - 2y, y) = (0, 0) \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Assim, $\mathcal{N}(T) = \{(0, 0)\}$ e portanto, T é injetora. Pelo teorema do núcleo e da imagem, temos: $dim(\mathbb{R}^2) = dim(\mathcal{N}(T)) + dim(Im(T)) \Rightarrow dim(\mathbb{R}^2) = dim(Im(T))$. Logo, como a dimensão da imagem de T é igual a dimensão do espaço de chegada, então T é sobrejetora.

Sendo injetora e sobrejetora, temos que T é bijetora e portanto é um isomorfismo.

Exemplo 2: *A transformação linear* $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *dada por:*

$$T(x, y, z) = (x - 3y - 2z, y - 4z, z)$$

é um isomorfismo (automorfismo do $\mathbb{R}^3$*).*

Vamos mostrar que T é sobrejetora e injetora, assim mostrando que é um automorfismo do $\mathbb{R}^3$.

Vamos determinar o núcleo de T. Um elemento do $\mathbb{R}^3$ pertence ao núcleo se:

$$T(x, y, z) = (x - 3y - 2z, y - 4z, z) = (0, 0, 0) \Leftrightarrow \begin{cases} x - 3y - 2z = 0 \\ y - 4z = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

Assim, $\mathcal{N}(T) = \{(0, 0, 0)\}$ e portanto, T é injetora.

Pelo teorema do núcleo e da imagem, temos que $dim(\mathbb{R}^3) = dim(\mathcal{N}(T)) + dim(Im(T)) \Rightarrow dim(Im(T)) = dim(\mathbb{R}^3)$ e portanto, T é sobrejetora.
Como T é injetora e sobrejetora, ela é bijetora e logo, é um isomorfismo, e nesse caso, como os espaços vetoriais de saída e chegada são iguais, dizemos que T é um automorfismo.

Problema:

Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(x, y, z) = (x - z, 2x + y + 3z)$.

a) Qual é a dimensão do núcleo de T? T é injetora?

b) Qual é a dimensão da imagem de T? T é sobrejetora?

a) $N(T) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / T(x, y, z) = (0, 0)\} \Leftrightarrow N(T) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / (x - z, 2x + y + 3z) = (0, 0)\}$

Sistema:

$$\left\{ \begin{array}{|r|r|} \hline x - z & = 0 \\ \hline 2x + y + 3z & = 0 \\ \hline \end{array} \right. \Leftrightarrow N(T) = \{(z, -5z, z) / z \in \mathbb{R}\} \Leftrightarrow N(T) = \{z(1, -5, 1) / z \in \mathbb{R}\} \Leftrightarrow$$

$N(T) = [(1, -5, 1)] \Leftrightarrow \beta_{N(T)} = \{(1, -5, 1)\}$. Cuidado! $\dim(N(T)) = 1 \Rightarrow T$ não é injetora.

b) $I_m(T) = \left\{ \left(x - z, 2x + y + 3z \right) / x, y, z \in \mathbb{R} \right\} = \{(x, 2x) + (0, y) + (-z, 3z) / x, y, z \in \mathbb{R}\}$

$\Leftrightarrow I_m(T) = \{x(1,2) + y(0,1) + z(-1,3) / x, y, z \in \mathbb{R}\}$

$\Leftrightarrow I_m(T) = [(1,2), (0,1), (-1,3)] \Leftrightarrow \beta_{I_m}(T) = \{(1,2), (0,1)\}$. Cuidado! $\dim(I_m(T)) = 2 \Rightarrow T$ é sobrejetora.

Justificativa da base da imagem de T.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$