Álgebra Linear I – Prof. José Luiz Neto – Resumo_A7

Livro de preparação do resumo: Álgebra Linear → Boldrine/Costa e Figueiredo/Wetzler (BOLDRINI, J. L. et al. Álgebra Linear. 3 ed. São Paulo: Harbra, 1986) e https://www.google.com/search?client=firefox-b-d&q=Matrizes%2C+determinantes+e+sistemas+lineares+Viviane, acessado no dia 30/07/2020.

Sistema de Equações Lineares e matrizes

Discussão das soluções de um sistema linear. Teorema de Existência e unidade de soluções de sistema Linear) (Veja página 45 do livro do Boldrine).

Considere o sistema de equações lineares com m equações e n incógnitas:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Teorema:

i) Um sistema de m equações e n incógnitas admite solução se, e somente se, oposto da matriz ampliada é igual ao posto da matriz dos coeficientes.

ii) Se as duas matrizes têm o mesmo posto p e p = n, a solução é única.

iii) Se as duas matrizes têm o mesmo posto p e p < n, podemos escolher n – p incógnitas, e as outras p incógnitas serão dadas em função destas.

Solução de sistemas lineares usando operações elementares – um exemplo, de acordo com o teorema acima.

Discuta em função de $k \in \mathbb{R}$ o sistema de equações lineares $\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + 3y + kz = 3 \\ x + ky + 3z = 2 \end{cases}$

Solução: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & k & 3 \\ 1 & k & 3 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & k+2 & 1 \\ 0 & k-1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & k+2 & 1 \\ 0 & 0 & (3+k)(2-k) & 2-k \end{pmatrix}$

Operações: $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$; $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$ e $L_3 \leftarrow L_3 - (k-1)L_2$.

Resposta:

$$\begin{cases} \text{Se } k = -3, & & \text{o sistema é impossível.} \\ \text{Se } k \neq 2 & e \;\; k \neq -3, & \text{o sistema é possível e determinado (tem uma única soluão).} \\ \text{Se } k = 2, & & \text{o sistema é possível e indeterminado (tem infinitas soluções).} \end{cases}$$