Momento Síncrono 12 - Data: 02/08/2022

Postagem: Resumos das aulas 23 e 24 + 2 vídeos.

Assuntos de hoje: Multiplicidade algébrica e multiplicidade geométrica. Base constituída somente de autovetores. Matrizes semelhantes.

Definição1: A multiplicidade algébrica de um autovalor λ é a quantidade de vezes que ele aparece como raiz do polinômio característico.

Definição2: A multiplicidade geométrica de um autovalor λ é a dimensão do subespaço V_λ de autovetores associados a λ.

Atenção! multiplicidade geométrica $\leq$ multiplicidade algébrica

$Exemplo1:$ Seja $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ o operador linear definido por $T(x,y) = (3x+y, 3y)$.

<u>Autovalores de T:</u>

$$\begin{cases} T(1,0) = (3,0) \\ T(0,1) = (1,3) \end{cases} \Longleftrightarrow A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}. \quad A - \lambda I = \begin{bmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 0 & 3-\lambda \end{bmatrix}.$$

$p(\lambda) = (3-\lambda)^2$. $p(\lambda) = 0 \Longleftrightarrow 3 - \lambda = 0 \Longleftrightarrow \lambda = 3$. Logo 3 é o $\boxed{\text{único}}$ autovalor de T.

<u>Subespaços associados aos autovalores de T:</u>

$$p/\lambda = 3; \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} 0 + y = 0 \\ 0 + 0 = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x - livre \end{cases}.$$

$V_3 = \{(x,0)/x \in \mathbb{R}\} = \{x(1,0)/x \in \mathbb{R}\} = [(1,0)]$; $\beta_{V_3} = \{(1,0)\}$. $\boxed{\dim V_3 = 1.}$

Conclusão: a multiplicidade algébrica de $\lambda = 3$ é 2 e a multiplicidade geométrica de $\lambda = 3$ é 1.

$Exemplo2:$ Seja $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o operador linear definido por $T(x,y,z) = (2x+y, 2y+z, 2z)$.

<u>Autovalores de T:</u>

$$\begin{cases} T(1,0,0) = (2,0,0) \\ T(0,1,0) = (1,2,0) \\ T(0,0,1) \quad (0,1,2) \end{cases} \Longleftrightarrow A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}. \quad A - \lambda I = \begin{bmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{bmatrix}.$$

$p(\lambda) = (2-\lambda)^3$. $p(\lambda) = 0 \Longleftrightarrow 2 - \lambda = 0 \Longleftrightarrow \lambda = 2$. Logo 2 é o $\boxed{\text{único } (distinto)}$ autovalor de T.

<u>Subespaços associados aos autovalores de T:</u>

$$p/\lambda = 2; \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y = z = 0 \\ x - livre \end{cases}.$$

$V_2 = \{(x,0,0)/x \in \mathbb{R}\} = \{x(1,0,0)/x \in \mathbb{R}\} = [(1,0,0)]$; $\beta_{V_2} = \{(1,0,0)\}$. $\boxed{\dim V_2 = 1}$

Conclusão: a multiplicidade algébrica de $\lambda = 2$ é 3 e a multiplicidade geométrica de $\lambda = 2$ é 1.

$Exemplo3$: Seja $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ o operador linear dado pela matriz: $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

Autovalores de T :

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2-\lambda \end{bmatrix} \Longleftrightarrow p(\lambda) = (1-\lambda)(2-\lambda)^3 \,.\; p(\lambda) = 0 \Longleftrightarrow$$

$1-\lambda = 0$ ou $2-\lambda = 0 \Longleftrightarrow \lambda = 1$ ou $\lambda = 2$. Logo 1 e 2 são os autovalores ($distintos$) de T.

Subespaços associados aos autovalores de T :

$$p/\lambda = 1;\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} y & = & 0 \\ z & = & 0 \\ t & = & 0 \end{array} \right. \Longleftrightarrow \{\ x \ - \ livre \ .$$

$V_1 = \{(x,0,0,0)/x \in \mathbb{R}\} = \{x(1,0,0,0)/x \in \mathbb{R}\} = [(1,0,0,0)]$; $\beta_{V_1} = \{(1,0,0,0)\}$. $\dim V_1 = 1$.

$$p/\lambda = 2;\ \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} -x+y & = & 0 \\ 0 & = & 0 \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} y & = & x \\ 0 & = & 0 \\ x,z,t & - & livres \end{array} \right. .$$

$V_2 = \{(x,x,z,t)/x,z,t \in \mathbb{R}\} = \ldots = [(1,1,0,0)\,(0,0,1,0)\,,(0,0,0,1)]$;
$\beta_{V_2} = \{(1,1,0,0)\,(0,0,1,0)\,,(0,0,0,1)\}$. $\dim V_2 = 3$.

Conclusão:

a multiplicidade algébrica de $\lambda = 1$ é 1 e a multiplicidade geométrica de $\lambda = 1$ é 1.

a multiplicidade algébrica de $\lambda = 2$ é 3 e a multiplicidade geométrica de $\lambda = 2$ é 3.

Importante! $\beta = \{(1,0,0,0)\,,(1,1,0,0)\,(0,0,1,0)\,,(0,0,0,1)\}$ é uma base de $\mathbb{R}^4$ constituída apenas de autovetores (verfique!)

$$\text{Seja } P=\begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\Longrightarrow P^{-1}=\begin{bmatrix}1&-1&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}.$$

Note que as colunas da matriz P são os autovetores da base β.

$$P^{-1}AP=\begin{bmatrix}1&-1&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&2&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

$$P^{-1}AP=\begin{bmatrix}1&-1&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&0&0\\0&2&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&2&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&2\end{bmatrix}=[T]_\beta^\beta=B.$$

Importante! As matrizes A e B são semelhantes.

Problema: Seja $T:\mathbb{R}^2\rightarrow\mathbb{R}^2$ o operador linear que possua autovalores -2 e 3 e os subespaços associados aos autovalores de T são $V_{-2}=[(3,1)]$ e $V_3=[(-2,1)]$. Ache $T(x,y)$ e escreva: (a) uma base β de $\mathbb{R}^2$ constituída apenas de autovetores de T; (b) a matriz $[T]_\beta^\beta$.

Solução:

$$\boxed{T(3,1)=-2(3,1)=(-6,-2)\ \text{ e }\ T(-2,1)=3(-2,1)=(-6,3).}$$

$$(x,y)=a(3,1)+b(-2,1)\Longleftrightarrow\begin{cases}3a-2b=x\\ a+b=y\end{cases}\Longleftrightarrow\begin{cases}a=\dfrac{x+2y}{5}\quad\text{e}\\ b=\dfrac{-x+3y}{5}\end{cases}.$$

$$(x,y)=\left(\frac{x+2y}{5}\right)(3,1)+\left(\frac{-x+3y}{5}\right)(-2,1)$$

$$T(x,y)=\left(\frac{x+2y}{5}\right)T(3,1)+\left(\frac{-x+3y}{5}\right)T(-2,1)$$

$$T(x,y)=\left(\frac{x+2y}{5}\right)(-6,-2)+\left(\frac{-x+3y}{5}\right)(-6,3)$$

$$T(x,y)=\left(\frac{-6x-12y}{5}+\frac{6x-18y}{5},\frac{-2x-4y}{5}+\frac{-3x+9y}{5}\right)$$

$$\boxed{T(x,y)=(-6y,-x+y).}$$

$$\boxed{(a)\,\beta=\{(3,1),(-2,1)\}\ \text{ e }\ (b)\,[T]_{\beta}^{\beta}=\begin{bmatrix}-2 & 0\\ 0 & 3\end{bmatrix}.\ \text{Milagre!}}$$

Dever de casa: mostre que as matrizes $A=\begin{bmatrix}0 & -6\\ -1 & 1\end{bmatrix}$ e $[T]_{\beta}^{\beta}=\begin{bmatrix}-2 & 0\\ 0 & 3\end{bmatrix}$ são semelhantes.

Cuidado!