Álgebra Linear I – Prof. José Luiz Neto – Resumo_A23

Livro de preparação do resumo: Álgebra Linear → Boldrine/Costa e Figueiredo/Wetzler
(BOLDRINI, J. L. et al. Álgebra Linear. 3 ed. São Paulo: Harbra, 1986)

Autoespaço (ou subespaço associado) de um Operador Linear. Base de Autovetores

Definição: O subespaço $V_\lambda = \{\mathbf{v} \in V : T(\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{v}\}$ é chamado o *subespaço associado ao autovalor* λ.

Ex. 1) Determine os autovalores do operador $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definido por $T(x,y) = (-3x + 4y, -x + 2y)$.

Sol.: A matriz de T é $A = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$. $p(\lambda) = \det(A - \lambda I) \Leftrightarrow$

$p(\lambda) = \begin{vmatrix} -3-\lambda & 4 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (-3-\lambda)(2-\lambda) + 4 \Leftrightarrow$

$p(\lambda) = \lambda^2 + \lambda - 6 + 4 \Leftrightarrow p(\lambda) = \lambda^2 + \lambda - 2$. $p(\lambda) = 0 \Leftrightarrow$

$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -2$ ou $\lambda = 1$. Assim, os autovalores de T são: $\boxed{-2 \text{ e } 1.}$

Determinação dos autovetores associados:

p/ $\lambda = -2$; $\begin{bmatrix} -1 & 4 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -x + 4y = 0 \\ -x + 4y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 4y.$

$v = (4y, y)$; $y \neq 0$. $V_{-2} = \{(4y, y) / y \in \mathbb{R}\} = \{y(4,1) / y \in \mathbb{R}\}$

$\Leftrightarrow V_{-2} = [(4,1)]$; $\beta_{V_{-2}} = \{(4,1)\}$.

p/ $\lambda = 1$; $\begin{bmatrix} -4 & 4 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -4x + 4y = 0 \\ -x + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow y = x.$

$w = (x, x)$; $x \neq 0$. $V_1 = \{(x,x) / x \in \mathbb{R}\} = \{x(1,1) / x \in \mathbb{R}\} \Leftrightarrow$

$V_1 = [(1,1)]$; $\beta_{V_1} = \{(1,1)\}$.

Importante! $\beta = \{(4,1), (1,1)\}$ é uma base do $V = \mathbb{R}^2$

Autoespaços:

$i) V_{-2} = \{(4y, y) \, / y \in \mathbb{R}\}$ é um subespaço de $V = \mathbb{R}^2$ associado ao autovalor $\lambda = -2$.

$ii) V_1 = \{(x, x) \, / x \in \mathbb{R}\}$ é um subespaço de $V = \mathbb{R}^2$ associado ao autovalor $\lambda = 1$.

Veja outros exemplos no Resumo_A24.