Momento Síncrono 11 - Data: 26/07/2022

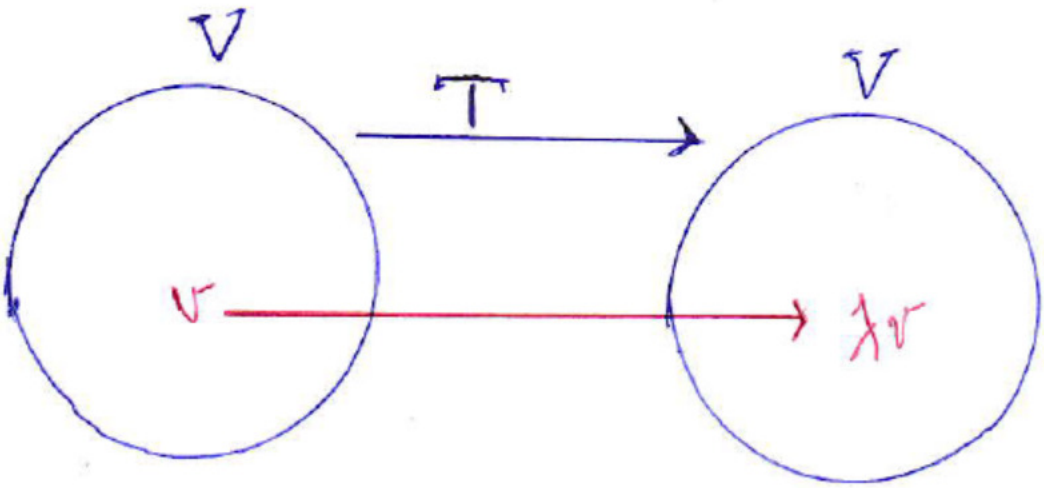
>>

Teste2_Unidade3→ Data: 28/07/2022

Postagem: Resumos das aulas 21 e 22 + 2 vídeos + link

Assuntos de hoje: Autovalores e Autovetores de um Operador Linear e Polinômio Característico de um Operador Linear. Subespaço associado a um autovalor

Operador Linear



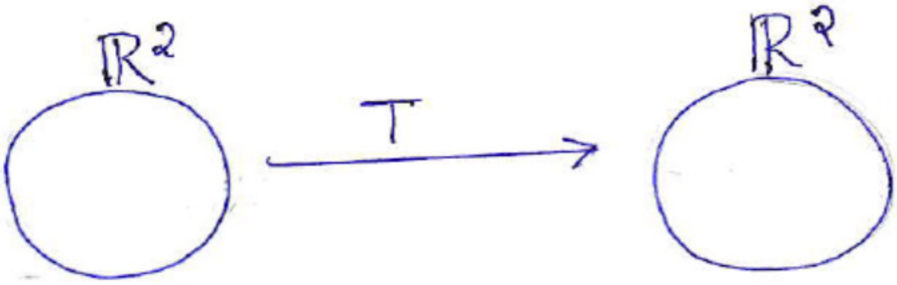
λ é um autovalor de T e v é um autovetor de T associado a λ.

Definição: Autovalor × Autovetor:

$$T(v) = \lambda v \Leftrightarrow Av = \lambda v \Leftrightarrow Av - \lambda v = 0 \Leftrightarrow$$

$$(A - \lambda I)v = 0.$$

Idéia de Como encontrar o Polinômio Característico p(*λ*) e os Autovalores *λ*.



$$\Downarrow$$

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \quad \text{E} \quad \lambda I = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

Polinômio Característico

$$\boxed{p(\lambda) = \det(A - \lambda I)} = \boxed{\begin{vmatrix} a_1 - \lambda & a_2 \\ a_3 & a_4 - \lambda \end{vmatrix}}$$

$$\boxed{p(\lambda) = a\lambda^2 + b\lambda + c} \; ; \; p(\lambda) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0 \quad \begin{cases} \lambda = \lambda_1 \\ \lambda = \lambda_2 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\text{AUTOVALORES DE T : } \lambda_1 \text{ e } \lambda_2}$$

Idéia de como encontrar os autovetores para cada autovalor λ

$$\boxed{\begin{bmatrix} a_1 - \lambda & a_3 \\ a_3 & a_4 - \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}}$$

$$\Downarrow$$

<u>Solução não nula</u>

$$\Downarrow$$

<u>Autovetores</u>

Subespaço associado a um autovalor

Definição: O subespaço $V_\lambda = \{\mathbf{v} \in V : T(\mathbf{v}) = \lambda \mathbf{v}\}$ é chamado o *subespaço associado ao autovalor* λ.

Autoespaço $\leftrightarrow$ Subespaço associado a um autovalor

Problema: encontrar o polinômio característico p(λ) e, <u>se existir</u>, os autovalores λ e autovetores associados a cada autovalor λ. Ache também os subespaços V_λ associados a cada autovalor λ.

Caminho:

1.Determine a matriz do operador na base canônica

$\Downarrow$

2.Determine o polinômio característico na <u>forma fatorada</u>

$\Downarrow$

3.Encontre os autovalores de T, isto é, encontre as raízes do polinômio característico

$\Downarrow$

4.Encontre os autovetores associados a cada autovalor

$\Downarrow$

5. Encontre os subespaços associados a cada autovalor

$Exemplo\_0:$ Seja $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ o operador linear definido por $T(x,y)=(x-4y,x+y)$.

1. Matriz do operador na base canônica

$$\begin{cases} T(1,0) &= (1,1) \\ T(0,1) &= (-4,1) \end{cases} \Longleftrightarrow A=\begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix};\ \lambda I=\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix};\ A-\lambda I=\begin{bmatrix} 1-\lambda & -4 \\ 1 & 1-\lambda \end{bmatrix}.$$

2. Polinômio característico na forma fatorada

$$p(\lambda)=\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix} 1-\lambda & -4 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix}=(1-\lambda)^2+4=1-2\lambda+\lambda^2+4=\lambda^2-2\lambda+5.$$

$$p(\lambda)=0 \iff \lambda^2-2\lambda+5=0 \implies \lambda=\frac{2\pm\sqrt{4-4.1.5}}{2.1}=\frac{2\pm\sqrt{4-20}}{2}=\frac{2\pm\boxed{\sqrt{-16}}}{2}.$$

Note que $p(\lambda)$ não possui raízes reais. Portanto,

3.Este operador não possui autovalores.

$Exemplo 1:$ Seja $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ o operador linear definido por $T(x,y)=(3x+y,3y)$.

1. Matriz do operador na base canônica :

$$\begin{cases} T(1,0) &= (3,0) \\ T(0,1) &= (1,3) \end{cases} \iff A=\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.\ A-\lambda I=\begin{bmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 0 & 3-\lambda \end{bmatrix}.$$

2. Polinômio característico na forma fatorada :

$$p(\lambda)=\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 0 & 3-\lambda \end{vmatrix}=(3-\lambda)^2-0=(3-\lambda)^2.$$

3. Autovalores de T :

$$p(\lambda)=0 \iff (3-\lambda)^2=0 \iff 3-\lambda=0 \iff \lambda=3.$$

Logo 3 é o único autovalor (distinto) de T.

4. Autovetores associados a $\lambda = 3$:

$$p/\lambda = 3; \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} 0 + y = 0 \\ 0 + 0 = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x - livre \end{cases}.$$

Assim os autovetores associados a $\lambda = 3$ são da forma: $\boxed{v = (x, 0)\,;\, x \in \mathbb{R} \text{ e } x \neq 0.}$

5. Subespaço associado ao autovalor $\lambda = 3$:

$$\boxed{V_3 = \{(x, 0) \,/ x \in \mathbb{R}\} = \{x\,(1, 0) \,/ x \in \mathbb{R}\} = [(1, 0)]\,.}$$

Exemplo2:

Considere o operador linear $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definido por $T(x, y) = (x + 2y, 3x + 2y)$. Seja $\beta = \{(1,0), (0,1)\}$.

Determine, se existir(em): o(s) autovalor(es) de T, o(s) respectivo(s) autovetor(es) associado(s) e uma base de R^2 constituída somente de autovetores de T.

Solução:

$$\begin{cases} T(1,0) = (1,3) \\ T(0,1) = (2,2) \end{cases} \mapsto [T]_\beta^\beta = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = A\,;\ \lambda I = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}.$$

$$p(\lambda) = \det(A-\lambda I) = \left| \begin{pmatrix}1&2\\3&2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\lambda&0\\0&\lambda\end{pmatrix}\right|$$

$$= \begin{vmatrix}1-\lambda & 2\\ 3 & 2-\lambda\end{vmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda)-6$$

$$= (\lambda+1)(\lambda-4)$$ $\Rightarrow$ POLINÔMIO CARACTERÍSTICO.

$p(\lambda)=0 \Leftrightarrow \lambda+1=0$ ou $\lambda-4=0 \Leftrightarrow$

$\lambda=-1$ ou $\lambda=4$. $\boxed{\text{AUTOVALORES: } -1 \text{ e } 4.}$

AUTOVETORES ASSOCIADOS AOS AUTOVALORES

p/ $\underline{\lambda=-1}$; $\begin{bmatrix}2&2\\3&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases}2x+2y=0\\3x+3y=0\end{cases} \Leftrightarrow y=-x$; x-livre.

$V_{-1} = \{(x,-x)/x\in\mathbb{R}\} = \{x(1,-1)/x\in\mathbb{R}\} = [(1,-1)]$ $\left\{ \text{SUBESPAÇO ASSOCIADO A } \lambda=-1. \right.$

$$\boxed{\beta_{V_{-1}} = \{(1,-1)\}.}$$

p/ $\underline{\lambda=4}$; $\begin{bmatrix}-3&2\\3&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=0 \Leftrightarrow \begin{cases}-3x+2y=0\\3x-2y=0\end{cases} \Leftrightarrow y=\frac{3}{2}x$; x-livre.

$V_4 = \{(x,\frac{3}{2}x)/x\in\mathbb{R}\} = \{x(1,\frac{3}{2})/x\in\mathbb{R}\} = [(1,\frac{3}{2})]$ $\left\{ \text{SUBESPAÇO ASSOCIADO A } \lambda=4 \right.$

$$\boxed{\beta_{V_4} = \{(2,3)\}.}$$

$\beta = \{(1,-1),(2,3)\} \Rightarrow$ Base de $\mathbb{R}^2$ constituída apenas de autovetores de T. $[T]_{\beta}^{\beta} = \begin{bmatrix}-1&0\\0&4\end{bmatrix}$.

Verifique!

Exemplo3:

Considere o operador linear $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ definido por $T(x,y,z)=(x-2z,\,0,\,-2x+4z)$. Determine:

A matriz $[T]_{\alpha}^{\alpha}$ onde $\alpha=\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$.

Os autovalores de T (Sugestão: utilize a matriz $[T]_{\alpha}^{\alpha}$).

Uma base β de $\mathbb{R}^3$ constituída apenas de autovetores de T.

Solução:

Matriz de T na base canônica:

$$T(x,y,z) = (x-2z,\ 0,\ -2x+4z)$$

$$\begin{aligned} T(1,0,0) &= (1,0,-2) \\ T(0,1,0) &= (0,0,0) \\ T(0,0,1) &= (-2,0,4) \end{aligned} \Leftrightarrow [T]_{\alpha}^{\alpha} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix} = A.$$

Polinômio característico:

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}\right].$$

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & -2 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ -2 & 0 & 4-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ -2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(\lambda^2 - 5\lambda).$$

$$\boxed{p(\lambda) = -\lambda(\lambda(\lambda-5)) = -\lambda^2(\lambda-5)}.$$

Conta necessária:

$$\begin{array}{r} 1-\lambda \\ 4-\lambda \\ \hline 4-4\lambda \\ -\lambda+\lambda^2 \\ \hline 4-5\lambda+\lambda^2 \\ -4 \\ \hline -5\lambda+\lambda^2 \end{array}$$

Autovalores:

$$-\lambda^2(\lambda-5) = 0 \Leftrightarrow -\lambda^2 = 0 \ \underline{\text{ou}}\ \lambda - 5 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0 \text{ ou } \lambda = 5.$$

$$p(\lambda) = 0 \Leftrightarrow$$

AUTOVALORES: $\boxed{0 \text{ e } 5.}$

Autovetores associados / subespaços associados:

$$p/\lambda = 0;\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2z = 0 \\ 0 = 0 \\ -2x + 4z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2z \\ y, z \text{ livres.} \end{cases}$$

$$V_0 = \{(2z, y, z) \mid y, z \in \mathbb{R}\} = [(2,0,1), (0,1,0)].\ \boxed{\beta_{V_0} = \{(2,0,1), (0,1,0)\}.}$$

$$p/\lambda = 5;\ \begin{bmatrix} -4 & 0 & -2 \\ 0 & -5 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -4x - 2z = 0 \\ -5y = 0 \\ -2x - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = -2x \\ y = 0 \\ z \text{ livre,} \end{cases}$$

$$V_5 = \{(x, 0, -2x) / x \in \mathbb{R}\} = [(1,0,-2)].\ \boxed{\beta_{V_5} = \{(1,0,-2)\}.}$$

$$\boxed{\beta = \{(2,0,1), (0,1,0), (1,0,-2)\}.}$$

β **(Beta) é uma base constituída somente de autovetores de *T*. E neste caso,**

$$[T]_\beta^\beta = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

Milagre!

Contas necessárias, por quê?

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Exemplo 4: Encontre os autovalores e os autovetores associados da matriz A (Note que não foi dada a expressão analítica do operador linear).

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix};\ \lambda I = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Polinômio característico e autovalores:

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$
$$= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 \\ 0 & 4-\lambda & 5 \\ 0 & 0 & 6-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(4-\lambda)(6-\lambda).$$

$$p(\lambda) = 0 \Leftrightarrow (1-\lambda)(4-\lambda)(6-\lambda) = 0 \Leftrightarrow 1-\lambda = 0;$$
$$4-\lambda = 0 \text{ e } 6-\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1 \text{ ou } \lambda = 4 \text{ ou } \lambda = 6.$$

$\boxed{\text{AUTOVALORES: } 1, 4 \text{ e } 6.}$

Autovetores associados:

$$p/\lambda = 1; \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y + 3z = 0 \\ 3y + 5z = 0 \\ 5z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow y = z = 0;\ x\text{-livre.}$$

$$p/\lambda = 4; \begin{bmatrix} -3 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x + 2y + 3z = 0 \\ 5z = 0 \Leftrightarrow z = 0 \text{ e} \\ 2z = 0 \end{cases}$$
$$2y = 3x \Leftrightarrow y = \frac{3}{2}x;$$
$$x\text{-livre.}$$

$$p/\lambda = 6; \begin{bmatrix} -5 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -5x + 2y + 3z = 0 \\ -2y + 5z = 0 \Leftrightarrow 5z = 2y; \\ 0 = 0 \end{cases}$$

$$z = \frac{2}{5}y \text{ e } -5x + 2y + \frac{2}{5}(3)y = 0$$
$$\Leftrightarrow z = \frac{2}{5}y \text{ e } 5x = \frac{16}{5}y \Leftrightarrow z = \frac{2}{5}y \text{ e } x = \frac{16}{25}y;\ y\text{-livre.}$$

Subespaços associados:

$$V_1 = \{(x,0,0)/x \in \mathbb{R}\} = \{x(1,0,0)/x \in \mathbb{R}\} = [(1,0,0)].$$

$$V_4 = \{(x, \tfrac{3}{2}x, 0)/x \in \mathbb{R}\} = \{x(1, \tfrac{3}{2}, 0)/x \in \mathbb{R}\} = [(1, \tfrac{3}{2}, 0)].$$

$$V_6 = \{(\tfrac{16}{25}y, y, \tfrac{2}{5}y)/y \in \mathbb{R}\} = \{y(\tfrac{16}{25}, 1, \tfrac{2}{5})/y \in \mathbb{R}\} = [(\tfrac{16}{25}, 1, \tfrac{2}{5})].$$

Contas, muitas contas!