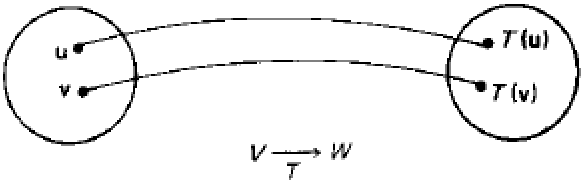
Álgebra Linear I – Prof. José Luiz Neto – Resumo_A16

Livro de preparação do resumo: Álgebra Linear → Boldrine/Costa e Figueiredo/Wetzler
(BOLDRINI, J. L. et al. Álgebra Linear. 3 ed. São Paulo: Harbra, 1986)

Transformação linear injetora e sobrejetora. Isomorfismo

Definição: Dada uma aplicação (ou função) $T: V \to W$, diremos que T é *injetora* se dados $\mathbf{u} \in V$, $\mathbf{v} \in V$ com $T(\mathbf{u}) = T(\mathbf{v})$ tivermos $\mathbf{u} = \mathbf{v}$. Ou equivalentemente, T é injetora se dados $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ com $\mathbf{u} \neq \mathbf{v}$, então $T(\mathbf{u}) \neq T(\mathbf{v})$.

Em outras palavras, T é injetora se as imagens de vetores distintos são distintas.



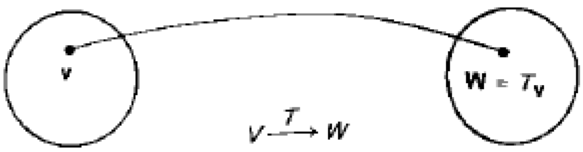
Muito Importante!

Seja $T: V \to W$, uma aplicação linear. Então $ker(T) = \{\mathbf{0}\}$, se e somente se T é injetora.

0 é o vetor nulo de V.

Definição: A aplicação $T: V \to W$ será *sobrejetora* se a imagem de T coincidir com W, ou seja $T(V) = W$.

Em outras palavras, T será sobrejetora se dado $\mathbf{w} \in W$, existir $\mathbf{v} \in V$ tal que $T(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$.



Importante! Se um transformação linear T é injetora e sobrejetora, ao mesmo tempo, então ela é <u>bijetora</u>.

Muito Importante!

Seja $T: V \to W$ uma aplicação linear.

Então $\dim ker\, T + \dim Im\, T = \dim V$.

Dois Resultados importantes!

Se dim V = dim W, então T linear é injetora se e somente se T é sobrejetora.

Seja $T: V \to W$ uma aplicação linear injetora. Se dim V = dim W, então T leva base em base.

Muito Importante!

Quando uma transformação linear $T: V \to W$ for injetora e sobrejetora, ao mesmo tempo, dá-se o nome de *isomorfismo*.

Exemplo: Seja $T: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ dada por $T(x, y, z) = (x - 2y, z, x + y)$. Vamos mostrar que T é um isomorfismo, e calcular sua inversa T^{-1}.

Se pudermos mostrar que T é injetora, teremos que T é um isomorfismo Isto equivale a mostrar que $ker\ T = \{(0, 0, 0)\}$. Mas $ker\ T = \{(x, y, z); T(x, y, z) = (0, 0, 0)\}$ e $T(x, y, z) = (0, 0, 0)$ se e somente se $(x - 2y, z, x + y) = (0, 0, 0)$. Resolvendo o sistema de equações lineares

$$\begin{aligned} x - 2y &= 0 \\ z &= 0 \\ x + y &= 0 \end{aligned}$$

achamos que $x = y = z = 0$ é a única solução e portanto T é um isomorfismo.

Tomando a base canônica de $\mathbf{R}^3$, sua imagem pela T é $\{T(1, 0, 0), T(0, 1, 0)$ $T(0, 0, 1)\} = \{(1, 0, 1), (-2, 0, 1), (0, 1, 0)\}$ que é ainda uma base de $\mathbf{R}^3$. É conveniente que você verifique isto. Calculemos agora a aplicação inversa de T. Como $T(1, 0, 0) = (1, 0, 1)$, $T(0, 1, 0) = (-2, 0, 1)$ e $T(0, 0, 1) = (0, 1, 0)$, temos que $T^{-1}(1, 0, 1) = (1, 0, 0)$, $T^{-1}(-2, 0, 1) = (0, 1, 0)$ e $T^{-1}(0, 1, 0) =$ $= (0, 0, 1)$. Queremos calcular $T^{-1}(x, y, z)$. Para isto escrevemos (x, y, z) em relação à base $\{(1, 0, 1), (-2, 0, 1), (0, 1, 0)\}$, obtendo:

$$(x, y, z) = \frac{x + 2z}{3}(1, 0, 1) + \frac{z - x}{3}(-2, 0, 1) + y(0, 1, 0).$$

Então $T^{-1}(x, y, z) = \dfrac{x + 2z}{3} T^{-1}(1, 0, 1) + \dfrac{z - x}{3} T^{-1}(-2, 0, 1) + yT^{-1}(0, 1, 0)$.

Ou seja,

$$T^{-1}(x, y, z) = \left(\frac{x + 2z}{3}, \frac{z - x}{3}, y\right).$$