Momento Síncrono 5 - Data: 31/05/2022

Material da internet: muito difícil de selecionar.

Prova da Unidade1 – comentários:

- Pontuação excelente

- Enviou o Formulário, mas não concluiu a atividade:

- Algumas respostas bem escritas/detalhadas

- Muitas respostas somente o resultado ou notação errada.

- Poucas respostas apagadas ou na horizontal.

- Inversa por qualquer método, não pode!

- Excel: Transformar pontos em notas e registrar no Controle Acadêmico.

-----------------------------.................................-----------------------------------.............................

Voltando as Operações elementares

Encontre, se existir, a solução dos sistemas de equações lineares

$$a)\ \begin{cases} -x - 2y - z = 1 \\ x - y + z = 2 \\ x + y + z = 0 \\ x - 3y + 4z = 12 \end{cases} \quad \text{e} \quad b)\ \begin{cases} 8x - 2y = 0 \\ 4x - y = 0 \\ 5x + y = 0 \\ 3x - y = 0 \end{cases}$$

Podemos usar a regra de Cramer?

O Curso de Álgebra Linear I começa aqui.

Unidade 2 – Espaço Vetorial (Cálculo I + Vetorial)

Teste1_Unidade2 (02/06/22) – Principais assuntos

1)Espaços Vetoriais: Definição e Exemplos.

2)Subespaços Vetoriais. Definição e Exemplos.

Importante: Resumos 9 e 10, vídeo e lista4 (Q1 e Q2)

Motivação:

Números Naturais

N = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12...}

Subconjuntos do Conjunto dos Números Naturais:

- Conjunto dos Números Naturais Não-Nulos: N* = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9...}

- Conjunto dos Números Naturais Pares = {0, 2, 4, 6, 8...}

- Conjunto dos Números Naturais Ímpares = {1, 3, 5, 7, 9...}

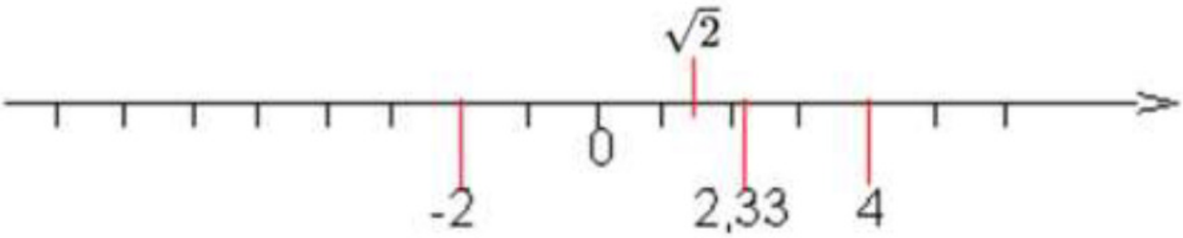
Operações possíveis no Conjunto dos Números Naturais:

Adição, Multiplicação, . . .

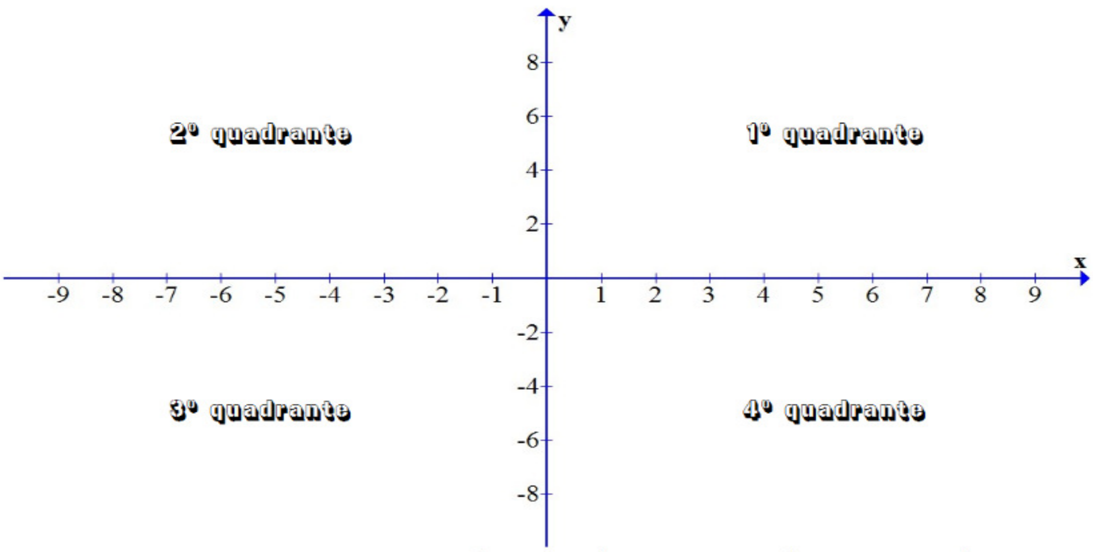
- Propriedades da Adição.

- Propriedades da Multiplicação.

Os conjuntos numéricos

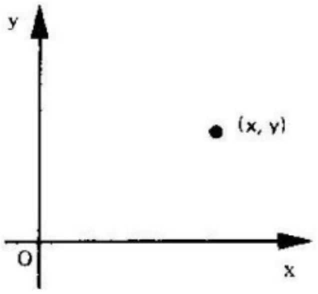


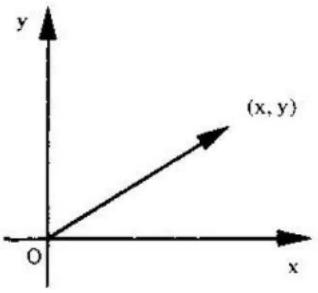
Vetores no plano



Representação dos quadrantes no plano cartesiano.

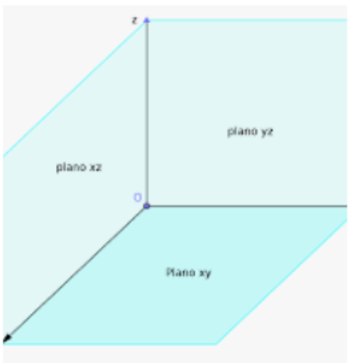
o conjunto $\mathbb{R}^2 = \{(x,y)/x,y \in \mathbb{R}\}$ é interpretado geometricamente como o plano cartesiano.
O par ordenado (x,y) pode ser um ponto ou um vetor .





Vetores no espaço tridimensional

$$\mathbb{R}^3 = \{(x,y,z)\,/x,y,z \in \mathbb{R}\}$$



Espaço Tridimensional

Espaço Vetorial: Definição e Exemplos

Um espaço vetorial é um conjunto V, não vazio, munido de 2 operações: + e $*$. Satisfazendo as 8 propriedades abaixo:

i) $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$

ii) $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$

iii) Existe $\mathbf{0} \in V$ tal que $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}$. ($\mathbf{0}$ é chamado vetor nulo.)

iv) Existe $-\mathbf{u} \in V$ tal que $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$.

v) $a(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = a\mathbf{u} + a\mathbf{v}$

vi) $(a + b)\mathbf{v} = a\mathbf{v} + b\mathbf{v}$

vii) $(ab)\mathbf{v} = a(b\mathbf{v})$

viii) $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$

Exemplos de “famílias” de espaços vetoriais

1)Espaço dos vetores em $\mathbb{R}^n$, munido das operações de adição e da multiplicação por escalar usuais.

$V = \mathbb{R}^n, \; n = 2, 3, 4, 5, ...$

$u = (a_1, a_2, a_3, a_4, ..., a_n)$

$v = (b_1, b_2, b_3, b_4, ..., b_n)$

Vetor nulo: $0 = (0, 0, 0, 0, ..., 0)$

2) Espaço das matrizes $M_{m\times n}(\mathbb{R})$, munido das operações de adição e da multiplicação por escalar usuais.

$V = M_{m\times n}(\mathbb{R}), \; n = 1, 2, 3, 4, 5, ...; n = 1, 2, 3, 4, 5, ...$

$$u = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & & & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m\times n}$$

$$v = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ \cdots & & & \cdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}_{m\times n}$$

$$\text{Vetor nulo: } 0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & & & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}_{m\times n}$$

3) Espaço dos polinômios de grau $\leq n$, $P_n(\mathbb{R})$, munido das operações de adição e da multiplicação por escalar usuais.

$V = P_n(\mathbb{R})$, $n = 1, 2, 3, 4, 5, ...; n = 1, 2, 3, 4, 5, ...$

$u = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + ... + a_n t^n$

$v = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + b_3 t^3 + ... + b_n t^n$

Vetor nulo: $0 = 0 + 0t + 0t^2 + 0t^3 + ... + 0t^n$

Definição e exemplos de Subespaço vetorial

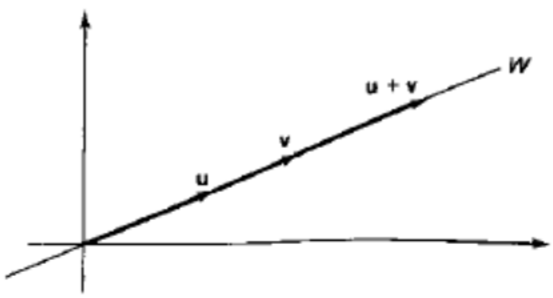
Dado um Espaço Vetorial V, um subconjunto W, não vazio, será um Subespaço Vetorial de V se:

i) $0 \in W$.

ii) Para quaisquer $u, v \in W$, tivermos $(u + v) \in W$.

iii) Para quaisquer $k \in \mathbb{R}$ e $u \in W$, tivermos $(ku) \in W$.

Uma "pequena" ilustração:



Exemplos de Subespaços Vetoriais

1)V= R²

W= R², W= {(0,0)} e W= Qualquer reta passando pela origem.

2) V= R³

W= R³, W= {(0,0,0)}, W= Qualquer reta passando pela origem e W= Qualquer plano passando pela origem.

$$3)\ V = M_{2\times 2}(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} : x, y, z, t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

$$4)\ V = P_2(\mathbb{R}) = \left\{ at^2 + bt + c / a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

$$W = \left\{ at^2 + bt : a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

$$W = \left\{ at^2 + c : a, c \in \mathbb{R} \right\}$$

$$W = \{ at + b : a, b \in \mathbb{R} \}$$

Importante! Justificar é, em geral, <u>fácil</u>. Provar é sempre <u>difícil</u>.

Um exemplo completo para provar:

Seja $V = \mathbb{R}^3$ e $W = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x - y + z = 0 \right\}$.

Mostre que W **<u>é</u>** um Subespaço Vetorial de V.

Prova:

i) $(0, 0, 0) \in W$, pois $0 - 0 + 0 = 0$. OK!

Provamos que 0∈W.

Sejam $u = (x, y, z) \in \mathbb{W}$ e $v = (a, b, c) \in \mathbb{W}$, então $x - y + z = 0$ e $a - b + c = 0$. Assim,

ii) $u + v = (x, y, z) + (a, b, c) = (x + a, y + b, z + c)$.

Verificação: $(x + a) - (y + b) + (z + c) =$

$(x - y + z) + (a - b + c) = 0 + 0 = 0$. OK!

Provamos que (u + v)∈W.

iii) $ku = k(x, y, z) = (kx, ky, kz)$.

Verificação: $kx - ky + kz = k(\, x - y + z) = k.0 = 0$

qualquer que seja $k \in \mathbb{R}$. OK!

Provamos que (ku)∈W.

Conclusão: como as propriedades i), ii) e iii) foram verificadas, concluimos que W **é** um Subespaço Vetorial de $\mathbb{R}^3$.

$$\boxed{\textbf{Importante! } x - y + z = 0 \leftrightarrow y = x + z.}$$

Muito Importante! Todo Subespaço Vetorial contem o vetor nulo do Espaço Vetorial. Mas cuidado!

Exemplos de subconjuntos que não são Subespaços Vetoriais

$$V = \mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) \,/ x, y, z \in \mathbb{R}\}$$

$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y + z = 2021\}$$

$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y + z^2 = 0\}$$

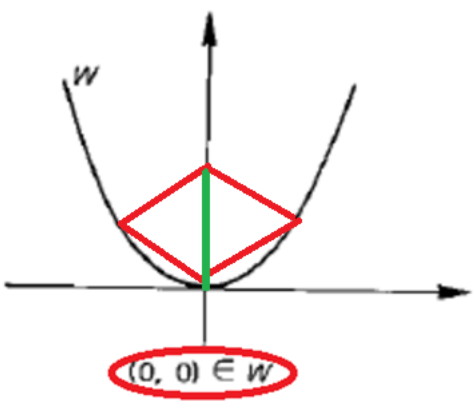
$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + |y| + z = 0\}$$

Outros exemplos de subconjuntos que não são subespaço vetorial:

(a)

Seja $V = \mathbb{R}^2$ e $W = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/ y = x^2\right\}$.
W **não é** um Subespaço Vetorial de V. Justifique!

Justificativa 1:



Justificativa 2:

Sejam $u = \left(a, a^2\right) \in \mathbb{W}$ e $v = \left(x, x^2\right) \in \mathbb{W}$.

Então, $u + v = \left(a, a^2\right) + \left(x, x^2\right) = \left(a + x, a^2 + x^2\right)$.

Note que: $a^2 + x^2 \neq (a + x)^2 = a^2 + 2ax + x^2$.

Cuidado! <u>Multiplicação por escalar</u> é diferente de multiplicação ou de produto.

Estudem! Qualquer dúvida me envie um email.