Álgebra Linear I – Prof. José Luiz Neto – Resumo_A20

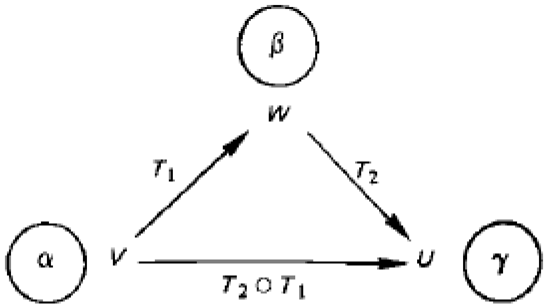
Livro de preparação do resumo: Álgebra Linear → Boldrine/Costa e Figueiredo/Wetzler
(BOLDRINI, J. L. et al. Álgebra Linear. 3 ed. São Paulo: Harbra, 1986)

Composição de Transformações Lineares usando matrizes. Transformações Lineares Inversíveis. Matrizes Semelhantes

Muito Importante!

Sejam $T_1: V \to W$ e $T_2: W \to U$ transformações lineares e α, β, γ bases de V, W e U respectivamente. Então a composta de T_1 com T_2, $T_2 \circ T_1: V \to U$, é linear e

$$[T_2 \circ T_1]^{\alpha}_{\gamma} = [T_2]^{\beta}_{\gamma} \cdot [T_1]^{\alpha}_{\beta}$$



Exemplo 1:

Sejam as transformações lineares $T_1: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ e $T_2: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ cujas matrizes são

$$[T_1]^{\alpha}_{\beta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad [T_2]^{\beta}_{\gamma} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

em relação às bases $\alpha = \{(1, 0), (0, 2)\}$, $\beta = \{(\frac{1}{3}, 0, -3), (1, 1, 15), (2, 0, 5)\}$ e $\gamma = \{(2, 0), (1, 1)\}$. Queremos encontrar a transformação linear composta $T_2 \circ T_1: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, ou seja, precisamos achar $(T_2 \circ T_1)(x, y)$.

$$[T_2 \circ T_1]^{\alpha}_{\gamma} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Escrevemos agora as coordenadas do vetor (x, y) em relação à base α.

$$[(x, y)]_{\alpha} = \begin{bmatrix} x \\ \frac{y}{2} \end{bmatrix}$$

Então,

$$[(T_2 \circ T_1)(x, y)]_{\gamma} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \frac{y}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x - y \\ 0 \end{bmatrix}$$

Portanto, $(T_2 \circ T_1)(x, y) = (x - y)(2, 0) + 0(1, 1) = (2x - 2y, 0)$.

***Exemplo 2*:**

Considere as T.L. $T_1 : \mathbb{R}^2_{\alpha} \to \mathbb{R}^3_{\beta}$ e $T_2 : \mathbb{R}^3_{\beta} \to \mathbb{R}^2_{\gamma}$ cujas matrizes são:

$$[T_1]^{\alpha}_{\beta} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } [T_2]^{\beta}_{\gamma} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

em relação às bases $\alpha = \{(1,0),(0,3)\}$; $\beta = \{(1,1,0),(0,1,1),(0,0,1)\}$ e $\gamma = \{(1,1),(-1,0)\}$. Determine $T_2 \circ T_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, ou seja, determine $(T_2 \circ T_1)(x,y)$.

Sol.: $[T_2 \circ T_1]^{\alpha}_{\gamma} = [T_2]^{\beta}_{\gamma}[T_1]^{\alpha}_{\beta} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.

$(x,y) = a(1,0) + b(0,3) \Leftrightarrow a = x$ e $3b = y \Rightarrow b = y/3$.

Logo $[(x,y)]_{\alpha} = \begin{bmatrix} x \\ y/3 \end{bmatrix}$. Mas sabemos que:

$[T(v)]_{\gamma} = [T]^{\alpha}_{\gamma}[v]_{\alpha}$. Neste caso:

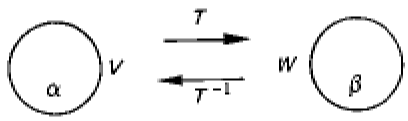
$$[(T_2 \circ T_1)(x,y)]_{\gamma} = [T_2 \circ T_1]^{\alpha}_{\gamma}[(x,y)]_{\alpha}$$
$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ -x \end{bmatrix}$$

Assim, $\boxed{(T_2 \circ T_1)(x,y) = x(1,1) - x(-1,0) = (2x, x).}$

Importante!

Se $T: V \to W$ é uma transformação linear inversível (T é um isomorfismo) e α e β são as bases de V e W, então $T^{-1}: W \to V$ é linear e

$$[T^{-1}]^{\beta}_{\alpha} = ([T]^{\alpha}_{\beta})^{-1}$$



Importante!

Seja $T: V \to W$ uma transformação linear e α e β bases de V e W. Então T é inversível se e somente se $\det [T]^{\alpha}_{\beta} \neq 0$.

Exemplo: Seja $T: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ uma transformação linear dada por

$$[T]^{\xi}_{\xi} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

onde ξ é a base canônica de $\mathbf{R}^2$. Como $\det [T]^{\xi}_{\xi} = 1$, T é inversível.

$$[T^{-1}]^{\xi}_{\xi} = ([T]^{\xi}_{\xi})^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

Então $[T^{-1}(x, y)]_{\xi} = [T^{-1}]^{\xi}_{\xi} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_{\xi} = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x - 4y \\ -2x + 3y \end{bmatrix}$,

ou seja, $T^{-1}(x, y) = (3x - 4y, -2x + 3y)$.

Matrizes Semelhantes

Muito Importante!

Se $T: V \to V$ é uma transformação linear e α e β são bases de V, então

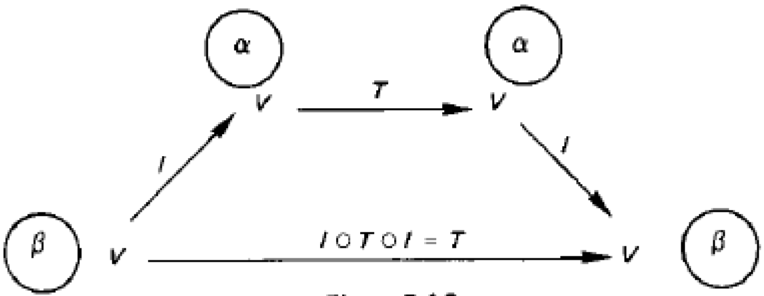


Figura 5.4.8

$[T]_\beta^\beta = [I \circ T \circ I]_\beta^\beta = [I]_\beta^\alpha \, [T]_\alpha^\alpha \, [I]_\alpha^\beta.$

Lembrando que $[I]_\alpha^\beta = ([I]_\beta^\alpha)^{-1}$ e chamando $[I]_\beta^\alpha = \mathbf{A}$, vem que

$$[T]_\beta^\beta = \mathbf{A} \cdot [T]_\alpha^\alpha \cdot \mathbf{A}^{-1}$$

Dizemos neste caso que as matrizes $[T]_\alpha^\alpha$ e $[T]_\beta^\beta$ são *semelhantes*.

Exemplo: Seja a transformação linear $T: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ cuja matriz em relação à base canônica ξ é

$$[T]_\xi^\xi = \begin{bmatrix} -2 & 4 & -4 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & -6 & 5 \end{bmatrix}$$

Calculemos a matriz desta transformação em relação à base $\beta = \{(0, 1, 1), (-1, 0, 1), (1, 1, 1)\}$. Para isto, usamos a relação $[T]_\beta^\beta = [I]_\beta^\xi \, [T]_\xi^\xi \, [I]_\xi^\beta$ onde

$$[I]_\xi^\beta = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } ([I]_\beta^\xi) = [I]_\beta^\xi)^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Então

$$[T]_\beta^\beta = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Outro exemplo:

Matrizes Semelhantes

$$\begin{tikzcd}
\underset{\alpha}{V} \arrow[r, "T"] & \underset{\alpha}{V} \arrow[d, "{[I]^{\alpha}_{\beta}}"] \\
\underset{\beta}{V} \arrow[u, "{[I]^{\beta}_{\alpha}}"] \arrow[r, "T"] & \underset{\beta}{V}
\end{tikzcd}$$

$$\boxed{[T]^{\beta}_{\beta} = [I]^{\alpha}_{\beta}\,[T]^{\alpha}_{\alpha}\,[I]^{\beta}_{\alpha}} \quad (*)$$

$$[T]^{\beta}_{\beta} = P^{-1}\,[T]^{\alpha}_{\alpha}\,P \Leftrightarrow \boxed{B = P^{-1}AP} \Big\} \text{ A E B SÃO SEMELHANTES.}$$

Sejam $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$; $\alpha = \{(1,0),(0,1)\}$; $\beta = \{(1,2),(1,-1)\}$ e $[T]^{\alpha}_{\alpha} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$. Ache $[T]^{\beta}_{\beta}$ usando: (a) $(*)$ e (b) as bases α e β (direto).

Sol.: (a) $[I]^{\beta}_{\alpha} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & 1 \end{bmatrix} \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1 & 2/3 & -1/3 \end{array}\right]$$

$$[I]^{\alpha}_{\beta} = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 \\ 2/3 & -1/3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
[T]^{\beta}_{\beta} &= [I]^{\alpha}_{\beta}\,[T]^{\alpha}_{\alpha}\,[I]^{\beta}_{\alpha} \\
&= \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 \\ 2/3 & -1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 \\ 2/3 & -1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 11 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16/3 & -2/3 \\ -1/3 & -1/3 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

(b) Usando diretamente as bases α e β.

Como α é canônica então $T(x,y) = [T]^{\alpha}_{\alpha} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

$\Leftrightarrow \; T(x,y) = (x+2y,\ 3x+4y).$

Encontrando $[T]^{\beta}_{\beta}$ onde $\beta = \{(1,2),(1,-1)\}$.

$T(1,2) = (5,11) = a(1,2) + b(1,-1)$

$\begin{cases} a+b=5 \\ 2a-b=11 \end{cases} \longrightarrow a = \frac{16}{3}$ e $b = 5-a = 5-\frac{16}{3} \therefore b = -\frac{1}{3}$

$T(1,-1) = (-1,-1) = a(1,2) + b(1,-1)$

$\begin{cases} a+b=-1 \\ 2a-b=-1 \end{cases} \longrightarrow a = -2/3$ e $b = -1-a = -1+\frac{2}{3} \therefore b = -\frac{1}{3}$

ASSIM,

$$[T]^{\beta}_{\beta} = \begin{bmatrix} 16/3 & -2/3 \\ -1/3 & -1/3 \end{bmatrix} \quad \text{c.q.d.}$$