Álgebra Linear I – Prof. José Luiz Neto – Resumo_A18

Livro de preparação do resumo: Álgebra Linear → Boldrine/Costa e Figueiredo/Wetzler
(BOLDRINI, J. L. et al. Álgebra Linear. 3 ed. São Paulo: Harbra, 1986)

Um exemplo de isomorfismo. Composição de Transformações Lineares

Um exemplo de isomorfismo (Contas, muitas contas)

Mostre que a T.L. $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $T(x,y,z) = (x+y,\ x+z,\ y+z)$ é um isomorfismo e calcule $T^{-1}(x,y,z)$

Verificação: $N(T) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / T(x,y,z) = (0,0,0)\}$

$= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / (x+y,\ x+z,\ y+z) \overset{*}{=} (0,0,0)\}$

$= \{(0,0,0)\} \leftarrow$ T é injetora e como

$\dim V = \dim \mathbb{R}^3 = 3 = \dim W$, T é sobrejetora. Logo T é um isomorfismo. Obtenção de T^{-1}.

$T(1,0,0) = (1,1,0) \Leftrightarrow T^{-1}(1,1,0) = (1,0,0)$
$T(0,1,0) = (1,0,1) \Leftrightarrow T^{-1}(1,0,1) = (0,1,0)$
$T(0,0,1) = (0,1,1) \Leftrightarrow T^{-1}(0,1,1) = (0,0,1)$

$(x,y,z) = a(1,1,0) + b(1,0,1) + c(0,1,1)$

$$\begin{cases} a + b = x \\ a + c = y \\ b + c = z \end{cases} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & x \\ 1 & 0 & 1 & y \\ 0 & 1 & 1 & z \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & -1 & x-y \\ 0 & 1 & 1 & z \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & -1 & x-y \\ 0 & 0 & 2 & z-x+y \end{array}\right) \quad 2c = z - x + y \Rightarrow c = \frac{-x+y+z}{2}$$

$$b - c = x - y \mapsto \boxed{b = c + x - y = \frac{x-y+z}{2}}$$

$$a = x - b = x - \frac{x}{2} + \frac{y}{2} - \frac{z}{2} = \frac{x+y-z}{2}$$

$$T^{-1}(x,y,z) = \left(\frac{x+y-z}{2}\right)(1,1,0) + \left(\frac{x-y+z}{2}\right)(1,0,1) + \left(\frac{-x+y+z}{2}\right)(0,1,1)$$

$$T^{-1}(x,y,z) = \left(\frac{x+y-z}{2}\right)T(1,1,0) + \left(\frac{x-y+z}{2}\right)T(1,0,1) + \left(\frac{-x+y+z}{2}\right)T(0,1,1)$$

$$= \left(\frac{x+y-z}{2}\right)(1,0,0) + \left(\frac{x-y+z}{2}\right)(0,1,0) + \left(\frac{-x+y+z}{2}\right)(0,0,1)$$

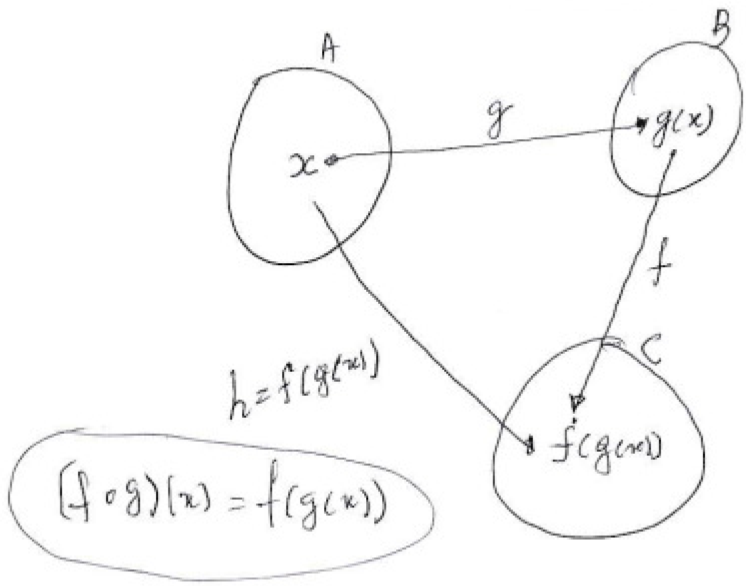
$$\boxed{T^{-1}(x,y,z) = \left(\frac{x+y-z}{2}, \frac{x-y+z}{2}, \frac{-x+y+z}{2}\right)}$$

$$* \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$z = 0 = y = x$$

Composição de Transformações Lineares

É o mesmo procedimento da composição de funções reais. Veja o gráfico abaixo:



Veja, a seguir, exemplos de composição de TL

Considere as **Transformações Lineares** $S:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ e $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

definidas por $S(x,y) = (x - 2y, y)$ e $T(x,y) = (2x, -y)$.

Determine: $S \circ T$, $T \circ S$ e $S \circ S$.

Solução:

$$
\begin{aligned}
(S \circ T)(x,y) &= S(T(x,y)) \\
&= S(2x, -y) \\
&= (2x + 2y, -y)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(T \circ S)(x,y) &= T(S(x,y)) \\
&= T(x - 2y, y) \\
&= (2x - 4y, -y)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(S \circ S)(x,y) &= S(S(x,y)) \\
&= S(x - 2y, y) \\
&= (x - 2y - 2y, y) \\
&= (x - 4y, y)
\end{aligned}
$$

Importante!

No caso do exemplo do isomorfismo, mostre que:

$$\left(T \circ T^{-1}\right)(x, y.z) = \left(T^{-1} \circ T\right)(x, y.z) = (x, y.z).$$

Milagre!