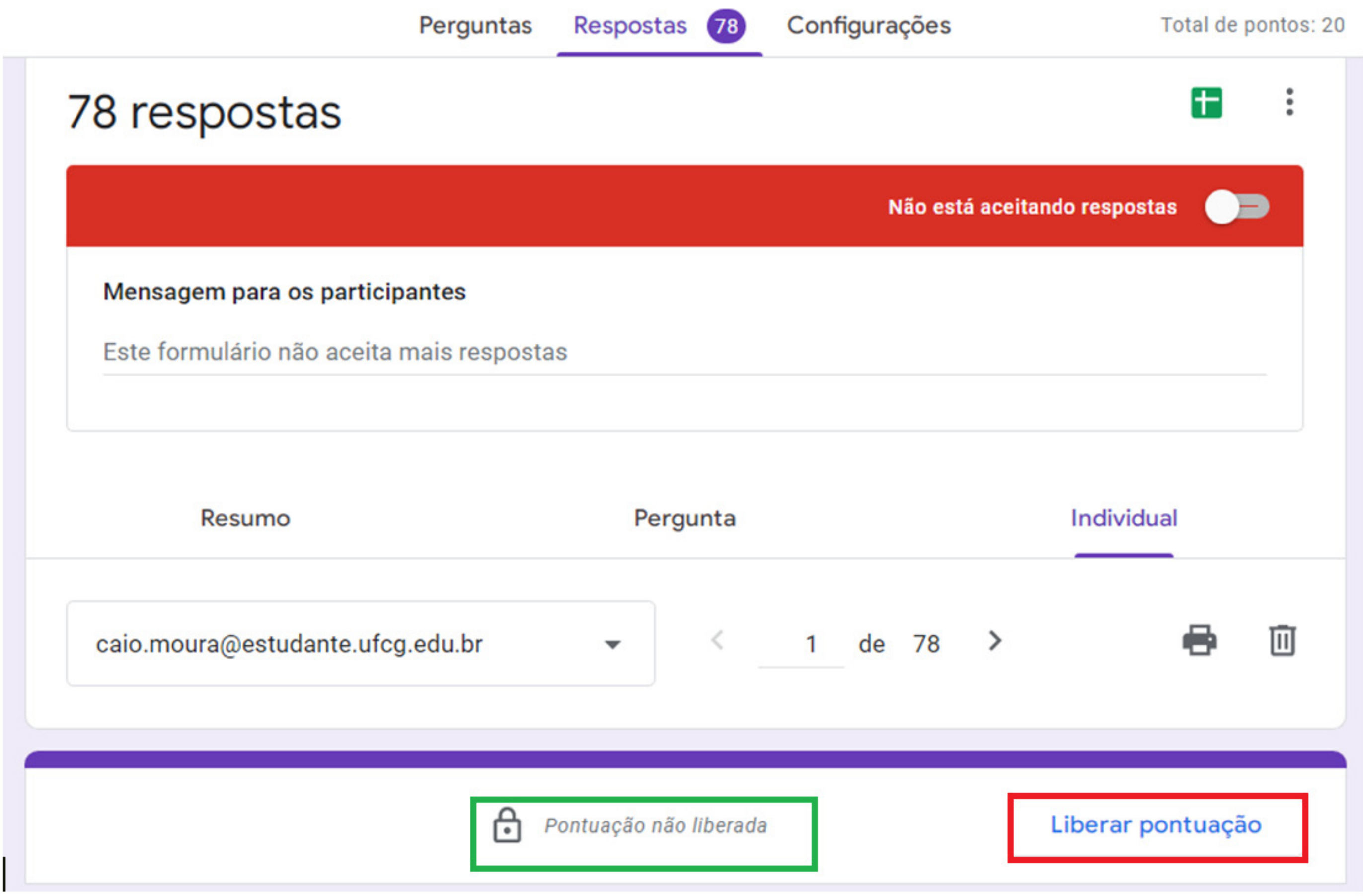
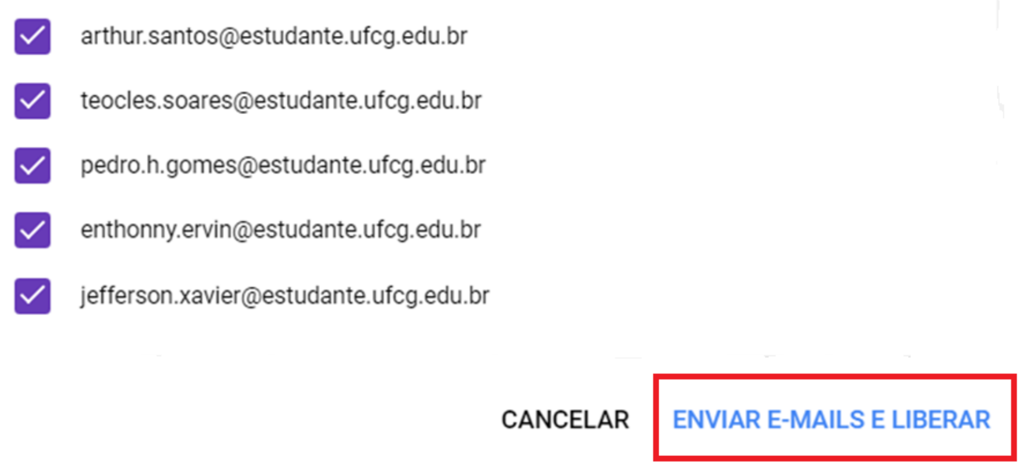
Momento Síncrono7 - Data: 14/06/2022

Cuidado! Com Novas palavras, definições, Teoremas, ...

Sobre a correção das atividades:





Teste2_unidade2 – Comentários

Houve uma GRANDE melhora no desenvolvimento da resposta da questão aberta.

Notas: Pontuação quase total.

Teste3_Unidade2 – Dia: ??/06/2022. Participe!

Resumos das aulas 13 e 14 + Lista4 + Vídeo da Profa. Rosely.

Principais assuntos:

1) Base e Dimensão de um Espaço Vetorial

Um conjunto $\{v_1, ..., v_n\}$ de vetores de V será uma base de V se:

i) $\{v_1, ..., v_n\}$ é LI
ii) $[v_1, ..., v_n] = V$

Dimensão de V é a quantidade de vetores de sua base.

Exemplos:

1) $V = \mathbb{R}^2 \rightarrow \dim \mathbb{R}^2 = 2$. Base:

$$\alpha = \{(1,0), (0,1)\}$$

$\beta =$ Qualquer conjunto com exatamente 2 vetores LI.

2) $V = \mathbb{R}^3 \rightarrow \dim \mathbb{R}^3 = 3$. Base:

$$\alpha = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$$

$\beta =$ Qualquer conjunto com exatamente 3 vetores LI.

Importante! $\boxed{\dim R^n = n.}$

3) $V = \mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \rightarrow \dim \mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) = 4$. Base:

$$\alpha = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$\beta =$ Qualquer conjunto com exatamente 4 vetores LI.

Nota: $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Leftrightarrow (a, b, c, d)$

4) $V = P_2(\mathbb{R}) \rightarrow \dim P_2(\mathbb{R}) = 3$. Base:

$\alpha = \{t^2, t, 1\}$

$\beta =$ Qualquer conjunto com exatamente 3 vetores LI.

Nota: $at^2 + bt + c \Leftrightarrow (a, b, c)$

Mostre que:

Mostre que $\beta = \{(1,1), (-1,1)\}$ é uma base de $\mathbb{R}^2$.

PROVA: (i) β é LI, pois $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

ou $a(1,1) + b(-1,1) = (0,0) \Leftrightarrow$

$\begin{cases} a - b = 0 \\ a + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{array}\right);$

$p(A) = 2 = p(M) = n$. Única Solução: $a = b = 0$

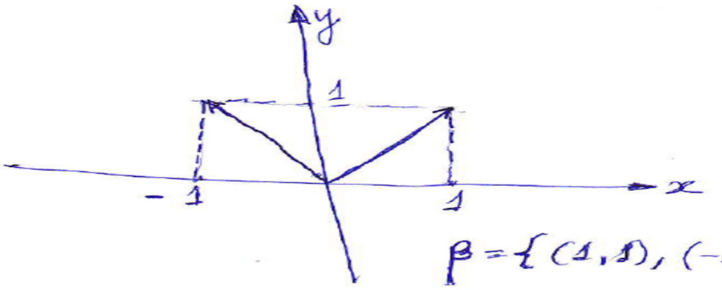
$\leftrightarrow \beta$ é LI.

PROVA: (ii) β gera $V = \mathbb{R}^2$

$(x, y) = a(1,1) + b(-1,1) \Leftrightarrow \begin{cases} a - b = x \\ a + b = y \end{cases};$

$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & x \\ 1 & 1 & y \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & x \\ 0 & 2 & y - x \end{array}\right); p(A) = 2 = p(M) = n \Longleftrightarrow$

Solução única qualquer que seja $v = (x, y)$.



$\beta = \{(1,1), (-1,1)\}$

2) Base e dimensão de um Subespaço Vetorial. Soma, interseção e Soma Direta – Exemplos

Para começar:

Encontre uma base para o subespaço $W = [(1,1,1),(1,-1,1),(2,0,2)]$.

Solução: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Portanto uma base de W é $\beta_W = \{(1,1,1),(0,1,0)\}$. Cuidado! $\dim W = 2$.

PROBLEMA1. Sejam $V = \mathbb{R}^3$, $W_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x - y + z = 0\}$ e $W_2 = [(1,1,1), (-1,1,-1)]$ subespaços de V. Determine:

(a) uma base para $W_1 + W_2$.

(b) a dimensão de $W_1 \cap W_2$.

(c) a equação analítica de W_2.

Solução (a) - Geradores de W_1 :

$$(x,y,z) = (x, x+z, z) = (x,x,0) + (0,z,z) = x(1,1,0) + z(0,1,1)$$

$W_1 = [(1,1,0), (0,1,1)]$; $\beta_{W_1} = \{(1,1,0), (0,1,1)\}$; $dim(W_1) = 2$.

$W_2 = [(1,1,1), (-1,1,-1)]$; $\beta_{W_2} = \{(1,1,1), (-1,1,-1)\}$; $dim(W_2) = 2$.

$W_1 + W_2 = [(1,1,0), (0,1,1), (1,1,1), (-1,1,-1)]$; $\beta_{W_1+W_2} = \{(1,1,0), (0,1,1), (0,0,1)\}$; $dim(W_1 + W_2) = 3$.

Justificativa:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Solução (b) :

$$\boxed{dim\,(W_1 + W_2) = dim\,(W_1) + dim\,(W_2) - dim\,(W_1 \cap W_2)}$$

$$3 = 2 + 2 - dim\,(W_1 \cap W_2)$$

$$dim\,(W_1 \cap W_2) = 4 - 3 = 1$$

Solução (c) : Equação analítica de W_2

$$(x, y, z) = a\,(1, 1, 1) + b\,(-1, 1, -1) \Leftrightarrow \begin{cases} a - b = x \\ a + b = y \\ a - b = z \end{cases};$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & x \\ 1 & 1 & y \\ 1 & -1 & z \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & x \\ 0 & 2 & y - x \\ 0 & 0 & z - x \end{array}\right].$$ $\boxed{\text{O sistema só admite solução se } z - x = 0} \Leftrightarrow$ $z = x$ e $y-$livre. Assim, a Equação analítica de W_2 é $\boxed{W_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / z - x = 0\}}$.

Voltando para os geradores: $(x, y, z) = (x, y, x) = (x, 0, x) + (0, y, 0) = x\,(1, 0, 1) + y\,(0, 1, 0)$.

$\boxed{W_2 = [(1, 0, 1), (0, 1, 0)]\text{. O que houve?}}$

Problema2

Sejam $V = \mathbb{R}^3$; $W_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x + y - z = 0\}$ e
$W_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x - y + z = 0\}$

Geradores de W_1: $(x,y,z) = (x, y, x+y)$
$= x(1,0,1) + y(0,1,1)$

$W_1 = [(1,0,1), (0,1,1)]$

geradores de W_2: $(x,y,z) = (x, x+z, z)$
$= x(1,1,0) + z(0,1,1)$

$W_2 = [(1,1,0), (0,1,1)]$

$W_1 + W_2 = [(1,0,1), (0,1,1), (1,1,0), (0,1,1)]$ $\dim(W_1 + W_2) = 3$

Base de $W_1 + W_2$: $\boxed{\beta_{W_1+W_2} = \{(1,0,1), (0,1,1), (0,0,1)\}}$.

Atenção! Extraindo uma base para a soma:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$W_1 \cap W_2 = ? = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x+y-z=0 \text{ e } x-y+z=0\}$

$W_1 \cap W_2 = \{(x,y,z) \,/\, x=0 \text{ e } y=z \,;\, y,z \in \mathbb{R}\}$

$\begin{cases} x+y-z=0 \\ x-y+z=0 \end{cases}$ $y=z$; $2x=0 \therefore x=0$

$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \end{array}\right]$ $\begin{cases} x+y-z=0 \\ y-z=0 \end{cases} \rightarrow x=0 \therefore y=z$

$W_1 \cap W_2 = \{(0,y,y) \,/\, y \in \mathbb{R}\} = \{y(0,1,1) \,/\, y \in \mathbb{R}\}$

$\boxed{W_1 \cap W_2 = [(0,1,1)]}$; $\beta_{W_1+W_2} = \{(0,1,1)\}$

$\boxed{\dim(W_1 \cap W_2) = 1}$

$W_1 + W_2$ é soma direta?

Resposta: Não pois $\boxed{\dim(W_1 \cap W_2) = 1.}$

$\boxed{\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2)}$

3) <u>**Coordenadas de um Vetor em Relação a uma Base**</u> **Ordenada.**

Matriz de mudança de Base.

Exemplo de Coordenadas de um Vetor em Relação a uma Base Ordenada.

$\beta = \{(1,1), (-1,1)\}$ e $v = (3,4)$

$(3,4) = a(1,1) + b(-1,1)$

$\begin{cases} a - b = 3 \\ a + b = 4 \end{cases}$ $\rightarrow b = a - 3 \therefore b = \frac{7}{2} - 3$

$2a = 7 \therefore a = \frac{7}{2}$ $\qquad b = \frac{1}{2}$

$\boxed{[v]_\beta = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}}$

$\Updownarrow$

$[v]_\beta = \begin{bmatrix} 7/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}.$

Ex.1) $V = \mathbb{R}^2$; $v = (1,2)$ e $\alpha = \{(1,0),(0,1)\}$

$v = a(1,0) + b(0,1) \Leftrightarrow (1,2) = a(1,0) + b(0,1) \Leftrightarrow$

$(1,2) = (a,b) \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases}$; $\boxed{[v]_\alpha = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.}$

Ex.2) $V = \mathbb{R}^2$; $v = (1,2)$ e $\beta = \{(1,1),(1,-1)\}$.

$(1,2) = a(1,1) + b(1,-1) \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 1 \\ a - b = 2 \end{cases}$

$2a = 3 \therefore a = 3/2$

$b = a - 2 \therefore b = \frac{3}{2} - 2 \therefore b = -1/2$

$\boxed{[v]_\beta = \begin{bmatrix} 3/2 \\ -1/2 \end{bmatrix}.}$

Ex.3) $V = \mathbb{R}^3$; $v = (1,2,3)$ e $\alpha = \{(1,1,1),(0,1,1),(0,0,1)\}$

$(1,2,3) = a(1,1,1) + b(0,1,1) + c(0,0,1) \Leftrightarrow$

$\begin{cases} a = 1 \\ a + b = 2 \\ a + b + c = 3 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c = 1$. $\boxed{[v]_\alpha = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.}$

Matriz de mudança de base: como obter?

$$\beta = \{v_1, v_2\} \quad \text{e} \quad \alpha = \{u_1, u_2\}$$

$$v_1 = au_1 + bu_2 \Longrightarrow [v_1]_\alpha = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

$$v_2 = cu_1 + du_2 \Longrightarrow [v_2]_\alpha = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$$

$$\boxed{[I]^\beta_\alpha = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}}$$

Considere duas bases β e β' de um espaço vetorial V.

A matriz $[I]_{\beta}^{\beta'}$ é chamada *matriz de mudança da base* β' *para a base* β.

Lembrando:

Cada elemento de β' se escreve como uma combinação linear dos elementos de β.

Importante!

As matrizes $[I]_{\beta}^{\beta'}$ e $[I]_{\beta'}^{\beta}$ são inversas uma da outra.

Problema1:

Sejam $V = \mathbb{R}^2$; $\beta = \{(1,2),(3,5)\}$ e $\beta' = \{(1,0),(0,1)\}$.

Calcule $[I]_{\beta}^{\beta'}$ e $[I]_{\beta'}^{\beta}$.

$$[I]_{\beta'}^{\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}, \text{ pois } \begin{cases} (1,2) = 1(1,0) + 2(0,1) \\ (3,5) = 3(1,0) + 5(0,1) \end{cases}.$$

Solução:

$$[I]_{\beta}^{\beta'} = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

$$(1,0) = a(1,2) + b(3,5) \Leftrightarrow \begin{cases} a + 3b = 1 \\ 2a + 5b = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2a - 6b = -2 \\ 2a + 5b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{b = 2 \text{ e } a = -5.}$$

$$(0,1) = c(1,2) + d(3,5) \Leftrightarrow \begin{cases} c + 3d = 0 \\ 2c + 5d = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} -2c - 6d = 0 \\ 2c + 5d = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{d = -1 \text{ e } c = 3.}$$

Mostre que

$$[I]_{\beta}^{\beta'}\,[I]_{\beta'}^{\beta} = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

PROBLEMA2. Sejam $\alpha = \{(1,1), (-1,1)\}$ e $\beta = \{(0,1), (2,3)\}$ bases ordenadas de $V = \mathbb{R}^2$. Determine $[I]_{\beta}^{\alpha}$.

$$(1,1) = a\,(0,1) + b\,(2,3) \Leftrightarrow \begin{cases} \quad\;\; 2b = 1 \\ a + 3b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow b = 1/2 \text{ e } a = -1/2.$$

$$(-1,1) = a\,(0,1) + b\,(2,3) \Leftrightarrow \begin{cases} \quad\;\; 2b = -1 \\ a + 3b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow b = -1/2 \text{ e } a = 5/2.$$

Assim, $[I]_{\beta}^{\alpha} = \begin{pmatrix} -1/2 & 5/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$.

PROBLEMA3. Seja $\alpha = \{(1,1), (0,2)\}$ base ordenada de $V = \mathbb{R}^2$. Determine $[I]_{\alpha}^{\alpha}$.

$$(1,1) = a\,(1,1) + b\,(0,2) \Leftrightarrow \begin{cases} \quad\;\; a = 1 \\ a + 2b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow a = 1 \text{ e } b = 0.$$

$$(0,2) = a\,(1,1) + b\,(0,2) \Leftrightarrow \begin{cases} \quad\;\; a = 0 \\ a + 2b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow a = 0 \text{ e } b = 1.$$

Assim, $[I]_{\alpha}^{\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Coincidência?

Problema4:

$\beta = \{(1,0),(1,1)\}$ e $\alpha = \{(1,-1),(3,0)\}$

$[I]_\beta^\alpha = ?$ e $[I]_\alpha^\beta = ?$

$(1,0) = a(1,-1) + b(3,0) \Leftrightarrow \begin{cases} a + 3b = 1 \\ -a = 0 \end{cases} \therefore a = 0 \rightarrow \boxed{b = \frac{1}{3}}$

$\boxed{[I]_\alpha^\beta = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1/3 & 2/3 \end{bmatrix}} \Leftarrow [I]_\alpha^\beta = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}.$

$(1,1) = c(1,-1) + d(3,0) \Leftrightarrow \begin{cases} c + 3d = 1 \\ -c = 1 \end{cases} \therefore c = -1 \rightarrow d = 2/3$

$[I]_\beta^\alpha = \left([I]_\alpha^\beta\right)^{-1} \Leftrightarrow \boxed{[I]_\beta^\alpha = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}}.$

$\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1/3 & 2/3 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim$

$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right);\ [I]_\beta^\alpha = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$

Verificação:

$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 + 3/3 & -2 + 6/3 \\ 0 + 0 & 1 + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ OK

Importante:

$$\boxed{[v]_\beta = [I]_\beta^\alpha [v]_\alpha .}$$

Completando uma base

Obtenha um subespaço W_2 de $\mathbb{R}^3$ tal que $\boxed{\dim W_2 = 2 \text{ e } W_1 \oplus W_2}$ se $W_1 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + z = 0 \ \text{ e } \ y = z\right\}$.

Solução:

Geradores de W_1: $(x, y, z) = (-z, z, z) = z\,(-1, 1, 1)$.

$[W_1] = [(-1, 1, 1)]$. Então $\beta_{W_1} = \{(-1, 1, 1)\}$.

$\dim W_1 = 1$.

Base para $W_1 + W_2$: $\beta_{W_1 + W_2} = \{(-1, 1, 1), \boxed{(0, 1, 0), (0, 0, 1)}\}$.

Conclusão: $\boxed{W_2 = [(0, 1, 0), (0, 0, 1)]\,.}$

Lembrando:

$$\boxed{dim\,(W_1 + W_2) \;=\; dim\,(W_1) \;+\; dim\,(W_2) \;-\; dim\,(W_1 \cap W_2)}$$

Estamos concluindo uma parte muito importante do curso. *Bons estudos!*