Momento Síncrono 10[Parte 2] –Data: 19/07/2022

Postagem: Resumo da aula 20 e Vídeos.

Principais Assuntos de hoje: Composição de Transformações Lineares usando matrizes. Transformações Lineares Inversíveis. Matrizes Semelhantes.

Composição de transformações lineares, usando matrizes

$$
\begin{tikzcd}
 & \underset{\beta}{V} \arrow[dr, "T_2"] & \\
\underset{\alpha}{U} \arrow[ur, "T_1"] \arrow[rr, "T_2 \circ T_1"'] & & \underset{\delta}{W}
\end{tikzcd}
$$

$$\boxed{[T_2 \circ T_1]^{\alpha}_{\delta} = [T_2]^{\beta}_{\delta}\,[T_1]^{\alpha}_{\beta}\,.}$$

Nota: A Composição independe das bases escolhidas.

Um exemplo de composição de transformações lineares, usando matrizes ou diretamente

Importante! Vamos considerar α, β e δ todas bases canônica de $\mathbb{R}^2$.

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{R}^2 \; \beta \arrow[dr, "T_2"] & \\ \mathbb{R}^2 \; \alpha \arrow[ur, "T_1"] \arrow[rr, "T_2 \circ T_1"'] & & \mathbb{R}^2 \; \delta \end{tikzcd}$$

$$[T_2 \circ T_1]_{\delta}^{\alpha} = [T_2]_{\delta}^{\beta} \, [T_1]_{\beta}^{\alpha} \Longleftrightarrow [T_2 \circ T_1] = [T_2]\,[T_1].$$

$T_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T_1(x,y) = (x, x-y) \Longrightarrow [T_1] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$.

$T_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T_2(x,y) = (2x, y) \Longrightarrow [T_2] = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

1. Usando matrizes

$$\begin{aligned} [T_2 \circ T_1] &= [T_2]\,[T_1] \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\boxed{(T_2 \circ T_1)(x,y) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = (2x, x-y).}$$

2. Diretamente

$$\boxed{\begin{aligned} (T_2 \circ T_1)(x,y) &= T_2(T_1(x,y)) \\ &= T_2(x, x-y) \\ &= (2x, x-y). \end{aligned}}$$

Veja:

$$\boxed{\begin{aligned} (T_1 \circ T_2)(x,y) &= T_1(T_2(x,y)) \\ &= T_1(2x, y) \\ &= (2x, 2x-y). \end{aligned}}$$

Cuidado! $(T_2 \circ T_1)(x,y) \neq (T_1 \circ T_2)(x,y)$. É sempre assim?

Transformações Lineares Inversíveis: Isomorfismo, utilizando a matriz da TL

Idéia:

$$\begin{tikzcd} & Injetora & \\ T \arrow[ur] \arrow[dr] & & Isomorfismo \arrow[ul] \arrow[dl] \\ & Sobrejetora & \end{tikzcd}$$

$\boxed{\text{Problema: encontrar } T^{-1}.}$

i) Encontre a matriz de $T = A$.

ii) Encontre a matriz de $\boxed{T^{-1} = A^{-1}.}$

Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(x,y) = (3x + y, 4x + 2y)$ e a base canônica de $\mathbb{R}^2$. Mostre que T é inversível e ache $T^{-1}(x,y)$.

$\boxed{\text{Importante!}}$ $\beta = \{(1,0),(0,1)\} \Longrightarrow \begin{cases} T(1,0) = (3,4) \\ T(0,1) = (1,2) \end{cases} \Leftrightarrow [T]_\beta^\beta = \boxed{A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}}.$

Solução: $\det(A) = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 4 = 2 \neq 0.$ Logo A^{-1} existe.

Determinação de A^{-1}:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 6 & 0 & 6 & -3 \\ 0 & 2 & -4 & 3 \end{array}\right) \sim$$

$$L_2 \leftarrow 3L_2 - 4L_1 \qquad L_1 \leftarrow 2L_1 - L_2 \quad L_1 \leftarrow 1/6 L_1 \text{ e } L_2 \leftarrow 1/2 L_2$$

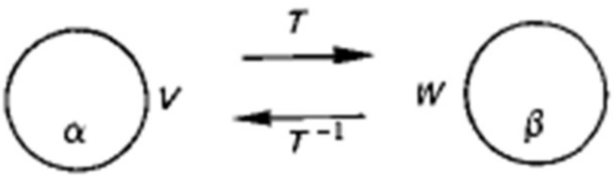
$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & -3/6 \\ 0 & 1 & -2 & 3/2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & -4/2 & 3/2 \end{array}\right) \Leftrightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} 2/2 & -1/2 \\ -4/2 & 3/2 \end{bmatrix}.$$

Conclusão: $T^{-1}(x,y) = \begin{bmatrix} 2/2 & -1/2 \\ -4/2 & 3/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \left(x - \frac{1}{2}y, -2x + \frac{3}{2}y\right).$

Importante!

Se $T: V \to W$ é uma transformação linear inversível (T é um isomorfismo) e α e β são as bases de V e W, então $T^{-1}: W \to V$ é linear e

$$\boxed{[T^{-1}]^{\beta}_{\alpha} = ([T]^{\alpha}_{\beta})^{-1}}$$



Matrizes semelhantes

$$\begin{tikzcd}
\alpha \; V \arrow[r, "T"] & V \; \alpha \arrow[d, "{[I]^{\alpha}_{\beta}}"] \\
\beta \; V \arrow[u, "{[I]^{\beta}_{\alpha}}"] \arrow[r, "T"] & V \; \beta
\end{tikzcd}$$

$$[T]^{\beta}_{\beta} = [I]^{\alpha}_{\beta}[T]^{\alpha}_{\alpha}[I]^{\beta}_{\alpha} \iff [T]^{\beta}_{\beta} = P^{-1}[T]^{\alpha}_{\alpha}P \iff \boxed{B = P^{-1}AP.}$$

Neste caso, as matrizes A e B são semelhantes.

Exemplo: Sejam $A = \boxed{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}}$ e $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.

É fácil de ver que $P^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.

Então $B = P^{-1}AP \Longleftrightarrow B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}}$

Conclusão: A matriz B é semelhante a matriz A.

$\Downarrow$

Término de transformações lineares

$\Uparrow$