Álgebra Linear I – Prof. José Luiz Neto – Resumo_A25

Livro de preparação do resumo: Álgebra Linear → Boldrine/Costa e Figueiredo/Wetzler (BOLDRINI, J. L. et al. Álgebra Linear. 3 ed. São Paulo: Harbra, 1986)

Diagonalização de um Operador Linear

Muito Importante!

BASE DE AUTOVETORES

Dado um operador linear $T: V \to V$, nosso objetivo é conseguir uma base β de V na qual a matriz do operador nesta base ($[T]_\beta^\beta$) seja uma matriz diagonal, que é a forma mais simples possível de se representar um operador. Observemos inicialmente a seguinte propriedade dos autovetores.

Autovetores associados a autovalores distintos são linearmente independentes.

Se V é um espaço vetorial de dimensão n e $T: V \to V$ é um operador linear que possui n autovalores distintos, então V possui uma base cujos vetores são todos autovetores de T.

Em outras palavras, se conseguirmos encontrar tantos autovalores distintos quanto for a dimensão do espaço, podemos garantir a existência de uma base de autovetores.

Definição: Seja $T: V \to V$ um operador linear. Dizemos que T é um *operador diagonalizável* se existe uma base de V cujos elementos são autovetores de T.

Exemplo 1:

Determine os autovalores do operador $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definido por $T(x,y) = (-3x + 4y, -x + 2y)$.

Sol.: A matriz de T é $A = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$. $p(\lambda) = \det(A - \lambda I) \Leftrightarrow$

$p(\lambda) = \begin{vmatrix} -3-\lambda & 4 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (-3-\lambda)(2-\lambda) + 4 \Leftrightarrow$

$p(\lambda) = \lambda^2 + \lambda - 6 + 4 \Leftrightarrow p(\lambda) = \lambda^2 + \lambda - 2$. $p(\lambda) = 0 \Leftrightarrow$

$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -2$ ou $\lambda = 1$. Assim, os autovalores de T são: $\boxed{-2 \text{ e } 1.}$

Determinação dos autovetores associados:

p/ $\lambda = -2$; $\begin{bmatrix} -1 & 4 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -x+4y=0 \\ -x+4y=0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 4y.$

$v = (4y, y)$; $y \neq 0$. $V_{-2} = \{(4y,y) / y \in \mathbb{R}\} = \{y(4,1) / y \in \mathbb{R}\}$

$\Leftrightarrow V_{-2} = [(4,1)]$; $\beta_{V_{-2}} = \{(4,1)\}$.

p/ $\lambda = 1$; $\begin{bmatrix} -4 & 4 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -4x+4y=0 \\ -x+y=0 \end{cases} \Leftrightarrow y = x.$

$w = (x, x)$; $x \neq 0$. $V_1 = \{(x,x) / x \in \mathbb{R}\} = \{x(1,1) / x \in \mathbb{R}\} \Leftrightarrow$

$V_1 = [(1,1)]$; $\beta_{V_1} = \{(1,1)\}$.

Importante! $\beta = \{(4,1),(1,1)\}$ é uma base de $V = \mathbb{R}^2$

Conclusão: T é diagonalizável. ENCONTRAMOS UMA BASE DE T CONSTITUÍDA APENAS DE AUTOVETORES DE T.

Exemplo 2: **Exemplo de um operador T não diagonalizável**

Seja $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o operador linear definido por $T(x,y,z) = (y+2z, 3z, 0)$. Então,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 2 \\ 0 & -\lambda & 3 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3.$$

$p(\lambda) = 0 \Leftrightarrow -\lambda^3 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0$ é o único autovalor.

Autovetores associados a λ:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} y+2z=0 \\ 3z=0 \\ 0=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=y=0 \\ x - \text{livre}. \end{cases}$$

$V_0 = \{(x,0,0) / x \in \mathbb{R}\} = [(1,0,0)]$; $\beta_{V_0} = \{(1,0,0)\}$; $\dim V_0 = 1$.

CONCLUSÃO: A multiplicidade algébrica de $\lambda = 0$ é $\underline{3}$ e a multiplicidade geométrica de $\lambda = 0$ é $\underline{1}$.

IMPORTANTE! NÃO É POSSÍVEL ENCONTRAR UMA BASE DE T CONSTITUÍDA APENAS DE AUTOVETORES DE T. Outros exemplos no Resumo_A26.