Livro de preparação do resumo: Álgebra Linear → Boldrine/Costa e Figueiredo/Wetzler
(BOLDRINI, J. L. et al. Álgebra Linear. 3 ed. São Paulo: Harbra, 1986)

Transformações Lineares e Matrizes: definição e exemplos. Resultados Importantes

Matriz de uma Transformação Linear

Seja $T: V \to W$ linear, $\beta = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ base de V e $\beta' = \{\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_m\}$ base de W. Então $T(\mathbf{v}_1), \ldots, T(\mathbf{v}_n)$ são vetores de W e portanto

$$\begin{aligned} T(\mathbf{v}_1) &= a_{11}\mathbf{w}_1 + \ldots + a_{m1}\mathbf{w}_m \\ &\vdots \\ T(\mathbf{v}_n) &= a_{1n}\mathbf{w}_1 + \ldots + a_{mn}\mathbf{w}_m \end{aligned}$$

A transposta da matriz de coeficientes deste sistema, anotada por $[T]^{\beta}_{\beta'}$ é chamada matriz de T em relação às bases β e β'.

$$[T]^{\beta}_{\beta'} = \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} = \mathbf{A}$$

Observe que T passa a ser a aplicação linear associada à matriz $\mathbf{A}$ e bases β e β', isto é $T = T_{\mathbf{A}}$.

Exemplos:

Exemplo 1:

Seja $T: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ tal que $T(x, y, z) = (2x + y - z, 3x - 2y + 4z)$.
Sejam $\beta = \{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}$ e $\beta' = \{(1, 3), (1, 4)\}$.
Procuremos $[T]^{\beta}_{\beta'}$.
Calculando T nos elementos da base β, temos:

$$\begin{aligned} T(1, 1, 1) &= (2, 5) = 3(1, 3) - 1(1, 4) \\ T(1, 1, 0) &= (3, 1) = 11(1, 3) - 8(1, 4) \\ T(1, 0, 0) &= (2, 3) = 5(1, 3) - 3(1, 4) \end{aligned}$$

Então
$$[T]^{\beta}_{\beta'} = \begin{bmatrix} 3 & 11 & 5 \\ -1 & -8 & -3 \end{bmatrix}$$

Observe que se fixarmos outras bases β e β', teremos uma outra matriz para a transformação T.

Exemplo 2:

Seja T a transformação linear do Exemplo 1 e sejam $\beta = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ e $\beta' = \{(1, 0), (0, 1)\}$.

Calculemos $[T]^{\beta}_{\beta'}$.

$$T(1, 0, 0) = (2, 3) = 2(1, 0) + 3(0, 1)$$
$$T(0, 1, 0) = (1, -2) = 1(1, 0) - 2(0, 1)$$
$$T(0, 0, 1) = (-1, 4) = -1(1, 0) + 4(0, 1)$$

Então

$$[T]^{\beta}_{\beta'} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

Exemplo 3:

Sejam $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ a T.L. dada por $T(x, y, z) = (x+y, y-z)$; $\beta = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ uma base de $\mathbb{R}^3$ e $\alpha = \{(1,1), (0,1)\}$ uma base de $\mathbb{R}^2$.

Determine $[T]^{\beta}_{\alpha} = \begin{bmatrix} a & c & e \\ b & d & f \end{bmatrix}_{2\times 3}$

Sol.: $T(1,0,0) = a(1,1) + b(0,1) \Leftrightarrow \{ (1,0) = (a, a+b) \Leftrightarrow$

$\begin{cases} a = 1 \\ a+b = 0 \Leftrightarrow b = -a \therefore b = -1 \end{cases}$

$T(0,1,0) = (1,1) = c(1,1) + d(0,1) \Leftrightarrow \begin{cases} c = 1 \\ c+d = 1 \therefore d = 0 \end{cases}$

$T(0,0,1) = (0,-1) = e(1,1) + f(0,1) \Leftrightarrow \begin{cases} e = 0 \\ e+f = -1 \therefore f = -1 \end{cases}$

Conclusão: $[T]^{\beta}_{\alpha} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}_{2\times 3}$

Exemplo 4: Dadas as bases $\beta = \{(1, 1), (0, 1)\}$ de $\mathbf{R}^2$ e $\beta' = \{(0, 3, 0), (-1, 0, 0), (0, 1, 1)\}$ de $\mathbf{R}^3$, encontremos a transformação linear $T: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ cuja matriz é

$$[T]^{\beta}_{\beta'} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Interpretando a matriz, temos:

$$T(1, 1) = 0(0, 3, 0) - 1(-1, 0, 0) - 1(0, 1, 1) = (1, -1, -1)$$
$$T(0, 1) = 2(0, 3, 0) + 0(-1, 0, 0) + 3(0, 1, 1) = (0, 9, 3)$$

Devemos encontrar agora $T(x, y)$. Para isto escrevemos (x, y) em relação à base β:

$$(x, y) = x(1, 1) + (y - x)(0, 1)$$

Aplicando T e usando a linearidade, temos:

$$\begin{aligned} T(x, y) &= xT(1, 1) + (y - x)T(0, 1) \\ &= x(1, -1, -1) + (y - x)(0, 9, 3) \\ &= (x, 9y - 10x, 3y - 4x) \end{aligned}$$

Exemplo 5:

Sejam $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ uma T.L., $\alpha = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ uma base de $V = \mathbb{R}^3$; $\beta = \{(1,1), (0,1)\}$ uma base de $W = \mathbb{R}^2$

e $[T]^{\alpha}_{\beta} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$. Encontre $T(x,y,z)$.

Sol:

$T(1,0,0) = 1(1,1) - 1(0,1) = (1,0)$

$T(0,1,0) = 1(1,1) + 0(0,1) = (1,1)$

$T(0,0,1) = 0(1,1) - 1(0,1) = (0,-1)$

$(x,y,z) = a(1,0,0) + b(0,1,0) + c(0,0,1) \Leftrightarrow$

$(x,y,z) = x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1) \Leftrightarrow$

$T(x,y,z) = xT(1,0,0) + yT(0,1,0) + zT(0,0,1) \Leftrightarrow$

$T(x,y,z) = x(1,0) + y(1,1) + z(0,-1) \Leftrightarrow$

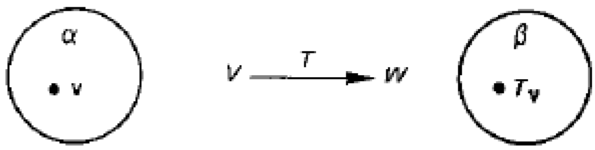
$T(x,y,z) = (x+y, y-z)$.

Transformações Lineares: Resultados Importantes

Resultado importante (teorema):

Sejam V e W espaços vetoriais, α base de V, β base de W e $T: V \to W$ uma aplicação linear.
Então, para todo $\mathbf{v} \in V$ vale:

$$[T(\mathbf{v})]_{\beta} = [T]^{\alpha}_{\beta} \cdot [\mathbf{v}]_{\alpha},$$



Exemplo: Seja a transformação linear $T: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ dada por

$$[T]^{\alpha}_{\beta} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

onde $\alpha = \{(1, 0), (0, 1)\}$ é base de $\mathbf{R}^2$, $\beta = \{(1, 0, 1), (-2, 0, 1), (0, 1, 0)\}$ é base de $\mathbf{R}^3$. Queremos saber qual é a imagem do vetor $\mathbf{v} = (2, -3)$ pela aplicação T. Para isto, achamos as coordenadas do vetor $\mathbf{v}$ em relação à base α,

obtendo $[\mathbf{v}]_\alpha = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$; a seguir, usando o teorema, temos

$$[T\mathbf{v}]_\beta = [T]^{\alpha}_{\beta}[\mathbf{v}]_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ -13 \end{bmatrix}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} T\mathbf{v} &= 5(1, 0, 1) - 3(-2, 0, 1) - 13(0, 1, 0) \\ &= (11, -13, 2) \end{aligned}$$

Cuidado! Com a escolha das letras escolhidas para representar as bases. Veja o exemplo, a seguir.

Atenção!

seja $T : \underset{\beta}{V} \longrightarrow \underset{\alpha}{W}$

ENTÃO: $\boxed{[T(v)]_{\alpha} = [T]^{\beta}_{\alpha} [v]_{\beta}}$

Outro exemplo:

Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ a transformação linear definida por

$$\boxed{T(x,y,z) = (x+y, y-z)}$$

$\beta = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ base de $\mathbb{R}^3$ e $\alpha = \{(0,1), (1,1)\}$ base de $\mathbb{R}^2$. Ache $[T]^\beta_\alpha$.

$$T(1,0,0) = (1,0) = a(0,1) + b(1,1) \Rightarrow \begin{cases} b = 1 \\ a+b = 0 \therefore a = -1 \end{cases}$$

$$T(0,1,0) = (1,1) = a(0,1) + b(1,1) \Rightarrow \begin{cases} b = 1 \\ a+b = 1 \therefore a = 0 \end{cases}$$

$$T(0,0,1) = (0,-1) = a(0,1) + b(1,1) \Rightarrow \begin{cases} b = 0 \\ a+b = -1 \therefore a = -1 \end{cases}$$

$$[T]^\beta_\alpha = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Considere o exemplo acima e seja $v = (1,2,3)$, então

$$[T(1,2,3)]_\alpha = [T]^\beta_\alpha [v]_\beta$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Muito Importante!

Seja $T: V \to W$ uma aplicação linear e α e β bases de V e W respectivamente. Então

$$\dim Im(T) = \text{posto de } [T]^\alpha_\beta$$

$$\dim ker(T) = \text{nulidade de } [T]^\alpha_\beta$$

$$= \text{número de colunas} - \text{posto de } [T]^\alpha_\beta.$$