Álgebra Linear I – Prof. José Luiz Neto – Resumo_A9

Livro de preparação do resumo: Álgebra Linear → Boldrine/Costa e Figueiredo/Wetzler (BOLDRINI, J. L. et al. Álgebra Linear. 3 ed. São Paulo: Harbra, 1986) e https://www.ufjf.br/andre_hallack/files/2018/04/linear17.pdf, acessado no dia 17/08/2020.

Espaços Vetoriais. Exemplos de Espaços Vetoriais

Nota: Os teoremas e corolários que constam neste assunto serão denominados (chamados) de **resultados importantes**, pois o principal objetivo é apresentar um resumo e não fazer demonstrações.

Definição:

UM ESPAÇO VETORIAL REAL É UM CONJUNTO V, NÃO VAZIO, COM DUAS OPERAÇÕES: SOMA, $V \times V \xrightarrow{+} V$, e MULTIPLICAÇÃO POR ESCALAR, $\mathbb{R} \times V \xrightarrow{\cdot} V$, TAIS QUE, PARA QUAISQUER $u, v, w \in V$ e $a, b \in \mathbb{R}$, as propriedades de i) a viii) abaixo, sejam satisfeitas.

i) $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$

ii) $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$

iii) Existe $\mathbf{0} \in V$ tal que $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}$. ($\mathbf{0}$ é chamado vetor nulo.)

iv) Existe $-\mathbf{u} \in V$ tal que $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$.

v) $a(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = a\mathbf{u} + a\mathbf{v}$

vi) $(a + b)\mathbf{v} = a\mathbf{v} + b\mathbf{v}$

vii) $(ab)\mathbf{v} = a(b\mathbf{v})$

viii) $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$

Nota: Neste curso não vamos fazer a verificação se um conjunto é ou não um espaço vetorial. No entanto, é muito importante conhecermos alguns espaços vetoriais e conhecer, principalmente, o **vetor nulo** de qualquer espaço vetorial.

Exemplos de espaços vetoriais

A) Consideremos o conjunto $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$ com as operações usuais de adição e de multiplicação por escalar:

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \quad \forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$$

$$a.(x, y) = (ax, ay) \ \ \forall a \in \mathbb{R}, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

Vetor nulo → 0 = (0, 0).

B) Consideremos o conjunto $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) : x, y, z \in \mathbb{R}\}$ com as operações usuais de adição e de multiplicação por escalar:

$$(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) \quad \forall (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3$$

$$a.(x, y, z) = (ax, ay, az) \ \ \forall a \in \mathbb{R}, \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$

Vetor nulo → 0 = (0, 0, 0).

$\mathbb{R}^3$, com as operações usuais acima, é um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{R}$.

C) Consideremos o conjunto $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, ..., x_n) : x_i \in \mathbb{R}, i = 1, ..., n\}$, onde está fixado $n \in \mathbb{N}$, com as operações:

$$(x_1, ..., x_n) \ + \ (y_1, ..., y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n) \quad \forall \ (x_1, x_2, ..., x_n), (y_1, y_2, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$$

$$a.(x_1, x_2, ..., x_n) = (ax_1, ax_2, ..., ax_n) \quad \forall a \in \mathbb{R}, \forall \ (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$$

$\mathbb{R}^n$, com as operações usuais acima, é um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{R}$.

$n = 1 \Rightarrow \ \mathbb{R}$ (reta) $\qquad n = 2 \Rightarrow \ \mathbb{R}^2$ (plano) $\qquad n = 3 \Rightarrow \ \mathbb{R}^3$ (espaço tridimensional)

D) Fixados $m, n \in \mathbb{N}$, o conjunto $M_{m\times n}(\mathbb{K})$ das $m \times n$ matrizes sobre um corpo $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), com as operações usuais de adição e de multiplicação por escalar, é um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{K}$.

Exercício. Encontre o Vetor nulo, para o exemplo D) nos seguintes casos:

1) **m = n = 2.**
2) **m = 2 e n = 3.**
3) **m = 3 e n = 2.**
4) **m = 1 e n = 3.**
5) **m = 3 e n = 1.**