Álgebra Linear I – Prof. José Luiz Neto – Resumo_A12

Livro de preparação do resumo: Álgebra Linear → Boldrine/Costa e Figueiredo/Wetzler (BOLDRINI, J. L. et al. Álgebra Linear. 3 ed. São Paulo: Harbra, 1986) e https://www.ufjf.br/andre_hallack/files/2018/04/linear17.pdf, acessado no dia 17/08/2020.

Dependência e Independência Linear

Definição

Sejam V um espaço vetorial e $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n \in V$. Dizemos que o conjunto $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ é *linearmente independente* (LI), ou que os vetores $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ são LI, se a equação

$$a_1\mathbf{v}_1 + \ldots + a_n\mathbf{v}_n = 0$$

implica que $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$. No caso em que exista algum $a_i \neq 0$ dizemos que $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ é *linearmente dependente* (LD), ou que os vetores $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ são LD.

Importante!

$\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ é LD se, e somente se um destes vetores for uma combinação linear dos outros.

Ou equivalente:

Um conjunto de vetores é LI se, e somente se nenhum deles for uma combinação linear dos outros.

Exemplos

1)

$V = \mathbf{R}^3$. Sejam $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V$.
$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ é LD se e somente se $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ estiverem na mesma reta, que passa pela origem. ($\mathbf{v}_1 = \lambda\mathbf{v}_2$).

2)

$V = \mathbf{R}^3$. Sejam $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \in V$.
$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ é LD se estes três vetores estiverem no mesmo plano, que passa pela origem.

3)

$$V = \mathbf{R}^2,\ \mathbf{e}_1 = (1, 0)\ \text{e}\ \mathbf{e}_2 = (0, 1).$$

$\mathbf{e}_1$ e $\mathbf{e}_2$ são LI, pois

$$a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 = \mathbf{0}$$
$$a_1(1, 0) + a_2(0, 1) = (0, 0)$$
$$(a_1, a_2) = (0, 0)$$
$$a_1 = 0 \quad \text{e} \quad a_2 = 0$$

4)

De modo análogo, vemos que para $V = \mathbf{R}^3$, $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0)$ e $\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)$. Então $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ e $\mathbf{e}_3$ são LI.

5)

$$V = \mathbf{R}^2$$

$\{(1, -1), (1, 0), (1, 1)\}$ é LD, pois $\frac{1}{2}(1, -1) - 1(1, 0) + \frac{1}{2}(1, 1) = (0, 0)$.

6)

$$V = \mathbb{R}^3,\ v_1 = (1,2,0)\ \text{ e }\ v_2 = (0,1,1).$$

Se $a.(1,2,0) + b.(0,1,1) = (0,0,0)$, temos $(a, 2a+b, b) = (0,0,0)$. Resolvendo o sistema linear homogêneo, obtemos $a = b = 0$ obrigatoriamente e portanto os vetores $(1,2,0)$ e $(0,1,1)$ são L.I.

7)

$$V = \mathbb{R}^3,\ S = \{\ (1,2,0), (0,1,1), (-2,-3,1)\ \}.$$

Se $a.(1,2,0) + b.(0,1,1) + c.(-2,-3,1) = (0,0,0)$, temos $(a - 2c, 2a + b - 3c, b + c) = (0,0,0)$, o que nos leva ao seguinte sistema linear homogêneo

$$\begin{cases} a \quad\quad\quad - 2c = 0 \\ 2a + b - 3c = 0 \\ \quad\quad b + c = 0 \end{cases}$$

o qual admite soluções não-triviais ($\{\ (2c, -c, c)\ ;\ c \in \mathbb{R}\}$). Portanto o conjunto $S = \{\ (1,2,0), (0,1,1), (2,-3,1)\}$ é L.D.

8)

$$V = \mathbb{R}^3\ ,\quad S = \{(1,2,3),\ (2,1,-2),\ (3,1,1),\ (4,-1,-2)\}\ .$$

Diga, sem fazer nenhuma conta, porque S é L.D.