Momento Síncrono 10[Parte1] – Data: 12/07/2022

Teste1_Unidade3: 14/07/2022.

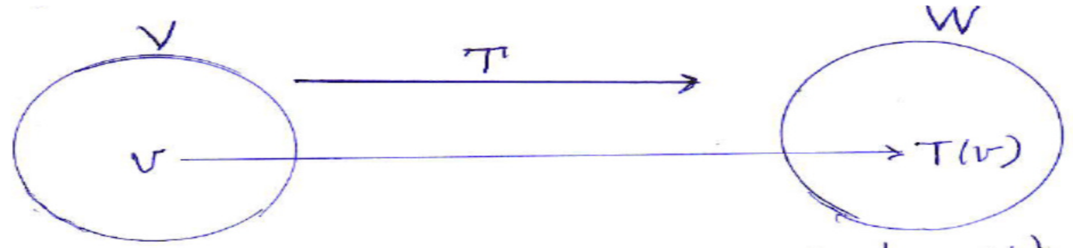
Postagem: R e s u m o d a a u l a 1 9 e

Vídeo - Prof. Levi Fontes - Notação: $[T]_\alpha^\beta = [T]_{\beta,\alpha}$

Principais assuntos: Transformações Lineares e Matrizes (definição e exemplos). Resultados Importantes.

Lembrando: **Construindo uma transformação linear**

Idéia:



$\beta = \{v_1, v_2\}$ $\qquad$ $A = \{w_1, w_2\}$

1. $T(v_1) = w_1$ E $T(v_2) = w_2$
2. $v = a v_1 + b v_2$
3. $T(v) = a\,T(v_1) + b\,T(v_2)$

$$\boxed{T(v) = a w_1 + b w_2}$$

Associando uma matriz a uma TL e vice-versa!

Idéia:

a) $T: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n \iff A = A_{n\times m} \iff \boxed{T(v) = Av.}$

b) Ex. $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por $T(x,y) = (x-y, x+y, x)$.

(i) $\begin{cases} T(1,0) = (1,1,1) \\ T(0,1) = (-1,1,0) \end{cases}$ $\qquad A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}_{3\times 2}.$

(ii) $T(x,y) = Av = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = (x-y, x+y, x).$

$$\boxed{v = (x,y).}$$

Problema 1:

Dada a expressão T(v) de uma TL, achar a matriz associada.

Ex. Considere a T.L. $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $T(x,y,z) = (x+2y-z,\ y+z,\ x+y-2z)$. Ache a matriz

seja $\alpha = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ a base Canônica de $\mathbb{R}^3$

$$T(1,0,0) = (1,0,1)$$
$$T(0,1,0) = (2,1,1) \quad \Longrightarrow \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$
$$T(0,0,1) = (-1,1,-2)$$

Muito Importante! Vem ai autovalor e autovetor.

Problema 2:

Dada a Matriz associada a uma TL, achar a expressão T(v).

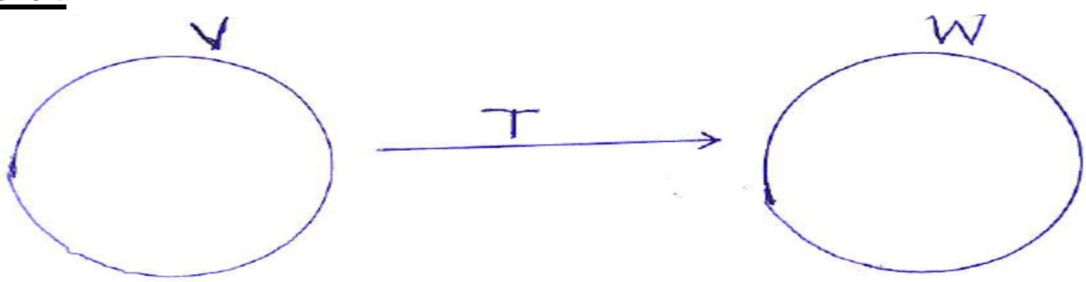
Ex. considere a matriz A, acima. Ache a expressão que define a T.L.

$$T(v) = T(x,y,z) = Av = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \Longleftrightarrow$$

$$\boxed{T(x,y,z) = (x+2y-z,\ y+z,\ x+y-2z).}$$

Matriz de uma Transformação Linear em relação às bases α e β

Idéia:



$\alpha = \{v_1, v_2\}$ $\qquad$ $\beta = \{w_1, w_2, w_3\}$

$$T(v_1) = a w_1 + b w_2 + c w_3$$

$$T(v_2) = d w_1 + e w_2 + f w_3$$

$$\boxed{[T]^{\alpha}_{\beta} = \begin{bmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{bmatrix}.}$$

Problema1: Dadas as bases α e β e a expressão que define a TL, encontrar a matriz $[T]^{\alpha}_{\beta}$.

Exemplo1: Considere a transformação linear $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$T(x, y, z) = (x + y, y - z)$ e as bases:

$\beta = \{(1,0,0), (0,1,0).(0,0,1)\}$ de $\mathbb{R}^3$ e $\alpha = \{(1,1), (0,1)\}$ de $\mathbb{R}^2$. Ache $[T]^{\beta}_{\alpha}$.

$$\begin{aligned}
T(1,0,0) &= (1,0) = a(1,1) + b(0,1) \iff \boxed{a = 1 \text{ e } b = -1} \\
T(0,1,0) &= (1,1) = c(1,1) + d(0,1) \iff c = 1 \text{ e } d = 0 \\
T(0,0,1) &= (0,-1) = e(1,1) + f(0,1) \iff \boxed{e = 0 \text{ e } f = -1}
\end{aligned}$$

$$\Downarrow$$

$$[T]^{\beta}_{\alpha} = \begin{bmatrix} a & c & e \\ b & d & f \end{bmatrix}_{2\times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}_{2\times 3}.$$

Exemplo2: Considere a transformação linear $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$T(x,y,z) = (x+y, 2z)$ e as bases:

$\beta = \{(1,0,0),(0,1,0).(0,0,1)\}$ de $\mathbb{R}^3$ e $\alpha = \{(1,0),(0,1)\}$ de $\mathbb{R}^2$. Ache $[T]_\alpha^\beta$.

$$\begin{aligned} T(1,0,0) &= (1,0) \\ T(0,1,0) &= (1,0) \Longrightarrow \boxed{[T]_\alpha^\beta = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.} \\ T(0,0,1) &= (0,2) \end{aligned}$$

Nota: as bases α e β <u>são</u> bases canônicas.

Exemplo3: Considere a transformação linear $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$T(x,y,z) = (x+y, 2z)$ e as bases:

$\beta = \{(1,1,0),(1,0,1).(0,0,-1)\}$ de $\mathbb{R}^3$ e $\alpha = \{(1,0),(1,1)\}$ de $\mathbb{R}^2$. Ache $[T]_\alpha^\beta$.

$$\begin{aligned} T(1,1,0) &= (2,0) = a(1,0) + b(1,1) \iff b = 0 \text{ e } a = 2 \\ T(1,0,1) &= (1,2) = \boxed{c}(1,0) + \boxed{d}(1,1) \iff \boxed{d = 2 \text{ e } c = -1} \\ T(0,0,-1) &= (0,-2) = e(1,0) + f(1,1) \iff f = -2 \text{ e } e = 2 \\ &\Downarrow \end{aligned}$$

$$[T]_\alpha^\beta = \begin{bmatrix} 2 & \boxed{-1} & 2 \\ 0 & \boxed{2} & -2 \end{bmatrix}.$$

Nota: as bases α e β <u>não são</u> bases canônicas. Tem muitas contas.

Problema2: Dadas as bases α e β e a matriz $[T]_{\beta}^{\alpha}$, encontrar a expressão que define a TL.

Exemplo: Encontre a expressão da TL $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que:

$$[T]_{\beta}^{\beta} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \beta = \{(1,2),(0,5)\}.$$

i) Encontrando as imagens dos elementos da base β (lado esquerdo).

$$\begin{aligned} T(1,2) &= \boxed{3}(1,2) + \boxed{2}(0,5) = (3,16) \\ T(0,5) &= \boxed{1}(1,2) + \boxed{-1}(0,5) = (1,-3) \end{aligned}$$

ii) Encontrando a expressão $T(x,y)$:

$$\begin{aligned} (x,y) &= a(1,2) + b(0,5) \\ (x,y) &= x(1,2) + \left(\frac{y-2x}{5}\right)(0,5) \\ T(x,y) &= xT(1,2) + \left(\frac{y-2x}{5}\right)T(0,5) \\ &= x(3,16) + \left(\frac{y-2x}{5}\right)(1,-3) \\ &= \left(\frac{13x+y}{5}, \frac{86x-3y}{5}\right). \end{aligned}$$

$(x,y) = a(1,2) + b(0,5)$

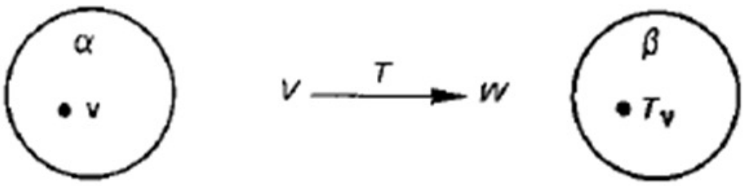
$\begin{cases} a = x \checkmark \\ 2a + 5b = y \end{cases} \Leftrightarrow 2x + 5b = y \Leftrightarrow b = \dfrac{y-2x}{5} \checkmark$

Transformações Lineares: Resultados Importantes

Resultado1:

Sejam V e W espaços vetoriais, α base de V, β base de W e $T: V \to W$ uma aplicação linear.
Então, para todo $\mathbf{v} \in V$ vale:

$$\boxed{[T(\mathbf{v})]_\beta = [T]^\alpha_\beta \cdot [\mathbf{v}]_\alpha,}$$



Exemplo: Seja a transformação linear $T: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ dada por

$$[T]^\alpha_\beta = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

onde $\alpha = \{(1, 0), (0, 1)\}$ é base de $\mathbf{R}^2$, $\beta = \{(1, 0, 1), (-2, 0, 1), (0, 1, 0)\}$ é base de $\mathbf{R}^3$. Queremos saber qual é a imagem do vetor $\mathbf{v} = (2, -3)$ pela aplicação T. Para isto, achamos as coordenadas do vetor $\mathbf{v}$ em relação à base α,

obtendo $[\mathbf{v}]_\alpha = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$; a seguir, usando o teorema, temos

$$[T\mathbf{v}]_\beta = [T]^\alpha_\beta [\mathbf{v}]_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ -13 \end{bmatrix}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} T\mathbf{v} &= 5(1, 0, 1) - 3(-2, 0, 1) - 13(0, 1, 0) \\ &= (11, -13, 2) \end{aligned}$$

Atenção!

seja $T : \underset{\beta}{V} \longrightarrow \underset{\alpha}{W}$

ENTÃO: $\boxed{[T(v)]_\alpha = [T]^\beta_\alpha [v]_\beta}$

Exemplo2: Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$\boxed{T(x, y, z) = (x + y, y - z).}$$

$\beta = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0).(0, 0, 1)\}$ base de $\mathbb{R}^3$ e $\alpha = \{(0, 1), (1, 1)\}$ base de $\mathbb{R}^2$.

Ache $[T]^{\beta}_{\alpha}$ e $[T(1, 2, 3)]_{\alpha}$.

$$T(1,0,0) = (1,0) = a(0,1) + b(1,1) \Rightarrow \begin{cases} b = 1 \\ a + b = 0 \therefore a = -1 \end{cases}$$

$$T(0,1,0) = (1,1) = a(0,1) + b(1,1) \Rightarrow \begin{cases} b = 1 \\ a + b = 1 \therefore a = 0 \end{cases}$$

$$T(0,0,1) = (0,-1) = a(0,1) + b(1,1) \Rightarrow \begin{cases} b = 0 \\ a + b = -1 \therefore a = -1 \end{cases}$$

$$\boxed{[T]^{\beta}_{\alpha} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}}$$

$$[T(1,2,3)]_{\alpha} = \boxed{[T]^{\beta}_{\alpha} [v]_{\beta}}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Achar o posto e a nulidade da matriz $[T]^{\alpha}_{\beta} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}. \Longrightarrow \boxed{P\left([T]^{\alpha}_{\beta}\right) = 2 \text{ e Nulidade de } [T]^{\alpha}_{\beta} = 3 - 2 = 1.}$$

$$N(T) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / T(x,y,z) = (0,0)\}$$

$$N(T) = \{(-y,y,y) / y \in \mathbb{R}\} = \{y(-1,1,1) / y \in \mathbb{R}\}$$

$$N(T) = [(-1,1,1)] \,.\; \beta_{N(T)} = \{(-1,1,1)\}\,.$$

$$\boxed{\text{Importante! } \dim N(T) = 1 \Longleftrightarrow \dim \mathrm{Im}(T) = 2.}$$

Resultado2:

Seja $T: V \to W$ uma aplicação linear e α e β bases de V e W respectivamente. Então

$$\dim Im(T) = \text{posto de } [T]^{\alpha}_{\beta}$$

$$\dim ker(T) = \text{nulidade de } [T]^{\alpha}_{\beta}$$

$$= \text{número de colunas} - \text{posto de } [T]^{\alpha}_{\beta}.$$