**Momento Síncrono 6 - Data: 07/06/2022**

**Teste1_Unidade2[Manhã/Tarde] – Comentários:**

Erros, muitos erros: $v = (x, y, z)$. $\boxed{v = 2x - y + z = 0.}$ Faltou paciência para consultar o arquivo do Momento Síncrono 5.

**Q2.** (10 pontos) Dos subconjuntos do espaço vetorial $V = \mathbb{R}^3$, definidos abaixo, quantos são exemplos de Subespaço Vetorial?

a) $W_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x + y - z = 0\}$.

b) $W_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / 2x + 3y + 4z = 1\}$.

c) $W_3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / y = x^2\}$.

d) $W_4 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / |x| + |y| + z = 0\}$.

e) $W_5 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x = y$ e $z = y\}$.

**Resposta:**

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | $\boxed{2}$ | 3 | 4 | 5 |

**Verdadeiro: letras a) e e).**

.............................................................................................................

## Teste2_Unidade2: Dia 09/06/2022

**Principais assuntos dos resumos 11 e 12**

1) **Soma, Interseção e União de subespaços vetoriais.**
2) **Combinação Linear e Subespaço Gerado.**
3) **Dependência e Independência Linear.**

---------------------------------------------------------------------------------------------------

**Lembrando: Igualdade de vetores e Sistemas Lineares**

***Sejam $u = (a,b,c)$ e $v = (x,y,z)$ dois vetores de $V=R^3$.***

***1)Adição: $u+v = (a,b,c) + (x,y,z) = (a+x, b+y, c+z)$***

***2)Multiplicação por escalar: $kv = k(x,y,z) = (kx,ky,kz)$***

***3)Igualdade: $u = v \leftrightarrow a = x;\ b = y$ e $c = z$***

## Sistema de equações Lineares

$^{(\star)}$ $AX = B \Longrightarrow M = \left[A : B\right]$ ; $n =$ número de incógnitas.

$(i)$Se $p(A) = p(M)$, $^{(\star)}$ é possível, <u>tem solução</u>.

Se $p(A) = p(M) = n$, $^{(\star)}$ tem uma única solução.

Se $p(A) = p(M) < n$, $^{(\star)}$ tem várias soluções.

$(ii)$Se $p(A) \neq p(M)$, $^{(\star)}$ é impossível, <u>não tem solução</u>.

---

## <u>Soma e Interseção de subespaços vetoriais</u>

Sejam $V$ um espaço vetorial e $W_1$ e $W_2$ dois subespaços de $V$.

Soma: $W_1 + W_2 = \{v \in V \ / \ v = w_1 + w_2,\ \ w_1 \in W_1 \text{ e } w_2 \in W_2\}$.

Interseção: $W_1 \cap W_2 = \{v \in V \ / \ v \in W_1 \text{ e } v \in W_2\}$.

Soma Direta: $W_1 + W_2 = V$ e $W_1 \cap W_2 = \{0\} \Leftrightarrow \boxed{W_1 \oplus W_2 = V}$.

Importante! $W_1 + W_2$ e $W_1 \cap W_2$ são subespaços de $V$.

**Exemplo1: Sejam** $V = \mathbb{R}^3$,

$W_1 = \{(a, b, 0) \ / \ a, b \in \mathbb{R}\}$ e

$W_2 = \{(0, y, z) \ / \ y, z \in \mathbb{R}\}$ dois subespaços de $\mathbb{R}^3$.

$W_1 + W_2 = \{(a, b + y, z) \ / \ a, b, y, z \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^3$.

$W_1 \cap W_2 = \{(0, t, 0) \ / \ t \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Ei}\,xo - y$.

**Exemplo2: Sejam** $V = \mathbb{R}^3$,

$W_1 = \{(a, b, 0) \ / \ a, b \in \mathbb{R}\}$ e

$W_2 = \{(0, 0, c) \ / \ c \in \mathbb{R}\}$ dois subespaços de $\mathbb{R}^3$.

$W_1 + W_2 = \{(a, b, c) \ / \ a, b, c \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^3$.

$W_1 \cap W_2 = \{(0, 0, 0)\} =$ vetor nulo.

Importante! $\boxed{W_1 \oplus W_2 = \mathbb{R}^3.}$

**União de Subespaços** → **nem sempre é um subespaço.**

**Exemplo:**

Dados $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; \ x + y = 0\}$ e $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; \ x - y = 0\}$, subespaços de $\mathbb{R}^2$, o conjunto $U \cup W$ não é um subespaço de $\mathbb{R}^2$. De fato, temos que $u = (1, 1) \in U \cup W$ e $w = (1, -1) \in U \cup W$, mas $\boxed{u + w = (2, 0) \notin}$ $U \cup W$.

## Combinação Linear

Sejam $V$ um Espaço Vetorial; $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n$ $\underline{n}$ elementos de $V$ e $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ $\underline{n}$ números reais.

Então,

$(*)\ v = a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 + \ldots + a_nv_n$ é um elemento de $V$ chamado Combinação Linear dos vetores $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n$.

Importante! A equação $(*)$ se transforma em um sistema de equações lineares.

Cuidado! Em geral, queremos saber se é possível escrever o vetor $v$

como uma Combinação Linear dos vetores $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n$.

Pergunta: O vetor $v = (1,3,4)$ é uma combinação linear dos vetores $v_1 = (2,4,6)$, $v_2 = (3,6,10)$ e $v_3 = (5,10,16)$?

Vejamos:

$$\boxed{v = xv_1 + yv_2 + zv_3} \Leftrightarrow$$

$$\boxed{(1,3,4) = x\,(2,4,6) + y\,(3,6,10) + z\,(5,10,16)} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 2x + 3y + 5z = 1 \\ 4x + 6y + 10z = 3 \\ 6x + 10y + 16z = 4 \end{cases} : \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 5 & 1 \\ 4 & 6 & 10 & 3 \\ 6 & 10 & 16 & 4 \end{array}\right) \sim$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 1 \\ 0 & 1 & 1 & | & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & | & 1 \\ 0 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 1 \end{pmatrix} . \boxed{P(A) = 2 \neq 3 = P(M)\,.}$$

O sistema não admite solução. Portanto, não é possível escrever o vetor $v = (1, 3, 4)$ como uma combinação linear dos vetores $v_1 = (2, 4, 6)$, $v_2 = (3, 6, 10)$ e $v_3 = (5, 10, 16)$.

**Muito Importante!**

**Subespaço Gerado**

$$W = \{v \in V \ / \ v = a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 + \ldots + a_nv_n\}$$

$$W = [v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n]$$

**Cuidado!**

**Exemplo:** Sejam $V = \mathbb{R}^3$ e $v_1 = (1, 2, 3) \in V$, então

$$[v_1] = \left\{v \in \mathbb{R}^3 \ / \ v = a_1v_1,\ a_1 \in \mathbb{R}\right\}.$$

$[v_1] \Rightarrow$ representa uma reta de $\mathbb{R}^3$ passando pela origem.

## Dependência e Independência Linear

Sejam $V$ um Espaço Vetorial; $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n$ $\underline{n}$ elementos de $V$ e $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ $\underline{n}$ números reais.

Se a equação:

$\boxed{(**)\ 0 = a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 + \ldots + a_nv_n}$ tem uma única solução, $a_1 = a_2 = a_3 = \ldots = a_n = 0$, os vetores $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n$ são Linearmente Independentes (LI), caso contrário, os os vetores $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n$ são Linearmente Dependentes (LD).

**Exemplo:**

Os vetores $v_1 = (1,1,1)$, $v_2 = (0,2,3)$ e $v_3 = (1,3,4)$ são LI ou LD?

Vejamos:

$\boxed{0 = xv_1 + yv_2 + zv_3} \Leftrightarrow$

$(0,0,0) = x(1,1,1) + y(0,2,3) + z(1,3,4) \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x + z = 0 \\ x + 2y + 3z = 0 \\ x + 3y + 4z = 0 \end{cases} : \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

$\boxed{P(A) = 2 = P(M) < 3 = n.}$ O sistema admite <u>infinitas soluções.</u>

Conclusão: Os vetores dados são LD.

**Exemplo:**

Dos conjuntos do espaço vetorial $V = \mathbb{R}^3$, dados abaixo, quantos são LD?

$A = \{(0,0,0),(1,1,2),(0,3,1)\}.$

$B = \{(1,1,0),(0,1,1),(0,0,1),(1,2,3)\}.$

$C = \{(1,0,1),(0,1,1),(1,1,2)\}.$

$D = \{(1,-1,0),(0,1,-1)\}.$

$E = \{(1,1,1),(0,2,2),(0,0,3)\}.$

**Resposta: A, B e C (Três).**

**Justificativa:**

**A: contem o vetor nulo→A é LD.**

**B: contem 4 vetores→B é LD.**

$$C : \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

**A matriz na forma escalonada tem uma linha de zeros→C é LD.**

**D: Os vetores <u>não</u> são paralelos→D é *LI*.**

$$E : \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

**A matriz já está na forma escalonada→E é LI.**

## Exercícios Propostos

1) O vetor $v = (1, 2, 0)$ é uma combinação linear dos vetores $u = (2, 4, 6)$ e $w = (3, 6, 10)$?

Resposta: Sim. $\boxed{v = 5u - 3w.}$

2) Determine se a matriz $A = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$ é combinação linear das matrizes $V_1 = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, $V_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ e $V_3 = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$.

Verificação: $A = xV_1 + yV_2 + zV_3$ tem solução?

**Esteja MUITO atento(a)!**

..........................................................................................................................