UFCG/CCT/Unidade Acadêmica de Matemática
DISCIPLINA: Álgebra Linear I
Professor: José Luiz Neto

Lista5

Transformações Lineares

Atenção! Prepare-se para fazer muitas contas. Conviver com mais de uma resposta. Fazer muitos " mostre que". Notação também é um grande problema.

1. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T(-1,1) = (3,2,1)$ e $T(0,1) = (1,1,0)$.

a) Determine $T(x,y)$.

b) Encontre $v \in \mathbb{R}^2$ tal que $T(v) = (-2,1,-3)$.

2. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(1,-1,0) = (1,1)$, $T(0,1,1) = (2,2)$ e $T(0,0,1) = (3,3)$.

a) Determine $T(x,y,z)$.

b) Encontre $T(1,0,0)$ e $T(0,1,0)$.

3. Determinar a transformação linear $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tal que $T(1) = x$, $T(x) = 1 - x^2$ e $T(x^2) = x + 2x^2$.

4. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(x,y) = (2x + y,\ 4x + 2y)$. Quais dos seguintes vetores pertencem ao núcleo de T. *a)* $(1,-2)$ *b)* $(2,-3)$ *c)* $(-3,6)$.

5. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(x,y) = (2x + y,\ 4x + 2y)$.

a) Determine uma base para o núcleo de T.

b) Quais dos seguintes vetores pertencem ao núcleo de T.
$b-1)\ (1,2)$ $b-2)\ (3,-3)$ $b-3)\ (-8,16)$.

c) Determine uma base para a imagem de T.

d) Quais dos seguintes vetores pertencem a imagem de T.
$d-1)\ (2,4)$ $d-2)\ \left(-\frac{1}{2},-1\right)$ $d-3)\ (-1,3)$.

e) Qual é a dimensão do núcleo de T e qual é a dimensão da imagem de T ?

6. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por $T(x,y) = (x + y,\ x,\ 2y)$.

a) Qual é a dimensão do núcleo de . T ? T é injetora?

b) Qual é a dimensão da imagem de T ? T é sobrejetora?

7. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(x, y,) = (x + 2y - z,\ 2x - y + z)$.

a) Qual é a dimensão do núcleo de . T ? T é injetora?

b) Qual é a dimensão da imagem de T ? T é sobrejetora?

8. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $T(x, y, z) = (x - 3y,\ x - z,\ z - x)$.

a) Qual é a dimensão do núcleo de . T ? T é injetora?

b) Qual é a dimensão da imagem de T ? T é sobrejetora?

9. Encontre a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ cujo núcleo é gerado pelos vetores $u = (1, 2, -1)$ e $v = (1, -1, 0)$.

10. Encontre a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ cuja imagem é gerada pelos vetores $u = (1, 3, -1, 2)$ e $v = (2, 0, 1, -1)$.

11. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(x, y, z) = (2x - y + z,\ 3x + y - 2z)$. Considere as bases: $\alpha = \{(1, 1, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 1)\}$ de $\mathbb{R}^3$ e $\beta = \{(2, 1), (5, 3)\}$ de $\mathbb{R}^2$.

a) Determine $[T]^{\alpha}_{\beta}$.

b) Se $v = (3, -4, 2)$, calcule $[T(v)]_{\beta}$, utilizando a matriz encontrada. Encontre $T(v)$.

12. Considere a transformação linear $T : P_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$ definida por $T(at^2 + bt + c) = (a,\ a + b + c,\ c)$. Mostre que T é um isomorfismo e determine $T^{-1}(x, y, z)$.

Reescreva todas as questões resolvidas nos resumos das aulas.

RESPOSTAS: Transformações Lineares

1. Cuidado com as contas.

a) $T(x,y) = (-2x+y, -x+y, -x)$.
b) $v = (3,4)$.

2. Cuidado com as contas.

a) $T(x,y,z) = (-y+3z, -y+3z)$.
b) $T(1,0,0) = (0,0)$ e $T(0,1,0) = (-1,-1)$.

3. $T(a+bx+cx^2) = b + (a+c)x + (-b+2c)x^2$.

4. $a)\,(1,-2)$ e $c)\,(-3,6)$.

5. Cuidado com as notações.

a) $\beta_{N(T)} = \{(1,-2)\}$.
b) $b-3)\,(-8,16)$.
c) $\beta_{\mathrm{Im}(T)} = \{(2,4)\}$.
d) $d-1)\,(2,4)$ $\quad d-2)\,\left(-\frac{1}{2},-1\right)$
e) $\dim N(T) = \dim \mathrm{Im}(T) = 1$.

6. Cuidado com as notações.

a) $\dim N(T) = 0$. T é injetora.
b) $\dim \mathrm{Im}(T) = 2 \neq 3 = \dim \mathbb{R}^3$. T não é sobrejetora.

7. Cuidado com as notações.

a) $\dim N(T) = 1 \neq 0$. T não é injetora.
b) $\dim \mathrm{Im}(T) = 2 = \dim \mathbb{R}^2$. T é sobrejetora.

8. Cuidado com as notações.

a) $\dim N(T) = 1 \neq 0$. T não é injetora.

b) $\dim \operatorname{Im}(T) = 2 \neq 3 = \dim \mathbb{R}^3$. T não é sobrejetora.

9. $T(x, y, z) = (0, 0, x + y + 3z)$. (Uma resposta).

10. $T(x, y, z) = (x + 2y, 3x, -x + y, 2x - y)$. (Uma resposta).

11. Cuidado com as notações.

a) $[T]_{\beta}^{\alpha} = \begin{bmatrix} -4 & 5 & 13 \\ 2 & -2 & -5 \end{bmatrix}$.

b) $[T(v)]_{\beta} = \begin{bmatrix} 31 \\ -10 \end{bmatrix}$ e $T(v) = (12, 1)$.

12. $T(N) = \{0t^2 + 0t + 0\}$. Isto mostra que T é injetora. Como $\dim P_2(\mathbb{R}) = 3 = \dim \mathbb{R}^3$, T é sobrejetora. Portanto, T é um isomorfismo. $T^{-1}(x, y, z) = xt^2 + (y - x - z)t + z$.