Livro de preparação do resumo: Álgebra Linear → Boldrine/Costa e Figueiredo/Wetzler
(BOLDRINI, J. L. et al. Álgebra Linear. 3 ed. São Paulo: Harbra, 1986)

Multiplicidade Algébrica e Multiplicidade Geométrica de um autovalor

Muito Importante!

Definição 1) A multiplicidade algébrica de um autovalor λ é a quantidade de vezes que ele aparece como raiz do polinômio característico.

Definição 2) A multiplicidade geométrica de um autovalor λ é a dimensão do subespaço V_λ de autovetores associados a λ.

Exemplo 1:

Determine os autovalores do operador $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definido por $T(x,y) = (-3x + 4y, -x + 2y)$.

Sol.: A matriz de T é $A = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$. $p(\lambda) = \det(A - \lambda I) \Leftrightarrow$

$p(\lambda) = \begin{vmatrix} -3-\lambda & 4 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (-3-\lambda)(2-\lambda) + 4 \Leftrightarrow$

$p(\lambda) = \lambda^2 + \lambda - 6 + 4 \Leftrightarrow p(\lambda) = \lambda^2 + \lambda - 2$. $p(\lambda) = 0 \Leftrightarrow$

$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -2$ ou $\lambda = 1$. Assim, os autovalores de T são: $\boxed{-2 \text{ e } 1.}$

Determinação dos autovetores associados:

$p/\lambda = -2$; $\begin{bmatrix} -1 & 4 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -x + 4y = 0 \\ -x + 4y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 4y.$

$v = (4y, y)$; $y \neq 0$. $V_{-2} = \{(4y, y) / y \in \mathbb{R}\} = \{y(4,1) / y \in \mathbb{R}\}$

$\Leftrightarrow V_{-2} = [(4,1)]$; $\beta_{V_{-2}} = \{(4,1)\}$.

$p/\lambda = 1$; $\begin{bmatrix} -4 & 4 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -4x + 4y = 0 \\ -x + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow y = x.$

$w = (x, x)$; $x \neq 0$. $V_1 = \{(x,x) / x \in \mathbb{R}\} = \{x(1,1) / x \in \mathbb{R}\} \Leftrightarrow$

$V_1 = [(1,1)]$; $\beta_{V_1} = \{(1,1)\}$.

Importante! $\beta = \{(4,1), (1,1)\}$ é uma base do $V = \mathbb{R}^2$

$i)$ A multiplicidade algébrica do autovalor $\lambda = -2$ é 1, e a multiplicidade geométrica também é 1.

$ii)$ A multiplicidade algébrica do autovalor $\lambda = 1$ é 1, e a multiplicidade geométrica também é 1.

Exemplo 2:

Seja $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o operador linear definido pela matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. Determine os autovalores de T e os subespaços associados.

Sol.: $p(\lambda) = \det(-A + \lambda I) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0 & 2 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 2 & 0 & \lambda - 4 \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 2 \\ 2 & \lambda - 4 \end{vmatrix} \Leftrightarrow$

$p(\lambda) = \lambda[(\lambda - 1)(\lambda - 4) - 4] = \lambda(\lambda^2 - 5\lambda) = \lambda^2(\lambda - 5)$. $p(\lambda) = 0 \Leftrightarrow$
$\lambda^2(\lambda - 5) = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 = 0$ ou $\lambda - 5 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0$ ou $\lambda = 5$. ASSIM $\lambda = 0$ e $\lambda = 5$ são os autovalores de T.

AUTOVETORES:

$p/\lambda=0$; $\begin{pmatrix}-1 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 0\\ 2 & 0 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases}-x+2z=0\\ 2x-4z=0\end{cases} \Leftrightarrow x=2z$; y-livre; z-livre

$V_0=\{(2z,y,z)/ y,z\in\mathbb{R}\}=[(2,0,1),(0,0,1)]$: $\begin{cases}\beta_{V_0}=\{(2,0,1),(0,0,1)\}\\ \boxed{\dim V_0=2.}\end{cases}$

$p/\lambda=5$; $\begin{pmatrix}4 & 0 & 2\\ 0 & 5 & 0\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases}4x+2z=0\\ 5y=0\\ 2x+z=0\end{cases} \Leftrightarrow z=-2x$; $y=0$; z-livre.

$V_5=\{(x,0,-2x)\,|\,x\in\mathbb{R}\}=[(1,0,-2)]$; $\beta_{V_5}=\{(1,0,-2)\}$; $\boxed{\dim V_5=1}$

Importante! $\beta=\{(2,0,1),(0,0,1),(1,0,-2)\}$ é uma base de $\mathbb{R}^3$ constituída somente de autovetores de T.

A multiplicidade algébrica de $\lambda=0$ é 2 e a multiplicidade geométrica também é 2. $\underbrace{\text{É sempre assim?}}$

Exemplo 3:

Seja $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ o operador linear definido por $T(x,y,z)=(y+2z,3z,0)$. Então,

$$A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.\ p(\lambda)=\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix}-\lambda & 1 & 2\\ 0 & -\lambda & 3\\ 0 & 0 & -\lambda\end{vmatrix}=-\lambda^3.$$

$p(\lambda)=0 \Leftrightarrow -\lambda^3=0 \Leftrightarrow \lambda=0$ é o único autovalor.

Autovetores associados a λ:

$$\begin{bmatrix}0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases}y+2z=0\\ 3z=0\\ 0=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}z=y=0\\ x\text{-livre.}\end{cases}$$

$V_0=\{(x,0,0)/x\in\mathbb{R}\}=[(1,0,0)]$; $\beta_{V_0}=\{(1,0,0)\}$; $\dim V_0=1$.

CONCLUSÃO: A multiplicidade algébrica de $\lambda=0$ é $\underline{3}$ e a multiplicidade geométrica de $\lambda=0$ é $\underline{1}$.