Livro de preparação do resumo: Álgebra Linear → Boldrine/Costa e Figueiredo/Wetzler
(BOLDRINI, J. L. et al. Álgebra Linear. 3 ed. São Paulo: Harbra, 1986)

Polinômio Característico de um Operador Linear

Polinômio Característico

Seja $T: V \to V$ um operador linear. Da definição de autovalor x autovetor, temos que $T(v) = \lambda v \Leftrightarrow$
$Av = \lambda v \Leftrightarrow Av - \lambda v = 0 \Leftrightarrow \boxed{(A - \lambda I)v = 0}$ (*).

Nota: A é a matriz de T na base Canônica.

Importante! Para (*) admitir solução não nula é necessário que $\det(A - \lambda I) = 0$.

Definição: $\boxed{p(\lambda) = \det(A - \lambda I)}$ é chamado polinômio característico da matriz A.

Ex.) Seja $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador linear. Se

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

é a matriz de T então

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix}$$

Muito Importante!

As raízes de $p(\lambda)$, se existir(em) são os autovalor(es) de T.

Ex. 1) Determine os autovalores do operador $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definido por $T(x,y) = (-3x + 4y, -x + 2y)$.

Sol.: A matriz de T é $A = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$. $p(\lambda) = \det(A - \lambda I) \Leftrightarrow$

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} -3-\lambda & 4 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (-3-\lambda)(2-\lambda) + 4 \Leftrightarrow$$

$p(\lambda) = \lambda^2 + \lambda - 6 + 4 \Leftrightarrow p(\lambda) = \lambda^2 + \lambda - 2$. $p(\lambda) = 0 \Leftrightarrow$

$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -2$ ou $\lambda = 1$. Assim, os autovalores de T são: $\boxed{-2 \text{ e } 1.}$

Determinação dos autovetores associados:

$p/ \lambda = -2$; $\begin{bmatrix} -1 & 4 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -x + 4y = 0 \\ -x + 4y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 4y.$

$v = (4y, y)$; $y \neq 0$. $V_{-2} = \{(4y, y) / y \in \mathbb{R}\} = \{y(4,1) / y \in \mathbb{R}\}$

$\Leftrightarrow V_{-2} = [(4,1)]$; $\beta_{V_{-2}} = \{(4,1)\}$.

$p/ \lambda = 1$; $\begin{bmatrix} -4 & 4 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -4x + 4y = 0 \\ -x + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow y = x.$

$w = (x, x)$; $x \neq 0$. $V_1 = \{(x,x) / x \in \mathbb{R}\} = \{x(1,1) / x \in \mathbb{R}\} \Leftrightarrow$

$V_1 = [(1,1)]$; $\beta_{V_1} = \{(1,1)\}$.

Importante! $\beta = \{(4,1), (1,1)\}$ é uma base de $V = \mathbb{R}^2$

Exemplo 2: Ache o Polinômio Característico, os autovalores e os respectivos autovetores da matriz A.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} : \underbrace{p(\lambda) = \det(A - \lambda I)}_{\text{Polinômio característico}} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ 3 & -4-\lambda \end{vmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\boxed{p(\lambda) = \lambda^2 + 3\lambda + 2} ; \; p(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\underbrace{\lambda = -1 \text{ ou } \lambda = -2}_{\text{AUTOVALORES (distintos)}}$$

Autovetores associados a:

$$\lambda = -1; \; \begin{pmatrix} +2 & -2 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2x = 0 \\ 3x - 3y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y$$

$\boxed{v = (x, x)} \leftarrow$ autovetor

$$V_{-1} = \{(x, x) / x \in \mathbb{R}\} = \{x(1,1) / x \in \mathbb{R}\} = [(1,1)]$$

$$p/ \lambda = -2; \; \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 2y = 0 \\ 3x - 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{2}{3} y$$

$\boxed{u = (\frac{2}{3} y, y)} \leftarrow$ autovetor

$$V_{-2} = \{(\tfrac{2}{3} y, y) / y \in \mathbb{R}\} = \{y(\tfrac{2}{3}, 1) / y \in \mathbb{R}\} = [(2,3)]$$