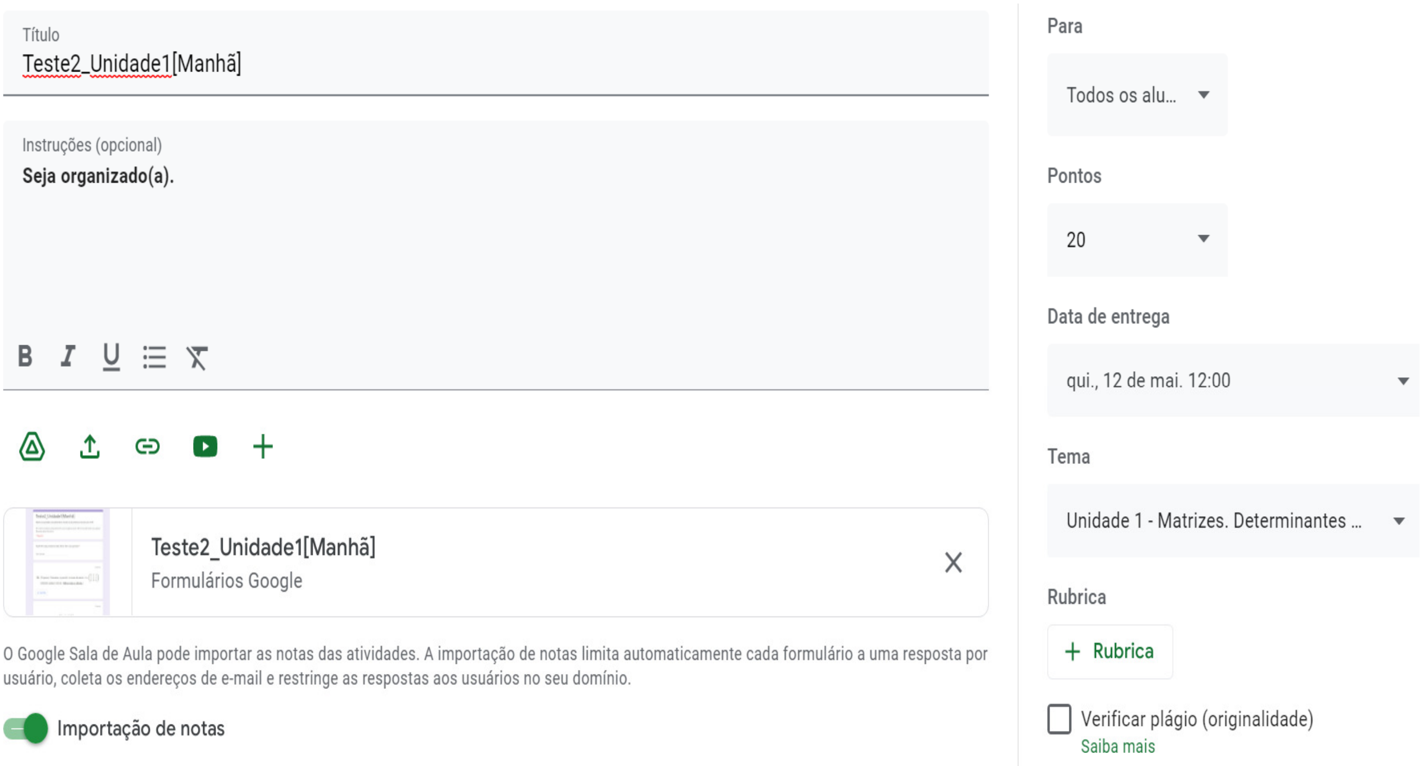
Momento Síncrono 3 - Data: 17/05/2022

Monitora: Sarah (83996610072)

Atenção!



Veja o botão importação de notas.

O Formulário devolvido pode ser visto e revisto pelo aluno.

Teste2_Unidade1 - Métodos para determinar a matriz inversa:

1) Método por sistemas lineares: $A^{-1} A = I_n$.
2) Método dos cofatores/matriz adjunta: 1)Cálculo do determinante de A. 2)Matriz dos cofatores. 3)matriz adjunta. 4)matriz inversa).
3) Método das operações elementares.

A maioria das respostas muito bem escritas e organizadas: parabéns!

Você têm aula presencial das 8h às 10h (14h às 16h), nas quintas?

....

Teste3_Unidade1 (19/05/2022-participe!): Resumos 5 e 6

1)Sistemas de equações lineares

2)Operações elementares

3)Posto de uma matriz

4)Inversa de uma matriz

5)Lista 3

Sistema de equações lineares

Definição: Um conjunto de equações lineares da forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

é um sistema de equações lineares com ***m*** equações e ***n*** incógnitas.

Forma Matricial

$$AX = B$$

$$\begin{pmatrix} & & \\ & A & \\ & & \end{pmatrix}_{m\times n} \begin{pmatrix} \\ X \\ \\ \end{pmatrix}_{n\times 1} = \begin{pmatrix} \\ B \\ \\ \end{pmatrix}_{m\times 1}.$$

Matriz Ampliada

$$AX = B$$

$$M = \left(\begin{array}{c|c} & \\ A & B \\ & \end{array}\right)_{m\times(n+1)}.$$

Lembrando: A é a matriz dos coeficientes e B é a matriz dos termos independentes.

Regra de Cramer

Seja $Ax = B$, onde o número de equações é igual ao numero de incógnitas e $\det A \neq 0$, temos que:

$$x = \frac{\det A_x}{\det A}$$

$$y = \frac{\det A_Y}{\det A}$$

$$z = \frac{\det A_z}{\det A}$$

onde A_x, A_y e A_z são composições da matriz A com suas colunas substituídas pela matriz B.

Exemplo 1: Seja um sistema linear, não homogêneo, mostrado abaixo:

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 4x + 2y - z = 5 \\ x + 3y + 2z = 13 \end{cases}$$

A representação do sistema de equações no formato matricial se

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \\ 13 \end{bmatrix}$$

O determinante da matriz A,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

será oito (det A = 8).

No caso de A_x teremos:

$$A_x = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & -1 \\ 13 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

No caso de A_y teremos:

$$A_y = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 4 & 5 & -1 \\ 1 & 13 & 2 \end{bmatrix}$$

No caso de A_z teremos:

$$A_z = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 4 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 13 \end{bmatrix}$$

Atenção! detA = 8; detA_x = 8; detA_Y = 16 e detA_Z = 24.

Aplicando a Regra de Cramer, temos que o valor das incógnitas que fornecem solução para essas equações serão:

$$x = \frac{\det A_x}{\det A} = \frac{8}{8} = 1$$

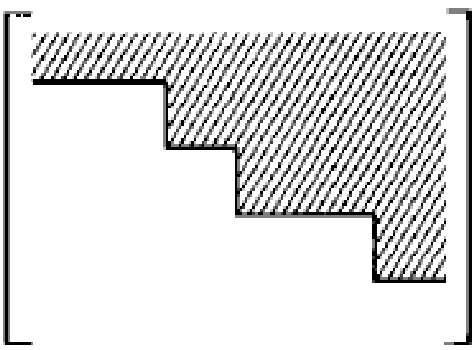
$$y = \frac{\det A_y}{\det A} = \frac{16}{8} = 2$$

$$z = \frac{\det A_z}{\det A} = \frac{24}{8} = 3.$$

Operações elementares

FORMA ESCADA DE UMA MATRIZ

Basta "zerar' os elementos que estão abaixo dos elementos a_{ii} na matriz **A.**



Ver a página 37 do livro do BOLDRINI.

São 3 (três) as operações elementares com as linhas de uma matriz:

1ª permuta de duas linhas.

2ª substituição de uma linha por uma constante vezes a própria linha.

3ª substituição de uma linha por uma constante vezes a própria linha + uma constante vezes outra linha.

Estas operações são muito importantes. Com elas encontramos a solução de sistemas lineares e a inversa de uma matriz - Ver a página 35 do livro do BOLDRINI.

Posto de uma matriz

$$A = \begin{pmatrix} - & - & - & - \\ - & - & - & - \\ - & - & - & - \\ - & - & - & - \\ - & - & - & - \end{pmatrix} \approx \ldots \approx \begin{pmatrix} - & - & - & - \\ 0 & - & - & - \\ 0 & 0 & - & - \\ 0 & 0 & 0 & - \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B.$$

$$p\,(A) = \text{número de linhas não nulas de } B = 4.$$

N_A = Nulidade de uma matriz = (número de colunas de A) – (posto de A).

Encontre o posto e a nulidade da matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Solução: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & -8 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & -8 & -3 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} \sim$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 30 & 10 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Conclusão: $p(A) = 4$ e nulidade de $A = 4 - 4 = 0$.

E se a matriz A acima, for a Matriz Ampliada de um sistema de equações lineares, o que dizer sobre a solução deste sistema?

$$\text{Classificação dos sistemas} \begin{cases} \text{Possível} \begin{cases} \text{Determinado} \\ \text{Indeterminado} \end{cases} \\ \\ \text{Impossível} \end{cases}$$

1. Usando escalonamento, encontre se possível, a solução dos seguintes sistemas de equações

lineares: a) $\begin{cases} 2x + y - 2z = 10 \\ 3x + 2y + 2z = 1 \\ 5x + 4y + 3z = 4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y + z = 4 \\ 2x + 5y - 2z = 3 \\ x + 7y - 7z = 5 \end{cases}$.

Solução b)

$$\begin{cases} x + y + z = 4 \\ 2x + 5y - 2z = 3 \\ x + 7y - 7z = 5 \end{cases} \;\ldots\ldots \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & -2 & 3 \\ 1 & 7 & -7 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & -4 & -5 \\ 0 & 6 & -8 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 11 \end{array}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 4 \\ 3y - 4z = -5 \\ 0 = 11 \end{cases}.$$

O sistema não admite solução, pois $0 \neq 11$. Tem outra explicação?

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 1 & 7 & -7 \end{vmatrix} = (-35 - 2 + 14) - (5 - 14 - 14) = (14 - 37) - (5 - 28) =$$
$$-23 - (-23) = -23 + 23 = 0.$$

2.

Encontre, se existir, a solução ou uma solução, do sistema de equações lineares

$$\begin{cases} x - y + z - t = 5 \\ -3x + 2y - z + 4t = -1 \end{cases} : \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 5 \\ -3 & 2 & -1 & 4 & -1 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 14 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} x - y + z - t = 5 \\ -y + 2z + t = 14 \end{cases} \Leftrightarrow y = 14 - 2z - t,\ z, t \in \mathbb{R}.$$

$p(A) = 2 = p(M) < 4 = n$. O sistema admite uma infinidade de soluções. Por exemplo:

$x = 19$, $y = 14$, $z = 0$ e $t = 0$.

5)Matriz inversa, utilizando operações elementares.

$$A = A_{n \times n}.\ \text{Se}\ \det A \neq 0,\ \text{Então } A \text{ é inversível.}$$

$$[A : I] \sim \ldots \sim [I : A^{-1}]$$

Importante! Primeiro zere as "posições" dos elementos que estão abaixo da diagonal principal. Depois zere as "posições" dos elementos que estão acima da diagonal principal.

Exemplo1:

Encontre, se existir, usando operações elementares, a inversa da matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$.

Solução: $\det(A) = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 4 = 2 \neq 0$. Logo A^{-1} existe.

Determinação de A^{-1}:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 6 & 0 & 6 & -3 \\ 0 & 2 & -4 & 3 \end{array}\right) \sim$$

$L_2 \leftarrow 3L_2 - 4L_1$ $\qquad$ $L_1 \leftarrow 2L_1 - L_2$ $\quad$ $L_1 \leftarrow 1/6L_1$ e $L_2 \leftarrow 1/2L_2$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & -3/6 \\ 0 & 1 & -2 & 3/2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & -4/2 & 3/2 \end{array}\right) \Leftrightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} 2/2 & -1/2 \\ -4/2 & 3/2 \end{bmatrix}.$$

Exemplo2: Mostre que:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}^{(-1)} = \begin{pmatrix} \frac{-2}{11} & \frac{-5}{11} & \frac{4}{11} \\ \frac{8}{11} & \frac{-2}{11} & \frac{-5}{11} \\ \frac{-1}{11} & \frac{3}{11} & \frac{2}{11} \end{pmatrix}$$

Início da prova (contas, muitas contas):

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$ evite frações

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -3 & -2 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{11}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{3}{2} & 1 \end{array}\right) \sim \ldots \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{-2}{11} & \frac{-5}{11} & \frac{4}{11} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{8}{11} & \frac{-2}{11} & \frac{-5}{11} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-1}{11} & \frac{3}{11} & \frac{2}{11} \end{array}\right) \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}^{(-1)} = \begin{pmatrix} \frac{-2}{11} & \frac{-5}{11} & \frac{4}{11} \\ \frac{8}{11} & \frac{-2}{11} & \frac{-5}{11} \\ \frac{-1}{11} & \frac{3}{11} & \frac{2}{11} \end{pmatrix}.$$