Álgebra Linear I – Prof. José Luiz Neto – Resumo_A10

Livro de preparação do resumo: Álgebra Linear → Boldrine/Costa e Figueiredo/Wetzler (BOLDRINI, J. L. et al. Álgebra Linear. 3 ed. São Paulo: Harbra, 1986) e https://www.ufjf.br/andre_hallack/files/2018/04/linear17.pdf, acessado no dia 17/08/2020.

Subespaços Vetoriais. Exemplos de Subespaços Vetoriais.

Nota: Os teoremas e corolários que constam neste assunto serão denominados (chamados) de **resultados importantes**, pois o principal objetivo é apresentar um resumo e não fazer demonstrações.

Definição de subespaço vetorial

Dado um espaço vetorial V, um subconjunto W, não vazio, será um *subespaço vetorial* de V se:

i) Para quaisquer $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in W$ tivermos $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in W$.

ii) Para quaisquer $a \in \mathbf{R}$, $\mathbf{u} \in W$ tivermos $a\mathbf{u} \in W$.

Resultado importante!

Se o corpo K (no resultado a seguir) é o conjunto dos números reais, a definição acima pode ser vista da seguinte forma (Gosto mais desta maneira).

Sejam V *um espaço vetorial sobre um corpo* $\mathbb{K}$ *e* $W \subset V$.
W *é um subespaço vetorial de* V *se, e somente se:*

(i) *O vetor nulo de* V *pertence a* W $(0 \in W)$

(ii) *Dados* $u, v \in W$, *então* $u + v \in W$

(iii) *Dados* $u \in W$ *e* $a \in \mathbb{K}$, *então* $a.u \in W$.

Exemplos de subespaços vetoriais

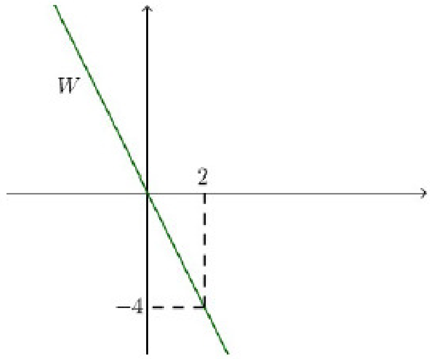
A) Seja $W = \{(x, -2x) : x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$ (operações usuais). W é um subespaço vetorial do $\mathbb{R}^2$.

É claro que o vetor nulo do $\mathbb{R}^2$, $(0,0)$, pertence a W. (1)

Dados $u = (x, -2x)$ e $v = (y, -2y)$ em W, temos $u + v = (x + y, -2x - 2y) \in W$. (2)

Dados $u = (x, -2x)$ e $a \in \mathbb{R}$, temos $a.u = (ax, -2ax) \in W$. (3)

Por (1), (2) e (3) segue (do Teorema acima) que W é subespaço vetorial do $\mathbb{R}^2$.

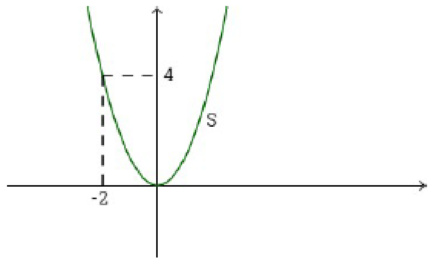


do Teorema acima→ do Resultado importante, acima.

B) Seja $S = \{(x, x^2) : x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$. S **não é** subespaço do $\mathbb{R}^2$.

Se tomarmos $a = 3 \in \mathbb{R}$ e $u = (-2, 4) \in S$, temos $a.u = (-6, 12) \notin S$.

Assim o subconjunto S não atende ao item (iii) do Teorema acima e portanto S não é subespaço vetorial do $\mathbb{R}^2$.



do Teorema acima→ do Resultado importante, acima.

C) Seja $W = \{(x_1, 0, x_3, x_4) : x_1, x_3, x_4 \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^4$. W é um subespaço do $\mathbb{R}^4$.

Faça a verificação.

D) Sejam $W = \left\{ X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \text{ tais que } AX = O \right\} \subset M_{n\times 1}(\mathbb{R})$, $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ fixada.

W é o conjunto solução do sistema linear homogêneo $AX = O$. W é subespaço de $M_{n\times 1}(\mathbb{R})$.

Faça a verificação.

Exercício:

Mostre que $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x - y + 2z = 0\}$ é um subespaço vetorial do $\mathbb{R}^3$.