

Exemplos - Teorema do Núcleo e da Imagem

Exemplo 1: Considere a transformação linear: $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $T(x, y, z) = x + y - z$. Vamos determinar uma base e a dimensão do núcleo e da imagem de T .

Um elemento (x, y, z) de \mathbb{R}^3 pertence ao núcleo de T se $T(x, y, z) = x + y - z = 0 \Rightarrow x = -y + z$. Assim um elemento do núcleo de T é da forma: $(x, y, z) = (-y + z, y, z) = y(-1, 1, 0) + z(1, 0, 1)$. Assim, $\{(-1, 1, 0), (1, 0, 1)\}$ é um conjunto de geradores para o núcleo de T . Escalonando, podemos constatar que este conjunto é L.I. e assim, é uma base para $\mathcal{N}(T)$, logo, $\dim(\mathcal{N}(T)) = 2$.

Vamos achar um conjunto de geradores para a imagem de T . A transformação T pode ser escrita da forma:

$$T(x, y, z) = x + y - z = 1(x + y - z)$$

Assim, $\{1\}$ é um conjunto de geradores para a imagem e por ser L.I., é uma base para $Im(T)$, assim, $\dim(Im(T)) = 1$.

Observe que $\dim(\mathcal{N}(T)) = 2$ e $\dim(Im(T)) = 1$, logo $\dim(\mathcal{N}(T)) + \dim(Im(T)) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$, como era de se esperar, pelo teorema do núcleo e da imagem.

Exemplo 2: Determinar uma transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ cuja imagem é gerada por $(2, 1, 1)$ e $(1, -1, 2)$.

Como os elementos $(2, 1, 1)$ e $(1, -1, 2)$ são L.I. em \mathbb{R}^3 , temos que eles formam uma base para a imagem de T , logo, $\dim(Im(T)) = 2$. Portanto, pelo teorema do núcleo e da imagem, sabemos que $\dim(\mathcal{N}(T)) = 1$.

Desta forma, escolhemos uma base para \mathbb{R}^3 , por exemplo, a base canônica $B = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ e podemos definir, **por exemplo**, a transformação linear T da seguinte forma:

$$T(1, 0, 0) = (0, 0, 0), \quad T(0, 1, 0) = (2, 1, 1), \quad T(0, 0, 1) = (1, -1, 2)$$

Desta forma, a imagem será gerada pelo conjunto dado e o núcleo terá dimensão 1. Assim, teremos:

$$\begin{aligned} T(x, y, z) &= xT(1, 0, 0) + yT(0, 1, 0) + zT(0, 0, 1) = x(0, 0, 0) + y(2, 1, 1) + z(1, -1, 2) \Rightarrow \\ &\Rightarrow T(x, y, z) = (2y + z, y - z, y + 2z) \end{aligned}$$

Observe que a resposta não é única e depende da escolha da base para \mathbb{R}^3 e também de quais elementos da base serão levados nos geradores da imagem.

Exemplo 3: Determinar uma transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que:

$$\mathcal{N}(T) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$$

Um elemento $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ pertence ao núcleo de T se $x + y + z = 0 \Rightarrow x = -y - z$. Logo, um elemento do núcleo é da forma:

$$(x, y, z) = (-y - z, y, z) = y(-1, 1, 0) + z(-1, 0, 1)$$

Assim, $\{(-1, 1, 0), (-1, 0, 1)\}$ é um conjunto de geradores para o núcleo de T , e como é L.I., é uma base para $\mathcal{N}(T)$, portanto, $\dim(\mathcal{N}(T)) = 2$. Pelo teorema do núcleo e da imagem, sabemos

então que $\dim(\text{Im}(T)) = 1$. Basta, portanto, completarmos a base $\{(-1, 1, 0), (-1, 0, 1)\}$ do núcleo e obter uma base para \mathbb{R}^3 .

Podemos escolher, por exemplo, o elemento $(1, 0, 0)$ e assim, o conjunto $\{(-1, 1, 0), (-1, 0, 1), (1, 0, 0)\}$ forma uma base para \mathbb{R}^3 .

Agora, basta tomarmos a imagem dos geradores de núcleo como sendo o elemento neutro do espaço de chegada, que no caso é \mathbb{R}^3 e $T(1, 0, 0)$ linearmente independente, ou seja, nesse caso, qualquer elemento do \mathbb{R}^3 que não seja o elemento neutro. Dessa forma, podemos definir, por exemplo, a transformação linear T da seguinte forma:

$$T(-1, 1, 0) = (0, 0, 0), \quad T(-1, 0, 1) = (0, 0, 0), \quad T(1, 0, 0) = (1, 0, 0)$$

Vamos obter as coordenadas de um elemento $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ com relação a base $\{(-1, 1, 0), (-1, 0, 1), (1, 0, 0)\}$:

$$(x, y, z) = \alpha_1(-1, 1, 0) + \alpha_2(-1, 0, 1) + \alpha_3(1, 0, 0) \Leftrightarrow \begin{cases} -\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 = x \\ \alpha_1 = y \\ \alpha_2 = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = y \\ \alpha_2 = z \\ \alpha_3 = x + y + z \end{cases}$$

Temos, portanto, $(x, y, z) = y(-1, 1, 0) + z(-1, 0, 1) + (x + y + z)(1, 0, 0)$. Logo,

$$\begin{aligned} T(x, y, z) &= T(y(-1, 1, 0) + z(-1, 0, 1) + (x + y + z)(1, 0, 0)) = \\ &= yT(-1, 1, 0) + zT(-1, 0, 1) + (x + y + z)T(1, 0, 0) = (x + y + z)(1, 0, 0) \Rightarrow \\ &\Rightarrow T(x, y, z) = (x + y + z, x + y + z, x + y + z) \end{aligned}$$

Assim, temos explicitamente a transformação T . Note que a resposta não é única e depende da escolha para completar a base do espaço de saída e da escolha dos elementos linearmente independentes que serão imagens dos elementos desta base.

Exemplo 4: *Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita e $T : V \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma transformação linear não-nula. Se $\dim(\mathcal{N}(T)) = 2$, determine as possíveis dimensões de V .*

Sabemos que T é não-nula e que sua imagem está contida no \mathbb{R}^3 , logo a dimensão da imagem de T só pode ser 1, 2 ou 3.

Pelo teorema do núcleo e da imagem, temos que:

$$\dim(\mathcal{N}(T)) + \dim(\text{Im}(T)) = \dim(V)$$

Logo, como $\dim(\mathcal{N}(T)) = 2$ as possíveis dimensões de V serão: 3, 4 ou 5.

Exemplo 5: *Determinar uma transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ cujo núcleo tem dimensão 1.*

Pelo teorema do núcleo e da imagem, como $\dim(\mathcal{N}(T)) = 1$ e $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$, temos que ter $\dim(\text{Im}(T)) = 2$.

Escolhemos uma base qualquer para \mathbb{R}^3 , por exemplo, $B = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ e assim, definimos por exemplo, $T(1, 0, 0) = (0, 0, 0)$, dessa forma o núcleo terá dimensão 1 como desejado, e escolhemos $T(0, 1, 0)$ e $T(0, 0, 1)$ linearmente independentes em \mathbb{R}^3 . Por exemplo, podemos definir a transformação T da forma:

$$T(1, 0, 0) = (0, 0, 0), \quad T(0, 1, 0) = (1, 1, 0), \quad T(0, 0, 1) = (0, 0, 1)$$

Desta forma, teremos:

$$T(x, y, z) = xT(1, 0, 0) + yT(0, 1, 0) + zT(0, 0, 1) = x(0, 0, 0) + y(1, 1, 0) + z(0, 0, 1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T(x, y, z) = (y, y, z)$$

Note que a solução não é única e depende da escolha da base para o \mathbb{R}^3 e da escolha das imagens dos elementos desta base pela transformação.

Exemplo 6: Considere a transformação linear: $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $T(x, y) = (2x, x+y)$. A transformação T é bijetora.

Vamos verificar se T é injetora. Para isto, basta sabermos o núcleo de T . Um elemento $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ está no núcleo se:

$$T(x, y) = (2x, x + y) = (0, 0) \Rightarrow \begin{cases} 2x = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Assim, temos: $\mathcal{N}(T) = \{(0, 0)\}$ e portanto, T é injetora.

Vamos verificar se T é sobrejetora. Como $\dim(\mathcal{N}(T)) = 0$ e $\dim(\mathbb{R}^2) = 2$, pelo teorema do núcleo e da imagem sabemos que $\dim(\text{Im}(T)) = 2$, e como $\dim(\text{Im}(T)) = \dim(\mathbb{R}^2)$ temos que T é sobrejetora.

Como T é injetora e sobrejetora, temos que T é bijetora.

Exemplo 7: Determinar uma transformação linear $T : P_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^3$ que satisfaça simultaneamente as condições:

- (a) O elemento $p(x) = 1 + x$ pertence ao núcleo de T ;
- (b) O elemento $q(x) = x$ não pertence ao núcleo de T ;
- (c) $\text{Im}(T) = [(1, 1, 1)]$.

Sabemos que $\dim(P_2(\mathbb{R})) = 3$ e como pela condição (c) temos que ter $\text{Im}(T) = [(1, 1, 1)]$, podemos verificar que $\{(1, 1, 1)\}$ é uma base para $\text{Im}(T)$, logo, $\dim(\text{Im}(T)) = 1$ e pelo teorema do núcleo e da imagem temos que ter $\dim(\mathcal{N}(T)) = 2$.

Como $q(x) = x$ não pertence ao núcleo, podemos escolher $T(q(x)) = (1, 1, 1)$, desta forma, já satisfazemos a condição de que $(1, 1, 1)$ gera a imagem de T e que $q(x)$ não está no núcleo. Para satisfazer a condição (a) de que $p(x) = 1 + x$ está no núcleo, basta tomarmos $T(p(x)) = (0, 0, 0)$.

Agora, temos que escolher mais um elemento para gerar o núcleo. Mas, para isso, devemos completar uma base para o $P_2(\mathbb{R})$ que contenha os elementos x e $1 + x$. Podemos tomar, por exemplo, $B = \{x, 1 + x, x^2\}$ como base. Dessa forma, basta definirmos $T(x^2) = (0, 0, 0)$, desta maneira satisfazemos todas as condições e as dimensões do núcleo e da imagem.

Um elemento do $P_2(\mathbb{R})$ pode ser escrito como combinação linear dos elementos da base B da forma: $a + bx + cx^2 = (b - a)x + a(1 + x) + cx^2$, assim, temos:

$$\begin{aligned} T(a + bx + cx^2) &= (b - a)T(x) + aT(1 + x) + cT(x^2) = (b - a)(1, 1, 1) + a(0, 0, 0) + c(0, 0, 0) \Rightarrow \\ &\Rightarrow T(a + bx + cx^2) = (b - a, b - a, b - a) \end{aligned}$$

Observe, novamente, que a solução não é única e depende da escolha da base para $P_2(\mathbb{R})$ e das imagens dos elementos da base pela transformação linear T .