

Espaço Vetorial

Atenção! Prepare-se para fazer muitas contas. Conviver com mais de uma resposta.
Fazer muitos " mostre que". Notação também é um grande problema.

1. Nenhum subconjunto de $V = \mathbb{R}^3$ abaixo é subespaço vetorial. Apresente uma justificativa para cada um.
 - a) $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / |x| + 2y - z = 0\}$
 - b) $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / z = 1\}$
 - c) $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + 2y - z = 0\}$
 - d) $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x \leq y \leq z\}$
 - e) $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / (y + z) \in \mathbb{Q}\}$
2. Mostre que $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x - y + 2z = 0\}$ é um subespaço vetorial do \mathbb{R}^3 .
3. Sejam $V = \mathbb{R}^3$, $E = [(1, 1, 1), (1, 2, 2)]$ e $F = [(0, -1, 1), (1, 1, 2)]$ subespaços de V . Determine a dimensão de:
 - a) $E + F$
 - b) $E \cap F$
4. Sejam $V = \mathbb{R}^4$, $W_1 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / x + y = 0 \text{ e } z - t = 0\}$ e $W_2 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / x - y - z + t = 0\}$ subespaços de V .
 - a) Encontre $W_1 \cap W_2$
 - b) Escreva uma base para $W_1 \cap W_2$
 - c) Encontre uma base para $W_1 + W_2$
 - d) $W_1 + W_2 = \mathbb{R}^4$? Justifique!
 - e) $W_1 + W_2$ é soma direta? Justifique!

5. Sejam $V = \mathbb{R}^3$, $W_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x = 0\}$, $W_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / y - 2z = 0\}$ e $W_3 = [(1, 1, 0), (0, 0, 1)]$ subespaços de V . Determine a dimensão de:

a) W_1, W_2 e W_3

b) $W_1 \cap W_2$

c) $W_2 + W_3$

d) $W_1 + W_2 + W_3$

e) $W_1 + W_2$ é soma direta? Justifique!

6. Obtenha um subespaço W_2 de \mathbb{R}^3 tal que $\dim W_2 = 2$ e $W_1 \oplus W_2$ se $W_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + z = 0 \text{ e } y = z\}$.

7. Verifique se $\beta = \{x^2 + 1, x - 1, x^2 - 2x\}$ é base de $V = P_2(\mathbb{R})$.

8. Sejam $V = \mathbb{R}^3$, $\beta = \{e_1, e_2, e_3\}$, e $\alpha = \{g_1, g_2, g_3\}$ duas bases ordenadas de V , relacionadas da seguinte forma:

$$\begin{cases} g_1 = e_1 - e_2 - e_3 \\ g_2 = 2e_2 + 3e_3 \\ g_3 = 3e_1 + e_3 \end{cases} \text{ . Determine:}$$

a) $[I]_{\beta}^{\alpha}$ e $[I]_{\alpha}^{\beta}$

b) $[v]_{\alpha}$, sabendo-se que $[v]_{\beta} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$.

9. Mostre que o subconjunto $A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \right\}$ é uma base de $V = M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$.

RESPOSTAS: Espaço Vetorial

1. **a)** $|x| + |a| \geq |x + a|$.
b) $(0, 0, 0) \notin B$.
c) $x^2 + a^2 \neq (x + a)^2$.
d) Se $k < 0$ e $u = (1, 2, 3)$ então $ku \notin D$.
e) Se $k = \sqrt{2}$ e $u = (\pi, 2, 3)$ então $ku \notin E$.
2. Dica. Mostre que: (i) $(0, 0, 0) \in W$; (ii) $\forall u, v \in W \implies (u + v) \in W$;
(iii) $\forall k \in \mathbb{R}$ e $\forall v \in W \implies (kv) \in W$.
3. **a)** $\dim(E + F) = 3$.
b) $\dim(E \cap F) = 1$.
4. **a)** $W_1 \cap W_2 = [(0, 0, 1, 1)]$.
b) $\beta_{W_1 \cap W_2} = \{(0, 0, 1, 1)\}$.
c) $\beta_{W_1 + W_2} = \{(1, -1, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 1), (0, 0, 0, 1)\}$.
d) Sim. $\dim(W_1 + W_2) = 4$.
e) Não. $\dim(W_1 \cap W_2) = 1 \neq 0$.
5. **a)** $\dim(W_1) = \dim(W_2) = \dim(W_3) = 2$.
b) $\dim(W_1 \cap W_2) = 1$.
c) $\dim(W_2 + W_3) = 3$.
d) $\dim(W_1 + W_2 + W_3) = 3$.
e) Não. $\dim(W_1 \cap W_2) = 1 \neq 0$.
6. $W_2 = [(0, 1, 0), (0, 0, 1)]$.
7. Dica. Resolvendo o sistema homogêneo $0x^2 + 0x + 0 = a(x^2 + 1) + b(x - 1) + c(x^2 - 2x)$ conclua que $a = b = c = 0$. Logo β é L.I.
8. **a)** $[I]_{\beta}^{\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ e $[I]_{\alpha}^{\beta} = \begin{pmatrix} -2 & -9 & 6 \\ -1 & -4 & 3 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$
b) $[v]_{\alpha} = [I]_{\alpha}^{\beta} [v]_{\beta} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.
9. Dica. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.