Álgebra Linear I – Prof. José Luiz Neto – Resumo_A15

Livro de preparação do resumo: Álgebra Linear → Boldrine/Costa e Figueiredo/Wetzler
(BOLDRINI, J. L. et al. Álgebra Linear. 3 ed. São Paulo: Harbra, 1986)

Transformações Lineares. Núcleo e Imagem de uma Transformação Linear

Definição: Sejam V e W dois espaços vetoriais. Uma *transformação linear* (aplicação linear) é uma função de V em W, $F: V \to W$, que satisfaz as seguintes condições:

i) Quaisquer que sejam $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ em V,

$$F(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = F(\mathbf{u}) + F(\mathbf{v})$$

ii) Quaisquer que sejam $k \in \mathbf{R}$ e $\mathbf{v} \in V$,

$$F(k\mathbf{v}) = kF(\mathbf{v})$$

Exemplo

$V = \mathbf{R}^2$ e $W = \mathbf{R}^3$

$F: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$

$(x, y) \mapsto (2x, 0, x + y)$ ou $F(x, y) = (2x, 0, x + y)$.

Por exemplo, $F(1, 2) = (2, 0, 3) \in \mathbf{R}^3$.

Dados $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{R}^2$, sejam $\mathbf{u} = (x_1, y_1)$ e $\mathbf{v} = (x_2, y_2)$ onde $x_i, y_i \in \mathbf{R}$. Temos:

$$\begin{aligned} F(\mathbf{u} + \mathbf{v}) &= F((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) = F(x_1 + x_2, y_1 + y_2) \\ &= (2(x_1 + x_2), 0, (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)) \\ &= (2x_1, 0, x_1 + y_1) + (2x_2, 0, x_2 + y_2) \\ &= F(\mathbf{u}) + F(\mathbf{v}) \end{aligned}$$

Logo, a primeira condição é satisfeita. Mais ainda,

$$\begin{aligned} F(k\mathbf{u}) &= F(k(x, y)) = F(kx, ky) \\ &= (2kx, 0, kx + ky) \\ &= k(2x, 0, x + y) = kF(\mathbf{u}) \end{aligned}$$

e a segunda condição é satisfeita. Então F é uma transformação linear.

Importante!

Decorre da definição que uma transformação linear $T: V \to W$ leva o vetor nulo de V no vetor nulo de W, isto é, se $\mathbf{0} \in V$, $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0} \in W$. Isto nos ajuda a detectar transformações não lineares. Se $T(\mathbf{0}) \neq \mathbf{0}$, T não é linear. **Mas cuidado $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ não é suficiente para que** T seja linear. Assim, por exemplo, $T: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ onde $T(x, y, z) = (x + 1, y, z)$ não é linear.

Definição: Seja $T: V \to W$ uma aplicação linear. A *imagem* de T é o conjunto dos vetores $\mathbf{w} \in W$ tais que existe um vetor $\mathbf{v} \in V$, que satisfaz $T(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$. Ou seja

$$Im(T) = \{\mathbf{w} \in W;\ \ T(\mathbf{v}) = \mathbf{w} \ \text{ para algum } \ \mathbf{v} \in V\}$$

Observe que $Im(T)$ é um subconjunto de W e, além disso, é um subespaço vetorial de W. Às vezes $Im(T)$ é escrito como $T(V)$.

Definição: Seja $T: V \to W$ uma transformação linear. O conjunto de todos os vetores $\mathbf{v} \in V$ tais que $T(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$ é chamado *núcleo* de T, sendo denotado por $ker(T)$. Isto é

$$ker(T) = \{\mathbf{v} \in V;\ \ T(\mathbf{v}) = \mathbf{0}\}$$

Observe que $ker(T) \subset V$ é um subconjunto de V e, ainda mais, é um subespaço vetorial de V.

Exemplo : Seja a transformação linear $T: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ dada por $T(x, y, z) = (x, 2y, 0)$.
Então a imagem de T

$$\begin{aligned} Im(T) &= \{(x, 2y, 0): x, y \in \mathbf{R}\} \\ &= \{x(1, 0, 0) + y(0, 2, 0): x, y \in \mathbf{R}\} \\ &= \langle (1, 0, 0), (0, 2, 0) \rangle \end{aligned}$$

Observe que $\dim Im(T) = 2$.
O núcleo de T é dado por:

$$\begin{aligned} ker(T) &= \{(x, y, z): T(x, y, z) = (0, 0, 0)\} \\ &= \{(x, y, z): (x, 2y, 0) = (0, 0, 0)\} \\ &= \{(0, 0, z): z \in \mathbf{R}\} \\ &= \{z(0, 0, 1): z \in \mathbf{R}\} \\ &= [(0, 0, 1)] \end{aligned}$$

Observe que $\dim ker(T) = 1$.