Álgebra Linear I – Prof. José Luiz Neto – Resumo_A17

Livro de preparação do resumo: Álgebra Linear → Boldrine/Costa e Figueiredo/Wetzler
(BOLDRINI, J. L. et al. Álgebra Linear. 3 ed. São Paulo: Harbra, 1986)

Construindo uma transformação linear

Resultado importante!

Dados dois espaços vetoriais reais V e W e uma base de V, $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$, sejam $\mathbf{w}_1 \ldots, \mathbf{w}_n$ elementos arbitrários de W. Então existe uma única aplicação linear $T: V \to W$ tal que $T(\mathbf{v}_1) = \mathbf{w}_1, \ldots, T(\mathbf{v}_n) = \mathbf{w}_n$.
Esta aplicação é dada por:
se $\mathbf{v} = a_1\mathbf{v}_1 + \ldots + a_n\mathbf{v}_n$,

$$\begin{aligned} T(\mathbf{v}) &= a_1 T(\mathbf{v}_1) + \ldots + a_n T(\mathbf{v}_n) \\ &= a_1\mathbf{w}_1 + \ldots + a_n\mathbf{w}_n \end{aligned}$$

Verifique que T assim definida é linear e que é a única que satisfaz as condições exigidas.

Problemas

Problema 1: Qual é a transformação linear $T: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ tal que $T(1, 0) = (2, -1, 0)$ e $T(0, 1) = (0, 0, 1)$?

Solução: Temos neste caso $\mathbf{e}_1 = (1, 0)$ e $\mathbf{e}_2 = (0, 1)$ base de $\mathbf{R}^2$ e $\mathbf{w}_1 = (2, -1, 0)$ e $\mathbf{w}_2 = (0, 0, 1)$.
Dado $\mathbf{v} = (x_1, x_2)$ arbitrário,

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 \\ \text{e} \quad T(\mathbf{v}) &= x_1 T(\mathbf{e}_1) + x_2 T(\mathbf{e}_2) \\ &= x_1(2, -1, 0) + x_2(0, 0, 1) \\ &= (2x_1, -x_1, x_2) \end{aligned}$$

Problema 2: Qual é a transformação linear $T: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ tal que $T(1, 1) = (3, 2, 1)$ e $T(0, -2) = (0, 1, 0)$?
Resolva o problema como exercício, mas, cuidado! Aqui não temos base canônica.

Problema 3:

Qual é a T.L. $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que:

$T(1,1,1) = (1,-1)$; $T(0,1,1) = (0,-1)$ e $T(0,0,1) = (-2,0)$?

Sol.: seja $v = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, então

$$(x,y,z) = a(1,1,1) + b(0,1,1) + c(0,0,1) \overset{(*)}{\Leftrightarrow}$$

$$(x,y,z) = x(1,1,1) + (y-x)(0,1,1) + (z-y)(0,0,1) \Leftrightarrow$$

$$T(x,y,z) = xT(1,1,1) + (y-x)T(0,1,1) + (z-y)T(0,0,1)$$

$$= x(1,-1) + (y-x)(0,-1) + (z-y)(-2,0)$$

$$= (x+2y-2z, \cancel{-x-y+x})$$

$$= (x+2y-2z, -y)$$

Cuidado! Quando a base β dada não for canônica, tem muitos contos para serem feitos.

(*) $$\begin{cases} a = x \\ a+b = y \to b = y-x \\ a+b+c = z \to \cancel{x} + y - \cancel{x} + c = z \Leftrightarrow \end{cases}$$

$\boxed{c = z-y}$. Assim

$$(x,y,z) = x(1,1,1) + (y-x)(0,1,1) + (z-y)(0,0,1)$$