Álgebra Linear I – Prof. José Luiz Neto – Resumo_A21

Livro de preparação do resumo: Álgebra Linear → Boldrine/Costa e Figueiredo/Wetzler
(BOLDRINI, J. L. et al. Álgebra Linear. 3 ed. São Paulo: Harbra, 1986)

Autovalores e Autovetores de um Operador Linear

Motivação

Dada uma transformação linear de um espaço vetorial nele mesmo, $T: V \to V$ gostaríamos de saber que vetores seriam levados neles mesmos por esta transformação. Isto é, dada $T: V \to V$, quais são os vetores $v \in V$ tais que $T(v) = v$? (v é chamado *vetor fixo*).

Seja $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definido por
$T(x,y) = (-3x + 4y, -x + 2y)$.

Note que:

$$\left.\begin{array}{l} T(1,1) = (1,1) = 1\,(1,1) \\ T(2,2) = (2,2) = 1\,(2,2) \\ T(a,a) = (a,a) = 1\,(a,a) \\ T(x,x) = (x,x) = 1\,(x,x) \end{array}\right\}$$

Qualquer vetor $v = (x,x)$; $x \neq 0$ é um autovetor de T associado ao autovalor $\lambda = 1$ de T.

O que queremos:

Dada uma transformação linear de um espaço vetorial $T: V \to V$, estamos interessados em saber quais vetores são levados em um múltiplo de si mesmo; isto é, procuramos um vetor $v \in V$ e um escalar $\lambda \in \mathbb{R}$ tais que

$$T(v) = \lambda v$$

Definição: Seja $T: V \to V$ um operador linear. Se existirem $v \in V$, $v \neq 0$, e $\lambda \in \mathbb{R}$ tais que $Tv = \lambda v$, λ é um *autovalor* de T e v um *autovetor* de T associado a λ.

Observe que λ pode ser o número 0, embora v não possa ser o vetor nulo.

Muito Importante!

Dada uma transformação $T: V \to V$ e um autovetor v associado a um autovalor λ, qualquer vetor $w = \alpha v$ ($\alpha \neq 0$) também é autovetor de T associado a λ.

Seja $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(v) = 8v \Leftrightarrow T(x,y) = 8(x,y)$.
Neste caso, 8 é um autovalor de T e qualquer vetor $v = (x,y)$; $v \neq (0,0)$ é um autovetor de T associado ao autovalor $\lambda = 8$.

Definição: O subespaço $V_\lambda = \{\mathbf{v} \in V : T(\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{v}\}$ é chamado o *subespaço associado ao autovalor* λ.

No Resumo_A22 vamos ver como encontrar os autovalores e os respectivos autovetores de um operador linear (de uma matriz).