Álgebra Linear I – Prof. José Luiz Neto – Resumo_A4

Livro de preparação do resumo: Álgebra Linear → Boldrine/Costa e Figueiredo/Wetzler (BOLDRINI, J. L. et al. Álgebra Linear. 3 ed. São Paulo: Harbra, 1986) e https://www.google.com/search?client=firefox-b-d&q=Apostila+de+Matrizes%2C+Determinantes+e+Sistemas+2008, acessado em 30/07/2020.

Determinantes

Propriedades. Regras para o Cálculo de Determinantes. Matriz Adjunta. Matriz Inversa.

Definição: Determinante é um número real que se associa a uma matriz quadrada.

Determinate de uma matriz quadrada de 2ª ordem

Dada a matriz de 2ª ordem $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, chama-se determinante associado a matriz A (ou determinante de 2ª ordem) o número real obtido pela diferença entre o produto dos elementos da diagonal principal e o produto dos elementos da diagonal secundária.

Então, determinante de $A = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$

Indica-se $\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$

Exemplo: $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}_{2x2}$

$\det A = 2.1 - 3.4 = 2 - 12$

$\det A = -10$

Observação: Dada a matriz A de ordem 1, define-se como determinante de A o seu próprio elemento, isto é:

$\det A = |A| = a_{11}$.

Propriedades: veja no livro texto.

Regras para o Cálculo de Determinantes.

- A Regra de Sarrus (somente para determinante de 3ª ordem)
- O Desenvolvimento de Laplace (método geral)
- Outros métodos

Matriz Adjunta

Cofatores e matriz dos cofatores

Dada uma matriz $\mathbf{A}$, lembramos que o cofator Δ_{ij} do elemento a_{ij} da matriz é $(-1)^{i+j}\det \mathbf{A}_{ij}$, onde $\mathbf{A}_{ij}$ é a submatriz de $\mathbf{A}$, obtida extraindo-se a i-ésima linha e j-ésima coluna. Com estes cofatores podemos formar uma nova matriz $\bar{\mathbf{A}}$, denominada *matriz dos cofatores* de $\mathbf{A}$.

$$\bar{\mathbf{A}} = [\Delta_{ij}]$$

Exemplo:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 4 \\ 1 & 6 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} = -19$$

$$\Delta_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 19, \ \dots \ \text{etc.}$$

$$\text{Então, } \bar{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} -19 & 19 & -19 \\ -5 & 10 & -11 \\ 4 & -8 & 5 \end{bmatrix}$$

Dada uma matriz quadrada $\mathbf{A}$, chamaremos de *matriz adjunta* de $\mathbf{A}$ à transposta da matriz dos cofatores de $\mathbf{A}$.

$$\text{adj } \mathbf{A} = \bar{\mathbf{A}}'$$

No exemplo anterior

$$\text{adj } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -19 & -5 & 4 \\ 19 & 10 & -8 \\ -19 & -11 & 5 \end{bmatrix}$$

Matriz Inversa

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\det A} adj A}$$

Exercício: Ache A^{-1} para a matriz A do exemplo acima.

Exercício resolvido:

Determinante de ordem 4, utilizando o desenvolvimento de Laplace e matriz inversa usando a matriz dos cofatores [acesso: 05/05/2022 - https://matrixcalc.org/pt/#%7B%7B0,2,3%7D,%7B4,5,6%7D,%7B7,8,9%7D%7D%5E(-1)]

Determinante de ordem 4, utilizando o desenvolvimento de Laplace

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ -1 & 0 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & -2 & 5 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{(1+2)} \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} \cancel{1} & \cancel{2} & \cancel{3} & \cancel{6} \\ -1 & \cancel{0} & 3 & 0 \\ 4 & \cancel{0} & -2 & 5 \\ 3 & \cancel{0} & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 8 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + -6 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = -90$$

Matriz inversa usando a matriz dos cofatores

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}^{(-1)} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & -7 & 4 \\ -1 & \frac{14}{3} & \frac{-8}{3} \end{pmatrix}$$

$$A^{(-1)} = \frac{1}{\det(A)} \cdot C^T = \frac{1}{\det(A)} \cdot \begin{pmatrix} C_{1,1} & C_{2,1} & C_{3,1} \\ C_{1,2} & C_{2,2} & C_{3,2} \\ C_{1,3} & C_{2,3} & C_{3,3} \end{pmatrix}$$ (?)

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 3$$

$$C_{1,1} = (-1)^{(1+1)} \cdot \begin{vmatrix} \cancel{0} & \cancel{2} & \cancel{3} \\ \cancel{4} & 5 & 6 \\ \cancel{7} & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1 \cdot (5 \cdot 9 - 6 \cdot 8) = -3$$ (?)

$$C_{1,2} = (-1)^{(1+2)} \cdot \begin{vmatrix} \cancel{0} & \cancel{2} & \cancel{3} \\ 4 & \cancel{5} & 6 \\ 7 & \cancel{8} & 9 \end{vmatrix} = -1 \cdot (4 \cdot 9 - 6 \cdot 7) = -1 \cdot (-6) = 6$$ (?)

$$C_{1,3} = (-1)^{(1+3)} \cdot \begin{vmatrix} \cancel{0} & \cancel{2} & \cancel{3} \\ 4 & 5 & \cancel{6} \\ 7 & 8 & \cancel{9} \end{vmatrix} = 1 \cdot (4 \cdot 8 - 5 \cdot 7) = -3$$ (?)

$$C_{2,1} = (-1)^{(2+1)} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = -1 \cdot (2 \cdot 9 - 3 \cdot 8) = -1 \cdot (-6) = 6$$

$$C_{2,2} = (-1)^{(2+2)} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1 \cdot (0 \cdot 9 - 3 \cdot 7) = -21$$

$$C_{2,3} = (-1)^{(2+3)} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = -1 \cdot (0 \cdot 8 - 2 \cdot 7) = -1 \cdot (-14) = 14$$

$$C_{3,1} = (-1)^{(3+1)} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1 \cdot (2 \cdot 6 - 3 \cdot 5) = -3$$

$$C_{3,2} = (-1)^{(3+2)} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = -1 \cdot (0 \cdot 6 - 3 \cdot 4) = -1 \cdot (-12) = 12$$

$$C_{3,3} = (-1)^{(3+3)} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1 \cdot (0 \cdot 5 - 2 \cdot 4) = -8$$

$$A^{(-1)} = \frac{1}{\det(A)} \cdot C^T = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 6 & -3 \\ 6 & -21 & 12 \\ -3 & 14 & -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & -7 & 4 \\ -1 & \frac{14}{3} & \frac{-8}{3} \end{pmatrix}$$