Momento Síncrono 9 - Data: 05/07/2022

Reposição_Unidade2: 07/07/2022.

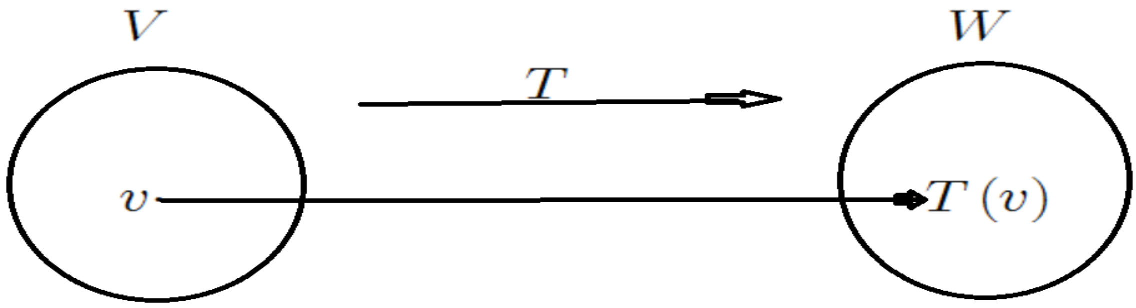
Postagem: Resumo das aulas 17 e 18 + 2 vídeos.

Principais assuntos de hoje:

a) Construindo uma Transformação Linear.

b) Transformação Linear Inversível – Isomorfismo.

Construindo uma transformação linear - Idéia:



$$\beta = \{v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n\} \qquad A = \{w_1, w_2, w_3, \ldots, w_n\}$$

$$Etapa1: \ T(v_1) = w_1 \quad , \ldots , \quad T(v_n) = w_n$$

$$Etapa2: \ v = a_1 v_1 + \ldots + a_n v_n$$

$$Etapa3: \ T(v) = a_1 T(v_1) + \ldots + a_n T(v_n)$$

$$Etapa4: \ \boxed{T(v) = a_1 w_1 + \ldots + a_n w_n}$$

Exemplo 1:

Qual é a transformação linear $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(1,0)=(1,\ 0)$ e $T(2,3)=(0,\ 1)$?

Vejamos: $\boxed{\beta_{\mathbb{R}^2} = \{(1,0),(2,3)\}}$ (Lado esquerdo).

$$(x,y) \overset{(*)}{=} a(1,0) + b(2,3)$$

$$\boxed{(x,y) = \left(x-\frac{2}{3}y\right)(1,0) + \frac{1}{3}y(2,3)}$$

$$(*)\begin{cases} a + 2b = x \\ \quad\ \ 3b = y \end{cases} \Leftrightarrow b=\frac{1}{3}y \text{ e } a+\frac{2}{3}y = x \Leftrightarrow a = x-\frac{2}{3}y.$$

$$\boxed{T(x,y) = \left(x-\frac{2}{3}y\right)T(1,0) + \frac{1}{3}yT(2,3)}$$

$$= \left(x-\frac{2}{3}y\right)(1,0) + \frac{1}{3}y(0,1)$$

$$\boxed{T(x,y) = \left(x-\frac{2}{3}y+0, 0+\frac{1}{3}y\right) = \left(x-\frac{2}{3}y,\ \frac{1}{3}y\right).}$$

Verificação:

$$T(1,0) = (1-0,0) = (1,0) \quad \text{OK!}$$

$$T(2,3) = (2-2,1) = (0,1) \quad \text{OK!}$$

Exemplo 2:

Qual é a transformação linear $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ tal que

$T(1,1,1)=(1,\ -1)$, $T(0,1,1)=(-1,\ 1)$ e $T(0,0,1)=(2,\ -2)$?

Vejamos: $\boxed{\beta_{\mathbb{R}^3}=\{(1,1,1),(0,1,1),(0,0,1)\}}$ (Lado esquerdo).

$$(x,y,z) \overset{(*)}{=} a(1,1,1) + b(0,1,1) + c(0,0,1)$$

$$(x,y,z) = x(1,1,1) + (y-x)(0,1,1) + (z-y)(0,0,1)$$

$$(*)\begin{cases} a = x \\ a + b = y \\ a + b + c = z \end{cases} \Leftrightarrow a=x,\ b=y-x \text{ e } c=z-y.$$

$$\boxed{T(x,y,z) = xT(1,1,1) + (y-x)T(0,1,1) + (z-y)T(0,0,1)}$$

$$T(x,y,z) = x(1,-1) + (y-x)(-1,1) + (z-y)(2,-2)$$

$$T(x,y,z) = (x-(y-x)+2(z-y)\ ,\ -x+(y-x)-2(z-y))$$

$$T(x,y,z) = (x-y+x+2z-2y\ ,\ -x+y-x-2z+2y)$$

$$\boxed{T(x,y,z) = (2x-3y+2z\ ,\ -2x+3y-2z).}$$

Verificação:

$$T(1,1,1) = (2-3+2,-2+3-2) = (1,-1) \quad \text{OK!}$$

$$T(0,1,1) = (0-3+2,0+3-2) = (-1,1) \quad \text{OK!}$$

$$T(0,0,1) = (0-0+2,-0+0-2) = (2,-2) \quad \text{OK!}$$

Transformação Linear Inversível – Isomorfismo

Lembrando: **Teorema do Núcleo e da imagem**

Seja $T: V \longrightarrow W$, uma Transformação Linear, então:

$$\boxed{\dim N(T) + \dim I_m(T) = \dim V. \quad \boxed{\text{Cuidado!}}}$$

Importante!

Seja $T: P_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^3$, uma Transformação Linear definida por $T(at^2 + bt + c) = (a, a+b, a+b+c)$. Calcule:

$T(t^2) = (1,1,1)$
$T(t) = (0,1,1)$
$T(1) = (0,0,1)$

$T(t^2 + 2t + 3) = (1, 1+2, 1+2+3) = (1,3,6)$

Isomorfismo – Continuação

Pergunta: a transformação linear $T: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $T(x,y,z) = (x-y,\ y-z,\ x-z)$ é um isomorfismo?

Verificação:

$$\begin{aligned} N(T) &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / T(x,y,z) = (0,\ 0,\ 0)\} \\ &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / (x-y,\ y-z,\ x-z) \overset{(*)}{=} (0,\ 0,\ 0)\right\} \\ &= \{(y,\ y,\ y)/y \in \mathbb{R}\} \\ &= \{y(1,\ 1,\ 1)/y \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

$[(1,\ 1,\ 1)]$. $\beta_{N(T)} = \{(1,\ 1,\ 1)\}$. $\boxed{\dim N(T) = 1.}$

Conclusão: T não é Injetora. Portanto, T não é um isomorfismo.

$$(*)\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & & & = & 0 \\ & & y & - & z & = & 0 \\ x & & & - & z & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right] \backsim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \backsim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

$p(A) = 2 = p(M) < 3 = n$. O sistema linear $(*)$ admite uma infinidade de soluções:

$$\boxed{S = \{(y,\ y,\ y)\,/ y \in \mathbb{R}\}.}$$

Mostre que a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(x, y) = (x + 2y,\ 3y)$ é um isomorfismo e determine $T^{-1}(x, y)$.

Prova:

$$\begin{aligned} N(T) &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / T(x,y) = (0,\ 0)\right\} \\ &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / (x + 2y,\ 3y) \overset{(*)}{=} (0,\ 0)\right\} \\ &= \{(0,\ 0)\}. \text{ Logo } T \text{ é injetora.} \end{aligned}$$

Como $\dim V = \dim \mathbb{R}^2 = 2 = \dim W$, concluimos que $\boxed{T \text{ é sobrejetora.}}$ Portanto, $\boxed{T \text{ é um isomorfismo.}}$

$$(*)\left\{\begin{array}{rcrcl} x & + & 2y & = & 0 \\ & & 3y & = & 0 \end{array}\right. . \quad \left[\begin{array}{rr|r} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{array}\right].$$

$p(A) = 2 = p(M) = n$. O sistema linear $(*)$ admite uma única solução:

$$x = y = 0.$$

$\boxed{\text{Determinação de } T^{-1}(x,y)\,.}$

Primeira etapa:

Base canônica de $\mathbb{R}^2$ (lado esquerdo): $\beta = \{(1,0),(0,1)\}$.

$$\begin{aligned} T(1,0) &= (1,0) &\Longrightarrow\quad T^{-1}(1,0) &= (1,0) \\ T(0,1) &= (2,3) &\Longrightarrow\quad T^{-1}(2,3) &= (0,1) \end{aligned}$$

Segunda etapa:

Base de $\mathbb{R}^2$ (lado direito): $\alpha = \{(1,0),(2,3)\}$.

$$\begin{aligned} (x,y) &= a(1,0) + b(2,3) \\ (x,y) &= \left(x - \frac{2}{3}y\right)(1,0) + \frac{1}{3}y(2,3) \end{aligned}$$

Atenção! $\begin{cases} a + 2b = x \\ \quad\;\; 3b = y \end{cases} \Leftrightarrow\ b = \dfrac{1}{3}y$ e $a + \dfrac{2}{3}y = x \Leftrightarrow a = x - \dfrac{2}{3}y.$

Terceira etapa:

$$\begin{aligned} T^{-1}(x,y) &= \left(x - \frac{2}{3}y\right)T^{-1}(1,0) + \frac{1}{3}yT^{-1}(2,3) \\ &= \left(x - \frac{2}{3}y\right)(1,0) + \frac{1}{3}y(0,1) \end{aligned}$$

$$\boxed{T^{-1}(x,y) = \left(x - \frac{2}{3}y, \frac{1}{3}y\right).}$$

Mostre que a transformação linear $T : P_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$ definida por $T\left(ax^2+bx+c\right) = (a-c,\ a+b+c,\ c)$ é um isomorfismo.

Prova:

$$\begin{aligned} N(T) &= \left\{\left(ax^2+bx+c\right) \in P_2(\mathbb{R}) / T\left(ax^2+bx+c\right) = (0,\ 0,\ 0)\right\} \\ &= \left\{\left(ax^2+bx+c\right) \in P_2(\mathbb{R}) / (a-c,\ a+b+c,\ c) = (0,\ 0,\ 0)\right\} \\ &= \left\{0x^2+0x+0\right\}. \text{ Logo } \boxed{T \text{ é injetora.}} \end{aligned}$$

Como $\dim P_2(\mathbb{R}) = 3 = \dim \mathbb{R}^3$, concluimos que $\boxed{T \text{ é sobrejetora.}}$ Portanto T é um isomorfismo.

Problema: Determinar a inversa de T, T^{-1}.

Primeira etapa:

Base canônica de $P_2(\mathbb{R})$: $\beta = \left\{x^2, x, 1\right\}$.

$$\begin{aligned} T\left(x^2\right) &= (1,1,0) &\Longrightarrow\quad T^{-1}(1,1,0) &= x^2 \\ T(x) &= (0,1,0) &\Longrightarrow\quad T^{-1}(0,1,0) &= x \\ T(1) &= (-1,1,1) &\Longrightarrow\quad T^{-1}(-1,1,1) &= 1 \end{aligned}$$

Segunda etapa:

Base de $\mathbb{R}^3$: $\alpha = \{(1,1,0), (0,1,0), (-1,1,1)\}$.

$$\boxed{\begin{aligned} (a,b,c) &= x(1,1,0) + y(0,1,0) + z(-1,1,1) \\ (a,b,c) &= (a+c)(1,1,0) + (-a+b-2c)(0,1,0) + c(-1,1,1). \end{aligned}}$$

$$\text{Atenção!} \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & & & - & z & = & a \\ x & + & y & + & z & = & b \\ & & & & z & = & c \end{array} \right. \Leftrightarrow \; x = a + c \;\text{ e }\; y = -a + b - 2c.$$

Terceira etapa:

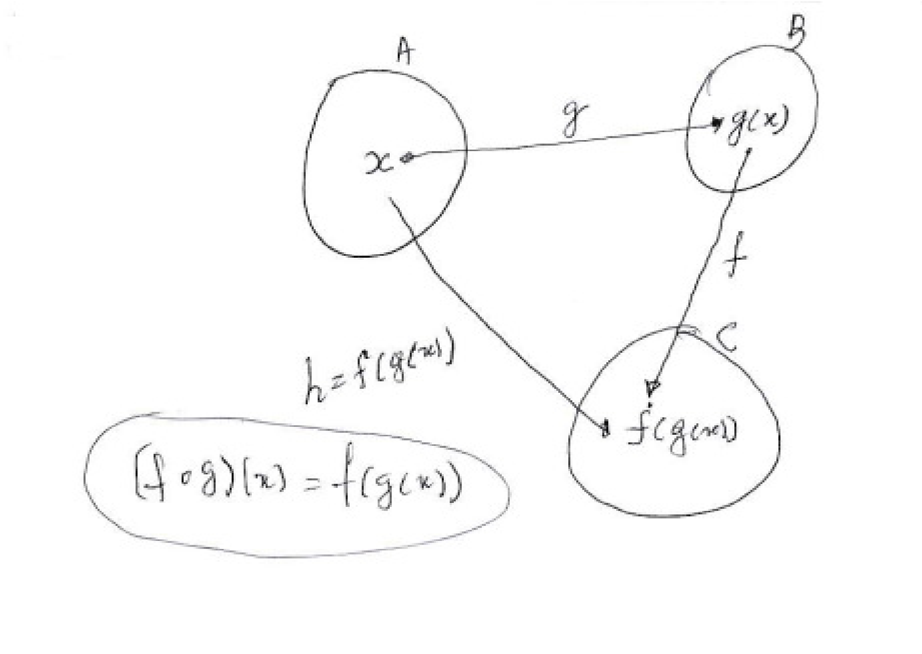
$$\boxed{T^{-1}(a,b,c) = (a+c)\,T^{-1}(1,1,0) + (-a+b-2c)\,T^{-1}(0,1,0) + cT^{-1}(-1,1,1)}$$

$$= (a+c)\,x^2 + (-a+b-2c)\,x + c\,(1)$$

$$\boxed{T^{-1}(a,b,c) = (a+c)\,x^2 + (-a+b-2c)\,x + c}$$

Composição de Transformações Lineares

É o mesmo procedimento da composição de funções reais. Veja o gráfico abaixo:



Exemplos de composição de Transformações Lineares

Considere as **Transformações Lineares** $S:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ e $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

definidas por $S(x,y) = (x-2y, y)$ e $T(x,y) = (2x, -y)$.

Determine: $S \circ T$, $T \circ S$ e $S \circ S$.

Solução:

$$\begin{aligned} (S \circ T)(x,y) &= S(T(x,y)) \\ &= S(2x, -y) \\ &= \boxed{(2x+2y, -y).} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (T \circ S)(x,y) &= T(S(x,y)) \\ &= T(x-2y, y) \\ &= \boxed{(2x-4y, -y).} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (S \circ S)(x,y) &= S(S(x,y)) \\ &= S(x-2y, y) \\ &= ((x-2y)-2y, y) \\ &= \boxed{(x-4y, y).} \end{aligned}$$

<u>Misturando os dois assuntos de hoje</u>

Exemplo: (Construindo uma transformação linear)

Qual é a T.L. $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que:

$T(1,1,1) = (1,-1)$; $T(0,1,1) = (0,-1)$ e $T(0,0,1) = (-2,0)$?

Sol.: seja $v = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, então

$$(x,y,z) = a(1,1,1) + b(0,1,1) + c(0,0,1) \overset{(*)}{\Leftrightarrow}$$

$$(x,y,z) = x(1,1,1) + (y-x)(0,1,1) + (z-y)(0,0,1) \Leftrightarrow$$

$$T(x,y,z) = xT(1,1,1) + (y-x)T(0,1,1) + (z-y)T(0,0,1)$$
$$= x(1,-1) + (y-x)(0,-1) + (z-y)(-2,0)$$
$$= (x + 2y - 2z, \cancel{-x} - y \cancel{+x})$$
$$= (x+2y-2z, -y)$$

Cuidado! Quando a base β dada não for canônica, tem muitos contas para serem feitos.

O sistema também pode ser complicado:

$$(*) \begin{cases} a = x \\ a+b = y \longrightarrow b = y - x \\ a+b+c = z \longrightarrow \cancel{x} + y - \cancel{x} + c = z \Leftrightarrow \end{cases}$$

$$\boxed{c = z - y}. \text{ Assim}$$

$$(x,y,z) = x(1,1,1) + (y-x)(0,1,1) + (z-y)(0,0,1)$$

Exemplo: (Construindo a transformação linear + Isomorfismo)

Seja $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, uma Transformação Linear TAL QUE $T(1,2,0) = (1,0,0)$, $T(0,1,2) = (0,1,0)$, $T(2,0,1) = (0,0,1)$.

a) Encontre $T(x,y,z)$

b) Mostre que T é um isomorfismo

c) Encontre $T^{-1}(x,y,z)$

a) Encontre *T(x,y,z)*

$$(x,y,z) = a(1,2,0) + b(0,1,2) + c(2,0,1) \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} a + 2c = x \\ 2a + b = y \\ 2b + c = z \end{cases} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & x \\ 2 & 1 & 0 & y \\ 0 & 2 & 1 & z \end{bmatrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & x \\ 0 & 1 & -4 & y-2x \\ 0 & 2 & 1 & z \end{array}\right] \sim$$

$$\begin{array}{cccc} a & b & c & \\ \end{array}$$
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & x \\ 0 & 1 & -4 & y-2x \\ 0 & 0 & 9 & 4x-2y+z \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} 9c = 4x - 2y + z \Leftrightarrow c = \dfrac{4x-2y+z}{9} \\ b = y - 2x + 4c \\ b = y - 2x + \frac{16}{9}x - \frac{8}{9}y + \frac{4}{9}z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow b = \frac{-2x + y + 4z}{9} \qquad a = x - 2c = x - \left(\frac{8x}{9} - \frac{4y}{9} + \frac{2z}{9}\right)$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{x + 4y - 2z}{9}$$

$$(x,y,z) = \left(\frac{x+4y-2z}{9}\right)(1,2,0) + \left(\frac{-2x+y+4z}{9}\right)(0,1,2) + \left(\frac{4x-2y+z}{9}\right)(2,0,1)$$

$$T(x,y,z) = (\quad)T(1,2,0) + (\quad)T(0,1,2) + (\quad)T(2,0,1)$$

$$T(x,y,z) = (\quad)(1,0,0) + (\quad)(0,1,0) + (\quad)(0,0,1)$$

$$\boxed{T(x,y,z) = \left(\frac{x+4y-2z}{9}, \frac{-2x+y+4z}{9}, \frac{4x-2y+z}{9}\right).}$$

b) Mostre que *T* é um isomorfismo

Basta mostrar que $N(T)=\{(0,0,0)\}$ isto é
T é injetora, pois $\dim V = 3 = \dim \mathbb{R}^3 = \dim$

$$N(T)=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / (T(x,y,z)=(0,0,0)\}$$
$$=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / \left(\frac{x+4y-2z}{9}, \frac{-2x+y+4z}{9}, \frac{4x-2y+z}{9}\right)\overset{*}{=}(0,0,0)\}$$
$$=\{(0,0,0)\}.$$ Logo T é injetora. Logo T é também sobrejetora
$\leftarrow$ T é um isomorfismo

$$(*)\begin{cases} x+4y-2z=0 \\ -2x+y+4z=0 \\ 4x-2y+z=0 \end{cases} \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 4 & 0 \\ 4 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & -18 & 9 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 0 \end{array}\right] \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \Leftrightarrow z=y=x=0$$

c) Encontre $T^{-1}(x,y,z)$

ENCONTRANDO $T^{-1}(x,y,z)$.

Base Canônica

$$T(1,2,0)=(1,0,0) \rightarrow T^{-1}(1,0,0)=(1,2,0)$$
$$T(0,1,2)=(0,1,0) \rightarrow T^{-1}(0,1,0)=(0,1,2)$$
$$T(2,0,1)=(0,0,1) \rightarrow T^{-1}(0,0,1)=(2,0,1)$$
$$T^{-1}(x,y,z)=x\,T^{-1}(1,0,0)+y\,T^{-1}(0,1,0)+z\,T^{-1}(0,0,1)$$

$$T^{-1}(x,y,z)=x(1,2,0)+y(0,1,2)+z(2,0,1)$$
$$\boxed{T^{-1}(x,y,z)=(x+2z,\ 2x+y,\ 2y+z)}$$

\#

Ufa!