Álgebra Linear I – Prof. José Luiz Neto – Resumo_A11

Livro de preparação do resumo: Álgebra Linear → Boldrine/Costa e Figueiredo/Wetzler (BOLDRINI, J. L. et al. Álgebra Linear. 3 ed. São Paulo: Harbra, 1986) e https://www.ufjf.br/andre_hallack/files/2018/04/linear17.pdf, acessado no dia 17/08/2020.

Soma e Interseção de subespaços vetoriais. Combinação Linear e Subespaço Gerado.

Nota: Os teoremas e corolários que constam neste assunto serão denominados (chamados) de **resultados importantes**, pois o principal objetivo é apresentar um resumo e não fazer demonstrações.

Definição de soma de subespaços vetoriais

Dados k subconjuntos $S_1, S_2, \ldots, S_k \subset V$ (espaço vetorial), definimos sua SOMA como

$$S_1 + S_2 + \ldots + S_k = \{v = u_1 + u_2 + \ldots + u_k : u_i \in S_i\} \subset V.$$

Resultado importante!

Se W_1 e W_2 são subespaços de um espaço vetorial V, então sua soma $W_1 + W_2$ é também um subespaço de V.

Definição de Soma Direta

Sejam W_1 e W_2 dois subespaços de um espaço V. Quando $W_1 \cap W_2 = \{0\}$ então $W_1 + W_2$ é chamada SOMA DIRETA DE W_1 E W_2 e denotada por $W_1 \oplus W_2$.

Exemplo 1

Sejam $W_1 = \{(x, y, 0) : x, y \in \mathbb{R}\}$ e $W_2 = \{(0, 0, z) : z \in \mathbb{R}\}$ subespaços do $\mathbb{R}^3$.

É fácil de ver que

$$\mathbb{R}^3 = W_1 \oplus W_2 .$$

Interseção de subespaços vetoriais

Se W_1 e W_2 são subespaços de um espaço vetorial V, então sua interseção $w_1 \cap W_2$ é também um subespaço de V.

Exemplo 1

Consideremos os conjuntos $W_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 ;\ 3x - y + 2z = 0\} \subset \mathbb{R}^3$ e $W_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 ;\ x + 2y + z = 0\} \subset \mathbb{R}^3$, subespaços de $\mathbb{R}^3$

É fácil ver que a interseção $W_1 \cap W_2$ é dada por

$$W_1 \cap W_2 = \left\{\ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 ;\ 3x - y + 2z = 0 \ \text{ e } \ x + 2y + z = 0 \right\}$$

é também um subespaço vetorial de R^3.

Cuidado! A união de dois subespaços nem sempre será um subespaço.

Definição de Combinação Linear

SEJAM V UM ESPAÇO VETORIAL REAL, $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$ E $a_1, a_2, \ldots, a_n$ NÚMEROS REAIS. ENTÃO O VETOR

$$\boxed{v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 + \cdots + a_n v_n}$$

É UM ELEMENTO DE V CHAMADO COMBINAÇÃO LINEAR DE $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n$.

Problema: Queremos saber o seguinte: dados os vetores v_1, v_2, ..., v_n, a equação acima admite solução?

Exemplo 1

Seja $V = \mathbb{R}^3$. Consideremos os vetores $v_1 = (1,2,0)$ e $v_2 = (0,1,1)$.

O vetor $u = (-3,-1,5)$ é uma combinação linear de v_1 e v_2, pois $u = (-3).v_1 + 5.v_2$.
De fato: $(-3).(1,2,0) + 5.(0,1,1) = (-3,-6,0) + (0,5,5) = (-3,-1,5) = u$.

Já o vetor $w = (2,3,-3)$ não é combinação linear de v_1 e v_2, pois não existem $a,b \in \mathbb{R}$ tais que $w = a.v_1 + b.v_2$.
De fato, para que um vetor $v = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ seja combinação linear de v_1 e v_2, devemos ter $a,b \in \mathbb{R}$ tais que $(x,y,z) = a.(1,2,0) + b.(0,1,1) = (a, 2a+b, b)$, ou seja, devemos ter

$$\begin{cases} a = x \\ 2a + b = y \\ b = z \end{cases}$$

que é um sistema linear que não admite solução para $x = 2$, $y = 3$ e $z = -3$. Lembre-se que as incógnitas são *a* e *b*. Faça a verificação.

Subespaço Gerado

Uma vez fixados vetores $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ em V, o conjunto W de todos os vetores de V que são combinação linear destes, é um subespaço vetorial. (Mostre isto como exercício.) W é chamado *subespaço gerado por* $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ e usamos a notação

$$W = [\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n]$$

Note que, formalmente, podemos escrever

$$W = [\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n] = \{\mathbf{v} \in V;\ \mathbf{v} = a_1\mathbf{v}_1 + \ldots + a_n\mathbf{v}_n,\ a_i \in \mathbf{R},\ 1 \leqslant i \leqslant n\}$$

Exemplo 1

Se $V = \mathbb{R}^3$, $v \in V$, $v \neq 0$. então,
$[v] = \{av/a \in \mathbb{R}\}$, isto é,
$[v]$ é a reta que contém o vetor v.

Exemplo 2

Se $V = \mathbb{R}^3$, $v_1, v_2 \in V$, $\alpha v_1 \neq v_2$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, então,
$[v_1, v_2] = \{a_1v_1 + a_2v_2/a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$, isto é,
$[v_1, v_2]$ é o plano determinado por v_1 e v_2,
e que passa pela a origem; $0 = (0, 0, 0)$.

Problema

Dados $V = \mathbb{R}^3$, $v_1, v_2 \in V$, $\alpha v_1 \neq v_2$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$,

encontrar a expressão da equação do plano

determinado por v_1 e v_2.

Exemplo 3

Resolva o problema para $v_1 = (1,2,0)$ e $v_2 = (0,1,1)$

Solução:

$$(x,y,z) = a(1,2,0) + b(0,1,1) \iff$$

$$(*)\begin{cases} a = x \\ 2a + b = y \\ b = z \end{cases} ; \quad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x \\ 2 & 1 & y \\ 0 & 1 & z \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y-2x \\ 0 & 1 & z \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y-2x \\ \hline 0 & 0 & y-2x-z \end{array}\right).$$

$(*)$ SÓ ADMITE SOLUÇÃO SE

$$y - 2x - z = 0 \iff \boxed{y = 2x + z}.$$

Seja $W = [v_1, v_2]$, o subespaço gerado por v_1 e v_2.

Então,

$$W = [v_1, v_2] = \{\, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \; ; \; y = 2x + z \,\} = \{\, (x, 2x+z, z) \; ; \; x, z \in \mathbb{R}\}$$

Observemos que W (subespaço do $\mathbb{R}^3$ gerado por v_1 e v_2 $=$ conjunto de todas as combinações lineares de v_1 e v_2) é um plano que passa pela origem: