Livro de preparação do resumo: Álgebra Linear → Boldrine/Costa e Figueiredo/Wetzler
(BOLDRINI, J. L. et al. Álgebra Linear. 3 ed. São Paulo: Harbra, 1986)

Teorema de Cayley-Hamilton. Polinômio Minimal

Definição: Seja $p(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ um polinômio e $\mathbf{A}$ uma matriz quadrada. Então $p(\mathbf{A})$ é a matriz

$$p(\mathbf{A}) = a_n \mathbf{A}^n + \ldots + a_1 \mathbf{A} + a_0 \mathbf{I}.$$

Quando $p(\mathbf{A}) = \mathbf{0}$, dizemos que o polinômio *anula* a matriz $\mathbf{A}$.

Exemplo: Sejam $p(x) = x^2 - 9$ e $q(x) = 2x + 3$.

Se $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$,

$$p(\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}^2 - 9\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e $q(\mathbf{A}) = 2\begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$

Então, $p(x)$ anula $\mathbf{A}$ e $q(x)$ não anula $\mathbf{A}$.

Definição: Seja $\mathbf{A}$ uma matriz quadrada. O *polinômio minimal* de $\mathbf{A}$ é um polinômio

$$m(x) = x^k + a_{k-1}x^{k-1} + \ldots + a_0$$

tal que

i) $m(\mathbf{A}) = \mathbf{0}$, isto é, $m(x)$ anula a matriz $\mathbf{A}$.
ii) $m(x)$ é o polinômio de menor grau entre aqueles que anulam $\mathbf{A}$.

Observe que o coeficiente do termo x^k do polinômio minimal é 1 ($a_k = 1$).

Sejam $T: V \to V$ um operador linear e α uma base qualquer de V de dimensão n. Então T é diagonalizável se, e somente se o polinômio minimal de $[T]^{\alpha}_{\alpha}$ é da forma

$$m(x) = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2) \ldots (x - \lambda_r)$$

com $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ distintos.

Muito Importante!

Teorema de Cayley-Hamilton: Seja $T : V \to V$ um operador linear, α uma base de V e $p(x)$ o polinômio característico de T. Então

$$p([T]_{\alpha}^{\alpha}) = \mathbf{0}$$

Isto significa que o polinômio característico é um candidato ao polinômio minimal

As raízes do polinômio minimal são as mesmas raízes (distintas) do polinômio característico.

Sejam $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ os autovalores distintos de um operador linear T. Então T será diagonalizável se, e somente se o polinômio

$$(x - \lambda_1)(x - \lambda_2) \ldots (x - \lambda_r)$$

anular a matriz de T.

Exemplo: O operador linear $T : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ definido por $T(x, y, z, t) = (3x - 4z, 3y + 5z, -z, -t)$ é diagonalizável?

Resolução: Seja $\alpha = \{(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\}$ a base canônica. Então a matriz

$$[T]_{\alpha}^{\alpha} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Calculemos o polinômio característico

$$p(\lambda) = \det([T]_{\alpha}^{\alpha} - \lambda I) = (3 - \lambda)^2 (-1 - \lambda)^2.$$

Os autovalores são $\lambda_1 = 3$ e $\lambda_2 = -1$, ambos com multiplicidade 2. Então, os condidatos para o polinômio minimal são

$$\begin{aligned} p_1(x) &= (x - 3)(x + 1) \\ p_2(x) &= (x - 3)^2 (x + 1) \\ p_3(x) &= (x - 3)(x + 1)^2 \\ p_4(x) &= (x - 3)^2 (x + 1)^2 \end{aligned}$$

Notamos que $p_1([T]_{\alpha}^{\alpha}) = \mathbf{0}$ e é, dentre os candidatos, o de menor grau. Então

$$p_1(x) = (x - 3)(x + 1)$$

é o polinômio minimal. Portanto, T é diagonalizável, isto é, existe uma base β de autovetores e nesta base

$$[T]_{\beta}^{\beta} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Exemplo 2:

Determine os autovalores do operador $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definido por $T(x,y) = (-3x + 4y, -x + 2y)$.

Sol. A matriz de T é $A = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$. $p(\lambda) = \det(A - \lambda I) \Leftrightarrow$

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} -3-\lambda & 4 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (-3-\lambda)(2-\lambda) + 4 \Leftrightarrow$$

$p(\lambda) = \lambda^2 + \lambda - 6 + 4 \Leftrightarrow p(\lambda) = \lambda^2 + \lambda - 2$. $p(\lambda) = 0 \Leftrightarrow$

$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -2$ ou $\lambda = 1$. Assim, os autovalores de T são: $\boxed{-2 \text{ e } 1.}$

Determinação dos autovetores associados:

$$p/\lambda = -2; \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -x + 4y = 0 \\ -x + 4y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 4y.$$

$v = (4y, y); y \neq 0$. $V_{-2} = \{(4y, y) / y \in \mathbb{R}\} = \{y(4,1) / y \in \mathbb{R}\}$

$\Leftrightarrow V_{-2} = [(4,1)]$; $\beta_{V_{-2}} = \{(4,1)\}$.

$$p/\lambda = 1; \begin{bmatrix} -4 & 4 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -4x + 4y = 0 \\ -x + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow y = x.$$

$w = (x, x); x \neq 0$. $V_1 = \{(x,x) / x \in \mathbb{R}\} = \{x(1,1) / x \in \mathbb{R}\} \Leftrightarrow$

$V_1 = [(1,1)]$; $\beta_{V_1} = \{(1,1)\}$.

Importante! $\beta = \{(4,1), (1,1)\}$ é uma base de $V = \mathbb{R}^2$

O polinômio minimal de T é *m(x) = (x-1)(x+2)*. Faça a verificação.

Exemplo 3: **Vamos mostrar que T é diagonalizável e encontrar o polinômio minimal de T.**

Seja $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o operador linear definido pela matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. Determine os autovalores de T e os subespaços associados.

Sol.: $p(\lambda) = \det(A + \lambda I) = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & 2 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 2 & 0 & \lambda-4 \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} \lambda-1 & 2 \\ 2 & \lambda-4 \end{vmatrix} \Leftrightarrow$

$p(\lambda) = \lambda[(\lambda-1)(\lambda-4)-4] = \lambda(\lambda^2-5\lambda) = \lambda^2(\lambda-5)$. $p(\lambda)=0 \Leftrightarrow$
$\lambda^2(\lambda-5)=0 \Leftrightarrow \lambda^2=0$ ou $\lambda-5=0 \Leftrightarrow \lambda=0$ ou $\lambda=5$. ASSIM $\lambda=0$ e $\lambda=5$ são os autovalores de T.

AUTOVETORES:

p/ $\lambda=0$; $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -x+2z=0 \\ 2x-4z=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=2z$; y-livre; z-livre

$V_0 = \{(2z,y,z) / y,z \in \mathbb{R}\} = [(2,0,1),(0,0,1)]$; $\begin{cases} \beta_{V_0} = \{(2,0,1),(0,0,1)\} \\ \boxed{\dim V_0 = 2.} \end{cases}$

p/ $\lambda=5$; $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x+2z=0 \\ 5y=0 \\ 2x+z=0 \end{cases} \Leftrightarrow z=-2x$; $y=0$; z-livre.

$V_5 = \{(x,0,-2x) \mid x \in \mathbb{R}\} = [(1,0,-2)]$; $\beta_{V_5} = \{(1,0,-2)\}$; $\boxed{\dim V_5 = 1}$

Importante! $\beta = \{(2,0,1),(0,0,1),(1,0,-2)\}$ é uma base de $\mathbb{R}^3$ constituída somente de autovetores de T.

Assim, concluímos que T é diagonalizável.

Candidatos ao polinômio minimal:

$(i)\ m_1(x) = x(x-5) \qquad (ii)\ m_2(x) = x^2(x-5)$

Verificação:

$$m_1(A) = A(A - 5I)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix} - 5 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right]$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & 0 & -2 \\ 0 & -5 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Isto mostra que $m_1(x) = x(x-5)$
é o polinômio minimal de T.

Exemplo 4: **Exemplo de um operador linear que não é diagonalizável.**

Seja $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o operador linear definido por $T(x,y,z) = (y+2z, 3z, 0)$. Então,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad p(\lambda) = \det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 2 \\ 0 & -\lambda & 3 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3.$$

$p(\lambda) = 0 \Leftrightarrow -\lambda^3 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0$ é o único autovalor.

Autovetores associados a λ:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} y + 2z = 0 \\ 3z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = y = 0 \\ x - \text{livre}. \end{cases}$$

$V_0 = \{(x,0,0) / x \in \mathbb{R}\} = [(1,0,0)]$; $\beta_{V_0} = \{(1,0,0)\}$; $\dim V_0 = 1$.

CONCLUSÃO: A multiplicidade algébrica de $\lambda = 0$ é $\underline{3}$ e a multiplicidade geométrica de $\lambda = 0$ é $\underline{1}$.

Como não é possível encontar uma base de $\mathbb{R}^3$ constituida apenas de autovetores de T, concluimos que T não é diagonalizável.

Exercício: Encontre o polinômio minimal de T.