Discretização

Sistemas Lineares

Péricles Rezende Barros

Controle Digital

Introdução

Modelos contínuos

Modelos discretos: o computador recebe medições em tempo discreto e transmite novos sinais de controle em tempos discretos

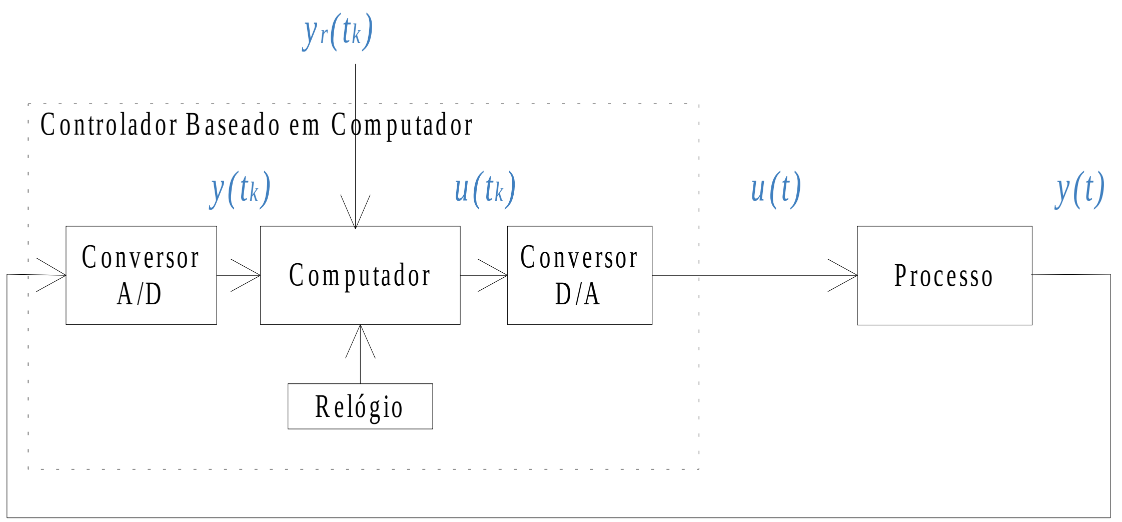


Figure 1: Sistemas de Controle por Computador

Amostragem

- Como descrever um sistema contínuo no tempo conectado a um computador via conversores A/D e D/A.
  - Os sinais no computador são seqüências de números $\{u(t_k)\}$ e $\{y(t_k)\}$.
  - Conversor analógico-digital com segurador de ordem zero

$$\{u(t_k) = u_{t_k}\} \quad k = \{\cdots, -1, 0, 1, \cdots\}, \quad t_k \leq t \leq t_{k+1}.$$

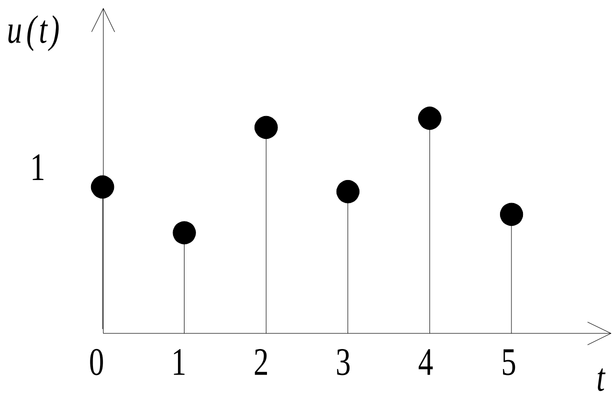


Figure 2: Sinal digital

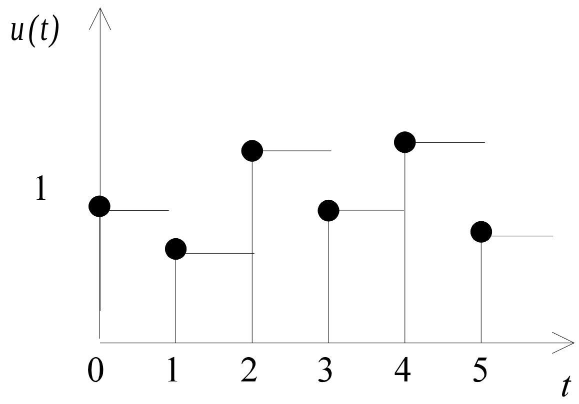
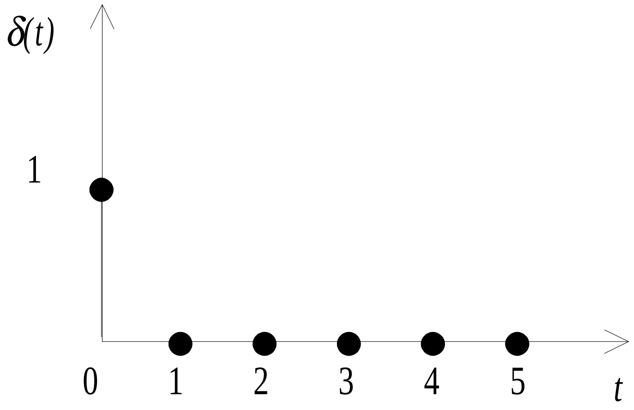


Figure 3: Segurador de ordem zero (First-order-hold)



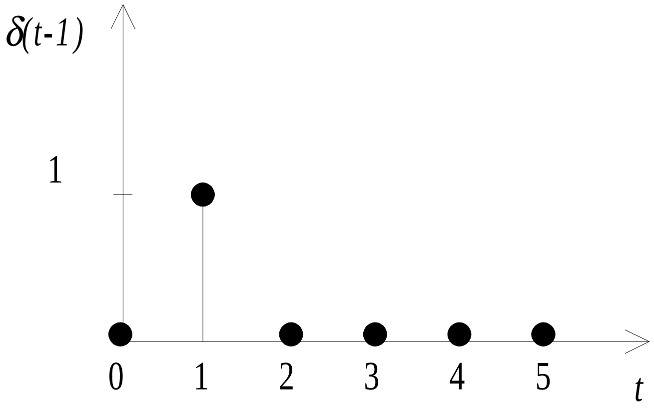


Figure 4: Pulso unitário

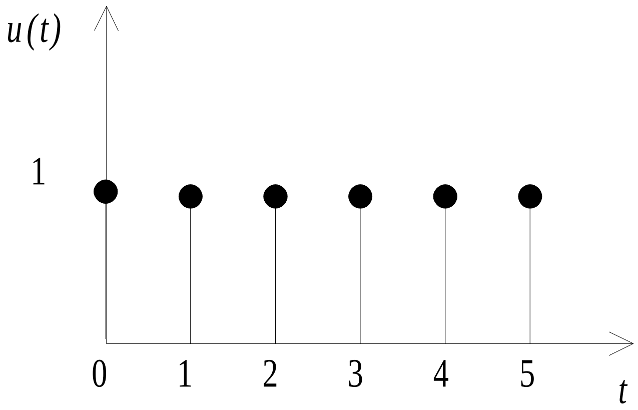


Figure 5: Degrau unitário

Solução de Equações de Estado

Considere a equação de estado linear e invariante no tempo (LIT)

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \tag{1}$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \tag{2}$$

onde A, B, C, e D são, matrizes constantes $n \times n$, $n \times p$, $q \times n$ e $q \times p$ respectivamente. O problema é encontrar a solução excitada pelo estado inicial $x(0)$ e pela entrada $u(t)$. Usaremos a seguinte propriedade

$$\frac{d}{dt}e^{At} = Ae^{At} = e^{At}A$$

para desenvolver a solução. Premultiplicando e^{-At} em ambos os lados de (1) resulta

$$e^{-At}\dot{x}(t) - e^{-At}Ax(t) = e^{-At}Bu(t)$$

que implica

$$\frac{d}{dt}\left(e^{-At}x(t)\right) = e^{-At}Bu(t)$$

e integrando de 0 a t leva

$$e^{-A\tau}x(\tau)|_{\tau=0}^{t} = \int_0^t e^{-A\tau}Bu(\tau)d\tau$$

Assim temos

$$e^{-At}x(t) - e^0x(0) = \int_0^t e^{-A\tau}Bu(\tau)d\tau \tag{3}$$

Como a inversa de e^{-At} é e^{At} e $e^0 = I$ então

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{-A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau \tag{4}$$

Para verificar se isto é verdade devemos mostrar que (4) satisfaz (1) e a condição inicial $x(t) = x(0)$ para $t = 0$. Inicialmente para $t = 0$ temos

$$x(0) = e^{A\cdot 0}x(0) = e^0x(0) = Ix(0) = x(0)$$

Assim (4) satisfaz a condição inicial. Usaremos a equação

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{t_0}^{t} f(t,\tau)d\tau = \int_{t_0}^{t}\left(\frac{\partial}{\partial t}f(t,\tau)\right)d\tau + f(t,\tau)|_{\tau=t} \tag{5}$$

para mostrar que (4) satisfaz (1). Derivando (4) e usando (5), obtemos

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \frac{d}{dt}\left[e^{At}x(0) + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau\right] \\ &= Ae^{At}x(0) + \int_0^t Ae^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau + e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)|_{\tau=t} \\ &= A\left(e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau\right) + e^{A\cdot 0}Bu(\tau)\end{aligned}$$

que torna-se, depois de substituido em (4),

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

A solução de 2 pode ser obtida pela substituição de (4) em (2) como

$$y(t) = Ce^{At}x(0) + C\int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau + Du(t) \tag{6}$$

Estas soluções são calculadas diretamente no dominio do tempo. Elas podem ser calculadas também pelo uso da transformada de Laplace em (1) e (2),

$$X(s) = (sI - A)^{-1}[x(0) + BU(s)]$$

$$Y(s) = C(sI - A)^{-1}[x(0) + BU(s)] + DU(s)$$

Como $X(s)$ e $Y(s)$ são computadas algebricamente, suas transformações inversas levam a soluções no dominio do tempo.

Discretização

Sistema na representação no espaço de estados

$$\frac{d}{dt}x(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t).$$

- Dado o estado no tempo t_k, o estado no tempo futuro t é dado por

$$x(t) = e^{A(t-t_k)}x(t_k) + \int_{t_k}^{t} e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)\,d\tau.$$

  - Isto dá o comportamento entre amostras.
- Para $t = t_{k+1}$

$$\begin{aligned} x(t_{k+1}) &= e^{A(t_{k+1}-t_k)}x(t_k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{A(t_{k+1}-\tau)}Bu(\tau)\,d\tau \\ &= e^{A(t_{k+1}-t_k)}x(t_k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{A(t_{k+1}-\tau)}d\tau Bu(t_k) \\ &= A_d(t_{k+1}, t_k)\,x(t_k) + B_d(t_{k+1}, t_k)\,u(t_k). \end{aligned}$$

O vetor de estados no tempo t_{k+1} é uma função linear de $x(t_k)$ e $u(t_k)$. A entrada e saída podem ser consideradas amostradas no mesmo instante. Então

$$x(t_{k+1}) = A_d(t_{k+1}, t_k)\, x(t_k) + B_d(t_{k+1}, t_k)\, u(t_k)$$
$$y(t_k) = Cx(t_k) + Du(t_k)$$

$$A_d(t_{k+1}, t_k) = e^{A(t_{k+1}-t_k)}$$
$$B_d(t_{k+1}, t_k) = \int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{A(t_{k+1}-\tau)} d\tau B.$$

Amostragem periódica, com período $t_k = kT$

$$x(kT+T) = A_d x(kT) + B_d u(kT)$$
$$y(kT) = Cx(kT) + Du(kT)$$

$$A_d = e^{AT} = I + AT + \frac{A^2T^2}{2!} + \cdots$$
$$B_d = \int_0^T e^{A\tau} d\tau B.$$

Calculo de A_d e B_d

- Métodos
  - Expansão em série da exponencial da matriz
  - Transformada de Laplace
  - Teorema de Cayley-Hamilton
  - Transformação para forma de Jordan

$$\Psi = \int_0^T e^{A\tau} d\tau = IT + \frac{AT^2}{2!} + \frac{A^2T^3}{3!} + \cdots$$

então

$$A_d = I + A\Psi$$

$$B_d = \Psi B$$

Modelo Discreto no Tempo

Por simplicidade

$$
\begin{aligned}
x(t+1) &= Ax(t) + Bu(t) \\
y(t) &= Cx(t) + Du(t)
\end{aligned}
$$

Estrutura similar à do sistema contínuo no tempo

Derivada é subustituida por avanço no tempo

Simulação digital é direta sem precisar utilizar aproximações (da integral)

Solução da Equação

Assuma que para um tempo inicial t_0 são conhecidos $y(t_0)$, $x(t_0)$ e $u(t_0)$. Então a solução da equação de estados é dada por

$$x(t) = A^{t-t_0} x(t_0) + \sum_{k=t_0}^{t-1} A^{t-k-1} B u(k).$$

Além disso, a saída é dada por

$$y(t) = CA^{t-t_0} x(t_0) + \sum_{k=t_0}^{t-1} CA^{t-k-1} B u(k) + Du(t)$$

Prova. Assuma $t = t_0 + n$

$$x(t_0+1) = Ax(t_0) + Bu(t_0)$$

$$x(t_0+2) = Ax(t_0+1) + Bu(t_0+1)$$

$$= A^2 x(t_0) + ABu(t_0) + Bu(t_0+1)$$

$$x(t) = A^n x(t_0) + A^{n-1} Bu(t_0) + A^{n-2} Bu(t_0+1) + \cdots + Bu(t-1).$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

- Resposta ao pulso ($x(t_0) = 0$)

$$u(t) = \delta(t) = \begin{cases} 1 & t = 0 \\ 0 & t \neq 0 \end{cases} .$$

$$y(t_0) = D$$

$$y(t) = CA^{t-t_0-1}B \quad t > t_0$$

- Resposta a condições iniciais

$$y(t) = CA^{t-t_0}x(t_0)$$

Modelos Entrada-Saída Discretos no Tempo

Considere o modelo

$$x(t+1) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

Defina o operador deslocamento avanço q como

$$qx(t) = x(t+1)$$

De modo similar defina o operador deslocamento atraso q^{-1} como

$$q^{-1}x(t) = x(t-1)$$

A representação entrada-saída pode ser representada de forma compacta como

$$qx(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$(qI - A)x(t) = Bu(t)$$

$$
\begin{aligned}
H(q) &= C(qI-A)^{-1}B+D \\
&= \frac{C\,Adj\,(qI-A)\,B}{\det(qI-A)}+D \\
&= \frac{B(q)}{A(q)}
\end{aligned}
$$

- Equação característica de um sistema

$$A(q)=\det(qI-A)=0$$

- Modelos Entrada-Saída

$$A(q)\,y(k)=B(q)\,u(k)$$

onde

$$
\begin{aligned}
A(q) &= q^n+a_{n-1}q^{n-1}+\cdots+a_1q+a_0 \\
B(q) &= b_mq^m+b_{m-1}q^{m-1}+\cdots+b_1q+b_0.
\end{aligned}
$$

Implementação/Simulação

Formas equivalentes

$$y(t+n)+a_{n-1}y(t+n-1)+\cdots+a_0y(t)=b_mu(t+m)+b_{m-1}u(t+m-1)+\cdots+b_0u(t)$$

$$y(t)+a_{n-1}y(t-1)+\cdots+a_0y(t-n)=b_mu(t-d)+b_{m-1}u(t-d-1)+\cdots+b_0u(t-n)$$

onde $d=n-m$.

$$y(t)=-a_{n-1}y(t-1)-\cdots-a_0y(t-n)+b_mu(t-d)+b_{m-1}u(t-d-1)+\cdots+b_0u(t-n)$$

Deslocar $y(t-i)$ para $y(t-i-1)$ e $u(t-j)$ para $u(t-j-1)$.

Amostragem de sistemas com atrasos

Considere o sistema contínuo no tempo na representação no espaço de estados com atraso de transporte no sinal de entrada,

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t-\tau)$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t).$$

Quando o atraso de transporte é inferior ao período de amostragem, i.e., $\tau \leq T$, o sistema discreto equivalente é dado por

$$x(k+1) = A_d x(k) + B_{1d} u(k) + B_{0d} u(k-1)$$
$$y(k) = Cx(k) + Du(k)$$

onde

$$
\begin{aligned}
A_d &= e^{AT} \\
B_{0d} &= e^{A(T-\tau)} \int_0^{\tau} e^{A\sigma} d\sigma B \\
B_{1d} &= \int_0^{T-\tau} e^{A\sigma} d\sigma B.
\end{aligned}
$$

Se $\tau > T$ então separa-se $\tau = \tau' + dT$ e então procede-se como acima para obter

$$
\begin{aligned}
x(k+1) &= A_d x(k) + B_{1d} u(k-d) + B_{0d} u(k-d-1) \\
y(kT) &= Cx(kT) + Du(kT)
\end{aligned}
$$

onde

$$
\begin{aligned}
A_d &= e^{AT} \\
B_{1d} &= e^{A\left(T-\tau'\right)} \int_0^{\tau'} e^{A\sigma} d\sigma B \\
B_{0d} &= \int_0^{T-\tau'} e^{A\sigma} d\sigma B.
\end{aligned}
$$

Modelos Discretos no Tempo no Operador δ

- Representação no espaço de estados

Considere o modelo discreto no tempo no operador q

$$x(t+1) = A_d x(t) + B_d u(t)$$
$$y(t) = C_d x(t) + D_d u(t).$$

Defina o operador δ como

$$\delta f(t) = \frac{f(t+1) - f(t)}{T} = \left(\frac{q-1}{T}\right) f(t)$$

onde T é o período de amostragem.

Rearranjando a equação de estados obtêm-se a representação em variáveis de estado discreta no tempo no operador δ

$$\delta x(t) = A_\delta x(t) + B_\delta u(t)$$
$$y(t) = C_\delta x(t) + D_\delta u(t)$$

onde

$$
\begin{aligned}
A_\delta &= \frac{A_d - I}{T} = \frac{e^{AT} - I}{T} \\
&= A + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{A^k T^{k-1}}{k!} \\
B_\delta &= \frac{B_d}{T} = \frac{1}{T}\Psi B \\
&= \frac{1}{T}\left(IT + \frac{AT^2}{2!} + \frac{A^2T^3}{3!} + \cdots \right) B \\
&= \left(I + \frac{AT}{2!} + \frac{A^2T^2}{3!} + \cdots \right) B.
\end{aligned}
$$

Note que, quando $T \to 0$, $A_\delta \to A$, e $B_\delta \to B$ enquanto $A_q \to I$, e $B_q \to 0$.

Representação entrada-saída

Similarmente ao caso do operador q

$$H(\delta) = C_\delta (\delta I - A_\delta)^{-1} B_\delta + D_\delta$$
$$= \frac{C_\delta Adj(\delta I - A_\delta) B_\delta}{\det(\delta I - A_\delta)} + D_\delta$$
$$= \frac{B(\delta)}{A(\delta)}$$

Equação característica de um sistema é dada por

$$A(\delta) = \det(qI - A_\delta) = 0$$

Modelos Entrada-Saída

$$A(\delta) y(k) = B(\delta) u(k)$$

onde

$$A(\delta) = \delta^n + a_{n-1}\delta^{n-1} + \cdots + a_1\delta + a_0$$
$$B(q) = b_m\delta^m + b_{m-1}\delta^{m-1} + \cdots + b_1\delta + b_0.$$

Implementação/ Simulação

Se o sistema está na representação entrada-saída, transforme para a forma canônica de controlador e implemente

$$y(t) = Cx(t)$$

$$z(t) = A_\delta x(t) + B_\delta u(t)$$

$$x(t) = \delta^{-1} z(t).$$

Transformação de Similaridade

Defina a variável de estados $z(t)$ dada por

$$z(t) = Tx(t)$$

onde T é uma matriz não singular. Então

$$\begin{aligned} z(t+1) &= Tx(t+1) \\ &= TAx(t) + TBu(t) \\ &= TAT^{-1}z(t) + TBu(t) \\ &= \bar{A}z(t) + \bar{B}u(t) \end{aligned}$$

onde

$$\bar{A} = TAT^{-1} \quad \text{e} \quad \bar{B} = TB.$$

Além disso

$$y(t) = \bar{C}z(t) + \bar{D}u(t)$$

onde

$$\bar{C} = CT^{-1} \quad \text{e} \quad \bar{D} = D.$$

Numero de representações em variáveis de estados para um sistema linear é infinito.

Theorem 1. *A equação característica de um sistema linear não se altera com transformações de similaridade.*

Prova.

$$\begin{aligned}
\det\left(qI-\bar{A}\right) &= \det\left(qI-TAT^{-1}\right)\\
&= \det\left(qTT^{-1}-TAT^{-1}\right)\\
&= \det T\left(qI-A\right)T^{-1}\\
&= \det T\det\left(qI-A\right)\det T^{-1}\\
&= \det\left(qI-A\right).
\end{aligned}$$

Theorem 2. *A resposta ao pulso unitário não se altera com transformações de similaridade.*

$$y(t) = \begin{cases} \bar{D} & t = 0 \\ \bar{C}\bar{A}^{t-1}B & t > 0 \end{cases}.$$

Então

$$\bar{D} = D$$

e

$$\begin{aligned} y(t) &= \bar{C}\bar{A}^{t-1}\bar{B} = CT^{-1}\left(TAT^{-1}\right)^{t-1}TB \\ &= CT^{-1}T\,(A)^{t-1}\,T^{-1}TB = CA^{t-1}B. \end{aligned}$$

Formas Canônicas

Os autovetores e autovalores de uma matriz A satisfazem

$$(\lambda_i I - A)\, w_i = 0$$

ou

$$\lambda_i I w_i = A w_i.$$

Forma Diagonal e de Jordan

Se A tem autovalores distintos então defina a matriz de transformação de similaridade T como

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} w_1 & w_2 & & w_n \end{bmatrix}.$$

Então

$$AT^{-1} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} T^{-1}$$

$$= T^{-1} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

Pré-multiplicando por T resulta em

$$\bar{A} = TAT^{-1} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

Esta forma para a matriz A do sistema transformado é conhecida como a forma diagonal ou forma em paralelo.

Se A tem autovalores repetidos então defina a matriz T como

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} w_1 & w_2 & \cdots & w_n \end{bmatrix}$$

onde w_i são os autovetores generalizados. Similarmente ao caso anterior chega-se a uma matriz do sistema que tem quase todos elementos nulos, com os autovalores na diagonal principal e com 1 na diagonal superior relativos aos blocos de Jordan.

Considere uma matriz A $n \times n$, a matriz J $n \times n$ é dita estar na forma canônica de Jordan se

$$J = \begin{bmatrix} J_{p_1} & & & 0 \\ & J_{p_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & J_{p_s} \end{bmatrix} \tag{7}$$

onde os J_{p_i}'s são matrizes $p_i \times p_i$ da forma

$$J_{p_i} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{bmatrix} \tag{8}$$

As matrizes J_{p_i} são chamadas de blocos de Jordan de ordem p_i.e a forma canônica de Jordan é dada por

$$J = \begin{bmatrix} & & & & 0 \\ J_{3(\lambda_1)} & & & & \\ & J_{2(\lambda_1)} & & & \\ & & J_{1(\lambda_6)} & & \\ 0 & & & J_{1(\lambda_7)} & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & & & & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 & & & & \\ 0 & 0 & \lambda_1 & & & & \\ & & & \lambda_1 & 1 & & \\ & & & 0 & \lambda_1 & & \\ & & & & & \lambda_6 & \\ 0 & & & & & & \lambda_7 \end{bmatrix}$$

Note que a matriz diagonal é um caso especial da forma canônica de Jordan. As formas canônicas de Jordan têm as propriedades de que os elementos da diagonal principal da matriz são os autovalores de A e que os elementos imediatamente acima (ou abaixo) da diagonal principal são 1 ou 0 e todos os outros elementos são zero. Somente a matriz diagonal possui autovetores linearmente independentes.

Forma Canônica de Controlador

Considere a representação entrada-saída

$$y(t+n)+a_{n-1}y(t+n-1)+\cdots+a_0y(t)=b_mu(t+m)+b_{m-1}u(t+m-1)+\cdots+b_0u(t)$$

$$y(t)+a_{n-1}y(t-1)+\cdots+a_0y(t-n)=b_mu(t-d)+b_{m-1}u(t-d-1)+\cdots+b_0u(t-n)$$

onde $d=n-m$.

Defina a variável intermediária $z(t)$ como

$$\left(1+a_{n-1}q^{-1}+\ldots+a_0q^{-n}\right)z(t)=u(t)$$

e use a linearidade para obter

$$y(t)=\left(b_mq^{m-n}+b_{m-1}q^{m-1-n}+\ldots+b_0q^{-n}\right)z(t).$$

Defina a variável de estados

$$x(t) = \begin{bmatrix} z(t-1) \\ z(t-2) \\ \vdots \\ z(t-n) \end{bmatrix}$$

de modo que

$$x(t+1) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t)$$

onde

$$A = \begin{bmatrix} -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

e

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & b_m & \cdots & b_0 \end{bmatrix}$$

Forma Canônica de Observador

$$y(t+n)+a_{n-1}y(t+n-1)+\cdots+a_0 y(t)=b_m u(t+m)+b_{m-1}u(t+m-1)+\cdots+b_0 u(t)$$

Defina a variável intermediária $z(t)$ como

$$\left(q^n+a_{n-1}q^{n-1}+\ldots+a_0\right)y(t)=z(t)$$

Esta equação pode ser reescrita como

$$y(t)=q^{-n}z(t)-a_{n-1}q^{-1}y(t)+\ldots+a_0q^{-n}y(t).$$

Também

$$z(t)=b_m u(t+m)+b_{m-1}u(t+m-1)+\cdots+b_0 u(t)$$

pode ser reescrita como

$$q^{-n}z(t)=b_m q^{m-n}u(t)+b_{m-1}q^{m-n-1}u(t)+\cdots+b_0 q^{-n}u(t).$$

Rearanjando os elementos atraso têm-se que a equação de estados pode ser escrita como

$$x(t+1)=Ax(t)+Bu(t)$$

onde

$$A = \begin{bmatrix} -a_{n-1} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_{n-2} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ a_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ b_m \\ \vdots \\ b_1 \\ b_0 \end{bmatrix}$$

e a equação de saída como

$$y(t) = Cx(t)$$

com

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Transformada z

Considere a variável complexa z e um sinal discreto no tempo $\{f(kT)\}$ A transformada z de $f(kT)$ é definida como

$$F(z) = \mathcal{Z}(f(kT)) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT) z^{-k}.$$

A transformada z mapeia um sinal discreto no tempo ao plano complexo. Dado $F(z)$, o sinal $f(kT)$ pode ser recuperado através da transformada inversa dada por

$$f(kT) = \frac{1}{2\pi j} \oint F(z) z^{k-1} dz$$

onde o contorno de integração inclue todas as singularidades de $F(z)$.

Dados sinais $f(kT)$ e $g(kT)$ e constantes reais α e β então a tranformada z tem as seguintes propriedades:

Linearidade

$$\mathcal{Z}(\alpha f(kT) + \beta g(kT)) = \alpha \mathcal{Z}(f(kT)) + \beta \mathcal{Z}(g(kT))$$

Deslocamento no tempo

$$\mathcal{Z}\left(q^{-n} f(kT)\right) = z^{-n} \mathcal{Z}(f(kT))$$
$$\mathcal{Z}(q^{n} f(kT)) = z^{n} \left(\mathcal{Z}(f(kT)) - F_n\right)$$

onde

$$F_n = \sum_{k=0}^{n-1} f(kT) z^{-k}.$$

Teorema do valor inicial

$$f(0) = \lim_{z \to \infty} F(z).$$

Teorema do valor final

Se $\left(1-z^{-1}\right)F\left(z\right)$ não tem nenhum pólo no eixo unitário ou fora dele, então

$$\lim_{k\to\infty} f\left(kT\right) = \lim_{z\to 1}\left(1-z^{-1}\right)F\left(z\right).$$

Convolução

$$\mathcal{Z}(f*g) = \mathcal{Z}\left(\sum_{n=0}^{k} f(n)\, g(k-n)\right) = \mathcal{Z}(f)\,\mathcal{Z}(g)$$

Transformadas s e z de sinais comuns

$f(t)$	$\mathcal{L}f$	$\mathcal{Z}f$
$1 \ t \geq 0$	$\frac{1}{s}$	$\frac{z}{z-1}$
tT	$\frac{1}{s^2}$	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
$\frac{1}{2}(tT)$	$\frac{1}{s^3}$	$\frac{T^2z(z+1)}{2(z-1)^3}$
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
$1-e^{-at}$	$\frac{a}{s(s+a)}$	$\frac{z\left(1-e^{-aT}\right)}{(z-1)\left(z-e^{-aT}\right)}$
$\text{sen}(t\omega T)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\frac{z sen(\omega T)}{z^2-2z\cos(\omega T)+1}$
$\cos(t\omega T)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\frac{z(z-\cos(\omega T))}{z^2-2z\cos(\omega T)+1}$

Uso da Transformada z

A transformada z pode ser usada para resolver equações a diferenças. Dado

$$x(t+1) = Ax(t) + Bu(t)$$

então como

$$\sum_{t=0}^{\infty} x(t+1) z^{-t} = z \left[\sum_{t=0}^{\infty} x(t) z^{-t} - x(0) \right]$$

tem-se

$$z \left[\sum_{t=0}^{\infty} x(t) z^{-t} - x(0) \right] = A \sum_{t=0}^{\infty} x(t) z^{-t} + B \sum_{t=0}^{\infty} u(t) z^{-t}$$

de modo que

$$z\left[X(z)-x(0)\right]=AX(z)+BU(z)$$

ou

$$X(z)=(zI-A)^{-1}\left[zx(0)+BU(z)\right].$$

Também, se

$$y(t)=Cx(t)$$

obtém-se

$$Y(z)=C(zI-A)^{-1}zx(0)+C(zI-A)^{-1}BU(z).$$

A função de transferência ao pulso é dada por

$$
\begin{aligned}
H(z) &= C(zI - A)^{-1} BU(z) \\
&= \frac{C\text{Adj}(zI - A)B}{\det(zI - A)} \\
&= \frac{B(z)}{A(z)}
\end{aligned}
$$

A resposta ao pulso e a função de transferência ao pulso são um par de transformadas z.

Discretização por invariância ao degrau

Considere a resposta de um sistema discretizado a um degrau unitário discreto no tempo

$$u(kT) = 1 \quad K \geq 0.$$

A saída do segurador de ordem zero é então um degrau contínuo no tempo. Assim, a saída $y(t)$ terá transformada de Laplace

$$Y(s) = G(s)\frac{1}{s}.$$

A saída amostrada $y(kT)$ tem transformada z dada por

$$Y(z) = \mathcal{Z}(y(kT)) = \mathcal{Z}\left(\mathcal{L}^{-1}(y(t))\,|_{t=KT}\right).$$

Observando que

$$Y(z) = H(z)\frac{1}{1-z^{-1}}$$

então

$$H(z) = \left(1-z^{-1}\right)Y(z).$$

A partir deste desenvolvimento têm-se um procedimento para obter a discretização de um sistema contínuo no tempo usando-se a tabela de transformadas s e z:

1. Determine a função de transferência $G(s)/s$
2. Usando a tabela de trasformadas, determine a transformada z correspondente.
3. Multiplique o resultado por $\left(1-z^{-1}\right)$ para obter a função de transferência ao pulso com segurador de ordem zero.

Sistemas discretos obtidos com segurador de ordem zero

$G(s)$	$H(z)$
$\frac{1}{s}$	$\frac{T}{z-1}$
$\frac{1}{s^2}$	$\frac{T^2(z+1)}{2(z-1)^2}$
$\frac{1}{s^m}$	$\frac{z-1}{z}\lim_{a\to 0}\frac{(-1)^m}{m!}\frac{\partial^m}{\partial a^m}\left(\frac{z}{z-e^{-aT}}\right)$
$\frac{a}{s+a}$	$\frac{1-e^{-aT}}{z-e^{-aT}}$
$\frac{a}{s(s+a)}$	$\frac{\left(1-(1+aT)e^{-aT}\right)z+e^{-aT}\left(e^{-aT}+aT-1\right)}{z^2-\left(1-e^{-aT}\right)z+e^{-aT}}$
e^{-sT}	z^{-1}

Pólos e zeros

Pólos são as raizes do denominador $A(z)$ da função de transferência

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)}.$$

Zeros são as raízes de $B(z) = 0$.

Considere um sistema contínuo

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y = Cx(t)$$

e o sistema discreto equivalente

$$x(t+1) = A_d x(t) + B_d u(t)$$
$$y = Cx(t)$$

Os pólos do sistema discreto são as raízes de

$$A(z) = \det(zI - A_d) = 0.$$

Como $A_d = e^{AT}$ então os pólos do sistema discreto $\lambda_i(A_d)$ são dados por

$$\lambda_i(A_d) = e^{\lambda_i(A)T}.$$

Representação gráfica

Transformada γ

Definição

A relação entre os operadores q e δ é dada por

$$\delta = \frac{q-1}{T}, \quad ou \quad q = 1 + T\delta.$$

A transformada γ é definida como a transformada para sinais e sistemas relativa ao operador delta. Assim, defina a variável complexa γ como

$$\gamma = \frac{z-1}{T}, \quad ou \quad z = 1 + T\gamma.$$

Então, A transformada γ é dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(f(kT)) &= F(\gamma) = F(z)\big|_{z=1+T\gamma} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)(1+T\gamma)^{-k}. \end{aligned}$$

A transformada pode ser normalizada como

$$\begin{aligned}\mathcal{D}'\left(f\left(kT\right)\right) = F'\left(\gamma\right) &= TF\left(z\right)\big|_{z=1+T\gamma} \\ &= T\sum_{k=0}^{\infty} f\left(kT\right)\left(1+T\gamma\right)^{-k}.\end{aligned}$$

A função de transferência ao pulso é dada por

$$\begin{aligned}H\left(\gamma\right) &= C\left(\gamma I - A\right)^{-1} BU\left(\gamma\right) \\ &= \frac{C\,\mathrm{Adj}\left(\gamma I - A\right)^{-1} B}{\det\left(\gamma I - A\right)} \\ &= \frac{B\left(\gamma\right)}{A\left(\gamma\right)}\end{aligned}$$

Os pólos do sistema discreto no operador δ são as raízes de

$$A\left(\gamma\right) = \det\left(\gamma I - A_\delta\right) = 0.$$

Como $A_\delta = \left(e^{AT} - I\right)/T$ então os pólos do sistema discreto $\lambda_i\left(A_\delta\right)$ são dados por

$$\lambda_i\left(A_\delta\right) = \frac{\left(e^{\lambda_i(A)T} - 1\right)}{T}.$$

Discretização por invariância ao degrau

Similarmente ao caso do operador q, a discretização de um sistema contínuo no tempo usando-se a tabela de transformadas s e γ:

1. Determine a função de transferência $G(s)/s$
2. Usando a tabela de transformadas, determine a transformada γ correspondente.
3. Multiplique o resultado por $\left(\frac{T\gamma}{1+T\gamma}\right)$ para obter a função de transferência aopulso com segurador de ordem zero.

Pólos e Zeros