Identificação de Sistemas Dinâmicos

Péricles Rezende Barros

Introdução

Definição do problema

Obter um modelo dentre uma classe de modelos com uma estrutura particular que descreva comportamento do sistema usando dados reais de operação.

Etapas na identificação de sistemas dinâmicos

- Planejamento do experimento
  - Como obter dados frente a restrições econômicas, físicas, operacionais e de segurança
- Estruturas para o modelo
  - Construção de classe de modelo usando conhecimento a-priori
- Estimação de Parâmetros
  - Definição do critério, e determinação do modelo (ordem e parâmetros) usando dados reais
- Validação
  - Usar dados adicionais para verificar como o modelo representa o sistema para outras entradas

Modelos de Processos

Classe de Modelos Contínuos no Tempo

Considere o modelo de primeira ordem, contínuo no tempo

$$G(s) = \frac{b}{s+a} e^{-Ls} \tag{1}$$

o qual supõe-se representa o comportamento dinâmico do processo. Os dados de entrada e saída estão disponíveis de forma amostrada. Assume-se que o processo está em regime estacionário no tempo $t = 0$ de modo que $u(t) = 0$ para $t < 0$ e que o sistema tem condições iniciais nulas. Para $t \geq L$ o processo satisfaz a equação diferencial

$$\dot{y}(t) + ay(t) = bu(t-L). \tag{2}$$

Integrando a Eq.(2) de $\tau = 0$ de $\tau = t$

$$y(t) = -a\int_0^t y(\tau)\,d\tau + b\int_0^t u(\tau - L)\,d\tau. \tag{3}$$

Assumindo uma entrada degrau com amplitude A aplicada em $t = 0$ pode-se também escrever

$$y(t) = -a\int_0^t y(\tau)\,d\tau + bAt - bAL, \tag{4}$$

para a qual se pode construir o modelo em regressão com

$$\begin{aligned} \phi(t) &= \begin{bmatrix} -\int_0^t y(\tau)\,d\tau & At & -A \end{bmatrix}^T, \\ \theta &= \begin{bmatrix} a & b & bL \end{bmatrix}^T. \end{aligned} \tag{5}$$

e a Eq.(**??**) pode ser escrita em forma de regressão linear

$$y(t) = \phi(t)^T\theta.$$

A integral pode ser calculada usando-se um método de integração (Tustin/bilinear).

Classe de Modelos Discretos no Tempo

Considere o sistema discreto no tempo na representação entrada-saída no operador q

$$y(t) = G(q)u(t). \tag{6}$$

$$G(q) = \frac{B(q)}{A(q)} \tag{7}$$

com

$$A(q) = 1 + a_{n-1}q^{-1} + \ldots + a_0 q^{-n} \tag{8}$$

$$B(q) = b_m q^{m-n} + \ldots + b_0 q^{-n} \tag{9}$$

então o sistema pode ser reescrito como

$$A(q)\,y(t) = B(q)\,u(t)$$

$$y(t) + a_{n-1}y(t-1) + \ldots + a_0 y(t-n) = b_m u(t-d) + \ldots + b_0 u(t-n)\,. \tag{10}$$

$$y(t) = B(q)\,u(t) + [1 - A(q)]\,y(t)\,. \tag{11}$$

O modelo definido pela equação é conhecido como ARX, onde AR se refere à parte autoregressiva $A(q)\,y(t)$, e X à entrada externa $B(q)\,u(t)$.

Definindo-se o vetor de parâmetros θ como,

$$\theta^T = \begin{bmatrix} a_{n-1} & \ldots & a_0 & b_m & \ldots & b_0 \end{bmatrix}$$

então a classe de modelos definida por

$$\hat{y}(t|,\theta) = G(q,\theta)\,u(t) \tag{12}$$

$$A(q,\theta)\,y(t) = B(q,\theta)\,u(t) \tag{13}$$

com $G(q,\theta)$ dado por

$$G(q,\theta) = \frac{B(q,\theta)}{A(q,\theta)}$$

é dependente de θ e o modelo a ser determinado para representar o sistema corresponde a um valor particular para θ

O desenvolvimento acima pode ser repetido para modelos no operador δ resultando em

$$\hat{y}(t|\theta) = G(\delta,\theta)\, u(t) \tag{14}$$

com $G(\delta,\theta)$ dado por

$$G(\delta,\theta) = \frac{B(\delta,\theta)}{A(\delta,\theta)}$$

Pode-se escrever a saída do modelo na forma de uma regressão

$$\hat{y}(t|\theta) = B(q,\theta)u(t) + [1 - A(q,\theta)]y(t). \tag{15}$$

ou

$$\hat{y}(t|\theta) = \phi^T(t)\theta. \tag{16}$$

onde

$$\phi(t)^T = \begin{bmatrix} -y(t-1) & -y(t-2) & \cdots & -y(t-n) & u(t-n+m) & \cdots & u(t-m) \end{bmatrix} \tag{17}$$
$$\theta^T = \begin{bmatrix} a_{n-1} & \ldots & a_0 & b_m & \ldots & b_0 \end{bmatrix}$$

Erro de predição

Saída real menos a saída do modelo

$$\varepsilon(t,\theta) = y(t) - \hat{y}(t|\theta) \tag{18}$$
$$= y(t) - \phi^T(t)\theta. \tag{19}$$

Modelo no Operador Delta

$$A(\delta)y(t) = B(\delta)u(t)$$

Filtando os sinais pelo polinômio mônico estável $E(\delta)$ resulta na equação

$$A(\delta)\left(\frac{y(t)}{E(\delta)}\right) = B(\delta)\left(\frac{u(t)}{E(\delta)}\right)$$

ou, na forma de regressão linear

$$y(t) = \phi^T(t)\theta$$

$$\phi^T(t) = \left[\delta^{n-1}y_f(t)\ \delta^{n-2}y_f(t)\ \cdots\ y_f(t)\ \delta^m u_f(t)\ \ \cdots\ u_f(t)\right]$$

$$\theta = [(e_{n-1} - a_{n-1})\ \ (e_{n-2} - a_{n-2})\cdots\ (e_0 - a_0)\ b_m \cdots\ b_0]$$

$$y_f(t) = \frac{y(t)}{E(\delta)} \quad \text{e} \quad u_f(t) = \frac{u(t)}{E(\delta)}.$$

Método dos Mínimos Quadrados

Assuma que foram realizadas medições da entrada $u(t)$ e da saída $y(t)$ durante N períodos de amostragem. Defina a matriz de dados

$$Z(N) = \begin{bmatrix} y(1) & y(2) & \cdots & y(N-1) & y(N) \\ u(1) & u(2) & \cdots & u(N-1) & u(N) \end{bmatrix}^T .$$

O objetivo da estimação de parâmetros é obter um vetor θ tal que o erro $\varepsilon(\cdot,\theta)$ seja pequeno de acordo com uma certa função de custo (ou critério de desempenho).

Defina a função de custo mínimos quadrados

$$V_N(\theta, Z(N)) = \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}\left[y(t) - \phi^T(t)\theta\right]^2 . \tag{20}$$

A estimativa para os parâmetros mínimos quadrados $\hat{\theta}^{LS}(N)$ é obtida de

$$\hat{\theta}^{LS}(N) = \arg\min_{\theta} V_N(\theta, Z(N)) . \tag{21}$$

Como V_N é quadrática em θ, pode-se encontrar o valor mínimo derivando a equação acima. Assim,

$$\frac{d}{d\theta}V_N(\theta, Z(N)) = \frac{2}{N}\sum_{t=1}^{N}\phi(t)\left(y(t) - \phi^T(t)\theta\right),$$

e

$$\frac{2}{N}\sum_{t=1}^{N}\phi(t)y(t) = \frac{2}{N}\sum_{t=1}^{N}\phi(t)\phi^{T}(t)\theta.$$

A estimativa pode ser calculada como

$$\hat{\theta}(N) = \hat{\theta}^{LS}(N) = \left[\sum_{t=1}^{N}\phi(t)\phi^{T}(t)\right]^{-1}\sum_{t=1}^{N}\phi(t)y(t)$$

onde assume-se que a inversa existe.

Mínimos Quadrados Recursivo

Se após calcular $\hat{\theta}(t-1)$ novos dados, $y(t)$ e $u(t)$ se tornaram disponíveis, para se calcular $\hat{\theta}(t)$ é necessário recalcular a inversa da matriz na equação acima. No entanto, é possível reescrever a equação do mínimos quadrados de forma recursiva. Defina

$$\hat{\theta}^{LS}(N) = R^{-1}(N)\, f(N),$$

$$R(t) = \sum_{k=1}^{t} \phi(k)\phi^{T}(k)$$

$$f(t) = \sum_{k=1}^{t} \phi(k) y(k).$$

$$\begin{aligned} R(t) &= R(t-1) + \phi(t)\phi^{T}(t), \\ f(t) &= f(t-1) + \phi(t) y(t), \end{aligned}$$

e

$$
\begin{aligned}
\widehat{\theta}(t) &= R^{-1}(t)\, f(t) \\
&= R^{-1}(t)\left[f(t-1)+\phi(t)\,y(t)\right] \\
&= R^{-1}(t)\, f(t-1)+R^{-1}(t)\,\phi(t)\,y(t) \\
&= R^{-1}(t-1)\, f(t-1)+\left[R^{-1}(t)-R^{-1}(t-1)\right] f(t-1)+R^{-1}(t)\,\phi(t)\,y(t) \\
&= \widehat{\theta}(t-1)+R^{-1}(t)\,\phi(t)\,y(t)+\left[R^{-1}(t)-R^{-1}(t-1)\right] f(t-1).
\end{aligned}
$$

Mas

$$
\begin{aligned}
R(t)-R(t-1) &= \phi(t)\,\phi^{T}(t) \\
R(t)\left[I-R^{-1}(t)\,R(t-1)\right] &= \phi(t)\,\phi^{T}(t) \\
\left[I-R^{-1}(t)\,R(t-1)\right] &= R^{-1}(t)\,\phi(t)\,\phi^{T}(t),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\left[R^{-1}(t)-R^{-1}(t-1)\right] f(t-1) &= \left[R^{-1}(t)\,R(t-1)-I\right] R^{-1}(t-1)\, f(t-1) \\
&= -R^{-1}(t)\,\phi(t)\,\phi^{T}(t)\,R^{-1}(t-1)\, f(t-1) \\
&= -R^{-1}(t)\,\phi(t)\,\phi^{T}(t)\,\widehat{\theta}(t-1)
\end{aligned}
$$

$$
\widehat{\theta}(t)=\widehat{\theta}(t-1)+R^{-1}(t)\,\phi(t)\left[y(t)-\phi^{T}(t)\,\widehat{\theta}(t-1)\right].
$$

Agora o estimador é recursivo pois pode ser calculado a partir dos valores calculador no instante anterior e das novas medições.

Também é possível evitar a inversão matricial de $R(t)$ a cada passo. Defina

$$P(t) = R^{-1}(t).$$

Aplique o lema da inversão matricial,

$$[A + BCD]^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B\left[DA^{-1}B + C^{-1}\right]^{-1} DA^{-1},$$

com $A = R(t-1)$, $B = D^T = \phi(t)$ e $C = 1$,

$$P(t) = \left[P(t-1) - \frac{P(t-1)\phi(t)\phi^T(t)P(t-1)}{1 + \phi^T(t)P(t-1)\phi(t)}\right]\frac{1}{\lambda(t)} \tag{22}$$

e

$$R^{-1}(t)\varphi(t) = \frac{P(t-1)\phi(t)}{1 + \phi^T(t)P(t-1)\phi(t)}.$$

Resumindo, o algorítmo recursivo é dado por,

$$
\begin{aligned}
\widehat{\theta}(t) &= \widehat{\theta}(t-1) + L(t)\left[y(t) - \phi^{T}(t)\,\widehat{\theta}(t-1)\right], \\
L(t) &= \frac{P(t-1)\,\phi(t)}{1 + \phi^{T}(t)\,P(t-1)\,\phi(t)}, \\
P(t) &= \left[P(t-1) - \frac{P(t-1)\,\phi(t)\,\phi^{T}(t)\,P(t-1)}{1 + \phi^{T}(t)\,P(t-1)\,\phi(t)}\right].
\end{aligned}
\tag{23}
$$

Parâmetros Variantes no Tempo

Para parâmetros variantes no tempo, definindo a função de custo ponderada exponencialmente

$$V(\theta,t) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{t}\lambda^{t-i}(y(i) - \phi^T(i)\theta)^2$$

resulta no algorítmo Mínimos Quadrados Recursivos com Esquecimento Exponencial

$$\begin{aligned}
\widehat{\theta}(t) &= \widehat{\theta}(t-1) + K(t)(y(t) - \phi^T(t)\widehat{\theta}(t-1)) \\
K(t) &= P(t)\phi(t) = P(t-1)\phi(t)(\lambda I + \phi^T(t)P(t-1)\phi(t))^{-1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P(t) &= P(t-1) - P(t-1)\phi(t)(\lambda I + \phi^T(t)P(t-1)\phi(t))^{-1} \\
&= (I - K(t)\phi^T(t))P(t-1)/\lambda
\end{aligned}$$

Estimação Robusta de Parâmetros

Controle adaptativo $\times$ Ruido e dinâmicas não modeladas

- Filtragem passa-faixa
- Normalização
- Variação de parâmetros

$$P(t) = (I - K(t)\phi^T(t))P(t-1)/\lambda$$

$\phi^T(t) = 0 \; P(t) \nearrow$

- Zona morta