

Modelo Dinâmico de um Robô Móvel de Tração Diferencial utilizando as Metodologias de Lagrange e Newton-Euler: Um Framework Unificado

Mateus Pincho de Oliveira

Prof. Antônio Marcus Nogueira Lima, Automação Inteligente 25.2

November 20, 2025

I. INTRODUÇÃO

NOS últimos anos, tem havido um grande interesse na área de robôs móveis e tecnologias educacionais. Para engenheiros de controle e pesquisadores, existe uma grande variedade de literaturas que tratam do controle de robôs móveis com rodas (do inglês *WMR - Wheeled Mobile Robots*) e suas aplicações. No entanto, enquanto a modelagem cinemática de *WMR* está bem documentada e é facilmente entendível por estudantes, quando relacionada a modelagem dinâmica desta classe de robôs, percebe-se que esta não foi bem discutida na literatura. A dinâmica de *WMR* é altamente não-linear e envolve restrições não-holônomicas, o que dificulta a sua modelagem e a análise, especialmente em se tratando de novos estudantes de engenharia, iniciando a sua pesquisa nesta área. Portanto, é necessário desenvolver um modelo detalhado e acurado, capaz de descrever a dinâmica do movimento de *WMR* e que ofereça aos estudantes um framework geral para análise de simulação e o projeto de controladores baseados em modelo.

II. SISTEMAS DE COORDENADAS

Com o objetivo de descrever a posição do robô no seu ambiente, é preciso definir dois sistemas coordenados de referência.

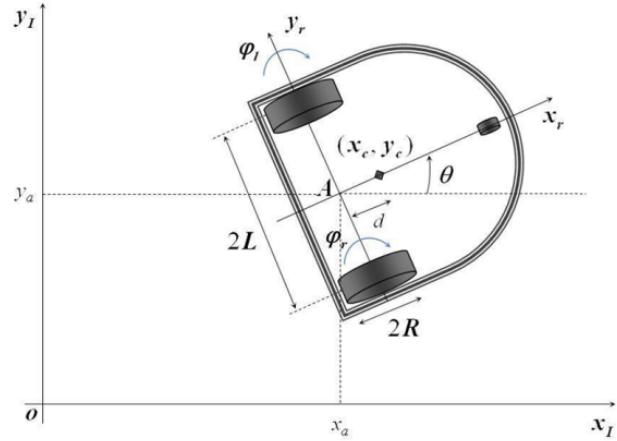
- 1) Sistema de Coordenadas Inercial: representa a referência global do ambiente, fixada no plano em que o robô se movimenta. É denotado como $\{X_I, Y_I\}$.
- 2) Sistema de Coordenadas do Robô: representa o sistema de coordenadas, que está fixado no robô e, por consequência, move-se em conjunto com ele. É denotado como $\{X_r, Y_r\}$.

Os dois sistemas de coordenadas estão mostrados na Figura 1. A origem do referencial local está no ponto médio A , a uma distância d do centro de massa C do robô.

A configuração do robô é definida como a combinação dos estados de posição e orientação no espaço, dado um sistema de coordenadas como referência. Sendo $[x, y]$ e θ os estados referentes a posição e orientação, respectivamente, do robô DDMR, pode-se escrever a sua configuração como sendo:

$$q = \begin{bmatrix} x \\ y \\ \theta \end{bmatrix} \quad (1)$$

Fig. 1: Robô Móvel de Tração Diferencial (DDMR)



Fonte: Dhaouadi e Hatab (2013).

É possível relacionar a configuração do robô nos dois sistemas de referência por uma transformação rígida de rotação, dada por:

$$\begin{bmatrix} x_a \\ y_a \\ \theta_a \end{bmatrix} = R(\theta) \begin{bmatrix} x_r \\ y_r \\ \theta_r \end{bmatrix} \quad (2)$$

Em que $R(\theta)$ é uma matriz de rotação ortogonal, escrita como:

$$R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

Esta transformação também se conserva quando olha-se para o movimento entre frames coordenados.

$$\dot{q}^I = R(\theta)\dot{q}^R \quad (4)$$

III. RESTRIÇÕES CINEMÁTICAS DO ROBÔ DE TRAÇÃO DIFERENCIAL

O movimento do DDMR é caracterizado por duas restrições não-holônomicas, obtidas através de suas assunções principais: sem movimento de deslizamento lateral e rolamento puro.

A. Sem movimento de deslizamento lateral

Significa que o robô pode atuar no movimento apenas na direção x_r . No referencial do robô, isto significa que a velocidade do ponto central A na direção lateral é zero. Usando a matriz de rotação, a velocidade no sistema inercial é:

$$-\dot{x}_a \sin(\theta) + \dot{y}_a \cos(\theta) = 0 \quad (5)$$

B. Rolamento Puro

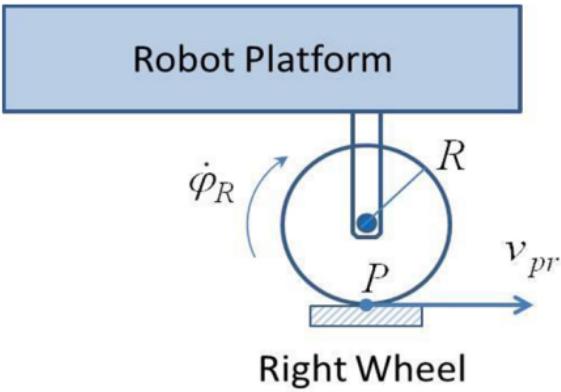
Significa que cada roda do DDMR toca unicamente em um ponto quando em contato com o chão, como mostrado na Figura 2. Não há deslizamento das rodas no eixo longitudinal, bem como não há deslizamento no eixo ortogonal. Dessa forma, as velocidades lineares das rodas do robô, estão relacionadas com as suas respectivas velocidades angulares por:

$$\begin{cases} v_{pR} = R \cdot \dot{\phi}_R \\ v_{pL} = R \cdot \dot{\phi}_L \end{cases} \quad (6)$$

Sendo R o raio das rodas. Ao olhar para v_{pR} e v_{pL} no sistema referencial inercial, pode-se decompor essas velocidades em função das velocidades do ponto central do robô. Empregando-se as transformações correspondentes, as equações da restrição de rolamento são:

$$\begin{cases} v_{pR} = \dot{x}_a \cos(\theta) + \dot{y}_a \sin(\theta) + L\dot{\theta} \\ v_{pL} = \dot{x}_a \cos(\theta) + \dot{y}_a \sin(\theta) - L\dot{\theta} \end{cases} \quad (7)$$

Fig. 2: Restrição de Movimento de Rolamento Puro



Fonte: Dhaouadi e Hatab (2013).

Considerando $\dot{q} = [\dot{x}_a \ \dot{y}_a \ \dot{\theta} \ \dot{\phi}_R \ \dot{\phi}_L]^T$, as duas restrições não holonômicas podem ser escritas como:

$$\Lambda(q)\dot{q} = \begin{bmatrix} -\sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 & 0 \\ \cos\theta & \sin\theta & L & -R & 0 \\ \cos\theta & \sin\theta & -L & 0 & R \end{bmatrix} = 0 \quad (8)$$

IV. MODELO CINEMÁTICO

A modelagem cinemática diz respeito ao estudo do movimento de sistemas mecânicos, desconsiderando as forças que afetam o movimento. Para o DDMR, o objetivo principal da modelagem é representar as velocidades do robô como uma função das velocidades das rodas, dado os parâmetros geométricos do robô.

A velocidade linear v do robô é dada como a média das velocidades lineares de cada uma das duas rodas. Isto é:

$$v = \frac{v_R + v_L}{2} = R \frac{\dot{\phi}_R + \dot{\phi}_L}{2} \quad (9)$$

Dada as velocidades angulares das rodas ω_R e ω_L , estas são relacionadas com as respectivas velocidades lineares pela razão com a distância média entre as rodas L . Assim, a velocidade angular do robô w pode ser escrita como:

$$\omega = \frac{\omega_R + \omega_L}{2} = \frac{v_R - v_L}{2L} = R \frac{\dot{\phi}_R - \dot{\phi}_L}{2L} \quad (10)$$

As velocidades do DDMR em relação ao seu próprio referencial podem ser representadas em termos da velocidade do ponto central A no referencial do robô como se segue:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_r \\ \dot{y}_r \\ \dot{\theta}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{R}{2} & \frac{R}{2} \\ 0 & 0 \\ \frac{R}{2L} & -\frac{R}{2L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi}_D \\ \dot{\phi}_E \end{bmatrix} \quad (11)$$

Ao rotacionar para o sistema de coordenadas iniciais, encontra-se:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_a \\ \dot{y}_a \\ \dot{\theta}_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{R \cos(\theta)}{2} & \frac{R \cos(\theta)}{2} \\ \frac{R \sin(\theta)}{2} & \frac{R \sin(\theta)}{2} \\ \frac{R}{2L} & -\frac{R}{2L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi}_D \\ \dot{\phi}_E \end{bmatrix} \quad (12)$$

A equação 12 representa o modelo cinemático completo, que relaciona a velocidade de giro das rodas com a sua posição e orientação no sistema de coordenadas inercial. Uma forma alternativa desse modelo pode ser escrita, representando as velocidades do DDMR em termos de sua velocidade linear e angular no referencial do robô

$$\dot{q}^I = \begin{bmatrix} \dot{x}_a \\ \dot{y}_a \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 \\ \sin\theta & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix} \quad (13)$$

V. MODELAGEM DINÂMICA DO DDMR

Dinâmica é o estudo do movimento de um sistema mecânico levando-se em consideração as diferentes forças que afetam seu movimento, diferentemente do estudo cinemático. O modelo dinâmico do DDMR é essencial para análises de simulações do seu movimento e projetar algoritmos de controle de movimento.

Um DDMR não-holonômico com n coordenadas generalizadas $(q_1, q_2, q_3, \dots, q_n)$ e sujeitas a m restrições pode ser descrito pela seguinte equação de movimento:

$$M(q)\ddot{q} + V(q, \dot{q})\dot{q} + F(\dot{q}) + G(q) + \tau_d = B(q)\tau - \Lambda^T(q)\lambda \quad (14)$$

em que $M(q)$ é uma matriz $m \times n$ simétrica, definida positiva e dita como matriz inercial; $V(q, \dot{q})$ é a matriz centrípeta e de coriolis; $F(\dot{q})$ é a matriz de fricção superficial; $G(q)$ é o vetor gravitacional; τ_d é o vetor de perturbações, incluindo dinâmicas que não foram estruturadas modeladas; $B(q)$ é a matriz de entrada, τ é o vetor de entrada; $\Lambda^T(q)$ é a matriz associada as restrições cinemáticas, sendo, λ são os vetores dos multiplicadores de Lagrange.

A. Abordagem Dinâmica de Lagrange

A abordagem dinâmica de Lagrange é um método poderoso para formular equações de movimento de sistemas mecânicos. Esse método, introduzido por Lagrange, é usado de forma sistemática para derivar as equações de movimento considerando a energia cinética e potencial armazenada no sistema.

A equação de Lagrange pode ser escrita da seguinte forma:

$$-\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) + \frac{\partial L}{\partial q_i} = F - \Lambda^T(q)\lambda \quad (15)$$

Onde $L = T - U$, onde T é a energia cinética do sistema e U a energia potencial. Já para os fatores derivativos, q_i são as coordenadas generalizadas, F é o vetor das forças generalizadas, Λ é a matriz de restrição e λ é o vetor dos multiplicadores de Lagrange associados com as restrições.

O primeiro passo para derivar o modelo dinâmico usando a abordagem de Lagrange é formular as equações de energia presente no movimento do DDMR. Uma vez que o robô se movimenta no plano $X_I \times Y_I$, sua energia potencial gravitacional pode ser considerada nula. Para o DDMR, suas coordenadas generalizadas são:

$$q = [x_a \ y_a \ \theta \ \varphi_R \ \varphi_L]^T \quad (16)$$

A energia cinemática do DDMR é dada como a soma da energia da plataforma robótica, das rodas e seus atuadores. Ela pode ser escrita como:

$$T_c = \frac{1}{2} m_c v_c^2 + \frac{1}{2} I_c \dot{\theta}^2 \quad (17)$$

De forma análoga, as energias cinéticas das rodas esquerda e direita são:

$$T_{wR} = \frac{1}{2} m_w v_{wR}^2 + \frac{1}{2} I_m \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} I_w \dot{\varphi}_R^2 \quad (18)$$

$$T_{wL} = \frac{1}{2} m_w v_{wL}^2 + \frac{1}{2} I_m \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} I_w \dot{\varphi}_L^2 \quad (19)$$

em que m_ω é a massa de cada roda com o atuador, m_c é a massa do chassi do robô desconsiderando as rodas e atuadores, I_c é o momento de inércia do DDMR em respeito ao eixo-Z_R, I_ω é o momento de inércia das rodas em respeito ao eixo de rotação e I_m é o momento de inércia de cada roda e atuador em respeito ao eixo paralelo ao diametro.

Todas as velocidades podem ser primeiramente expressas como uma função das coordenadas generalizadas usando a equação geral de velocidade no sistema referencial inercial.

$$v_i^2 = \dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 \quad (20)$$

As componentes X_I e Y_I do centro de massa e das rodas podem ser obtidas em termos das coordenadas generalizadas como:

$$\begin{cases} x_c = x_a + d \cos \theta \\ y_c = y_a + d \sin \theta \end{cases} \quad (21)$$

$$\begin{cases} x_{wR} = x_a + L \sin \theta \\ y_{wR} = y_a - L \cos \theta \end{cases} \quad (22)$$

$$\begin{cases} x_{wL} = x_a - L \sin \theta \\ y_{wL} = y_a + L \cos \theta \end{cases} \quad (23)$$

Por fim, a energia cinética total é simplesmente a soma de todas as energias cinéticas apresentadas até aqui.

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}_a^2 + \dot{y}_a^2) + m_c d \dot{\theta} (\dot{y}_a \cos \theta - \dot{x}_a \sin \theta) + \frac{1}{2} I_w (\dot{\varphi}_R^2 + \dot{\varphi}_L^2) + \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2 \quad (24)$$

sendo $m = m_c + 2m_w$ a massa total do robô e $I = I_c + m_c d^2 + 2m_w L^2 + 2I_m$ a inércia total equivalente.

Usando a equação 15 juntamente da função de Lagrange, as equações de movimento do DDMR são dadas por

$$m \ddot{x}_a - m_c d \ddot{\theta} \sin \theta - m_c d \dot{\theta}^2 \cos \theta = C_1 \quad (25)$$

$$m \ddot{y}_a + m_c d \ddot{\theta} \cos \theta - m_c d \dot{\theta}^2 \sin \theta = C_2 \quad (26)$$

$$I \ddot{\theta} - m_c d \ddot{x}_a \sin \theta + m_c d \dot{y}_a \cos \theta - m_c d \dot{y}_a \dot{\theta} \sin \theta - m_c d \dot{x}_a \dot{\theta} \cos \theta = C_3 \quad (27)$$

$$I_w \ddot{\varphi}_R = \tau_R + C_4 \quad (28)$$

$$I_w \ddot{\varphi}_L = \tau_L + C_5 \quad (29)$$

em que $(C_1, C_2, C_3, C_4, C_5)$ são os coeficientes relacionados com as restrições cinemáticas, que podem ser escritas em termos do vetor de multiplicadores de Lagrange λ e da matriz de restrições cinemáticas Λ :

$$\Lambda^T(q) = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \end{bmatrix} \quad (30)$$

Dada as equações de movimento obtidas, pode-se representar a forma geral da equação de movimento do DDMR como:

$$M(q) \ddot{q} + V(q, \dot{q}) \dot{q} = B(q) \tau - \Lambda^T(q) \lambda \quad (31)$$

Onde

$$M(q) = \begin{bmatrix} m & 0 & -m_c d \sin \theta & 0 & 0 \\ 0 & m & m_c d \cos \theta & 0 & 0 \\ -m_c d \sin \theta & m_c d \cos \theta & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_w & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_w \end{bmatrix},$$

$$V(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -m_c d \dot{\theta} \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -m_c d \dot{\theta} \sin \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B(q) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\Lambda^T(q)\lambda = \begin{bmatrix} -\sin\theta & \cos\theta & \cos\theta \\ \cos\theta & \sin\theta & \sin\theta \\ 0 & L & -L \\ 0 & -R & 0 \\ 0 & 0 & -R \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \\ \lambda_5 \end{bmatrix}$$

Para propósito de controle e simulação, pode-se reorganizar a equação 31. O principal objetivo é eliminar o termo de restrição $\Lambda^T(q)\lambda$, uma vez que os multiplicadores de Lagrange são desconhecidos. Isto é feito definindo-se o vetor de redução η :

$$\eta = \begin{bmatrix} \dot{\varphi}_R \\ \dot{\varphi}_L \end{bmatrix} \quad (32)$$

Expressando as velocidades em coordenadas generalizadas usando o modelo cinemático, tem-se:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_a \\ \dot{y}_a \\ \dot{\theta} \\ \dot{\varphi}_R \\ \dot{\varphi}_L \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} R \cos\theta & R \cos\theta \\ R \sin\theta & R \sin\theta \\ \frac{R}{L} & -\frac{R}{L} \\ 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\varphi}_R \\ \dot{\varphi}_L \end{bmatrix} \quad (33)$$

que pode ser escrito na forma

$$\dot{q} = S(q)\eta \quad (34)$$

Verifica-se que a transformação da matriz $S(q)$ é nula no espaço da matriz de restrições. Dessa forma:

$$S^T(q)\Lambda^T(q) = 0 \quad (35)$$

Derivando em relação ao tempo a equação 34, tem-se:

$$\ddot{q} = \dot{S}(q)\eta + S(q)\ddot{\eta} \quad (36)$$

Substituindo as equações encontradas na equação geral de movimento, obtém-se:

$$\begin{aligned} S^T(q)M(q)S(q)\eta + S^T(q)M(q)\dot{S}(q) + S^T(q)V(q,\dot{q})S(q) \\ = S^T(q)B(q)\tau - S^T(q)\Lambda^T(q)\lambda \end{aligned} \quad (37)$$

Onde o último termo do lado direito é igual a zero.

Da equação acima, adotemos:

$$\overline{M}(q) = S^T(q)M(q)S(q) \quad (38)$$

$$\overline{V} = S^T(q)M(q)\dot{S}(q) + S^T(q)V(q,\dot{q})S(q) \quad (39)$$

$$\overline{B} = S^T(q)B(q) \quad (40)$$

Assim, reduz-se as equações dinâmicas a forma:

$$\overline{M}(q)\ddot{\eta} + \overline{V}(q,\dot{q})\eta = \overline{B}(q)\tau \quad (41)$$

onde

$$\overline{M}(q) = \begin{bmatrix} I_w + \frac{R^2}{4L^2}(mL^2 + I) & \frac{R^2}{4L^2}(mL^2 - I) \\ \frac{R^2}{4L^2}(mL^2 - I) & I_w + \frac{R^2}{4L^2}(mL^2 + I) \end{bmatrix},$$

$$\overline{V}(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{R^2}{2L}m_c d\dot{\theta} \\ -\frac{R^2}{2L}m_c d\dot{\theta} & 0 \end{bmatrix},$$

$$\overline{B}(q) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A equação 41 mostra que a dinâmica do DDMR é expressa apenas em função das velocidades angulares das rodas esquerda e direita, da velocidade angular do robô e dos torques aplicados pelos motores. A equação 41 pode também ser transformada em uma forma alternativa quando combinada com as equações cinemáticas. De forma compacta, escreve-se:

$$\begin{cases} \left(m + \frac{2I_w}{R^2} \right) \dot{v} - m_c d\omega^2 = \frac{1}{R}(\tau_R + \tau_L) \\ \left(I + \frac{2L^2}{R^2} I_w \right) \dot{\omega} + m_c d\omega v = \frac{L}{R}(\tau_R - \tau_L) \end{cases} \quad (42)$$

B. Abordagem de Newton-Euler

O primeiro e mais importante passo na modelagem dinâmica usando a abordagem de Newton-Euler é desenhar o diagrama de corpo livre do sistema e analisar as forças que atuam no sistema. O diagrama de corpo livre para o DDMR está ilustrado na figura 3.

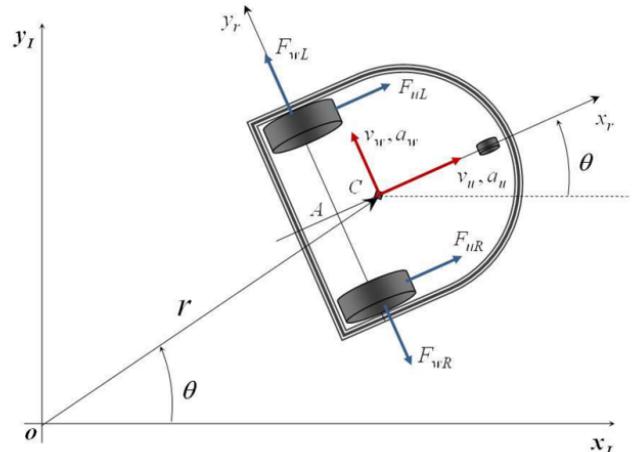


Fig. 3: Diagrama de Corpo Livre para o DDMR para a Modelagem Dinâmica Newtoniana

(v_u, v_w) representa a velocidade do centro de massa C no referencial local, em que v_u é a velocidade longitudinal e v_w é a velocidade lateral. (a_u, a_w) representa a aceleração do centro de massa do robô; (F_{uR}, F_{uL}) são as forças longitudinais exercidas pelo veículo pelas rodas e (F_{wR}, F_{wL}) são as forças laterais exercidas pelas rodas sobre o veículo. θ é a orientação do robô, ω é a sua velocidade angular e m é sua massa. Como pode ser visto no diagrama da figura 3, as únicas forças atuando sobre o robô são as forças dos atuadores sobre as rodas do veículo.

Nesta abordagem, deve-se representar o robô usando coordenadas polares. Assumindo o robô como um corpo rígido, suas coordenadas polares no referencial inercial pode ser representada usando o vetor complexo:

$$\hat{r} = r e^{j\theta} \quad (43)$$

Derivando o vetor posição em respeito ao tempo, tem-se a velocidade e aceleração do robô no referencial inercial:

$$\dot{r} = \dot{r}e^{j\theta} + jr\dot{\theta}e^{j\theta} \quad (44)$$

$$\ddot{r} = \ddot{r}e^{j\theta} + 2j\dot{r}\dot{\theta}e^{j\theta} + jr\ddot{\theta}e^{j\theta} - r\dot{\theta}^2e^{j\theta} \quad (45)$$

Simplifica-se as equações acima escrevendo a velocidade e aceleração em termos de suas componentes radiais e tangenciais:

$$\dot{r} = [\dot{r}]e^{j\theta} + [r\dot{\theta}]e^{j(\theta+\frac{\pi}{2})} \quad (46)$$

$$\ddot{r} = [\ddot{r} - r\dot{\theta}^2]e^{j\theta} + [2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}]e^{j(\theta+\frac{\pi}{2})} \quad (47)$$

Sendo estas componentes definidas como:

$$v_u = \dot{r} \quad (48)$$

$$v_w = r\dot{\theta} \quad (49)$$

$$a_u = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \quad (50)$$

$$a_w = 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} \quad (51)$$

Dada as equações das componentes de velocidade e aceleração do robô, pode-se escrever as seguintes relações entre as componentes radiais e tangenciais:

$$a_u = \dot{v}_u - v_w\dot{\theta} \quad (52)$$

$$a_w = 2v_u\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = v_w \frac{(2v_u^2 + r^2)}{rr} \quad (53)$$

Estas são as equações fundamentais de aceleração para o robô. O próximo passo é escrever a segunda lei de Newton de movimento no referencial local do robô, a fim de encontrar a relação entre as forças, torque e aceleração. O DDMR possui dois tipos de movimento: translações nas direções radiais e tangenciais, e rotações em torno do eixo vertical do centro de massa. Seja M a massa total do robô e J o momento de inércia em respeito ao centro de massa. As equações dinâmicas de movimento são:

$$Ma_u = F_{u_L} + F_{u_R} \quad (54)$$

$$Ma_w = F_{w_L} - F_{w_R} \quad (55)$$

$$J\ddot{\theta} = (F_{u_R} - F_{u_L})L + (F_{w_R} - F_{w_L})d \quad (56)$$

Substituindo os termos de aceleração encontrados anteriormente nas equações 52 e 53:

$$\dot{v}_u = v_w\dot{\theta} + \frac{F_{u_L} + F_{u_R}}{M} \quad (57)$$

$$\dot{v}_w = \dot{r}r \left(\frac{F_{w_L} - F_{w_R}}{M(2v_u^2 + r^2)} \right) \quad (58)$$

$$\ddot{\theta} = \frac{L}{J}(F_{u_R} - F_{u_L}) + \frac{d}{J}(F_{w_R} - F_{w_L}) \quad (59)$$

A ausência de escorregamento na direção longitudinal e sem deslizamento na direção lateral cria uma independência entre as velocidades longitudinais, laterais e angulares, o que simplifica as equações dinâmicas. As restrições não-holonômicas são levadas em consideração ao definir a velocidade do ponto

central A como zero. Usando a transformação $R(\theta)$, encontra-se a velocidade do centro de massa C no referencial inercial:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_c \\ \dot{y}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} v_u \\ v_w \end{bmatrix} \quad (60)$$

Dada as componentes da posição do centro de massa, mostrada na equação 21, encontra-se a velocidade do ponto central A no referencial inercial. Pode ser visto que a velocidade lateral de A no referencial do robô é $v_w = d\dot{\theta}$. Combinando as equações acima, tem-se que as equações dinâmicas do robô considerando as restrições não-holonômicas:

$$\dot{v}_u = d\dot{\theta}^2 + \frac{1}{M}(F_{u_L} + F_{u_R}) \quad (61)$$

$$\ddot{\theta} = \frac{L}{Md^2 + J}(F_{u_R} - F_{u_L}) - \frac{Mdv_u}{Md^2 + J}\dot{\theta} \quad (62)$$

Estas equações podem facilmente ser transformadas para evidenciar os torques dos atuadores aplicados nas rodas, de forma similar as notações utilizadas na abordagem de Lagrange.

$$M\dot{v}_u - Md\dot{\theta}^2 = \frac{1}{R}(\tau_R + \tau_L) \quad (63)$$

$$(Md^2 + J)\ddot{\theta} + Mdv_u\dot{\theta} = \frac{L}{R}(\tau_R - \tau_L) \quad (64)$$

e quando escritas na forma matricial, tem-se:

$$\begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & Md^2 + J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{v}_u \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -Md\dot{\theta} \\ Md\dot{\theta} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_u \\ \theta \end{bmatrix} = \frac{1}{R} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ L & -L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_R \\ \tau_L \end{bmatrix} \quad (65)$$

Conforme observado, percebe-se que as equações resultantes em ambas as abordagens de modelagem dinâmica são semelhantes. Nota-se que a abordagem de Newton-Euler não leva em consideração a massa e a inércia das rodas, uma vez que o robô é considerado como um único corpo rígido. No entanto, ambas formulações são equivalentes se os parâmetros de inércia e massa são definidos como $M = m_c$ e $J = I_c$.

Usando as equações do modelo cinemático, pode-se facilmente reescrever as equações dinâmicas gerais encontradas em termos das velocidades angulares das rodas e dos torques aplicados pelos atuadores. Isto leva a seguinte formulação:

$$\begin{aligned} \left(\frac{R(Md^2 + J)}{4L^2} + \frac{MR}{4} \right) \ddot{\varphi}_R + \left(-\frac{R(Md^2 + J)}{4L^2} + \frac{MR}{4} \right) \ddot{\varphi}_L \\ - \left(\frac{MdR^2}{4L^2} \right) \dot{\varphi}_L^2 + \left(\frac{MdR^2}{4L^2} \right) \dot{\varphi}_R \dot{\varphi}_L = \frac{1}{R} \tau_R \end{aligned} \quad (66)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{R(Md^2 + J)}{4L^2} + \frac{MR}{4} \right) \ddot{\varphi}_L + \left(-\frac{R(Md^2 + J)}{4L^2} + \frac{MR}{4} \right) \ddot{\varphi}_R \\ - \left(\frac{MdR^2}{4L^2} \right) \dot{\varphi}_R^2 + \left(\frac{MdR^2}{4L^2} \right) \dot{\varphi}_L \dot{\varphi}_R = \frac{1}{R} \tau_L \end{aligned} \quad (67)$$

que é equivalente ao modelo dinâmico encontrado a partir da abordagem Lagrangiana.

A figura 4 mostra o modelo dinâmico representado pelas equações 63-64. Ela ilustra o acoplamento entre os torques dos motores, velocidades lineares e angulares do robô e a velocidade das rodas, podendo este modelo ser utilizado para simulação e análise.

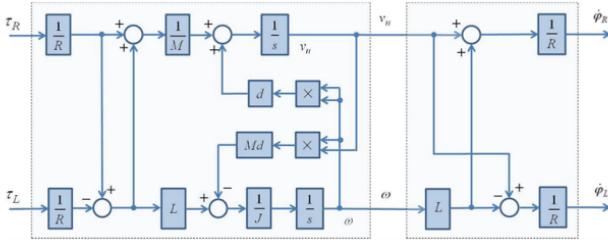


Fig. 4: Modelo Dinâmico para o DDMR

VI. MODELAGEM DO ATUADOR

Motores de corrente contínua (CC) são amplamente utilizados para atuar sobre as rodas de DDMR's. Em um motor CC controlado pela armadura, mantém-se as condições do circuito de campo constantes, enquanto a tensão de armadura é utilizada como entrada de controle para o sistema. Em particular, para um motor CC com imã-permanente, tem-se as seguintes equações para o circuito de armadura do motor:

$$\begin{cases} v_a = R_a i_a + L_a \frac{di_a}{dt} + e_a \\ e_a = K_b \omega_m \\ \tau_m = K_t i_a \\ \tau = N \tau_m \end{cases} \quad (68)$$

Onde i_a é a corrente de armadura, (R_a, L_a) são as resistências e indutâncias equivalentes do motor, respectivamente; e_a é a força contra-eletromotriz, w_m é a velocidade angular do rotor; τ_m é o torque do motor; (K_t, K_b) são as constantes de torque do motor e a constante da força contra-eletromotriz, respectivamente; N é a relação de transmissão e τ é o torque de saída aplicado ao pneu.

Uma vez que o eixo dos motores são mecanicamente acoplados com as rodas através de uma caixa de redução, as equações mecânicas de movimento dos motores estão diretamente conectadas com as equações dinâmicas do DDMR. Portanto, para cada motor CC, tem-se:

$$\begin{cases} \omega_{m_R} = N \dot{\phi}_R \\ \omega_{m_L} = N \dot{\phi}_L \end{cases} \quad (69)$$

As equações dinâmicas totais do DDMR considerando a modelagem dos atuadores são obtidas combinando as equações do circuito de armadura para cada motor com a dinâmica do DDMR. Distúrbios adicionais atuando sobre as rodas podem ser incluídas como termos aditivos no torque do motor. A figura 5 ilustra uma representação completa do sistema. O modelo cinemático derivado anteriormente pode ser incluído em cascata com a saída do modelo apresentado na figura 5 para formar um modelo completo para simulação e análise do comportamento do DDMR.

VII. CONCLUSÃO

Foi apresentado uma formulação detalhada para o modelo dinâmico de um robô móvel de tração diferencial usando ambos os métodos de Lagrange e Newton-Euler. Eles se mostraram matematicamente equivalentes, mostrando-se consistentes. As equações de movimento para motores de corrente contínua

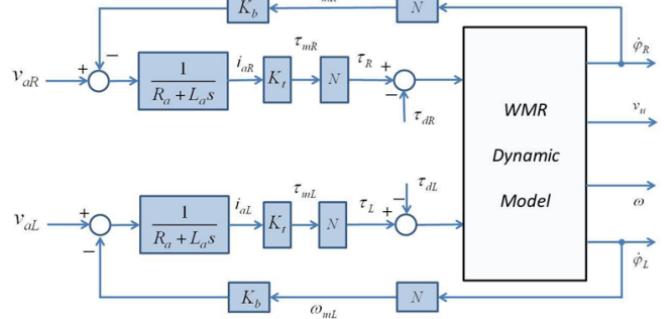


Fig. 5: Modelo dinâmico do DDMR com os atuadores

também foram adicionadas para formar um modelo dinâmico completo. O estudo apresentado será capaz de auxiliar estudantes de engenharia e pesquisadores na modelagem e projeto de controladores para navegação e rastreio destes robôs.