1) Prove que $P(n)$: $\sum_{i=0}^{n} r^i = \dfrac{r^{n+1}-1}{r-1}$, para todos os inteiros $n \geq 0$ e para todos os reais r, $r \neq 1$.

1) Passo Base: $P(n_0) = P(0)$: Para $n_0 = 0$, $r^0 = 1 = \dfrac{r^{0+1}-1}{r-1} = \dfrac{r-1}{r-1} = 1$ e a fórmula é verdadeira para $n_0 = 0$.

2) Passo Indutivo: Se a fórmula é verdadeira para $n = k$, então deve ser verdadeira para $n = k+1$, i.e., $P(k) \rightarrow P(k+1)$.

- $P(k) = \sum_{i=0}^{k} r^i = \dfrac{r^{k+1}-1}{r-1}$, para $k \geq 0$. (Hipótese Indutiva)

- Devemos mostrar que $P(k+1) = \sum_{i=0}^{k+1} r^i = \dfrac{r^{(k+1)+1}-1}{r-1} = \dfrac{r^{k+2}-1}{r-1}$.

- Vejamos:

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{k+1} r^i &= \overbrace{\sum_{i=0}^{k} r^i}^{P(k)} + r^{k+1} \\
&= \frac{r^{k+1}-1}{r-1} + r^{k+1} \\
&= \frac{r^{k+1}-1+r^{k+1}(r-1)}{r-1} \\
&= \frac{r^{k+1}-1+r^{k+1}.r-r^{k+1}}{r-1} \\
&= \frac{r^{k+2}-1}{r-1}
\end{aligned}
$$

- Portanto, $\sum_{i=0}^{k+1} r^i = \dfrac{r^{k+2}-1}{r-1}$.

$\blacksquare$

2) Prove que $P(n)$: $2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 1$, $\forall\ n \geq 0$.

1) Passo Base: $P(n_0) = P(0)$: Para $n_0 = 0$, $2^0 = 1 = 2^{0+1} - 1 = 2^1 - 1 = 1$ e a fórmula é verdadeira para $n_0 = 0$.

2) Passo Indutivo: Se a fórmula é verdadeira para $n = k$, então deve ser verdadeira para $n = k+1$, i.e., $P(k) \rightarrow P(k+1)$.

- $P(k) = 2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^k = 2^{k+1} - 1$, para $k \geq 0$. (Hipótese Indutiva)

- Devemos mostrar que $P(k+1) = 2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^{k+1} = 2^{k+1+1} - 1 = 2^{k+2} - 1$.

- Vejamos:

$$
\begin{aligned}
2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^{k+1} &= \overbrace{2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^k}^{P(k)} + 2^{k+1} \\
&= (2^{k+1} - 1) + 2^{k+1} \\
&= 2.2^{k+1} - 1 \\
&= 2^{k+2} - 1
\end{aligned}
$$

- Portanto, $2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1$.

$\blacksquare$

3) Prove que $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1) = n^2$, $\forall\, n \geq 1$.

1) Passo Base: $P(n_0) = P(1)$: Para $n_0 = 1$, $1 = 1^2$ e a fórmula é verdadeira para $n_0 = 1$.

2) Passo Indutivo: Se a fórmula é verdadeira para $n = k$, então deve ser verdadeira para $n = k+1$, i.e., $P(k) \rightarrow P(k+1)$.

- $P(k) = 1 + 3 + 5 + \ldots + (2k-1) = k^2$, para $k \geq 1$. (Hipótese Indutiva)

- Devemos mostrar que $P(k+1) = 1 + 3 + 5 + \ldots + (2(k+1)-1) = (k+1)^2$.

- Vejamos:

$$
\begin{aligned}
1 + 3 + 5 + \ldots + (2(k+1)-1) &= \overbrace{1 + 3 + 5 + \ldots + (2k-1)}^{P(k)} + (2(k+1)-1) \\
&= k^2 + (2(k+1)-1) \\
&= k^2 + 2k + 2 - 1 \\
&= k^2 + 2k + 1 \\
&= (k+1)^2
\end{aligned}
$$

- Portanto, $1 + 3 + 5 + \ldots + (2(k+1)-1) = (k+1)^2$.

$\blacksquare$

4) Prove que é falsa a seguinte afirmação $P(n)$: $\sum_{i=0}^{n} i = \dfrac{n(n+2)}{2}$, para todos os inteiros $n \geq 0$.

1) Passo Base: $P(n_0) = P(0)$: Para $n_0 = 0$, $0 = \dfrac{0(0+2)}{2} = \dfrac{0.2}{2} = 0$ e a fórmula é verdadeira para $n_0 = 0$.

2) Passo Indutivo: Se a fórmula é verdadeira para $n = k$, então deve ser verdadeira para $n = k+1$, i.e., $P(k) \rightarrow P(k+1)$.

- $P(k) = \sum_{i=0}^{k} i = \dfrac{k(k+2)}{2}$, para $k \geq 0$. (Hipótese Indutiva)

- Devemos mostrar que $P(k+1) = \sum_{i=0}^{k+1} i = \dfrac{(k+1)(k+3)}{2} = \dfrac{k^2+4k+3}{2}$.

- Vejamos:

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{k+1} i &= \overbrace{\sum_{i=0}^{k} i}^{P(k)} + (k+1) \\
&= \frac{k(k+2)}{2} + (k+1) \\
&= \frac{k(k+2)+2(k+1)}{2} \\
&= \frac{k^2+2k+2k+2}{2} \\
&= \frac{k^2+4k+2}{2}
\end{aligned}
$$

- Portanto, não foi possível chegar à conclusão a partir da hipótese. Isto significa que o predicado é falso.

$\blacksquare$

5) Prove que $2 + 6 + 10 + \ldots + (4n - 2) = 2n^2$, para todo inteiro positivo n.

1) Passo Base: $P(n_0) = P(1)$: Para $n_0 = 1$, $4.1 - 2 = 2 = 2.1^2$ e a fórmula é verdadeira para $n_0 = 1$.

2) Passo Indutivo: Se a fórmula é verdadeira para $n = k$, então deve ser verdadeira para $n = k+1$, i.e., $P(k) \to P(k+1)$.

- $P(k) = 2 + 6 + 10 + \ldots + (4k - 2) = 2k^2$, para todo inteiro positivo k. (Hipótese Indutiva)

- Devemos mostrar que $P(k+1) = 2 + 6 + 10 + \ldots + (4(k+1) - 2) = 2(k+1)^2$.

- Vejamos:

$$
\begin{aligned}
2 + 6 + 10 + \ldots + (4(k+1) - 2) &= \overbrace{2 + 6 + 10 + \ldots + (4k - 2)}^{P(k)} + (4(k+1) - 2) \\
&= 2k^2 + (4(k+1) - 2) \\
&= 2k^2 + 4k + 4 - 2 \\
&= 2k^2 + 4k + 2 \\
&= 2(k^2 + 2k + 1) \\
&= 2(k+1)^2
\end{aligned}
$$

- Portanto, $2 + 6 + 10 + \ldots + (4(k+1) - 2) = 2(k+1)^2$.

$\blacksquare$

6) Prove que $1^2+3^2+\ldots+(2n-1)^2=\dfrac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$, para todo inteiro positivo n.

1) Passo Base: $P(n_0)=P(1)$: Para $n_0=1$, $(2.1-1)^2=1^2=\dfrac{1(2.1-1).(2.1+1)}{3}=\dfrac{1.3}{3}=1$ e a fórmula é verdadeira para $n_0=1$.

2) Passo Indutivo: Se a fórmula é verdadeira para $n=k$, então deve ser verdadeira para $n=k+1$, i.e., $P(k)\rightarrow P(k+1)$.

- $P(k)=1^2+3^2+\ldots+(2k-1)^2=\dfrac{k(2k-1)(2k+1)}{3}$, para todo inteiro positivo k. (Hipótese Indutiva)

- Devemos mostrar que $P(k+1)=1^2+3^2+\ldots+(2(k+1)-1)^2=\dfrac{(k+1)(2(k+1)-1)(2(k+1)+1)}{3}=\dfrac{(k+1)(2k+1)(2k+3)}{3}$.

- Vejamos:

$$
\begin{aligned}
1^2+3^2+\ldots+(2(k+1)-1)^2 &= \overbrace{1^2+3^2+\ldots+(2k-1)^2}^{P(k)}+(2(k+1)-1)^2\\
&= \frac{k(2k-1)(2k+1)}{3}+(2(k+1)-1)^2\\
&= \frac{k(2k-1)(2k+1)+3(2(k+1)-1)^2}{3}\\
&= \frac{k(2k-1)(2k+1)+3(2k+1)^2}{3}\\
&= \frac{k(2k-1)(2k+1)+3(2k+1)(2k+1)}{3}\\
&= \frac{(2k+1)(k(2k-1)+3(2k+1))}{3}\\
&= \frac{(2k+1)(2k^2-k+6k+3)}{3}\\
&= \frac{(2k+1)(2k^2+5k+3)}{3}\\
&= \frac{(2k+1)(k+1)(2k+3)}{3}
\end{aligned}
$$

- Portanto, $1^2+3^2+\ldots+(2(k+1)-1)^2=\dfrac{(k+1)(2k+1)(2k+3)}{3}$.

$\blacksquare$

7) Prove que $\dfrac{1}{1\times 2}+\dfrac{1}{2\times 3}+\dfrac{1}{3\times 4}+\ldots+\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{n}{n+1}$, para todo inteiro positivo n.

1) Passo Base: $P(n_0)=P(1)$: Para $n_0=1$, $\dfrac{1}{1(1+1)}=\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{1+1}=\dfrac{1}{2}$ e a fórmula é verdadeira para $n_0=1$.

2) Passo Indutivo: Se a fórmula é verdadeira para $n=k$, então deve ser verdadeira para $n=k+1$, i.e., $P(k)\rightarrow P(k+1)$.

- $P(k)=\dfrac{1}{1\times 2}+\dfrac{1}{2\times 3}+\dfrac{1}{3\times 4}+\ldots+\dfrac{1}{k(k+1)}=\dfrac{k}{k+1}$, para todo inteiro positivo k. (Hipótese Indutiva)

- Devemos mostrar que $P(k+1)=\dfrac{1}{1\times 2}+\dfrac{1}{2\times 3}+\dfrac{1}{3\times 4}+\ldots+\dfrac{1}{(k+1)(k+2)}=\dfrac{k+1}{k+2}$.

- Vejamos:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\ldots+\frac{1}{(k+1)(k+2)} &= \overbrace{\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\ldots+\frac{1}{k(k+1)}}^{P(k)}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}\\
&= \frac{k}{k+1}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}\\
&= \frac{k(k+2)+1}{(k+1)(k+2)}\\
&= \frac{k^2+2k+1}{(k+1)(k+2)}\\
&= \frac{(k+1)(k+1)}{(k+1)(k+2)}\\
&= \frac{k+1}{k+2}
\end{aligned}$$

- Portanto, $\dfrac{1}{1\times 2}+\dfrac{1}{2\times 3}+\dfrac{1}{3\times 4}+\ldots+\dfrac{1}{(k+1)(k+2)}=\dfrac{k+1}{k+2}$.

$\blacksquare$

8) Prove que $4 + 10 + 16 + \ldots + (6n - 2) = n(3n + 1)$, para todo inteiro positivo n.

1) Passo Base: $P(n_0) = P(1)$: Para $n_0 = 1$, $(6.1 - 2) = 4 = 1(3.1 + 1) = 4$ e a fórmula é verdadeira para $n_0 = 1$.

2) Passo Indutivo: Se a fórmula é verdadeira para $n = k$, então deve ser verdadeira para $n = k+1$, i.e., $P(k) \rightarrow P(k+1)$.

- $P(k) = 4 + 10 + 16 + \ldots + (6k - 2) = k(3k + 1)$, para todo inteiro positivo k. (Hipótese Indutiva)

- Devemos mostrar que $P(k+1) = 4+10+16+\ldots+(6(k+1)-2) = (k+1)(3(k+1)+1) = (k+1)(3k+4)$.

- Vejamos:

$$\begin{aligned}
4 + 10 + 16 + \ldots + (6(k+1) - 2) &= \overbrace{4 + 10 + 16 + \ldots + (6k - 2)}^{P(k)} + (6(k+1) - 2) \\
&= k(3k + 1) + (6(k + 1) - 2) \\
&= 3k^2 + k + 6k + 6 - 2 \\
&= 3k^2 + 7k + 4 \\
&= (k + 1)(3k + 4)
\end{aligned}$$

- Portanto, $4 + 10 + 16 + \ldots + (6(k + 1) - 2) = (k + 1)(3k + 4)$.

$\blacksquare$

9) Prove que $P(n)$: $2^{2n} - 1$ é divisível por 3, $\forall\ n \geq 1$.

1) Passo Base: $P(n_0) = P(1)$: Para $n_0 = 1$, $2^{2.1} - 1 = 4 - 1 = 3$, que é divisível por 3, e a fórmula é verdadeira para $n_0 = 1$.

2) Passo Indutivo: Se a fórmula é verdadeira para $n = k$, então deve ser verdadeira para $n = k+1$, i.e., $P(k) \rightarrow P(k+1)$.

- $P(k) = 2^{2k} - 1$ é divisível por 3, para $k \geq 1$. (Hipótese Indutiva)

- Devemos mostrar que $P(k+1) = 2^{2(k+1)} - 1$ é divisível por 3.

- Vejamos:

Pela Hipótese de Indução, $2^{2k} - 1$ é divisível por 3. Então, temos que:

$$\begin{aligned} 2^{2k} - 1 &= 3m, \text{ para algum inteiro } m. \\ 2^{2k} &= 3m + 1 \end{aligned}$$

Assim:

$$\begin{aligned} 2^{2(k+1)} - 1 &= 2^{2k+2} - 1 \\ &= 2^2.2^{2k} - 1 \\ &= 2^2(3m+1) - 1 \\ &= 12m + 4 - 1 \\ &= 12m + 3 \\ &= 3(4m+1), \text{ que é divisível por 3,} \\ &\qquad \text{pois } (4m+1) \text{ é inteiro.} \end{aligned}$$

- Portanto, $2^{2(k+1)} - 1$ é divisível por 3.

■

10) Prove que, para qualquer inteiro positivo n, $2^n > n$.

1) Passo Base: $P(n_0) = P(1)$: Para $n_0 = 1$, $2^1 > 1$ e a fórmula é verdadeira para $n_0 = 1$.

2) Passo Indutivo: Se a fórmula é verdadeira para $n = k$, então deve ser verdadeira para $n = k+1$, i.e., $P(k) \rightarrow P(k+1)$.

- $P(k) = 2^k > k$, para qualquer inteiro positivo k. (Hipótese Indutiva)

- Devemos mostrar que $P(k+1) = 2^{k+1} > k+1$.

- Vejamos:

$$\begin{aligned}
2^{k+1} &= 2^k.2 \\
&= 2^k.2 > k.2 \quad (\textit{multiplicou-se por 2 os dois lados de } 2^k > k) \\
&= 2^k.2 > k+k \\
&= 2^k.2 > k+k \geq k+1
\end{aligned}$$

Logo:

$$2^{k+1} > k+1$$

- Portanto, $2^{k+1} > k+1$.

■