1) Resolva as seguintes relações de recorrência, sujeito à condição básica, e faça a verificação:

(a) $\begin{cases} T(1) = 1 \\ T(n) = T(n-1) + 3, \quad \text{para} \quad n \geq 2 \end{cases}$

- Expandindo a Relação de Recorrência, temos:

$$\begin{aligned} T(n) &= T(n-1) + 3 \\ &= \overbrace{T(n-2) + 3}^{T(n-1)} + 3 \\ &= \overbrace{T(n-3) + 3}^{T(n-2)} + 3 + 3 \\ &= \overbrace{T(n-4) + 3}^{T(n-3)} + 3 + 3 + 3 \\ &= T(n-4) + 3 \times 4 \end{aligned}$$

- Assim, após k passos, temos:

$$T(n) = T(n-k) + 3 \times k \quad (1)$$

- Ao final esperamos obter:

$$\begin{aligned} (n-k) &= 1 && (\textit{A execução finaliza em } T(1), \textit{ i.e., quando } (n-k) \textit{ atingir } 1) \\ k &= n-1 && (2) \end{aligned}$$

- Substituindo (2) em (1):

$$\begin{aligned} T(n) &= T(n-(n-1)) + 3 \times (n-1) \\ &= T(1) + 3n - 3 \\ &= 1 + 3n - 3 && (T(1) = 1, \textit{ de acordo com a Condição Básica}) \\ &= 3n - 2 && (\textit{Solução em Forma Fechada - SFF}) \end{aligned}$$

- Então, devemos provar que $T(n) = 3n - 2$, para $n \geq 1$.

1) **Passo Base**: $T(n_0) = T(1)$: Para $n_0 = 1$, $3.1 - 2 = 1$ e a fórmula é verdadeira para $n_0 = 1$.

2) **Passo Indutivo**: Se a fórmula é verdadeira para $n = k$, então deve ser verdadeira para $n = k+1$, i.e., $T(k) \rightarrow T(k+1)$.

- $T(k) = 3k - 2$, para $k \geq 1$. (Hipótese Indutiva)

- Devemos mostrar que $T(k+1) = 3(k+1) - 2 = 3k + 1$.

- Vejamos:

$$\begin{aligned} T(k+1) &= T(k) + 3 \\ &= (3k-2) + 3 \\ &= 3k + 1 \end{aligned}$$

- Portanto, $T(n) = 3n - 2$, para $n \geq 1$, é verdade.

■

(b) $\begin{cases} T(1) = 10 \\ T(n) = T(n-1) + 10, \ \text{ para } \ n \geq 2 \end{cases}$

- Expandindo a Relação de Recorrência, temos:

$$\begin{aligned} T(n) &= T(n-1) + 10 \\ &= \overbrace{T(n-2) + 10}^{T(n-1)} + 10 \\ &= \overbrace{T(n-3) + 10}^{T(n-2)} + 10 + 10 \\ &= \overbrace{T(n-4) + 10}^{T(n-3)} + 10 + 10 + 10 \\ &= T(n-4) + 10 \times 4 \end{aligned}$$

- Assim, após k passos, temos:

$$T(n) = T(n-k) + 10 \times k \tag{3}$$

- Ao final esperamos obter:

$$\begin{aligned} (n-k) &= 1 && (\textit{A execução finaliza em } T(1), \textit{ i.e., quando } (n-k) \textit{ atingir } 1) \\ k &= n-1 && (4) \end{aligned}$$

- Substituindo (4) em (3):

$$\begin{aligned} T(n) &= T(n-(n-1)) + 10 \times (n-1) \\ &= T(1) + 10n - 10 \\ &= 10 + 10n - 10 && (T(1) = 10, \textit{ de acordo com a Condição Básica}) \\ &= 10n && (\textit{Solução em Forma Fechada - SFF}) \end{aligned}$$

- Então, devemos provar que $T(n) = 10n$, para $n \geq 1$.

1) **Passo Base**: $T(n_0) = T(1)$: Para $n_0 = 1$, $10.1 = 10$ e a fórmula é verdadeira para $n_0 = 1$.

2) **Passo Indutivo**: Se a fórmula é verdadeira para $n = k$, então deve ser verdadeira para $n = k+1$, i.e., $T(k) \rightarrow T(k+1)$.

- $T(k) = 10k$, para $k \geq 1$. (Hipótese Indutiva)

- Devemos mostrar que $T(k+1) = 10(k+1)$.

- Vejamos:

$$\begin{aligned} T(k+1) &= T(k) + 10 \\ &= 10k + 10 \\ &= 10(k+1) \end{aligned}$$

- Portanto, $T(n) = 10n$, para $n \geq 1$, é verdade.

■

(c) $\begin{cases} T(1) = 1 \\ T(n) = n \times T(n-1), \text{ para } n \geq 2 \end{cases}$

- Expandindo a Relação de Recorrência, temos:

$$\begin{aligned}
T(n) &= n \times T(n-1) \\
&= n \times \overbrace{(n-1) \times T(n-2)}^{T(n-1)} \\
&= n \times (n-1) \times \overbrace{(n-2) \times T(n-3)}^{T(n-2)} \\
&= n \times (n-1) \times (n-2) \times \overbrace{(n-3) \times T(n-4)}^{T(n-3)} \\
&= n \times (n-1) \times (n-2) \times (n-3) \times \overbrace{(n-4) \times T(n-5)}^{T(n-4)}
\end{aligned}$$

- Assim, após k passos, temos:

$$T(n) = n \times (n-1) \times (n-2) \times (n-3) \times \ldots \times (n-(k-1)) \times T(n-k) \tag{5}$$

- Ao final esperamos obter:

$$\begin{aligned}
(n-k) &= 1 \qquad (\textit{A execução finaliza em } T(1), \textit{ i.e., quando } (n-k) \textit{ atingir } 1) \\
k &= n-1 \qquad (6)
\end{aligned}$$

- Substituindo (6) em (5):

$$\begin{aligned}
T(n) &= n \times (n-1) \times (n-2) \times (n-3) \times \ldots \times (n-(n-1-1)) \times T(n-(n-1)) \\
&= n \times (n-1) \times (n-2) \times (n-3) \times \ldots \times 2 \times T(1) \\
&= n \times (n-1) \times (n-2) \times (n-3) \times \ldots \times 2 \times 1 \\
&= n! \qquad (\textit{SFF})
\end{aligned}$$

- Então, devemos provar que $T(n) = n!$, para $n \geq 1$.

1) **Passo Base**: $T(n_0) = T(1)$: Para $n_0 = 1$, $1! = 1$ e a fórmula é verdadeira para $n_0 = 1$.

2) **Passo Indutivo**: Se a fórmula é verdadeira para $n = k$, então deve ser verdadeira para $n = k+1$, i.e., $T(k) \rightarrow T(k+1)$.

- $T(k) = k!$, para $k \geq 1$. (Hipótese Indutiva)

- Devemos mostrar que $T(k+1) = (k+1)!$.

- Vejamos:

$$\begin{aligned}
T(k+1) &= (k+1) \times T(k) \\
&= (k+1) \times k! \\
&= (k+1)!
\end{aligned}$$

- Portanto, $T(n) = n!$, para $n \geq 1$, é verdade.

$\blacksquare$