1) Resolva as seguintes relações de recorrência, sujeito à condição básica, e faça a verificação:

(a) $\begin{cases} T(1) = 1 \\ T(n) = T(n-1) + \dfrac{1}{n}, \ \text{para} \ \ n > 1 \end{cases}$

- Expandindo a Relação de Recorrência, temos:

$$\begin{aligned}
T(n) &= T(n-1) + \frac{1}{n} \\
&= \overbrace{T(n-2) + \frac{1}{(n-1)}}^{T(n-1)} + \frac{1}{n} \\
&= \overbrace{T(n-3) + \frac{1}{(n-2)}}^{T(n-2)} + \frac{1}{(n-1)} + \frac{1}{n} \\
&= \overbrace{T(n-4) + \frac{1}{(n-3)}}^{T(n-3)} + \frac{1}{(n-2)} + \frac{1}{(n-1)} + \frac{1}{n} \\
&= T(n-4) + \sum_{i=0}^{3} \frac{1}{(n-i)}
\end{aligned}$$

- Assim, após k passos, temos:

$$T(n) = T(n-k) + \sum_{i=0}^{k-1} \frac{1}{(n-i)} \tag{1}$$

- Ao final esperamos obter:

$$\begin{aligned}
(n-k) &= 1 \\
k &= n-1 \qquad (2)
\end{aligned}$$

- Substituindo (2) em (1):

$$\begin{aligned}
T(n) &= T(n-(n-1)) + \sum_{i=0}^{(n-1)-1} \frac{1}{(n-i)} \\
&= T(1) + \sum_{i=0}^{n-2} \frac{1}{(n-i)} \\
&= \ \ 1 \ \ + \sum_{i=0}^{n-2} \frac{1}{(n-i)} \\
&= \frac{1}{(n-(n-1))} + \sum_{i=0}^{n-2} \frac{1}{(n-i)} \qquad \left(1 = \frac{1}{1} = \frac{1}{(n-(n-1))}\right) \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{(n-i)} \qquad \left(\textit{a parcela } \frac{1}{(n-(n-1))} \textit{ foi inserida no somatório}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \qquad (\textit{SFF})
\end{aligned}$$

- Então, devemos provar que $T(n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$, para $n \geq 1$.

1) **Passo Base**: $T(n_0) = T(1)$: Para $n_0 = 1$, $\sum_{i=1}^{1} \frac{1}{i} = 1$ e a fórmula é verdadeira para $n_0 = 1$.

2) **Passo Indutivo**: Se a fórmula é verdadeira para $n = k$, então deve ser verdadeira para $n = k+1$, i.e., $T(k) \rightarrow T(k+1)$.

- $T(k) = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i}$, para $k \geq 1$. (Hipótese Indutiva)

- Devemos mostrar que $T(k+1) = \sum_{i=1}^{k+1} \frac{1}{i}$.

- Vejamos:

$$
\begin{aligned}
T(k+1) &= T(k) + \frac{1}{k+1} \\
&= \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i} + \frac{1}{k+1} \\
&= \sum_{i=1}^{k+1} \frac{1}{i}
\end{aligned}
$$

- Portanto, $T(n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$, para $n \geq 1$, é verdade.

■

2) Faça uma função recursiva que, dado um número natural $n \geq 1$, imprima a soma dos n primeiros números naturais, ou seja, $\sum_{i=1}^{n} i$. Em seguida, encontre e resolva a relação de recorrência da função, fazendo a sua verificação.

```
int soma(int n){
   if(n == 1)
      return 1;
   else
      return n + soma(n − 1);
}
```

- Condição Básica e Relação de Recorrência referentes ao algoritmo:

$$\begin{cases} T(1) = 1 \\ T(n) = n + T(n-1), \text{ para } n \geq 2 \end{cases}$$

- Expandindo a Relação de Recorrência, temos:

$$\begin{aligned} T(n) &= n + T(n-1) \\ &= n + \overbrace{(n-1) + T(n-2)}^{T(n-1)} \\ &= n + (n-1) + \overbrace{(n-2) + T(n-3)}^{T(n-2)} \\ &= n + (n-1) + (n-2) + \overbrace{(n-3) + T(n-4)}^{T(n-3)} \end{aligned}$$

- Assim, após k passos, temos:

$$T(n) = n + (n-1) + (n-2) + (n-3) + \ldots + (n-(k-1)) + T(n-k) \tag{3}$$

- Ao final esperamos obter:

$$\begin{aligned} (n-k) &= 1 \qquad (\textit{A execução finaliza em } T(1), \textit{ i.e., quando } (n-k) \textit{ atingir } 1) \\ k &= n-1 \end{aligned} \tag{4}$$

- Substituindo (4) em (3):

$$\begin{aligned} T(n) &= n + (n-1) + (n-2) + (n-3) + \ldots + (n-(n-1-1)) + T(n-(n-1)) \\ &= n + (n-1) + (n-2) + (n-3) + \ldots + 2 + T(1) \\ &= n + (n-1) + (n-2) + (n-3) + \ldots + 2 + 1 \\ &= \sum_{i=1}^{n} i \\ &= \frac{n(n+1)}{2} \qquad (\textit{SFF}) \end{aligned}$$

- Então, devemos provar que $T(n) = \dfrac{n(n+1)}{2}$, para $n \geq 1$.

1) **Passo Base**: $T(n_0) = T(1)$: Para $n_0 = 1$, $\dfrac{1(1+1)}{2} = 1$ e a fórmula é verdadeira para $n_0 = 1$.

2) **Passo Indutivo**: Se a fórmula é verdadeira para $n = k$, então deve ser verdadeira para $n = k+1$, i.e., $T(k) \rightarrow T(k+1)$.

- $T(k) = \dfrac{k(k+1)}{2}$, para $k \geq 1$. (Hipótese Indutiva)

- Devemos mostrar que $T(k+1) = \dfrac{(k+1)(k+2)}{2}$.

- Vejamos:

$$
\begin{aligned}
T(k+1) &= T(k) + (k+1) \\
&= \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) \\
&= \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2} \\
&= \frac{k^2 + k + 2k + 2)}{2} \\
&= \frac{k^2 + 3k + 2)}{2} \\
&= \frac{(k+1)(k+2)}{2}
\end{aligned}
$$

- Portanto, $T(n) = \dfrac{n(n+1)}{2}$, para $n \geq 1$, é verdade.

$\blacksquare$