

**Universidade Tecnológica Federal do
Paraná – UTFPR/CM**
Bacharelado em Ciência da Computação
BCC35B - Teoria dos Grafos
Atividades Práticas Supervisionadas
**Implementação de algoritmo exato para
o Problema da Árvore Geradora de
Rótulos Mínimos**

Prof. Filipe Roseiro Côgo

Semestre 2014/1

Resumo. Este documento especifica a Atividade Prática Supervisionada (APS) a ser realizada na disciplina BCC35B do curso de Bacharelado em Ciência da Computação. Para tanto, são apresentados conceitos básicos relacionados ao Problema da Árvore Geradora de Rótulos Mínimos – PAGRM (do inglês, *minimum labelling spanning tree*) e instruções para a realização da APS, a qual consiste a) na implementação de um algoritmo para o PAGRM que resolva um conjunto de instâncias do problema, b) na comparação dos resultados gerados pelo algoritmo implementado com os resultados reportados na literatura para as mesmas instâncias e, c) na redação de um relatório sobre os resultados dos experimentos realizados sobre as instâncias.

1 Introdução

Um dos problemas fundamentais em teoria dos grafos é a determinação de árvores geradoras mínimas e um problema clássico estudado é o Problema da Árvore Geradora de Pesos Mínimos (PAGPM). Dado um grafo não-dirigido G com pesos não negativos nas arestas, o PAGPM de G é a árvore geradora mínima cujo peso total das arestas é mínimo, dentre todas as possíveis árvores geradoras.

Apesar do PAGPM possuir aplicações em muitas áreas, como projeto de redes e otimização geométrica, variações para o PAGPM foram propostas. Em geral, os problemas consistem em encontrar árvores geradoras mínimas e otimizar alguma medida. O Problema da Árvore Geradora de Rótulos Mínimos (PAGRM) é um desses problemas [1]. Para muitos desses problemas, existem algoritmos em tempo polinomial para resolvê-los, enquanto muitos deles são NP-completo.

Em um PAGRM, é dado um grafo com arestas coloridas e procura-se uma árvore geradora com o mínimo de cores. Tal modelo pode representar problemas do mundo real em redes de comunicação, redes elétricas, redes de transporte multimodais, dentre outros [5]. Por exemplo, em uma rede de comunicação pode haver diferentes tipos de meios de comunicação, tais como fibra ótica, cabo, microondas, linhas telefônicas, etc. Um nó de comunicação pode se comunicar com diferentes nós escolhendo diferentes meios. Dado um conjunto de nós de comunicação, o problema é encontrar uma árvore geradora que utiliza o número mínimo de meios de comunicação. Essa árvore geradora pode reduzir o custo e a complexidade para construção da rede [2, 3].

Assim, o PAGRM pode ser formulado como um problema em grafo da seguinte maneira [5].

Problema da Árvore Geradora de Rótulos Mínimos
Dado um grafo rotulado não-dirigido $G = (V, E, L)$, no qual V é o conjunto de n vértices, E é o conjunto de m arestas e L é o conjunto de l rótulos, encontrar uma árvore geradora T de G tal que $ L_T $ é minimizado. Define-se L_T como o conjunto de diferentes rótulos das arestas em uma árvore geradora T .

Uma solução factível é definida como um conjunto de rótulos $C \subseteq L$, tal que todas as arestas com rótulos em C representam um subgrafo conexo de G o qual contém todos os vértices de G . Se C é uma solução factível, então qualquer árvore geradora possui no máximo $|C|$ rótulos. Se a solução é ótima, então qualquer árvore geradora C é uma árvore geradora de rótulos mínimos. Assim, para resolver o problema, devemos encontrar uma solução factível com o mínimo número de rótulos. A Figura 1 mostra um exemplo para o PAGRM [5].

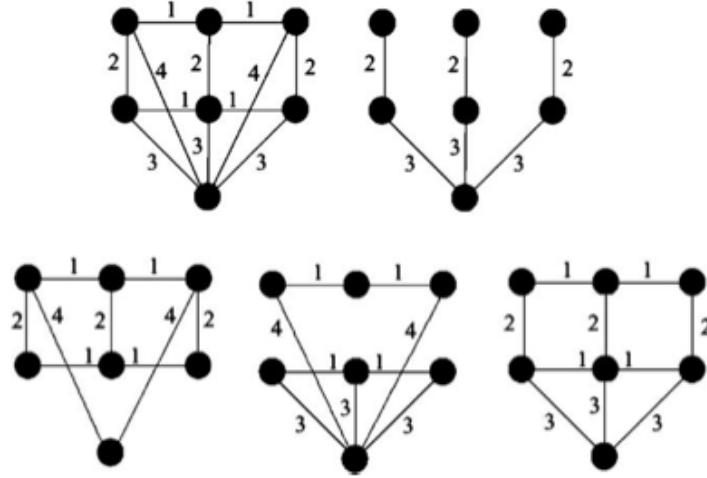


Figura 1: O grafo de cima mais à esquerda mostra um exemplo de instância para o problema; o grafo de cima à direita mostra um exemplo de solução ótima para a instância considerada. Os grafos de baixo mostram algumas soluções factíveis para a instância considerada. Fonte: [5].

O grafo acima mais à esquerda é a instância considerada no exemplo. Uma solução ótima é mostrada à direita desse grafo. A parte de baixo da figura mostra algumas soluções factíveis.

2 Conjunto de instâncias para o PAGRM

Um conjunto de instâncias para o PAGRM é proposto e estudado em [6, 4]. Em [5], os autores utilizam esse conjunto de instâncias para comparar o desempenho de diferentes heurísticas para o PAGRM quanto à qualidade da solução e tempo de execução. Diferentes conjuntos de instâncias foram utilizados a fim de se avaliar como os algoritmos são influenciados por parâmetros, pela estrutura do grafo e pela distribuição dos rótulos nas arestas. Os parâmetros considerados são o número de arestas no grafo (m), o número de vértices (n) e o número de rótulos atribuídos às arestas (l).

Na avaliação, os autores consideraram que a complexidade dos grafos aumentam de acordo com o aumento de sua dimensão (número de vértices e rótulos) e a diminuição da densidade do grafo. Foram consideradas instâncias com o número de vértices n e rótulos l entre 20 e 500. O número de arestas m é obtido indiretamente da densidade d do grafo, cujos valores são escolhidos entre 0.8, 0.5 e 0.2.

Para esta APS, o conjunto de instâncias a ser utilizado é a mesma usada em [5] e os resultados obtidos devem também ser comparados com os resultados

obtidos nesse trabalho. Os resultados deverão ser comparados de acordo com as Tabelas 1, 2 e 3 reportadas em [5], quanto ao valor médio de função objetivo e o tempo computacional.

As instâncias para o PAGRM estão disponíveis para serem baixadas no Ambiente Virtual de Aprendizagem institucional relacionado à disciplina BCC35B. Cada arquivo texto t com as instâncias são as próprias matrizes de adjacência dos grafos $Adj^{(t)}$, sendo que cada entrada $adj_{i,j}^{(t)}$ da matriz representa o rótulo da aresta (i, j) . Se a entrada $adj_{i,j}^{(t)} = |L|^{(t)}$, então não há aresta entre i e j . As pastas na raiz estão divididas em dois grupos de acordo com o número de vértices n , sendo que, dentro de cada uma dessas pastas, os arquivos estão agrupados de quatro em quatro, de acordo com a densidade dos grafos $d = \{0.8, 0.5, 0.2\}$. Cada arquivo está nomeado de acordo com a quantidade de rótulos l .

3 Definição da Atividade Prática Supervisionada

O objetivo geral dessa APS é estudar os conceitos vistos em sala de aula relacionados ao Problema da Árvore Geradora Mínima sob uma perspectiva prática. Para tanto, define-se um problema de otimização com aplicações práticas que possa ser modelado a partir de conceitos de Teoria dos Grafos. Define-se, também, que seja implementado um algoritmo exato para o problema proposto e que os resultados gerados pela execução do algoritmo sejam comparados com soluções de algoritmos heurísticos reportados na literatura.

O resultado dessa APS será um relatório técnico contendo os seguintes itens:

- **Revisão de literatura sobre o PAGRM.** O relatório deverá apresentar os principais estudos sobre o PAGRM, descrevendo e explicando os algoritmos apresentados na literatura para resolução do problema;
- **Proposta de um algoritmo exato para resolver o PAGRM.** O relatório deverá descrever uma proposta de algoritmo exato para resolução do PAGRM. A descrição do algoritmo deve incluir a modelagem do problema, considerando as estruturas de dados usadas para sua implementação. Seu algoritmo deverá também realizar as verificações necessárias sobre as instâncias para garantir que as propriedades que sustentam sua correteza sejam válidas;
- **Resultados da execução do algoritmo sobre as instâncias consideradas.** O relatório deverá reportar o valor da função objetivo para cada solução (melhor solução) e o tempo para calcular cada solução. As soluções serão baseadas nas instâncias consideradas;
- **Comparação dos resultados com os resultados reportados em [5].** O relatório deverá reportar, em forma de tabelas, uma comparação dos resultados do algoritmo proposto com as soluções propostas na literatura que já utilizaram as mesmas instâncias;

- **Conclusões sobre os resultados** O relatório deverá incluir as conclusões sobre as comparações que serão realizadas entre os algoritmos apresentados na literatura com o algoritmo exato proposto.

O relatório técnico deverá ser entregue e avaliado conforme estipulado no plano de ensino da disciplina BCC35B. Os recursos mínimos necessários para a execução desta APS estarão disponíveis no Ambiente Virtual de Aprendizagem institucional (Moodle).

Bom trabalho !

Referências

- [1] Krumke, S., Wirth, H. *On the minimum label spanning tree problem*. Information Processing Letters, 66(2), 81–85, 1998.
- [2] Chang, R., Leu, S. *The minimum labeling spanning trees*. Information Processing Letters, 63(5), 277–282, 1997.
- [3] Brüggemann, T., Monnot, J., Woeginger, G. J. *Local search for the minimum label spanning tree problem with bounded colour classes*. Operations Research Letters, 31, 195–201, 2003.
- [4] Consoli, S., 2007. *Test datasets for the minimum labelling spanning tree problem*. <http://people.brunel.ac.uk/~mapgssc/MLSTP.htm>. Acessado em 31 de Março de 2014.
- [5] Consoli, S., Darby-Dowman, K., Mladenovic, N., Moreno-Pérez, J.A. *Greedy randomized adaptive search and variable neighbourhood search for the minimum labelling spanning tree problem*. European Journal of Operational Research 196(2), 440-449, 2009.
- [6] Xiong, Y., Golden, B., Wasil, E. *A One-Parameter Genetic Algorithm for the Minimum Labeling Spanning Tree Problem*. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 9(1), 55–60, 2005.