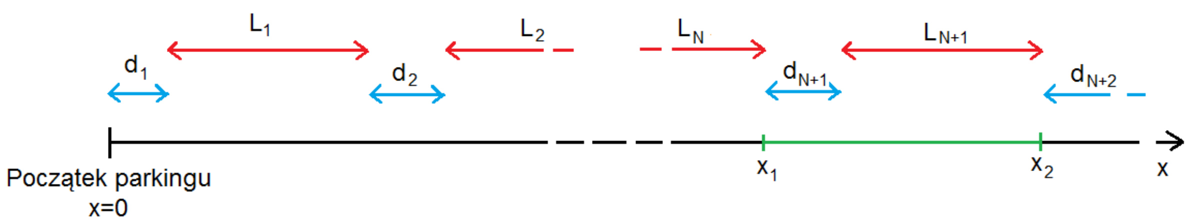
Projekt z Modelowania Procesów Stochastycznych		Rok akademicki 2019/2020
Mateusz Kowal		284529
Temat nr 6	Parking pod Blokiem	Ocena:

1. Cel projektu

Celem projektu jest zbadanie problemu parkingu równoległego, na którym parkują samochody o długości losowanej z rozkładu o skończonym pierwszym momencie. Odległości między samochodami są losowane z rozkładu jednostajnego U(0, 1). Należy znaleźć granicę ciągu $\lim_{x\to\infty}\frac{N(x)}{x}$, gdzie x jest odległością od początku parkingu, a N jest liczbą zaparkowanych samochodów od początku parkingu do x. Następnie należy sprawdzić wyniki symulacyjnie oraz sprawdzić co się stanie, gdy długości samochodów będą losowane z rozkładu o nieskończonym pierwszym momencie.

2. Obliczenia analityczne

Poniżej na Rys. 1 przedstawiono szkic parkingu:



Rys 1. Szkic parkingu

Czarną linią na rysunku zaznaczono odległość od początku parkingu, który znajduje się z lewej strony. Czerwonymi liniami zaznaczono zaparkowane samochody o długości L_k, która jest zmienną losową z rozkładu o skończonym pierwszym momencie. Niebieskimi liniami zaznaczono odstępy między nimi d_k, które losowane są z rozkładu jednostajnego U(0, 1). Założono, że od punktu początku parkingu do pierwszego samochodu znajduje się pierwszy odstęp. Zielonym odcinkiem zaznaczono przedział wyboru punktu x, do którego badamy odległość. $x \in \langle x_1, x_2 \rangle$.

Celem poniższych przekształceń jest otrzymanie wyrażenia na $N(x)$ w celu obliczenia granicy. Odległość od początku parkingu do x można zapisać jako:

$$x = \sum_{k=1}^{N(x)} d_k + \sum_{k=1}^{N(x)} L_k + r$$

gdzie $r \in \langle 0, d_{N+1} + L_{N+1})$ to odległość od końca N-tego samochodu do punktu x. Wykorzystując mocne prawo wielkich liczb, długości poszczególnych samochodów możemy przybliżyć średnią arytmetyczną. Po podstawieniu wzoru za średnią arytmetyczną otrzymujemy:

$$x = N(x) \cdot (d_{śr} + L_{śr}) + r$$

i stąd otrzymujemy wzór na średnią ilość samochodów na parkingu w zależności od x:

$$N(x) = \frac{x - r}{d_{śr} + L_{śr}}$$

Wykorzystując, że dla rozkładu jednostajnego U(0, 1) średnia wynosi $d_{śr}$ = 0,5, możemy policzyć granicę $\lim_{x\to\infty} \frac{N(x)}{x}$:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{N(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x - r}{d_{śr} + L_{śr}}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1 - \frac{r}{x}}{d_{śr} + L_{śr}} = \frac{1}{d_{śr} + L_{śr}} = \frac{1}{L_{śr} + 0{,}5}$$

Widzimy więc, że granica ta zależy od średniej długości samochodów.

Przypadek dla nieskończonego pierwszego momentu:

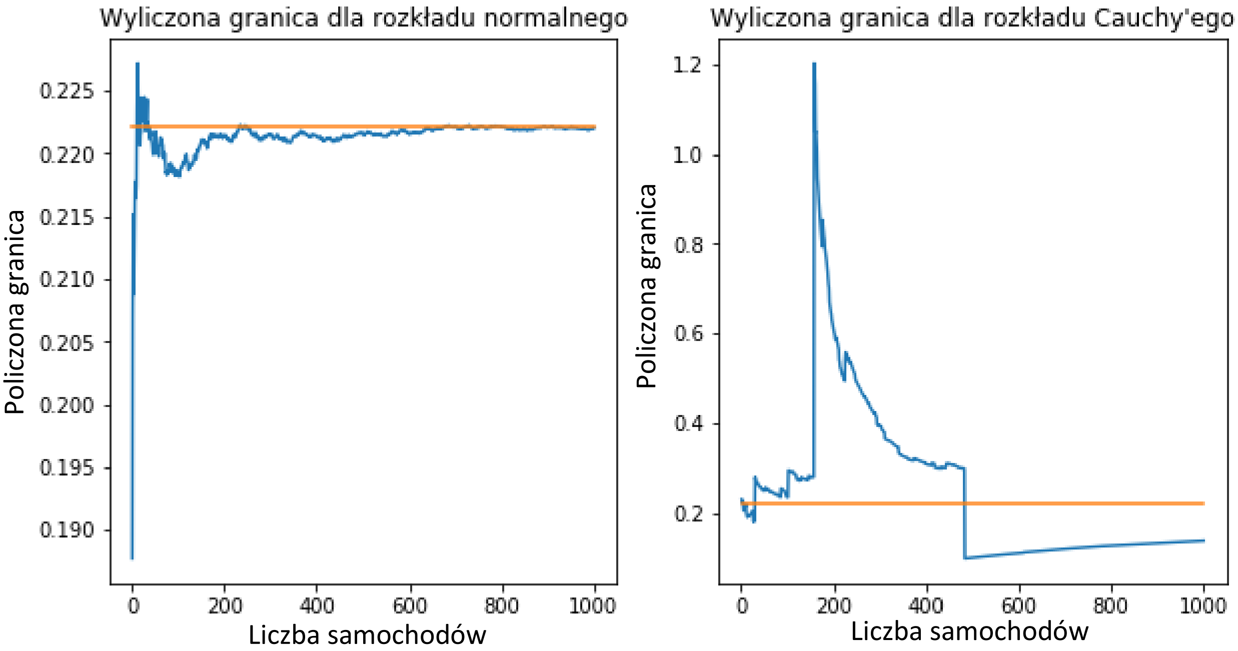
Dla rozpatrywanego w symulacji rozkładu Cauchy'ego wzór na pierwszy moment wynosi:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

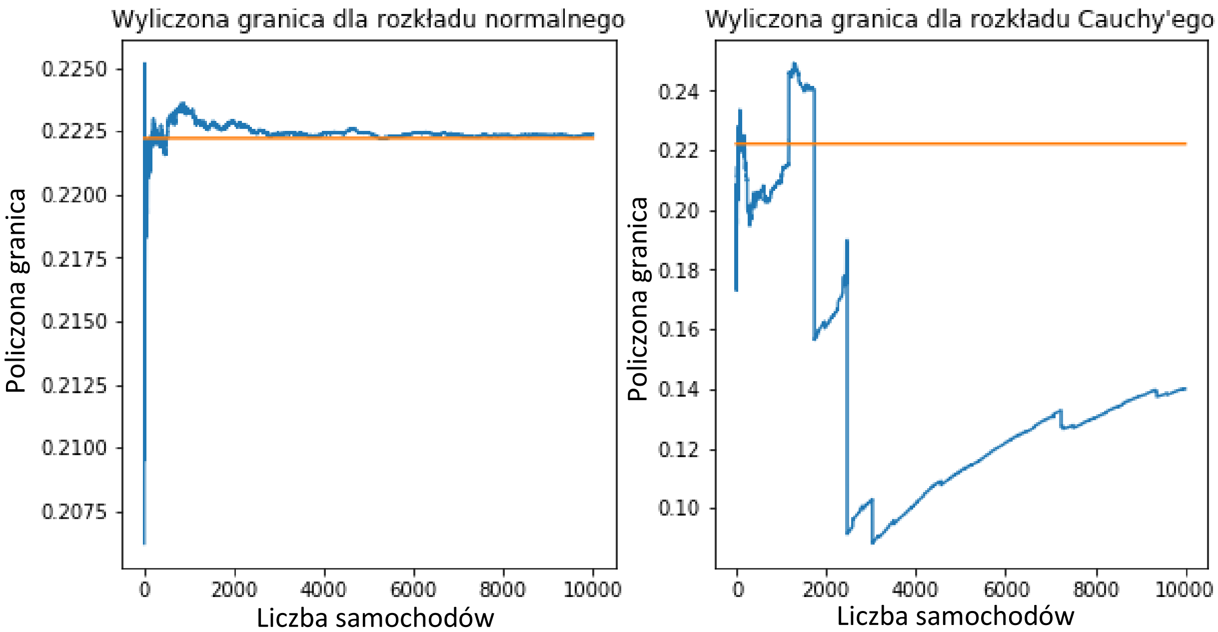
gdzie f(x) jest funkcją gęstości prawdopodobieństwa. Całka ta ma wartość nieoznaczoną, zatem nie da się określić wartości oczekiwanej.

3. Wyniki symulacji

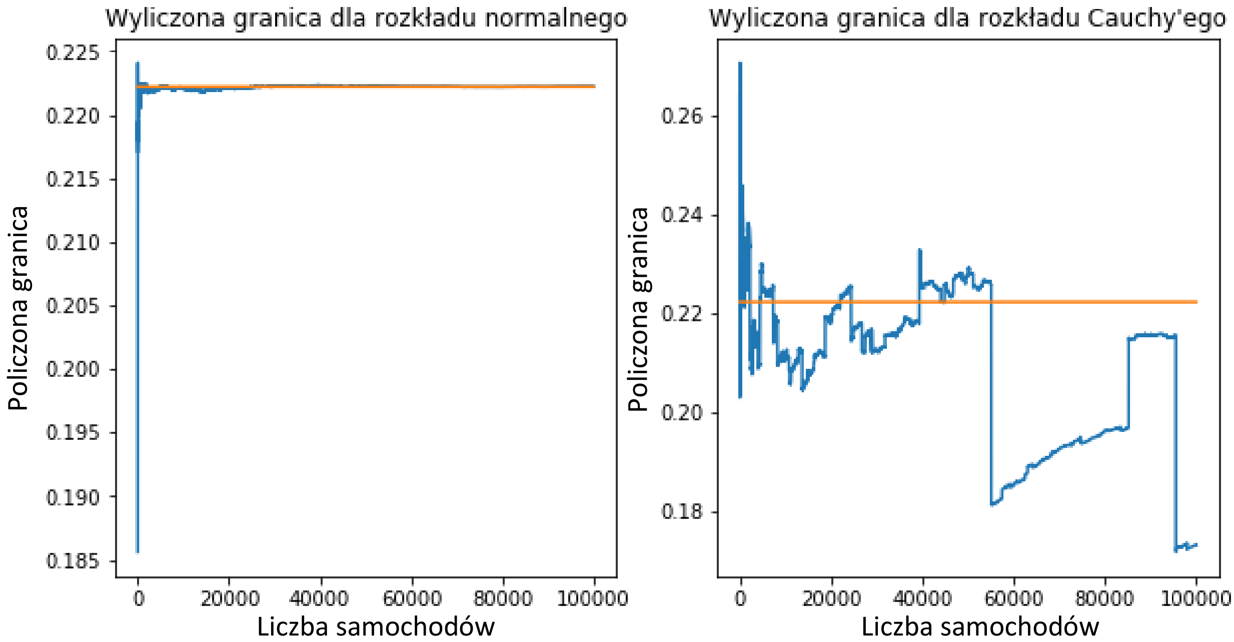
W programie przeprowadzono symulację dla N samochodów. Założono, że rozkładem, o skończonym pierwszym momencie będzie rozkład normalny $\mathcal{N}$(4, 0.5), a rozkładem o nieskończonym pierwszym momencie będzie rozkład Cauchy'ego o takich samych parametrach. Poniżej na Rys. 2-4 przedstawiono symulacje dla $N = 1000$, $N = 10000$ oraz $N = 100000$. Dla każdego N przedstawiono obliczoną granicę dla danego kroku. Na wykresach pomarańczową linią zaznaczono też granicę obliczoną w sposób analityczny, która dla $d_{śr} = 0{,}5$ wynosi 0,(2). Ponadto w tabeli przedstawiono obliczone wartości średniej długości samochodu $L_{śr}$ i oraz granicy $\lim_{x\to\infty} \frac{N(x)}{x}$ po ostatnim kroku dla różnych N.



Rys. 2: Wyliczona granica $\lim_{x \to \infty} \frac{N(x)}{x}$ dla obu rozkładów dla $N = 10^3$.



Rys. 3: Wyliczona granica $\lim_{x \to \infty} \frac{N(x)}{x}$ dla obu rozkładów dla $N = 10^4$.



Rys. 3: Wyliczona granica $\lim_{x\to\infty}\frac{N(x)}{x}$ dla obu rozkładów dla $N = 10^5$.

	Rozkład normalny		Rozkład Cauchy'ego	
N	$L_{śr}$ po N krokach	Granica po N krokach	$L_{śr}$ po N krokach	Granica po N krokach
10^3	4.0042	0.222	6.7353	0.1382
10^4	3.9969	0.2223	6.6425	0.14
10^5	3.999	0.2222	5.2778	0.1730

4. Wnioski

Z wykresów wynika, że dla rozkładu normalnego wyliczone $L_{śr}$ oraz granica $\lim_{x\to\infty}\frac{N(x)}{x}$ zbiegają do wartości wyliczonej analitycznie, tj. 4 oraz 0,(2). Dla rozkładu Cauchy'ego o nieskończonym pierwszym momencie wartości te nie stabilizują się. W przypadku rozkładu normalnego, dla coraz większego N można zaobserwować coraz to większą dokładność otrzymanych wartości.