

**Akademia Górniczo-Hutnicza im. Stanisława  
Staszica w Krakowie**

Wydział Elektrotechniki, Automatyki, Informatyki i Inżynierii  
Biomedycznej

Kierunek Automatyka i Robotyka – Inteligentne Systemy Sterowania



## Laboratorium problemowe

---

### **Sprawozdanie projektowe**

Układ RWP – wahadło reakcyjne

---

Mateusz Smolarczyk, Michał Szmuksta

Kraków, 10 grudnia 2024

# Spis treści

Spis treści.....	2
1. Wstęp .....	3
2. Obiekt.....	4
2.1. Czujniki.....	5
2.2. Model matematyczny obiektu.....	6
3. Identyfikacja parametrów modelu .....	7
3.1. Analityczne wyznaczenie $U$ , $I_w$ , $I_k$ oraz $\beta$ .....	7
<b>3.1.1 Wyznaczenie niewyważenia <math>U</math></b> .....	7
<b>3.1.2 Wyznaczenie momentu bezwładności <math>I_w</math></b> .....	7
<b>3.1.3 Wyznaczenie tarcia <math>\beta</math></b> .....	8
<b>3.1.4 Wyznaczenie momentu bezwładności <math>I_k</math></b> .....	9
3.2. Optymalizacja modelu za pomocą pakietu MATLAB .....	9
3.3. Zależność momentu siły od sygnału sterującego .....	11
3.4 Weryfikacja kompletnego modelu .....	12
4. Linearyzacja.....	15
5. Regulator LQR.....	18
6. Całość układu sterowania .....	19
6.1. Weryfikacja działania układu regulacji .....	21
7. Podsumowanie i wnioski .....	26

# 1. Wstęp

Celem głównym realizowanym podczas Laboratorium Problemowego było zaprojektowanie i wdrożenie układu regulacji liniowo-kwadratowej LQR (ang. *Linear-quadratic regulator*) dla fizycznego obiektu wahadła reakcyjnego (ang. *Reaction Wheel Pendulum, RWP*) w celu aktywnej stabilizacji układu w niestabilnym punkcie równowagi, znajdującym się w odwróconym położeniu pionowym. Realizacja tego zadania wymagała podjęcia szeregu kluczowych działań, takich jak:

- modelowanie matematyczne systemu w celu dokładnego odwzorowania dynamiki,
- identyfikacja parametrów fizycznych obiektu,
- weryfikacja zgodności opracowanego modelu z rzeczywistym zachowaniem,
- projektowanie, testowanie i implementacja regulatora LQR umożliwiającego stabilizację wahadła w pozycji pionowej.

Proces projektowania i implementacji algorytmu regulacji opierał się na technice Model-Based Design w środowisku MATLAB/Simulink w wersji 2015b na komputerze klasy PC. Realizacja działania systemu w czasie rzeczywistym była możliwa dzięki wykorzystaniu jądra Simulink Real-Time. Do komunikacji z obiektem oraz zapewnienia deterministycznej obsługi sygnałów sterujących i pomiarowych wykorzystano kartę RT-DAC I/O zbudowaną na bazie układu FPGA firmy Xilinx.

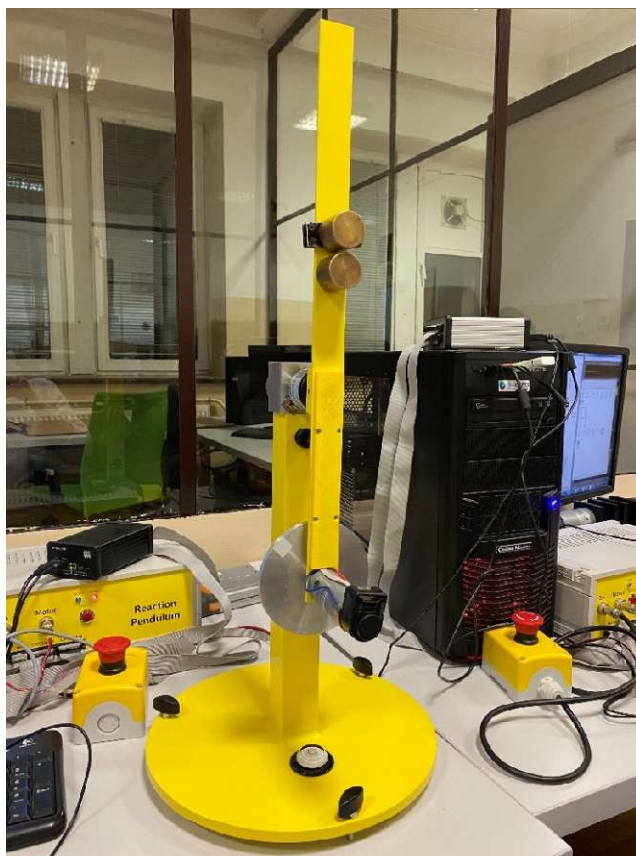
## 2. Obiekt

Badany obiekt to wahadło reakcyjne typu rewersyjnego firmy INTECO zaprojektowane do celów edukacyjnych i badawczych w dziedzinie teorii sterowania. System ten charakteryzuje się niestabilnością oraz nieliniowością, co czyni go szczególnie ciekawym w kontekście projektowania algorytmów sterowania.

Wahadło reakcyjne składa się z ramienia wahadła osadzonego na przegubie oraz koła reakcyjnego napędzanego silnikiem prądu stałego sterowanym techniką modulacji szerokości impulsu (ang. *pulse-width modulation, PWM*). Zmiana prędkości obrotowej koła reakcyjnego, zgodnie z zasadą zachowania momentu pędu, pozwala na sterowanie kątem wychylenia ramienia wahadła. System umożliwia różne konfiguracje dynamiczne poprzez regulację środka masy wahadła za pomocą przeciwwag:

- Gdy środek masy znajduje się nad punktem obrotu, system działa jako niestabilne odwrócone wahadło wymagające aktywnej regulacji do utrzymania pozycji pionowej. To właśnie ta konfiguracja była wykorzystywana przez zespół podczas pracy na laboratorium.
- W przypadku umieszczenia środka masy poniżej punktu obrotu, wahadło funkcjonuje jako system stabilny o charakterze oscylacyjnym.
- Przy wyważeniu środka masy w osi obrotu, układ staje się stabilny i w równowadze w każdej pozycji.

Układ posiada możliwość dokładnej kalibracji dzięki zastosowaniu regulowanego środka masy u podstawy i dedykowanemu interfejsowi zasilania i wzmacniaczy, których konfiguracja nie została jednak zmieniana przez zespół podczas pracy z układem. System wahadła w stanie spoczynku został zaprezentowany na zdjęciu 1.



*Zdjęcie 1 Fotografia obiektu wahadła reakcyjnego w spoczynku.*

## 2.1. Czujniki

Do zbierania danych pomiarowych w systemie wykorzystano dwa enkodery inkrementalne:

1. **Enkoder zamontowany na osi silnika prądu stałego** – dostarcza on informacji o kącie obrotu koła reakcyjnego. Enkoder ten posiada rozdzielczość 1024 impulsy na obrót. Informacje z tego czujnika były również wykorzystywane do obliczania prędkości obrotowej wahadła. Prędkość silnika była uzyskiwana jako pochodna sygnału pozycji z enkodera, co umożliwiało pozyskanie niezbędnej informacji o prędkości kątowej koła reakcyjnego.
2. **Enkoder zamontowany na osi ramienia wahadła** – mierzy kąt wychylenia wahadła, zapewniając wyższą rozdzielczość 5000 impulsów na obrót. Dane z tego enkodera były kluczowe do określenia pozycji wahadła i monitorowania jego zachowania podczas pracy regulatora.

Aby zapewnić nieograniczony zakres obrotu koła reakcyjnego, sygnały z enkodera zamontowanego na osi silnika prądu stałego były przesyłane za pomocą pierścienia ślizgowego. Rozwiązanie to eliminuje ryzyko uszkodzenia okablowania i zapewnia pełną swobodę ruchu wahadła.

## 2.2. Model matematyczny obiektu

Dany obiekt można zamodelować jako wahadło fizyczne, które jest opisane przez poniższe równanie:

$$I_w \varepsilon_w = -gU \cdot \sin(\varphi) - \beta\omega - I_k \varepsilon_k,$$

gdzie:

- $I_w$  – moment bezwładności wahadła
- $\varepsilon_w$  – Przyspieszenie kątowe wahadła
- $I_k$  – moment bezwładności koła
- $\varepsilon_k$  – Przyspieszenie kątowe koła
- $g$  – przyspieszenie ziemskie
- $U$  – niewyważenie układu
- $\varphi$  – kąt obrotu
- $\beta$  – współczynnik tarcia
- $\omega$  – prędkość kątowa

W celu zasymulowania modelu w pakiecie MATLAB, jego łatwiejszej analizy oraz późniejszego opracowania regulatora, powyższe równanie zostało zastąpiono równaniami stanu, dokonując podstawienia  $x_1 = \varphi$ ,  $x_2 = \omega$ , oraz wprowadzając dodatkową zmienną stanu związaną z prędkością obrotową koła  $x_3$ :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{1}{I_w}(gU \cdot \sin(x_1) + \beta x_2 + I_k \dot{x}_3) \\ \dot{x}_3 = \frac{1}{\tau}(K \cdot f_u(u) - x_3) \end{cases}$$

W powyższych równaniach stanu koło zamodelowano jako obiekt z inercją I rzędu o wzmacnieniu  $K$  i stałej czasowej  $\tau$ . Ponad to:

- $u$  – sygnał sterujący  $u \in [-1, 1]$ ,
- $f_u$  – liniowa funkcja sterowania  $u$ .

W dalszych rozważaniach przyjęto, że  $g = 9.8105 \frac{m}{s^2}$

### 3. Identyfikacja parametrów modelu

W celu stworzenia modelu obiektu należało wyznaczyć wartości wielkości fizycznych opisujących ten układ. We wzorze opisującym zachowanie obiektu występują cztery nieznane wartości: współczynnik tarcia  $\beta$ , niewyważenie  $U$ , moment bezwładności wahadła  $I_w$  oraz moment bezwładności koła  $I_k$ .

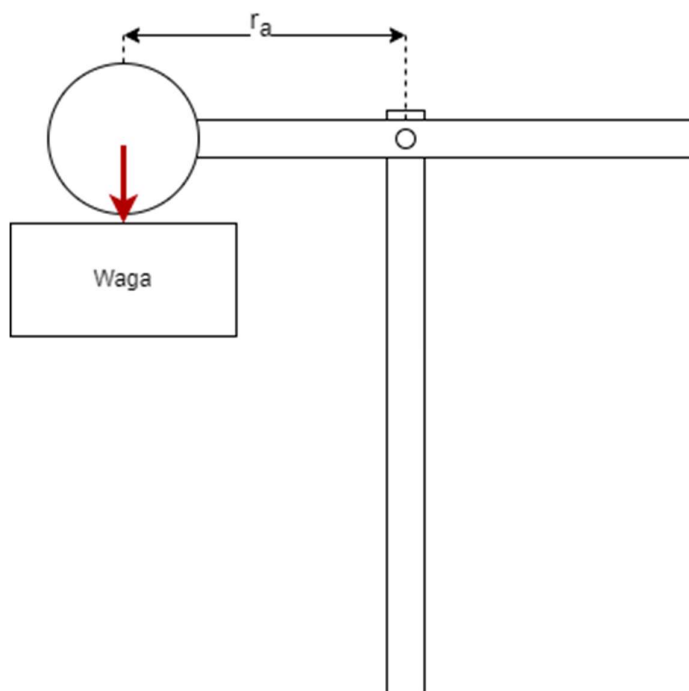
#### 3.1. Analityczne wyznaczenie $U$ , $I_w$ , $I_k$ oraz $\beta$

##### 3.1.1 Wyznaczenie niewyważenia $U$

W celu wyznaczenia wartości niewyważenia skorzystano z równania:

$$U = \frac{m_a r_a}{\sin(\alpha)}$$

Przeprowadzono eksperyment, aby uzyskać potrzebne wartości  $m_a$  i  $r_a$ . Zmierzono za pomocą taśmy mierniczej odległość pomiędzy punktem obrotu wahadła, a miejscem położenia silnika. Jest to odległość  $r_a$ , wynosząca 0,178 m. Następnie obrócono wahadło o  $90^\circ$  i zważono na wysokości silnika. Dzięki temu uzyskano masę  $m_a$ .  $\alpha = 90^\circ$



Rysunek 1 Schemat układu pomiarowego

Tabela 1 Uzyskane wartości

$m_a$ [kg]	$r_a$ [m]	$U$ [kg·m]
0,151	0,178	0,0269

##### 3.1.2 Wyznaczenie momentu bezwładności $I_w$

W celu wyznaczenia momentu bezwładności wahadła oraz współczynnika tarcia dynamicznego występującego na osi obrotu wahadła niezbędne było przeprowadzenie

dodatkowego eksperymentu. W tym celu wykonano pomiar przebiegu położenia wahadła po bardzo delikatnym wyprowadzeniu go ze stanu równowagi przy braku sterowania  $u = 0$ . Eksperyment przeprowadzono dla 3 różnych wychyleń z położenia równowagi, aby ostatecznie wyznaczone parametry były średnią z tych 3 przebiegów.

W celu wyznaczenia momentu bezwładności posłużono się następującą zależnością prawdziwą dla wahadła fizycznego:

$$I_w = \left( \frac{T}{2\pi} \right)^2 U g$$

gdzie  $T$  to średni okres drgań, który na podstawie 3 przebiegów wynosił: 1.8394 s.

Po podstawieniu otrzymano więc moment bezwładności wahadła:

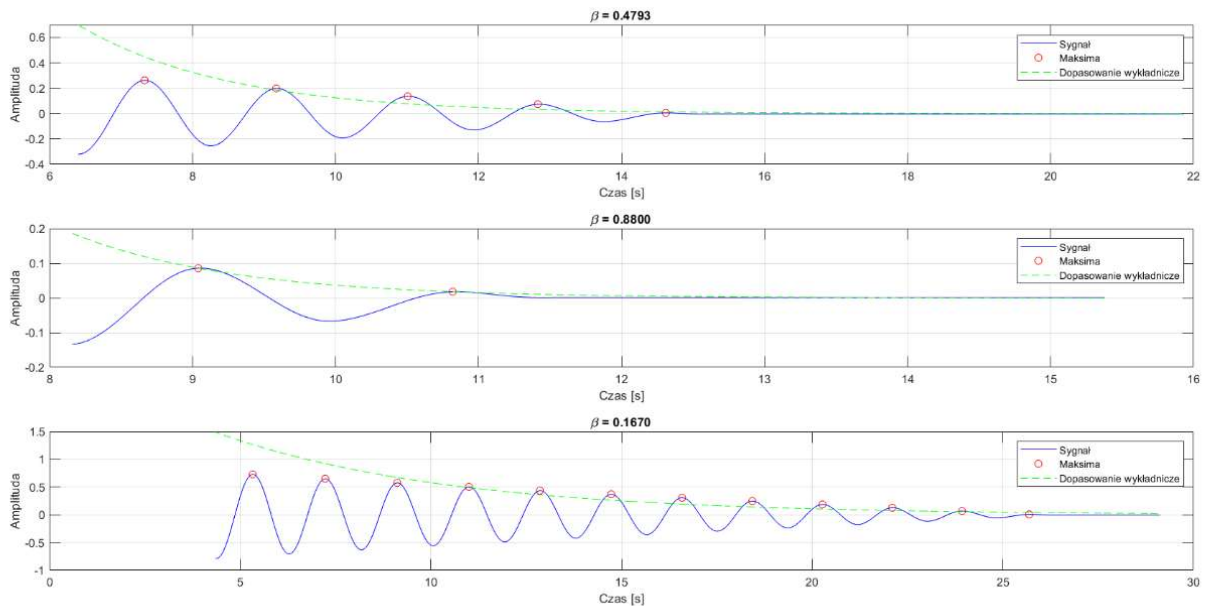
$$I_w = 0,0226 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

### 3.1.3 Wyznaczenie tarcia $\beta$

Współczynnik tłumienia  $\beta$  wyznaczono metodą regresji liniowej opierając się na przebiegach oraz następującej zależności:

$$\ln(A) = -\beta t + \ln(A_0)$$

Poniżej, na rysunku 2, przedstawiono uzyskane rezultaty.



Rysunek 2 Wykresy obrazujące proces wyznaczania współczynnika  $\beta$  metodą regresji liniowej dla trzech różnych przebiegów.

Średnia wartość  $\beta = 0.5088$ . Jak można zauważyć, różnice w wartościach uzyskanego tarcia dla różnych przebiegów są znacząco różne. Niestety tarcie okazało się być nieliniowo zależne od prędkości. Przy niewielkim wychyleniu, czyli przy mniejszych prędkościach tarcie jest znacząco większe niż dla większych prędkości. Zdecydowano się więc wyznaczyć tarcie inną metodą, opisaną w rozdziale 3.2.



### 3.1.4 Wyznaczenie momentu bezwładności $I_k$

Ostatnim parametrem był moment bezwładności koła zamachowego. Koło jest aluminiowym walcem o masie 0,151 kg i promieniu 0,055 m. Skorzystano ze wzoru na moment bezwładności walca:

$$I_k = \frac{1}{2}mr^2 = 0,000233$$

## 3.2. Optymalizacja modelu za pomocą pakietu MATLAB

Zidentyfikowane parametry modelu, uzyskane na drodze odpowiednio przeprowadzonych eksperymentów, pomiarów oraz przekształceń matematycznych wydawały się nie przybliżać obiektu z pożądaną precyzją. W związku z tym podjęto decyzję o przeprowadzeniu optymalizacji parametrycznej  $U$  oraz  $\beta$  dla modelu wahadła fizycznego. Utworzony został w tym celu odpowiedni skrypt w pakiecie MATLAB, który korzystając z jednokrokowej metody różniczkowania Dormand-Prince (*ode45*), a także funkcji minimalizującej *fmincon()* optymalizował parametry modelu w taki sposób, aby zminimalizować błąd kwadratowy w postaci:

$$L = \int_{t_0}^{t_f} (x_1(t) - \hat{x}_1(t))^2 dt,$$

gdzie  $\hat{x}_1$  oznacza wychylenie wahadła uzyskane z modelu. W blokach z kodem 1-3 zaprezentowano utworzone funkcje służące do optymalizacji.

```
function dxdt = model_wahadlo(t, x, params)
    U = params(2);
    g = 9.8105;
    beta = params(1);
    l = 0.022597943261201;

    dx1 = x(2);
    dx2 = (-g * U * sin(x(1)) - beta * x(2)) / l;
    dxdt = [dx1; dx2];
end
```

*Kod 1. Model wahadła wykorzystany do optymalizacji.*

```
function params = optimize_model(t_real, x_real, x0)
    cost_parametrized = @(params) cost_fun(x_real, t_real, x0, params);
    options = optimoptions('fmincon','Display','iter', 'PlotFcn', 'optimplotfval');
    initial_params = [0.5088, 0.0269];
    lb = [0.0 0.0]; ub = [1.0 0.5];
    params = fmincon(cost_parametrized, initial_params, [], [], [], [], lb, ub, [], options);
end
```

*Kod 2. Funkcja optymalizująca.*

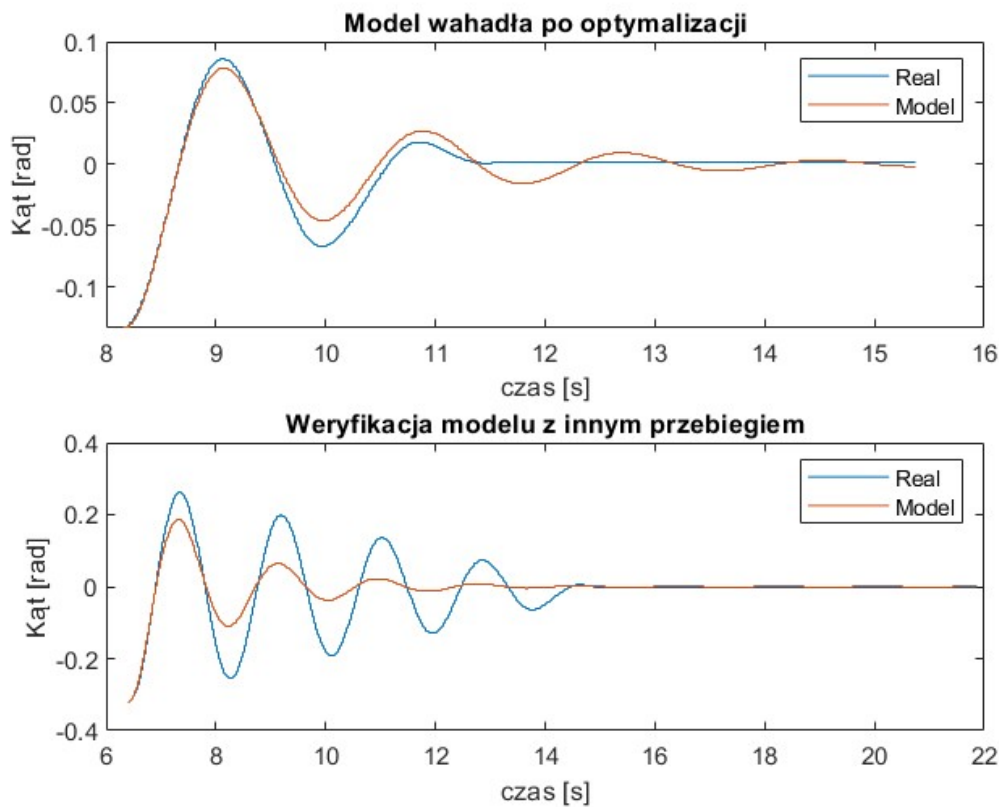
```

function loss = cost_fun(x_real, t_real, x0, params)
[~, y] = ode45(@(t, x)model_wahadlo(t, x, params), t_real, x0);
loss = sum((y(:, 1) - x_real).^2);
end

```

Kod 3. Implementacja funkcji kosztu wykorzystująca ode45.

Model zaimplementowany przez kod 1 nie uwzględnia sygnału sterującego  $u$ , a co za tym idzie nie posiada trzeciej zmiennej stanu  $x_3$ . Jest to spowodowane faktem, że w trakcie identyfikacji parametrów wahadła sterowanie oraz prędkość kątowna koła zamachowego  $u = x_3 = 0$ . Do weryfikacji uzyskanego na drodze optymalizacji modelu konieczne było zarejestrowanie drugiego przebiegu wychylonego z punktu równowagi wahadła. Na rysunku 3 zaprezentowano zestawienie danych rzeczywistych oraz uzyskanych z symulacji dla obu zestawów danych.



Rysunek 3 Model ramienia wahadła po optymalizacji numerycznej.

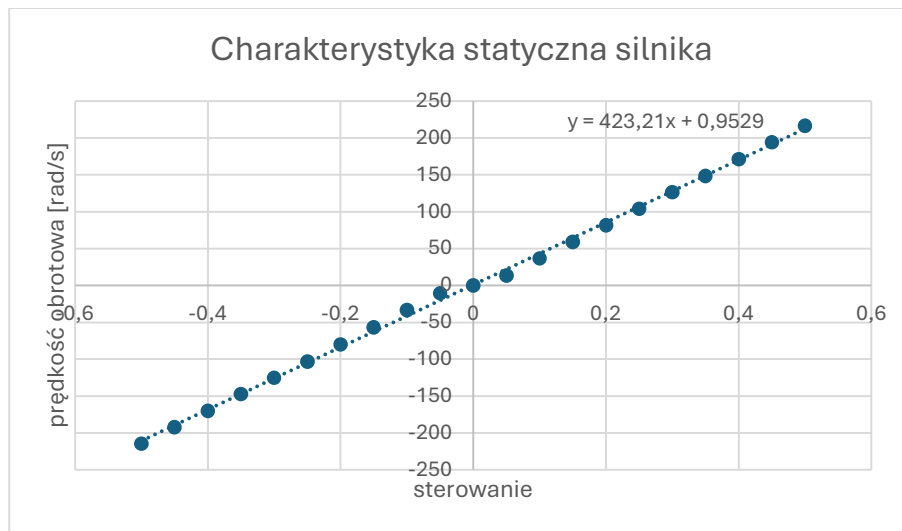
Przedstawione zestawienie widoczne na rysunku 3 uzyskano dla zoptymalizowanych parametrów  $\beta = 0,0265$ ,  $U = 0,0284$ . Jak można zauważyć, w drugim przebiegu drgania mają większą amplitudę. Jeżeli tarcie byłoby liniowo zależne od prędkości wahadła, wykres modelu powinien się zawsze pokrywać z realnymi danymi. Jednak w tej sytuacji znacząco odchodzi o zmierzonych wartości. Wynika to ze wspomnianej nieliniowości tarcia. W tej sytuacji zdecydowano się zamodelować tarcie za pomocą sygnału z niewielką amplitudą, w okolicy punktu równowagi. Założono, że tarcie w okolicy stabilnego punktu równowagi będzie zbliżone, do tarcia wokół niestabilnego, czyli wokół punktu pracy. Stworzony model nie oddaje więc dobrze realnego obiektu na całym obszarze, a jedynie w otoczeniu punktu pracy. Nie jest to jednak problem, gdyż model i tak będzie wokół tego punktu linearyzowany.

### 3.3. Zależność momentu siły od sygnału sterującego

Aby w pełni zamodelować obiekt należy jeszcze wziąć pod uwagę moment siły, który umożliwia sterowanie układem i jego zależność od sterowania  $u$ . Sygnał  $u$  to sygnał PWM odpowiadający za sterowanie prędkością silnika. W celu obliczenia momentu siły skorzystano z II zasady dynamiki Newtona dla ruchu obrotowego.

$$M = I_k \varepsilon_k$$

Aby uzyskać przyspieszenie kątowe koła, należało wyznaczyć charakterystykę statyczną i dynamiczną silnika. Na początku wyznaczono charakterystykę statyczną, czyli funkcję  $f_u(u)$ . Jest to zależność prędkości obrotowej od sterowania w stanie ustalonym. W celu jej wyznaczenia przeprowadzono odpowiednie pomiary, widoczne na wykresie na rysunku 4.



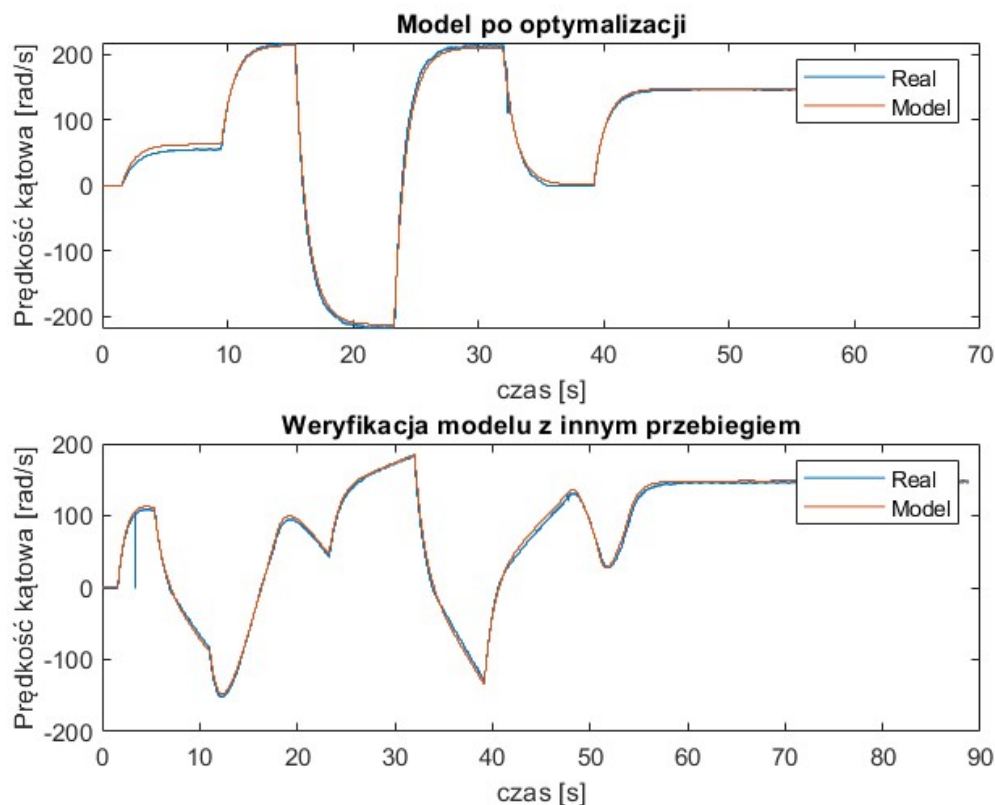
Rysunek 4 Wykres charakterystyki statycznej silnika koła zamachowego.

Ze względu na liniowość pomiaru, zdecydowano się przybliżyć tę charakterystykę funkcją liniową, o postaci:  $y = 423,21x + 0,9529$ .

Następnie wyznaczono charakterystykę dynamiczną. Zastosowano identyczny proces jak dla wahadła fizycznego. Sprowadzał się on do:

1. Rejestracji dwóch przebiegów rzeczywistego obiektu przy określonym sterowaniu.
2. Optymalizacja parametrów modelu na podstawie jednego przebiegu.
3. Weryfikacja uzyskanego modelu z drugim przebiegiem.

Na rysunku 5 przedstawiono wyniki przeprowadzonej w ten sposób optymalizacji.



*Rysunek 5 Model koła zamachowego po optymalizacji numerycznej.*

Jak można zauważyć, model bardzo dobrze przybliży działanie obiektu, nawet dla bardzo skomplikowanego sterowania. W ten sposób uzyskano następujące wartości parametrów:  $K = 1,0092$  i  $\tau = 0,9758$ .

### 3.4 Weryfikacja kompletnego modelu

Gdy wszystkie elementy modelu zostały zidentyfikowane z zadowalającymi parametrami przybliżającymi ich działanie z osobna, można było przejść do weryfikacji nieliniowego modelu całościowego systemu, łączącego z sobą modele dynamiczne koła zamachowego oraz ramienia wahadła. W celu weryfikacji poprawności modelu utworzono funkcję implementującą równania układu wahadła zaprezentowane w podrozdziale 2.2, która jako parametry przyjmowała wyznaczone uprzednio współczynniki. Funkcja ta została zaprezentowana na bloku kodu 4.

```

function dxdt = model(t, x, u, params)
    beta = params(1); U = params(2); K = params(3); tau = params(4);
    g = 9.8105;
    l = 0.0226;
    l_kola = 0.000232559;

    dx3 = ((K * (423.21*u + 0.953) - x(3)) / tau);

    dx1 = x(2);
    dx2 = (-g * U * sin(x(1)) - beta * x(2) - dx3 * l_kola) / l;

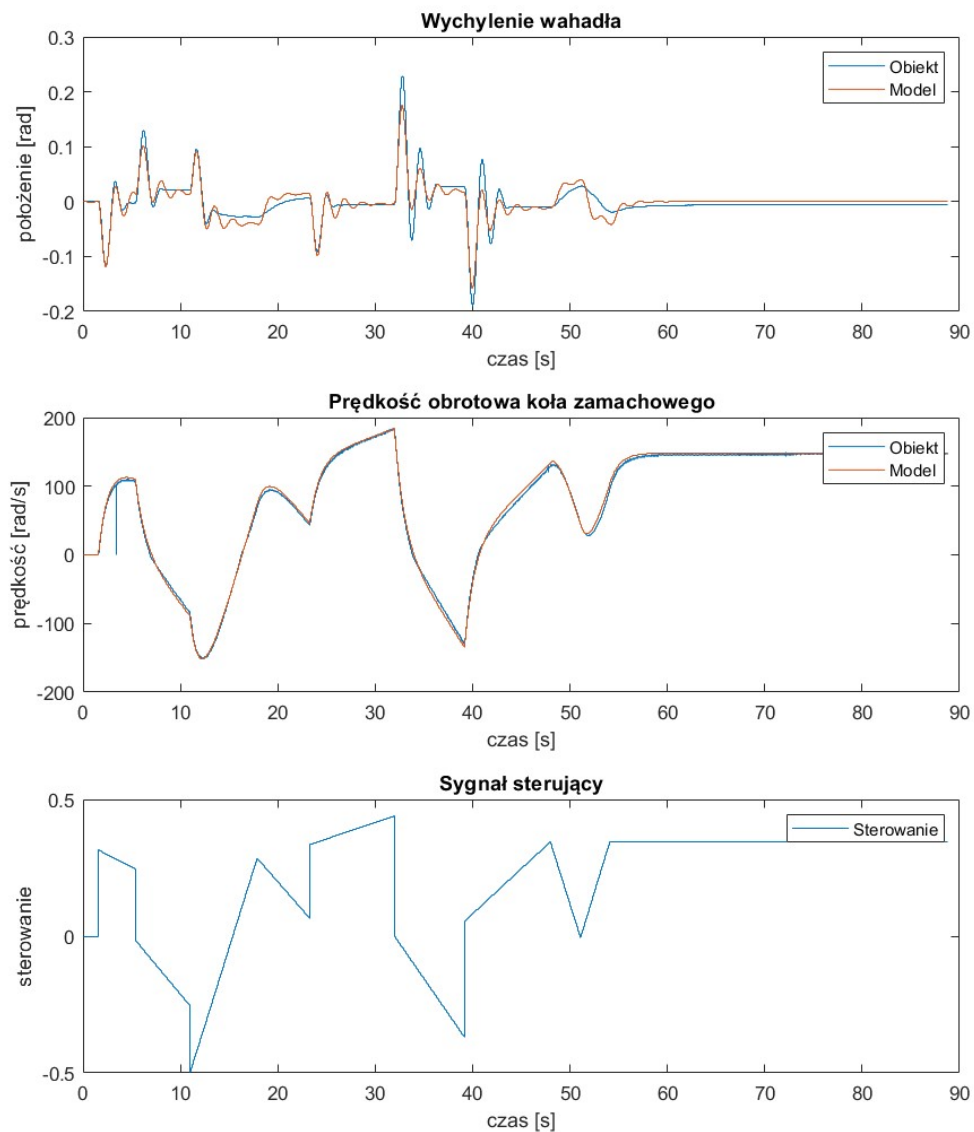
    dxdt = [dx1; dx2; dx3];
end

```

*Kod 4 Kompletny model obiektu jako funkcja pakietu MATLAB.*

Kolejność liczenia pochodnych jest nieprzypadkowo odwrócona, gdyż przyspieszenie wahadła  $dx2$  zależy od przyspieszenia koła  $dx3$ .

Na rysunku 6 zaprezentowano dwa różne przebiegi wychylenia wahadła w czasie dla nowego sygnału sterowania, na którym nie był optymalizowany żaden z parametrów modelu. W ten sposób można wiarygodnie zweryfikować poprawność działania systemu.

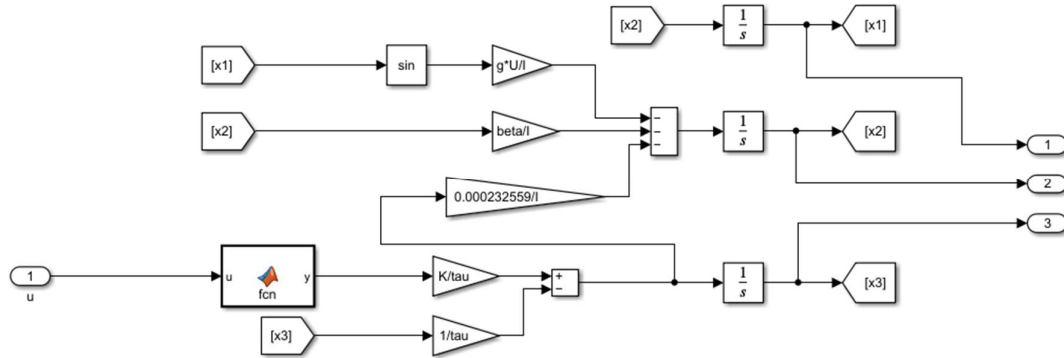


Rysunek 6 Wykresy zarejestrowanego przebiegu wykorzystanego do weryfikacji modelu..

Jak można zauważyć na wykresach powyżej, zachowanie modelu jest bardzo zbliżone do rzeczywistego przebiegu wahadła, co potwierdza poprawność założeń oraz przeprowadzonych obliczeń. Tak skonstruowany system może zatem posłużyć jako element systemu regulacji, przedstawionego w kolejnych rozdziałach.

## 4. Linearyzacja

Stworzony model jest nieliniowy, gdyż zawiera funkcję sinus. Aby móc stworzyć regulator do tego układu należało zlinearyzować model wokół punktu pracy. Aby dokonać linearyzacji wykorzystano narzędzie Simulink-a *Model Linearizer*. Zwraca ono macierze stanu dla zlinearyzowanego modelu, na podstawie modelu układu stworzonego w Simulink-u oraz podanego punktu pracy. Zbudowano więc model w Simulink-u, który jest on widoczny na rysunku 7.



Rysunek 7. Schemat modelu w Simulink-u

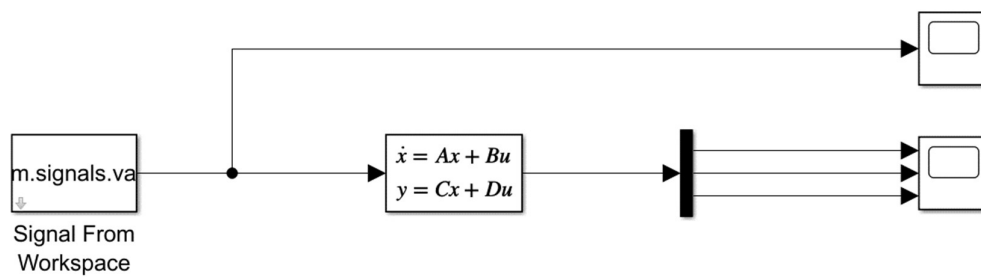
Przed przystąpieniem do linearyzacji należało zdefiniować punkt pracy. Punkt pracy znajduje się w górnym położeniu wahadła, czyli w niestabilnym punkcie równowagi. W tym punkcie kąt obrotu wahadła wynosi  $\pi$ . Prędkość kątowa wahadła oraz prędkość kątowa koła wynoszą 0. Dany punkt jest punktem równowagi, więc sterowanie powinno być równe zero w idealnym przypadku. Poniżej przedstawiono punkt równowagi  $x_{ep}$ .

$$x_{ep} = \begin{bmatrix} \pi \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, u_{ep} = 0$$

Następnie wykorzystano wspomniany Toolbox *Model Linearizer*. Dzięki niemu uzyskano następujące macierze stanu:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 12,34 & -1.173 & 0.01033 \\ 0 & 0 & -1.004 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ -4.414 \\ 428.9 \end{bmatrix}$$

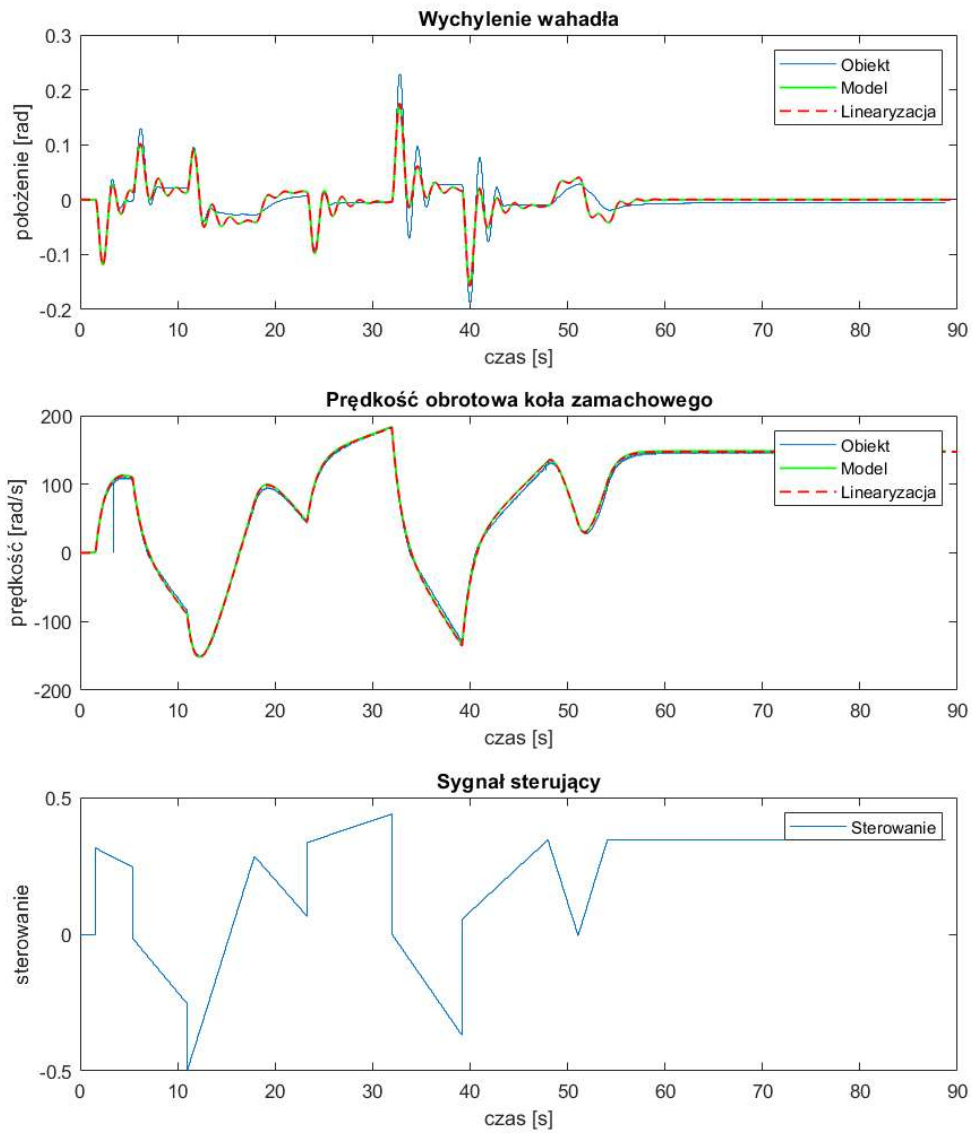
Przeprowadzono test modelu zlinearyzowanego wokół pierwszego punktu. Stworzono prosty układ w Simulink-u, który jest widoczny na rysunku 8, na podstawie którego uzyskano odpowiedź tego modelu dla tego samego sterowania, co wykorzystano przy weryfikacji modelu.



Rysunek 8. Schemat układu testowego w Simulink-u

Poniżej na wykresie na rysunku 9 porównano odpowiedź rzeczywistego układu, nieliniowego modelu oraz modelu po linearyzacji.





Rysunek 9 Wykres przebiegu weryfikacyjnego z naniesionymi odpowiedziami modelu rzeczywistego, nieliniowego i zlinearyzowanego w punkcie pracy będącym stabilnym poziomym wychyleniem wahadła.

W tym wypadku, dla samego porównania, zlinearyzowano model w położeniu  $0^\circ$ , a nie  $\pi$ , aby móc porównać wyniki z wcześniejszymi pomiarami. Model zlinearyzowany dobrze przybliża działanie systemu jedynie w bliskim otoczeniu punktu pracy w którym został zlinearyzowany, co jest zgodne z oczekiwanym zachowaniem.

## 5. Regulator LQR

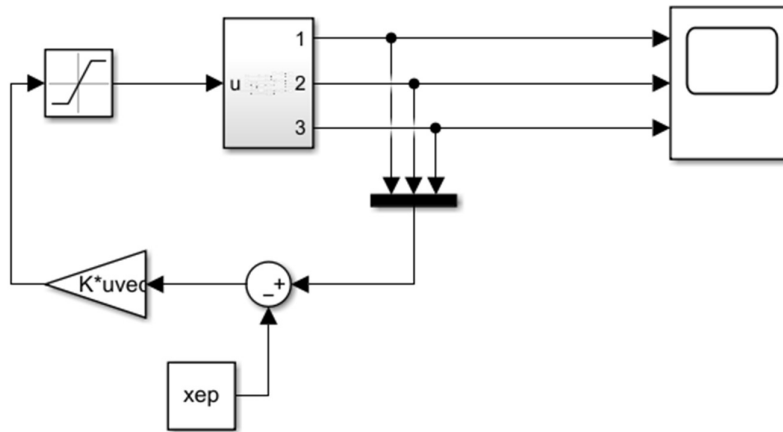
Do regulacji układu wykorzystano regulator liniowo-kwadratowy dla systemu z czasem ciągłym i nieskończonym horyzontem. Zaimplementowana w pakiecie MATLAB funkcja *lqr()* minimalizuje funkcję kosztu  $J(u)$  sterowania układem liniowym opisanym równaniami różniczkowymi w postaci  $\dot{x} = Ax + Bu$

$$J(u) = \int_0^{\infty} (x(t)^T Q x(t) + u(t)^T R u(t)) dt.$$

Macierz diagonalna  $Q \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  reprezentuje wagi dla uchybów poszczególnych zmiennych stanu względem punktu pracy  $x(t) - x_{ep}$ . Ponieważ sterowanie jest jednowymiarowe to waga  $R$  uchybu sterowania  $u(t) - u_{ep}$  także. Wykorzystano następujące wartości:

$$Q = \begin{bmatrix} 5000 & 0 & 0 \\ 0 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 \end{bmatrix}, R = 1.$$

Rozwiązując równanie Riccatiego otrzymano macierz wzmocnień  $K \in \mathbb{R}^3$ , która użyta w pętli ujemnego sprzężenia zwrotnego zwraca sterowanie optymalne  $u$ .



Rysunek 10. Schemat działania regulatora LQR.

Do układu z regulatorem widocznym na rysunku 10 dodano również saturację, aby sygnał sterujący pozostał w zakresie  $[-1,1]$ . Dla linearyzacji w punkcie pracy uzyskano następującą macierz  $K$ :

$$K = [-296.4803 \quad -76.851 \quad -0.3210]$$

## 6. Całość układu sterowania

Pomimo poprawnego wyznaczenia regulatora liniowo-kwadratowego do zadania sterowania w otoczeniu punktu pracy niezbędne okazało się wdrożenie dodatkowych narzędzi pozwalających układowi osiągnąć taki punkt (najlepiej w jak najkrótszym czasie). Regulator LQR był w stanie zrealizować to zadanie ponieważ dąży do punktu pracy w którym wychylenie wahadła jest równe  $\pi$ , a sygnał przekazywany na regulator resetuje się w położeniu dolnym co powoduje zmianę sterowania na znak przeciwny po przekroczeniu tego punktu co z kolei prowadzi do coraz to większych wychyleń i ostateczne dojście do położenia górnego. Niemniej jednak dochodzenie w taki sposób do położenia górnego trwało stosunkowo długo oraz było w niektórych przypadkach uciążliwe dlatego zdecydowano się na wdrożenie autorskiego rozwiązania realizującego lepiej opisane zadanie.

Na zaaplikowane rozwiązanie składały się 4 mechanizmy:

- Regulator LQR realizujący sterowanie w otoczeniu punktu pracy. Do regulatora trafia sygnał położenia wahadła powiększony o wartość  $\pi$  pozwalając na pracę na pełnym zakresie i przesuając reset położenia z górnego na dolny, sygnał prędkości kątowej wahadła będący pochodną poprzedniego oraz sygnał prędkości koła zamachowego. Po otrzymaniu sterowania, na wartość tą jest aplikowana saturacja ograniczająca sygnał do maksymalnych zakresów sprzętowych silniczka.
- Funkcja modyfikująca sygnał z regulatora LQR w sytuacjach „ekstremalnych” zaprezentowana na listingu 5a. Jeśli wahadło jest blisko dolnej granicy i porusza się szybko to funkcja wymusza na system sterowanie hamujące. W normalnych warunkach zwraca ona sterowanie LQR bez zmian. Funkcja działa jako zabezpieczenie przed destabilizacją układu.
- Funkcja realizująca sterowanie początkowe po uruchomieniu układu zaprezentowana na listingu 5b. Procedura ta ma na celu jak najszybsze dojście układu do punktu pracy poprzez przełączanie sterowania na przeciwny znak gdy zmienia się prędkość kątowa wahadła.
- Funkcja przełączająca system między trybem sterowania początkowego (*sterowanie\_start*) a sterowaniem LQR (*sterowanie\_LQR*) w zależności od kąta wychylenia wahadła (*angle*), której implementacja została przedstawiona na listingu 6. Jeśli kąt znajduje się w zakresie  $(\pi - \frac{\pi}{2}, \pi + \frac{\pi}{2})$ , funkcja uznaje, że wahadło jest gotowe do stabilizacji, i przełącza układ w tryb LQR, ustawiając *start\_ster* = 0. Dopóki *start\_ster* == 1, zwracane jest *sterowanie\_start*. Po przełączeniu na LQR zwracane jest *sterowanie\_LQR*. Mechanizm zapewnia inicjalne sterowanie wahadłem doprowadzające je szybko do punktu pracy, a następnie precyzyjną stabilizację w pozycji pionowej. Dzięki wykorzystaniu zmiennej z pamięcią (słowo kluczowe *persistent*) możliwe jest przechowywanie w funkcji informacji o tym czy zdarzenie doprowadzenia układu do punktu pracy już nastąpiło czy nie.

```

function y= fcn(angle, vel, u)
y = u;
if(angle < 1 && vel > 5.5)
    y = 1;
end
if(angle > 2*pi-1 && vel < -5.5)
    y = -1;
end
end
end

```

a)

```

function y = fcn(w)
y=1;
if (w > 0)
    y = -1;
end
if (w < 0)
    y = 1;
end

end
end

```

b)

*Kod 5 Definicje funkcji pomocniczych służących do sterowania układem. Po lewej a) funkcja modyfikująca sygnał z regulatora LQR, po prawej b) funkcja generująca sygnał sterujący na początku działania układu.*

```

function y = fcn(angle, sterowanie_LQR, sterowanie_start)
persistent start_ster;
if isempty(start_ster)
    start_ster = 1;
end

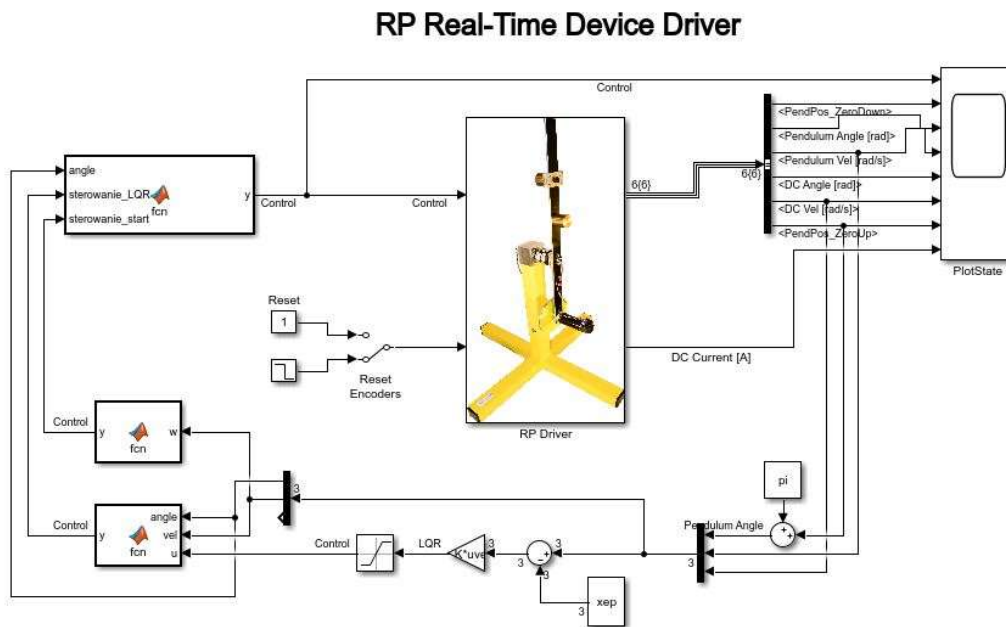
if (angle > pi-pi/2 && angle < pi+pi/2 && start_ster == 1)
    start_ster=0;
end

if (start_ster == 1)
    y = sterowanie_start;
else
    y = sterowanie_LQR;
end
end
end

```

*Kod 6 Definicja funkcji odpowiedzialnej za przełączanie sterowania w tryb LQR oraz sterowania początkowego mającego doprowadzić układ do punktu pracy.*

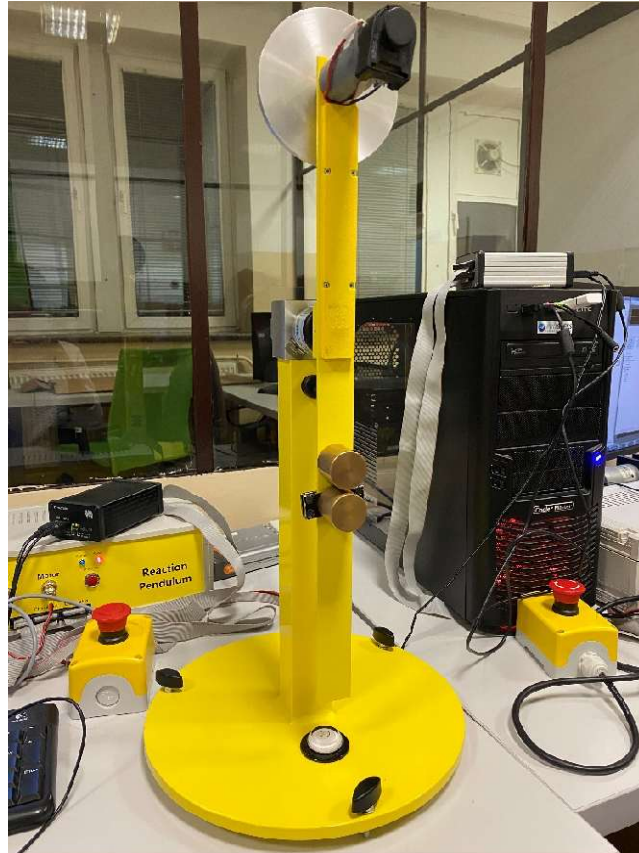
Schemat całości układu sterowania zawierającego wszystkie elementy opisane w niniejszym rozdziale został zaprezentowany na rysunku 11.



Rysunek 11 Schemat działania całości układu sterowania.

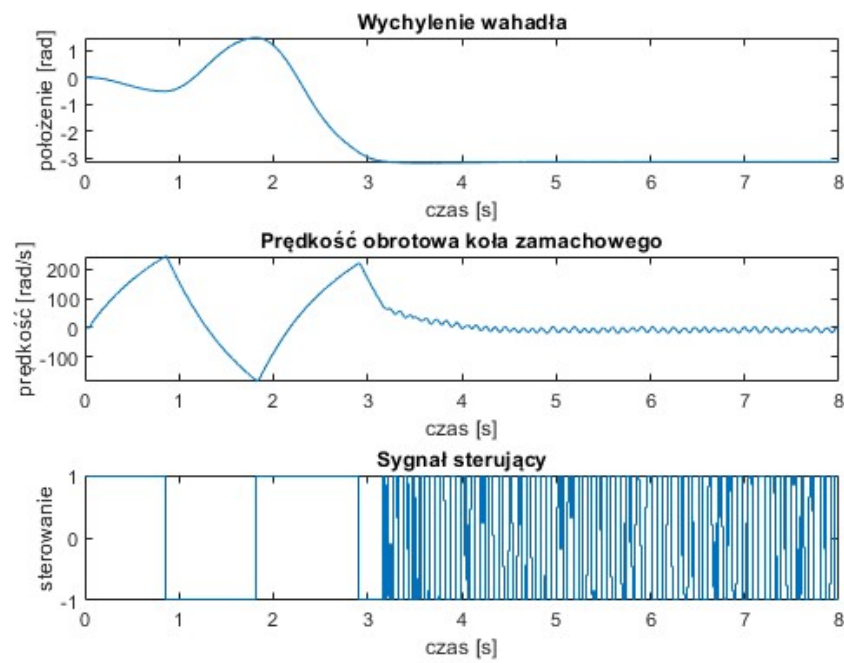
## 6.1. Weryfikacja działania układu regulacji

Układ wyposażony w narzędzia pozwalające na szybkie osiągnięcie punktu pracy  $x_{ep}$  oraz regulator LQR aktywnie stabilizujący system w tym położeniu został przetestowany przy użyciu różnych scenariuszy. Na zdjęciu 2 można zaobserwować działanie układu stabilizacji wahadła w punkcie pracy. Warto nadmienić, że sygnał wychylenia wahadła pokazywany na rysunkach 12, 13, 14 i 15 jest wychyleniem bezwzględnym które nie resetuje się po pełnym okrążeniu wahadła wokół przegubu, w przeciwieństwie do sygnału który przekazywany jest na regulator LQR. Z tego właśnie powodu pierwsze zmienna stanu punktu pracy wahadła będzie wielokrotnością  $\pi$ . Taki zabieg ma na celu zwiększenie przejrzystości wykresu poprzez niestosowanie nieciągłości wynikających z resetu położenia.



Zdjęcie 2 Fotografia obiektu wahadła reakcyjnego w podczas działania układu regulacji.

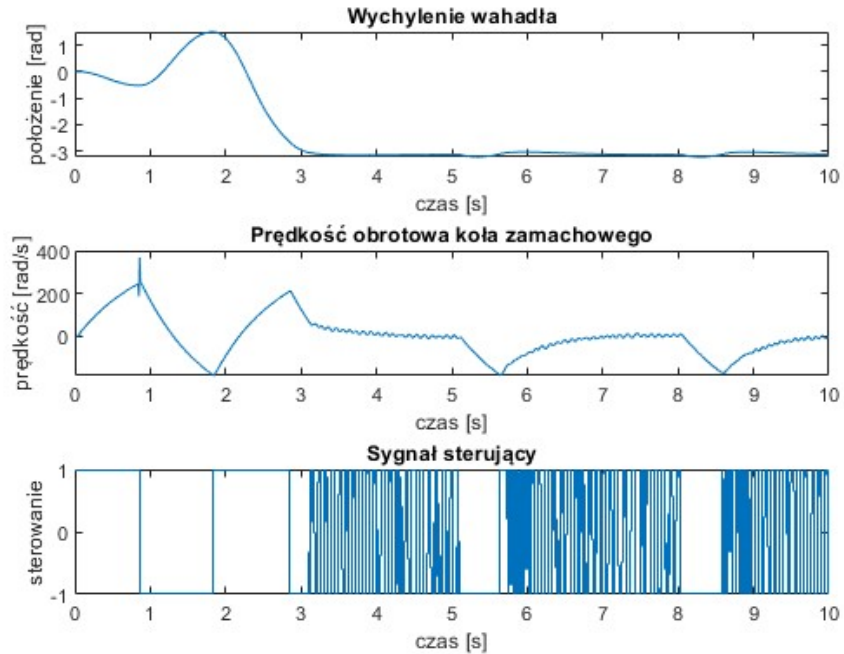
Na początku zweryfikowano działanie układu regulacji dla przypadku gdy w systemie nie występują żadne zakłócenia. Wyniki zaprezentowano na rysunku 12.



Rysunek 12 Przebieg regulacji dla zadania stabilizacji wahadła w pionie podczas scenariusza braku zakłóceń.

Jak widać, układ osiąga zadane położenie po około 3 sekundach. Następnie można zauważyć, że regulator LQR aktywnie pracuje stabilizując wahadło w zadanym punkcie pracy.

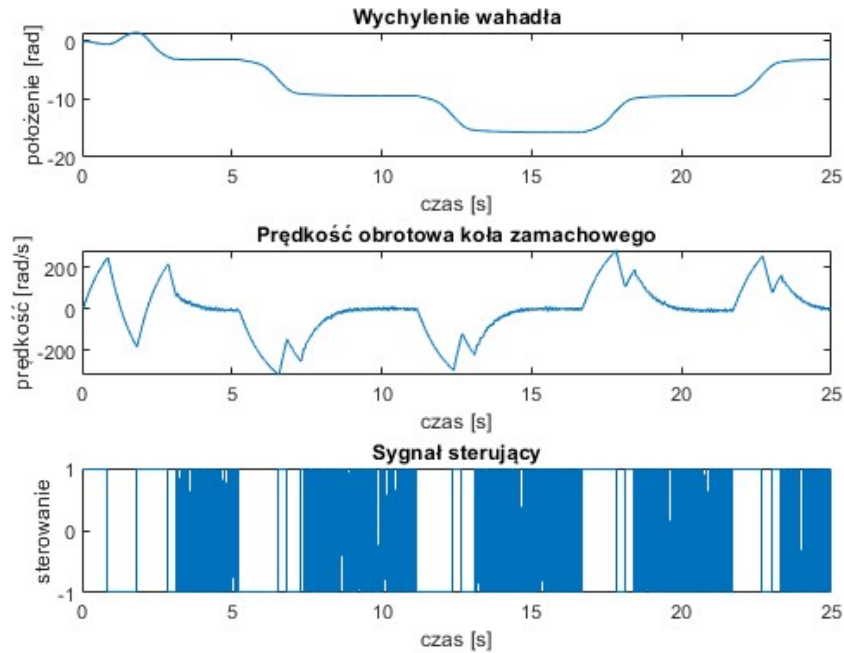
Kolejny przebieg zaprezentowany na rysunku 13 ukazuje podobną sytuację jednak tym razem wprowadzono do systemu niewielkie zakłócenia w postaci impulsowych wychyleń z położenia równowagi.



Rysunek 13 Przebieg regulacji dla zadania stabilizacji wahadła w pionie podczas scenariusza lekkich zakłóceń.

Można zwrócić uwagę, że układ radzi sobie z niewielkimi wychyleniami z położenia równowagi. Powrót do punktu pracy następuje w mniej niż 1 sekundę.

Kolejny eksperyment przewidywał wprowadzenie zakłóceń o większej sile. Wyniki zaprezentowano na rysunku 14.

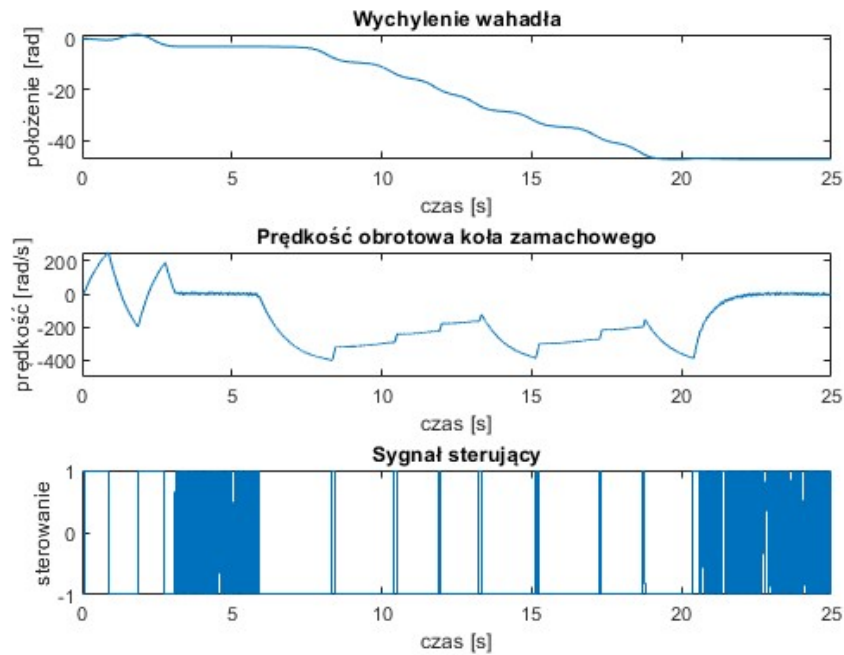


Rysunek 14 Przebieg regulacji dla zadania stabilizacji wahadła w pionie podczas scenariusza dużych zakłóceń.

Tym razem układ traci stabilność z uwagi na brak możliwości skompensowania dużych zakłóceń przez regulator LQR. Widać jednak, że wyjście z położenia równowagi pozwala systemowi ustabilizować się po wykonaniu pełnego obrotu i ponownie odzyskuje zadany punkt pracy.

Ostatni przypadek testowy miał zwizualizować pewną podatność układu regulacji. Polegał on na wprowadzeniu po ustabilizowaniu bardzo dużego zakłócenia. Ten scenariusz przedstawiono na rysunku 15.





Rysunek 15 Przebieg regulacji dla zadania stabilizacji wahadła w pionie podczas scenariusza wystąpienia bardzo dużego zakłócenia w układzie.

W takim scenariuszu zakłócenie jest na tyle duże, że układ nie jest w stanie odzyskać równowagi i wahadło kręci się w kółko. Jest to wynikiem faktu, że regulator jest „spóźniony” z hamowaniem i moment siły którym przeciwdziała jest za mały żeby wyhamować wahadło na czas.

## 7. Podsumowanie i wnioski

Przeprowadzony projekt, którego celem było zaprojektowanie oraz implementacja układu regulacji liniowo-kwadratowej LQR dla wahadła reakcyjnego, pozwolił na zrealizowanie kluczowych etapów, od modelowania matematycznego, przez identyfikację parametrów fizycznych, aż po implementację i testy regulatora. Proces projektowania układu sterowania opierał się na podejściu Model-Based Design w środowisku MATLAB-Simulink, co umożliwiło efektywną weryfikację założeń teoretycznych i optymalizację modelu w oparciu o rzeczywiste dane.

Badany obiekt, wahadło reakcyjne firmy INTECO, charakteryzował się nieliniowością i niestabilnością, co czyniło go szczególnie interesującym z perspektywy projektowania algorytmów sterowania. Kluczowym wyzwaniem była precyzyjna identyfikacja parametrów systemu, takich jak współczynnik tarcia, momenty bezwładności czy niewyważenie. Wykorzystane metody analityczne i numeryczne, w tym optymalizacja w MATLAB, pozwoliły na oszacowanie tych wartości. Niemniej jednak, problem nieliniowości tarcia oraz ograniczenia modelu w odwzorowaniu zachowania systemu poza bliskim otoczeniu punktu pracy zostały zauważone i musiały zostać uwzględnione włączając w kompletny układ sterowania dodatkowe moduły.

Ostateczna weryfikacja modelu w postaci nieliniowej oraz zlinearyzowanej wykazała jego wysoką zgodność z zachowaniem rzeczywistego obiektu w otoczeniu punktu pracy. Wyniki wskazują, że zaprojektowany układ sterowania spełnia założone cele i umożliwia aktywną stabilizację niestabilnego punktu równowagi wahadła w pozycji pionowej. Podczas realizacji projektu zidentyfikowano jednak kilka wyzwań i ograniczeń, które mogą być uwzględnione w dalszych badaniach:

- Nieliniowy charakter tarcia znacząco wpływa na dynamikę układu, co sugeruje potrzebę dalszej analizy i potencjalnie bardziej zaawansowanego modelowania tej właściwości w przyszłości.
- Zastosowanie optymalizacji numerycznej w identyfikacji parametrów umożliwiło istotne zwiększenie dokładności modelu względem metod analitycznych, które zastosowano jedynie w stosunku najprostszych parametrów.
- Weryfikacja działania modelu wykazała wysoką zgodność z rzeczywistością w otoczeniu punktu linearyzacji, co potwierdza trafność przyjętych założeń.
- Z uwagi na fakt, że regulator LQR dobrze steruje obiektem jedynie w najbliższym otoczeniu punktu pracy układu, przydatne okazało się zastosowanie odmiennych metod sterowania dla przypadków gdy układ znajduje się daleko punktu pracy.
- Pomimo zastosowania warunków i ograniczeń układ niestety może zostać wprowadzony w stan niestabilności podczas którego nie wróci już do położenia równowagi. Ponownie jest to spowodowane tym, że regulator dobrze radzi sobie jedynie z stabilizacją w bliskim otoczeniu punktu pracy i dla takich „ekstremalnych” sytuacji jest spóźniony z regulacją. Ten problem można by rozwiązać stosując bardziej zaawansowane metody regulacji takie jak chociażby sterowanie predykcyjne (ang. *model predictive control*, *MPC*).