

**Akademia Górniczo-Hutnicza im. Stanisława
Staszica w Krakowie**

Wydział Elektrotechniki, Automatyki, Informatyki i Inżynierii
Biomedycznej

Kierunek Automatyka i Robotyka – Inteligentne Systemy Sterowania



Laboratorium problemowe

Sprawozdanie projektowe

Układ TRAS – Helikopter

Mateusz Smolarczyk, Błażej Szargut, Michał Szmuksta

Kraków, 14 maja 2024

Spis treści

Spis treści.....	2
1. Wstęp	3
2. Obiekt.....	3
2.1. Czujniki.....	4
2.2. Model matematyczny obiektu.....	5
3. Identyfikacja parametrów modelu	7
3.1. Analityczne wyznaczenie U , I oraz β	7
3.2. Optymalizacja modelu za pomocą pakietu MATLAB	10
3.3. Zależność siły ciągu od sygnału sterującego	12
3.4 Weryfikacja kompletnego modelu	15
4. Linearyzacja.....	18
5. Regulator LQR.....	19
6. Regulator LQI	24
7. Podsumowanie i wnioski	29

1. Wstęp

Głównym zadaniem realizowanym w trakcie Laboratorium Problemowego było opracowanie układu regulacji dla wybranego przez zespół fizycznego obiektu. Aby możliwe było osiągnięcie tak sformułowanego celu, po drodze należało wykonać szereg różnych czynności, takich jak:

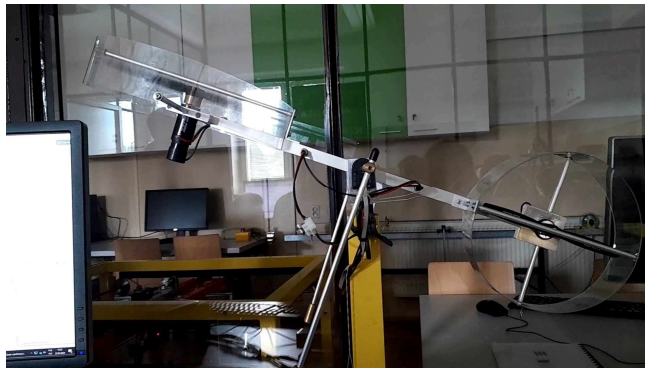
- opracowanie modelu matematycznego, który z wystarczającą dokładnością opisywałby wybrany obiekt,
- skalibrowanie urządzeń pomiarowych,
- identyfikacja parametrów fizycznych obiektu,
- weryfikacja działania modelu,
- zaprojektowanie regulatora realizującego zdefiniowane zadanie.

W laboratorium korzystano ze stanowiska zawierającego m.in. komputer PC wyposażony w kartę pomiarową oraz pakiet MATLAB. Sterowanie obiektem odbywało się poprzez odpowiednio przygotowany model Simulink, który korzystał z jądra działającego w czasie rzeczywistym. Dzięki temu możliwy był do osiągnięcia determinizm czasowy dokonywanych pomiarów, wykonywanych obliczeń oraz wysyłanych sygnałów sterujących.

2. Obiekt

Badanym obiektem był TRAS (Two Rotor Aero-dynamical System) firmy INTECO. Jest to wahadło o dwóch stopniach swobody (może obracać się w pionie oraz w poziomie). Układ można zobaczyć na zdjęciu 1. Obiekt składa się z ramienia podpartego mniej więcej w połowie długości. Na obu końcach ramienia znajdują się śmigła zasilane silnikami, odpowiadające za sterowanie układem. Większe śmigło jest zorientowane poziomo, a mniejsze pionowo. Można również zauważyć, że do obiektu dołączono dodatkowe obciążniki na ramionach o regulowanych kątach, które mogą zmieniać niewyważenie układu.

Na potrzeby danego ćwiczenia ograniczono ruch układu tylko do osi pionowej, blokując możliwość obrotu w poziomie. W ten sposób powstało wahadło o jednym stopniu swobody i jednym sygnale sterującym. W poniższym opisie skupiono się na takim właśnie obiekcie.

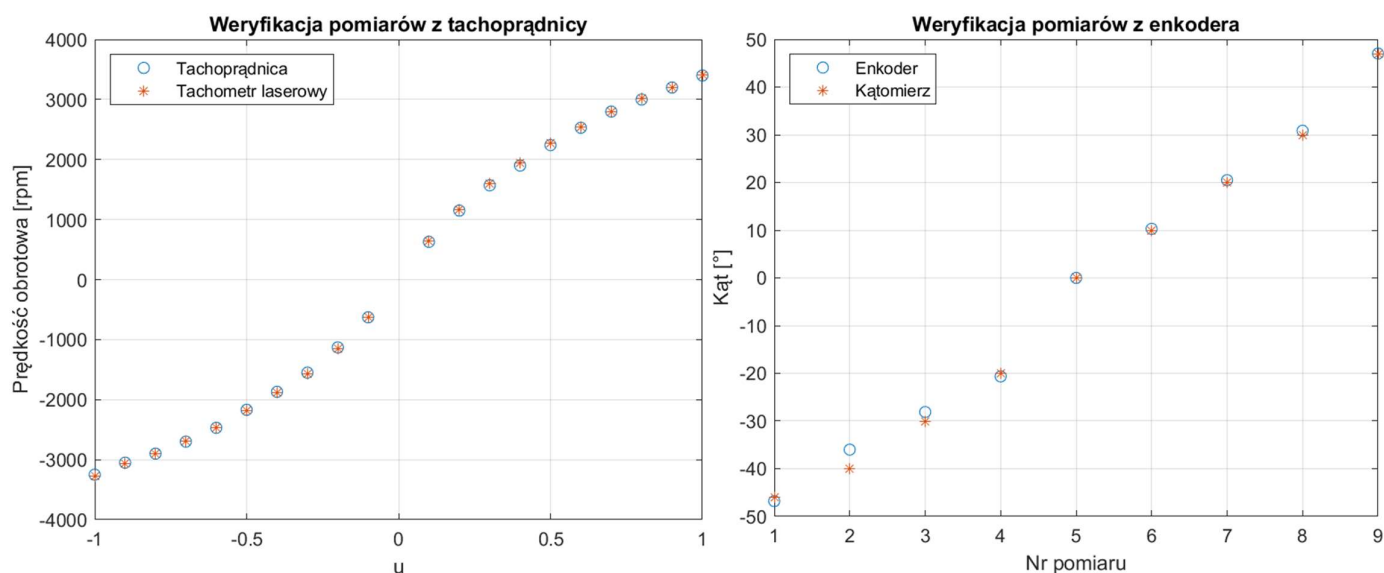


Zdjęcie 1. Obiekt TRAS w laboratorium

2.1. Czujniki

Układ jest wyposażony w dwa czujniki. Kąt obrotu wahadła jest wyznaczany za pomocą enkodera inkrementacyjnego znajdującego się w punkcie podparcia wahadła. Obiekt wyposażony jest również w prądnice tachometryczną mierzącą prędkość kątową silnika.

Przeprowadzono pomiary w celu dokonania kalibracji każdego z czujników. Aby skalibrować enkoder, wyzerowano go w pozycji poziomej, a następnie wykorzystując kątomierz zmieniano kąt obrotu wahadła i odczytywano pomiar z czujnika. Aby zweryfikować pomiary dokonywane przez prądnice tachometryczną wykorzystano tachometr laserowy. Na rysunku 1 widoczne są wykresy danych z tabeli 1 oraz 2.



Rysunek 1. Weryfikacja pomiarów z tachoprądnicy (z lewej) oraz enkodera (z prawej).

Tabela 1. Pomiary prędkości obrotowej wiatraka za pomocą tachoprądnicy oraz tachometru laserowego.

Sterowanie	Tachoprądnica [rpm]	Tachometr laserowy [rpm]
-1,00	-3250	-3273
-0,90	-3050	-3071
-0,80	-2900	-2897
-0,70	-2700	-2688
-0,60	-2470	-2471
-0,50	-2170	-2183
-0,40	-1870	-1888
-0,30	-1550	-1567
-0,20	-1130	-1150
-0,10	-629	-627
0,10	629	645
0,20	1150	1173
0,30	1570	1597
0,40	1900	1940
0,50	2240	2275

0,60	2530	2548
0,70	2800	2801
0,80	3000	3021
0,90	3200	3203
1,00	3400	3411

Tabela 2. Pomiar wychylenia wahadła za pomocą enkodera oraz kątomierza.

Pomiar	Kątomierz	Pomiar z enkodera [stopnie]
1	-46	-46,79
2	-40	-36
3	-30	-28,12
4	-20	-20,65
5	0	0
6	10	10,28
7	20	20,48
8	30	30,84
9	47	47,02

Pomiary prędkości obrotowej wiatraka dokonane dwoma instrumentami niemalże się pokrywają. Największa wartość różnicy między zmierzonymi prędkościami wynosi 2,54%, w związku z czym nie dokonywano żadnej korekcji układu pomiarowego. W przypadku weryfikacji działania enkodera różnice były większe – pierwsze trzy pomiary były obarczone sporymi błędami wynoszącymi maksymalnie 11,11%. Mimo to podjęto decyzję o pozostawieniu skali enkodera bez zmian, ponieważ pomiar weryfikujący przy pomocy kątomierza nie mógł zostać uznany za precyzyjny.

2.2. Model matematyczny obiektu

Dany obiekt można zamodelować jako wahadło fizyczne, które jest opisane przez poniższe równanie:

$$I\varepsilon = -gU \cdot \sin(\varphi) - \beta\omega - Fd_1,$$

gdzie:

- I – moment bezwładności
- ε – Przyspieszenie kątowe
- g – przyspieszenie ziemskie
- U – niewyważenie układu
- φ – kąt obrotu
- β – współczynnik tarcia
- ω – prędkość kątowa
- F – siła ciągu śmigła
- d_1 – długość ramienia (Rysunek 2)

W celu zasymulowania modelu w pakiecie MATLAB, jego łatwiejszej analizy oraz późniejszego opracowania regulatora, powyższe równanie zostało zastąpiono równaniami stanu, dokonując podstawienia $x_1 = \varphi$, $x_2 = \omega$, oraz wprowadzając dodatkową zmienną stanu związaną z prędkością obrotową wiatraka x_3 :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \frac{1}{I}(gU \cdot \sin(x_1) + \beta x_2 + f_f(x_3) \cdot d_1) \\ \dot{x}_3 = \frac{1}{\tau}(K \cdot f_u(u) - x_3) \end{cases}$$

W powyższych równaniach stanu wiatrak zamodelowano jako obiekt z inercją I rzędu o wzmacnieniu K i stałej czasowej τ . Ponad to:

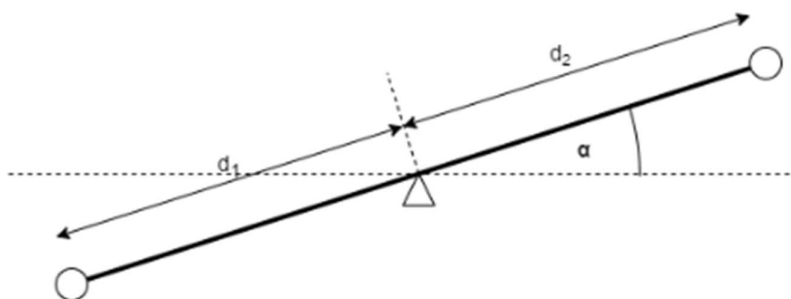
- f_f – funkcja nieliniowa opisująca zależność siły ciągu generowanej przez wiatrak od jego prędkości obrotowej x_3 ,
- u – sygnał sterujący $u \in [-1, 1]$,
- f_u – nieliniowa funkcja sterowania u .

W dalszych rozważaniach przyjęto, że $g = 9.8105 \frac{m}{s^2}$

3. Identyfikacja parametrów modelu

W celu stworzenia modelu obiektu należało wyznaczyć wartości wielkości fizycznych opisujących ten układ. We wzorze opisującym zachowanie obiektu występują trzy nieznane wartości: współczynnik tarcia β , niewyważenie U , moment bezwładności I oraz długość ramienia d_1 .

W pierwszej kolejności wykorzystując taśmę mierniczą zmierzono długości ramion obiektu. Za pomocą odczytu z enkodera wyznaczono również kąt niewyważenia wahadła. Jest to kąt pomiędzy położeniem wahadła w punkcie równowagi, a poziomem. Poniżej zamieszczono wyniki pomiarów.



Rysunek 2. Schemat obiektu

Tabela 3. Wartości wielkości przedstawionych na schemacie

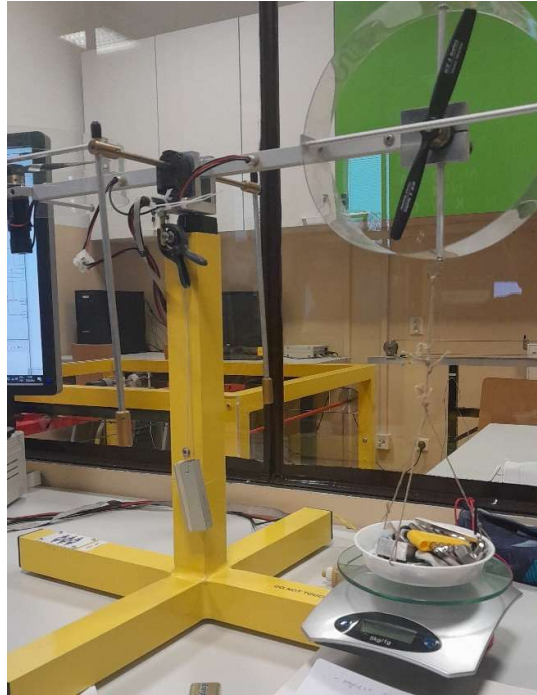
α [°]	d_1 [m]	d_2 [m]
21,370	0,235	0,250

3.1. Analityczne wyznaczenie U , I oraz β

W celu wyznaczenia wartości niewyważenia skorzystano z równania:

$$U = \frac{m_a r_a}{\sin(\alpha)}$$

Przeprowadzono eksperyment, aby uzyskać potrzebne wartości m_a i r_a . W tym celu zawieszono na końcu wahadła w odległości $r_a = d_2$ odważnik o znanej masie m_0 . Odważnik położono na wadze tak, by wahadło znalazło się w położeniu poziomym i odczytano masę m_1 z wagi. Wartość $m_a = m_0 - m_1$. Kąt α jest kątem niewyważenia wahadła. Poniżej przedstawiono uzyskane wartości oraz zdjęcie układu pomiarowego.

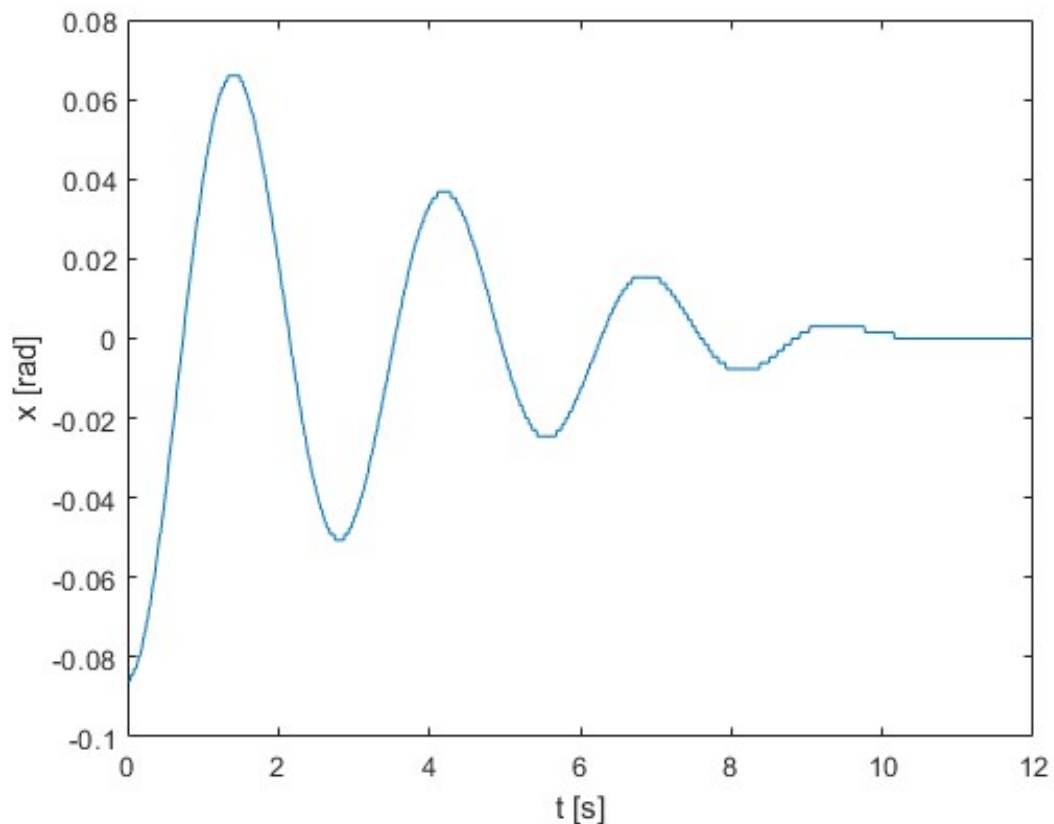


Zdjęcie 2. Układ pomiarowy do wyznaczenia niewyważenia układu

Tabela 4. Uzyskane wartości

m_a [kg]	r_a [m]	U [kg·m]
0,024	0,25	0,0165

W celu wyznaczenia momentu bezwładności oraz współczynnika tarcia dynamicznego występującego na osi obrotu wahadła niezbędne było przeprowadzenie dodatkowego eksperymentu. W tym celu wykonano pomiar przebiegu położenia wahadła po bardzo delikatnym wyprowadzeniu go ze stanu równowagi przy braku sterowania $u = 0$. Otrzymany przebieg na rysunku 3 prezentuje ruch harmonicznego, tłumionego wahadła fizycznego.



Rysunek 3. Zarejestrowany na potrzeby identyfikacji parametrów przebieg tłumionego wahadła fizycznego.

Na podstawie przebiegu wyznaczono średni okres drgań wahadła $T = 2,688$ oraz wartość bezwzględną pierwszego wychylenia $A_0 = 0,0859$. Amplitudy kolejnych oscylacji A wraz z ich logarytmami naturalnymi pomniejszonymi o logarytm naturalny A_0 , przedstawiono w tabeli 5.

W celu wyznaczenia momentu bezwładności posłużono się następującą zależnością prawdziwą dla wahadła fizycznego:

$$I = \left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 U g$$

Na podstawie wyznaczonego uprzednio T oraz U otrzymano więc moment bezwładności wahadła:

$$I = 0,0296 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Tabela 5. Wartości bezwzględne wychyleń wahadła z położenia równowagi podczas trwania eksperymentu

Czas [s]	Wartość bezwzględna wychylenia z położenia równowagi [rad]	Logarytm naturalny wychylenia pomniejszony o logarytm naturalny wychylenia początkowego
1,41	0,06596	-0,26417
2,81	0,05062	-0,52885
4,19	0,03682	-0,84729
5,56	0,02454	-1,25275
6,84	0,01534	-1,72275

8,17	0,00767	-2,41590
9,37	0,00307	-3,33223

Współczynnik tłumienia β wyznaczono metodą regresji liniowej opierając się na powyższych danych eksperymentalnych oraz następującej zależności:

$$\ln(A) = -\beta t + \ln(A_0)$$

Ostatecznie otrzymano wartość tłumienia:

$$\beta = 0,289$$

Wyznaczone w ten sposób współczynniki U , I oraz β zostały poddane weryfikacji co zobrazowano na rysunku 4. Niestety można zauważyć, że tłumienie modelu całkowicie różni się od rzeczywistości co zmusiło zespół do zastosowania innej metody doboru współczynników U oraz β .



Rysunek 4. Weryfikacja doboru parametrów metodą analityczną

3.2. Optymalizacja modelu za pomocą pakietu MATLAB

Zidentyfikowane parametry modelu, uzyskane na drodze odpowiednio przeprowadzonych eksperymentów, pomiarów oraz przekształceń matematycznych wydawały się nie przybliżać obiektu z pożądaną precyzją. W związku z tym podjęto decyzję o przeprowadzeniu optymalizacji parametrycznej I oraz β dla modelu wahadła fizycznego. Utworzony został w tym celu odpowiedni skrypt w pakiecie MATLAB, który korzystając z jednokrokowej metody różniczkowania Dormand-Prince (*ode45*), a także funkcji minimalizującej *fmincon()* optymalizował parametry modelu w taki sposób, aby zminimalizować błąd kwadratowy w postaci:

$$L = \int_{t_0}^{t_f} (x_1(t) - \hat{x}_1(t))^2 dt,$$

gdzie \hat{x}_1 oznacza wychylenie wahadła uzyskane z modelu. W blokach z kodem 1-3 zaprezentowano utworzone funkcje służące do optymalizacji.

```

function dxdt = model_wahadlo(t, x, F, params)
    U = 0.016465909059109;
    g = 9.8105;
    beta = params(1);
    l = params(2);

    dx1 = x(2);
    dx2 = (-g * U * sin(x(1)) - beta * x(2) + F * 0.235) / l;
    dxdt = [dx1; dx2];
end

```

Kod 1. Model wahadła wykorzystany do optymalizacji.

```

function params = optimize_model(t_real, x_real, x0)
    cost_parametrized = @(params) cost_fun(x_real, t_real, x0, params);
    options = optimoptions('fmincon','Display','iter', 'PlotFcn', 'optimplotfval');
    initial_params = [0.2, 0.02];
    lb = [0.0 0.0]; ub = [1.0 0.5];
    params = fmincon(cost_parametrized, initial_params, [], [], [], [], lb, ub, [], options);
end

```

Kod 2. Funkcja optymalizująca.

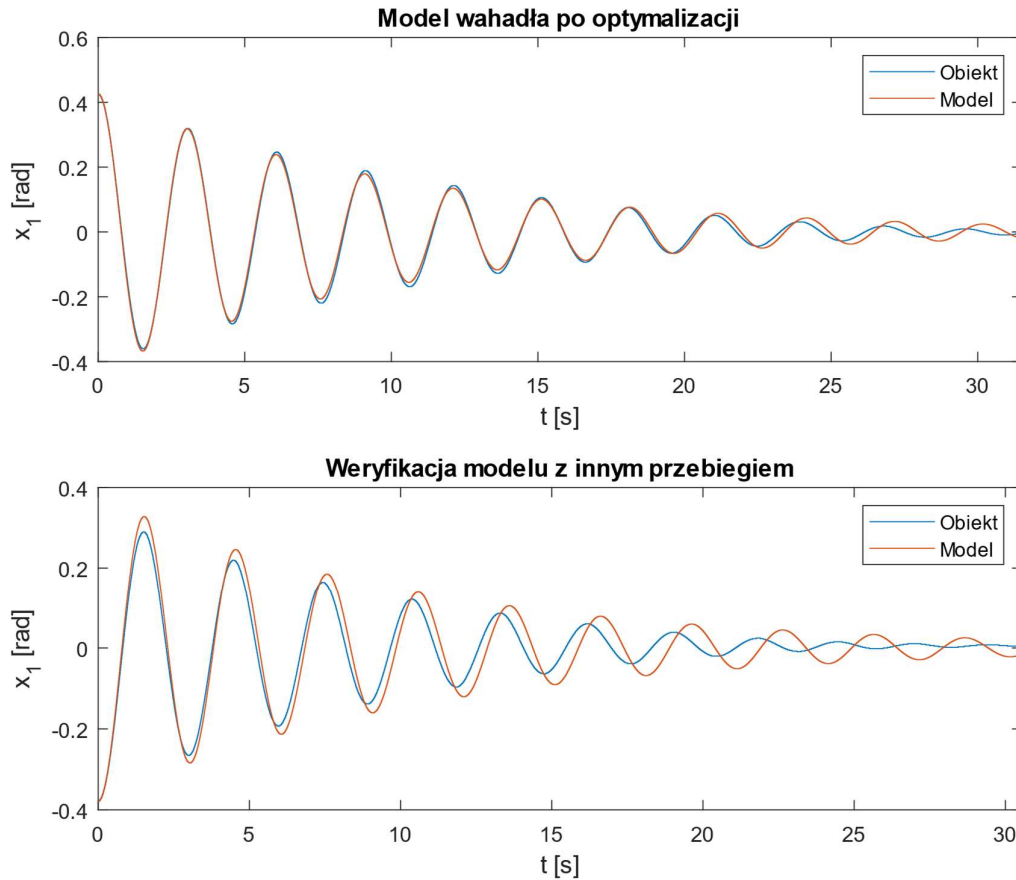
```

function loss = cost_fun(x_real, t_real, x0, params)
    [~, y] = ode45(@(t, x)model_wahadlo(t, x, 0, params), t_real, x0);
    loss = sum((y(:, 1) - x_real).^2);
end

```

Kod 3. Implementacja funkcji kosztu wykorzystująca ode45.

Model zaimplementowany przez kod 1 nie uwzględnia sygnału sterującego u , a co za tym idzie nie posiada trzeciej zmiennej stanu x_3 . Jest to spowodowane faktem, że w trakcie identyfikacji parametrów wahadła sterowanie oraz prędkość kątowna wiatraka $u = x_3 = 0$. Do weryfikacji uzyskanego na drodze optymalizacji modelu konieczne było zarejestrowanie drugiego przebiegu wychylonego z punktu równowagi wahadła. Na rysunku 5 zaprezentowano zestawienie danych rzeczywistych oraz uzyskanych z symulacji dla obu zestawów danych.



Rysunek 5. Model wahadła po optymalizacji numerycznej.

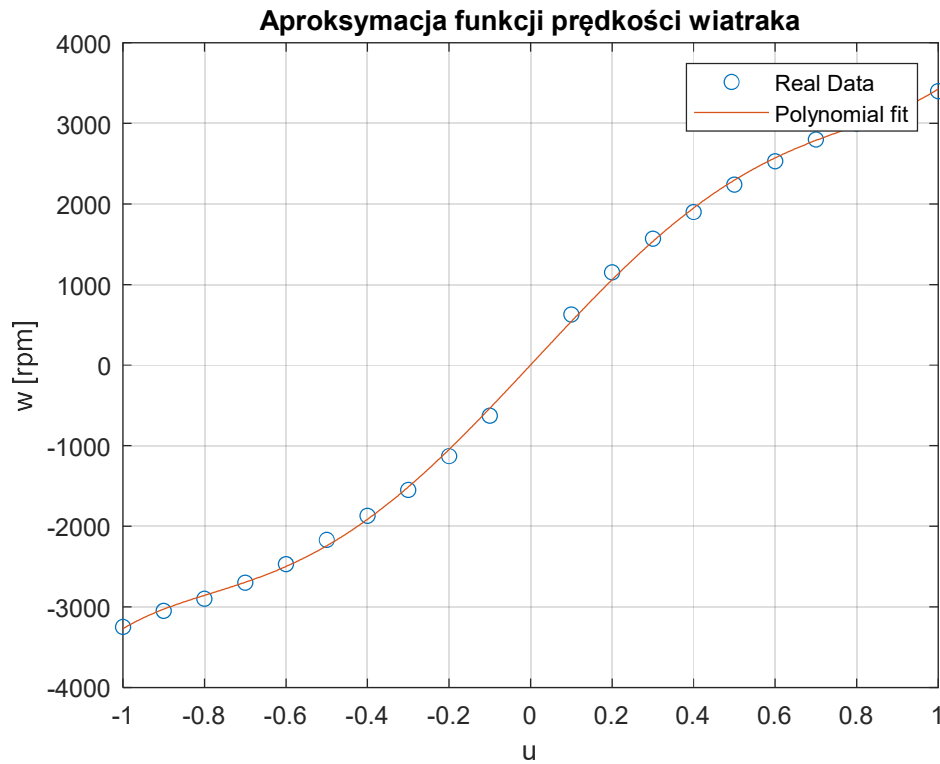
Przedstawione zestawienie widoczne na rysunku 5 uzyskano dla zoptymalizowanych parametrów $\beta = 0,056, I = 0,0296$. Wygenerowane symulacyjnie przebiegi praktycznie pokrywają się z danymi zarejestrowanymi na wykresie górnym, co jest oczywiste biorąc pod uwagę, że na tych danych dokonano optymalizacji. Na dolnym wykresie zgodnie z oczekiwaniami pojawiają się większe rozbieżności, jednak stają się one znaczące dopiero po 15 sekundach, co uznano za akceptowalne na potrzeby realizacji tego ćwiczenia.

3.3. Zależność siły ciągu od sygnału sterującego

Sterowanie w układzie jest możliwe, dzięki sile F generowanej przez wiatrak. Jest ona zależna od prędkości obrotowej silnika x_3 , która jest sterowana sygnałem sterującym u . Przygotowany w środowisku Simulink model służący do sterowania helikopterem akceptował sterowanie

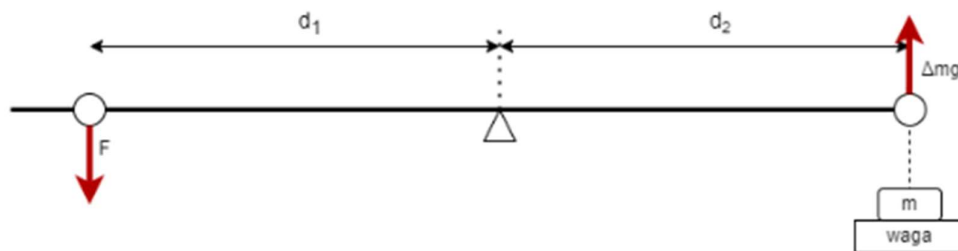
$u \in [-1, 1]$, które następnie było konwertowane na sygnał PWM napędzający silnik DC. Taka zależność, jak wykazały testy charakterystyki statycznej jest nieliniowa, w związku z czym należało wprowadzić funkcję $f_u(u)$, która w zadowalający sposób aproksymowałaby taki układ. Aby móc zamodelować sterowanie konieczne było więc skorzystanie z wyznaczonej wcześniej charakterystyki statycznej prędkości kątowej silnika $x_3(u)$ oraz siły ciągu od prędkości $F(x_3)$.

Charakterystyka statyczna $x_3(u)$ została sporządzona przy pomocy tachoprądnicy znajdującej się przy silniku. Następnie uzyskane wyniki interpolowano wielomianem 5 rzędu co zobrazowano na rysunku 6. Do tego celu wykorzystano funkcję *polyfit()* dostępną w MATLAB-ie.



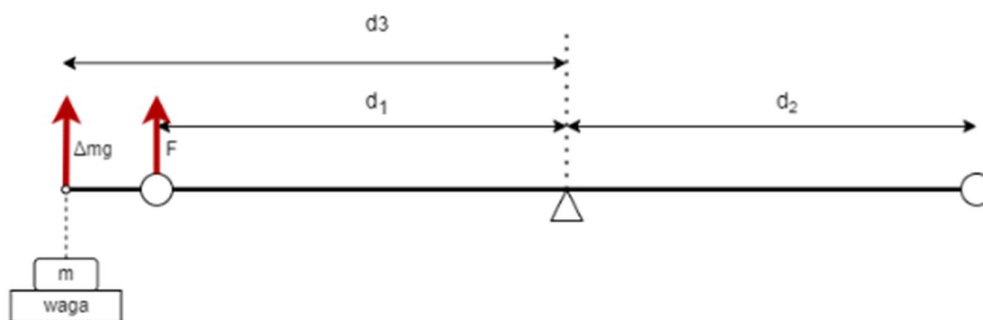
Rysunek 6. Wykres funkcji f_u zależności prędkości obrotowej wiatraka od sterowania, aproksymowanej wielomianem 5 stopnia.

Następnie przeprowadzono pomiary mające na celu wyznaczyć charakterystykę $F(w)$. W tym celu, podobnie jak w poprzednim kroku, odczytywano prędkość kątową silnika dla różnych wartości sterowania. Jednak do tego mierzono również siłę ciągu wirnika. Aby ją zmierzyć stworzono układ pomiarowy taki sam, jak na zdjęciu 2. W tym wypadku siłę można wyliczyć ze wzoru: $F = \Delta m g \cdot \frac{d_2}{d_1}$, gdzie $\Delta m = m_0 - m$, gdzie m_0 to odczyt z wagi przy położeniu poziomym wahadła dla $u = 0$, a m to odczyt z wagi dla aktualnie zadanej wartości u . Poniżej na schemacie zaprezentowano opisany układ pomiarowy:



Rysunek 7. Schemat układu pomiarowego dla siły o zwrocie w dół

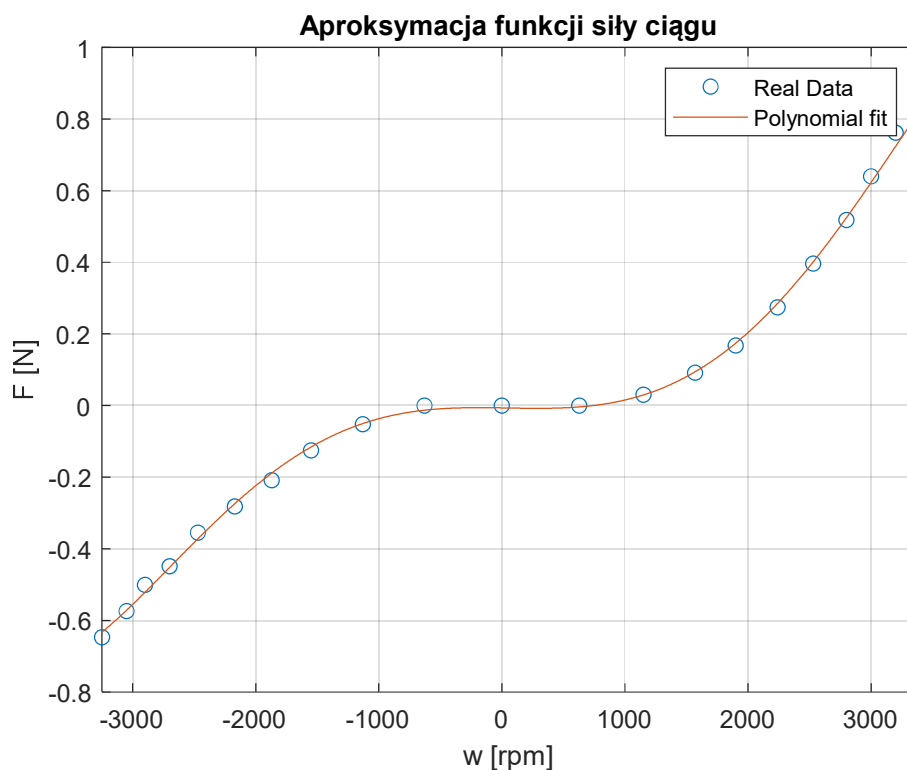
W ten sposób można jednak wyznaczyć siłę tylko o jednym zwrocie (tak jak zaznaczono na schemacie powyżej). Aby zmierzyć siłę o przeciwnym zwrocie przebudowano układ, przyczepiając masę po przeciwnej stronie wahadła w odległości $d_3 = 0,365 \text{ m}$:



Rysunek 8. Schemat układu pomiarowego dla siły o zwrocie w górę

W tym wypadku równanie na siłę miało postać: $F = \Delta mg \cdot \frac{d_3}{d_1}$.

Uzyskane wyniki interpolowano, tak samo jak w przypadku charakterystyki $w(u)$, za pomocą wielomianu 5 rzędu. Poniżej przedstawiono uzyskaną charakterystykę oraz funkcję aproksymującą $f_f(x_3)$.



Rysunek 9. Wykres funkcji f_f zależności siły ciągu od prędkości obrotowej wiatraka, aproksymowanej wielomianem 5 stopnia.

Do tego należy zwrócić uwagę, że $x_3(u)$ posiada również charakterystykę dynamiczną. Tak jak wspomniano w podrozdziale 2.2, wiatrak został opisany jako obiekt z inercją I rzędu. Równanie różniczkowe przyjętego modelu śmigła to:

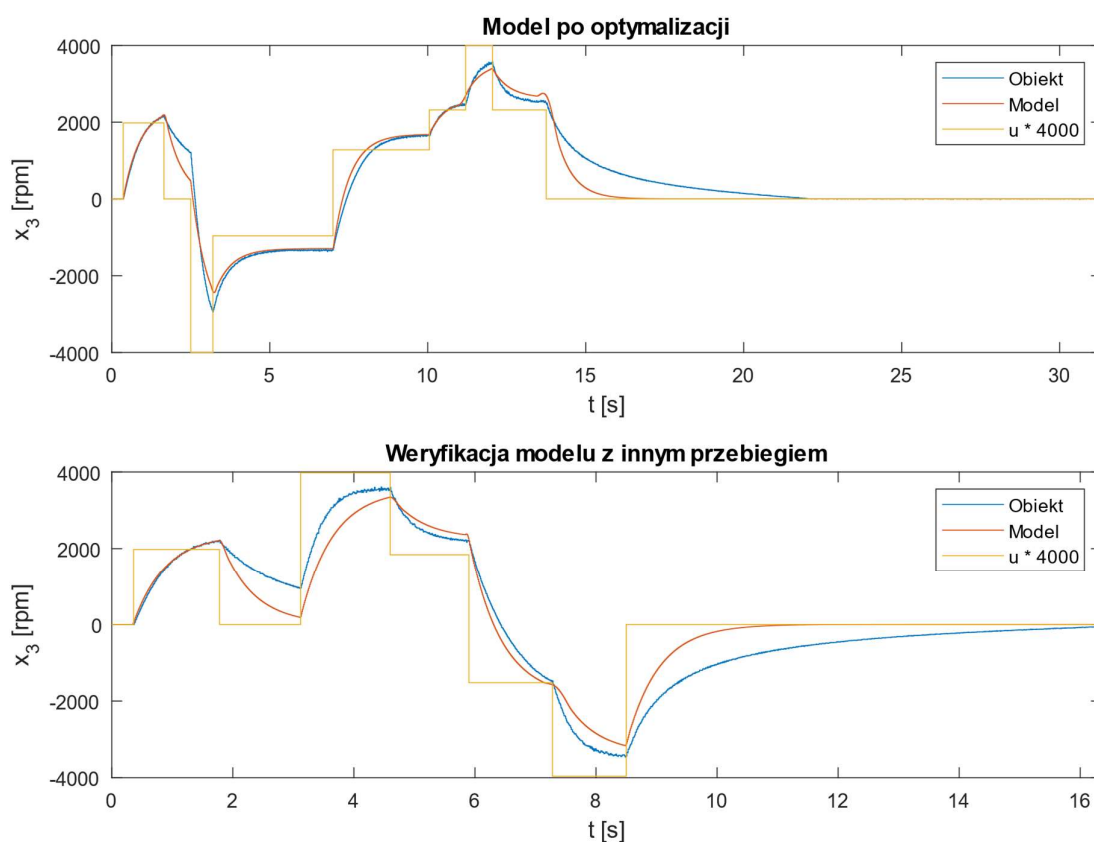
$$\dot{x}_3 = -\frac{1}{\tau}x_3 + \frac{K}{\tau} \cdot f_u(u).$$

Na potrzeby optymalizacji modelu opisującego silnik z wiatrakiem rozpatrywano go w odosobnieniu od wahadła, ponieważ przyjęte równanie nie zakładało wpływu ruchu wahadła na zachowanie śmigła. Jest to uproszczenie, które nie jest zgodne z rzeczywistością, jednak znacząco upraszcza ostateczny model helikoptera jednocześnie zapewniając satysfakcjonującą dokładność.

Proces numerycznej identyfikacji parametrów wiatraka przebiegał w analogiczny sposób jak dla wahadła fizycznego. Sprowadzał się on do:

1. Rejestracji dwóch przebiegów rzeczywistego obiektu przy określonym sterowaniu.
2. Optymalizacja parametrów modelu na podstawie jednego przebiegu.
3. Weryfikacja uzyskanego modelu z drugim przebiegiem.

Na rysunku 10 przedstawiono wyniki przeprowadzonej w ten sposób optymalizacji.



Rysunek 10. Optymalizacja modelu wiatraka.

Otrzymanymi parametrami są $K = 1,041$ i $\tau = 0,529$.

3.4 Weryfikacja kompletnego modelu

Gdy wszystkie elementy modelu zostały zidentyfikowane z zadowalającymi parametrami przybliżającymi ich działanie z osobna, można było przejść do weryfikacji nieliniowego modelu całościowego systemu, łączącego z sobą model statyczny sterowania i siły ciągu, a także modele dynamiczne wahadła oraz wiatraka. W celu weryfikacji poprawności

modelu utworzono funkcję implementującą równania systemu helikoptera zaprezentowane w podrozdziale 2.2, która jako parametry przyjmowała wyznaczone uprzednio współczynniki. Funkcja ta została zaprezentowana na bloku kodu 4.

```
function dxdt = model(t, x, u, params)
    beta = params(1); U = params(2); K = params(3); tau = params(4);
    p1 = params(5:10); mu1 = params(11:12);
    p2 = params(13:18); mu2 = params(19:20);
    g = 9.8105;
    l = 0.029572173408016;
    d1 = 0.235;

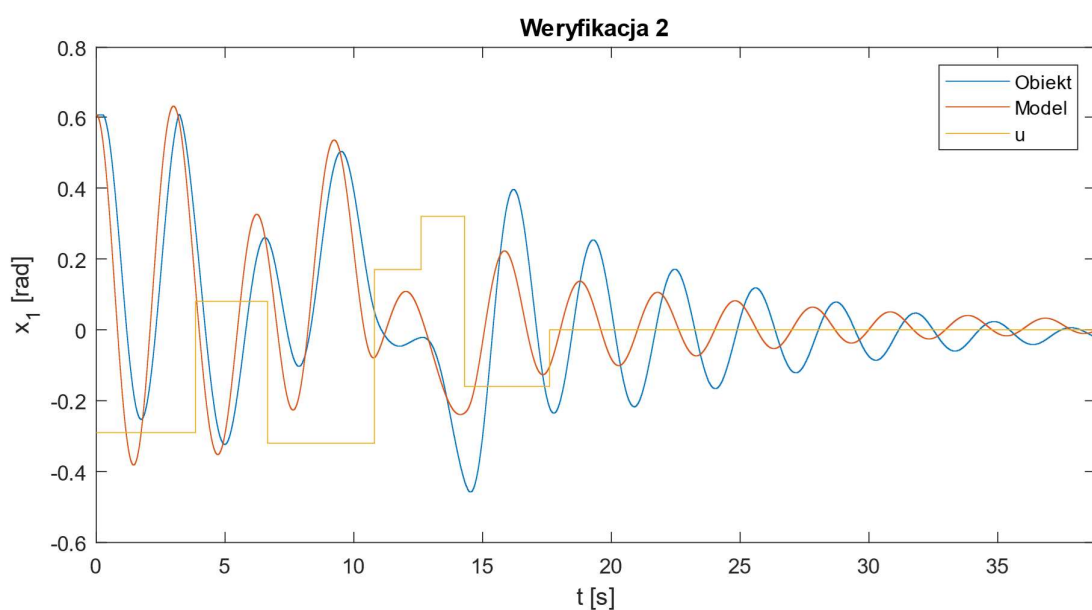
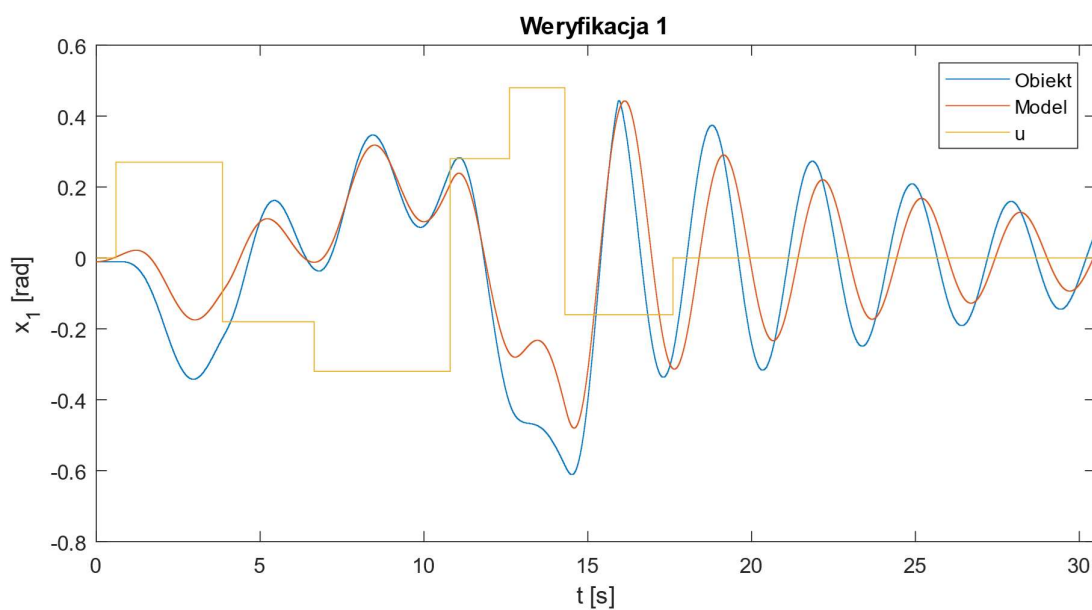
    f_u = polyval(p2, u, [], mu2);
    F = polyval(p1, x(3), [], mu1);
    F = min(max(F, -0.65), 0.8);

    dx1 = x(2);
    dx2 = (-g * U * sin(x(1)) - beta * x(2) - F * d1) / l;
    dx3 = (K * f_u - x(3)) / tau;
    dxdt = [dx1; dx2; dx3];
end
```

Kod 4 Kompletny model helikoptera w postaci zaimplementowany jako funkcja pakietu MATLAB.

Warto zwrócić uwagę na fakt, że na funkcję wielomianową aproksymującą siłę ciągu został dla bezpieczeństwa dodana saturacja, w taki sposób aby możliwe było przyjęcie przez nią jedynie wartości na znanym przedziale. Aproksymacja wielomianem piątego rzędu niosła ze sobą ryzyko osiągnięcia wysokich wartości tuż za analizowanym przedziałem. W celu polepszenia własności numerycznych funkcji *polyval()* jest do niej także przekazywany opcjonalny argument *mu*, będący produktem używanego do aproksymacji *polyfit()*.

Na rysunku 11 zaprezentowano dwa różne przebiegi wychylenia helikoptera w czasie dla nowego sygnału sterowania, na którym nie był optymalizowany żaden z parametrów modelu. W ten sposób można wiarygodnie zweryfikować poprawność działania systemu.

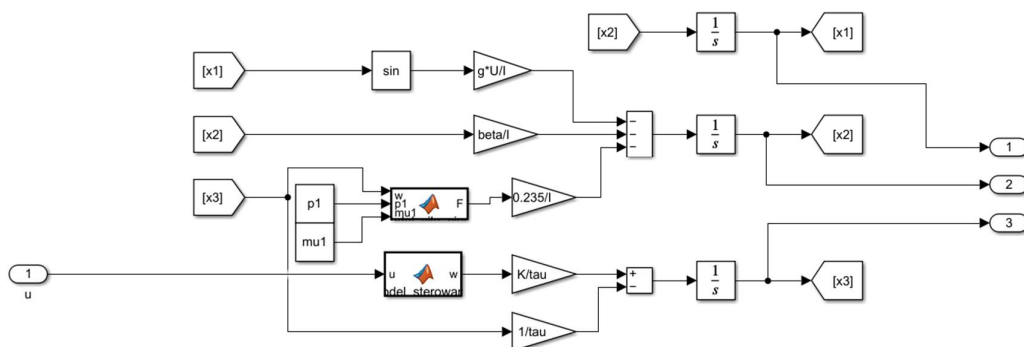


Rysunek 11 Wykresy dwóch zarejestrowanych przebiegów wykorzystanych do weryfikacji modelu..

Jak można zauważyć na wykresach powyżej, zachowanie modelu jest bardzo zbliżone do rzeczywistych przebiegów helikoptera, co potwierdza poprawność założeń oraz przeprowadzonych obliczeń. Tak skonstruowany system może zatem posłużyć jako element systemu regulacji, przedstawionego w kolejnych rozdziałach.

4. Linearyzacja

Stworzony model jest nieliniowy. Zawiera funkcję sinus oraz dwie nieliniowe charakterystyki $w(u)$ oraz $F(w)$. Aby móc stworzyć regulator do tego układu należało zlinearyzować model wokół punktu pracy. Aby dokonać linearyzacji wykorzystano narzędzie Simulink-a *Model Linearizer*. Zwraca ono macierze stanu dla zlinearyzowanego modelu, na podstawie modelu układu stworzonego w Simulink-u oraz podanego punktu pracy. Zbudowano więc model w Simulink-u., który jest on widoczny na rysunku 12.



Rysunek 12. Schemat modelu w Simulink-u

Przed przystąpieniem do linearyzacji należało zdefiniować punkt pracy. Linearyzację dokonano w dwóch punktach. Dla każdego zdefiniowano z góry dwie pierwsze zmienne stanu, a trzecia zmienna oraz sterowanie zostały dobrane z wykorzystaniem funkcji *fsolve*. Pierwsza zmienna stanu (położenie) w pierwszym przypadku wynosiła $-\alpha$, czyli położenie poziome. W drugim przypadku -2α . Dla obu punktów druga zmienna (prędkość kątowa wahadła) jest równa 0. Poniżej przedstawiono uzyskane wartości dla obu punktów (kąt w radianach).

$$1. \ x_{ep} = \begin{bmatrix} -0.373 \\ 0 \\ 1990.968 \end{bmatrix}, u_{ep} = 0.390$$

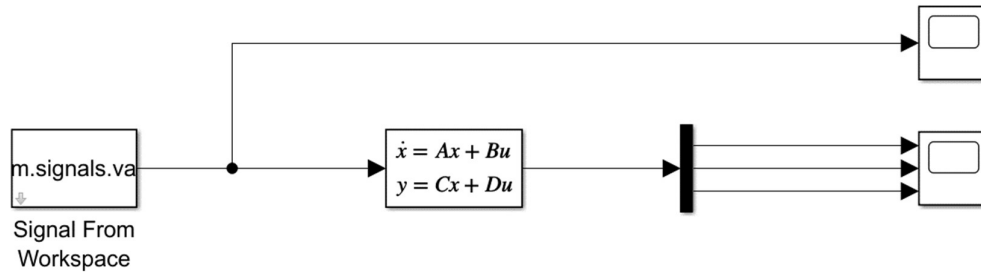
$$2. \ x_{ep} = \begin{bmatrix} -0.746 \\ 0 \\ 2466.679 \end{bmatrix}, u_{ep} = 0.525$$

Następnie wykorzystano wspomniany Toolbox *Model Linearizer*. Dzięki niemu uzyskano następujące macierze stanu:

$$1. \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4.022 & -0.186 & -0.0024 \\ 0 & 0 & -1.891 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 10680 \end{bmatrix}$$

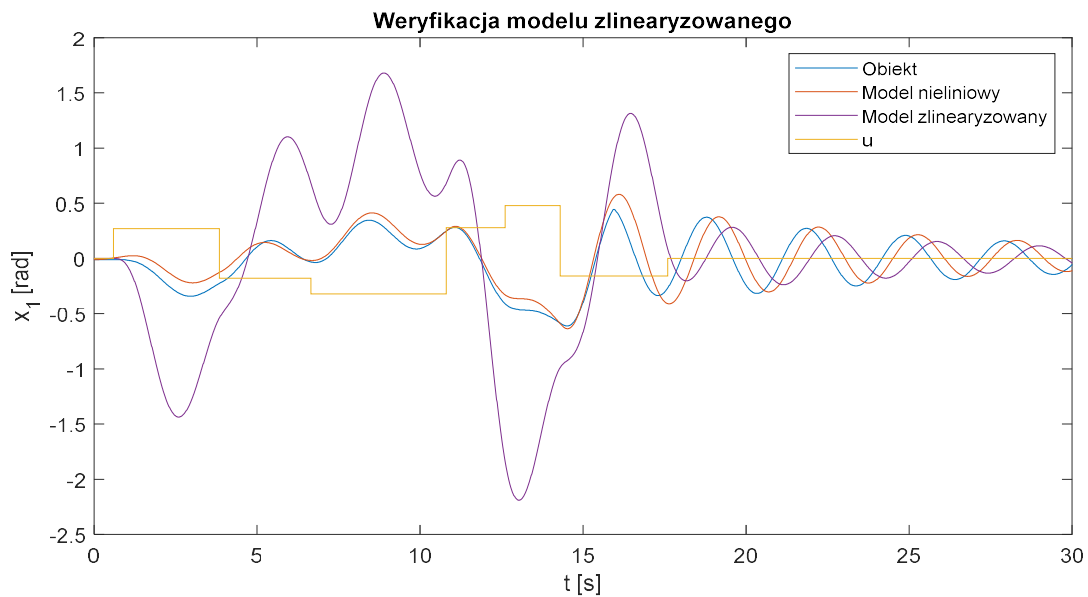
$$2. \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -3.226 & -0.185 & -0.0033 \\ 0 & 0 & -1.891 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 5770 \end{bmatrix}$$

Przeprowadzono test modelu zlinearyzowanego wokół pierwszego punktu. Stworzono prosty układ w Simulink-u, na podstawie którego uzyskano odpowiedź tego modelu dla tego samego sterowania, co wykorzystano przy weryfikacji modelu.



Rysunek 13. Schemat układu testowego w Simulink-u

Poniżej na wykresie porównano odpowiedź rzeczywistego układu, nieliniowego modelu oraz modelu po linearyzacji.



Rysunek 14 Wykres przebiegu weryfikacyjnego z naniesionymi odpowiedziami modelu rzeczywistego, nieliniowego i zlinearyzowanego w punkcie pracy będącym stabilnym poziomym wychyleniem wahadła.

Jak widać model zlinearyzowany dobrze przybliża działanie systemu jedynie w bliskim otoczeniu punktu pracy w którym został zlinearyzowany co jest zgodne z oczekiwanym zachowaniem.

5. Regulator LQR

Pierwszym przetestowanym algorytmem regulacji był regulator liniowo kwadratowy dla systemu z czasem ciągłym i nieskończonym horyzontem. Zaimplementowana w pakiecie

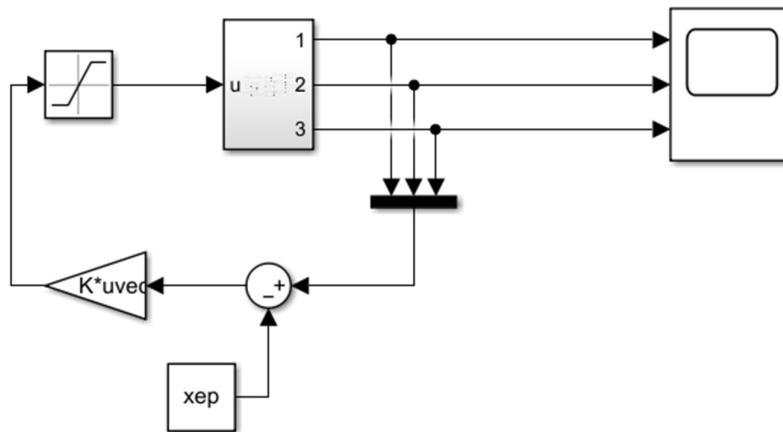
MATLAB funkcja *lqr()* minimalizuje funkcję kosztu $J(u)$ sterowania układem liniowym opisanym równaniami różniczkowymi w postaci $\dot{x} = Ax + Bu$

$$J(u) = \int_0^{\infty} (x(t)^T Q x(t) + u(t)^T R u(t)) dt.$$

Macierz diagonalna $Q \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ reprezentuje wagi dla uchybów poszczególnych zmiennych stanu względem punktu pracy $x(t) - x_{ep}$. Ponieważ sterowanie jest jednowymiarowe to waga R uchybu sterowania $u(t) - u_{ep}$ także. Wykorzystano następujące wartości:

$$Q = \begin{bmatrix} 80000 & 0 & 0 \\ 0 & 1000 & 0 \\ 0 & 0 & 0.01 \end{bmatrix}, R = 1.$$

Rozwiązując równanie Riccatiego otrzymano macierz wzmacnień $K \in \mathbb{R}^3$, która użyta w pętli ujemnego sprzężenia zwrotnego zwraca sterowanie optymalne u .

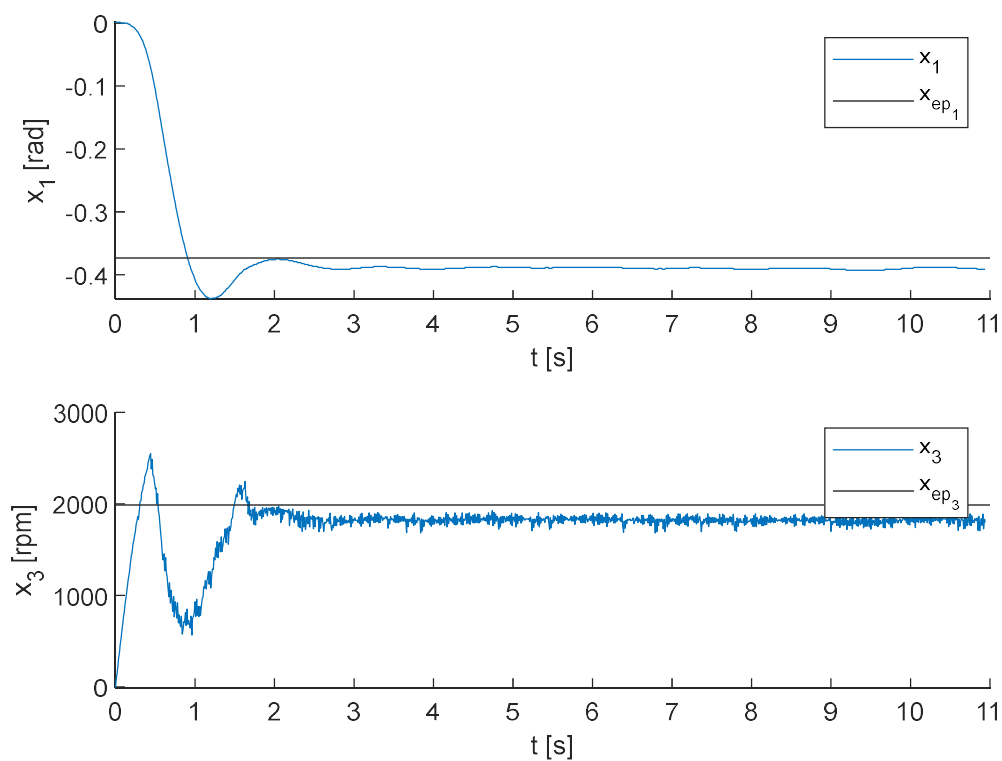


Rysunek 15. Schemat działania regulatora LQR.

Do układu z regulatorem dodano również saturację, aby sygnał sterujący pozostał w zakresie $[-1,1]$. Schemat pomija blok sterowanie w zadanym punkcie, które powinno zostać dodane do sygnału wygenerowanego przez regulator LQR. Dla linearyzacji w pierwszym punkcie uzyskano następującą macierz K :

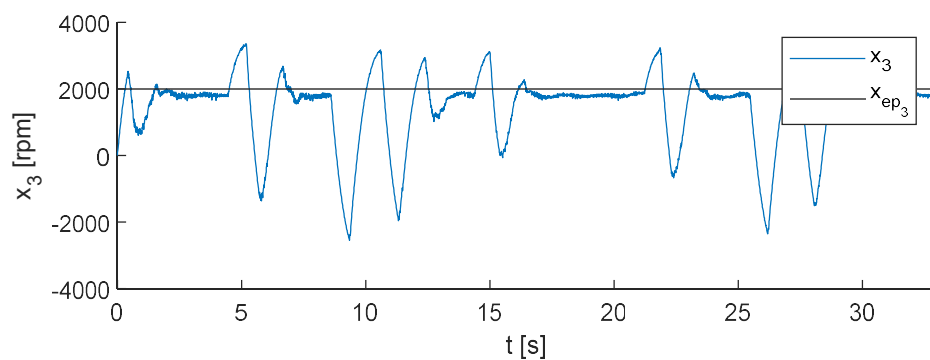
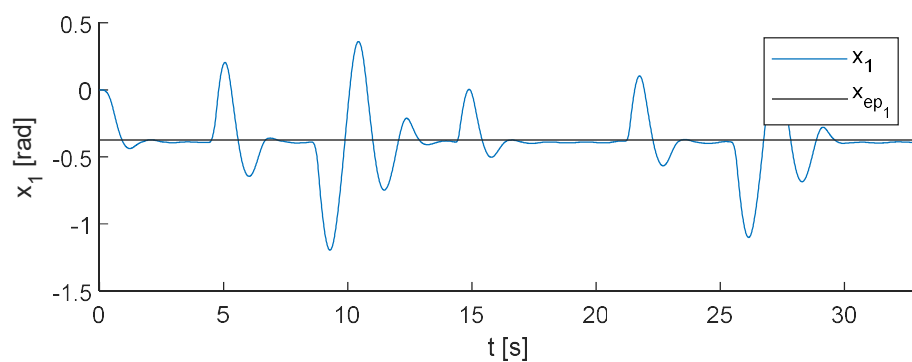
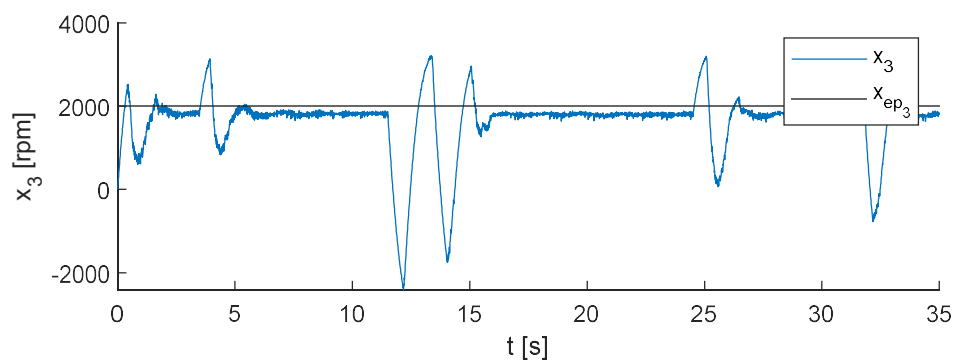
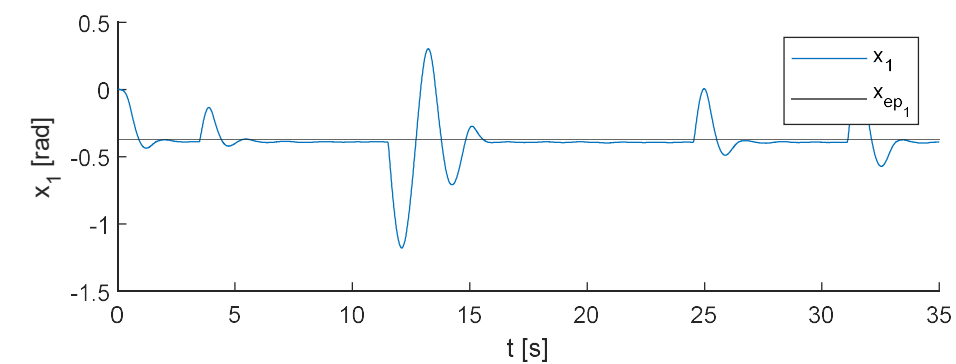
$$K = [-111.8323 \quad -94.174 \quad 0.1]$$

Gotowy regulator LQR został przetestowany przy użyciu różnych scenariuszy testowych dla zadanego punktu pracy x_{ep} . Na początku zbadano odpowiedź układu w przypadku braku zakłóceń. W następnej kolejności przeprowadzono podobne eksperymenty, jednak wprowadzając dodatkowe zakłócenia chwilowe do układu. W ostatnim doświadczeniu do układu zostało wprowadzone stałe zakłócenie polegające na zmianie masy na jednym końcu wahadła. Wyniki zaprezentowano na poniższych rysunkach.

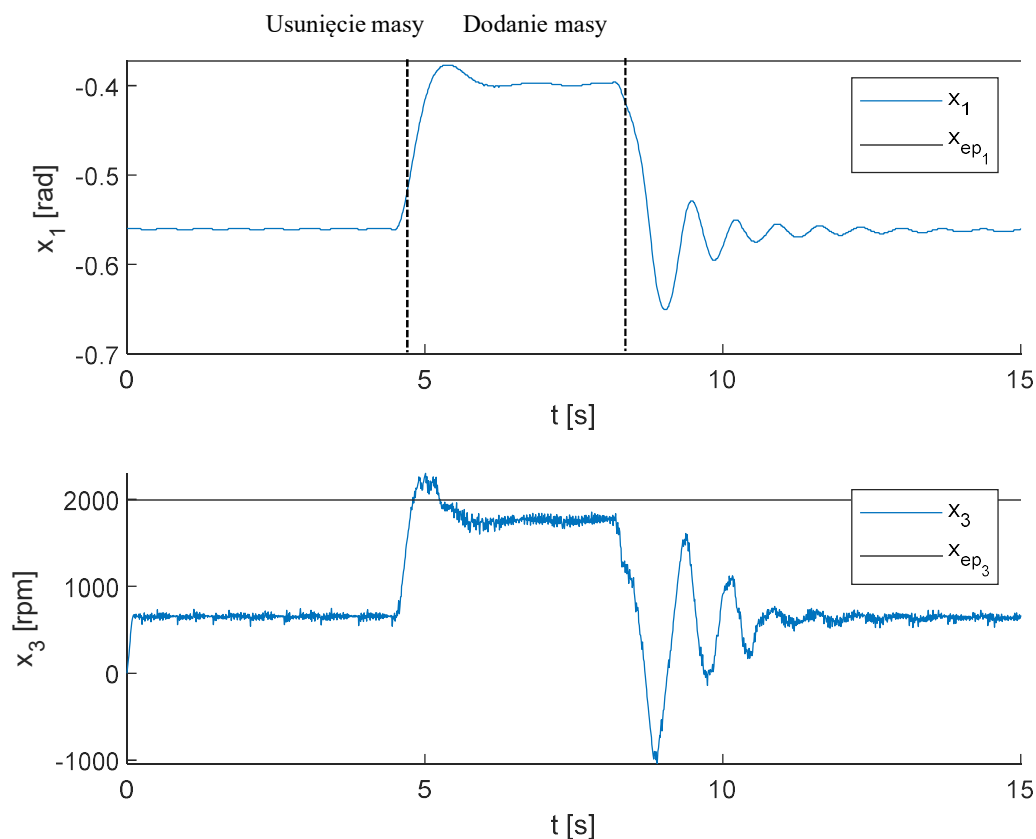


Rysunek 16 Przebieg regulacji bez zakłóceń, dla zadanego punktu pracy w poziomie.

Jak widać na rysunku 16 stabilizacja układu następuje zaledwie po 2s działania regulatora, co jest bardzo dobrym wynikiem. Pomimo tego faktu widać, że w układzie regulacji występuje niewielki uchyb ustalony, który nie jest niwelowany przez regulator.



Rysunek 17. Przebiegi regulacji z chwilowymi zakłóceniami w układzie, dla zadanego punktu pracy w poziomie.



Rysunek 18. Przebiegi regulacji z stałym zakłóceniem w układzie, dla zadanego punktu pracy w poziomie.

Powyższe wykresy obrazują, że system radzi sobie dobrze nawet z dużymi zakłóceniami, gdzie maksymalny czas powrotu do zadanego punktu pracy jest nie większy niż 5s. Niestety eksperyment z wprowadzeniem stałego zakłócenia udowadnia całkowitą niewrażliwość regulatora LQR na uchyb ustalony, który nie jest niwelowany w żaden sposób. Aby pozbyć się tego problemu niezbędne będzie dodanie elementu całkującego do układu co zrealizowano w rozdziale 6.

6. Regulator LQI

Ponieważ testy przeprowadzone z użyciem regulatora LQR wykazały, że nie jest w stanie on sobie poradzić ze stałymi zakłóceniami takimi jak obciążenie jednego z ramion wahadła dodatkową masą, podjęto próbę rozwiązania zaobserwowanych problemów poprzez wprowadzenie regulatora LQI. Rozszerzając przestrzeń stanów do wymiaru $\mathbb{R}^{4 \times 4}$, można wprowadzić dodatkową zmienną x_4 , której zadaniem jest przechowywanie wartości całki uchybu

$$x_4(t) = \int_0^t \left(\sum_{i=1}^3 (x_i(\tau) - x_{epi}) \right) d\tau.$$

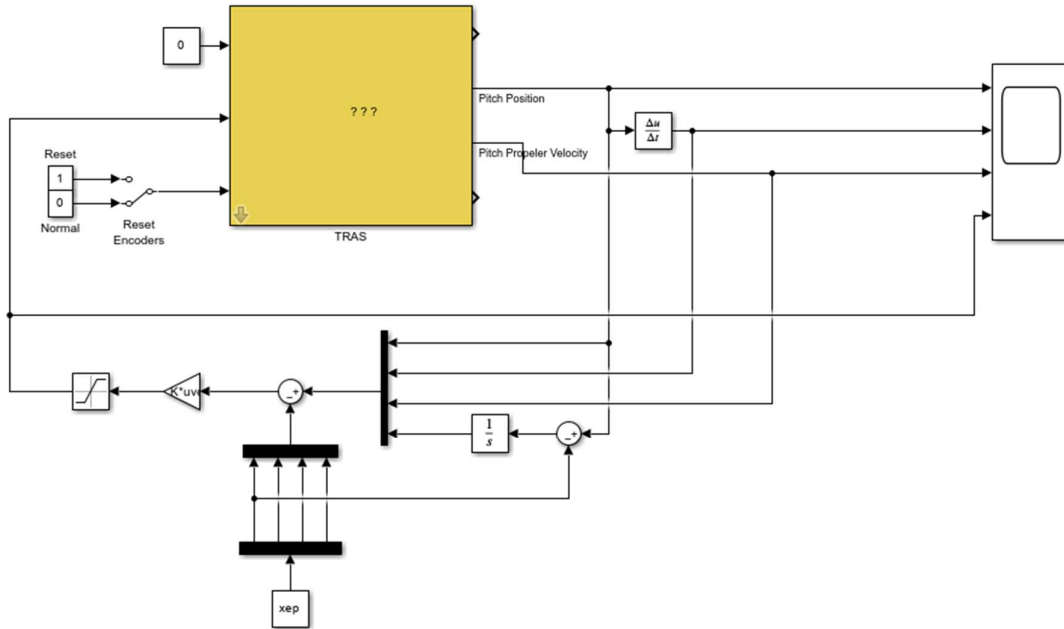
Nowe macierze stanu A_{LQI} dla wybranych punktów pracy można uzyskać rozszerzając wcześniej przedstawione macierze $A = [a_{ij}]$

$$A_{LQI} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Następnie korzystając w analogiczny sposób z funkcji $lqr()$ jednak uprzednio modyfikując macierz wag Q tak, żeby uwzględniła nową zmienną stanu:

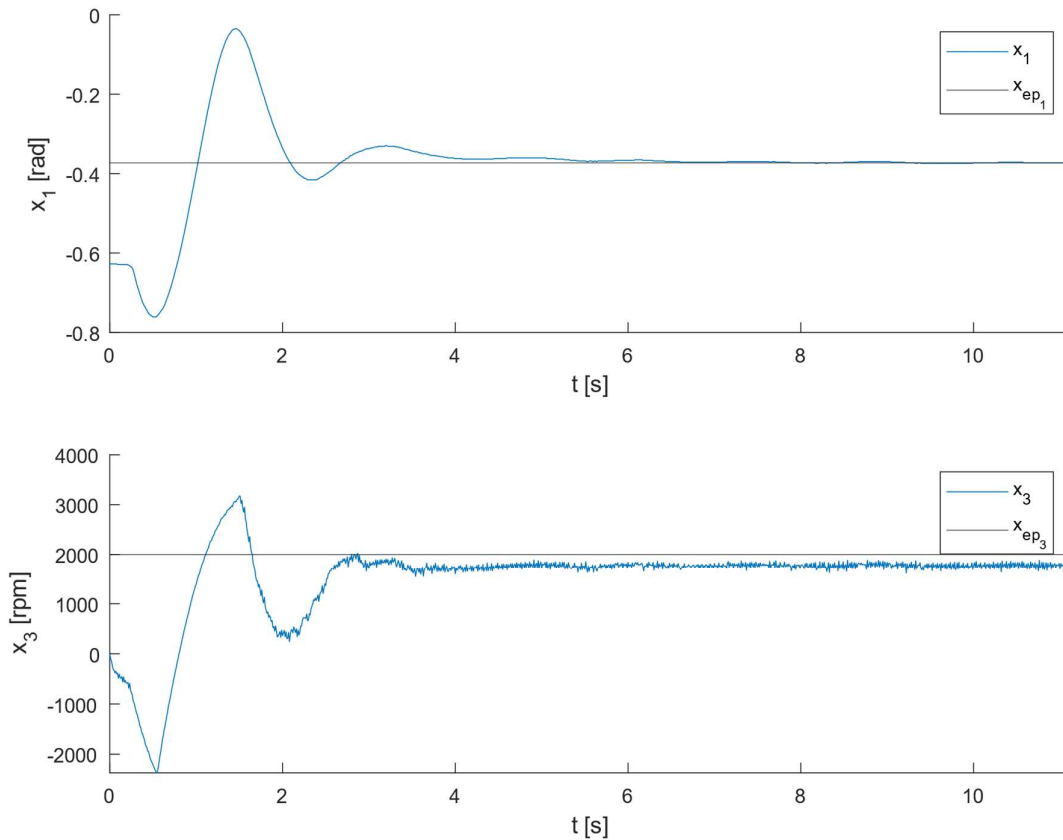
$$Q = \begin{bmatrix} 80000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.01 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 40000 \end{bmatrix},$$

otrzymano wektor wzmocnień $K \in \mathbb{R}^4$. Schemat blokowy w środowisku Simulink, który realizował sterowanie LQI przedstawiono na rysunku 19.



Rysunek 19. Schemat blokowy programu Simulink układu regulacji z regulatorem LQI.

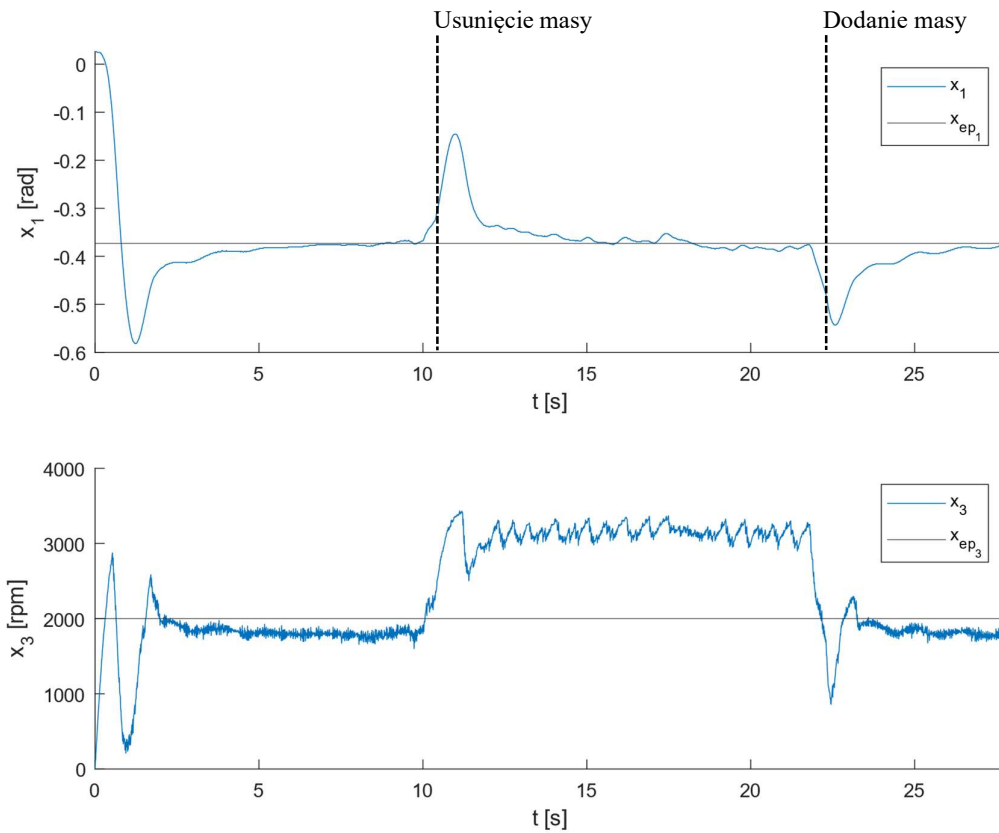
Utworzony regulator LQI przetestowano w różnych scenariuszach dla dwóch punktów pracy. W pierwszej kolejności sprawdzono jak radzi sobie ze sprowadzaniem układu do stałego x_{ep} . Następnie przeprowadzono serię eksperymentów, w trakcie których stały wektor x_{ep} zastąpiono funkcją $x_{ep}(t)$ zmienną w czasie. Modyfikowano tylko pierwszą zmienną stanu x_1 reprezentującą nachylenie wahadła.



Rysunek 20. Przebieg regulacji dla punktu pracy znajdującego się w poziomie (-21.37°). Warunek początkowy możliwie daleki od punktu pracy.

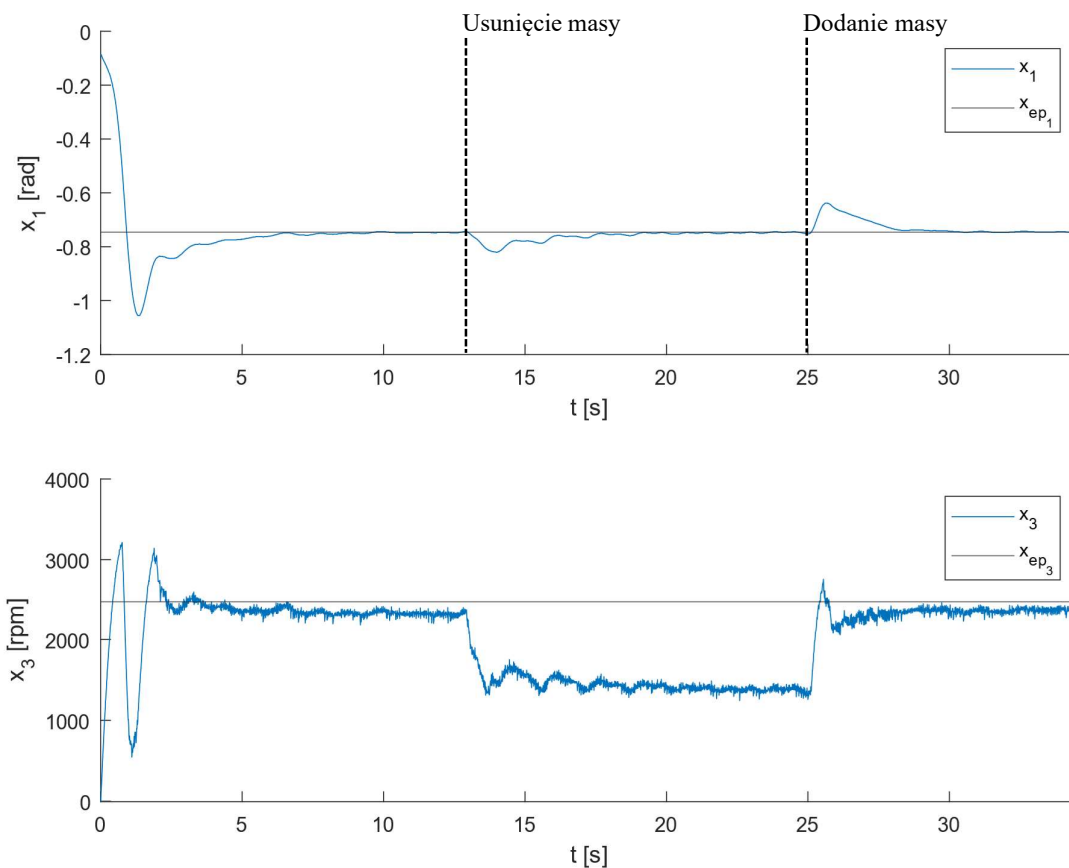
Na rysunku 20 przedstawiono zarejestrowany w laboratorium przebieg procesu regulacji obiektu. Wektor stanu początkowego wahadła w miarę możliwości ustawiono sprowadzono do wartości $x_0 \approx [-0.63 \ 0 \ 0]^T$. Widoczne jest dość wyraźne przeregulowanie w pierwszych dwóch sekundach działania, które jest spowodowane dobranymi wagami Q , ale także akumulacją całki od momentu uruchomienia układu regulacji do puszczenia wahadła swobodnie.

Następny przeprowadzony eksperyment sprawdzał czy regulator LQI rozwiązuje problem, z którym LQR nie był w stanie sobie poradzić, czyli stałe zakłócenie w postaci nieprzewidzianego w modelu obciążenia umieszczonego na jednym z ramion.



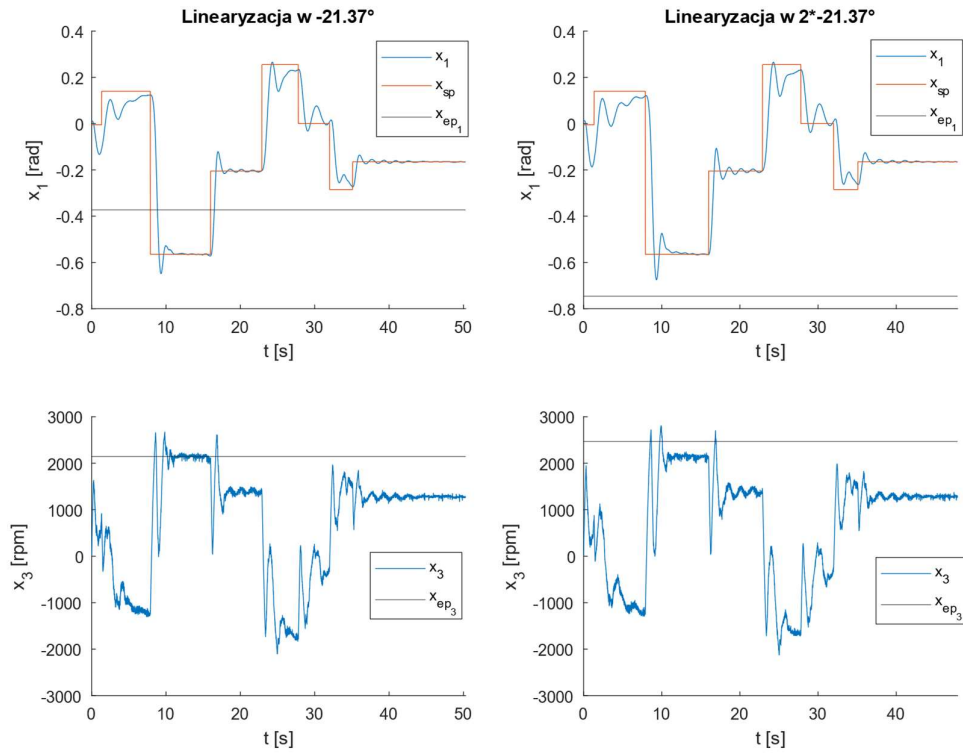
Rysunek 21. Działanie regulatora dla obciążanego ramienia wahadła.

Na rysunku 21 widać regulację wahadła, które na początku zostało obciążone pewną masą. Następnie została ona po upływie 10 sekund usunięta, po czym ponownie umieszczona po 22 sekundach. Dopiero po upływie paru sekund cała znajdująca się w zmiennej stanu x_4 staje się na tyle znacząca, że regulator rozpoczyna korekcję sterowania u w celu jej wyzerowania. Możliwa jest redukcja czasu narastania poprzez zwiększenie wartości ostatniego elementu na przekątnej macierzy Q , jednak grozi to wprowadzeniem istotnych oscylacji, a nawet utratą stabilności układu. Rysunek 22 przedstawia analogiczny eksperyment, jednak z innym x_{ep} .

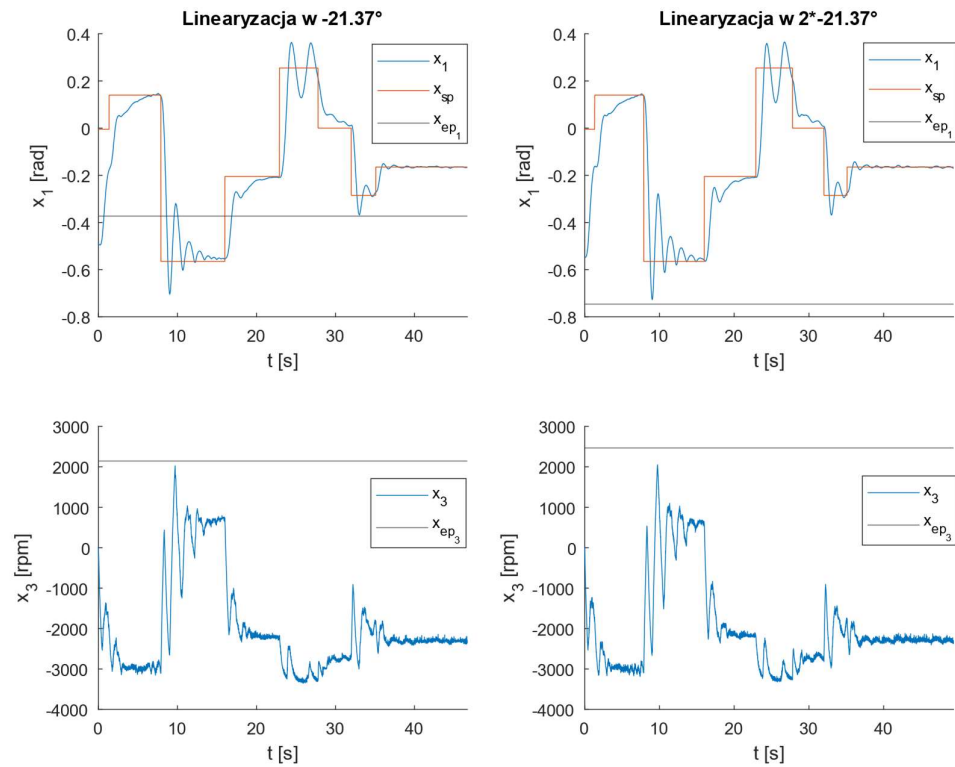


Rysunek 22. Działanie regulatora dla obciążanego ramienia wahadła w drugim punkcie pracy.

Kolejnym krokiem była analiza działania wahadła dla zadanego innego wychylenia niż tego, wokół którego dokonano linearyzacji układu. Przeprowadzono eksperymenty dla dwóch różnych punktów pracy z obciążeniem i bez. W danych scenariuszach zadane położenie jest zmienne w czasie. Na poniższych rysunkach zaprezentowano wyniki tych eksperymentów. Na wykresy zmiennych stanu została również naniesiona wartość x_{ep} , wokół której linearyzowano układ oraz zmienne zadane położenie x_{sp} .



Rysunek 23. Zestawienie przebiegów regulacji wahadła w zależności od wybranego punktu pracy.



Rysunek 24. Zestawienie przebiegów regulacji obciążonego wahadła w zależności od wybranego punktu pracy.

Na podstawie rysunków 23 i 24 można zaobserwować, że dla $x_{ep} = [-0.3730 \ 0 \ 1990.968]^T$ występują mniejsze oscylacje w trakcie operowania w znaczącej odległości od punktu pracy. Na przebiegach zarejestrowanych z dodatkowym obciążeniem te różnice nie są tak wyraźne.

7. Podsumowanie i wnioski

Podczas tego projektu zrealizowano wszystkie założenia, przedstawione we wstępie pracy. Zidentyfikowano parametry obiektu oraz stworzono model, który wystarczająco dobrze przybliżał działanie układu. Poprawnie zlinearyzowano system, co potwierdzono testami. Ostatecznie stworzono dwa regulatory, które umożliwiały szybką i skuteczną regulację tego obiektu.

Podczas realizacji zadania zmierzono się z różnymi problemami. Największe kłopoty sprawiła zespołowi poprawna identyfikacja parametrów. Główną przyczyną tego faktu były niedokładności w danych pomiarowych, przez co wyznaczone analitycznie parametry były niewystarczająco dokładne, aby móc skutecznie zamodelować układ. Problem ten został rozwiązany, poprzez poprawienie wyników parametrów, dzięki optymalizacji modelu z wykorzystaniem MATLAB-a. Narzędzie to okazało się bardzo skuteczne, gdyż uzyskane parametry dobrze przybliżały obiekt, jak pokazały testy.

Podczas linearyzacji wykorzystano wspomniany w Linearyzacja toolbox w Simulink-u. Jest on prostym w użyciu i skutecznym narzędziem, które ułatwia pracę dostarczając interaktywne narzędzia w postaci gui. Zdecydowano się, aby zlinearyzować model w dwóch punktach w celu porównania wyników.

Ostatnim etapem pracy była implementacja regulatora. Zdecydowano się na wybór regulatora LQR, z względu na dostępność modelu, oraz jego prostotę i skuteczność. Dany regulator bardzo szybko reagował na zakłócenia oraz redukował uchyb. Parametry dobrano w taki sposób, aby największa kara była aplikowana dla położenia wahadła, a bardzo mała dla prędkości wiatraka. Dzięki temu regulator mógł działać szybko, gdyż „pozwalał” na duży uchyb prędkości wiatraka.

Jedynym problemem, pozostawał uchyb ustalony, dlatego zdecydowano się na modyfikację regulatora LQR w LQI. Jak pokazano na wygenerowanych wykresach, był on w stanie skutecznie redukować stałe zakłócenie do zera.

Zauważono, że sygnały otrzymywane z czujników są mocno zaszumione. Szczególnym szumem charakteryzowała się prędkość wahadła, gdyż była wyznaczana jako pochodna z pomiaru położenia. Pomiar położenia był funkcją schodkową, więc prędkość miała dużo pojedynczych pików. Sygnał sterujący również był mocno zaszumiony, przyjmując wartości z granic zakresu. Podjęto próbę zrealizowania filtracji tych sygnałów. Starano się stworzyć filtr Kalmana, filtr uśredniający oraz filtr medianowy. Niestety żaden z nich nie dawał pożądaných efektów. Ostatecznie zrezygnowano z tego pomysłu, ponieważ regulator działał poprawnie nawet dla zaszumionych sygnałów. W przypadku sygnału sterującego, sam silnik działa jak filtr, więc zaszumiony sygnał nie jest problemem.

Cały projekt był bardzo pouczający i satysfakcjonujący, ze względu na działanie z rzeczywistym sprzętem. Można było w praktyce wykorzystać zdolności i wiedzę inżynierską co stanowiło doskonałą okazję do weryfikacji wiedzy teoretycznej w rzeczywistości.

Ćwiczenie było doskonałą okazją do zbadania skuteczność działania regulatora LQR, co pokazało dlaczego warto zidentyfikować i stworzyć model obiektu, a nie korzystać z prostego regulatora np. PID.