



AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA IM. STANISŁAWA STASZICA W KRAKOWIE

Wydział Zarządzania

Projekt EFiD - Projekt 7

Autorzy: *Patrycja Piła, Mateusz Strojek, Julia Szutka, Magdalena Wnuk*

Kierunek studiów: *Informatyka i Ekonometria*

Prowadzący: *dr hab. Tomasz Wójtowicz*

Kraków, 2025

Spis treści

Wstęp	3
Metodyka badań	3
Opis i interpretacja wyników	5

Wstęp

Wersja 3:

Celem przeprowadzonego badania było sprawdzenie, jak nieuwzględnienie autokorelacji składników losowych wpływa na wyniki testu przyczynowości Grangera w modelu VAR(1):

$$X_t = \alpha_1 + \beta_1 X_{t-1} + \delta_1 Y_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$Y_t = \alpha_2 + \beta_2 X_{t-1} + \delta_2 Y_{t-1} + \eta_t$$

W szczególności analizowano, czy pokorelacyjne błędy w jednym z równań prowadzą do częstszych niż nominalne odrzuceń hipotezy o braku przyczynowości, mimo że w rzeczywistości przyczynowość nie występuje. Dodatkowym celem była ocena skuteczności dwóch estymatorów HAC w ograniczaniu zniekształceń rozmiaru testu.

Symulacje przeprowadzono na sztucznie generowanych danych z dwuwymiarowego procesu VAR(1). W badaniu zmieniano następujące czynniki:

- siłę autokorelacji składników losowych (różne wartości parametru ρ),
- siłę autokorelacji samych szeregów (różne wartości parametrów β_1 i δ_2).

Pozwoliło to ocenić, które z tych elementów najbardziej deformują właściwości testu.

W każdej konfiguracji porównano trzy wersje testu Grangera:

- standardowy test oparty na klasycznym OLS,
- dwie wersje wykorzystujące estymatory HAC (Neweya-Westa oraz HAC z jądrem Bartlett).

Metodyka badań

W analizie wykorzystano symulacje danych z procesu VAR(1). Model skonstruowano w taki sposób, aby w rzeczywistości nie występowała przyczynowość Grangera pomiędzy zmiennymi. Pozwala to bezpośrednio częstość nieuzasadnionego odrzucenia prawdziwej hipotezy o braku przyczynowości.

Generowanie danych:

Dane generowano według modelu VAR(1) z jedną zmienną, dla której składnik losowy miał postać procesu AR(1), co wprowadzało kontrolowaną autokorelację błędu. Drugi składnik losowy był i.i.d. W symulacji zmieniano trzy czynniki wpływające na właściwości testu:

- długość próby: $N = 100$,
- siłę autokorelacji składników losowych: $[-0,5; 0,0; 0,3; 0,5; 0,7]$,

- siłę autokorelacji samych zmiennych: ustalone wartości parametrów β_1 : 0,2 oraz δ_2 : -0,2.

Parametry strukturalne modelu ustawiono tak, aby nie występowała żadna prawdziwa przyczynowość pomiędzy zmiennymi. Dzięki temu każde odrzucenie hipotezy H_0 można interpretować jako błąd pierwszego rodzaju.

Zastosowane estymatory i procedury testowe:

Do estymacji parametrów wykorzystywano metodę najmniejszych kwadratów. Test przyczynowości Grangera przeprowadzono w trzech wariantach:

1. wersja standardowa, oparta na klasycznym OLS z założeniem braku autokorelacji i heteroskedastyczności,
2. test z estymatorem HAC Neweya-Westa, który koryguje wariancję parametrów przy występowaniu autokorelacji,
3. test z estymatorem HAC z jądrem Bartlett, będący alternatywną formą korekty HAC.

Każdy test wykonywano w jednym kierunku: $Y \rightarrow X$. Dlatego pozostałe parametry ustawiono jako:

- $\alpha_1 = 1$,
- $\alpha_2 = 1$,
- $\beta_2 = 0$,
- $\delta_1 = 0$.

Procedura symulacyjna:

Dla każdej kombinacji parametrów przeprowadzono określoną liczbę 1000 powtórzeń. W każdej symulacji:

1. generowano dane z modelu VAR(1),
2. wykonywano trzy wersje testu Grangera,
3. zapisywano informację, czy hipoteza H_0 została odrzucona przy poziomie istotności 0,05.

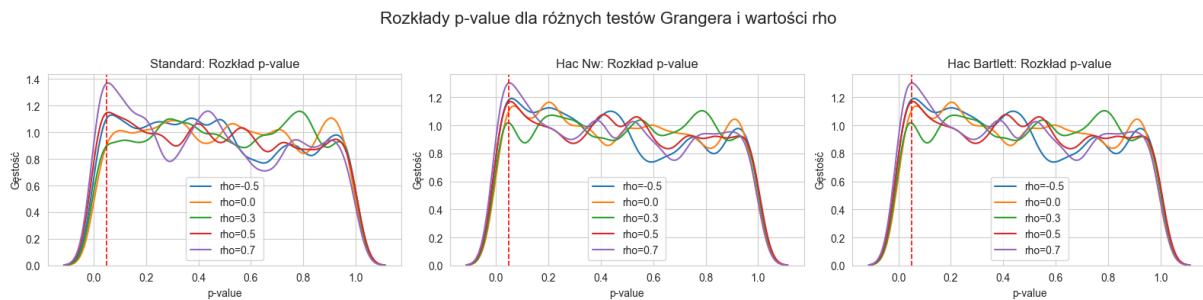
Dla każdej konfiguracji parametrów wyznaczano empiryczny rozmiar testu, czyli odsetek odrzuceń prawdziwej hipotezy.

Opis i interpretacja wyników

Tabela 1. Wyniki symulacji

rho	test	size	95% CI
-0,5	standard	0,052	[0,038, 0,066]
	hac_nw	0,081	[0,064, 0,098]
	hac_bartlett	0,081	[0,064, 0,098]
0,0	standard	0,055	[0,041, 0,069]
	hac_nw	0,071	[0,055, 0,087]
	hac_bartlett	0,071	[0,055, 0,087]
0,3	standard	0,047	[0,034, 0,060]
	hac_nw	0,065	[0,050, 0,080]
	hac_bartlett	0,065	[0,050, 0,080]
0,5	standard	0,046	[0,033, 0,059]
	hac_nw	0,069	[0,053, 0,085]
	hac_bartlett	0,069	[0,053, 0,085]
0,7	standard	0,040	[0,028, 0,052]
	hac_nw	0,064	[0,049, 0,079]
	hac_bartlett	0,064	[0,049, 0,079]

Wyniki symulacji pokazują, że standardowy test OLS zachowuje rozmiar zbliżony do nominalnego 0,05 niezależnie od siły autokorelacji błędów, co sugeruje, że w tym układzie model jest relatywnie stabilny, natomiast testy HAC, zarówno Newey-West, jak i Bartlett, systematycznie przeceniają rozmiar testu, osiągając wartości około 0,065-0,081 przy rosnącej autokorelacji, co wskazuje na nadmierną skłonność do odrzucania prawdziwej hipotezy zerowej; wzrost p-wartości w testach HAC wraz z rosnącym rho może sugerować, że korekcja autokorelacji w krótkich próbkach prowadzi do nadmiernej wariancji estymatorów, a zatem do zawyżonej liczby fałszywych odrzuceń; ekonomicznie oznacza to, że przy stosowaniu testów HAC należy zachować ostrożność w interpretacji istotności przy umiarkowanej autokorelacji, gdyż może to prowadzić do błędnych wniosków o przyczynowości; w praktyce empirycznej zaleca się uwzględnienie zarówno testu standardowego, który w tym układzie jest bardziej konserwatywny, jak i HAC, aby porównać stabilność wyników w obecności autokorelacji błędów.



Rysunek 1. Rozkłady wartości p dla testu Grangera przy różnych wartościach ρ

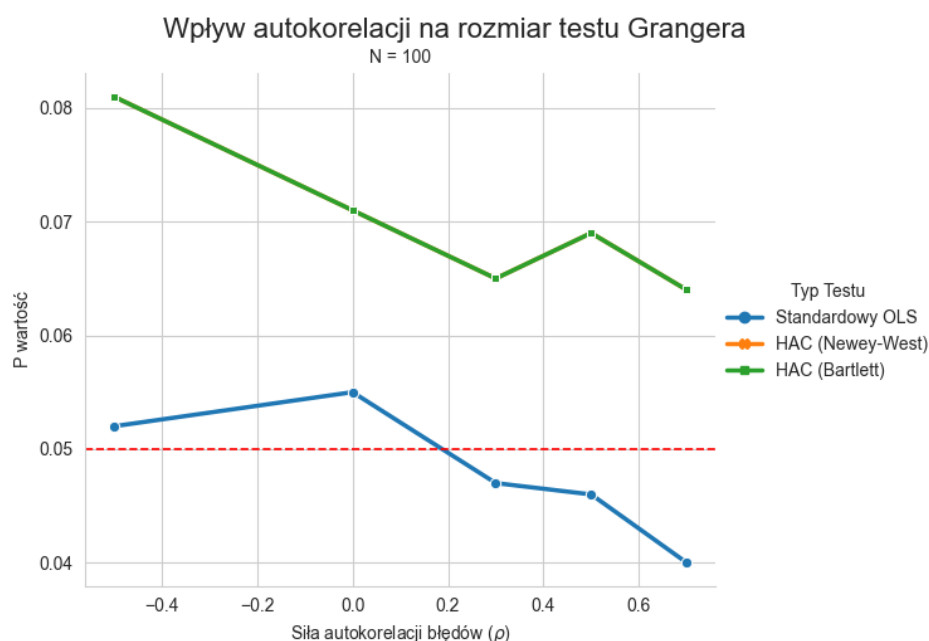
Rysunek 1 przedstawia wykresy gęstości rozkładów wartości p uzyskanych z trzech wersji testu Grangera. Czerwona przerywana linia zaznacza poziom istotności 0,05, a więc obszar odrzucenia hipotezy o braku przyczynowości.

- Test standardowy (lewy wykres)

Udział obserwacji z p-wartością poniżej 0,05 odpowiada nominalnym 5%, co oznacza, że standardowy test Grangera utrzymuje prawidłowy rozmiar i pozostaje stabilny nawet przy silnej autokorelacji składnika losowego.

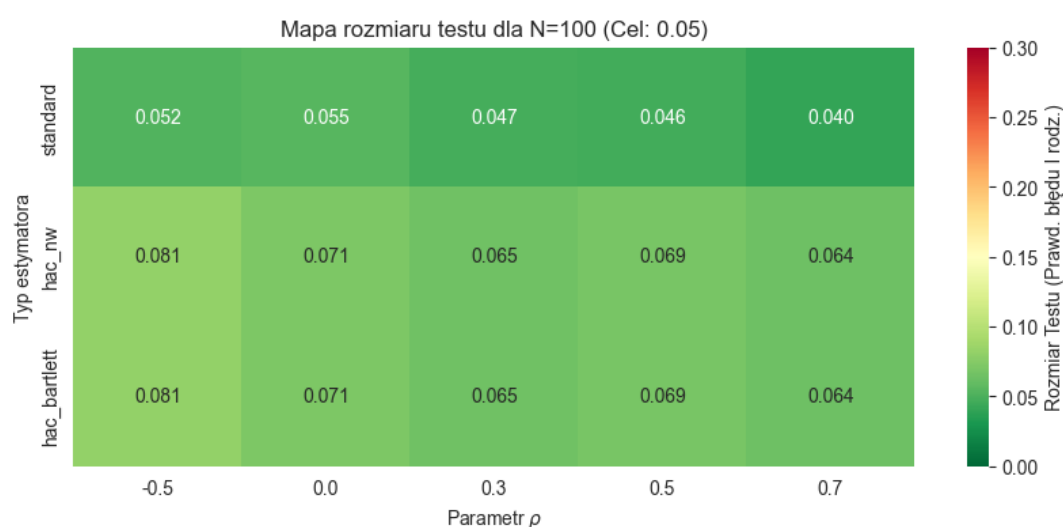
- HAC Newey-West (środkowy wykres) i HAC Bartlett (prawy wykres)

Zastosowanie korekty Neweya–Westa i Bartlett’a nie poprawia działania testu, lecz prowadzi do zawyżania rozmiaru testu, zwłaszcza przy ujemnej lub umiarkowanej dodatniej autokorelacji błędów. W efekcie test wykazuje nadmierną skłonność do odrzucania hipotezy zerowej, co skutkuje zwiększoną liczbą fałszywych odrzuceń H_0 .



Rysunek 2. wpływ autokorelacji na rozmiar testu Grangera

Wykres pokazuje, jak empiryczny rozmiar testu zmienia się wraz ze wzrostem autokorelacji błędów. Poziom nominalny 0,05, oznaczony czerwoną linią, stanowi punkt odniesienia dla prawidłowego działania testu. Standardowy test OLS (linia niebieska) pozostaje najbliżej tego poziomu: przy ujemnej i zerowej autokorelacji rozmiar jest lekko zawyżony, a przy dodatniej, nieznacznie zaniżony, lecz wciąż stabilny i bliski wartości 0,05. Odmienne zachowują się testy oparte na estymatorach HAC, linie zielona i pomarańczowa, ich rozmiar jest wyraźnie zawyżony dla wszystkich wartości p . Oba warianty HAC dają niemal identyczne wyniki, co wskazuje, że wybór jądra nie ma większego znaczenia.



Rysunek 3. Heatmapa średnich wartości p dla testu Grangera ($N = 100$)

Rysunek 3 przedstawia mapę średnie wartości p uzyskanych z testu Grangera dla różnych poziomów autokorelacji błędów (ρ) oraz trzech metod estymacji wariancji.

- Test standardowy

Wszystkie średnie wartości p mieszczą się bardzo blisko poziomowi 0,05 (0,040-0,055). Oznacza to, że test zachowuje właściwy rozmiar, a autokorelacja błędów - niezależnie od jej siły i znaku - nie wpływa znacząco na jego działanie. To potwierdza wysoką stabilność wersji OLS.

- HAC Newey-West i HAC Bartlett

Obie metody HAC dają identyczne wyniki: wartości p są systematycznie wyższe niż 0,05, mieszcząc się w przedziale 0,064-0,081. Świadczy to o zawyżonym rozmiarze testu, czyli o zbyt częstym odrzucaniu hipotezy zerowej mimo braku przyczynowości. Co ważne, wyniki nie reagują wyraźnie na zmiany parametru ρ - metody HAC są niestabilne, co może być spowodowane małą próbą.