



AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA IM. STANISŁAWA STASZICA W KRAKOWIE

Wydział Zarządzania

*Projekt EFID - Projekt 9A*

Autorzy: *Patrycja Piła, Mateusz Strojek, Julia Szutka, Magdalena Wnuk*

Kierunek studiów: *Informatyka i Ekonometria*

Prowadzący: *dr hab. Tomasz Wójtowicz*

Kraków, 2025

## 1. Wstęp

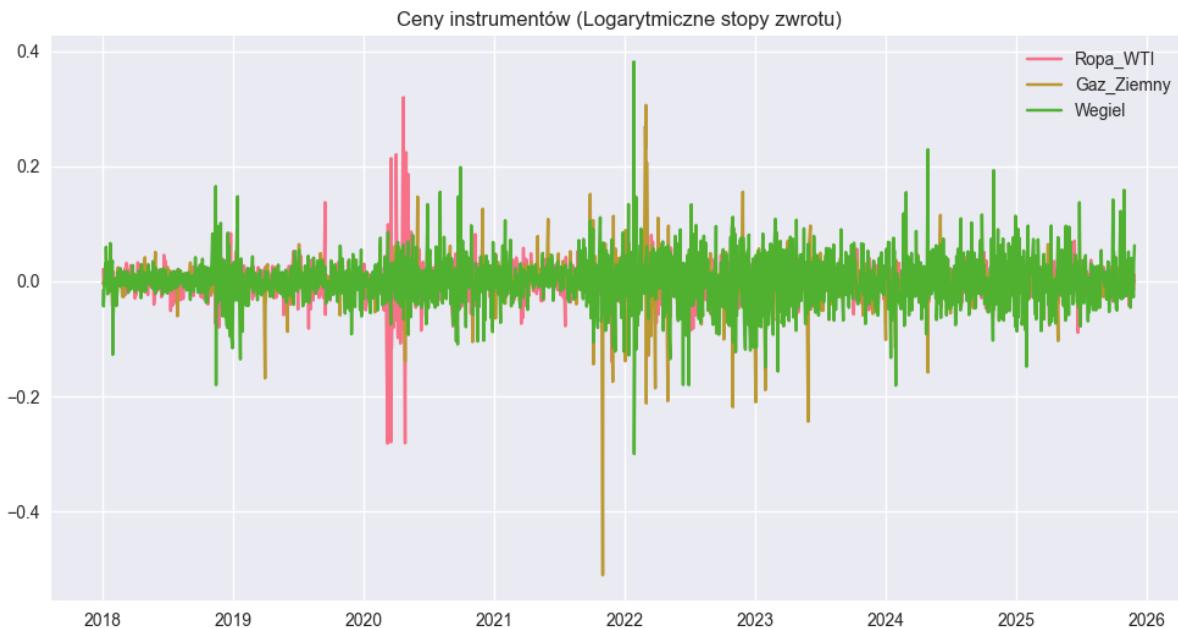
Celem analizy jest zbadanie wpływu przyjętych założeń dotyczących warunkowych rozkładów w modelu DCC-GARCH na oszacowania warunkowych współczynników korelacji między trzema wybranymi instrumentami finansowymi (ropa, węgiel, gaz ziemny). Na podstawie dziennych logarytmicznych stóp zwrotu od początku 2018 roku najpierw budowany jest poprawny model VAR opisujący zależności dynamiczne między stopami zwrotu, a następnie - na jego resztach - estymowany jest wielowymiarowy model DCC-GARCH(1,1). W kolejnych krokach porównywane są wyniki uzyskane przy założeniach warunkowego rozkładu normalnego zarówno w części jednowymiarowej (GARCH), jak i wielowymiarowej.

## 2. Zmienne

W ramach projektu wykorzystano dane dotyczące rynku surowców energetycznych:

- **węgiel,**
- **ropa,**
- **gaz ziemny.**

Analiza obejmowała okres od początku stycznia 2018 roku do 1 grudnia 2025 roku.



Rysunek 1: Logarytmiczne stopy zwrotu cen instrumentów

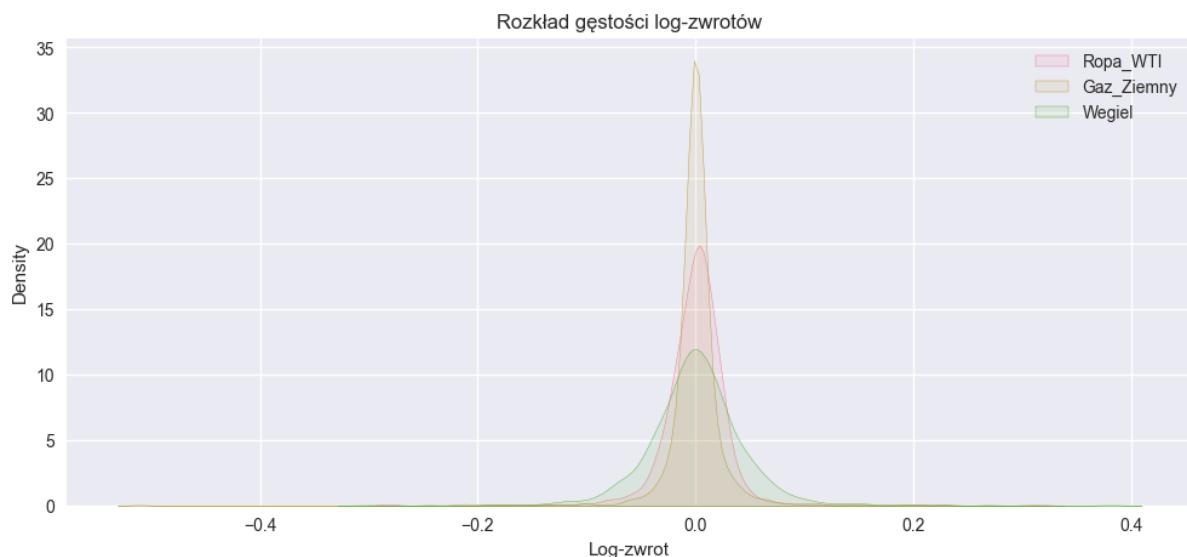
Na przedstawionym wykresie, obrazującym logarytmiczne stopy zwrotu cen ropy, gazu ziemnego i węgla w czasie, widoczna jest duża zmienność cen surowców energetycznych, zwłaszcza na przestrzeni roku 2020 jak i 2021/2022. Linia gazu ziemnego oraz węgla wykazują najbardziej ekstremalne, gwałtowne skoki i spadki

szczególnie na przełomie lat 2021/2022. Stopa zwrotu ropy wydaje się być najbardziej skupiona wokół zera, oprócz roku 2020 gdzie to w tej zmiennej zauważalne są największe odchylenia. Wyróżnione okresy obejmują covid jak i wybuch wojny na Ukrainie.

Tabela 1: Statystyki opisowe

	<b>średnia</b>	<b>odchylenie</b>	<b>min</b>	<b>max</b>	<b>skośność</b>	<b>eksces</b>
Ropa	0,000287	0,029532	-0,282206	0,319634	0,034546	26,398513
Gaz ziemny	0,000002	0,029886	-0,511258	0,306201	-2,565599	66,549783
Węgiel	0,000213	0,042961	-0,300480	0,381727	0,241556	6,183989

Analizowane logarytmiczne stopy zwrotu dla trzech surowców energetycznych charakteryzują się minimalnymi średnimi wartościami bliskimi zera, przy czym ropa naftowa najwyższą średnią logarytmiczną stopę zwrotu. Najbardziej zmiennym aktywem w zestawieniu okazał się węgiel, którego odchylenie standardowe jest wyraźnie wyższe niż w przypadku pozostałych surowców. W przypadku gazu ziemnego widoczna jest silna asymetria lewostronna rozkładu co w połączeniu z ekstremalnie wysokim poziomem ekscesu wskazuje na występowanie drastycznych załamań cenowych. Wszystkie badane szeregi czasowe wykazują cechy rozkładów leptokurycznych z grubymi ogonami co oznacza, że prawdopodobieństwo wystąpienia skrajnych i nietypowych wahań rynkowych jest tutaj o wiele wyższe niż zakładałyby to rozkład normalny. Dodatkowo, gaz ziemny zanotował najbardziej dotkliwy jednorazowy spadek wartości przekraczający połowę kapitału.



Rysunek 2: Rozkład gęstości logarytmicznych stóp zwrotu

Gaz ziemny charakteryzuje się skoncentrowanym rozkładem, co na wykresie widoczne jest jako wąskie, wysokie maksimum. Oznacza to, że większość zmian jest bardzo niewielka, lecz okresowo pojawiają się gwałtowne, skokowe ruchy cenowe. Węgiel wykazuje umiarkowanie skupiony rozkład, którego kształt sugeruje bardziej stabilne

środowisko rynkowe. W przeciwnieństwie do tych dwóch surowców, ropa WTI ma rozkład rozproszony i spłaszczony. Pomimo wrażenia, że rozkład logarytmicznych stóp zwrotu jest rozkładem symetrycznym, przez bardzo gruby lewy ogon skośność jest na poziomie -2,57.

### 3. Badanie stacjonarności

Przed oszacowaniem modelu GARCH za pomocą testu ADF sprawdzono stacjonarność szeregów czasowych:

- $H_0$ : szereg czasowy jest niestacjonarny (szereg ma pierwiastek jednostkowy),
- $H_1$ : szereg czasowy jest stacjonarny (szereg nie ma pierwiastka jednostkowego).

Tabela 2: Wyniki testów stacjonarności

	<b>Statystyka ADF</b>	<b>Wartość p</b>	<b>Wniosek</b>
ropa	-7,7564	0,0000	Stacjonarny
gaz ziemny	-20,7677	0,0000	Stacjonarny
węgiel	-20,8559	0,0000	Stacjonarny

Dla wszystkich analizowanych zmiennych otrzymane wartości statystyki ADF są silnie ujemne, a odpowiadające im wartości p wynoszą 0,0000, co przy przyjętym poziomie istotności (0,05) prowadzi do odrzucenia  $H_0$ . Oznacza to, że wszystkie szeregi są stacjonarne.

### 4. Model VAR – wybór rzędu i stabilność

Na podstawie kryterium informacyjnego AIC wybrano model VAR z 3 opóźnieniami. Test stabilności potwierdził, że wszystkie pierwiastki wielomianu charakterystycznego leżą wewnątrz koła jednostkowego, więc model jest stabilny. Oznacza to, że można wykorzystywać go jako część średniej w dalszym modelowaniu DCC-GARCH.

### 5. Jednowymiarowe modele GARCH(1,1) z rozkładem normalnym

### 6. Test Jarque-Bera dla reszt standaryzowanych (normalność)

Tabela 3: Wyniki testów normalności dla zestandaryzowanych reszty

<b>Instrument</b>	<b>Wartość p (Jarque-Bera)</b>	<b>Liczba parametrów</b>
ropa	0,000	Odrzucamy normalność
gaz ziemny	0,000	Odrzucamy normalność
węgiel	0,000	Odrzucamy normalność

Hipotezy testowe są następujące:

- H0: reszty standaryzowane mają rozkład normalny (skośność równa 0, kurtoza równa 3),
- H1: reszty standaryzowane nie mają rozkładu normalnego.

Dla wszystkich trzech instrumentów otrzymano wartości  $p$  równe 0,00, co prowadzi do odrzucenia hipotezy zerowej na typowym poziomie istotności. Oznacza to, że rozkład reszt standaryzowanych istotnie odbiega od normalnego (w szczególności wykazuje grubsze ogony), co podważa założenie warunkowej normalności i sugeruje zastosowanie warunkowego rozkładu t-Studenta w dalszej części analizy.

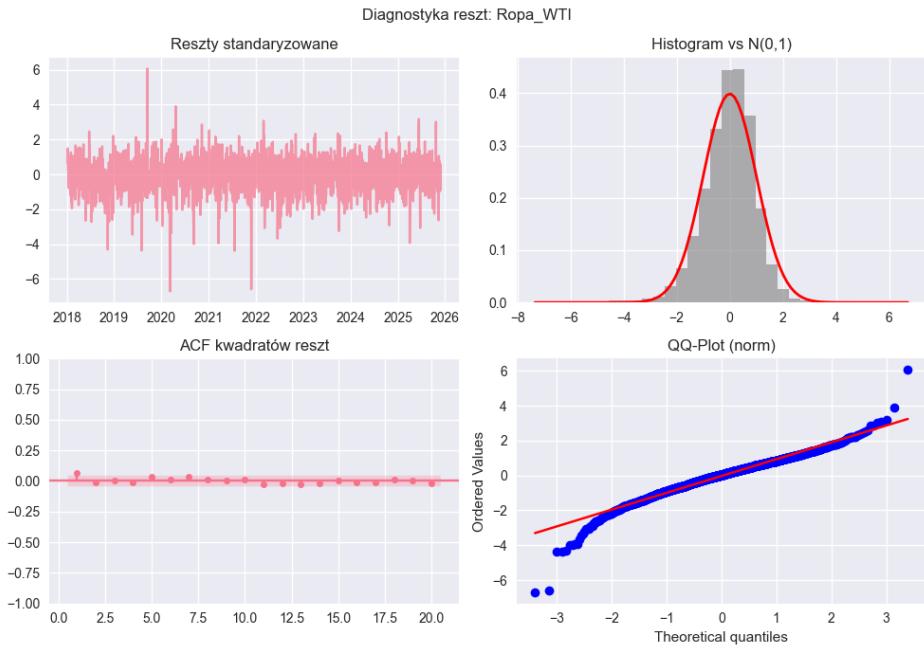
## 7. DCC-GARCH

Wobec braku gotowej implementacji modelu DCC-GARCH w standardowych bibliotekach Pythona, algorytm został zaprogramowany od podstaw przy wykorzystaniu pakietów numerycznych NumPy oraz SciPy. Stworzony estymator odwzorowuje specyfikację Engle'a, realizując numeryczną maksymalizację funkcji log-wiarygodności w celu wyznaczenia parametrów dynamiki korelacji. Implementacja opiera się na iteracyjnym przeliczaniu macierzy  $Q_t$  oraz  $R_t$  w pętli czasowej, z uwzględnieniem ograniczeń optymalizacyjnych gwarantujących stabilność i dodatnią określoność macierzy wynikowych.

Poprawność procesu estymacji potwierdzają uzyskane wyniki empiryczne: oszacowane parametry wyniosły odpowiednio  $\alpha = 0.0129$  oraz  $\beta = 0.8571$ . Ich suma na poziomie 0.8700 (mniejsza od jedności) wskazuje na spełnienie warunku stacjonarności procesu korelacji. Tak wysoka wartość  $\beta$  oznacza, że dzisiejsza korelacja jest silnie zależna od korelacji z dnia wczorajszego, a w mniejszym stopniu od nowych szoków ( $\alpha$ ).

## 8. Diagnostyka reszt

Po dopasowaniu jednowymiarowych modeli GARCH do reszt z VAR, reszty standaryzowane poddano analizie. Przeprowadzono analizę graficzną i dla każdego instrumentu wygenerowano wykresy diagnostyczne: przebieg reszt w czasie, histogram z nałożonym rozkładem normalnym, funkcję autokorelacji kwadratów reszt oraz wykres kwantyl-kwantyl, umożliwiające wizualną ocenę jakości modelu.



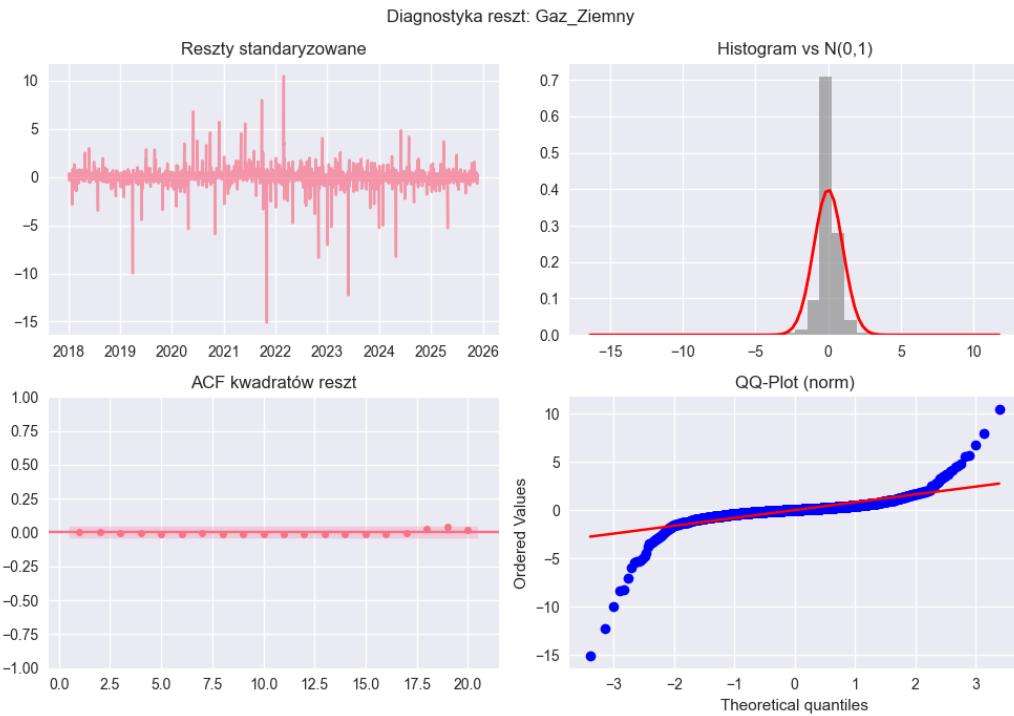
Rysunek 3: Diagnostyka reszt dla zmiennej Ropa WTI

Reszty oscylują wokół zera i mają charakter stacjonarny, jednak widoczne są wyraźne epizody ekstremalnych wartości związane z szokami rynkowymi. W latach 2020–2022 pojawiają się duże piki, które model nie w pełni wychwycił, co wskazuje na obecność outlierów, prawdopodobnie związanych z pandemią COVID-19, wojną i gwałtownymi zmianami na rynku ropy.

Rozkład reszt jest wyraźnie smuklszy niż normalny, a histogram pokazuje nadmierną koncentrację wartości wokół zera. Jednocześnie ogony rozkładu są grubsze niż w przypadku  $N(0,1)$ , co oznacza większe prawdopodobieństwo odchyлеń.

Wykres autokorelacji kwadratów reszt pokazuje, że wszystkie wartości mieszczą się w granicach ufności, czyli nie widać żadnych istotnych autokorelacji, co oznacza, że model GARCH dobrze poradził sobie z uchwyceniem zmienności w danych.

Na ostatnim wykresie punkty w środkowej części rozkładu układają się blisko linii prostej, natomiast ogony wykazują duże odchylenia. Jest to wyraźny sygnał braku zgodności z normalnością.



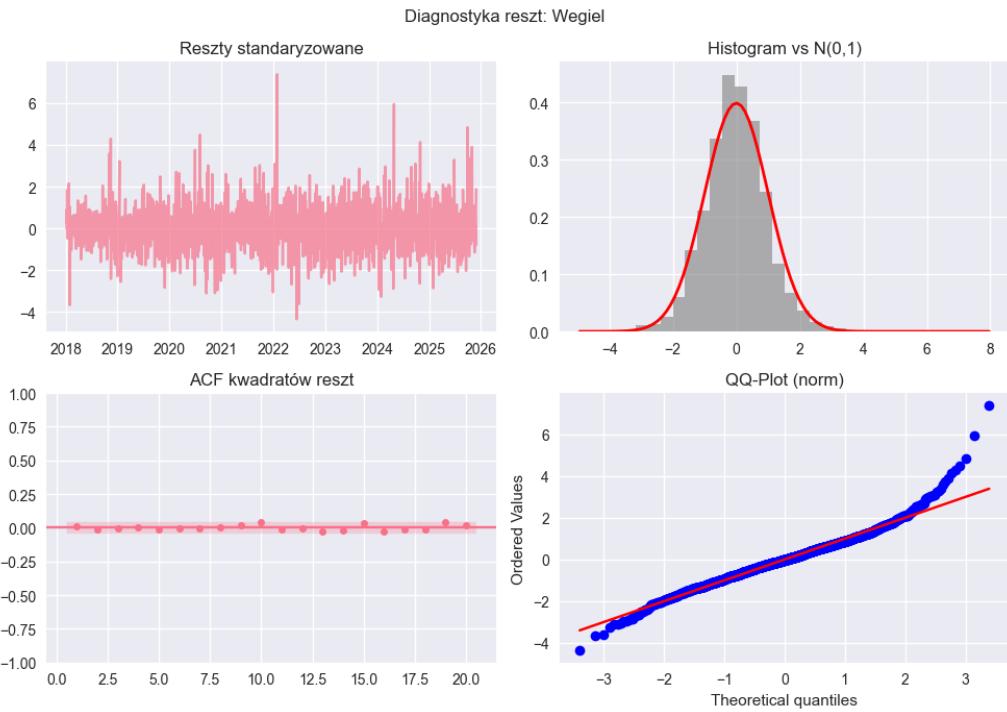
Rysunek 4: Diagnostyka reszt dla zmiennej Gaz ziemny

Na wykresie warunkowych korelacji widać wyraźne wahania współzależności między surowcami - korelacje okresowo rosną do wysokich wartości dodatnich, ale zdarzają się także epizody korelacji bliskich zera, a nawet ujemnych. W czasie pandemii COVID-19 oraz po wybuchu wojny na Ukrainie korelacje wyraźnie rosną, co wskazuje na dominację wspólnych szoków i ograniczenie korzyści z dywersyfikacji. Natomiast okresy niższych oraz ujemnych korelacji sugerują krótkotrwałe odstępstwa cen poszczególnych surowców od siebie.

Na wykresie ACF kwadratów reszt wszystkie współczynniki autokorelacji dla pierwszych 20 opóźnień oscylują blisko zera i mieszczą się w przedziałach ufności. Oznacza to, że nie ma istotnej autokorelacji w wariancji, a więc model GARCH dobrze wychwytuje efekt zmienności warunkowej.

Histogram reszt standaryzowanych jest wyraźnie bardziej skupiony wokół zera niż teoretyczny rozkład  $N(0,1)$  - czerwona krzywa - co wskazuje na podwyższoną kurtozę - dużo obserwacji blisko zera, ale jednocześnie obecność skrajnych wartości w ogonach. Rozkład reszt odbiega więc od normalnego.

Na QQ-plocie punkty wyraźnie odchylają się od linii prostej, szczególnie w ogonach - dolne obserwacje leżą znacznie poniżej, a górne powyżej linii teoretycznej. Świadczy to o znacznie cięższych ogonach niż w rozkładzie normalnym i jest kolejnym potwierdzeniem, że rozkład reszt standaryzowanych nie jest normalny.

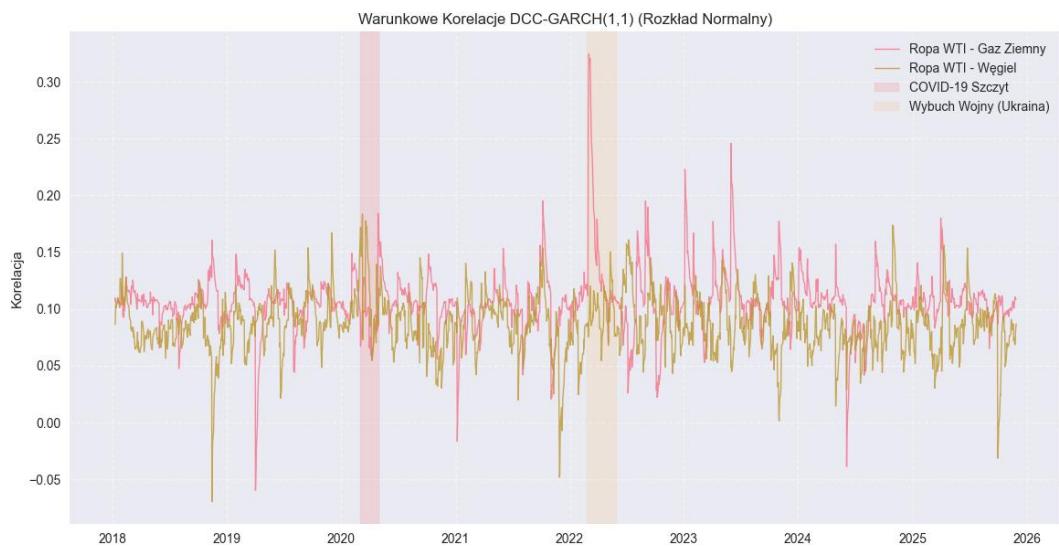


Rysunek 5: Diagnostyka reszt dla zmiennej Węgiel

Rozkład reszt standaryzowanych dla zmiennej opisującej węgiel charakteryzuje się wyraźną asymetrią prawostronną (grube ogony), co przesądziło o odrzuceniu założenia o normalności rozkładu. Jednocześnie weryfikacja przebiegu szeregu oraz wykresu ACF wskazuje na pożądane własności stochastyczne: oscylację wokół średniej zerowej oraz brak autokorelacji. Największe wartości odstające reszt standaryzowanych są ma przełomie 2021/2022 roku.

## 9. Analiza Dynamicznych Korelacji Warunkowych

Przedstawiony poniżej wykres estymacji modelu DCC-GARCH(1,1) wskazuje na generalnie niską, ale zmienną w czasie dodatnią korelację między Ropą WTI a Gazem Ziemnym oraz Węglem, oscylującą zazwyczaj w przedziale 0,05–0,15. Najsilniejszy wzrost współzależności (efekt zarażania) widoczny jest w momencie wybuchu wojny w Ukrainie (luty 2022), gdzie korelacja Ropa-Gaz gwałtownie wzrosła powyżej 0,30.



Rysunek 6: Warunkowe korelacje

W okresie pandemii (szary obszar po lewej) nie obserwujemy tak jednoznacznego, trwałego skoku korelacji jak w przypadku wojny. Widać dużą zmienność (szum), a nawet spadki korelacji w okolicę 0. Wynika to z faktu, że szok popytowy (lockdown) uderzył nieproporcjonalnie mocniej w ropę (transport) niż w węgiel czy gaz (energetyka/ogrzewanie)