



AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA IM. STANISŁAWA STASZICA W KRAKOWIE

Wydział Zarządzania

Projekt EFiD - Projekt 9B

Autorzy: *Patrycja Piła, Mateusz Strojek, Julia Szutka, Magdalena Wnuk*

Kierunek studiów: *Informatyka i Ekonometria*

Prowadzący: *dr hab. Tomasz Wójtowicz*

Kraków, 2025

1. Wstęp

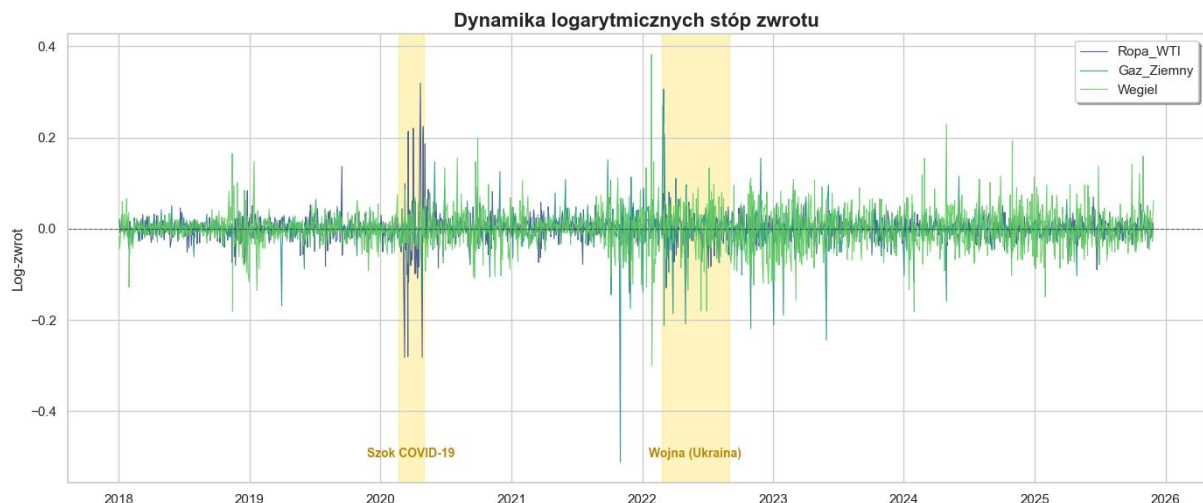
Celem projektu jest analiza wpływu wyboru warunkowych rozkładów prawdopodobieństwa w modelu DCC-GARCH na oszacowania warunkowych współczynników korelacji pomiędzy wybranymi instrumentami finansowymi. Badanie przeprowadzono na podstawie dziennych danych trzech instrumentów finansowych (ropa, węgiel, gaz ziemny) od początku 2018 roku, wykorzystując logarytmiczne stopy zwrotu. W pierwszym etapie dopasowano model VAR, który posłużył do konstrukcji modelu DCC-GARCH(1,1). W analizie uwzględniono różne jednowymiarowe modele warunkowej wariancji (GARCH, EGARCH, GJR-GARCH) z założeniem warunkowego rozkładu normalnego oraz t-Studenta, a także rozważono alternatywne założenia dotyczące wielowymiarowego rozkładu warunkowego.

2. Zmienne

W ramach projektu wykorzystano dane dotyczące rynku surowców energetycznych:

- **węgiel,**
- **ropa,**
- **gaz ziemny.**

Analiza obejmowała okres od początku stycznia 2018 roku do 1 grudnia 2025 roku.

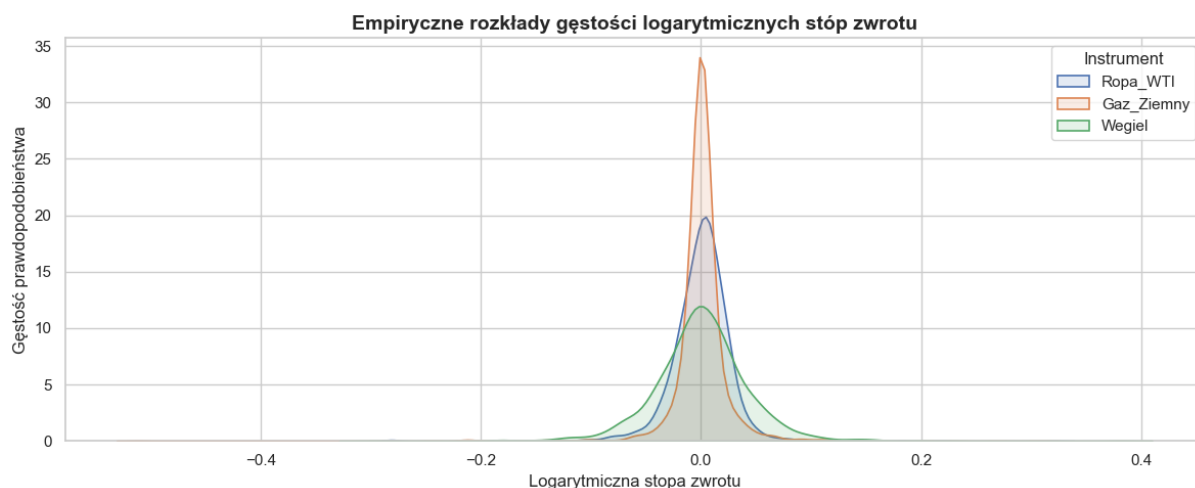


Na przedstawionym wykresie, obrazującym logarytmiczne stopy zwrotu cen ropy, gazu ziemnego i węgla w czasie, widoczna jest duża zmienność cen surowców energetycznych, zwłaszcza na przestrzeni roku 2020 jak i 2021/2022. Wykres dla gazu ziemnego oraz węgla wykazują najbardziej ekstremalne, gwałtowne skoki i spadki szczególnie na przełomie lat 2021/2022. Logarytmiczna stopa zwrotu ropy wydaje się być najbardziej skupiona wokół zera, oprócz roku 2020 gdzie to w tej zmiennej zauważalne są największe odchylenia od zera. Wyróżnione okresy obejmują pandemię COVID-19 jak i wybuch wojny na Ukrainie.

Tabela 1: Statystyki opisowe

| | średnia | odchyleni | min | max | skośność | eksces |
|------------|----------|-----------|-----------|----------|-----------|-----------|
| Ropa | 0,000287 | 0,029532 | -0,282206 | 0,319634 | 0,034546 | 26,398513 |
| Gaz ziemny | 0,000002 | 0,029886 | -0,511258 | 0,306201 | -2,565599 | 66,549783 |
| Węgiel | 0,000213 | 0,042961 | -0,300480 | 0,381727 | 0,241556 | 6,183989 |

Analizowane logarytmiczne stopy zwrotu dla trzech surowców energetycznych charakteryzują się minimalnymi średnimi wartościami bliskimi zera, przy czym ropa naftowa najwyższą średnią logarytmiczną stopę zwrotu. Najbardziej zmiennym aktywem w zestawieniu okazał się węgiel, którego odchylenie standardowe jest wyraźnie wyższe niż w przypadku pozostałych surowców. W przypadku gazu ziemnego widoczna jest silna asymetria lewostronna rozkładu co w połączeniu z ekstremalnie wysokim poziomem ekscesu wskazuje na występowanie drastycznych załamań cenowych. Wszystkie badane są leptokurtyczne.



Przedstawione empiryczne rozkłady gęstości logarytmicznych stóp zwrotu charakteryzują się wyraźną leptokurtozą, co oznacza wysoki stopień koncentracji wokół zera oraz występowaniem grubych ogonów. Gaz ziemny wykazuje najwyższą gęstość w centrum przy jednocześnie największym rozstępie, podczas gdy węgiel posiada najbardziej rozproszony rozkład, sugerujący wyższą zmienność stóp zwrotu w badanym okresie. Wyraźne odstępstwa od rozkładu normalnego (asymetria i piki) sugerują, że do modeli brzegowych powinien zostać użyty rozkład t-Studenta.

3. Badanie stacjonarności

Przed oszacowaniem modelu GARCH za pomocą testu ADF ze stałą (opóźnienie 25) sprawdzono stacjonarność szeregów czasowych:

- H_0 : szereg czasowy jest niestacjonarny (szereg ma pierwiastek jednostkowy),
- H_1 : szereg czasowy jest stacjonarny (szereg nie ma pierwiastka jednostkowego).

Dla wszystkich analizowanych zmiennych otrzymane wartości statystyki ADF są silnie ujemne, a odpowiadające im wartości p wynoszą 0,0000, co przy przyjętym poziomie istotności (0,05) prowadzi do odrzucenia H_0 . Oznacza to, że wszystkie szeregi są stacjonarne. W związku z tym można do danych dopasować model VAR.

4. Model VAR

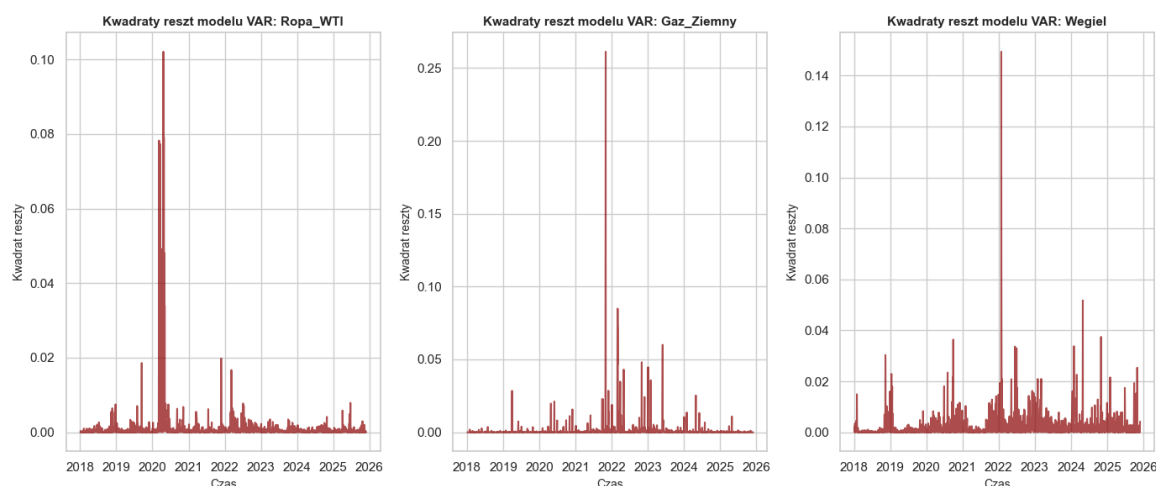
W celu dobrania odpowiedniego opóźnienia modelu VAR wykorzystano funkcję *select_order*. Otrzymane wyniki wskazywały na niejednoznaczność wyboru rzędu opóźnień modelu VAR w zależności od zastosowanego kryterium informacyjnego. W związku z tym, kierując się kryterium HQIC, które stanowi kompromis pomiędzy AIC i BIC, do dalszej analizy przyjęto model VAR(1).

Przeprowadzona diagnostyka wskazuje, że oszacowany model VAR spełnia warunek stabilności, co oznacza, że wszystkie pierwiastki wielomianu charakterystycznego leżą wewnątrz okręgu jednostkowego. Jednocześnie test Portmanteau (z opóźnieniem równym 10) odrzuca hipotezę zerową o braku autokorelacji reszt. Oznacza to, że model VAR nie wyeliminował w pełni zależności czasowych, co sugeruje, że rząd opóźnień może być niedoszacowany. Należy zachować ostrożność przy dalszym modelowaniu zmienności (DCC - GARCH), gdyż autokorelacja reszt może wpływać na stabilność estymatorów tego modelu.

Tabela 2: Diagnostyka VAR: Testy efektów ARCH

| Instrument | Statystyka testowa | Wartość p |
|------------|--------------------|-----------|
| Ropa | 446,62 | 0 |
| Gaz ziemny | 69,01 | 0 |
| Węgiel | 154,81 | 0 |

Przeprowadzono test ARCH-LM Engle'a z 10 opóźnieniami, który jednoznacznie potwierdził występowanie istotnych efektów ARCH we wszystkich równaniach modelu VAR. Uzyskane wyniki wskazują na obecność heteroskedastyczności warunkowej w resztach, co uzasadnia dalsze modelowanie zmienności za pomocą jednowymiarowych modeli z rodziny GARCH.



Wykresy kwadratów reszt potwierdzają występowanie silnego efektu grupowania zmienności, gdzie okresy wysokich wahań (szczególnie piki z 2020 i 2022 roku) następują po sobie, tworząc wyraźne klastry. Taka struktura reszt stanowi empiryczne potwierdzenie autokorelacji kwadratów błędów, co jest niezbędnym warunkiem do zastosowania modeli klasy GARCH i DCC w celu poprawnego oszacowania dynamiki kowariancji.

5. DCC-GARCH(1,1) – analiza wariantów jednowymiarowych i wielowymiarowych z różnymi rozkładami

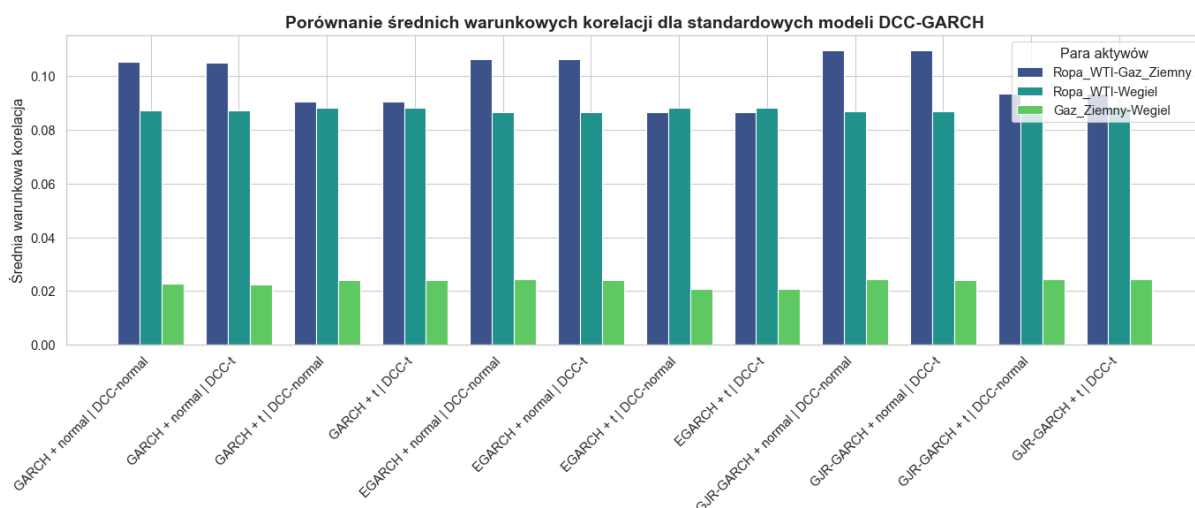
W celu zbadania wpływu wyboru rozkładów warunkowych oraz modelu zmienności na oszacowania dynamicznych korelacji, przeprowadzono analizę porównawczą dla wielu różnych specyfikacji modelu DCC. Zdefiniowano i oszacowano 12 przypadków, stanowiących kombinację trzech modeli jednowymiarowej wariancji warunkowej (GARCH, EGARCH, GJR-GARCH) oraz dwóch typów rozkładów błędów: normalnego i t-Studenta (zarówno na poziomie brzegowym, jak i wielowymiarowym rozkładu). Estymację parametrów przeprowadzono na podstawie reszt z wcześniej oszacowanego modelu VAR, wykorzystując bibliotekę *rmgarch* w języku R, do której dostęp uzyskano poprzez interfejs *rpy2* w Pythonie. Takie podejście pozwoliło na zweryfikowanie stabilności wyników oraz ocenę, czy uwzględnienie asymetrii (modele EGARCH/GJR) lub grubych ogonów rozkładu (rozkład t-Studenta) prowadzi do istotnych statystycznie różnic w ocenie powiązań między rynkami surowców energetycznych.

Tabela 3: Podsumowanie średnich korelacji dla wszystkich modeli

| Model | Ropa WTI – Gaz Ziemny | Ropa WTI – Węgiel | Gaz Ziemny – Węgiel |
|-----------------------------|--------------------------|----------------------|------------------------|
| GARCH + normal DCC-normal | 0,1052 | 0,0873 | 0,0228 |
| GARCH + normal DCC-t | 0,1052 | 0,0873 | 0,0226 |
| GARCH + t DCC-normal | 0,0906 | 0,0883 | 0,0241 |

| | | | |
|---------------------------------|--------|--------|--------|
| GARCH + t DCC-t | 0,0906 | 0,0883 | 0,0241 |
| EGARCH + normal DCC-normal | 0,1064 | 0,0867 | 0,0244 |
| EGARCH + normal DCC-t | 0,1063 | 0,0867 | 0,0242 |
| EGARCH + t DCC-normal | 0,0865 | 0,0884 | 0,0207 |
| EGARCH + t DCC-t | 0,0865 | 0,0884 | 0,0207 |
| GJR-GARCH + normal DCC-normal | 0,1097 | 0,0870 | 0,0243 |
| GJR-GARCH + normal DCC-t | 0,1097 | 0,0870 | 0,0241 |
| GJR-GARCH + t DCC-normal | 0,0935 | 0,0883 | 0,0243 |
| GJR-GARCH + t DCC-t | 0,0934 | 0,0883 | 0,0243 |

Najistotniejszym czynnikiem wpływającym na poziom korelacji (szczególnie widocznym dla pary ropa–gaz) jest dobór rozkładu dla poszczególnych zmiennych, gdzie modele wykorzystujące rozkład t-Studenta systematycznie wskazują na słabsze powiązania niż te oparte na rozkładzie normalnym, co sugeruje, że uwzględnienie „grubych ogonów” skuteczniej filtruje ekstremalne zmiany cen, nie myląc ich ze wzrostem korelacji. Przy ustalonej specyfikacji jednowymiarowej, zmiana rozkładu w samym module DCC (z normalnego na t-Studenta) praktycznie nie zmienia średnich wartości współczynników korelacji. Wrażliwość oszacowań na dobór modelu nie jest jednakowa dla wszystkich instrumentów. Modele uwzględniające efekt dźwigni (GJR-GARCH, EGARCH) w wariancie z rozkładem normalnym generują najwyższe oszacowania korelacji dla pary ropa – gaz, co wskazuje, że nieuwzględnienie asymetrycznej reakcji zmienności na szoki (w zwykłym modelu GARCH) może prowadzić do niedoszacowania siły powiązań w okresach gwałtownych zmian cen.



Wykres słupkowy wizualnie potwierdza te obserwacje, ukazując wyraźną redukcję średniej korelacji dla pary ropa–gaz (niebieskie słupki) w modelach z brzegowym rozkładem t-Studenta, przy jednocześnie wysokiej stabilności oszacowań dla par obejmujących węgiel, niezależnie od przyjętej specyfikacji.

W celu oceny adekwatności przyjętych specyfikacji modelu DCC-GARCH przeprowadzono testy zgodności dla reszt zestandaryzowanych. Dobór narzędzia statystycznego został dostosowany do założonego rozkładu warunkowego w danym modelu. Dla specyfikacji zakładających rozkład normalny wykorzystano test Shapiro-Wilka. W przypadkach, gdzie modelowano za pomocą rozkładu t-Studenta, posłużono się testem Kolmogorowa-Smirnowa (KS).

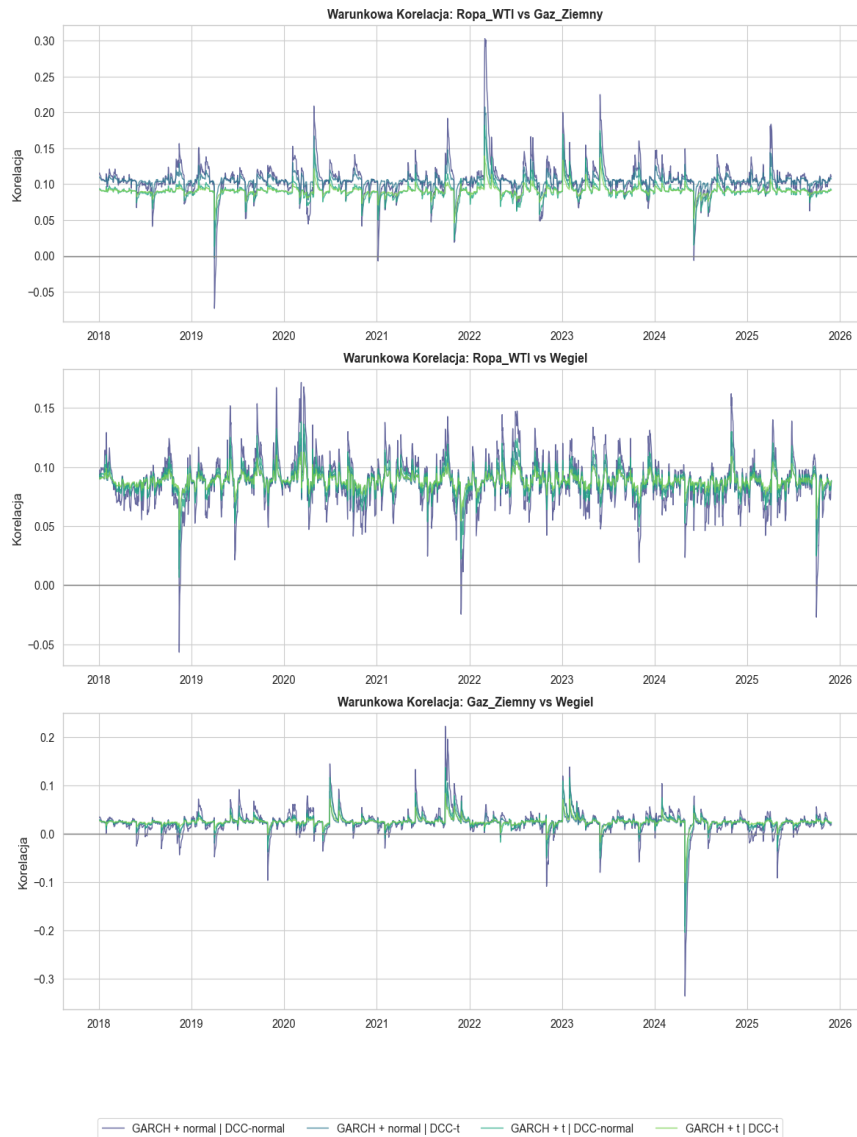
W obu przypadkach hipoteza zerowa (H_0) formułowana jest następująco:

- H_0 : Rozkład reszt zestandaryzowanych jest zgodny z założonym rozkładem teoretycznym.
- H_1 : Rozkład reszt różni się istotnie od założonego rozkładu teoretycznego.

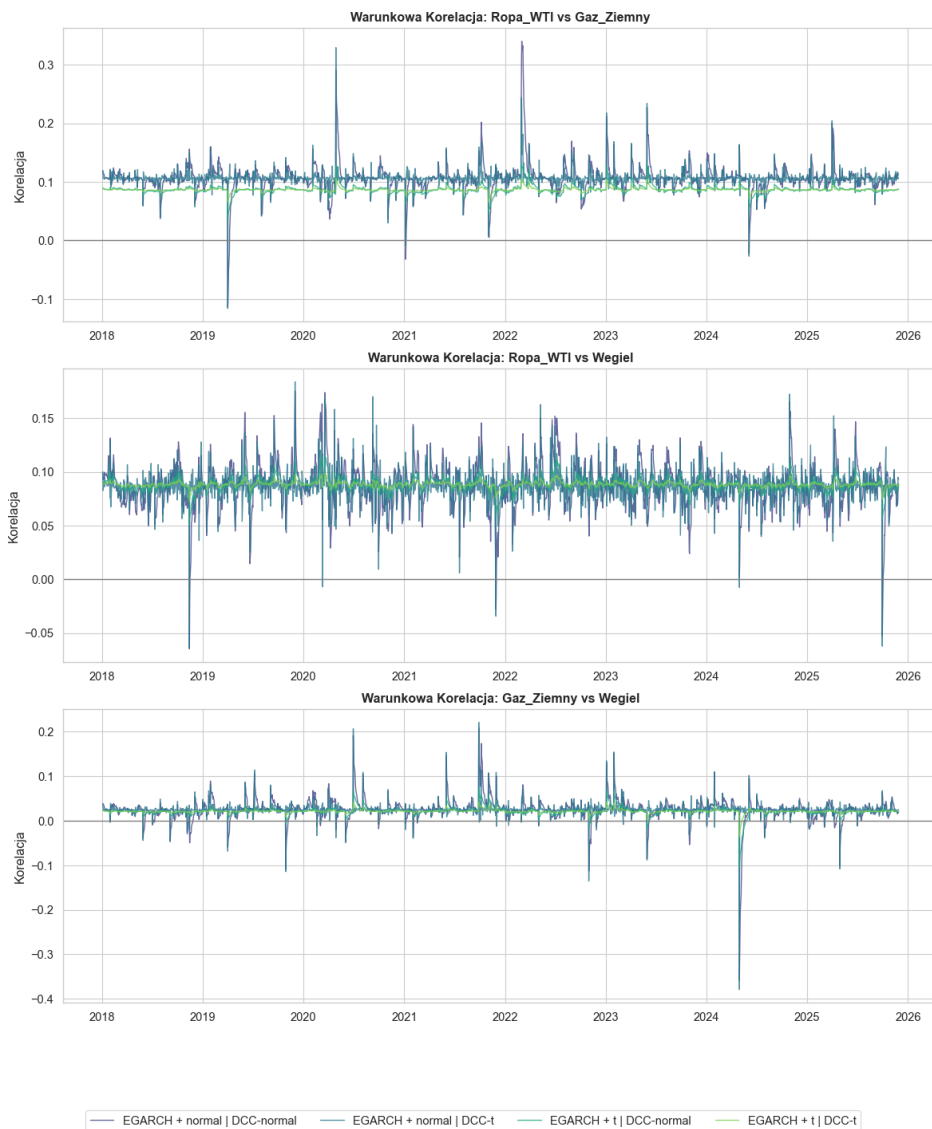
Tabela 4: P-wartości testów rozkładu warunkowych reszt (Shapiro-Wilk / KS)

| Model | Ropa WTI – Gaz Ziemny | Ropa WTI – Węgiel | Gaz Ziemny – Węgiel |
|---------------------------------|----------------------------------|------------------------------|--------------------------------|
| GARCH + normal DCC-normal | 0,5943 | 0,8909 | 0,3183 |
| GARCH + normal DCC-t | 0,5943 | 0,8909 | 0,3183 |
| GARCH + t DCC-normal | 0,9227 | 0,9883 | 0,7381 |
| GARCH + t DCC-t | 0,9227 | 0,9883 | 0,7381 |
| EGARCH + normal DCC-normal | 0,5943 | 0,9107 | 0,2927 |
| EGARCH + normal DCC-t | 0,5943 | 0,9107 | 0,2927 |
| EGARCH + t DCC-normal | 0,9227 | 0,9879 | 0,7386 |
| EGARCH + t DCC-t | 0,9227 | 0,9879 | 0,7386 |
| GJR-GARCH + normal DCC-normal | 0,5943 | 0,8927 | 0,321 |
| GJR-GARCH + normal DCC-t | 0,5943 | 0,8927 | 0,321 |
| GJR-GARCH + t DCC-normal | 0,9227 | 0,9882 | 0,752 |
| GJR-GARCH + t DCC-t | 0,9227 | 0,9882 | 0,752 |

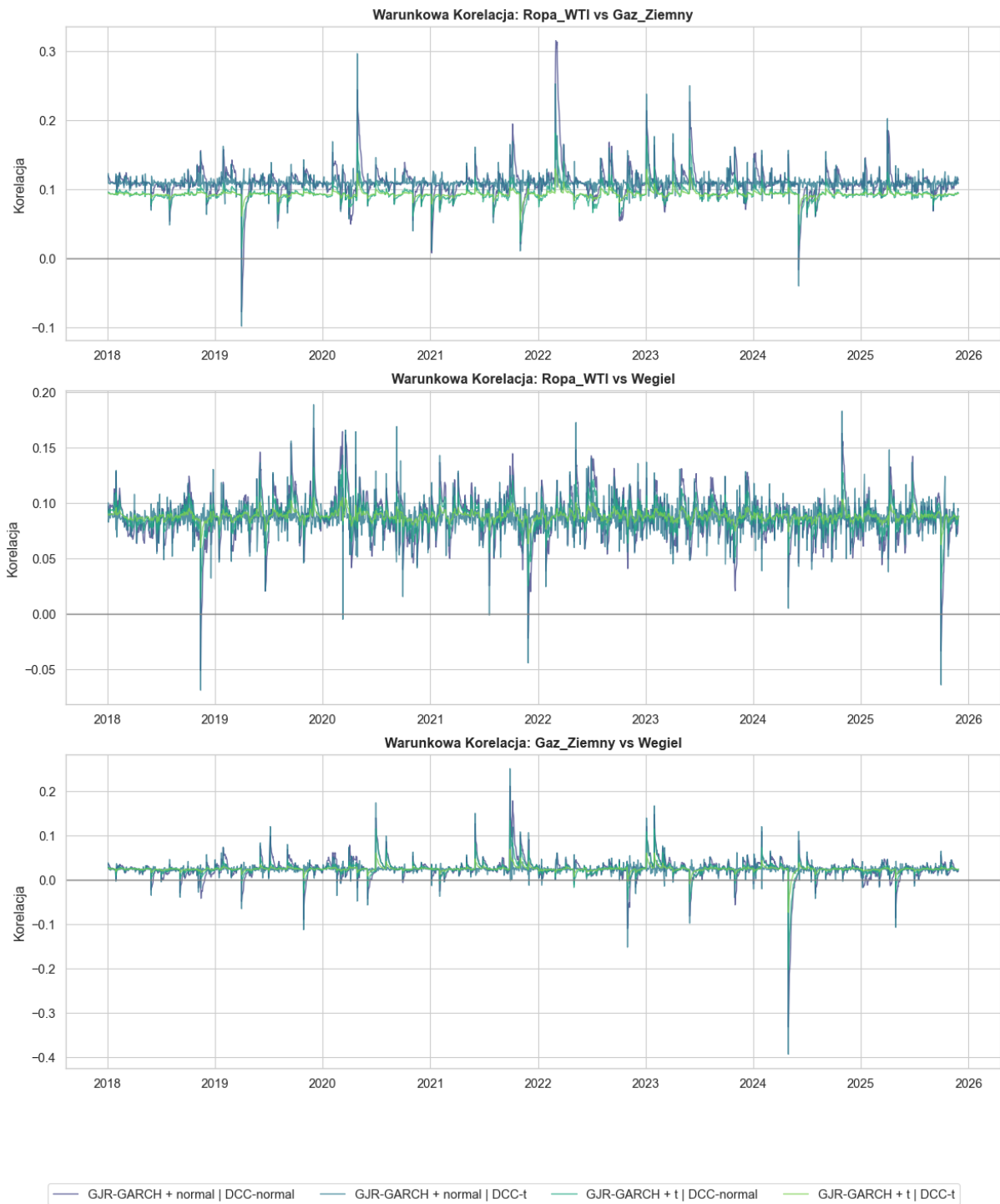
Wszystkie analizowane modele charakteryzują się p-wartościami znacznie przekraczającymi poziom istotności 0,05, co oznacza brak podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej i potwierdza statystyczną poprawność dopasowania przyjętych rozkładów teoretycznych do empirycznych reszt.



Wykresy dynamicznych korelacji wyraźnie ukazują, że modele oparte na brzegowym rozkładzie normalnym (linie niebieskie) cechują się nadmierną wrażliwością na szoki, generując gwałtowne skoki wartości współczynnika, podczas gdy specyfikacje wykorzystujące rozkład t-Studenta (linie zielone) zapewniają znacznie większą stabilność, skutecznie wygładzając ekstremalne wahania. W wariancie z rozkładem normalnym, model interpretuje okresy wysokiej zmienności (wybuch wojny w 2022 r.) jako gwałtowne skoki korelacji.



W modelu EGARCH, który dopuszcza asymetryczną reakcję na szoki (tzw. efekt dźwigni), obserwujemy analogiczną strukturę wyników. Mimo że model ten teoretycznie lepiej radzi sobie z gwałtownymi spadkami cen, specyfikacja z rozkładem normalnym nadal charakteryzuje się wysoką amplitudą wahań. Warto zauważyć, że dla pary Gaz-Węgiel, warianty oparte na rozkładzie normalnym wskazują na silne, krótkotrwałe załamania korelacji do wartości ujemnych w 2024 roku, podczas gdy warianty t-Studenta pokazują w tym samym czasie jedynie nieznaczne odchylenia. Potwierdza to, że nawet w modelu asymetrycznym, to założenie o rozkładzie błędu jest kluczowym czynnikiem stabilizującym oszacowania.



Wykres dla modelu GJR-GARCH, będącego alternatywną metodą modelowania asymetrii, jest wizualnie bardzo zbliżony do wyników modelu standardowego i EGARCH. Linie reprezentujące modele z rozkładem t-Studenta są niemal płaskie w porównaniu do bardzo poszarpanych linii modeli normalnych.

Niezależnie od tego, czy stosujemy model symetryczny (GARCH), czy asymetryczny (EGARCH, GJR), użycie rozkładu normalnego systematycznie prowadzi do przeszacowania zmienności korelacji w okresach stresu rynkowego. Model mylnie bierze duże zmiany cen za sygnał wzrostu współzależności. Różnice w przebiegu krzywych

między samym wykresem EGARCH a GJR-GARCH są subtelne, co oznacza, że efekt asymetrii (reakcja na spadki vs wzrosty) jest drugoplanowy wobec problemu leptokurtozy w danych surowcowych.

6. Optymalny model DCC-GARCH

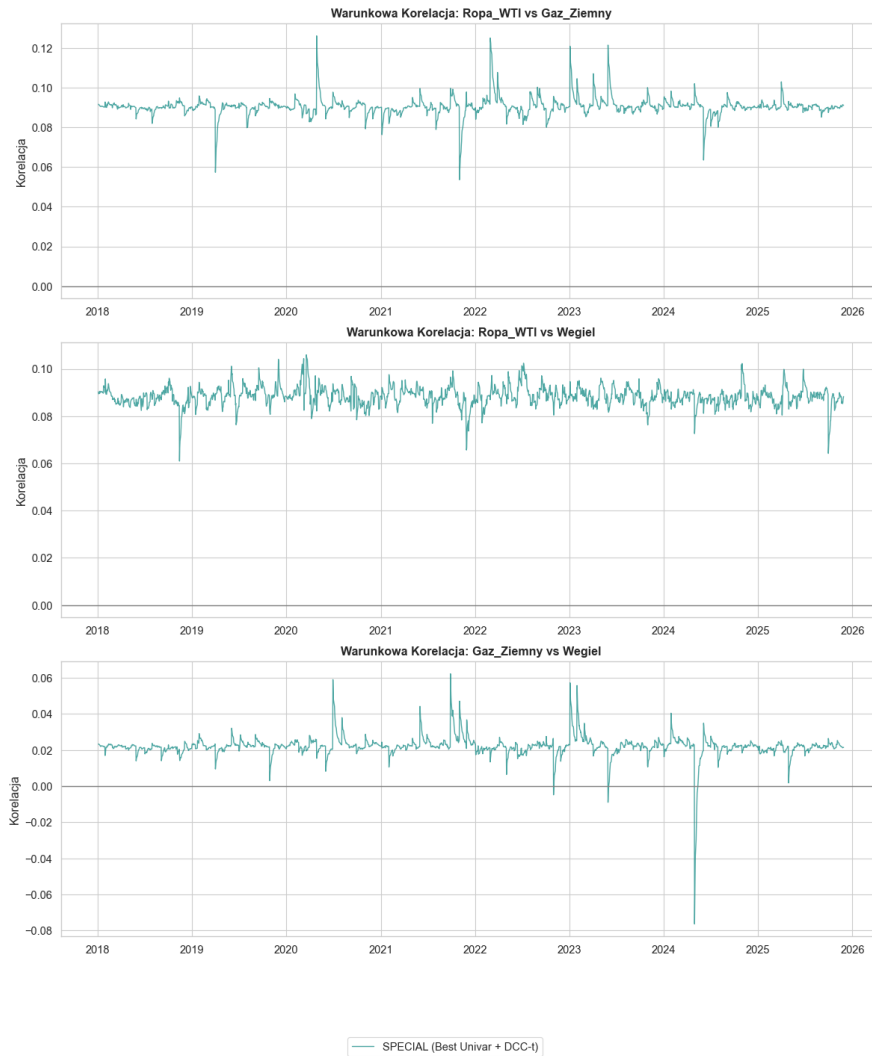
W celu wyznaczenia specyfikacji modelu najlepiej odwzorowującej dynamikę badanych rynków, przeprowadzono procedurę selekcji opartą na kryterium informacyjnym Akaike (AIC) oraz testach diagnostycznych. Analiza jednowymiarowa wykazała, że dla wszystkich trzech instrumentów niezbędne jest zastosowanie rozkładu t-Studenta. Dla ropy WTI oraz węgla minimalizację kryterium AIC osiągnięto przy użyciu asymetrycznego modelu EGARCH, co wskazuje na istotną rolę efektu dźwigni (silniejszej reakcji zmienności na spadki cen). W przypadku gazu ziemnego optymalnym okazał się standardowy model GARCH. Poprawność dopasowania rozkładów brzegowych została zweryfikowana testem Kołmogorowa-Smirnowa. We wszystkich przypadkach wartości p (0,24 dla ropy; 0,36 dla gazu; 0,73 dla węgla) nie dały podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej, potwierdzając zgodność reszt z założonym rozkładem teoretycznym.

W drugim etapie badania przeprowadzono weryfikację założenia o wielowymiarowym rozkładzie reszt zestandaryzowanych. Test Henze-Zirklera jednoznacznie odrzucił hipotezę o wielowymiarowej normalności ($HZ = 34,57$; $p < 0,001$). W konsekwencji jako finalny model badawczy przyjęto specyfikację hybrydową: DCC z wielowymiarowym rozkładem t-Studenta, oparty na mieszanych modelach brzegowych (EGARCH/GARCH) z jednowymiarowymi rozkładami t-Studenta. Taka konfiguracja pozwala na najbardziej rzetelne oszacowanie warunkowych korelacji w obecności asymetrii i grubych ogonów rozkładu.

Tabela 7: Podsumowanie średnich korelacji dla optymalnego modelu

| Ropa WTI – Gaz Ziemny | Ropa WTI – Węgiel | Gaz Ziemny – Węgiel |
|------------------------------|--------------------------|----------------------------|
| 0,0905 | 0,0884 | 0,02218 |

Uzyskane średnie wartości korelacji warunkowych są niskie i dodatnie, mieszcząc się w przedziale od 0,02 do 0,09. Oznacza to, że rynki Ropy WTI, Gazu Ziemnego i Węgla, mimo przynależności do wspólnego sektora energetycznego, zachowują dużą autonomię. Najsilniejsza (choć wciąż słaba) zależność występuje między Ropą a Gazem Ziemnym (0,0905), co jest uzasadnione substytucyjnością tych surowców w przemyśle i energetyce.



Wizualizacja przebiegu korelacji dla modelu optymalnego potwierdza ten wniosek, ukazując względnie płaskie i stabilne przebiegi. Sugeruje to, że zastosowanie rozkładu t-Studenta pozwoliło na lepsze dopasowanie do wartości odstających, dzięki czemu szacowana korelacja nie reaguje gwałtownie na pojedyncze szoki cenowe, lecz odzwierciedla trwał, niską współzależność rynków.

7. Wnioski

Uzyskane wyniki jednoznacznie wskazują na słabą współzależność cenową analizowanych surowców. Badanie wykazało, że dobór odpowiedniego rozkładu jest czynnikiem bardziej krytycznym dla poprawności modelu niż wybór samego modelu warunkowej wariancji. Modele oparte na rozkładzie normalnym systematycznie przeszacowują ryzyko w okresach szoków (np. wybuch wojny w 2022 r.), interpretując dużą zmienność jako wzrost korelacji. Zastosowanie rozkładu t-Studenta pozwala na poprawne uwzględnienie zjawiska grubych ogonów, co ujawnia, że fundamentalna struktura powiązań między rynkami jest w rzeczywistości stabilna w czasie. W przypadku rynków ropy WTI oraz węgla potwierdzono występowanie efektu dźwigni, co uzasadnia

stosowanie modeli asymetrycznych (EGARCH). Oznacza to, że rynki te reagują gwałtowniej na negatywne szoki cenowe niż na pozytywne.