



**AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA IM. STANISŁAWA STASZICA W KRAKOWIE**

**Wydział Zarządzania**

*Projekt EFiD - Projekt 10A*

Autorzy: *Patrycja Piła, Mateusz Strojek, Julia Szutka, Magdalena Wnuk*

Kierunek studiów: *Informatyka i Ekonometria*

Prowadzący: *dr hab. Tomasz Wójtowicz*

Kraków, 2026

## Wstęp

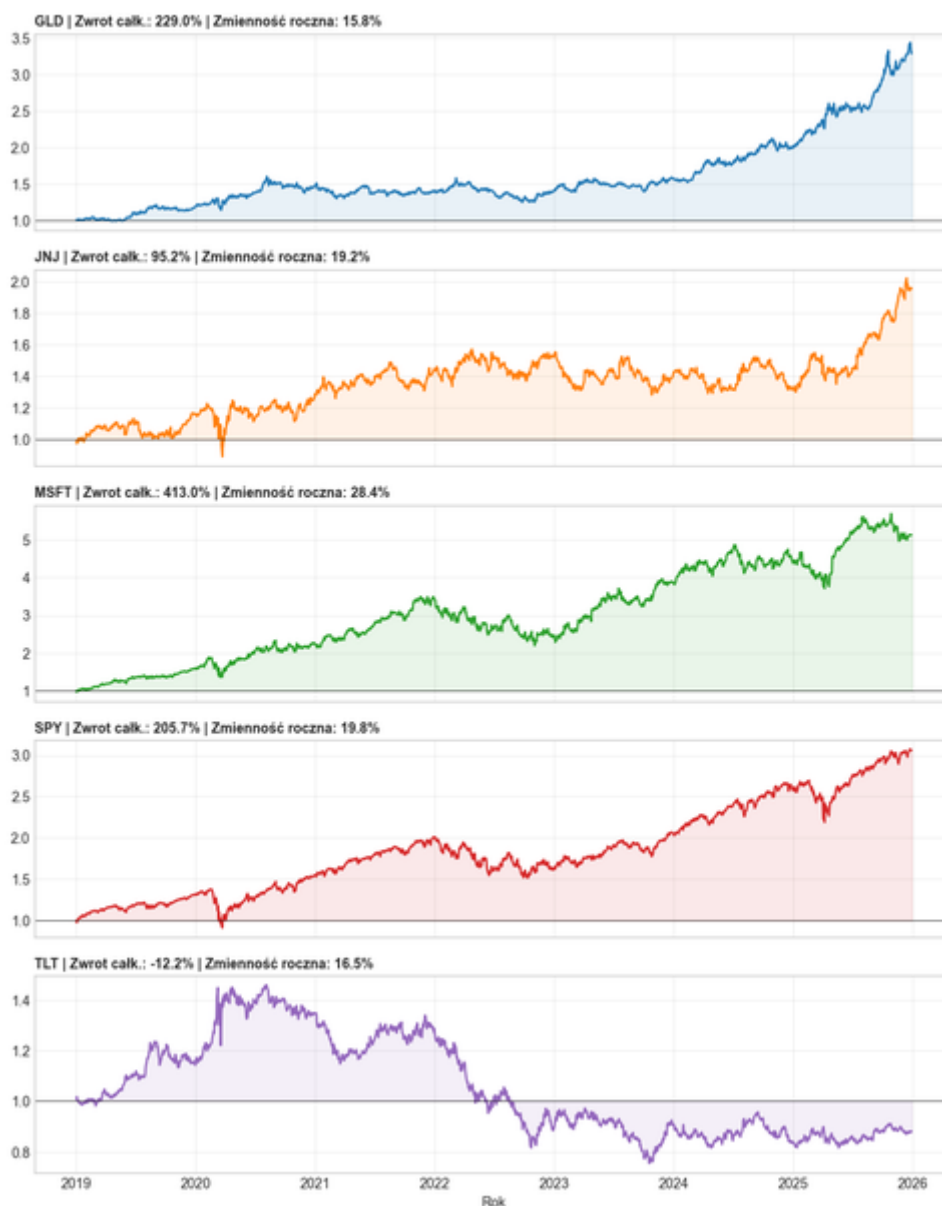
Celem projektu jest analiza portfela o minimalnej wariancji konstruowanego zgodnie z modelem Markowitza, z wykorzystaniem kroczącego okna danych o długości 500 obserwacji. W każdym kroku wyznaczane są wagi portfela MVP, a następnie obliczane są stopy zwrotu portfela z kolejnych 5 dni; procedura ta jest powtarzana poprzez przesuwanie okna o 5 dni, tak aby uzyskane stopy zwrotu obejmowały okres od początku stycznia 2019 do końca 2025. Otrzymane własności portfela MVP zostaną porównane w poszczególnych latach w całym badanym okresie z portfelem równoważonym oraz portfelami złożonymi z pojedynczych instrumentów, na podstawie miar takich jak średnia stopa zwrotu, odchylenie standardowe, Value at Risk - VaR oraz Expected Shortfall - ES.

## Zmienne

W analizie wykorzystano następujące instrumenty finansowe, reprezentujące różne klasy aktywów i segmenty rynku, co pozwala na zróżnicowanie portfela. Dane pochodzą od 1 stycznia 2016 do końca 2025 roku:

- **SPY (S&P 500 ETF)** - fundusz ETF odwzorowujący zachowanie indeksu S&P 500, reprezentujący szeroki rynek akcji w Stanach Zjednoczonych.
- **GLD (Gold Shares)** - fundusz ETF oparty na cenie złota, reprezentujący rynek surowców.
- **MSFT (Microsoft)** - akcje spółki technologicznej z sektora IT, będącej jednym z liderów globalnego rynku technologicznego.
- **JNJ (Johnson & Johnson)** - akcje spółki działającej w sektorze ochrony zdrowia.
- **TLT (20+ Year Treasury Bond ETF)** - fundusz ETF inwestujący w długoterminowe obligacje skarbowe USA, reprezentujący rynek instrumentów dłużnych.

### Indywidualna Analiza Instrumentów (2019-2025)



Na wykresie pokazano skumulowane stopy zwrotu każdego instrumentu w latach 2019-2025. Najsilniej rośnie MSFT, ale widać u niego dość spore wahania. SPY w porównaniu do innych instrumentów ma stabilny trend wzrostowy z okresowymi obsunięciami, a JNJ zachowuje się spokojniej i bardziej defensywnie. Złoto rośnie umiarkowanie od około 2024 roku. TLT wypada najgłębiej - po 2022 r. wyraźnie traci. W każdym z instrumentów w 2020 roku widać załamanie/spadek związany z wybuchem pandemii po którym następuje odbicie. Największe załamanie widać dla JNJ i SPY.

Poniższa tabelka przedstawia statystyki opisowe aktywów, które weźmiemy pod uwagę przy tworzeniu portfeli. Oprócz statystyk opisowych, przedstawione są również wyniki testu normalności Jarque-Bera, gdzie hipotezą zerową było występowanie normalności, natomiast hipotezą alternatywną jest jej brak.

Tabela 1. Statystyki opisowe badanych aktyw

Aktywo	Średnia (roczna)	Mediana (roczna)	Odchylenie standardowe (roczne)	Skośność	Eksces	JB p- value	Czy rozkład normalny?
GLD	0,1831	0,2163	0,1575	-0,3415	3,1285	0,0000	Nie
TLT	-0,0050	0,0685	0,1647	0,1638	4,4971	0,0000	Nie
JNJ	0,1143	0,1217	0,1922	0,1247	8,2006	0,0000	Nie
SPY	0,1797	0,2495	0,1978	-0,2949	13,7814	0,0000	Nie
MSFT	0,2745	0,2916	0,2837	0,0800	7,7555	0,0000	Nie

Największą roczną średnią stopą zwrotu charakteryzuje się MSFT, co jest spójne z jego silnym trendem wzrostowym w badanym okresie, ale jednocześnie ma on też najwyższe roczne odchylenie standardowe - najwyższe ryzyko wahań. Najstabilniej wypada TLT, które jako jedyne ma ujemną roczną średnią. Pozostałe aktywa (GLD, SPY, JNJ) mają dodatnie średnie roczne. GLD i SPY osiągają zbliżone poziomy, a JNJ wypada bardziej umiarkowanie.

Test Jarque-Bery wskazuje, że dla każdego instrumentu odrzucamy normalność rozkładu stóp zwrotu (wartość  $p = 0$ ), co może sugerować obecność skośności lub „grubych ogonów”.

## Model Markowitza

Zastosowano model opracowany przez Markowitza przy konstruowaniu portfeli. W przypadku portfela z dwoma spółkami, wartość oczekiwana portfela jest równa:

$$E(R_p) = w_A \cdot E(R_A) + w_B \cdot E(R_B)$$

Gdzie:

- $E(R_p)$  – Oczekiwana stopa zwrotu całego portfela.
- $w_A$  – Waga spółki A w portfelu
- $w_B$  – Waga spółki B w portfelu
- $E(R_A)$  – Oczekiwana stopa zwrotu spółki A.
- $E(R_B)$  – Oczekiwana stopa zwrotu spółki B.

W przypadku portfela z pięcioma aktywami, wzór jest bardzo podobny. Brane pod uwagę jest pięć wag z pięcioma oczekiwanymi stopami zwrotu.

Aby wyznaczyć wariancję portfela dla wielu aktywów, trzeba skorzystać z następującego wzoru:

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^n w_i^2 \sigma_i^2 + 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j \sigma_i \sigma_j \rho_{\{ij\}}$$

Gdzie:

- $\sigma_p^2$  – Wariancja portfela.
- $w_i$  – Waga aktywa  $i$ .
- $\sigma_i^2$  – Wariancja aktywa  $i$ .
- $\rho_{\{ij\}}$  – Korelacja między aktywem  $i$  a aktywem  $j$ .

Celem badania jest zbudowanie portfela, w którym aktywa nie są ze sobą mocno dodatnio skorelowane. Szukany będzie taki portfel, gdzie przy najmniejszej wariancji maksymalizuje się oczekiwaną stopę zwrotu.

## Wyniki

Tabela 2. Roczne Stopy Zwrotu

Rok	Portfel MVP	Portfel równoważony	Złoto	Johnson & Johnson	Microsoft	S&P 500	TLT (obligacje 20+ lat)
2019	0,1753	0,2457	0,1711	0,1640	0,4746	0,2797	0,1392
2020	0,1933	0,2500	0,2398	0,1478	0,4495	0,2238	0,1893
2021	0,0299	0,1507	-0,0330	0,1188	0,4442	0,2611	-0,0375
2022	-0,1266	-0,1436	0,0038	0,0733	-0,2679	-0,1720	-0,3551
2023	0,0645	0,1668	0,1294	-0,0768	0,4939	0,2430	0,0444
2024	0,0842	0,1015	0,2477	-0,0380	0,1416	0,2302	-0,0739
2025	0,2847	0,2741	0,5255	0,4125	0,1837	0,1914	0,0573

W powyższej tabeli w analizowanym okresie portfel MVP osiąga niższe roczne stopy zwrotu niż portfel zrównoważony we wszystkich latach poza 2025 r oraz 2022 r. W 2022 roku oba portfele notują straty, jednak spadek portfela MVP jest nieco mniejszy, co potwierdza jego bardziej ochronny charakter w trudnych warunkach rynkowych. Największą różnicę między tymi portfelami można zaobserwować w 2021 r.

Patrząc na aktywa, najwyższe dodatnie wyniki w wielu latach osiąga Microsoft, ale w 2022 r. notuje silne tąpnięcie. Wybuch wojny w Ukrainie (luty 2022) podbił niepewność, zwiększył awersję do ryzyka i dołożył presję inflacyjną oraz problemy z energią i łańcuchami dostaw. Najstabilniej wypada TLT w 2022 r., co jest spójne z wpływem rosnących stóp procentowych na ceny długoterminowych obligacji. Z kolei złoto ma

relatywnie stabilny przebieg i w niektórych latach wypada bardzo dobrze (rok 2025), co wspiera jego rolę jako składnika dywersyfikującego portfel. Wniosek praktyczny jest taki, że MVP może dawać niższe zwroty w korzystnych latach, ale potencjalnie ogranicza straty w latach kryzysowych, podczas gdy portfel równoważny osiąga wyższe zwroty w latach sprzyjającej koniunktury, lecz może być bardziej podatny na obsunięcia.

Tabela 3. Roczne Odchylenie Standardowe (Ryzyko)

Rok	Portfel MVP	Portfel równoważony	Złoto	Johnson & Johnson	Microsoft	S&P 500	TLT (obligacje 20+ lat)
2019	0,0722	0,0780	0,1166	0,1645	0,1983	0,1251	0,1193
2020	0,1235	0,1941	0,1947	0,3027	0,4388	0,3340	0,2156
2021	0,0838	0,0922	0,1368	0,1450	0,2105	0,1299	0,1386
2022	0,1189	0,1517	0,1528	0,1741	0,3531	0,2424	0,2035
2023	0,0981	0,0998	0,1339	0,1654	0,2507	0,1308	0,1843
2024	0,0864	0,0878	0,1501	0,1512	0,1996	0,1257	0,1419
2025	0,0984	0,1025	0,1988	0,1959	0,2430	0,1951	0,1193

Powyższa tabela przedstawia roczne odchylenie standardowe stóp zwrotu, czyli miarę ryzyka w poszczególnych latach. We wszystkich latach portfel MVP ma niższe ryzyko niż portfel zrównoważony, choć w niektórych latach różnice są niewielkie. Najwyższe ryzyko w całej próbie pojawia się w 2020 r., co można łączyć z gwałtownymi zmianami cen w czasie pandemii, a podwyższona zmienność jest widoczna także w 2022 r.

Jeśli chodzi o pojedyncze aktywa, największą zmienność ma Microsoft - najwyższą w 2020 r., a także podwyższoną w 2022 r. i 2025 r. Do grupy bardziej niestabilnych należy również S&P 500, który notuje wyraźne skoki zmienności w 2020, 2022 oraz 2025. Z kolei złoto, JNJ i TLT można uznać za relatywnie spokojniejsze: złoto jest dość stabilne, ale ma wyraźny wzrost zmienności w 2020 i 2025, JNJ zachowuje się podobnie (duży skok w 2020 a następnie mniejszy w 2025), a TLT jest najbardziej stabilny, choć także widocznie bardziej zmienny w 2020 r. Ogólnie 2020 r. jest najbardziej zmiennym okresem dla wszystkich aktywów, a 2022 r. i 2025 r. to kolejne lata, w których w większości instrumentów obserwujemy istotny wzrost wahań.

Tabela 4. Dzinne Value at Risk (95%)

Rok	Portfel MVP	Portfel równoważony	Złoto	Johnson & Johnson	Microsoft	S&P 500	TLT (obligacje 20+ lat)
2019	-0,0077	-0,0073	-0,0114	-0,0143	-0,0191	-0,0120	-0,0132
2020	-0,0098	-0,0156	-0,0195	-0,0275	-0,0417	-0,0315	-0,0157
2021	-0,0096	-0,0084	-0,0165	-0,0153	-0,0211	-0,0131	-0,0138
2022	-0,0119	-0,0151	-0,0156	-0,0162	-0,0385	-0,0263	-0,0219
2023	-0,0090	-0,0102	-0,0124	-0,0160	-0,0229	-0,0138	-0,0175
2024	-0,0093	-0,0089	-0,0150	-0,0154	-0,0219	-0,0132	-0,0157
2025	-0,0071	-0,0071	-0,0181	-0,0159	-0,0228	-0,0165	-0,0110

W tabeli powyżej przedstawiono VaR. Jest to wskaźnik, który informuje o maksymalnej oczekiwanej stracie jednodniowej, której prawdopodobieństwo przekroczenia wynosi jedynie 5% w danym roku. Najbezpieczniejszą opcją jest MVP, tylko w latach 2019, 2021 i 2024 portfel zrównoważony ma wyniki bliższe zeru natomiast w roku 2025 oba portfele mają taki sam VaR. Spośród akcji najczęściej złoto oraz TLT wykazują najmniejsze straty natomiast Microsoft największe. Jeżeli chodzi o porównanie lat to niezmiennie rok 2020 i 2022 odnotowują największe wartości a po nich następuję stabilizacja.

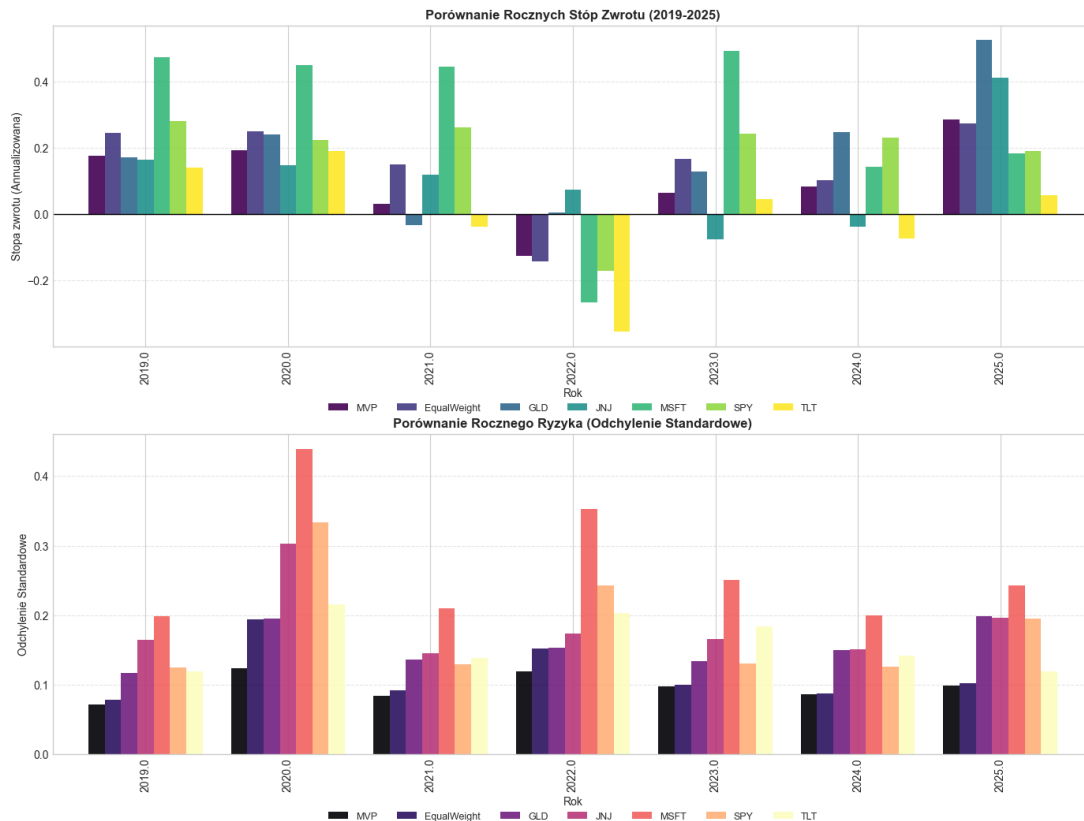
W każdym roku analizowanego okresu zbadano również dzienny Expected Shortfall (ES) na poziomie 95% dla każdego portfela oraz poszczególnych akcji. ES jest miarą, która pokazuje średnią stratę w najgorszych 5% przypadków, czyli wtedy, gdy strata przekracza poziom VaR.

Tabela 5. Dzienny Expected Shortfall (95%)

Rok	Portfel MVP	Portfel równoważony	Złoto	Johnson & Johnson	Microsoft	S&P 500	TLT (obligacje 20+ lat)
2019	-0,0097	-0,0100	-0,0157	-0,0253	-0,0278	-0,0196	-0,0159
2020	-0,0190	-0,0303	-0,0301	-0,0464	-0,0632	-0,0545	-0,0297
2021	-0,0123	-0,0126	-0,0223	-0,0214	-0,0277	-0,0183	-0,0171
2022	-0,0147	-0,0198	-0,0194	-0,0213	-0,0462	-0,0335	-0,0260
2023	-0,0112	-0,0125	-0,0168	-0,0241	-0,0292	-0,0157	-0,0228
2024	-0,0128	-0,0134	-0,0220	-0,0188	-0,0318	-0,0189	-0,0196
2025	-0,0123	-0,0121	-0,0269	-0,0266	-0,0309	-0,0275	-0,0162

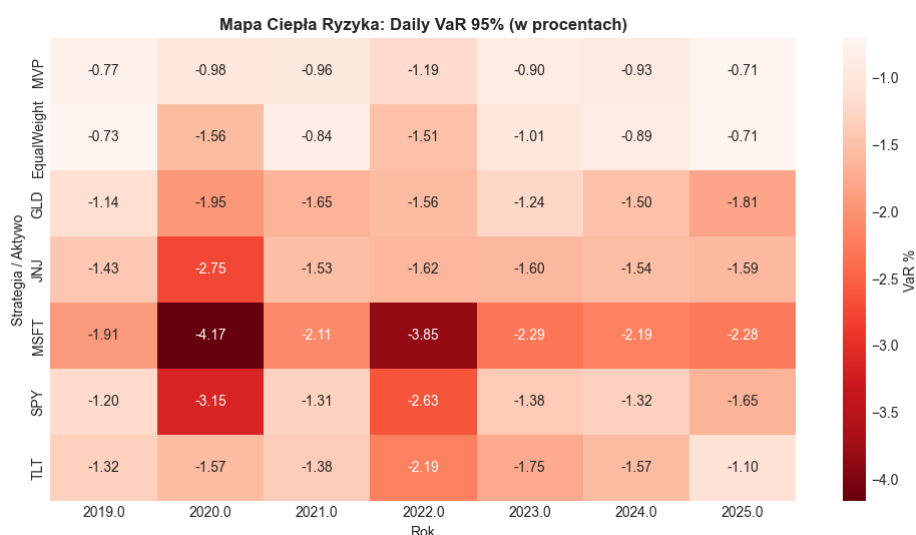
Portfel MVP wykazywał najmniej ujemne wartości ES, a nawet w kryzysowym 2020 roku jego średnia strata w najgorszych dniach wyniosła jedynie -1,9%. Z kolei akcje Microsoftu charakteryzowały się najwyższym poziomem ryzyka. W 2020 roku ES na poziomie -6,32% oznaczał, że w 5% najgorszych dni inwestor tracił średnio ponad 6% kapitału dziennie. Jest to wartość ponad trzykrotnie wyższa niż dla portfela MVP w tym samym czasie. Złoto

oraz TLT pełniły rolę stabilizatorów portfela, oferując zazwyczaj łagodniejszy ES, a w 2025 roku to TLT miało najniższe ryzyko ekstremalne wśród pojedynczych aktywów. Rok 2020 był okresem najwyższego ryzyka dla wszystkich pozycji, natomiast po nim obserwowano stopniową stabilizację i powrót ES do niższych poziomów.



Na wykresach porównano roczne stopy zwrotu oraz odchylenie standardowe poszczególnych aktywów. W latach 2019–2023 MSFT znajdował się na czele pod względem rocznych stóp zwrotu, jednocześnie charakteryzując się najwyższym poziomem odchylenia standardowego, które pozostawało najwyższe również w kolejnych latach. W późniejszym okresie nowym liderem stóp zwrotu stało się złoto (GLD), które odnotowało silny wzrost przy stosunkowo niewielkim zwiększeniu zmienności. Szczególnie interesujący był rok 2022, w którym większość akcji zanotowała ujemne stopy zwrotu, podczas gdy dodatnie wyniki osiągnęły jedynie złoto oraz JNJ.





Na wykresie przedstawiono dzienny VaR (95%) dla każdego portfela w poszczególnych latach badanego okresu. W analizowanym horyzoncie czasowym wyraźny wzrost ryzyka dla wszystkich portfeli odnotowano w latach 2020 oraz 2022, co można uzasadnić odpowiednio z wybuchem pandemii COVID-19 oraz wojną w Ukrainie. Analiza poszczególnych aktywów pokazuje, że MSFT charakteryzował się najgorszymi wynikami pod względem VaR w każdym roku. Z kolei portfel MVP wykazywał najniższy poziom ryzyka.

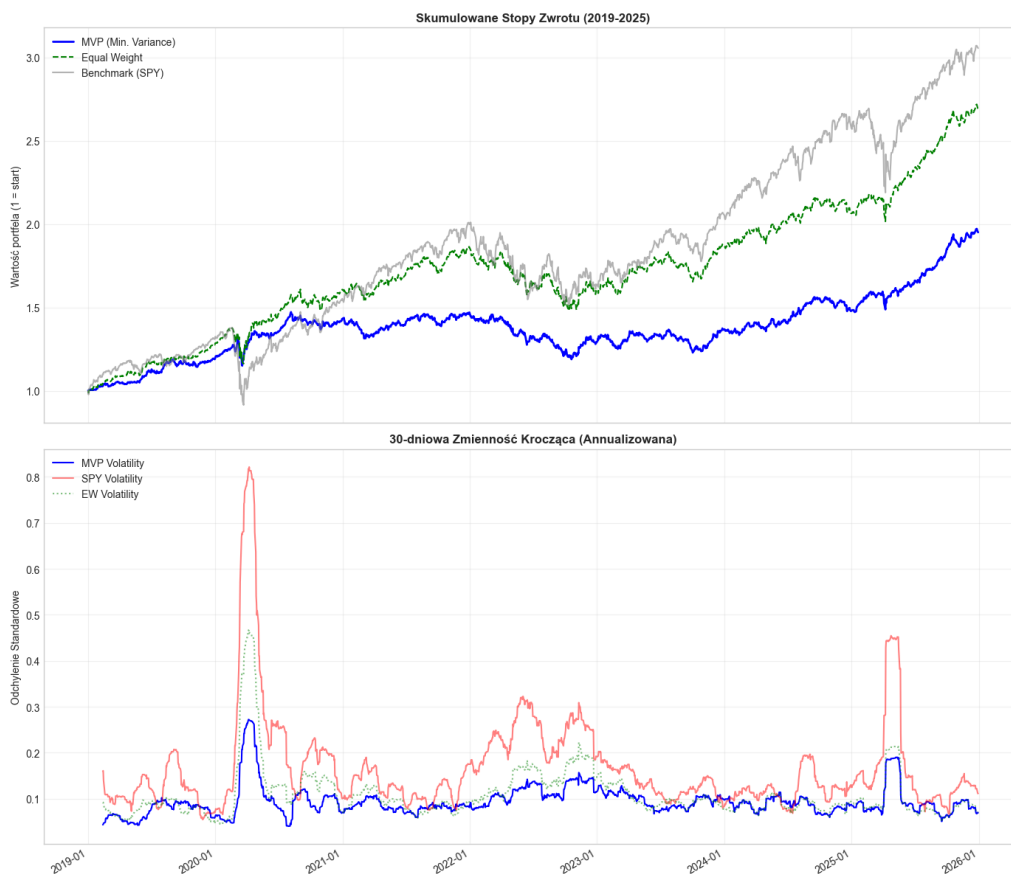
W podsumowaniu całego badanego okresu, dla każdego portfela oraz każdej stopy zwrotu, uwzględniono średnią roczną, odchylenie standardowe oraz dzienne miary ryzyka VaR i ES.

Tabela 6. Podsumowanie całego okresu

	Średnia	Odch. Stand.	Dzienny VaR (95%)	Dzienny ES (95%)
GLD	0,1831	0,1575	-0,0157	-0,0227
JNJ	0,1143	0,1922	-0,0164	-0,0274
MSFT	0,2745	0,2837	-0,0269	-0,0398
SPY	0,1797	0,1978	-0,0177	-0,0299
TLT	-0,0050	0,1647	-0,0164	-0,0223
MVP	0,1007	0,0989	-0,0097	-0,0137
Równoważony	0,1493	0,1217	-0,0108	-0,0172

Największe zyski osiągnęło MSFT, jednak towarzyszyło im najwyższe ryzyko. Spółka cechowała się największym odchyleniem standardowym oraz największym dziennym VaR. Kolejnym dobrze wypadającym aktywem było złoto (GLD), które uzyskało wysoką średnią stopę zwrotu przy umiarkowanej zmienności i relatywnie bezpiecznym poziomie VaR. Najgorzej w badanym okresie wypadło TLT, notując ujemną średnią stopę zwrotu przy stosunkowo wysokiej zmienności. Portfel MVP osiągnął najniższe odchylenie standardowe spośród wszystkich analizowanych pozycji, wyraźnie niższe nawet niż dla

najbezpieczniejszego pojedynczego aktywa, czyli GLD, co potwierdza skuteczność dywersyfikacji w redukcji ryzyka portfela. Dodatkowo dzienny VaR dla MVP wynosi jedynie -0,97%, a dzienny ES dla portfeli MVP oraz równoważonego jest znacznie niższy niż dla pojedynczych akcji, gdzie w przypadku MSFT ES sięga aż -3,98%.



Benchmark (SPY) osiągnął najwyższą skumulowaną stopę zwrotu (górny wykres), odbyło się to jednak kosztem ekstremalnej zmienności, która w krytycznym momencie 2020 roku przekroczyła poziom 80% (dolny wykres). Z kolei portfel MVP (niebieska linia) precyzyjnie zrealizował cel minimalizacji ryzyka, utrzymując systematycznie najniższe odchylenie standardowe i chroniąc kapitał przed gwałtownymi spadkami, co jednak w długim terminie przełożyło się na niższy wynik końcowy niż w przypadku bardziej agresywnych strategii.

## Wnioski

Przeprowadzona analiza potwierdza skuteczność konstrukcji portfela o minimalnej wariancji (MVP), który w badanym okresie osiągnął najniższe ryzyko oraz najniższe poziomy ryzyka ekstremalnego (VaR i ES) skutecznie chroniąc kapitał w okresach pogorszenia się stanu gospodarki. Interesujące okazały się wyniki dla 2022 roku. Był on swego rodzaju anomalią, w której korelacja między akcjami a obligacjami stała się dodatnia (można to zobaczyć na pierwszym wykresie). Tradycyjne portfele opierają się na

założeniu, że gdy akcje spadają, obligacje rosną. W 2022 r. oba te aktywa traciły jednocześnie.