



AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA IM. STANISŁAWA STASZICA W KRAKOWIE

Wydział Zarządzania

*Projekt EFID - Projekt 8A*

Autorzy: *Patrycja Piła, Mateusz Strojek, Julia Szutka, Magdalena Wnuk*

Kierunek studiów: *Informatyka i Ekonometria*

Prowadzący: *dr hab. Tomasz Wójtowicz*

Kraków, 2025

## 1. Cel projektu

Na podstawie wybranych danych, oszacowano parametry 3-równaniowego modelu VAR. Przeprowadzono ich wstępную analizę za pomocą różnorakich wykresów. Wybrano odpowiednią liczbę opóźnień za pomocą kryteriów informacyjnych, skonstruowano model oraz zinterpretowano oszacowane parametry modelu. Następnie, po weryfikacji modelu, zbadano przyczynowość pomiędzy poszczególnymi zmiennymi. Badanie przyczynowości powtórzono wykorzystując 2-równaniowe modele VAR opisujące zależność w każdej z par. Porównano uzyskane wyniki z wynikami z modelu 3-równaniowego. Na podstawie wyników przyczynowości, obliczono i skonstruowano funkcję odpowiedzi na impuls. Finalnie, przeprowadzono dekompozycję wariancji błędu prognozy.

## 2. Zmienne

W ramach projektu wykorzystano dane dotyczące rynku surowców energetycznych:

- **węgiel,**
- **ropa,**
- **gaz ziemny.**

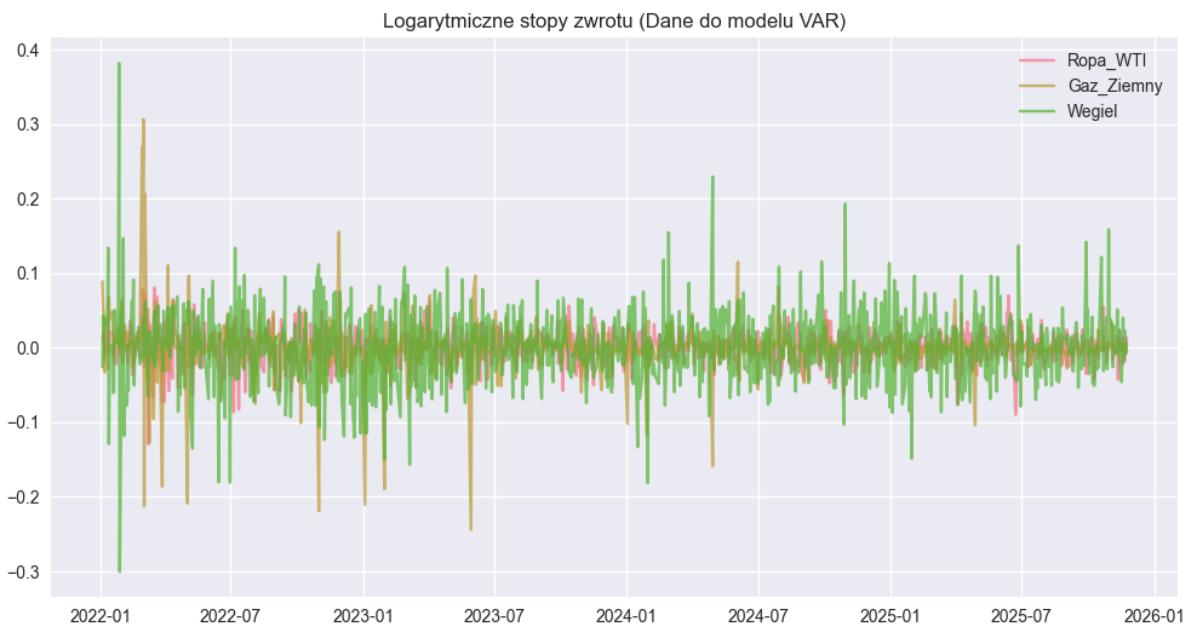
Analiza obejmowała okres od początku stycznia 2022 roku do 1 grudnia 2025 roku.

### Ceny instrumentów



Na wykresie widać wyraźnie odmienną skalę i dynamikę trzech surowców. Gaz ziemny wyróżnia się ekstremalnymi skokami cen na początku 2022 roku. Po tym okresie jego cena systematycznie spada i stabilizuje się na znacznie niższym poziomie. Ropa WTI jest znacznie stabilniejsza: po krótkim i delikatnym wybiciu na początku 2022 roku stopniowo wraca do bardziej typowego przedziału od około 70 do 90 USD i porusza się bez

dramatycznych odchyleń. Węgiel ma najniższy poziom cen i najmniejszą zmienność; jego notowania wyglądają niemal płasko w porównaniu z gazem i ropą.



Na przedstawionym wykresie, obrazującym logarytmiczne stopy zwrotu cen ropy, gazu ziemnego i węgla w czasie, widoczna jest duża zmienność cen surowców energetycznych, zwłaszcza na początku badanego okresu (przełom 2021/2022). Linia gazu ziemnego oraz węgla wykazują najbardziej ekstremalne, gwałtowne skoki i spadki. Stopa zwrotu ropy wydaje się być najbardziej skupiona wokół zera, charakteryzując się mniejszymi, wahaniem.

|            | <b>średnia</b> | <b>odchylenie</b> | <b>min</b> | <b>max</b> | <b>skośność</b> | <b>eksces</b> |
|------------|----------------|-------------------|------------|------------|-----------------|---------------|
| ropa       | -0,000256      | 0,023176          | -0,129267  | 0,080237   | -0,426240       | 1,836552      |
| gaz ziemny | -0,000206      | 0,033143          | -0,244091  | 0,306201   | 0,081901        | 28,061530     |
| węgiel     | 0,000194       | 0,050281          | -0,300480  | 0,381727   | 0,267480        | 5,319280      |

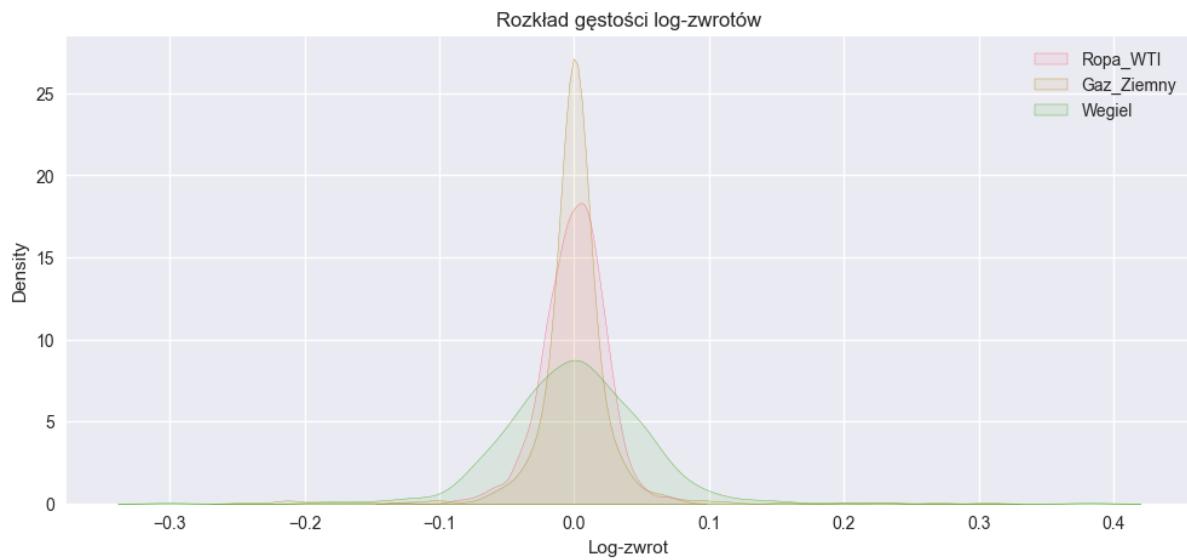
Średnie log-stopy zwrotu wszystkich trzech surowców są bardzo bliskie zeru. Najniższą zmienność ma ropa WTI, a najwyższą węgiel, co widać po odchyleniu standardowym (0,050281). Gaz ziemny plasuje się pośrodku.

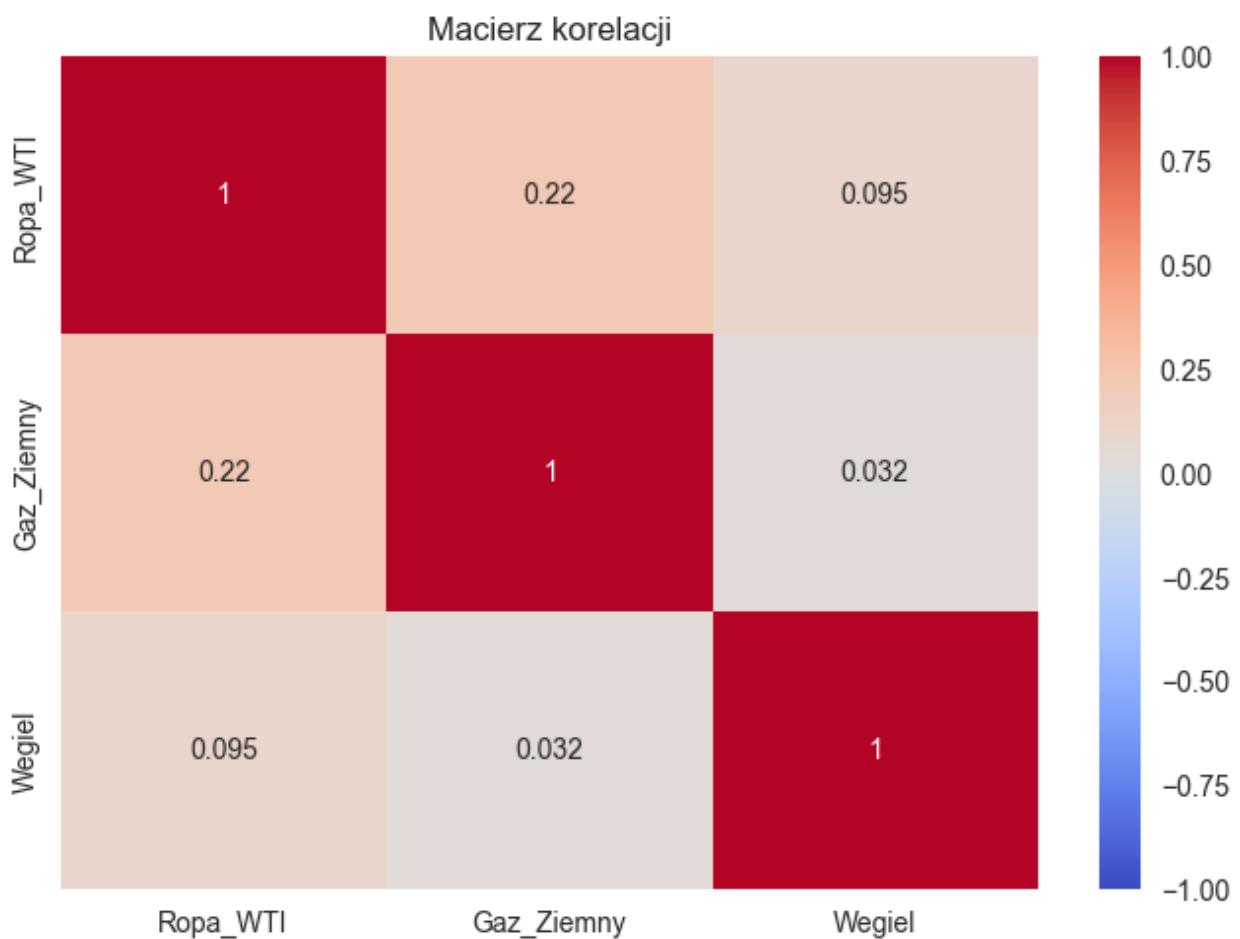
Ropa ma relatywnie niewielkie ekstremy, co potwierdza jej stabilniejsze zachowanie. Gaz ziemny notuje dużo większe jednorazowe skoki - zarówno wzrosty, jak i spadki. Węgiel również ma duże zmiany dzienne. W efekcie gaz i węgiel wyraźnie dominują pod względem ekstremów, a ropa pozostaje “najspokojniejszym” z analizowanych surowców.

Skośność jest niewielka we wszystkich trzech przypadkach: ropa charakteryzuje się lekką skośnością ujemną, co wskazuje na nieco częstsze lub silniejsze spadki, natomiast

gaz i węgiel wykazują delikatną skośność dodatnią, sugerując minimalną przewagę ruchów wzrostowych nad spadkowymi.

Wysoki eksces (częstotliwość pojawiania się dużych, niestandardowych zmian) gazu świadczy o skrajnych, rzadkich skokach cen, co dobrze ilustruje wykres gęstości: bardzo wąski i wysoki środek połączony z wyraźnie wydłużonymi ogonami. Węgiel również charakteryzuje się podwyższonym ekscesem - jego rozkład jest szerszy, a ogony opadają wolniej niż w przypadku rozkładu normalnego, co potwierdza obecność większych odchyleń. Ropa natomiast ma najniższy eksces i rozkład najbardziej przypominający rozkład normalny.





Ropa i gaz mają umiarkowaną korelację dodatnią (0,22), natomiast zależność między ropą a węglem oraz gazem a węglem jest bardzo mała. Oznacza to, że rynki te poruszają się w dużej mierze niezależnie w krótkim okresie, co może wyjaśniać również stosunkowo słabe zależności obserwowane później w modelu VAR.

### 3. Test stacjonarności

Przed oszacowaniem modelu VAR konieczne jest sprawdzenie stacjonarności szeregów czasowych. W tym celu zastosowano test ADF gdzie:

- Hipoteza zerowa: szereg czasowy jest niestacjonarny,
- Hipoteza alternatywna: szereg czasowy jest stacjonarny.

|            | statystyka ADF | wartość p |
|------------|----------------|-----------|
| ropa       | -12,7680       | 0,0000    |
| gaz ziemny | -7,8848        | 0,0000    |
| węgiel     | -35,7944       | 0,0000    |

Przeprowadzony test potwierdził jednoznacznie stacjonarność wszystkich analizowanych szeregów czasowych. Wartości p w teście ADF dla wszystkich zmiennych były znacznie poniżej poziomu istotności 0,05, co oznacza odrzucenie hipotezy zerowej

o niestacjonarności. Uzyskane wyniki umożliwiają przejście do kolejnego etapu analizy i oszacowania modelu VAR na poziomach szeregów.

## 4. Estymacja modelu VAR

### 4.1. Wybór rzędu opóźnień

Kluczowym krokiem w specyfikacji modelu VAR jest określenie optymalnej liczby opóźnień. W tym celu zastosowano cztery kryteria informacyjne: AIC, BIC, FPE oraz HQIC. Każde z tych kryteriów ocenia jakość modelu, uwzględniając zarówno dopasowanie do danych, jak i złożoność modelu. Na podstawie analizy wszystkich kryteriów jako optymalną liczbę opóźnień wybrano 2, ponieważ dwa z nich, w tym AIC, wskazywały właśnie na ten rząd opóźnień.

### 4.2. Interpretacja wyników

W równaniu dla ropy jedynym istotnym czynnikiem jest wpływ gazu sprzed dwóch dni ( $p = 0,050$ ), który dodatnio oddziałuje na bieżący zwrot ropy; wartość oszacowanego współczynnika wynosi 0,045. Pozostałe opóźnienia są nieistotne.

W równaniu dla gazu dominuje wyraźna autokorelacja drugiego rzędu ( $p = 0,001$ ), co odzwierciedla charakterystyczne dla tego rynku przedłużanie ruchów cenowych. Wpływ ropy i węgla z opóźnieniem dwóch dni jestauważalny, lecz znacznie słabszy ( $p = 0,085$  i  $p = 0,099$ ).

W równaniu dla węgla kluczowe znaczenie ma silna autoregresja z pierwszego opóźnienia ( $p = 0,000$ ), potwierdzająca szybki powrót do średniej po większych zmianach cen. Dodatni i istotny wpływ gazu sprzed dwóch dni ( $p = 0,023$ ) sugeruje, że wzrost cen gazu zwiększa presję popytową na węgiel. Wpływ ropy jest słabszy i na granicy istotności ( $p = 0,052$ ), co oznacza, że reakcja węgla na sygnały z innych rynków energetycznych jest opóźniona i mniej wyraźna.

Interpretacja wartości  $p$  jednakże może być zawodna, gdy występuje heteroskedastyczność.

### 4.3. Test autokorelacji

W celu sprawdzenia założenia o braku autokorelacji w resztach modelu zastosowano test Ljung-Boxa gdzie:

- $H_0$ : brak autokorelacji
- $H_1$ : w resztach występuje autokorelacja

Dla wartości  $p < 0,05$  odrzucamy  $H_0$ .

|            | <b>statystyka Ljung-Box</b> | <b>wartość p</b> |
|------------|-----------------------------|------------------|
| ropa       | 23,729836                   | 0,008351         |
| gaz ziemny | 21,654472                   | 0,016965         |
| węgiel     | 9,026075                    | 0,529631         |

Test wykazał, że dla ropy i gazu ziemnego hipoteza o braku autokorelacji reszt została odrzucona co oznacza, że w resztach tych modeli występuje istotna zależność czasowa. Odmienna sytuacja występuje w przypadku węgla, gdzie wysoka wartość p nie daje podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej, co wskazuje na poprawne odwzorowanie struktury zależności przez model. W związku z wykrytą autokorelacją reszt dla ropy i gazu ziemnego oraz możliwością występowania zmiennej wariancji, postanowiono przeprowadzić dodatkowo test ARCH w celu zbadania obecności efektu heteroskedastyczności warunkowej.

#### 4.4. Test normalności

W celu weryfikacji założeń modelu VAR przeprowadzono testy normalności składnika losowego. Zastosowano jednowymiarowe testy Jarque-Bera dla każdej zmiennej osobno, z hipotezami:

- $H_0$ : Reszty danej zmiennej mają rozkład normalny
- $H_1$ : Reszty danej zmiennej nie mają rozkładu normalnego

|            | <b>statystyka Jarque-Bera</b> | <b>wartość p</b> |
|------------|-------------------------------|------------------|
| ropa       | 151,83                        | 0,0000           |
| gaz ziemny | 28687,67                      | 0,0000           |
| węgiel     | 1085,55                       | 0,0000           |

Wszystkie jednowymiarowe testy wykazały bardzo niskie wartości p, prowadząc do odrzucenia hipotezy zerowej. Uzyskane wyniki świadczą o braku normalności rozkładu reszt.

#### 4.5. Test efektu ARCH

Przeprowadzono Engle's test, gdzie:

- $H_0$ : Brak efektów ARCH
- $H_1$ : Występują efekty ARCH

|            | <b>statystyka LM</b> | <b>wartość p</b> |
|------------|----------------------|------------------|
| ropa       | 104,44               | 0,0000           |
| gaz ziemny | 210,02               | 0,0000           |
| węgiel     | 58,52                | 0,0000           |

Dla wszystkich trzech zmiennych odrzucono hipotezę zerową o braku efektów ARCH, co oznacza, że wariancja reszt w czasie nie jest stała, lecz zmienna i zależna od przeszłych realizacji, a zmienność wykazuje charakter klastrowy. Wskazuje to na niespełnienie przez model VAR założenia o homoskedastyczności błędów (efekt ARCH), co może

prowadzić do zaburzenia błędów standardowych estymatorów oraz do błędnych wnioskowań statystycznych.

Aby sprawdzić, czy wskazanym byłoby zastosowanie modelu VAR-GARCH, zbudowano dla reszt z każdego równania model GARCH i sprawdzono, czy dla reszt standaryzowanych efekt ARCH zanika.

| Zmienna    | Wartość p | Wniosek   |
|------------|-----------|-----------|
| Ropa_WTI   | 0,3955    | Brak ARCH |
| Gaz_Ziemny | 0,9975    | Brak ARCH |
| Węgiel     | 0,9623    | Brak ARCH |

Wysokie wartości p dla wszystkich trzech zmiennych wskazują, że po estymacji modeli GARCH w resztach standaryzowanych nie występują już efekty ARCH. Oznacza to, że modele GARCH skutecznie uchwyciły zmienność warunkową obecną w pierwotnych resztach. Z tego powodu, warto byłoby skorzystać z modelu VAR-GARCH, jednakże w Pythonie jest to bardzo trudne do implementacji.

## 5. Test przyczynowości Grangera

Test przyczynowości Grangera służy do oceny, czy przeszłe wartości jednej zmiennej X pomagają przewidywać wartości innej zmiennej Y a ponad to, co wynika z własnej historii Y. Przyczynowość Grangera odnosi się wyłącznie do zależności czasowych - zmienna X jest uznawana za przyczynę Grangera Y tylko wtedy, gdy jej wcześniejsze wartości poprawiają jakość prognozy Y.

Hipotezy są następujące:

- **H0:** X nie jest przyczyną Grangera Y (opóźnienia X nie poprawiają dopasowania modelu),
- **H1:** X jest przyczyną Grangera Y.

Do testu przyczynowości Grangera wykorzystano funkcję `get_robust_granger_pvalue`, estymującą model OLS z odpornymi błędami standardowymi typu HC0, co umożliwia wiarygodne wyznaczanie wartości p w warunkach naruszenia klasycznych założeń.

Dane finansowe często wykazują heteroskedastyczność oraz zmienność warunkową (efekt ARCH), co potwierdziły również przeprowadzone testy dla reszt modelu VAR. W takich sytuacjach błędy standardowe oparte na klasycznym założeniu stałej wariancji prowadziłyby do zанизonych lub zawyżonych wartości p, a tym samym do błędnych wniosków o przyczynowość.

Zastosowanie estymatora HC0, czyli odpornych błędów standardowych korygujących macierz wariancji–kowariancji w obecności heteroskedastyczności, pozwala uzyskać

stabilniejsze i metodologicznie poprawne wartości p w teście Grangera, a tym samym bardziej wiarygodne wnioski dotyczące zależności pomiędzy zmiennymi.

| <b>Relacja</b>       | <b>Wartość p<br/>(model 3-zmienny)</b> | <b>Wartość p<br/>(model 2-zmienny)</b> |
|----------------------|--|--|
| Gaz_Ziemny->Ropa_WTI | 0,337                                  | 0,7652                                 |
| Ropa_WTI->Gaz_Ziemny | 0,208                                  | 0,1176                                 |
| Wegiel->Ropa_WTI     | 0,1376                                 | 0,1353                                 |
| Ropa_WTI->Wegiel     | 0,0447                                 | 0,0933                                 |
| Wegiel->Gaz_Ziemny   | 0,1538                                 | 0,0911                                 |
| Gaz_Ziemny->Wegiel   | 0,0606                                 | 0,0959                                 |

Test przyczynowości Grangera został przeprowadzony zarówno w pełnym, trzymiennym modelu VAR, jak i w oddzielnych modelach dwuzmiennych dla każdej z par zmiennych. Celem tego porównania było ustalenie, czy wnioski dotyczące zależności predykcyjnych pomiędzy rynkami energetycznymi są stabilne względem specyfikacji modelu oraz czy pominięcie jednej zmiennej wpływa na ocenę przyczynowości.

W modelu trzymiennym uzyskano tylko jedną statystycznie istotną relację: **Ropa\_WTI jest przyczyną w sensie Grangera do zmian cen węgla (p = 0,0447)**. Oznacza to, że przeszłe zmiany cen ropy zawierają dodatkową informację pozwalającą poprawić prognozę zmian cen węgla, pod warunkiem że w modelu uwzględniony jest również gaz ziemny. Relacja od gazu ziemnego do węgla ( $p = 0,0606$ ) znajduje się na granicy istotności, co sugeruje słaby, potencjalny efekt predykcyjny, ale nie spełnia formalnych kryteriów istotności statystycznej. Pozostałe kierunki zależności nie osiągnęły poziomu istotności.

W modelu dwuzmiennym w żadnej z par nie stwierdzono istotnej przyczynowości przy standardowym poziomie istotności 0,05. Co istotne, relacja od ropy WTI do węgla, która była istotna w modelu trzymiennym, traci istotność po usunięciu gazu z systemu. Wskazuje to, że oddziaływanie ropy na węgiel ujawnia się dopiero wówczas, gdy kontrolujemy wpływ rynku gazu, a zależności na rynku energii mają charakter wielowymiarowy, a nie jedynie dwustronny. Z kolei potencjalne zależności pomiędzy węglem i gazem, które w modelach dwuzmiennych były bliskie istotności, w modelu trzymiennym wyraźnie słabną, co sugeruje, że ropa przejmuje część wspólnej zmienności tych surowców.

## 6. Funkcja odpowiedzi na impuls

Funkcja odpowiedzi na impuls (IRF) mierzy dynamiczny wpływ jednostkowego szoku w zmiennej j na oczekiwana wartość zmiennej i w przyszłym okresie h, przy założeniu, że wszystkie inne szoki w chwili t są równe zero.

Model VAR można przedstawić w nieskończonej postaci średniej ruchomej (MA( $\infty$ )):

$$X_t = \mu + \sum_{i=0}^{\infty} \Psi_i \varepsilon_{t-i}$$

gdzie:

- $\mathbf{X}_t$  – wektor zmiennych w czasie t,
- $\mu$  – wektor stałych,
- $\Psi_i$  – macierze współczynników MA,
- $\varepsilon_t$  – wektor skorelowanych szoków.

Funkcja odpowiedzi na nieskorelowany szok  $\varepsilon_{j,t}$  w zmiennej i w horyzoncie  $h$  jest zdefiniowana jako pochodna cząstkowa:

$$IRF_{ij}(h) = \frac{\partial X_{i,t+h}}{\partial \varepsilon_{j,t}} = [\Psi_h]_{ij}$$

W projekcie zastosowano ortogonalizację (dekompozycję Cholesky'ego), aby uzyskać zestaw nieskorelowanych szoków  $\mathbf{u}_t$ .

Relacja między skorelowanymi a nieskorelowanymi szokami jest następująca:

$$\varepsilon_t = P u_t$$

gdzie:

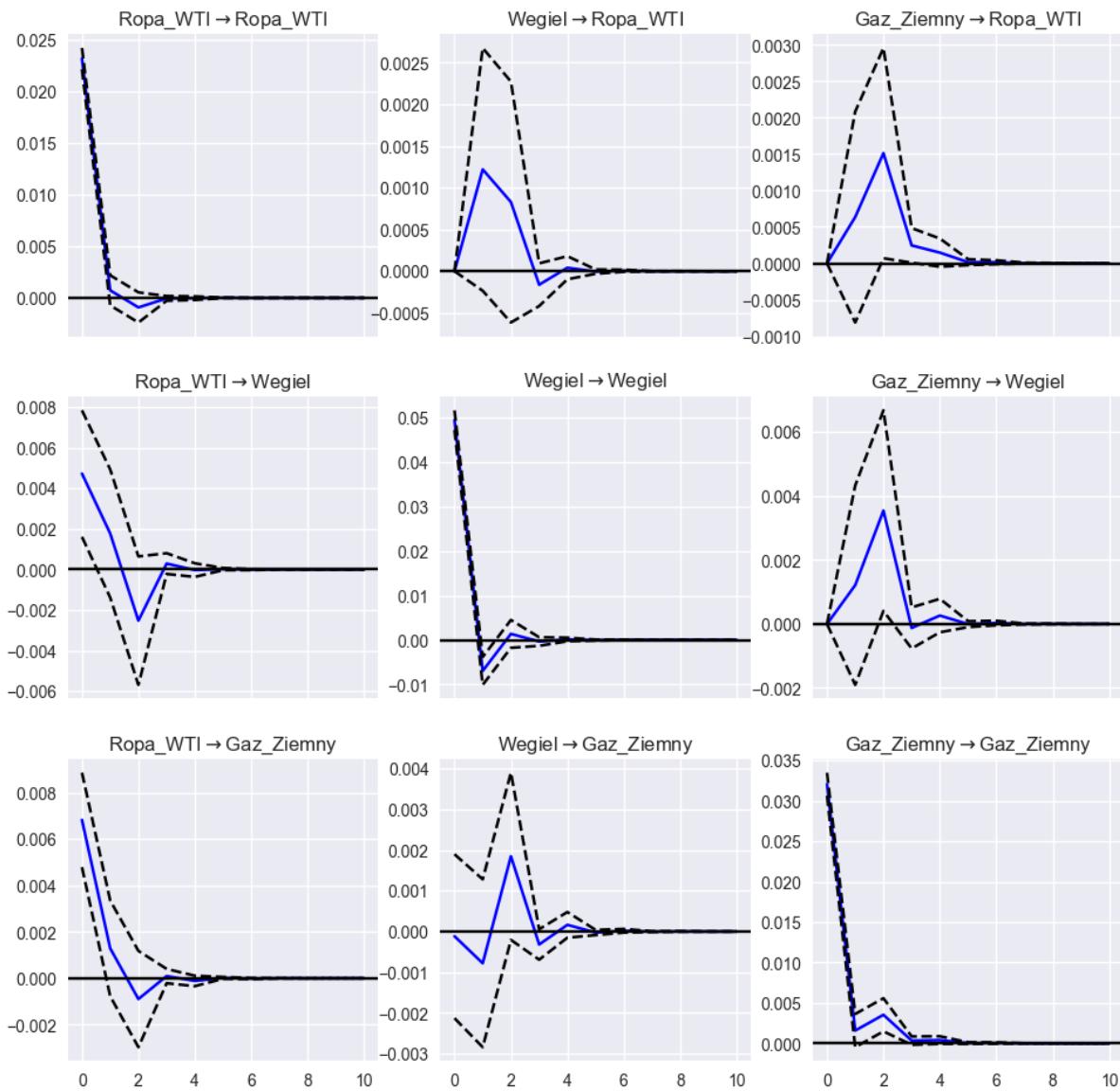
- $\mathbf{u}_t$  – wektor nieskorelowanych szoków, dla których  $\text{cov}(\mathbf{u}_t) = I$ ,
- $P$  – macierz ortogonalizacji, spełniająca  $P \cdot P^T = \Sigma$ .

Wtedy funkcja odpowiedzi na nieskorelowany (czysty) szok  $u_{j,t}$  przyjmuje postać:

$$IRF_{ij}^{ort}(h) = [\Psi_h P]_{ij}$$

Kolejność zmiennych do dekompozycji Cholesky'ego wybrano na podstawie testów przyczynowości Grangera. Jedyną istotną przyczynowością (dla modelu 3-zmiennego) okazała się przyczynowość ropy na węgiel. Na podstawie tego faktu, wybrano następującą kolejność: ropa WTI -> węgiel -> gaz ziemny.

Reakcja na impuls (Kolejność Choleskiego: Ropa\_WTI, Węgiel, Gaz\_Ziemny)



Prezentowane wykresy funkcji reakcji na impuls wskazują na silne i natychmiastowe pozytywne powiązania między ropą WTI, węglem i gazem ziemnym, z reakcjami zanikającymi zwykle w ciągu 3-4 okresów. Najważniejsze i najciekawsze zależności widać w reakcjach między surowcami, gdzie niemal każdy szok w jednym surowcu prowadzi do wzrostu cen pozostałych. Na przykład, gaz ziemny  $\rightarrow$  węgiel pokazuje gwałtowny i istotny wzrost ceny węgla po szoku gazu, co sugeruje szybką substytucję lub powiązanie kosztowe. Interesująca jest również opóźniona, pozytywna reakcja węgiel  $\rightarrow$  gaz ziemny (szczyt w okresie 2), sugerująca wolniejsze przenoszenie szoku z rynku węgla na rynek gazu.

## 7. Dekompozycja wariancji

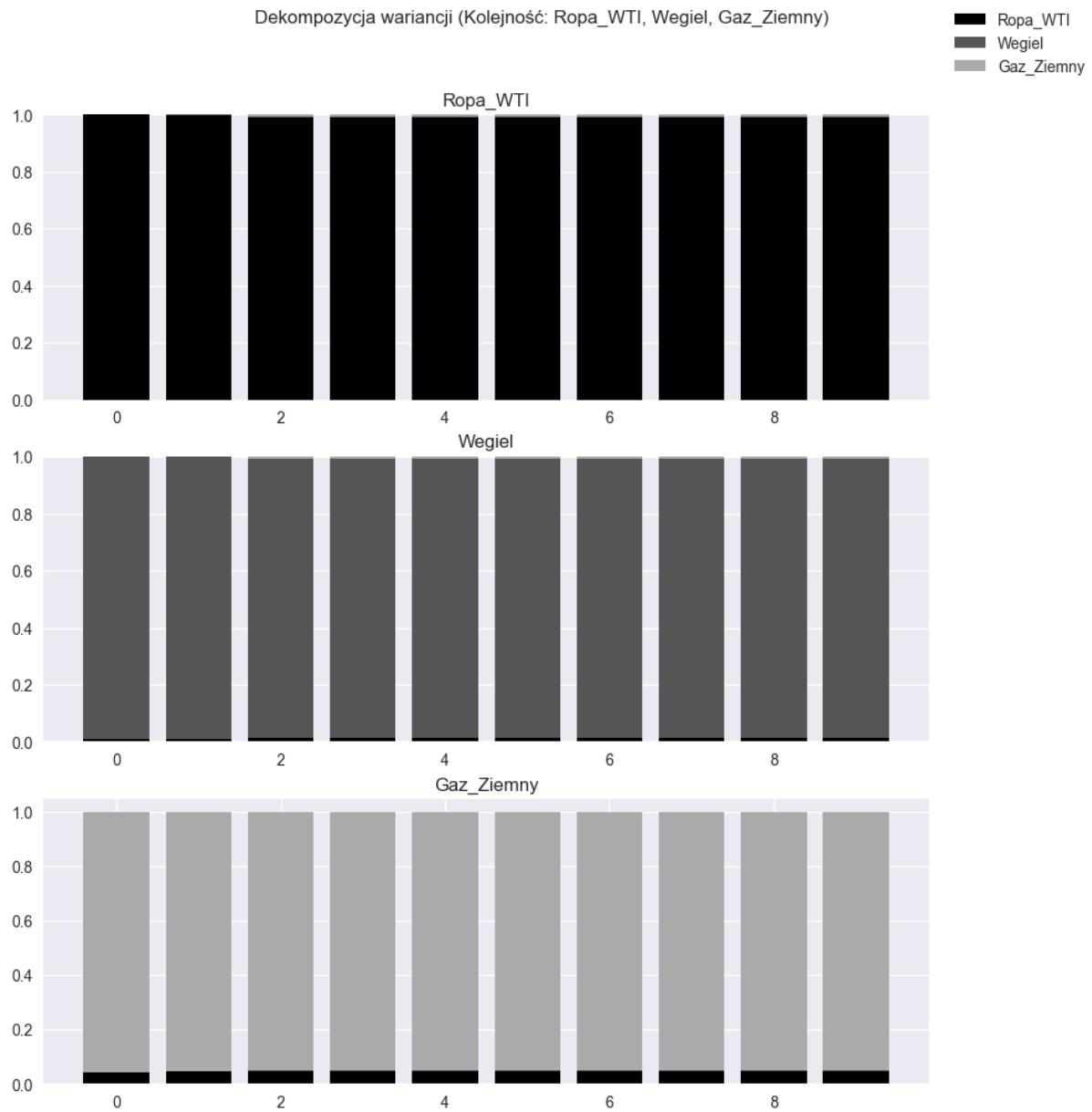
Dekompozycja wariancji błędu prognozy określa, jaka część wariancji błędu prognozy zmiennej  $x_i$  w horyzoncie  $h$  wynika z szoku pochodzącego z innej zmiennej  $x_j$ :

$$\theta_{ij}(h) = \frac{\sum_{k=0}^{h-1} ([\Psi_k P]_{ij})^2}{\sum_{k=0}^{h-1} [\Psi_k \Sigma \Psi_k^T]_{ii}}$$

Wykorzystuje ona współczynniki odpowiedzi impulsowej, aby rozdzielić całkowitą zmienność na wkłady poszczególnych czynników. Otrzymane udziały są często normalizowane tak, aby:

$$\sum_{j=1}^n \theta_{ij}(h) = 1$$

FEVD stanowi podstawę analizy *volatility spillovers*, ponieważ pokazuje, jak silnie szoki w jednej zmiennej przenoszą się na zmienność pozostałych.



Przedstawione wykresy wskazują na bardzo silną niezależność badanych rynków, ponieważ wariancja błędu prognozy dla każdego surowca jest wyjaśniana niemal w całości przez jego własne szoki. W przypadku Ropy WTI oraz Węgla obserwujemy niemal stuoprocentową dominację czynników własnych, co obrazują jednolite słupki w kolorach przypisanych tym zmiennym. Jedynie w strukturze wariancji Gazu Ziemnego widoczny jest niewielki, lecz stały wpływ cen Ropy WTI, zaznaczony czarnym paskiem u dołu trzeciego wykresu. Brak znaczącego mieszania się kolorów w poszczególnych panelach dowodzi, że w analizowanym okresie nie występują istotne efekty przenoszenia zmienności pomiędzy tymi nośnikami energii.

## 8. Wnioski

Przeprowadzona analiza wykazała, że badane rynki surowców energetycznych charakteryzują się znaczną niezależnością w dość krótkim okresie, mimo iż funkcjonują w ramach tego samego sektora energetycznego.

Model VAR(2) okazał się adekwatny według kryteriów informacyjnych. Wszystkie szeregi są stacjonarne, co potwierdziły testy ADF. Jednakże model narusza założenia klasyczne, wykryto autokorelację reszt dla ropy i gazu, brak normalności rozkładu oraz silne efekty ARCH we wszystkich równaniach. Zastosowanie modeli GARCH do reszt skutecznie wyeliminowało heteroskedastyczność warunkową, co wskazuje, że właściwszym podejściem byłby model VAR-GARCH.

Analiza przyczynowości Grangera z wykorzystaniem odpornych błędów standardowych HC0 wykazała istnienie tylko jednej istotnej zależności: zmiany cen ropy WTI wpływają na zmiany cen węgla ( $p = 0,0447$ ). Zależność ta pojawia się wyłącznie w modelu trzymiennym i znika w modelach dwuzmiennych, co potwierdza, że struktura oddziaływań na rynku energii ma charakter wielowymiarowy. Pozostałe kierunki zależności nie osiągnęły istotności statystycznej, przy czym relacja od gazu ziemnego do węgla znajduje się na granicy istotności ( $p = 0,0606$ ).

Dekompozycja wariancji błędu prognozy wskazuje, że zmienność każdego z analizowanych surowców jest niemal w całości determinowana przez jego własne szoki (brak wyraźnych efektów przenoszenia zmienności między rynkami świadczy o ich wysokim stopniu autonomii w badanym okresie). Jedynym wyjątkiem jest niewielki i stabilny udział ropy WTI w wyjaśnianiu zmienności gazu ziemnego. Wyniki sugerują, że prognozy dla poszczególnych surowców powinny opierać się przede wszystkim na ich własnej historii cenowej.