



**AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA IM. STANISŁAWA STASZICA W KRAKOWIE**  
**Wydział Zarządzania**

## Projekt EFiD – Projekt 3B.

Autorzy:  
Kierunek studiów:  
Prowadzący:

*Patrycja Piła, Mateusz Strojek, Julia Szutka, Magdalena Wnuk*  
*Informatyka i Ekonometria*  
*dr hab. Tomasz Wójtowicz*

Kraków, 2025

## Spis treści

Polecenie zadania.....	3
Wstęp .....	3
Parametry .....	3
Formuły w komórkach .....	3
Wyniki .....	5
Założenia modelu .....	5
Wzór na wartość oczekiwaną.....	6
Wzór na wariancję .....	6
Wzór na autokorelację k-tego rzędu .....	7
Obliczenie $P(X_t > 0)$ .....	7
Wnioski .....	7

## Polecenie zadania

**Część B** Dla podanego modelu ARMA wyprowadzić wzory na wartość oczekiwaną, wariancję i współczynniki autokorelacji aż do rzędu 10. Uzupełnić arkusz tak, by obliczał podane wielkości na podstawie oszacowanych parametrów modelu. Obliczyć  $P(X_t > 0)$ . Wyjaśnić zawartość poszczególnych komórek arkusza.

**Model: ARMA(2,0)**

## Wstęp

Celem niniejszego zadania jest przygotowanie arkusza kalkulacyjnego w Excelu umożliwiającego estymację parametrów modelu ARMA(2,0) metodą warunkowej największej wiarygodności. Model ten opisuje zależność wartości zmiennej czasowej od jej dwóch poprzednich opóźnień, co pozwala uchwycić dynamikę i strukturę autokorelacji w danych.

Metoda warunkowej największej wiarygodności polega na maksymalizacji funkcji wiarygodności, przy założeniu znanych początkowych wartości procesu.

Dodatkowo wyprowadzono wzory na wartość oczekiwaną, wariancję i współczynniki autokorelacji do rzędu 10. Obliczono również  $P(X_t > 0)$ .

## Parametry

- $T$  - liczba obserwacji
- $\phi_0$  - wyraz wolny
- $\phi_1$  - parametr dla pierwszego opóźnienia
- $\phi_2$  - parametr dla drugiego opóźnienia
- $\sigma^2$  – wariancja składnika losowego
- $p$  – rząd opóźnień

## Formuły w komórkach

Na podstawie szeregu czasowego  $X_t$  utworzono dwie kolumny z jego opóźnieniami:

- $X_{t-1}$
- $X_{t-2}$

Następnie obliczono wartość teoretyczną zmiennej, oznaczoną jako **x\_hat**. Została ona wyznaczona ze wzoru:

$$X\_hat = \phi_0 + \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2}$$

Następnie obliczono reszty modelu:

$$\varepsilon_t = X_t - \hat{X}_t$$

Dla każdej obserwacji obliczono składnik funkcji log-wiarygodności w postaci

$$\text{likelihood sig} = \varepsilon_t^2 / (2\sigma^2)$$

## Funkcja celu

Funkcja log-wiarygodności jest podana wzorem:

$$\begin{aligned} \log f_{Y_T, Y_{T-1}, \dots, Y_{p+1} | Y_p, \dots, Y_1}(y_T, y_{T-1}, \dots, y_{p+1} | y_p, \dots, y_1; \theta) \\ = -\frac{T-p}{2} \log(2\pi) - \frac{T-p}{2} \log(\sigma^2) \\ - \sum_{t=p+1}^T \frac{(y_t - c - \phi_1 y_{t-1} - \phi_2 y_{t-2} - \dots - \phi_p y_{t-p})^2}{2\sigma^2}. \end{aligned} \quad [5.3.9]$$

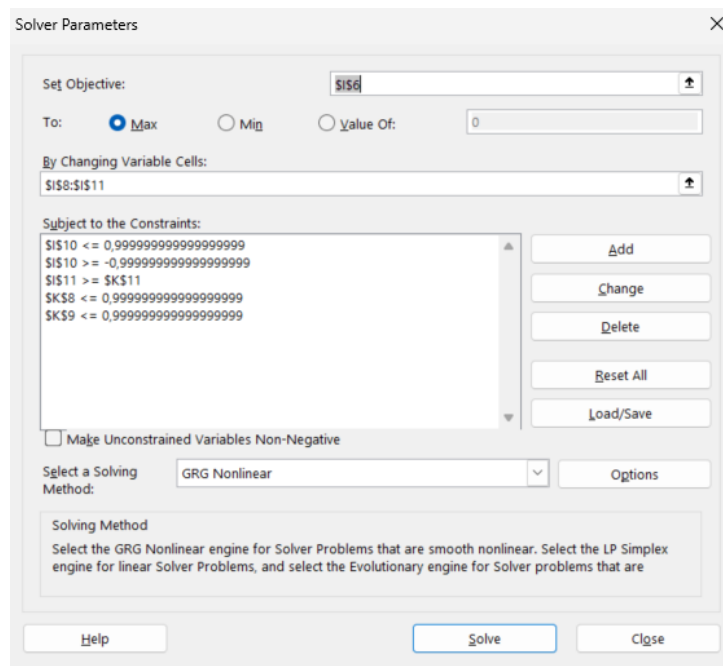
Rysunek 1 Wzór z książki „Time Series Analysis” James D. Hamilton 1994 r.

Po obliczeniu dwóch pomocniczych składników funkcji log-wiarygodności, zostały one **połączone w jedną formułę**, aby uzyskać końcową wartość logarytmu funkcji wiarygodności dla całego modelu. Wartości te znajdują się w zakresie I4:I6.

$-(T-p)/2 * \log(2\pi)$	-96,48854599
$-(T-p)/2 * \log(\sigma^2)$	400,7562039
Funkcja celu	251,7676039

Za pomocą dodatku Solver przeprowadzono proces maksymalizacji funkcji celu, odpowiadającej logarytmowi funkcji wiarygodności modelu. Optymalizacja została wykonana względem czterech parametrów modelu:  $\phi_0, \phi_1, \phi_2, \sigma^2$ . Dla parametru  $\sigma^2$  wprowadzono ograniczenie dolne równe 0,0001, co zapewnia spełnienie warunku dodatniości wariancji składnika losowego (wariancja musi być większa od zera). Dodatkowo użyto poniższych ograniczeń na parametry  $\phi_1, \phi_2$  które zapewnią stacjonarność modelu ARMA(2,0):

$$\begin{aligned} |\phi_2| &< 1, \\ \phi_1 + \phi_2 &< 1, \\ \phi_2 - \phi_1 &< 1. \end{aligned}$$



## Wyniki

Wyniki uzyskane za pomocą warunkowej metody największej wiarygodności, są zgodne z metodą najmniejszych kwadratów. OLS został obliczony w arkuszu „Regresja”.

Parametr	Wartość
$\phi_0$	-0,003407035
$\phi_1$	-0,140986288
$\phi_2$	-0,144095741
$\sigma^2$	0,000483987

## Założenia modelu

Model ARMA(2,0) (czyli AR(2)) można zapisać w postaci:

$$X_t = \varphi_0 + \varphi_1 X_{t-1} + \varphi_2 X_{t-2} + \varepsilon_t$$

gdzie  $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$  jest składnikiem losowym o rozkładzie normalnym.

Aby proces AR(2) był stacjonarny, jego parametry muszą spełniać warunki:

$$\begin{aligned} |\varphi_2| &< 1, \\ \varphi_1 + \varphi_2 &< 1, \\ \varphi_2 - \varphi_1 &< 1. \end{aligned}$$

Dzięki temu wartości oczekiwane, wariancje i kowariancje nie zależą od czasu  $t$ .

## Wzór na wartość oczekiwaną

Biorąc wartość oczekiwaną z obu stron równania modelu, otrzymano:

$$E(X_t) = \varphi_0 + \varphi_1 E(X_{t-1}) + \varphi_2 E(X_{t-2})$$

Ponieważ  $X_t$  jest stacjonarnym procesem to  $E(X_t) = E(X_{t-1}) = E(X_{t-2}) = \mu$ , więc:

$$\mu = \varphi_0 + (\varphi_1 + \varphi_2)\mu,$$

stąd wartość oczekiwana wynosi:

$$E(X_t) = \mu = \frac{\varphi_0}{1 - \varphi_1 - \varphi_2}$$

Wartość oczekiwana została obliczona w arkuszu kalkulacyjnym w komórce **L2** i wyniosła ona -0,0027.

## Wzór na wariancję

Wariancję wyznaczono z równania:

$$D^2(X_t) = D^2(\varphi_1 X_{t-1} + \varphi_2 X_{t-2} + \varepsilon_t).$$

Po rozwinięciu i wykorzystaniu własności kowariancji otrzymujemy:

$$D^2(X_t) = \varphi_1^2 D^2(X_{t-1}) + \varphi_2^2 D^2(X_{t-2}) + 2\varphi_1\varphi_2 \text{Cov}(X_{t-1}, X_{t-2}) + D^2(\varepsilon_t).$$

Aby wyznaczyć wariancję, obliczono kowariancję  $\text{Cov}(X_{t-1}, X_{t-2})$ , która jest równa  $\text{Cov}(X_t, X_{t-1})$  gdyż  $X_t$  jest stacjonarny:

$$\text{Cov}(X_t, X_{t-1}) = \text{Cov}(\varphi_1 X_{t-1} + \varphi_2 X_{t-2} + \varepsilon_t, X_{t-1}).$$

Uwzględniając niezależność  $\varepsilon_t$  i  $X_{t-1}$  otrzymano:

$$\text{Cov}(X_t, X_{t-1}) = \varphi_1 \text{Var}(X_{t-1}) + \varphi_2 \text{Cov}(X_{t-2}, X_{t-1}).$$

W procesie stacjonarnym  $\text{Var}(X_{t-1}) = \sigma_x^2$  i  $\text{Cov}(X_{t-2}, X_{t-1}) = \gamma_1$ , zatem:

$$\gamma_1 = \varphi_1 \sigma_x^2 + \varphi_2 \gamma_1.$$

Ponieważ proces jest stacjonarny,  $D^2(X_{t-1}) = D^2(X_{t-2}) = D^2(X_t) = \sigma_x^2$ , otrzymano:

$$\sigma_x^2(1 - \varphi_1^2 - \varphi_2^2 - 2\varphi_1\varphi_2\rho_2) = \sigma^2.$$

Po przekształceniach uzyskano:

$$D^2(X_t) = \frac{\sigma^2(1 - \varphi_2)}{(1 - \varphi_2)(1 - \varphi_1 - \varphi_2)(1 + \varphi_2)(1 + \varphi_1 - \varphi_2)}$$

Wartość wariancji obliczono w komórce **L3** i wyniosła ona 0,0005.

## Wzór na autokorelację k-tego rzędu

Autokorelacja rzędu k jest definiowana jako:

$$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0}$$

gdzie  $\gamma_0 = \text{Var}(X_t) = \sigma_x^2$ .

Zatem dla  $k = 0$  oraz  $k = 1$ :

$$\begin{aligned}\rho_0 &= 1, \\ \rho_1 &= \frac{\varphi_1}{1 - \varphi_2}\end{aligned}$$

Dla  $k \geq 2$  zależność jest rekurencyjna:

$$\rho_k = \varphi_1 \rho_{k-1} + \varphi_2 \rho_{k-2}$$

Na tej podstawie obliczono  $\rho_2$ (komórka P4),  $\rho_3$ (komórka P5), ...,  $\rho_{10}$ (komórka P12).

## Obliczenie $P(X_t > 0)$

Dla  $X_t \sim N(\mu, \sigma_x^2)$ :

$$P(X_t > 0) = P\left(Z > \frac{0 - \mu}{\sigma_x}\right) = P\left(Z > \frac{-\mu}{\sigma_x}\right)$$

Z symetrii rozkładu normalnego:

$$P(X_t > 0) = P\left(Z < \frac{\mu}{\sigma_x}\right) = \Phi\left(\frac{\mu}{\sigma_x}\right),$$

gdzie  $\Phi(\cdot)$  oznacza dystrybucję standardowego rozkładu normalnego.

$P(X_t > 0)$  zostało obliczone w komórce **L4** i wyniosło 0,4529.

## Wnioski

W modelu ARMA(2,0) uzyskano wzory analityczne na wartość oczekiwaną, wariancję oraz współczynniki autokorelacji. Dzięki rekurencyjnej zależności możliwe jest obliczenie autokorelacji do dowolnego rzędu. Prawdopodobieństwo  $P(X_t > 0)$  zależy od relacji między średnią  $\mu$  a odchyleniem standardowym  $\sigma_x$  i jest obliczane z wykorzystaniem dystrybucyj rozkładu normalnego.