



**AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA IM. STANISŁAWA STASZICA W KRAKOWIE**

**Wydział Zarządzania**

*Projekt EFiD - Projekt 8B*

Autorzy: *Patrycja Piła, Mateusz Strojek, Julia Szutka, Magdalena Wnuk*

Kierunek studiów: *Informatyka i Ekonometria*

Prowadzący: *dr hab. Tomasz Wójtowicz*

Kraków, 2025

# 1. Wstęp

Celem niniejszego opracowania jest zbadanie współzależności pomiędzy trzema wybranymi instrumentami finansowymi. W analizie wykorzystano logarytmy wartości poszczególnych instrumentów. W pierwszym etapie przedstawiono dane empiryczne oraz ich podstawowe charakterystyki. Następnie zbadano kointegrację, najpierw w układach dwuwymiarowych, a następnie dla wszystkich trzech zmiennych jednocześnie.

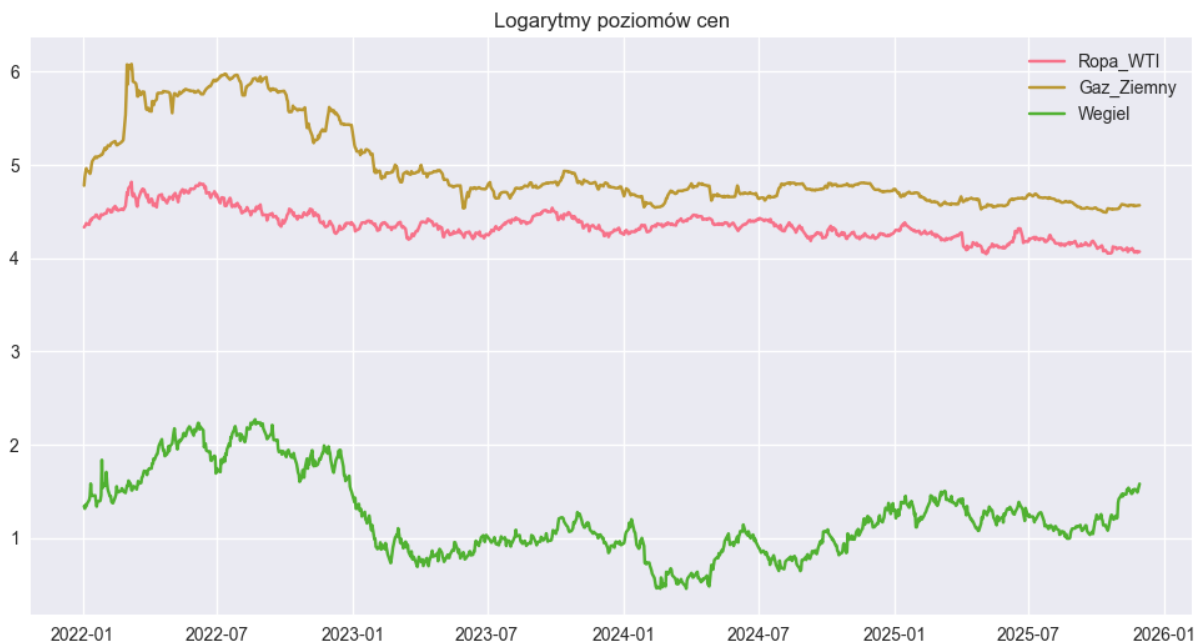
W przypadku stwierdzenia występowania kointegracji oszacowany zostanie odpowiedni model wektorowej korekty błędu (VECM). Kolejnym krokiem będzie interpretacja uzyskanych parametrów, analiza krótko- i długookresowej przyczynowości pomiędzy zmiennymi oraz estymacja i interpretacja funkcji odpowiedzi na impuls.

## 2. Zmienne

W ramach projektu wykorzystano dane dotyczące rynku surowców energetycznych, a dokładniej ich logarytmów:

- węgiel,
- ropa,
- gaz ziemny.

Analiza obejmowała okres od początku stycznia 2022 roku do 1 grudnia 2025 roku.

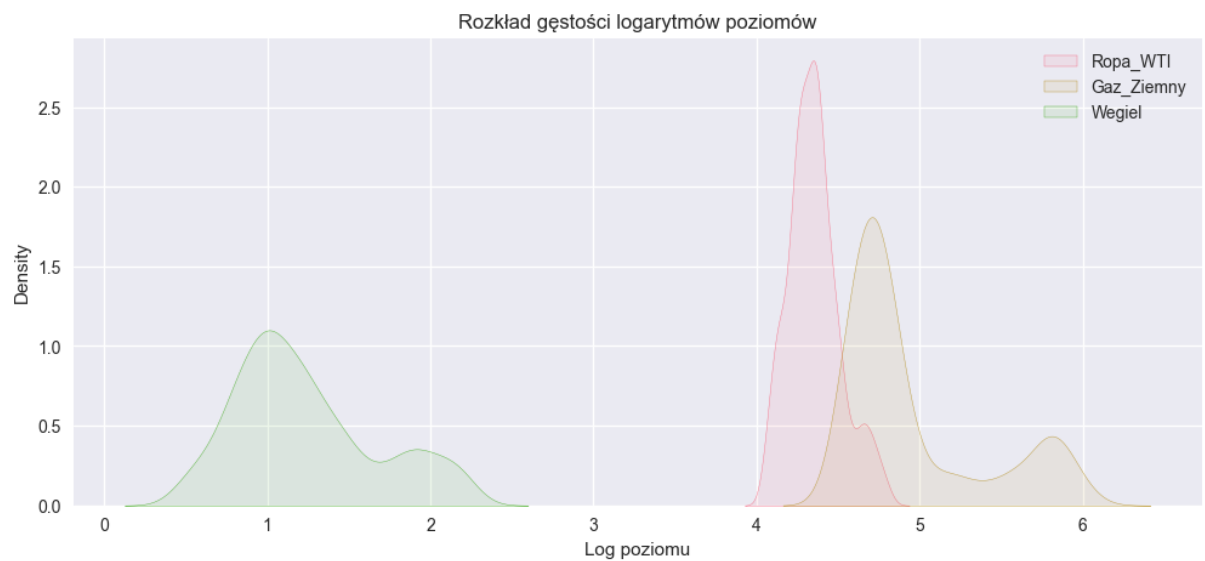


Na przedstawionym wykresie widoczna jest wyraźna niestabilność zachowania cen surowców w 2022 roku. W pierwszym półroczu zaobserwowano wzrost wartości każdej z analizowanych zmiennych. W 2023 roku nastąpiła względna stabilizacja cen ropy naftowej oraz gazu ziemnego, która utrzymywała się również w kolejnym roku. Odmienne przebieg miał natomiast logarytm ceny węgla, który wprawdzie obniżył się w porównaniu z rokiem 2022, jednak nie osiągnął stabilnego poziomu. W szczególności odnotowano

wyraźny spadek na początku 2024 roku, po którym w drugiej połowie roku nastąpił powrót do poziomów sprzed załamania.

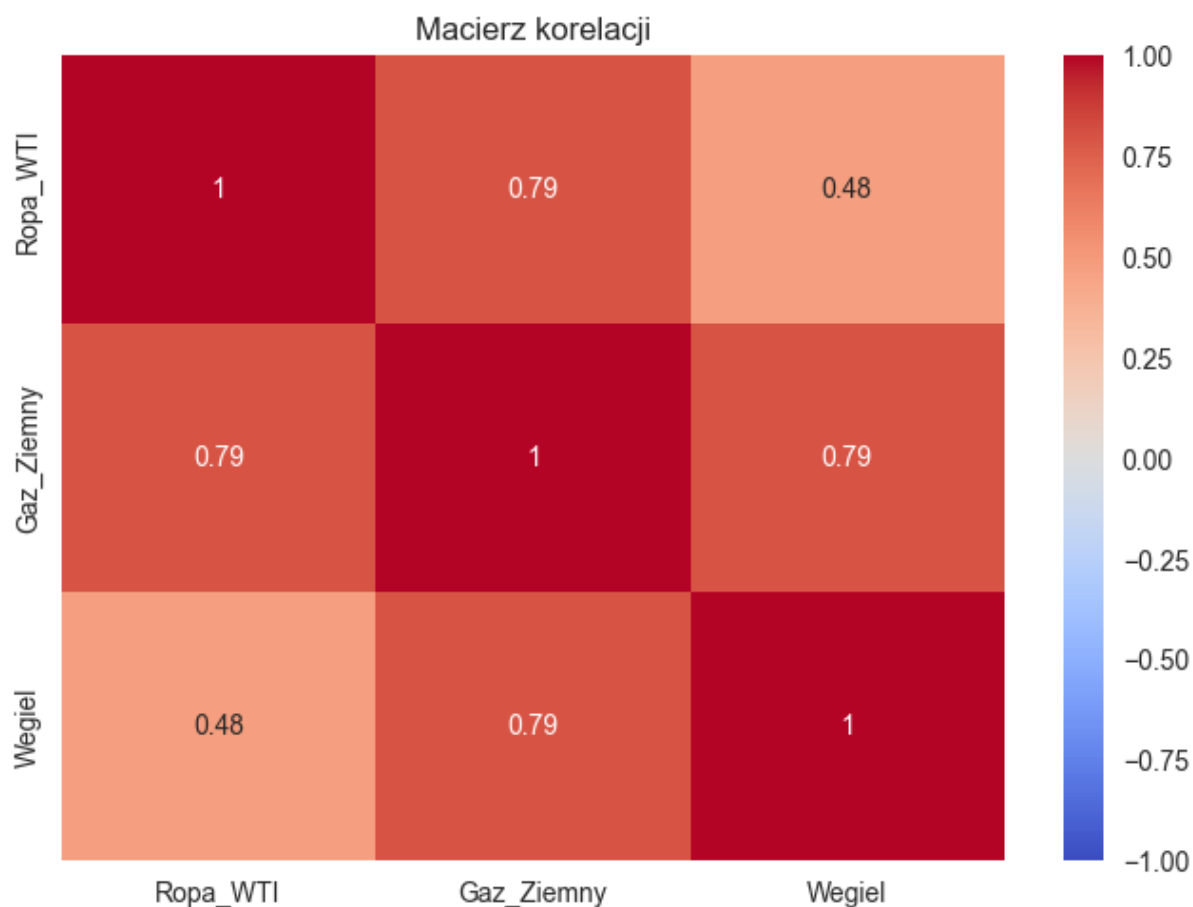
	średnia	odchylenie	min	max	skośność	eksces
ropa	4,351187	0,156626	4,045329	4,817859	0,582397	0,193488
gaz ziemny	4,955110	0,437127	4,491441	6,083018	1,197319	-0,042026
węgiel	1,231608	0,434964	0,454255	2,270062	0,642404	-0,410835

Średnia wartość logarytmu ceny ropy wynosi 4,35 i jest kształtowana przy stosunkowo niewielkiej zmienności, o czym świadczy niskie odchylenie standardowe w porównaniu do średniej równe 0,16. Gaz ziemny cechuje się najwyższą średnią spośród analizowanych surowców oraz wyraźnie większą zmiennością, co potwierdza odchylenie standardowe na poziomie 0,44. Najniższą średnią wartość osiąga węgiel, przy jednocześnie wyższej porównywalnej z gazem ziemnym. Zakres wahań dla węgla jest znacznie szerszy niż dla ropy, co wskazuje na większą podatność tego surowca na wahania rynkowe. Wszystkie zmienne charakteryzują się dodatnią skośnością, co oznacza przewagę obserwacji poniżej średniej oraz możliwością występowania wysokich wartości ekstremalnych.



Rozkład logarytmu cen ropy jest najbardziej skupiony, z wyraźnym maksimum w przedziale 4,3–4,4, co potwierdza niską zmienność i dodatnią, niewielką skośność. Rozkład logarytmu cen węgla znajduje się na zdecydowanie niższym poziomie, jest szeroki i spłaszczony, co potwierdza dużą zmienność. Rozkład logarytmu cen gazu ziemnego jest przesunięty najbardziej na prawo, z głównym skupieniem wartości w przedziale 4,7, co potwierdza najwyższą średnią logarytmiczną równą 4,96. Jest on wyraźnie szerszy i niższy niż w przypadku ropy, co świadczy o dużej zmienności tej

zmiennej. Logarytmy cen ropy i gazu są do siebie zbliżone, co może świadczyć o ich silnym powiązaniu rynkowym.



Korelacja pomiędzy analizowanymi zmiennymi kształtuje się na wysokim poziomie i jest dodatnia dla wszystkich par surowców. Najsilniejsze zależności występują pomiędzy węglem a gazem ziemnym oraz pomiędzy ropą naftową a gazem ziemnym, gdzie współczynnik korelacji wynosi 0,79. Zależność pomiędzy ropą a węglem jest słabsza, lecz nadal umiarkowana (0,48).

### 3. Test stacjonarności

Przed oszacowaniem modelu VECM za pomocą testu ADF sprawdzono stacjonarność szeregów czasowych:

- $H_0$ : szereg czasowy jest niestacjonarny,
- $H_1$ : szereg czasowy jest stacjonarny.

	poziom ADF	wartość p	różnica ADF	wartość p
ropa	-1,0534	0,7333	-12,8845	0,0000
gaz ziemny	-0,9744	0,7625	-7,9148	0,0000

węgiel	-1,4862	0,5403	-35,8378	0,0000
--------	---------	--------	----------	--------

Na poziomach wszystkie analizowane zmienne okazały się niestacjonarne, natomiast ich pierwsze różnice są stacjonarne, co oznacza, że szeregi są zintegrowane w stopniu  $I(1)$ . Spełnia to podstawowy warunek stosowalności modelu VECM, który wymaga jednakowego rzędu integracji zmiennych. Dodatkowo stacjonarność reszt z równania kointegracyjnego potwierdza istnienie długookresowej relacji równowagi pomiędzy badanymi zmiennymi. W związku ze spełnieniem wszystkich wymaganych warunków możliwe jest przejście do estymacji modelu VECM.

## 4. Estymacja modelu VECM

### 4.1. Wybór rzędu opóźnień

Kluczowym krokiem w specyfikacji modelu VECM jest określenie optymalnej liczby opóźnień. W tym celu zastosowano cztery kryteria informacyjne: AIC, BIC, FPE oraz HQIC. Każde z tych kryteriów ocenia jakość modelu, uwzględniając zarówno dopasowanie do danych, jak i złożoność modelu. Na podstawie analizy wszystkich kryteriów jako optymalną liczbę opóźnień wybrano 2, ponieważ dwa z nich, w tym AIC, wskazywały właśnie na ten rząd opóźnień.

### 4.2. Określenie liczby relacji kointegrujących

Kolejnym istotnym krokiem w budowie modelu VECM jest określenie liczby relacji kointegrujących między analizowanymi zmiennymi. W tym celu wykorzystano test śladu Johansena, którego hipotezy to:

- $H_0: r \leq r_0$
- $H_1: r > r_0$

Na początku zbadano kointegracje w parach. W przypadku, gdy statystyka jest większa od wartości krytycznej, odrzucamy hipotezę zerową.

para	ranga	statystyka	wartość krytyczna
ropa -gaz ziemny	$r \leq 0$	16,8966	15,4943
	$r \leq 1$	1,4260	3,8415
ropa -węgiel	$r \leq 0$	6,6144	15,4943
	$r \leq 1$	2,4121	3,8415
gaz ziemny - węgiel	$r \leq 0$	7,9943	15,4943
	$r \leq 1$	1,4564	3,8415

Ranga kointegracji nie może przekraczać liczby zmiennych pomniejszonej o jeden, zatem w analizie par zmiennych jej maksymalna wartość wynosi 1. Na podstawie wyników testu kointegracji dla par ropa-węgiel oraz gaz ziemny-węgiel otrzymano rangę równą 0, co oznacza brak długookresowych relacji kointegracyjnych pomiędzy tymi surowcami.

Natomiast dla pary ropa-gaz ziemny uzyskano rangę równą 1, co potwierdza istnienie długookresowego związku równowagi pomiędzy tymi rynkami. Wynik ten jest spójny z wcześniejszą analizą korelacji, wskazującą na silne powiązania cen ropy i gazu.

ranga	statystyka	wartość krytyczna
$r \leq 0$	32,9721	29,7961
$r \leq 1$	4,6785	15,4943
$r \leq 2$	1,5293	3,8415

W przypadku jednoczesnego badania kointegracji dla wszystkich trzech zmiennych test wskazał na istnienie jednej relacji kointegrującej.

#### 4.3. Analiza wyestymowanego modelu VECM

Zidentyfikowano jeden statystycznie istotny wektor kointegrujący (znormalizowany względem zmiennej Ropa\_WTI). Równanie długookresowe przyjmuje postać:

$$\ln(\text{Ropa}) = 0,5204 * \ln(\text{Gaz}) - 0,2735 * \ln(\text{Węgiel}) + 2,1101$$

Zmienna objaśniająca	Współczynnik w wektorze ( $\beta$ )	Przekształcony wpływ na Ropę	Błąd std.	Statystyka z	Wartość p
Gaz Ziemny	-0,5204	+0,5204	0,066	-7,932	0,000
Węgiel	0,2735	-0,2735	0,066	4,143	0,000
Stała	-2,1101	+2,1101	0,266	-7,941	0,000

Wszystkie parametry wektora kointegracji (beta) są istotne statystycznie. Wzrost ceny gazu ziemnego o 1% w długim okresie wiąże się ze wzrostem ceny ropy o ok. 0,52% (ceteris paribus), co wskazuje na wspólne trendy makroekonomiczne na rynku energii i możliwą komplementarność tych surowców. Wzrost ceny węgla o 1% wiąże się ze spadkiem ceny ropy o ok. 0,27% w długim okresie.

Równanie (Zmienna)	Współczynnik ( $\alpha$ )	Błąd std.	Statystyka z	Wartość p
Równanie: Ropa_WTI	-0,0224	0,008	-2,844	0,004
Równanie: Gaz_Ziemny	0,0405	0,011	3,641	0,000
Równanie: Węgiel	-0,0248	0,017	-1,463	0,144

Parametry  $\alpha$  określają szybkość powrotu zmiennych do ścieżki równowagi po wystąpieniu szoku:

- Ropa WTI: Parametr jest ujemny i istotny. Oznacza to, że cena ropy koryguje odchylenie od równowagi w tempie ok. 2,2% na okres.

- Gaz Ziemny: Cena gazu silnie reaguje na nierównowagę (istotna statystycznie), dostosowując się do relacji wyznaczonej przez cenę ropy.
- Węgiel: Parametr jest nieistotny statystycznie. Jego cena wpływa na relację długookresową, ale sama nie koryguje się pod wpływem odchyłeń od tej relacji. Ceny węgla są kształtowane przez czynniki zewnętrzne względem badanego układu.
- 

Zmienna zależna	Zmienna opóźniona	Współczynnik	Wartość p	Interpretacja
Ropa_WTI	L2.Gaz_Ziemny	0,0421	0,064	Umiarkowanie istotny wpływ opóźnionych cen gazu na ropę.
Ropa_WTI	L1.Węgiel	0,0285	0,056	Graniczna istotności wpływu węgla na ropę.
Gaz_Ziemny	L2.Gaz_Ziemny	0,1124	0,000	Silna autokorelacja cen gazu.
Gaz_Ziemny	L2.Ropa_WTI	-0,1020	0,028	Istotny, ujemny wpływ opóźnionych cen ropy na gaz.
Węgiel	L1.Węgiel	-0,1354	0,000	Silna, ujemna autokorelacja cen węgla.
Węgiel	L2.Gaz_Ziemny	0,1100	0,025	Istotny wpływ opóźnionych cen gazu na węgiel.

Analiza zależności krótkookresowych wykazała istotne powiązania międzyrynkowe, w szczególności wpływ opóźnionych cen gazu na ropę i węgiel oraz ujemne oddziaływanie ropy na gaz. Jednocześnie zaobserwowano silną autokorelację notowań gazu i węgla.

#### 4.4. Diagnostyka reszt modelu VECM

Celem diagnostyki była ocena, czy reszty modelu są nieskorelowane, homoskedastyczne oraz mają rozkład normalny. Spełnienie tych warunków jest kluczowe dla poprawności wnioskowania statystycznego.

Przeprowadzony test Portmanteau wskazał na występowanie autokorelacji rzędu wyższego, niż uwzględniono w modelu. Otrzymano wartość statystyki  $Q = 109,61$  przy wartości  $p = 0,0014$ . Na poziomie istotności  $\alpha = 0,05$  odrzucono hipotezę zerową o braku autokorelacji, co oznacza, że w resztach pozostała systematyczna informacja niewyjaśniona przez model. Może to sugerować, że w specyfikacji VECM przyjęto zbyt małą liczbę opóźnień ( $k$ ).

Test Jarque'a-Bera jednoznacznie odrzucił hipotezę o normalności rozkładu reszt. Uzyskano statystykę  $JB = 23356,27$  oraz  $p$  wartość  $= 0,0000$ . Tak wysoka wartość statystyki wskazuje na istotne odstępstwa od rozkładu normalnego. Choć brak normalności nie wpływa na zgodność estymatorów, może ograniczać wiarygodność testów istotności parametrów (t-Studenta) oraz powodować niedokładność przedziałów ufności dla impulsowych funkcji reakcji (IRF) w warunkach niewielkiej próby.

Testy efektu ARCH, przeprowadzone za pomocą mnożnika Lagrange'a (LM), wykazały obecność warunkowej heteroskedastyczności we wszystkich równaniach modelu:

Równanie (Zmienna)	Statystyka LM	P wartość	Wniosek
Ropa_WTI	102,64	0,0000	Występuje efekt ARCH
Gaz_Ziemny	214,05	0,0000	Występuje efekt ARCH
Węgiel	58,29	0,0000	Występuje efekt ARCH

Stwierdzona heteroskedastyczność oznacza, że wariancja składnika losowego nie jest stała w czasie, co przejawia się okresami podwyższonej i obniżonej zmienności (tzw. klastrowanie zmienności). Zgodnie z teorią ekonometrii (Lütkepohl, 2005), obecność efektu ARCH w modelach VECM nie powoduje obciążenia parametrów (estymatory współczynników kointegracji  $\beta$  oraz parametrów dostosowawczych  $\alpha$  pozostają zgodne) interpretacja kierunku i siły zależności pozostaje ważna. Wpływa jednak na efektywność estymatorów, co oznacza, że standardowe błędy mogą być niedoszacowane. W związku z tym, wnioskowanie statystyczne (testy t-Studenta) traktowane jest z ostrożnością, a za istotne uznano jedynie te parametry, których wartość p jest zdecydowanie niska (*wartości*  $p < 0,001$ ), co minimalizuje ryzyko błędu I rodzaju.

Ze względu na wykrytą autokorelację zdecydowano się na zwiększenie rzędu opóźnień w modelu.

#### 4.5. Oszacowanie modelu VECM z większą liczbą opóźnień i jego diagnostyka

Oszacowano model VECM(7) z rangą kointegracji  $r = 1$  oraz stałą w przestrzeni kointegrującej. Dobór długości opóźnień  $p = 5$  dla poziomów oraz  $k = 7$  dla pierwszych różnic - został przeprowadzony na podstawie kryterium eliminacji autokorelacji reszt. Test Portmanteau wykazał brak istotnej autokorelacji ( $p > 0,05$ ), co potwierdza poprawny wybór struktury opóźnień.

Pozostałe problemy modelu tj. brak normalności reszt i występowanie efektu ARCH nie zostały naprawione tą modyfikacją.

Szczegółowa analiza wyników:

##### 1. Relacja długookresowa (wektor kointegracji)

Parametry wektora kointegracji są stabilne względem modeli o niższych opóźnieniach, co potwierdza trwałość relacji. W długim okresie ropa i gaz wykazują wspólny trend (elastyczność +0,53), natomiast węgiel oddziałuje konkurencyjnie (-0,27). Wszystkie parametry  $\beta$  są wysoce istotne ( $p < 0,001$ ).

##### 2. Mechanizm korekty błędu (parametry $\alpha$ )

Gaz ziemny najsilniej przywraca równowagę ( $\alpha = 0,051$ ;  $p < 0,001$ ), korygując ok. 5% odchyłeń w każdym okresie. Ropa WTI również reaguje, lecz wolniej ( $\alpha = -0,018$ ;  $p \approx$

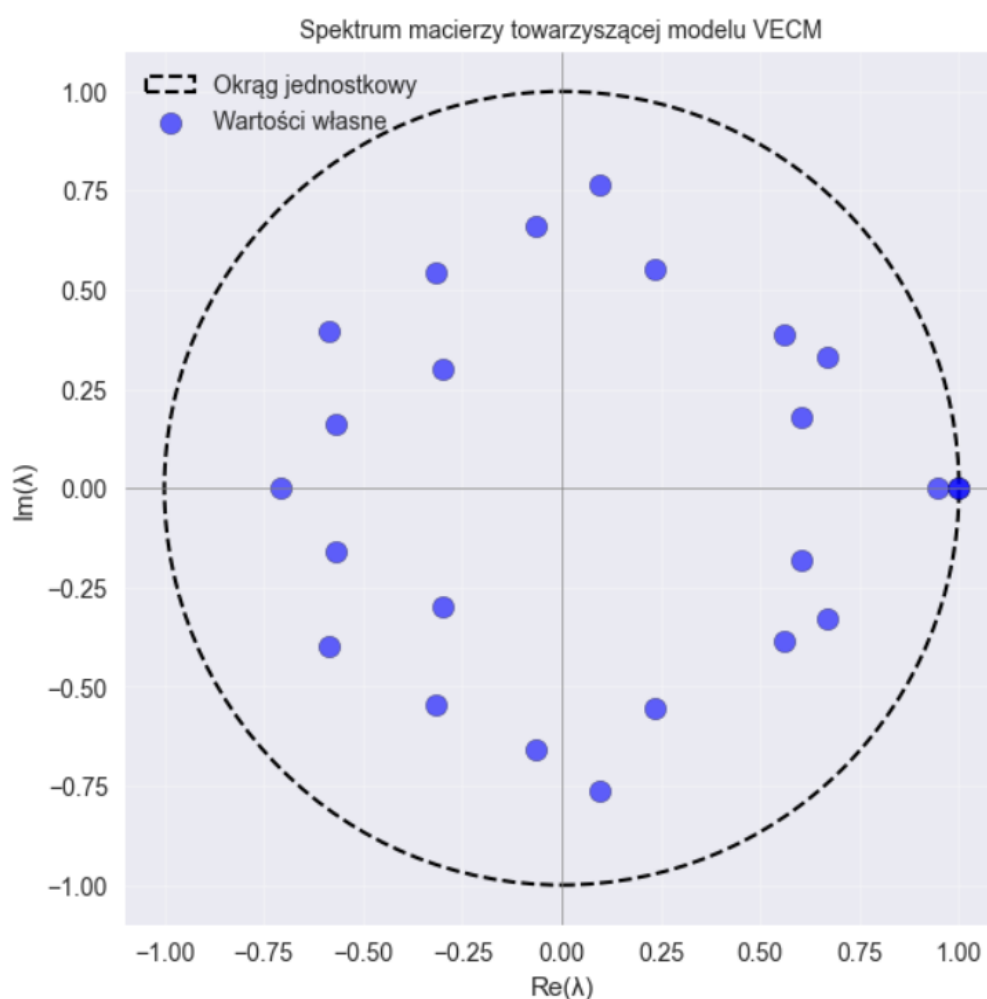


0,035). Węgiel nie wykazuje istotnej reakcji ( $\alpha = -0,024$ ;  $p \approx 0,190$ ), co wskazuje na jego słabą egzogeniczność - współtworzy relację, ale sam nie koryguje zaburzeń.

### 3. Dynamika krótkookresowa

Wyższy rząd opóźnień ujawnił istotne krótkookresowe zależności. Dla gazu ziemnego występuje silna reakcja na ceny ropy w opóźnieniach 2 – 6, co oznacza krótkookresowy efekt substytucyjny. Utrzymuje też znaczną inercję (istotne opóźnienia własne). Dla węgla występuje wyraźny powrót do średniej oraz dodatni wpływ cen gazu z opóźnieniem 2 okresów, wskazujący na substytucję energetyczną. Ropa WTI reaguje głównie na własne głębokie opóźnienia (5–6 okres), co może odzwierciedlać cykliczność rynku.

W celu oceny stabilności oszacowanego modelu VECM dokonano jego przekształcenia do postaci modelu VAR na poziomach poprzez konstrukcję macierzy towarzyszącej. Następnie obliczono wartości własne tej macierzy, których moduły stanowią podstawowe kryterium oceny stabilności układu dynamicznego. Zgodnie z teorią, dla modelu VECM z rzędem kointegracji  $r = 1$  powinny występować  $K - r = 3 - 1 = 2$  pierwiastki jednostkowe o module równym 1, natomiast pozostałe pierwiastki powinny leżeć wewnątrz okręgu jednostkowego.



Na wykresie widać, że dokładnie dwa pierwiastki (pokrywające się) leżą na okręgu, co odpowiada pierwiastkom jednostkowym, natomiast pozostałe wartości własne znajdują się wewnątrz okręgu. Oznacza to, że część dynamiczna modelu jest stabilna.

#### 4.6 Badanie zależności zmiennych

Na podstawie oszacowanego wektora kointegracji, znormalizowane równanie równowagi długookresowej przyjmuje postać:

$$\ln(\text{Ropa}) = 0,526 * \ln(\text{Gaz}) - 0,271 * \ln(\text{Węgiel}) + 2,078$$

Wyniki sugerują występowanie dodatniej elastyczności cen ropy względem gazu ziemnego (współczynnik 0,53) oraz ujemnej względem węgla (współczynnik -0,27), co przy założeniu *ceteris paribus* oznacza, że w długim okresie wzrost cen gazu sprzyja wzrostom cen ropy, natomiast drożejący węgiel oddziałuje na nią konkurencyjnie.

Kluczowych informacji o mechanizmie przywracania równowagi dostarczają parametry dostosowawcze ( $\alpha$ ). Najsilniejszą i wysoce istotną statystycznie ( $p < 0,001$ ) reakcję wykazuje gaz ziemny, który koryguje odchylenia od ścieżki długookresowej w tempie około 5,1% na okres. W procesie tym uczestniczy również ropa WTI, jednak jej dostosowanie przebiega znacznie wolniej (ok. 1,8% na okres) i charakteryzuje się niższą, choć nadal akceptowalną istotnością statystyczną ( $p \approx 0,035$ ).

Występuje brak statystycznej istotności parametru dostosowawczego dla węgla ( $p \approx 0,190$ ). Oznacza to, że węgiel pełni w analizowanym układzie rolę zmiennej słabo egzogenicznej: jego ceny współtworzą relację długookresową i wpływają na wycenę pozostałych surowców, lecz same nie reagują na zaburzenia równowagi w obrębie tego systemu energetycznego.

Poniższa tabela prezentuje wyniki weryfikacji hipotezy zerowej  $H_0$ , zakładającej, że grupy zmiennych testowanych nie są przyczyną Grangera dla zmiennej objaśnianej. We wszystkich przypadkach dla standardowego poziomu istotności 0,001 nie znaleziono podstaw do odrzucenia  $H_0$ . Oznacza to, że krótkookresowe zmiany cen jednego surowca nie pozwalają na skuteczne prognozowanie zmian cen pozostałych, po uwzględnieniu ich własnej historii.

Zmienna objaśniana (Y)	Zmienne testowane (X)	Statystyka testu (F)	Wartość p	Decyzja ( $\alpha=0,001$ )
Ropa WTI	Gaz Ziemny, Węgiel	1,268	0,209	Brak przyczynowości
Gaz Ziemny	Ropa WTI, Węgiel	1,627	0,054	Brak przyczynowości
Węgiel	Ropa WTI, Gaz Ziemny	1,544	0,076	Brak przyczynowości

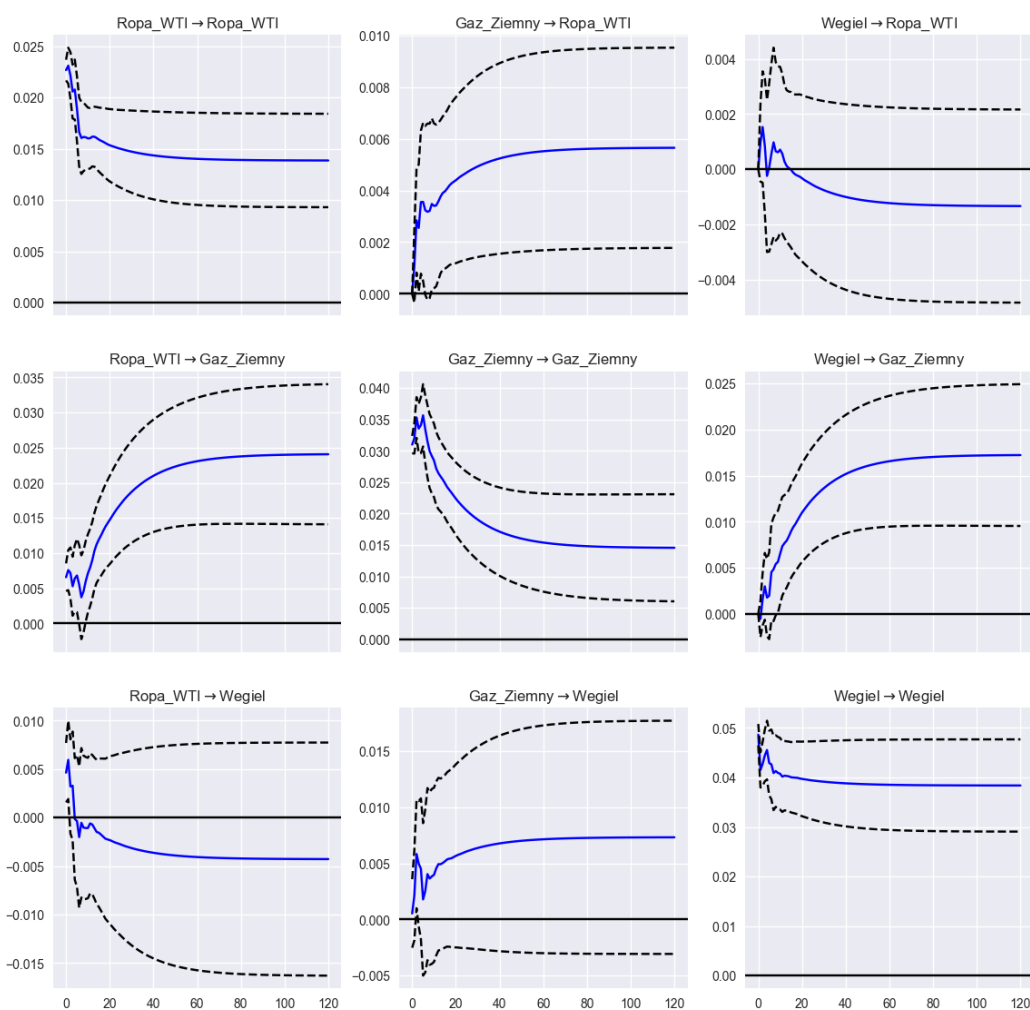
Analiza przyczynowości w sensie Grangera, przeprowadzona dla dynamiki krótkookresowej (obejmującej opóźnione przyrosty zmiennych), wskazuje na

stosunkowo niską współzależność badanych rynków w krótkim horyzoncie czasowym, co kontrastuje ze zidentyfikowaną wcześniej silną relacją długookresową.

#### 4.7. Reakcja na impuls

Funkcja odpowiedzi na impuls (IRF) mierzy dynamiczny wpływ szoku w zmiennej  $j$  na oczekiwaną wartość zmiennej  $i$  w przyszłym okresie  $h$ , przy założeniu, że wszystkie inne szoki w chwili  $t$  są równe zero. Wybrano następującą kolejność: ropa WTI -> gaz ziemny -> węgiel bazując na korelacji. Funkcje odpowiedzi na impuls wyznaczono w horyzoncie 120 dni, odpowiadającym 120 kolejnym obserwacjom dziennym.

IRF z uporządkowaniem Cholesky'ego: ['Ropa\_WTI', 'Gaz\_Ziemny', 'Wegiel']



Szok cenowy ropy wywołuje trwały wzrost jej własnej ceny oraz silny, dodatni i długookresowy wpływ na ceny gazu ziemnego. Jednocześnie wzrost cen ropy powoduje nieznaczący, lecz trwały spadek logarytmu ceny węgla, co sugeruje słabe przesunięcie popytu na węgiel w długim okresie. Szok gazu ziemnego generuje najsilniejszą reakcję własną oraz istotny, dodatni wpływ na ceny ropy, co potwierdza ścisłe powiązanie tych dwóch rynków energetycznych. Oddziaływanie gazu na węgiel jest dodatnie, lecz wyraźnie słabsze niż w relacji ropa-gaz. Szoki cen węgla mają najśłabszy wpływ na ceny

ropy. Poza tym, szok cenowy węgla wywołuje wzrost jego własnej ceny oraz ceny gazu ziemnego. Wszystkie reakcje mają trwały charakter, co jest typowe dla zmiennych kointegracyjnych i potwierdza istnienie długookresowych zależności przy jednoczesnej dominacji relacji między rynkami ropy i gazu.