



AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA IM. STANISŁAWA STASZICA W KRAKOWIE

**Wydział Zarządzania**

*Projekt EFID - Projekt 11A*

Autorzy: *Patrycja Piła, Mateusz Strojek, Julia Szutka, Małgorzata Wnuk*

Kierunek studiów: *Informatyka i Ekonometria*

Prowadzący: *dr hab. Tomasz Wójtowicz*

Kraków, 2026

## Wstęp

Celem projektu jest analiza zależności dynamicznych pomiędzy stopami zwrotu pięciu wybranych instrumentów finansowych z wykorzystaniem modeli wektorowej autoregresji. W ramach dopasowanego modelu VAR zbadana zostanie przyczynowość w sensie Grangera pomiędzy stopami zwrotu analizowanych instrumentów. Analiza zostanie powtórzona w trzech wyodrębnionych podokresach.

## Zmienne

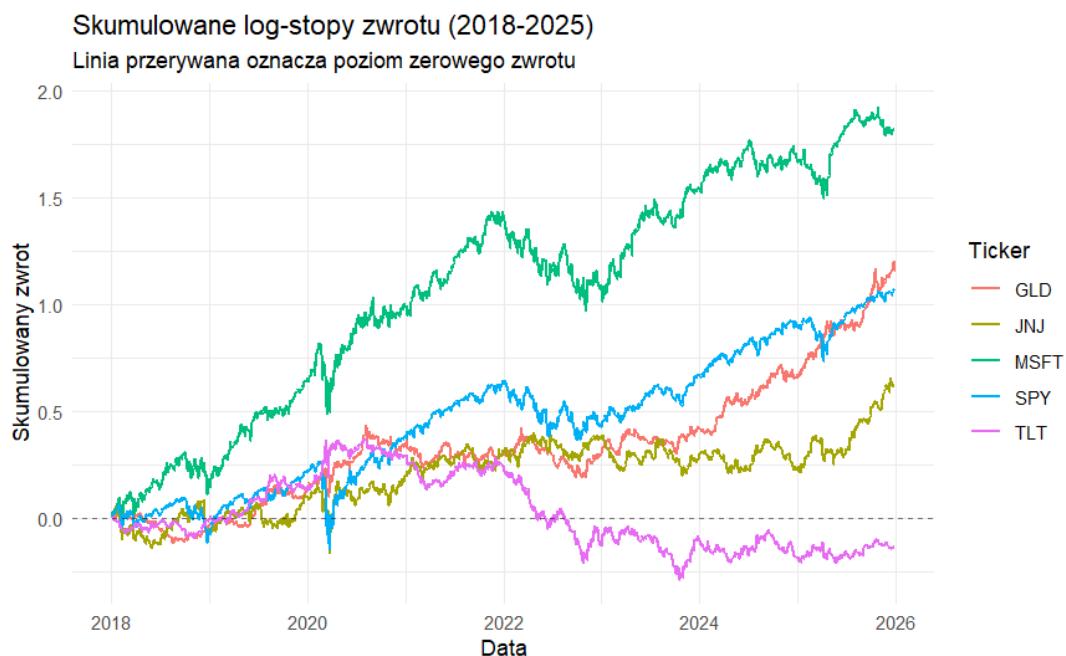
W analizie wykorzystano następujące instrumenty finansowe, reprezentujące różne klasy aktywów i segmenty rynku, co pozwala na zróżnicowanie portfela. Dane obejmują okres od 2018 do 2025 roku:

- **SPY (S&P 500 ETF)** - fundusz ETF odwzorowujący zachowanie indeksu S&P 500, reprezentujący szeroki rynek akcji w Stanach Zjednoczonych.
- **GLD (Gold Shares)** - fundusz ETF oparty na cenie złota, reprezentujący rynek surowców.
- **MSFT (Microsoft)** - akcje spółki technologicznej z sektora IT, będącej jednym z liderów globalnego rynku technologicznego.
- **JNJ (Johnson & Johnson)** - akcje spółki działającej w sektorze ochrony zdrowia.
- **TLT (20+ Year Treasury Bond ETF)** - fundusz ETF inwestujący w długoterminowe obligacje skarbowe USA, reprezentujący rynek instrumentów dłużnych.

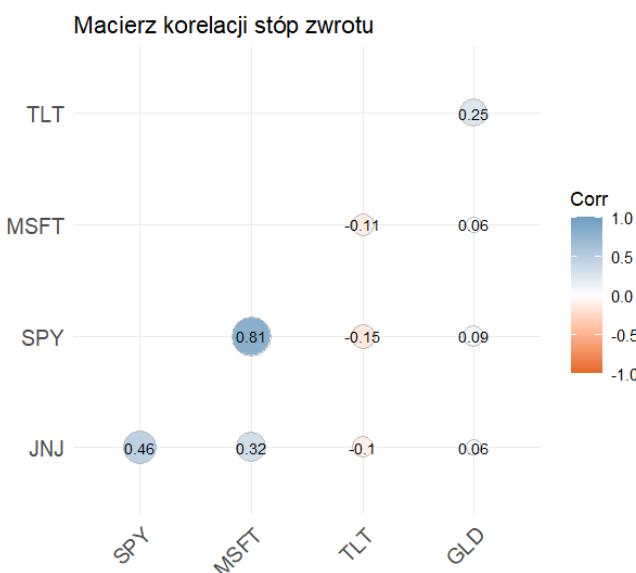
Tabela 1. Statystyki opisowe

Aktywo	Średnia roczna	Odch.std. (roczne)	Skośność	Eksces	Minimum	Maksimum
SPY	0,1334	0,1951	-0,5745	16,4615	-0,1159	0,0999
TLT	-0,0170	0,1574	0,0633	7,7672	-0,0690	0,0725
GLD	0,1454	0,1515	-0,3836	6,5521	-0,0664	0,0474
MSFT	0,2282	0,2834	-0,1640	10,3630	-0,1595	0,1329
JNJ	0,0777	0,1962	-0,4584	12,3582	-0,1058	0,0769

Microsoft osiągnął najwyższą średnią roczną stopę zwrotu i jest jednocześnie obarczony największym ryzykiem zmienności. Fundusz obligacji jako jedyny spośród przedstawionych instrumentów przyniósł w analizowanym czasie stratę. Ujemna skośność większości aktywów sugeruje przewagę gwałtownych spadków nad dynamicznymi wzrostami w ich historycznych notowaniach. Wyjątkowo wysoki poziom ekscesu we wszystkich przypadkach sygnalizuje występowanie wstrząsów cenowych znacznie silniejszych niż w rozkładzie normalnym.



Na powyższym wykresie skumulowanych log-stóp zwrotu widać wyraźne różnice między instrumentami. Spadki krzywych oznaczają okresy gorszej koniunktury, natomiast wzrosty - przewagę dodatnich stóp zwrotu. MSFT osiąga najwyższy wzrost w całym badanym okresie, co wskazuje na najwyższą długookresową stopę zwrotu spośród analizowanych aktywów. GLD, SPY oraz JNJ rosną umiarkowanie i relatywnie stabilnie do około 2022 roku, natomiast po tym czasie GLD i SPY ponownie wzrastają, pełniąc rolę bardziej defensywnych składników portfela w porównaniu do MSFT. W przypadku JNJ po 2022 roku widoczny jest łagodny spadek i późniejsza stabilizacja (może odzwierciedlać wygaszanie efektów okresu pandemicznego). Z kolei TLT w okolicach 2021-2023 przechodzi w wyraźny trend spadkowy, co oznacza przewagę ujemnych stóp zwrotu w tym czasie.



Dodatkowo zbadano korelacje pomiędzy aktywami wyniki przedstawiono na macierzy korelacji powyżej. Odnotowano wysoką dodatnią korelację pomiędzy S&P 500 oraz Microsoftem. Zauważalna, choć słabsza, dodatnia korelacja występuje również pomiędzy spółką Johnson & Johnson a S&P 500 oraz Microsoftem. Pozostałe zależności charakteryzują się niskim poziomem korelacji i można je uznać za statystycznie nieistotne.

## Badanie stacjonarności

Za pomocą testu ADF z opóźnieniem równym 10 sprawdzono stacjonarność szeregów czasowych:

- $H_0$ : szereg czasowy jest niestacjonarny,
- $H_1$ : szereg czasowy jest stacjonarny.

Tabela 2. Wyniki testów na stacjonarność

	<b>Wartość p testu dla poziomów</b>	<b>Wartość p testu dla logarytmicznych stóp zwrotu</b>
SPY	0,6193	0,01
TLT	0,7372	0,01
GLD	0,9900	0,01
MSFT	0,2351	0,01
JNJ	0,3983	0,01

Na poziomach wszystkie analizowane zmienne okazały się niestacjonarne, natomiast ich pierwsze różnice są stacjonarne, co oznacza, że szeregi są zintegrowane w stopniu  $I(1)$ .

Do wyboru liczby opóźnień w modelu VAR, zastosowano kryterium Hannana-Quinna. Kryterium te jest kompromisem pomiędzy kryterium Bayesa oraz kryterium Akaike.

Tabela 3. Dobór opóźnienia w modelach VAR

<b>Okres</b>	<b>Opóźnienie</b>
Cały okres	1
2018-03-01 - 2020-01-31	1
2020-03-01 - 2022-01-31	2
2022-03-01 - 2024-01-31	1

Tylko dla okna czasowego obejmującego początek marca 2020 do końca stycznia 2022 według kryterium HQ najlepiej jest wybrać dwa opóźnienia. W pozostałych przypadkach wskazano, że najlepiej jest wybrać jedno opóźnienie.

## Interpretacja i diagnostyka modeli VAR

W kolejnym kroku dla każdego okresu wyestymowano model VAR z odpowiednim opóźnieniem oraz zweryfikowano ich poprawność. Rozpoczęto od oceny istotności poszczególnych parametrów w równaniach. Następnie przeprowadzono diagnostykę reszt, koncentrując się na trzech kluczowych aspektach: braku autokorelacji reszt (test Portmanteau z 10 opóźnieniami), zgodności z rozkładem normalnym (test Jarque-Bera) oraz stabilności wariancji warunkowej (test na efekt ARCH z opóźnieniem równym 5).

Tabela 4. Hipotezy zerowe i alternatywne testów diagnostycznych modelu VAR

Test	Hipoteza zerowa ( $H_0$ )	Hipoteza alternatywna ( $H_1$ )
Istotność parametrów (test t)	$\beta_i = 0$ - parametr nie jest statystycznie istotny	$\beta_i \neq 0$ - parametr jest statystycznie istotny
Autokorelacja reszt (test Portmanteau)	Brak autokorelacji składnika losowego do rzędu $h$	Występuje autokorelacja składnika losowego
Normalność rozkładu reszt (test Jarque'a-Bera)	Składnik losowy ma rozkład normalny	Składnik losowy nie ma rozkładu normalnego
Efekt ARCH (test LM Engle'a)	Brak efektów ARCH - wariancja warunkowa jest homoskedastyczna	Występują efekty ARCH - wariancja warunkowa jest heteroskedastyczna

### Cały okres

W pełnym okresie model VAR(1) wskazuje kilka istotnych zależności, między instrumentami które zostały przedstawione w tabeli 5.

Tabela 5. Istotne parametry w równaniach modelu VAR dla całego okresu

Instrument (Skutek)	Zmienna opóźniona (Przyczyna)	Estymator ( $\beta$ )	Wartość p	Interpretacja
SPY	GLD (-1)	0,0585	0,0483	Zauważalny wpływ dodatni
	JNJ (-1)	-0,0768	0,002	Zauważalny wpływ ujemny
TLT	MSFT (-1)	0,0539	0,011	Zauważalna dodatnia zależność
	JNJ (-1)	0,0519	0,0101	Zauważalna dodatnia zależność
MSFT	JNJ (-1)	-0,1006	0,005	Silny wpływ ujemny
	SPY (-1)	-0,1369	0,0197	Silny wpływ ujemny
JNJ	TLT (-1)	0,0608	0,0363	Zauważalny wpływ dodatni
	GLD (-1)	0,0839	0,005	Silny wpływ dodatni
	JNJ (-1)	-0,0503	0,0446	Zauważalna ujemna autoregresja (po dodatnim dniu JNJ pojawia się lekka tendencja do „odbijania” w kolejnym dniu)

W przypadku złota nie występują istotne zależności od pozostałych instrumentów (istotna jest jedynie stała). Oznacza to, że w modelu VAR(1) dzienne stopy zwrotu złota są w bardzo niewielkim stopniu wyjaśniane przez opóźnienia innych aktywów.

Tabela 6. Jakość dopasowania modelu

Instrument	Skorygowany współczynnik determinacji
SPY	0,0255
TLT	0,0101
GLD	0,0008
MSFT	0,0369
JNJ	0,0173

Dopasowanie modelu jest słabe (maksymalnie ok. 3,69%), czyli VAR(1) ma ograniczoną moc wyjaśniającą i predykcyjną dla dziennych stóp zwrotu. Należy jednak pamiętać, że skorygowany współczynnik determinacji podano osobno dla każdego równania VAR i informuje on o stopniu wyjaśnienia zmienności danej stopy zwrotu przez opóźnienia wszystkich zmiennych w modelu. Uzyskane wartości są niskie, ale to jest typowe dla dziennych stóp zwrotu.

Tabela 7. Diagnostyka reszt modelu VAR

Test	Wartość p	Status
Autokorelacja (Portmanteau)	0,0000	(H0 odrzucona)
Normalność (JB)	0,0000	(H0 odrzucona)
Efekt ARCH	0,0000	(H0 odrzucona)

Diagnostyka wskazuje na autokorelację, brak normalności oraz obecność efektu ARCH w resztach (we wszystkich testach  $p < 0,05$ ). Oznacza to, że podstawowy VAR nie spełnia założeń dotyczących składnika losowego i wyniki należy interpretować ostrożnie. Przez to w dalszej części będą używane estymatory odporne żeby zniwelować negatywny wpływ autokorelacji i heteroskedastyczności na błędy standardowe parametrów oraz zapewnić poprawność wnioskowania statystycznego (testów istotności i przyczynowości)

### Marzec 2018 - koniec stycznia 2020

Model dla okresu obejmującego marzec 2018 - koniec stycznia 2020:

Tabela 8. Istotne parametry w równaniach modelu VAR dla okresu pierwszego

Instrument (Skutek)	Zmienna opóźniona (Przyczyna)	Estymator ( $\beta$ )	Wartość p	Interpretacja
<b>S&amp;P</b>	GLD (-1)	0,1843	0,0068	Silny wpływ dodatni
	MSFT (-1)	-0,1123	0,0285	Silny wpływ ujemny
<b>TLT</b>	MSFT (-1)	0,0760	0,0482	Słaby wpływ dodatni
	GLD (-1)	-0,1601	0,0018	Silny dodatni wpływ
<b>MSFT</b>	MSFT (-1)	-0,2177	0,0106	Silny wpływ ujemny

Wyniki pokazują, że stopy zwrotu złota i Microsoftu istotnie wpływają zarówno na indeks S&P 500, jak i na TLT, przy czym kierunek tych zależności jest przeciwny w obu przypadkach. Dodatkowo w przypadku akcji Microsoftu widoczna jest istotna ujemna zależność od własnych opóźnionych stóp zwrotu.

Tabela 9. Jakość dopasowania modelu

Instrument	Skorygowany współczynnik determinacji
SPY	0,0192
TLT	0,0209
GLD	- 0,0030
MSFT	0,0231
JNJ	0,0009

Skorygowany współczynnik determinacji dla wszystkich równań modelu przyjmuje bardzo niskie wartości, a w przypadku instrumentu GLD jest nawet ujemny. Najwyższą zdolność objaśniającą model wykazuje dla Microsoftu oraz TLT.

Tabela 10. Diagnostyka reszt modelu

Test	Wartość p
Autokorelacja (Portmanteau)	0,0775
Normalność (JB)	0,0000
Efekt ARCH	0,0000

Test Portmanteau nie wykazał podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej, co oznacza brak autokorelacji w resztach modelu. Jednocześnie wyniki testów diagnostycznych wskazują, że reszty nie pochodzą z wielowymiarowego rozkładu normalnego oraz stwierdzono występowanie efektu ARCH.

### Marzec 2020- koniec stycznia 2022

Dla okna czasowego obejmującego marzec 2020 - koniec stycznia 2022, otrzymano poniższe wyniki:

Tabela 11. Istotne parametry w równaniach modelu VAR dla okresu drugiego

Instrument (Skutek)	Kluczowe zmienne opóźnione	Estymator ( $\beta$ )	Wartość p	Interpretacja
<b>SPY</b>	SPY (-2)	0,3674	0,0001	Silna autokorelacja dodatnia
	MSFT (-1)	-0,155	0,0107	Silny wpływ ujemny
<b>MSFT</b>	SPY (-2)	0,3317	0,0071	Silny wpływ dodatni
	TLT (-1)	0,209	0,0202	Silny dodatni wpływ
<b>TLT</b>	TLT (-2)	-0,2801	0	Silna autoregresja ujemna

<b>JNJ</b>	SPY (-2)	0,2473	0,0046	Silny wpływ dodatni
<b>GLD</b>	TLT (-1)	0,1946	0,0001	Silny dodatni wpływ

Analiza modelu VAR wykazała sieć wzajemnych powiązań między aktywami, w której stopy zwrotu SPY i TLT są istotnie kształtowane przez swoje historyczne wartości. Badanie pokazało, że akcje Johnson & Johnson nie mają znaczącego wpływu na inne aktywa.

Tabela 12. Diagnostyka reszt modelu

Test	Wartość p
Autokorelacja (Portmanteau)	0,0000
Normalność (JB)	0,0000
Efekt ARCH	0,0000

Test występowania autokorelacji Portmanteau odrzucił hipotezę zerową. W resztach dalej występuje autokorelacja. Dlatego też istotność współczynników należy traktować z ostrożnością. Dodatkowo, reszty modelu nie pochodzą z wielowymiarowego rozkładu normalnego oraz występuje efekt ARCH.

Tabela 13. Jakość dopasowania modelu

Instrument	Skorygowany współczynnik determinacji
SPY	0,1692
TLT	0,0931
GLD	0,0458
MSFT	0,1790
JNJ	0,1468

W przypadku równania VAR(2) wyestymowanego dla okna czasowego obejmującego 2020-03-01 - 2022-01-31, skorygowany współczynnik determinacji dla dziennych stóp zwrotu jest nieco wyższy od pierwszego okresu. Jednakże wyniki te należy interpretować ostrożnie z uwagi na występującą autokorelację.

Marzec 2022 - koniec stycznia 2024

Dla okna czasowego obejmującego marzec 2022 - koniec stycznia 2024, otrzymano poniższe wnioski:

Tabela 14. Istotne parametry w równaniach modelu VAR dla okresu trzeciego

Instrument (Skutek)	Zmienna opóźniona (Przyczyna)	Estymator ( $\beta$ )	Wartość p	Interpretacja
SPY	TLT (-1)	-0,1049	0,0318	Silna ujemna autoregresja
	JNJ (-1)	0,1237	0,0318	Silny wpływ dodatni

Tylko dla równania opisującego obligacje skarbowe, choć jeden współczynnik był istotny. Jest to pierwsze opóźnienie stóp zwrotu obligacji skarbowych oraz pierwsze opóźnienie stóp zwrotu akcji spółki JNJ. Wzrost stóp zwrotu „TLT” opóźnionego o 1 okres zmniejsza stopy zwrotu „TLT”. Odwrotny mechanizm jest dla stóp zwrotu akcji JNJ.

Tabela 15. Diagnostyka reszt modelu

Test	Wartość p
Autokorelacja (Portmanteau)	0,3433
Normalność (JB)	0,0000
Efekt ARCH	0,0000

Test występowania autokorelacji Portmanteau nie odrzucił hipotezy zerowej. W resztach nie występuje autokorelacja. Reszty modelu nie pochodzą z wielowymiarowego rozkładu normalnego oraz występuje efekt ARCH.

Tabela 16. Jakość dopasowania modelu

Instrument	Skorygowany współczynnik determinacji
SPY	0,0018
TLT	0,0203
GLD	0,0003
MSFT	0,0013
JNJ	-0,0080

Na podstawie powyższej tabelki można stwierdzić, że opóźnienia w żadnym stopniu nie objaśniają stóp zwrotu aktywów.  $R^2$  dla wszystkich pojedynczych równań wynosi około 0. Niskie wartości współczynnika determinacji  $R^2$  mogą być skutkiem faktu, że dla większości równań opóźnione zmienne objaśniające okazały się statystycznie nieistotne.

### Relacje przyczynowe (test przyczynowości Grangera)

Następnie dla każdego okresu zastosowano odporny test przyczynowości Grangera oparty na teście Walda z wykorzystaniem estymatora macierzy kowariancji Newey-Westy (HAC). Podejście to wybrano ze względu na zidentyfikowane w diagnostyce problemy z autokorelacją i heteroskedastycznością reszt, które uniemożliwiły zastosowanie klasycznych testów F.

## Hipotezy testowe

Dla każdego kierunku zależności (np.  $X \rightarrow Y$ ) weryfikowano następujące hipotezy:

- $H_0$  : Opóźnione wartości zmiennej X nie pomagają w prognozowaniu zmiennej Y (brak przyczynowości w sensie Grangera).
- $H_1$ : Opóźnione wartości zmiennej X istotnie poprawiają prognozę zmiennej Y (istnieje przyczynowość w sensie Grangera).

Tabela 17. Istotne relacje przyczynowe (test przyczynowości Grangera) – pełny okres

Przyczyna Skutek Wartość p		
SPY	MSFT	0,0141
JNJ	MSFT	0,0135
GLD	JNJ	0,0121

W pełnym okresie test Grangera wskazuje, że SPY jest przyczyną w sensie Grangera dla MSFT, czyli wcześniejsze zwroty SPY pomagają prognozować zwroty MSFT. Ponadto JNJ jest przyczyną w sensie Grangera dla MSFT, a także GLD jest przyczyną w sensie Grangera dla JNJ.

Tabela 18. Istotne relacje przyczynowe (test przyczynowości Grangera) – okres marzec 2018 - koniec stycznia 2020

Przyczyna Skutek Wartość p		
GLD	SPY	0,0053
GLD	TLT	0,0006
GLD	JNJ	0,0145

Wartości p dla relacji z udziałem GLD są niskie, szczególnie w przypadku, gdy GLD jest przyczyną w sensie Grangera dla TLT (wartość p = 0,0006 - silne statystyczne potwierdzenie przyczynowości w sensie Grangera). Pozostałe relacje (GLD  $\rightarrow$  SPY, GLD  $\rightarrow$  JNJ) również są istotne statystycznie.

Tabela 19. Istotne relacje przyczynowe (test przyczynowości Grangera) – okres marzec 2020 - koniec stycznia 2022

Przyczyna Skutek Wartość p		
TLT	GLD	0,0157
SPY	MSFT	0,0116
GLD	JNJ	0,0437

Test przyczynowości Grangera wskazuje, że TLT jest przyczyną w sensie Grangera dla GLD, SPY dla MSFT oraz GLD dla JNJ.

Tabela 20. Istotne relacje przyczynowe (test przyczynowości Grangera) – okres marzec 2022 - koniec stycznia 2024

Przyczyna	Skutek	Wartość <i>p</i>
MSFT	SPY	0,0343
SPY	TLT	0,0247
MSFT	TLT	0,0394
JNJ	TLT	0,0020

Test przyczynowości Grangera wskazuje, że MSFT jest przyczyną w sensie Grangera dla SPY, natomiast SPY, MSFT oraz JNJ są przyczynami w sensie Grangera dla TLT. Najsilniejsze potwierdzenie statystyczne dotyczy relacji JNJ -> TLT (*p*=0,002).

Na podstawie powyższych wyników można stwierdzić, że wyniki testów Grangera nie były stabilne na przełomie czasu. Przykładowo, żadna zależność przyczynowa nie pokryła się w drugim i w trzecim okresie oraz w pierwszym okresie i trzecim okresie. Testy przyczynowości z pierwszego i drugiego okresu dały taki sam rezultat dla zależności „GLD -> JNJ”. Tą zależność potwierdza test przyczynowości na całym badanym okresie.

## Wnioski

Wyniki badań wskazują, że dobór okresu czasowego ma wpływ na charakter i stabilność zidentyfikowanych zależności, co potwierdza wysoką zmienność powiązań między aktywami w czasie. Szczególnie wyróżnia się okres obejmujący pandemię, w którym odnotowano najwyższą moc objaśniającą modeli oraz najbardziej rozbudowaną sieć istotnych statystycznie interakcji (choć występująca w tym czasie silna autokorelacja reszt mogła prowadzić do zniekształcenia wartości *p* w testach). Odnotowano niestabilność relacji przyczynowych w sensie Grangera, z których jedynie relacja, gdzie złoto jest przyczyną dla JNJ wykazała pewną powtarzalność. Zmienność wyników diagnostycznych oraz dopasowania modeli w poszczególnych oknach czasowych uzasadnia konieczność stosowania odpornych estymatorów HAC w celu niwelowania wpływu okresowych zaburzeń strukturalnych składnika losowego.