



AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA IM. STANISŁAWA STASZICA W KRAKOWIE

Wydział Zarządzania

*Projekt EFID - Projekt 6A*

Autorzy: *Patrycja Piła, Mateusz Strojek, Julia Szutka, Magdalena Wnuk*

Kierunek studiów: *Informatyka i Ekonometria*

Prowadzący: *dr hab. Tomasz Wójtowicz*

Kraków, 2025

## 1.Wstęp

Celem analizy jest zbadanie właściwości szeregu czasowego dziennych stóp zwrotu WIG20 z okresu od stycznia 2017 roku do chwili obecnej. Na podstawie tych danych dopasowano model ARMA opisujący średnią warunkową procesu. W dalszej części uwzględniono rozszerzone wersje tych modeli: GARCH, EGARCH oraz GJR-GARCH, aby uchwycić ewentualną zmienność warunkową i asymetrię w wahaniach stóp zwrotu. Dla każdego z modeli rozważono trzy różne rozkłady składnika losowego (normalny, t-Studenta oraz rozkład skośny normalny), a następnie zweryfikowano ich dopasowanie do danych empirycznych. Dla tych modeli wyznaczono prognozę kolejnej stopy zwrotu wraz z 95% przedziałem ufności i sprawdzono, czy rzeczywista wartość obserwowana mieści się w tym przedziale.

## 2. Eksploracja danych

### 2.1 Statystyki opisowe

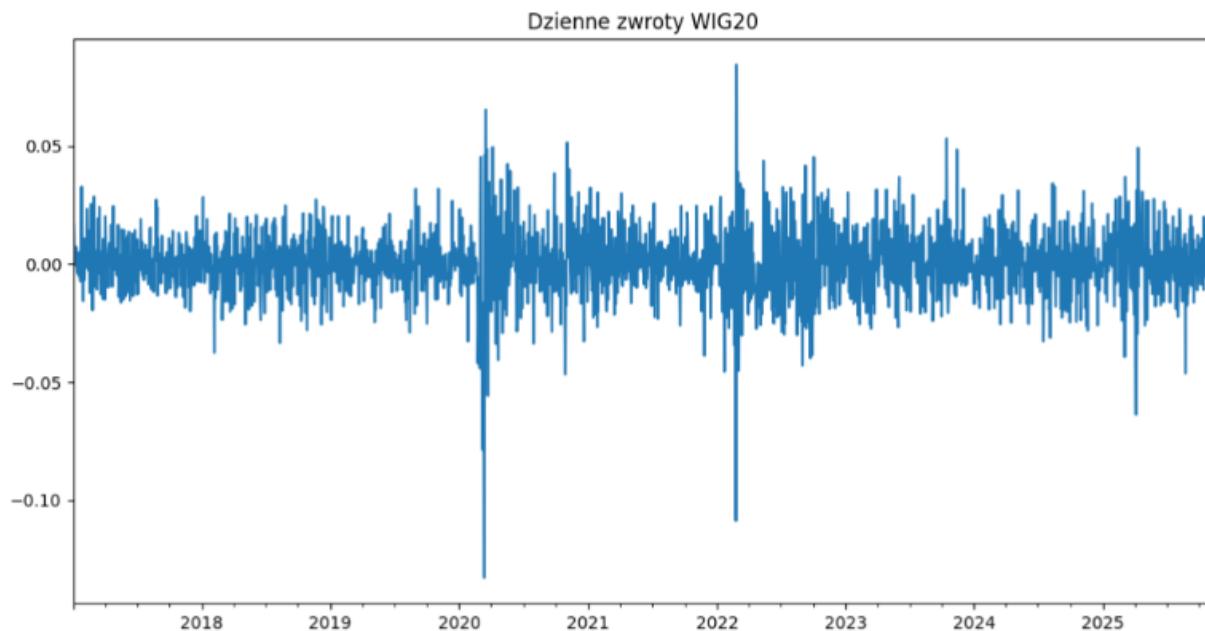
Tabela 1. Statystyki opisowe dziennych stóp zwrotu indeksu WIG20

Statystyka	Wartość
Liczba obserwacji	2305
Średnia	0,0003
Medianą	0,0000
Odchylenie Standardowe	0,0138
Minimum	-0,1328
Maksimum	0,0844
Rozstęp	0,2171
Skośność	-0,4830
Eksces	7,3383

W tabeli 1. przedstawiono podstawowe statystyki opisowe zwykłych dziennych stóp zwrotu indeksu WIG20 w okresie od 1 stycznia 2017 do 5 listopada 2025 roku. Próba obejmuje 2305 obserwacji.

Średnia dzienna stopa zwrotu wynosi 0,0003, a mediana 0,0000, co oznacza, że przeciętne dzienne zmiany wartości indeksu były bardzo niewielkie i oscylowały wokół zera. Wskazuje to, że w badanym okresie nie występował wyraźny trend wzrostowy ani spadkowy. Ujemna skośność (-0,48) oznacza, że więcej dni przynosi spadki niż wzrosty, a

rozkład stóp zwrotu jest lekko przesunięty w stronę wartości ujemnych. Z kolei wysoka eksces (7,33) potwierdza obecność grubych ogonów i zwiększonej liczby obserwacji skrajnych w porównaniu z rozkładem normalnym.



Analiza statystyk opisowych wskazuje, że dzienne zwykłe stopy zwrotu indeksu WIG20 w latach 2017–2025 cechowały się niewielką przeciętną stopą zwrotu, umiarkowaną zmiennością oraz asymetrycznym, leptokurtycznym rozkładem, typowym dla danych finansowych, w których często występują epizody podwyższonej niepewności i gwałtownych zmian rynkowych.

## 2.2. Test ADF

W celu sprawdzenia czy szereg dziennych stóp zwrotu indeksu WIG20 jest stacjonarny, przeprowadzono test Augmented Dickey-Fullera (ADF). Test ten pozwala ocenić, czy w szeregu występuje pierwiastek jednostkowy, czyli składnik powodujący niestacjonarność.

Hipotezy testu:

- $H_0: X_t \sim I(1)$ ,
- $H_1: X_t \sim I(0)$ .

Tabela 2. Wyniki testu ADF dla dziennych stóp zwrotu indeksu WIG20

Statystyka	Wartość p	Krytyczna wartość na poziomie 1%	Krytyczna wartość na poziomie 5%	Krytyczna wartość na poziomie 10%
-11,1670	0,0000	-3,4332	-2,8628	-2,5674

W tabeli 2. otrzymana statystyka testowa (-11,1670) jest mniejsza od wszystkich wartości krytycznych, a wartość  $p = 0,00$  jest znacznie niższa od poziomu istotności 0,05. Oznacza to, że odrzucamy hipotezę zerową o niestacjonarności szeregu.

Szereg dziennych stóp zwrotu WIG20 jest stacjonarny, co oznacza, że jego średnia i wariancja nie zmieniają się w czasie.

### 2.3. Kryteria informacyjne

Na podstawie wartości kryteriów informacyjnych AIC i BIC dokonano wyboru najlepszego modelu opisującego średnią warunkową szeregu dziennych stóp zwrotu indeksu WIG20.

Zarówno kryterium AIC, jak i BIC wskazały ten sam model — ARMA(0,0), co oznacza, że w badanym szeregu nie występuje istotna autokorelacja. Model ten jest równoważny modelowi złożonemu wyłącznie z wyrazu losowego (biały szum). Proces stóp zwrotu nie wykazuje zależności między kolejnymi obserwacjami.

## 3. ARMA(0,0)

Tabela 3. Wyniki estymacji modelu ARMA(0,0)

Parametr	Wartość	Błąd standardowy	p-wartość
const	0,0003	0,00	0,0002
$\sigma^2$	0,0002	2,64e-06	0,0000

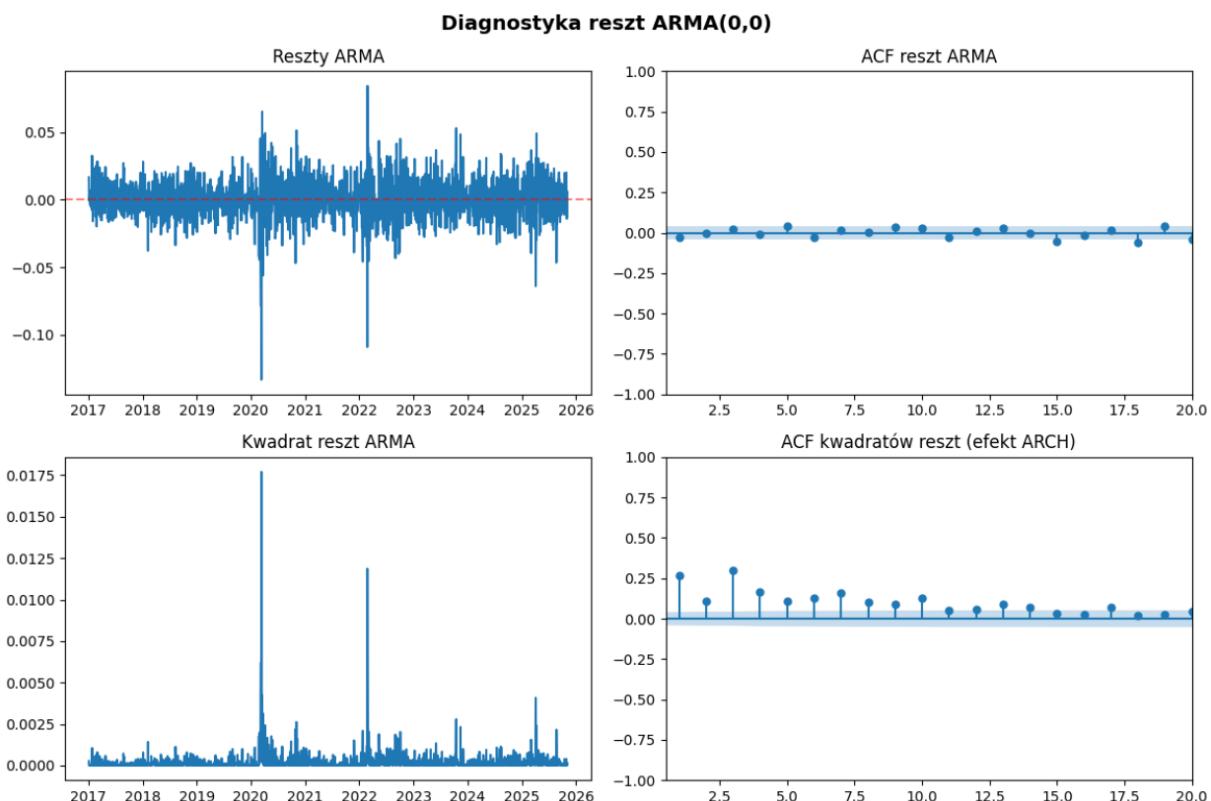
Otrzymana stała (const = 0,0003) jest statystycznie nieistotna ( $p = 0,342$ ), co sugeruje, że przeciętna dzienna stopa zwrotu oscyluje wokół zera. Wariancja składnika losowego ( $\sigma^2 = 0,0002$ ) jest istotna, co wskazuje na występowanie zmienności losowej w danych.

Tabela 4. Testy diagnostyczne modelu ARMA(0,0)

Test	p-wartość
Ljung-Box (autokorelacja reszt)	0,1509
Jarque-Bera (JB)	0,00

Test Ljung-Boxa dla kwadratów reszt	$\approx 0,00$
Test Engle'a (ARCH LM test)	$\approx 0,00$

Wyniki testów diagnostycznych pokazują, że reszty modelu nie są autokorelacyjne (test Ljung-Boxa dla 10 opóźnień:  $p = 0,1509$ ), co świadczy o poprawnym dopasowaniu modelu do składnika deterministycznego (średniej).



## 4. GARCH (1,1)

### 4.1. Z rozkładem normalnym

Tabela 5. Wyniki estymacji modelu ARMA(0,0)–GARCH(1,1) (rozkład normalny)

Parametr	Wartość	Błąd standardowy	p-wartość	Przedział ufności (95%)
$\omega$	0,00000386	0,00000000014	0,0000	[0,00000386; 0,00000386]
$\alpha_1$	0,0499	0,0000083	0,0000	[0,0498; 0,0499]
$\beta_1$	0,9271	0,0026	0,0000	[0,9220; 0,9320]

Wszystkie parametry modelu są istotne statystycznie na poziomie istotności 0,05. Wysoka suma parametrów  $\alpha_1 + \beta_1 \approx 0,977$  wskazuje na długotrwałą pamięć wariancji, czyli trwałość wahań zmienności.

*Tabela 6. Testy diagnostyczne modelu ARMA(0,0)–GARCH(1,1) (rozkład normalny)*

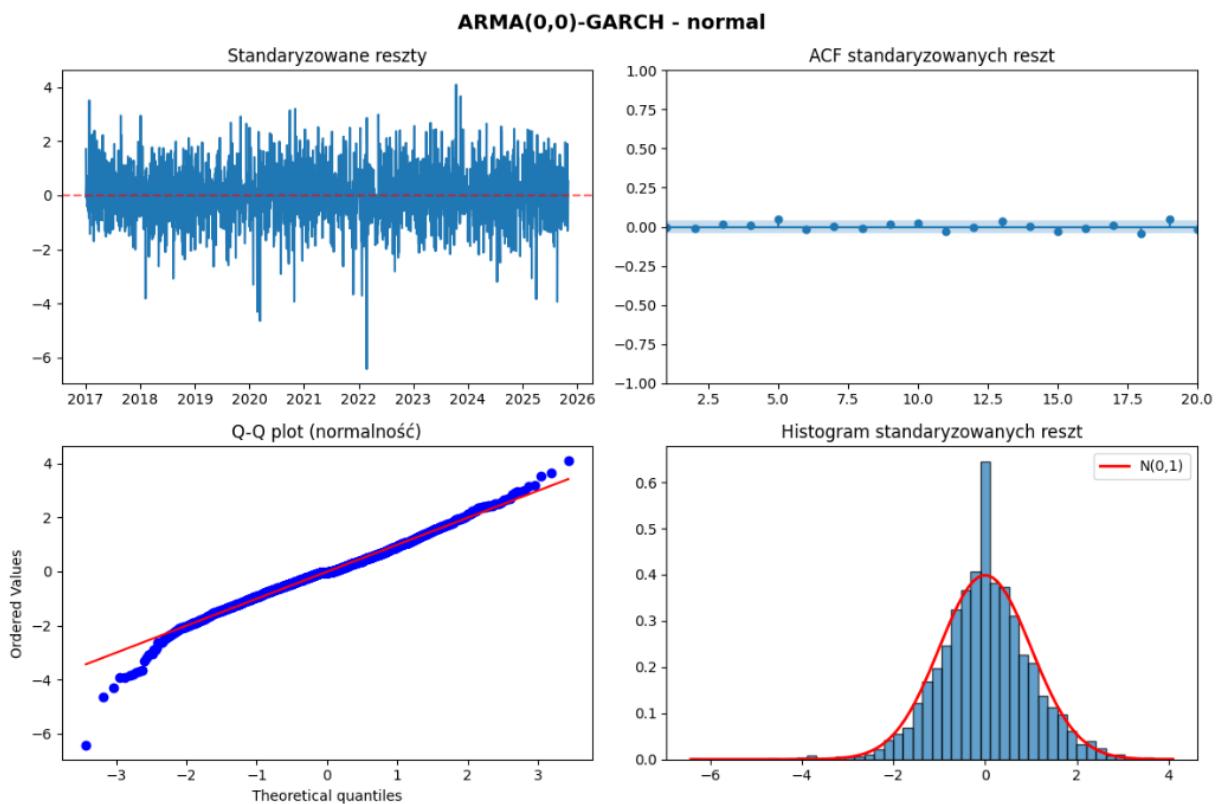
Test	p-wartość	Wniosek
Ljung-Box (autokorelacja reszt)	0,4481	Brak autokorelacji
Engle (ARCH LM test)	0,0520	Brak efektu ARCH
Kołmogorow-Smirnow (normalność reszt)	0,0056	Reszty odbiegają od rozkładu normalnego

Wyniki testów diagnostycznych potwierdzają, że model ARMA(0,0)–GARCH(1,1) został poprawnie dopasowany do danych. Test Ljung–Boxa wskazuje brak autokorelacji reszt, a test Engle'a potwierdza brak efektu ARCH, co oznacza stabilną wariancję modelu. Jedynie test Kołmogorowa–Smirnowa wykazał, że rozkład reszt odbiega od normalnego, co jest częste w szeregach finansowych i może wynikać z obecności grubych ogonów.

*Tabela 7. Prognoza jednostkowa modelu ARMA(0,0)–GARCH(1,1) (rozkład normalny)*

Wskaźnik	Wartość
Prognozowana średnia (ARMA)	0,0003
Prognozowane odchylenie standardowe (GARCH)	0,0109
Przedział ufności 95%	[-0,0211; 0,0216]
Rzeczywista wartość stopy zwrotu	-0,0091
Czy prognoza mieści się w przedziale ufności?	Tak

Prognoza jednookresowa wykazała, że rzeczywista wartość stopy zwrotu (-0,0091) mieści się w 95% przedziale ufności [-0,0211; 0,0217], co potwierdza poprawność oszacowanego modelu w krótkookresowym prognozowaniu zmienności.



#### 4.2. Z rozkładem t-studenta

*Tabela 8. Wyniki estymacji modelu ARMA(0,0)-GARCH(1,1) (rozkład t-studenta)*

Parametr	Wartość	Błąd standardowy	p-wartość	Przedział ufności (95%)
$\omega$	0,00000381	0,0000000047	0,0000	[0,00000380; 0,00000382]
$\alpha_1$	0,0499	0,0071	0,0000	[0,0358; 0,0639]
$\beta_1$	0,9272	0,0073	0,0000	[0,9130; 0,9420]
v (stopnie swobody)	7,4286	0,633	0,0000	[6,189; 8,669]

Wszystkie parametry modelu są istotne statystycznie ( $p < 0,05$ ). Wysoka suma  $\alpha_1 + \beta_1 \approx 0,977$  wskazuje na utrzymywanie się efektu zmienności. Wartość  $v \approx 7,4$  oznacza, że rozkład ma grubsze ogony niż normalny, co lepiej odwzorowuje dane finansowe.

*Tabela 9. Testy diagnostyczne modelu ARMA(0,0)-GARCH(1,1) (rozkład t-studenta)*

Test	p-wartość	Wniosek
Ljung-Box (autokorelacja reszt)	0,4480	Brak autokorelacji
Engle (ARCH LM test)	0,0558	Brak efektu ARCH

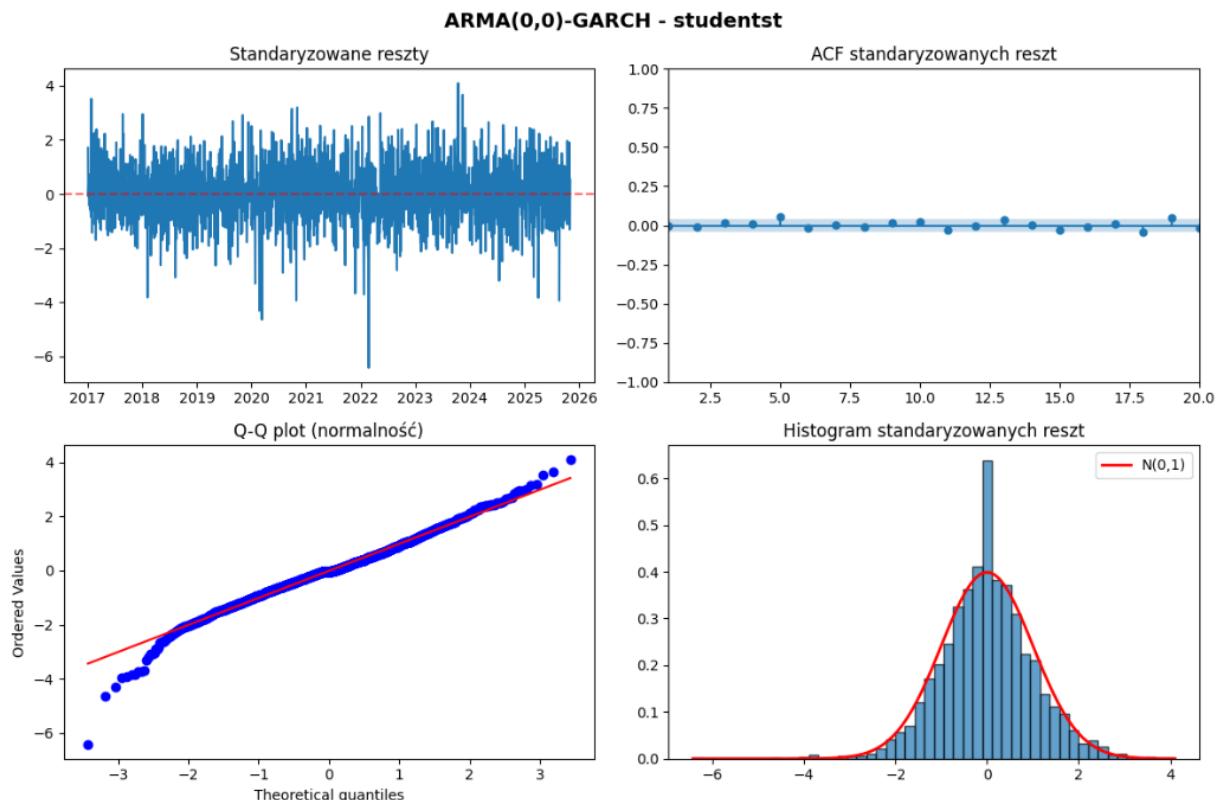
Test	p-wartość	Wniosek
Kołmogorow-Smirnow (normalność reszt)	0,0545	Reszty zgodne z rozkładem t-Studenta ( $p > 0,05$ )

Model ARMA(0,0)–GARCH(1,1) z rozkładem t-Studenta dobrze opisuje zarówno średnią, jak i wariancję warunkową szeregu stóp zwrotu WIG20. Brak autokorelacji reszt i brak efektu ARCH potwierdzają prawidłowość dopasowania modelu.

Tabela 10. Prognoza jednostkowa modelu ARMA(0,0)–GARCH(1,1) (rozkład t-studenta)

Wskaźnik	Wartość
Prognozowana średnia (ARMA)	0,0003
Prognozowane odchylenie standardowe (GARCH)	0,0109
Przedział ufności 95%	[−0,0251; 0,0257]
Rzeczywista wartość stopy zwrotu	-0,0091
Czy prognoza mieści się w przedziale ufności?	Tak

Rozkład reszt jest zgodny z rozkładem t-Studenta, co oznacza, że model trafnie odwzorowuje grube ogony charakterystyczne dla danych finansowych. Prognoza jednookresowa okazała się poprawna – rzeczywista stopa zwrotu mieści się w 95% przedziale ufności, co potwierdza dobrą jakość prognoz krótkookresowych.



### 4.3. Z rozkładem skośnym normlanym

Tabela 11. Wyniki estymacji modelu ARMA(0,0)–GARCH(1,1) (rozkład skośny normalny)

Parametr	Wartość	Błąd standardowy	p-wartość	Przedział ufności (95%)
$\omega$	0,00000411	0,0000000035	0,0000	[0,00000410; 0,00000412]
$\alpha_1$	0,0533	0,005260	0,0000	[0,0430; 0,0636]
$\beta_1$	0,9223	0,006205	0,0000	[0,910; 0,934]
$\eta$ (stopnie swobody)	7,4180	0,977	0,0000	[5,504; 9,332]
$\lambda$ (skośność)	0,0083	0,0221	0,706	[-0,035; 0,052]

Wszystkie parametry oprócz współczynnika skośności ( $\lambda$ ) są istotne statystycznie na poziomie istotności 0,05. Wysoka suma  $\alpha_1 + \beta_1 \approx 0,975$  potwierdza długotrwałą pamięć wariancji, czyli utrzymywanie się efektu zmienności w czasie. Wartość  $\eta \approx 7,4$  wskazuje na grube ogony, natomiast brak istotnej skośności ( $\lambda \approx 0$ ) oznacza, że rozkład jest prawie symetryczny.

Tabela 12. Testy diagnostyczne modelu ARMA(0,0)–GARCH(1,1) (rozkład skośny normalny)

Test	p-wartość	Wniosek
Ljung-Box (autokorelacja reszt)	0,4501	Brak autokorelacji
Engle (ARCH LM test)	0,1293	Brak efektu ARCH
Kołmogorow-Smirnow (normalność reszt)	0,0014	Reszty zgodne z rozkładem skośnym normalnym

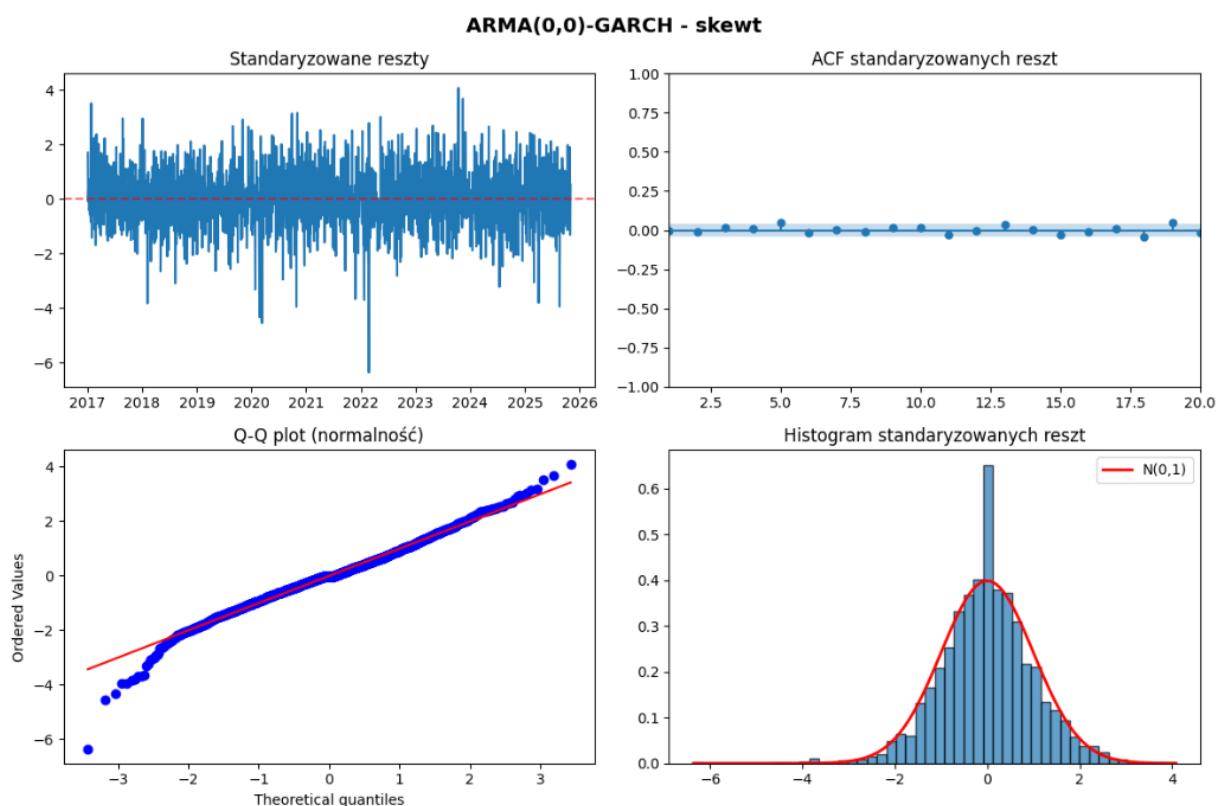
Model ARMA(0,0)–GARCH(1,1) z rozkładem skośnym normlanym dobrze opisuje zmienność stóp zwrotu WIG20. Brak autokorelacji i efektu ARCH potwierdza prawidłowe dopasowanie modelu, natomiast nieistotna skośność ( $\lambda$ ) wskazuje, że rozkład jest praktycznie symetryczny.

Tabela 13. Prognoza jednostkowa modelu ARMA(0,0)–GARCH(1,1) (rozkład skośny normalny)

Wskaźnik	Wartość
Prognozowana średnia (ARMA)	0,0003
Prognozowane odchylenie standardowe (GARCH)	0,0109
Przedział ufności 95%	[-0,0240; 0,0246]

Wskaźnik	Wartość
Rzeczywista wartość stopy zwrotu	-0,0091
Czy prognoza mieści się w przedziale ufności?	Tak

Chociaż test Kołmogorowa-Smirnowa wykazał niewielkie odchylenia od rozkładu teoretycznego, model poprawnie prognozuje zmienność — rzeczywista stopa zwrotu mieści się w 95% przedziale ufności, co potwierdza dobrą jakość prognozy krótkookresowej.



## 5. EGARCH (1,1)

Model EGARCH(1,1) (Exponential GARCH) to uogólniony model autoregresyjnej heteroskedastyczności, który opisuje zmienność warunkową stóp zwrotu w czasie. Umożliwia on modelowanie asymetrycznej reakcji rynku na informacje – negatywne szoki (spadki) zwykle powodują silniejszy wzrost zmienności niż szoki pozytywne o tej samej skali (tzw. efekt dźwigni).

### 5.1. Z rozkładem normalnym

Dla wyestymowanego modelu ARMA(0,0)-EGARCH(1,1) z założeniem normalnego rozkładu reszt. Wartość logarytmu wiarygodności wynosi 6793,70, natomiast kryteria informacyjne AIC i BIC są równe odpowiednio -13581,4 i -13564,2, co wskazuje na dobre dopasowanie modelu do danych.

Tabela 14. Wyniki estymacji modelu ARMA(0,0)-EGARCH(1,1) z rozkładem normalnym

Parametr	Wartość	Błąd standardowy	p-wartość	Przedział ufności (95%)
$\omega$	-0,2465	0,0661	0,0002	[-0,376; -0,117]
$\alpha_1$	0,1570	0,0263	0,0000	[0,105; 0,209]
$\beta_1$	0,9709	0,0076	0,0000	[0,956; 0,986]

Wszystkie parametry modelu są istotne statystycznie na poziomie istotności 0,05.

Tabela 15. Testy diagnostyczne modelu

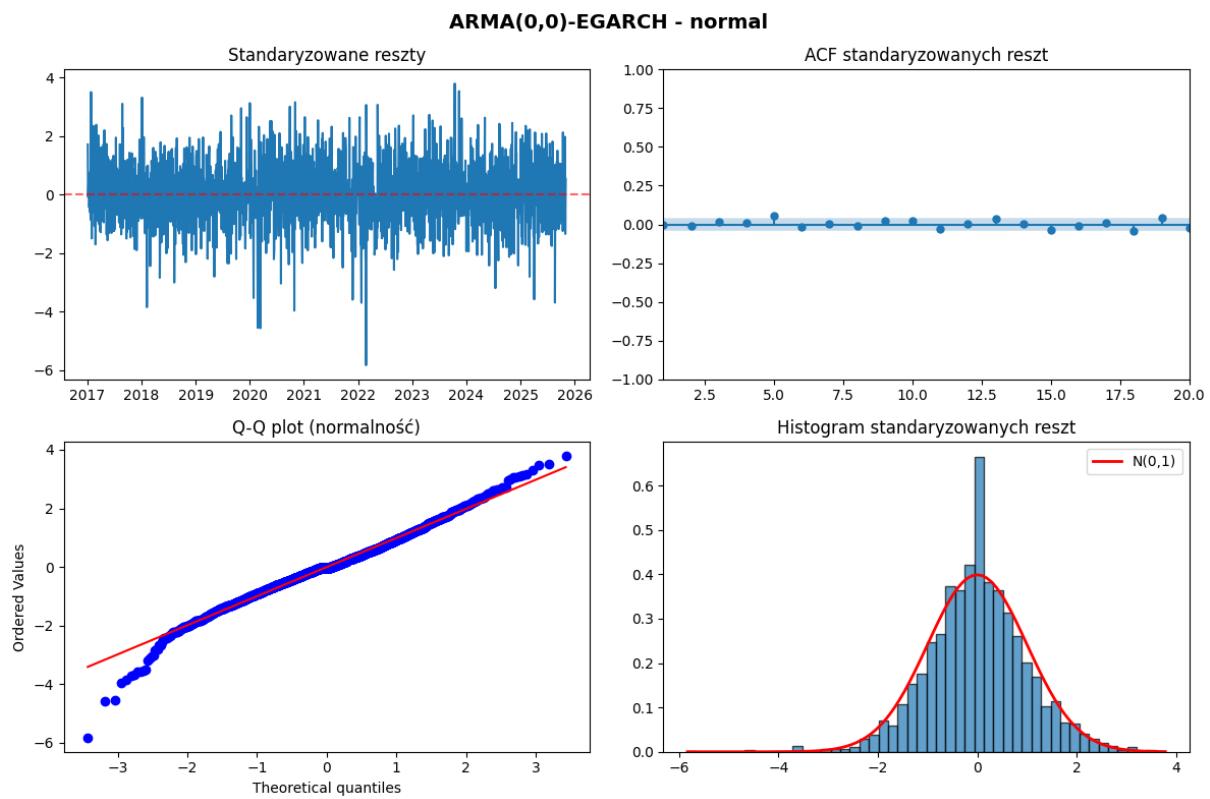
Test	p-wartość	Wniosek
Ljung-Box (autokorelacja reszt)	0,3603	Brak autokorelacji
Engle (ARCH LM test)	0,1893	Brak efektu ARCH
Kołmogorow-Smirnow (normalność reszt)	0,0098	Reszty odbiegają od rozkładu normalnego

Test Ljung-Boxa wskazuje brak autokorelacji reszt ( $p = 0,3603$ ), co oznacza, że model poprawnie opisuje dynamikę stóp zwrotu. Test Engle'a potwierdza brak efektu ARCH w resztach ( $p = 0,1893$ ), co sugeruje, że model właściwie uchwycił warunkową zmienność. Jedynie test Kołmogorowa-Smirnowa wskazuje na odchylenia od normalności ( $p < 0,05$ ).

Tabela 16. Prognoza jednookresowa

Wskaźnik	Wartość
Prognozowana średnia (ARMA)	0,0003
Prognozowane odchylenie standardowe (EGARCH)	0,0109
Przedział ufności 95%	[-0,0211; 0,0216]
Rzeczywista wartość stopy zwrotu	-0,0091
Czy prognoza mieści się w przedziale ufności?	Tak

Prognozowana dzienna stopa zwrotu wynosi 0,0003, natomiast prognozowana zmienność (odchylenie standardowe) 0,0109. Przedział ufności 95% dla prognozy mieści się w granicach [-0,0211; 0,0216], a rzeczywista wartość stopy zwrotu (-0,0091) znalazła się wewnątrz tego przedziału, co potwierdza poprawność krótkookresowej prognozy modelu.



Model EGARCH(1,1) dobrze opisuje zmienność indeksu WIG20, wskazując na wysoką trwałość wahań oraz asymetrię reakcji rynku na informacje (efekt dźwigni finansowej). Pomimo niewielkich odchyleń od normalności reszt, model można uznać za odpowiedni do krótkookresowej analizy ryzyka i prognozowania zmienności.

## 5.2. Z rozkładem t-studenta

Model ARMA(0,0)-EGARCH(1,1) z rozkładem t-Studenta został zastosowany w celu ujęcia zmienności dziennych stóp zwrotu indeksu WIG20.

*Tabela 17. Wyniki estymacji modelu ARMA(0,0)-EGARCH(1,1) z rozkładem normalnym*

Parametr	Wartość	Błąd standardowy	p-wartość	Przedział ufności (95%)
$\omega$	-0,1825	0,0604	0,0002	[-0,301; -0,064]
$\alpha_1$	0,1350	0,0239	0,0000	[0,082; 0,182]
$\beta_1$	0,9783	0,0070	0,0000	[0,965; 0,992]

Wszystkie parametry modelu są istotne statystycznie ( $p < 0,05$ ), co potwierdza jego poprawną specyfikację.

Tabela 18. Testy diagnostyczne modelu

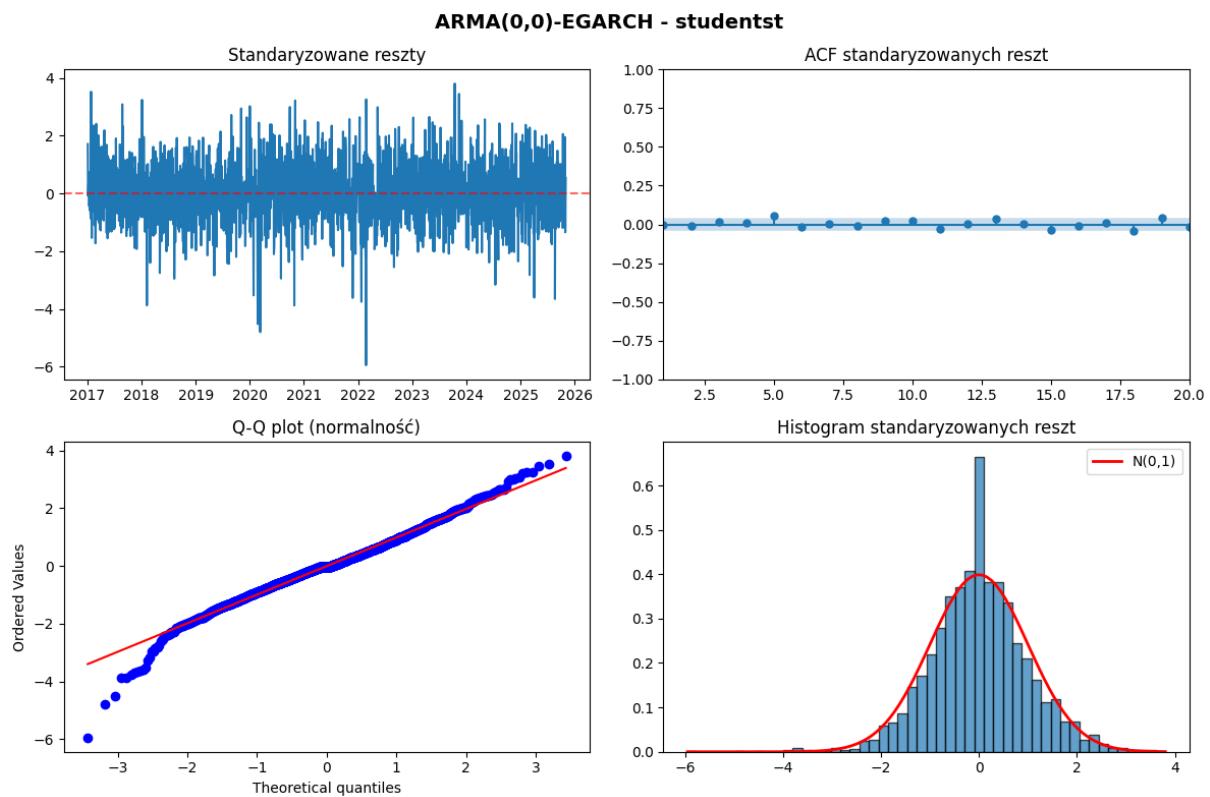
Test	p-wartość	Wniosek
Ljung–Box (autokorelacja reszt)	0,3457	Brak autokorelacji
Engle (ARCH LM test)	0, 0101	Występuje efekt ARCH
Kołmogorow–Smirnow (reszty pochodzą z rozkładu t-Studenta)	0,0557	Reszty odbiegają od rozkładu t-Studenta

Test Ljung–Boxa potwierdza brak autokorelacji reszt, co oznacza, że model poprawnie opisuje dynamikę zmian stóp zwrotu i nie pomija istotnych zależności czasowych. Z kolei test Engle'a wskazuje na występowanie efektu ARCH w resztach, co sugeruje, że w danych wciąż może pozostawać niewielka, nieuchwycona część zmienności. Test Kołmogorowa–Smirnowa wykazał, że reszty modelu nie odbiegają od rozkładu t-Studenta. Wartość p nieznacznie powyżej 0,05 sugeruje, że założenie o tym rozkładzie jest akceptowalne, a zastosowany model dobrze oddaje empiryczny kształt rozkładu błędów.

Tabela 19. Prognoza jednookresowa

Wskaźnik	Wartość
Prognozowana średnia (ARMA)	0,0003
Prognozowane odchylenie standardowe (EGARCH)	0,0108
Przedział ufności 95%	[-0,0256; 0,0262]
Rzeczywista wartość stopy zwrotu	-0,0091
Czy prognoza mieści się w przedziale ufności?	Tak

Prognozowana średnia dzienna stopa zwrotu wynosi 0,0003, co jest zgodne z obserwacją, że przeciętne dzienne zmiany indeksu WIG20 są bardzo niewielkie i oscylują wokół zera. Przedział ufności 95% dla prognozy wynosi [-0,0256; 0,0262], a rzeczywista wartość stopy zwrotu (-0,0091) mieści się w tym przedziale. Oznacza to, że model prawidłowo przewidział zakres potencjalnych zmian wartości indeksu, co potwierdza jego trafność prognostyczną.



Zastosowanie rozkładu t-Studenta poprawia odwzorowanie rzeczywistych danych, które często charakteryzują się większą liczbą ekstremalnych obserwacji niż zakłada rozkład normalny. Jednak w resztach wystąpił efekt ARCH.

### 5.3. Z rozkładem skośnym normalnym

Tabela 20. Wyniki estymacji modelu ARMA(0,0)-EGARCH(1,1) z rozkładem skośnym normalnym

Parametr	Wartość	Błąd standardowy	p-wartość	Przedział ufności (95%)
$\omega$	-0,1842	0,0606	0,0024	[-0,303; -0,065]
$\alpha_1$	0,1350	0,0239	0,0000	[0,088; 0,182]
$\beta_1$	0,9781	0,0070	0,0000	[0,964; 0,992]

Wszystkie oszacowane parametry modelu są statystycznie istotne. Parametr  $\alpha_1$  jest dodatni i istotny, co potwierdza występowanie zjawiska klastrowania zmienności.

Tabela 21. Testy diagnostyczne modelu

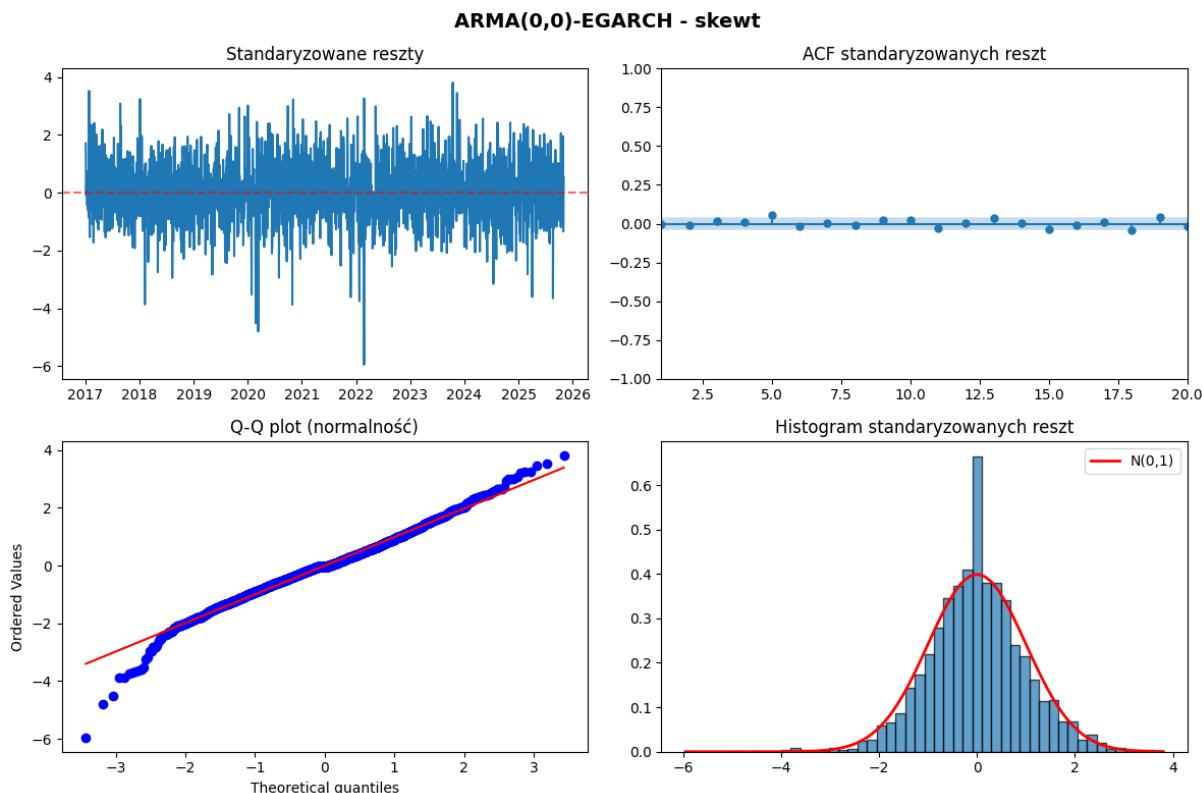
Test	p-wartość	Wniosek
Ljung-Box (autokorelacja reszt)	0,3461	Brak autokorelacji
Engle (ARCH LM test)	0,0097	Brak efektu ARCH
Kołmogorow-Smirnow (normalność reszt)	0,0018	Reszty niezgodne z rozkładem skośnym normalnym

Test Ljunga-Boxa potwierdza prawidłowe odwzorowanie dynamiki szeregu - w resztach nie stwierdza się istotnej autokorelacji. Analogicznie, test Engle'a nie wykrył obecności efektów ARCH, co oznacza, że zmienność warunkowa jest odpowiednio modelowana. Wątpliwości budzi jedynie test Kołmogorowa-Smirnowa, który ujawnia rozbieżność między empirycznym rozkładem reszt a przyjętym rozkładem skośnie normalnym.

Tabela 22. Prognoza jednookresowa

Wskaźnik	Wartość
Prognozowana średnia (ARMA)	0,0003
Prognozowane odchylenie standardowe (EGARCH)	0,0109
Przedział ufności 95%	[-0,0239; 0,0245]
Rzeczywista wartość stopy zwrotu	-0,0091
Czy prognoza mieści się w przedziale ufności?	Tak

Prognozowana średnia dzienna stopa zwrotu na poziomie 0,0003 odzwierciedla typową charakterystykę indeksu WIG20, którego dzienne zmiany są z reguły niewielkie i koncentrują się wokół zera. Zrealizowana stopa zwrotu (-0,0091) mieści się w 95% przedziale ufności [-0,0239; 0,0245], co świadczy o poprawności prognozy przedziałowej.



Przedstawione wykresy służą diagnostyce modelu GARCH poprzez analizę reszt standaryzowanych. Wykres czasowy reszt wskazuje na stacjonarność i brak klastrów zmienności. Funkcja autokorelacji (ACF) wykazuje brak istotnej autokorelacji w resztach

- wszystkie wartości mieszczą się w przedziale. Wykres Q-Q oraz histogram ujawniają odchylenia od rozkładu normalnego, szczególnie w postaci grubszych ogonów.

## 6. GJR - GARCH (1,1)

### 6.1. Z rozkładem normalnym

Tabela 23. Wyniki estymacji modelu ARMA(0,0)-GJR-GARCH(1,1) z rozkładem normalnym

Parametr	Wartość	Błąd standardowy	p-wartość	Przedział ufności (95%)
$\omega$	0,0000	0,0000	0,0000	[3,807e-06; 3,829e-06]
$\alpha_1$	0,0100	0,0409	0,8070	[-0,0702; 0,0902]
$\gamma_1$	0,1000	0,0438	0,0225	[0,0141; 0,186]
$\beta_1$	0,9200	0,0494	0,0000	[0,823; 1,017]

Spośród wszystkich parametrów jedynie parametr  $\alpha_1$  okazał się nieistotny.

Tabela 24. Testy diagnostyczne modelu

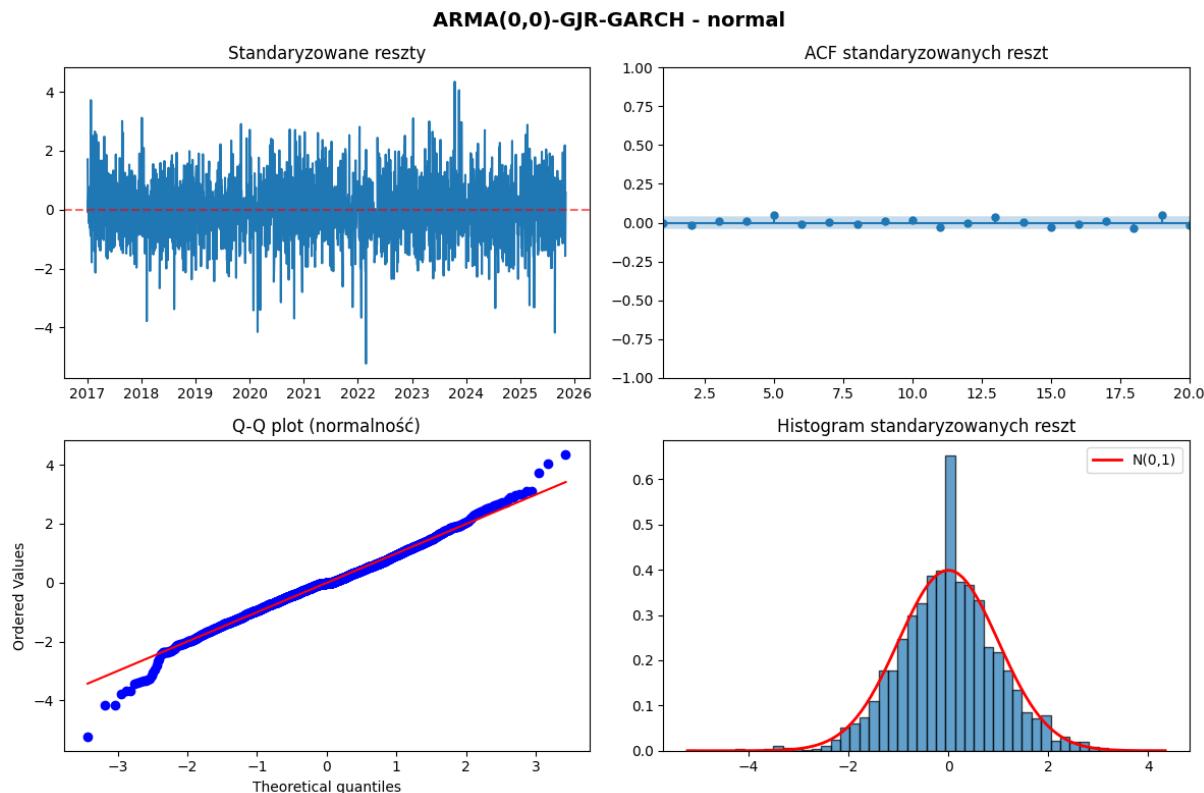
Test	p-wartość	Wniosek
Ljung-Box (autokorelacja reszt)	0,5856	Brak autokorelacji
Engle (ARCH LM test)	0,7879	Brak efektu ARCH
Kołmogorow-Smirnow (normalność reszt)	0,0265	Reszty niezgodne z rozkładem normalnym

Model wydaje się być dobrze dopasowany pod względem struktury, ponieważ poprawnie usuwa zarówno autokorelację liniową (test Ljung-Box), jak i nieliniową (efekt ARCH) z reszt (test Engle). Główny problem dotyczy założenia rozkładu: test Kołmogorowa-Smirnowa wskazuje, że standaryzowane reszty nie podążają za rozkładem normalnym.

Tabela 25. Prognoza jednookresowa

Wskaźnik	Wartość
Prognozowana średnia (ARMA)	0,0003
Prognozowane odchylenie standardowe (GARCH)	0,0098
Przedział ufności 95%	[-0,0190; 0,0195]
Rzeczywista wartość stopy zwrotu	-0,0091
Czy prognoza mieści się w przedziale ufności?	Tak

Prognoza wskazała niemal zerową oczekiwana stopę zwrotu (0,03%). Model oszacował zmienność na poziomie 0,98%, określając możliwy zakres odchyleń wokół prognozy. Rzeczywista stopa zwrotu (-0,91%) znalazła się wewnątrz 95% przedziału ufności [-1,90%; 1,95%].



Reszty oscylują losowo wokół zera i nie wykazują widocznych trendów ani systematycznych wzorców. Świadczy to o tym, że model poprawnie uchwycił warunkową zmienność procesu. Wszystkie współczynniki autokorelacji znajdują się w granicach przedziałów ufności, co oznacza brak istotnej autokorelacji.

W środkowej części rozkładu punkty dobrze przylegają do linii, lecz na ogonach wyraźnie od niej odbiegają. Oznacza to obecność grubych ogonów i potwierdza brak zgodności z rozkładem normalnym. Histogram pokazuje większą koncentrację masy prawdopodobieństwa w środku oraz grubsze ogony niż w rozkładzie normalnym.

## 6.2. Z rozkładem t-studenta

Tabela 26. Wyniki estymacji modelu ARMA(0,0)-GJR-GARCH(1,1) z rozkładem t-studenta

Parametr	Wartość	Błąd standardowy	p-wartość	Przedział ufności (95%)
$\omega$	0,0000	0,0000	0,0000	[5,157e -06; 5,173e -06]
$a_1$	0,0052	0,0077	0,4990	[-0,0099; 0,0203]
$\gamma_1$	0,1059	0,0149	0,0000	[0,0767; 0,135]

Parametr	Wartość	Błąd standardowy	p-wartość	Przedział ufności (95%)
$\beta_1$	0,9134	0,0074	0,0000	[0,899; 0,928]

Parametr  $\beta_1$  wskazuje na powolny powrót zmienności do poziomu długookresowego, natomiast brak istotności  $\alpha_1$  sugeruje marginalny wpływ pozytywnych szoków. Pozostałe parametry są istotne.

Tabela 27. Testy diagnostyczne modelu

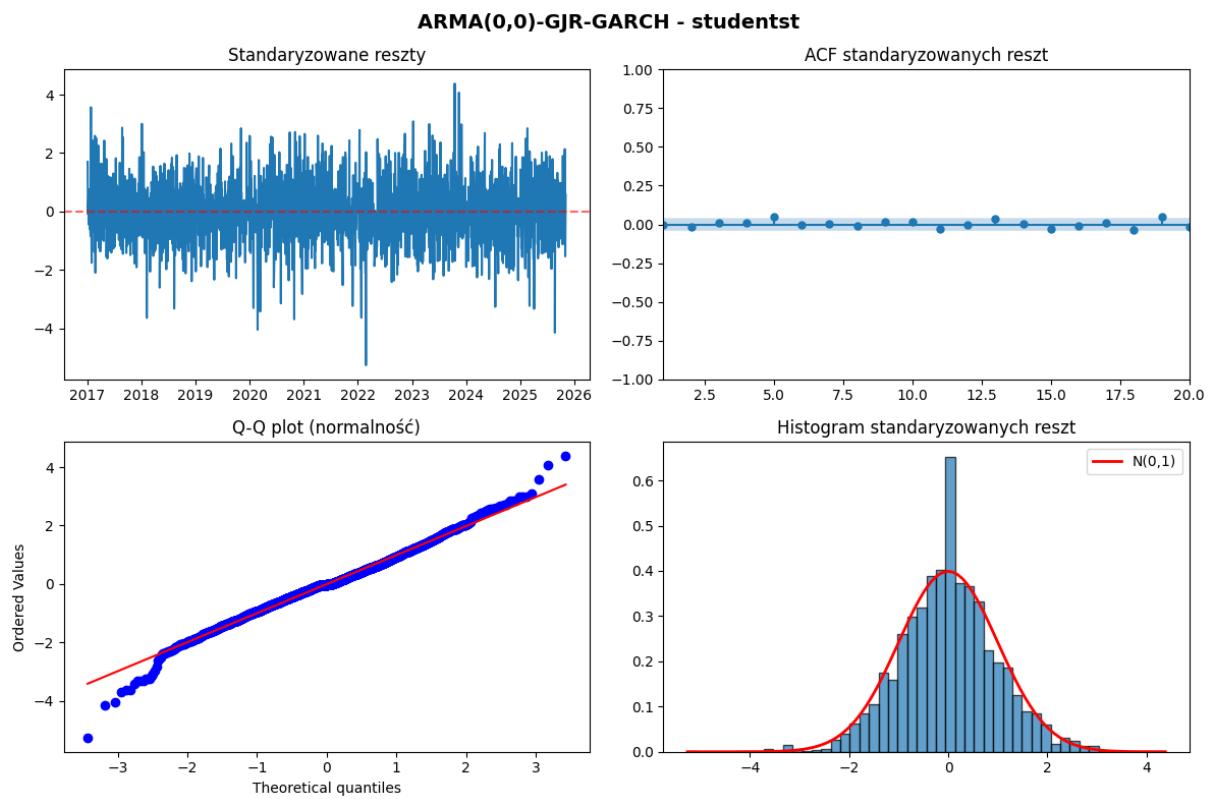
Test	p-wartość	Wniosek
Ljung-Box (autokorelacja reszt)	0,6018	Brak autokorelacji
Engle (ARCH LM test)	0,7596	Brak efektu ARCH
Kołmogorow-Smirnow (normalność reszt)	0,0658	Reszty zgodne z rozkładem t-Studenta

Testy Ljung-Box i Engle mają wysokie p-wartości, co oznacza, że model poprawnie usunął wszelką autokorelację liniową i nielinową (efekt ARCH) ze standaryzowanych reszt. Test Kołmogorowa-Smirnowa ma p-wartość nieznacznie wyższą niż standardowe 0,05, co pozwala nie odrzucić hipotezy zerowej o zgodności reszt z rozkładem t-Studenta. Wybór rozkładu t-Studenta okazał się trafny, ponieważ poprawił problem braku normalności (występujący w poprzednim modelu).

Tabela 28. Prognoza jednookresowa

Wskaźnik	Wartość
Prognozowana średnia (ARMA)	0,0003
Prognozowane odchylenie standardowe (GARCH)	0,0100
Przedział ufności 95%	[-0,0231; 0,0236]
Rzeczywista wartość stopy zwrotu	-0,0091
Czy prognoza mieści się w przedziale ufności?	Tak

Prognoza wskazała niemal zerową oczekiwana stopę zwrotu (0,03%). Model oszacował zmienność na poziomie 1%, określając możliwy zakres odchyleń wokół prognozy. Rzeczywista stopa zwrotu (-0,91%) znalazła się wewnątrz 95% przedziału ufności.



Reszty są losowe i skupione wokół zera, bez widocznych wzorców czy klastrów zmienności. Wszystkie wartości autokorelacji mieszczą się w granicach przedziału ufności i są bliskie zeru. Punkty na wykresie są znacznie bliżej linii odniesienia, w tym także w ogonach rozkładu. Histogram pokazuje bardziej spiczasty kształt i grubsze ogony niż w przypadku rozkładu normalnego.

### 6.3. Z rozkładem skośnym normalnym

*Tabela 29. Wyniki estymacji modelu ARMA(0,0)-GJR-GARCH(1,1) z rozkładem skośnym normalnym*

Parametr	Wartość	Błąd standardowy	p-wartość	Przedział ufności (95%)
$\omega$	4,056e-06	2,133e-09	0,000	[4,052e-06; 4,060e-06]
$\alpha_1$	0,0102	8,328e-03	0,220	[-6,102e-03; 2,654e-02]
$\beta_1$	0,0981	1,508e-02	7,607e-11	[6,858e-02; 0,128]
$\gamma_1$	0,9200	7,392e-03	0,000	[ 0,905; 0,934]

Wyniki estymacji modelu ARMA(0,0)-GJR-GARCH(1,1) wskazują na istotność parametrów  $\omega$ ,  $\beta_1$  i  $\gamma_1$ , co potwierdza obecność trwałości wariancji oraz silnego efektu asymetrii, zgodnie z którym negatywne szoki wywołują większy wzrost zmienności niż pozytywne. Parametr  $\alpha_1$  okazał się nieistotny statystycznie, co sugeruje, że bieżące szoki mają ograniczony wpływ na zmienność.

Tabela 30. Testy diagnostyczne modelu

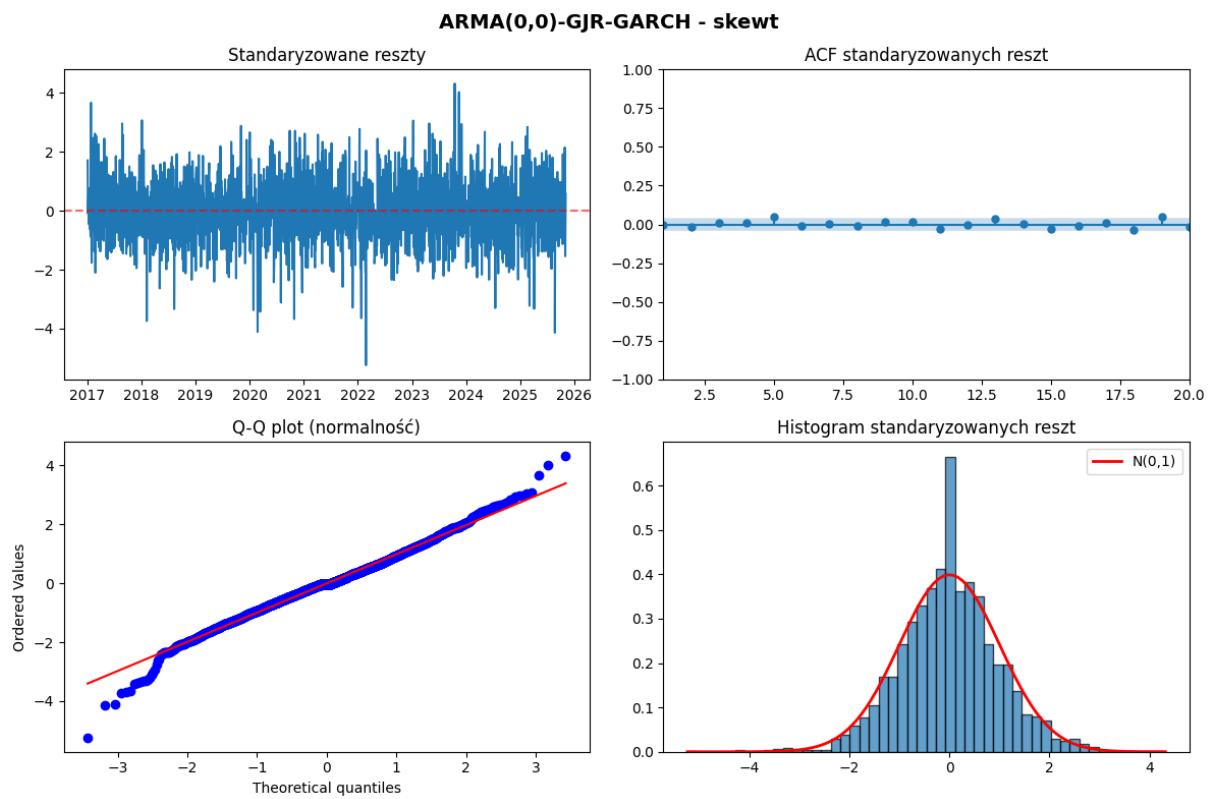
Test	p-wartość	Wniosek
Ljung-Box (autokorelacja reszt)	0,5830	Brak autokorelacji
Engle (ARCH LM test)	0,7946	Brak efektu ARCH
Kołmogorow-Smirnow (zgodność rozkładu reszt)	0,0085	Reszty niezgodne z rozkładem skośnym normalnym

Test Ljunga-Boxa wskazuje na poprawne odwzorowanie dynamiki szeregu, gdyż w resztach nie zaobserwowano istotnej autokorelacji. Podobnie, wynik testu Engle'a nie potwierdza obecności efektów ARCH, co świadczy o właściwym uchwyceniu zmienności warunkowej przez model. Pewne zastrzeżenia budzi jedynie wynik testu Kołmogorowa-Smirnowa, który sugeruje różnice między empirycznym rozkładem reszt a założonym rozkładem skośnie normalnym.

Tabela 31. Prognoza jednookresowa

Wskaźnik	Wartość
Prognozowana średnia (ARMA)	0,0003
Prognozowane odchylenie standardowe (EGARCH)	0,0099
Przedział ufności 95%	[-0,0219; 0,0224]
Rzeczywista wartość stopy zwrotu	-0,0091
Czy prognoza mieści się w przedziale ufności?	Tak

Zrealizowana wartość stopy zwrotu (-0,0091) mieści się w wyznaczonym 95% przedziale ufności [-0,0219; 0,0224]. Predykcja okazała się trafna.



## 6. Podsumowanie wyników modeli

Tabela 32. Podsumowanie

Model	Rozkład	AIC	BIC	Wartość p (test Ljung-Boxa)	Wartość p (test Engle'a)	Wartość p (test K-S)	Dolny przedział ufności	Górny przedział ufności	W przedzi ale?
ARMA(0,0)-GARCH	normal	-13583,2385	-13566,0100	0,448073	0,051969	0,005642	-0,021096	0,021650	Tak
ARMA(0,0)-GARCH	studentst	-13672,2201	-13649,2487	0,448019	0,055849	0,054495	-0,025148	0,025702	Tak
ARMA(0,0)-GARCH	skewt	-13670,9782	-13642,2640	0,450094	0,129313	0,001390	-0,023996	0,024551	Tak
ARMA(0,0)-EGARCH	normal	-13581,3976	-13564,1691	0,360256	0,189281	0,009755	-0,021056	0,021610	Tak
ARMA(0,0)-EGARCH	studentst	-13669,4809	-13646,5095	0,345735	0,010116	0,055678	-0,025646	0,026201	Tak
ARMA(0,0)-EGARCH	skewt	-13668,1743	-13639,4601	0,346063	0,009690	0,001764	-0,023908	0,024462	Tak
ARMA(0,0)-GJR-GARCH	normal	-13645,1477	-13622,1764	0,585556	0,787991	0,026473	-0,018974	0,019528	Tak
ARMA(0,0)-GJR-GARCH	studentst	-13712,2923	-13683,5781	0,601758	0,759574	0,065800	-0,023063	0,023617	Tak
ARMA(0,0)-GJR-GARCH	skewt	-13708,5635	-13674,1065	0,582952	0,794569	0,008456	-0,021888	0,022442	Tak

Spośród porównywanych modeli najlepsze dopasowanie uzyskał ARMA(0,0)-GJR-GARCH z rozkładem t-Studenta, charakteryzujący się najniższymi wartościami kryteriów AIC i BIC. Model ten spełnia testy diagnostyczne Ljung-Boxa i Engle'a (brak autokorelacji i efektów ARCH), rozkład reszt jest zgodny z założonym, a prognozy mieszczą się w wyznaczonych przedziałach ufności. Wszystkie modele prawidłowo dokonały prognozy, rzeczywista wartość mieściła się w 95% przedziale ufności. Największą wariancję błędu prognozy następnej wartości zakłada model ARMA(0,0)-EGARCH z rozkładem t-studenta, natomiast najmniejszą zakłada model ARMA(0,0)-GJR-GARCH z rozkładem normalnym. Dla wszystkich modeli standaryzowane reszty nie wykazują autokorelacji. Dla dwóch modeli standaryzowane reszty nadal charakteryzują się występowaniem efektu ARCH oraz dla trzech modeli standaryzowane reszty są zgodne z założonym wcześniej rozkładem.