



AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA IM. STANISŁAWA STASZICA W KRAKOWIE

Wydział Zarządzania

Projekt EFiD - Projekt 10B

Autorzy: *Patrycja Piła, Mateusz Strojek, Julia Szutka, Magdalena Wnuk*

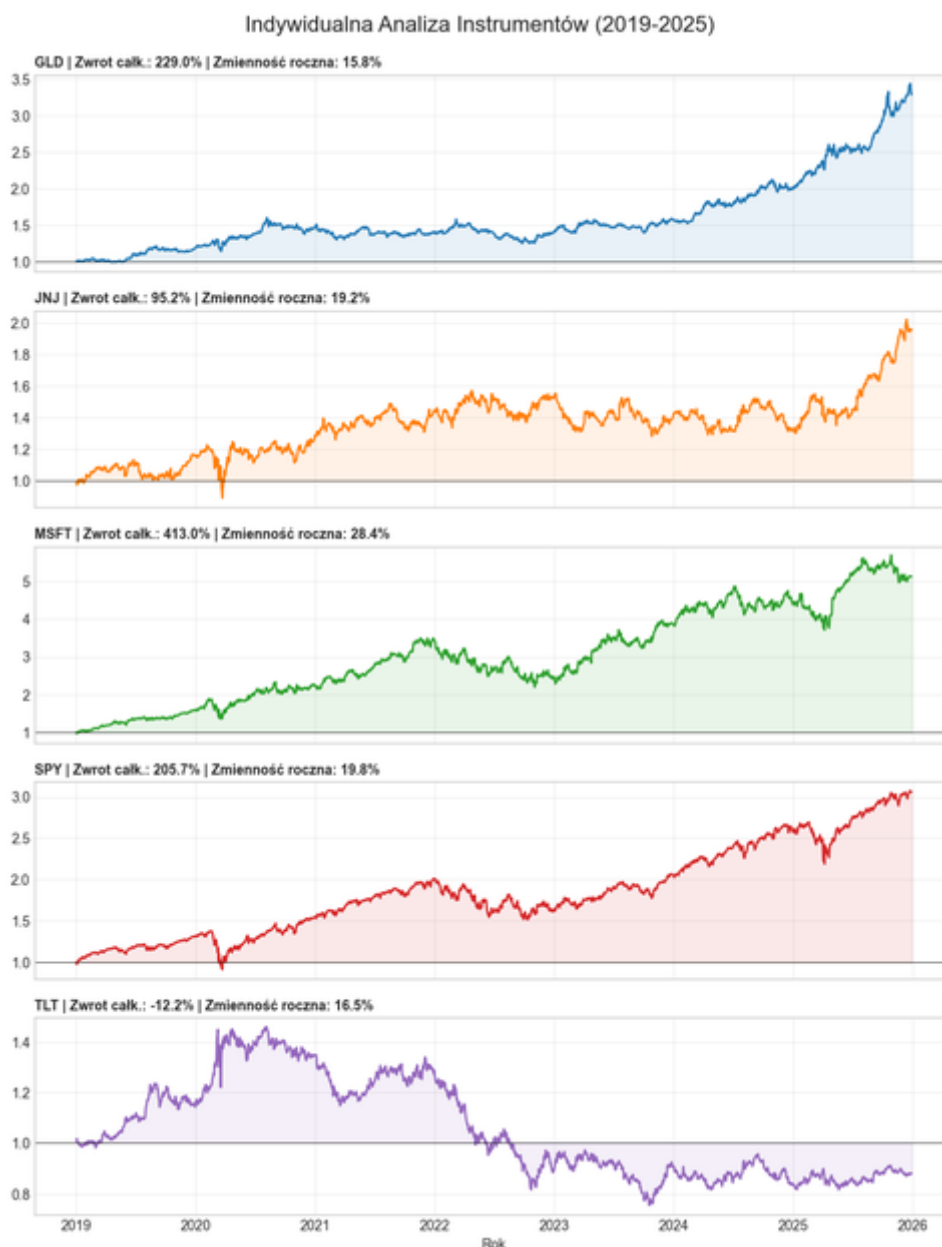
Kierunek studiów: *Informatyka i Ekonometria*

Prowadzący: *dr hab. Tomasz Wójtowicz*

Kraków, 2026

Wstęp

Celem projektu jest rozszerzenie badania przedstawionego w części A poprzez analizę stóp zwrotu portfela o minimalnym ryzyku wyznaczonego z zastosowaniem modeli BEKK oraz DCC-GARCH. W szczególności uwzględnione zostają modele z warunkowym rozkładem normalnym oraz rozkładem t-Studenta.



Na wykresie pokazano skumulowane stopy zwrotu każdego instrumentu w latach 2019-2025. Najsilniej rośnie MSFT, ale widać u niego dość spore wahania. SPY w porównaniu do innych instrumentów ma stabilny trend wzrostowy z okresowymi obsunięciami, a JNJ zachowuje się spokojniej i bardziej defensywnie. Złoto rośnie umiarkowanie od około 2024 roku. TLT wypada

najstabilniej - po 2022 r. wyraźnie traci. W każdym z instrumentów w 2020 roku widać załamanie/spadek związany z wybuchem pandemii po którym następuje odbicie. Największe załamanie widać dla JNJ i SPY.

Poniższa tabela przedstawia statystyki opisowe stóp zwrotu aktywów, które bierze się pod uwagę przy tworzeniu portfeli. Oprócz statystyk opisowych, przedstawione są również wyniki testu normalności Jarque-Bera, gdzie hipotezą zerową było występowanie normalności, natomiast hipotezą alternatywną jest jej brak.

Tabela 1. Statystyki opisowe stóp zwrotu badanych aktyw

Aktywo	Zannualizowana stopa zwrotu	Mediana (roczna)	Odch. std. (zannualizowane)	Skośność	Eksces	JB p-wartość	Czy rozkład normalny?
GLD	0,1831	0,2163	0,1575	-0,3415	3,1285	0,0000	Nie
TLT	-0,0050	0,0685	0,1647	0,1638	4,4971	0,0000	Nie
JNJ	0,1143	0,1217	0,1922	0,1247	8,2006	0,0000	Nie
SPY	0,1797	0,2495	0,1978	-0,2949	13,7814	0,0000	Nie
MSFT	0,2745	0,2916	0,2837	0,0800	7,7555	0,0000	Nie

Największą zannualizowaną stopą zwrotu, czyli średnią dzienną stopą zwrotu * 252, charakteryzuje się MSFT, co jest spójne z jego silnym trendem wzrostowym w badanym okresie, ale jednocześnie ma on też najwyższe zannualizowane odchylenie standardowe (odchylenie standardowe policzone na dziennych stopach zwrotu * $\sqrt{252}$). Najstabilniej wypada TLT, które jako jedyne ma ujemną roczną średnią. Pozostałe aktywa (GLD, SPY, JNJ) mają dodatnie średnie roczne. GLD i SPY osiągają zbliżone poziomy, a JNJ wypada bardziej umiarkowanie.

Test Jarque-Bery wskazuje, że dla każdego instrumentu odrzucamy normalność rozkładu stóp zwrotu (wartość p = 0), co może sugerować obecność skośności lub „grubych ogonów”.

Model Markowitza

Zastosowano model opracowany przez Markowitza przy konstruowaniu portfeli. W przypadku portfela z wieloma spółkami, wartość oczekiwana portfela jest równa:

$$E(R_p) = \sum_{i=1}^5 w_i * E(R_i)$$

Gdzie:

- $E(R_p)$ – Oczekiwana stopa zwrotu całego portfela.
- w_i – Waga i-tej spółki w portfelu
- $E(R_i)$ – Oczekiwana stopa zwrotu i-tej spółki.

Aby wyznaczyć wariancję portfela dla wielu aktywów, trzeba skorzystać z następującego wzoru:

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^5 w_i^2 \sigma_i^2 + 2 \sum_{i=1}^5 \sum_{j=1, i \neq j}^5 w_i w_j \sigma_i \sigma_j \rho_{\{ij\}}$$

Gdzie:

- σ_p^2 – Wariancja portfela.
- w_i – Waga aktywa i .
- σ_i^2 – Wariancja aktywa i .
- $\rho_{\{ij\}}$ – Korelacja między aktywem i a aktywem j .

Celem badania jest zbudowanie portfela, w którym aktywa nie są ze sobą mocno dodatnio skorelowane. Zapobiegamy temu, aby wagi były ujemne.

Wyniki część A

W podsumowaniu całego badanego okresu, dla każdego portfela oraz każdej stopy zwrotu, uwzględniono annualizowaną stopę zwrotu i odchylenie standardowe oraz dzienne miary ryzyka VaR i ES.

Tabela 2. Podsumowanie całego okresu

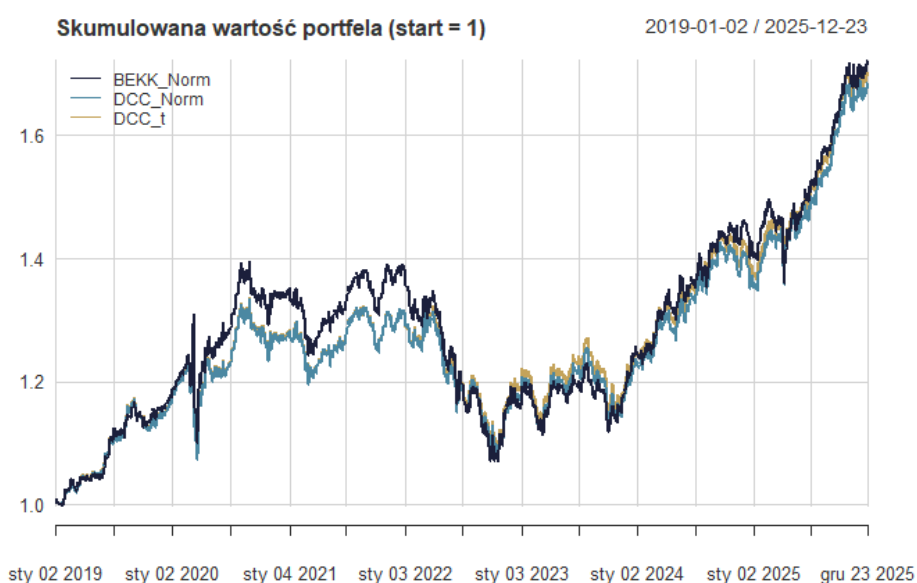
	Średnia	Odch. Stand.	Dzienny VaR (95%)	Dzienny ES (95%)
GLD	0,1831	0,1575	-0,0157	-0,0227
JNJ	0,1143	0,1922	-0,0164	-0,0274
MSFT	0,2745	0,2837	-0,0269	-0,0398
SPY	0,1797	0,1978	-0,0177	-0,0299
TLT	-0,0050	0,1647	-0,0164	-0,0223
MVP	0,1007	0,0989	-0,0097	-0,0137
Równoważony	0,1493	0,1217	-0,0108	-0,0172

Największe zyski osiągnęło MSFT, jednak towarzyszyło im najwyższe ryzyko. Spółka cechowała się największym odchyleniem standardowym oraz największym dziennym VaR. Kolejnym dobrze wypadającym aktywem było złoto (GLD), które uzyskało wysoką annualizowaną stopę zwrotu przy umiarkowanej zmienności i relatywnie bezpiecznym poziomie VaR. Najgorzej w badanym okresie wypadło TLT, notując ujemną annualizowaną zwrotu przy stosunkowo wysokiej zmienności. Portfel MVP osiągnął najniższe odchylenie standardowe spośród wszystkich analizowanych pozycji, wyraźnie niższe nawet niż dla najbezpieczniejszego pojedynczego aktywa, czyli GLD, co potwierdza skuteczność dywersyfikacji w redukcji ryzyka portfela. Dodatkowo dzienny VaR dla MVP wynosi jedynie -0,97%, a dzienny ES dla portfeli MVP

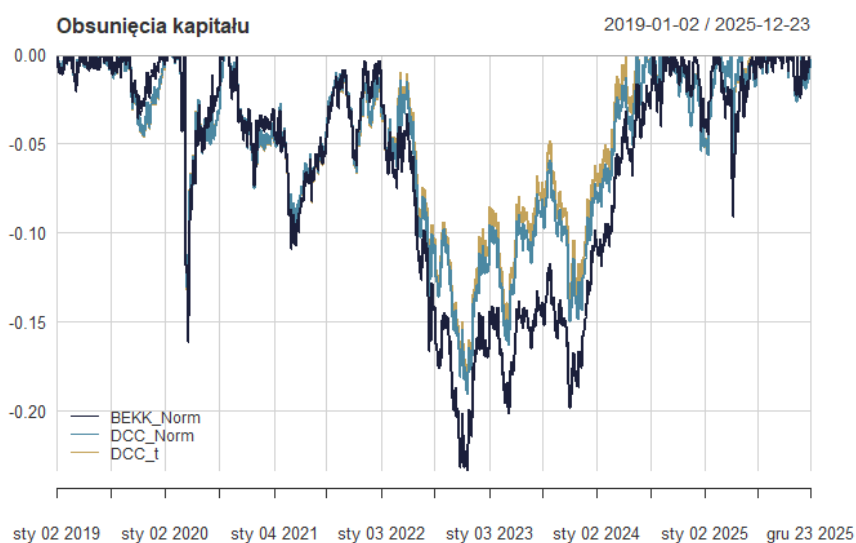
oraz równoważonego jest znacznie niższy niż dla pojedynczych akcji, gdzie w przypadku MSFT ES sięga aż -3,98%.

Wyniki część B

Na przestrzeni czasu, skumulowana wartość portfela kształtowała się różnie. W większości czasu portfele budowane za pomocą BEKK oraz DCC-GARCH pokrywały się. Różnicą jest okres czasowy obejmujący początek COVID-19 (około marzec 2020 roku) do lutego 2022 roku. Wtedy skumulowana wartość portfela konstruowana za pomocą modeli DCC była mniejsza od wartości portfela skonstruowanego za pomocą modelu BEKK. Potem różnice były niewielkie.



Poniżej przedstawiono wykres obsunięcia kapitału (*drawdown*) dla portfeli o minimalnej wariancji wyznaczanych z wykorzystaniem modeli BEKK oraz DCC-GARCH w latach 2019-2025. Obsunięcie kapitału mierzy procentowy spadek wartości portfela względem jego historycznego maksimum.



Pierwsze istotne obsunięcie wystąpiło około marca 2020. Można to wiązać z wybuchem pandemii COVID-19. W tym okresie portfele spadły względem wcześniejszego maksimum nawet o około 16%. Następnie, na przełomie lutego i marca 2021, widoczne były kolejne wahania (maksymalnie 11%-procentowe).

Najbardziej długotrwały i głęboki spadek pojawia się w okresie od około lutego 2022 do początku 2024 roku, a potem odbicie i wzrost. W tym czasie obsunięcie dla portfela opartego o BEKK sięga prawie 25%, natomiast dla portfeli opartych o DCC-GARCH (rozkład normalny i t-Studenta) wynosi około 18%. Był to okres wybuchu wojny w Ukrainie. Okres ten można interpretować jako czas silnej niepewności rynkowej.

W analizie obsunięć ważna jest nie tylko głębokość spadku, ale również czas powrotu do wcześniejszych maksimów. Portfele wyznaczone metodą DCC-GARCH szybciej wychodzą z obsunięć i mają wyższe wartości „dołków” w porównaniu do portfela opartego o BEKK, który wykazuje zarówno największą głębokość, jak i najdłuższy czas utrzymywania się obsunięcia. Dodatkowo DCC z rozkładem t-Studenta radzi sobie najlepiej, ale wersja z rozkładem normalnym różni się nieznacznie.

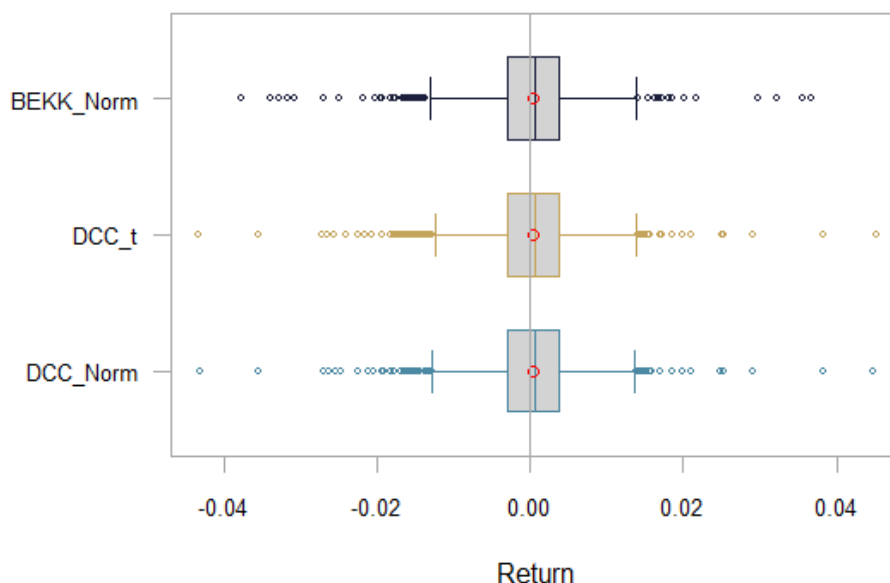
Tabela 3. Podsumowanie wyników modeli

	BEKK (norm.)	DCC (norm.)	DCC (t-student)
Annualizowana stopa zwrotu	0,0813	0,0779	0,0797
Annualizowane odchylenie std.	0,0994	0,0969	0,0969
VaR (95%)	-0,0098	-0,0097	-0,0097
ES (95%)	-0,0146	-0,0140	-0,0140

W analizie portfela dążymy do minimalizacji ryzyka, dlatego wartości VaR i ES powinny być jak najbliższe zera, przy czym znak minus informuje o potencjalnej stracie. VaR (95%) = -0,0097 oznacza, że z 95% prawdopodobieństwem dzienna strata nie przekroczy 0,97%, natomiast ES (95%) = -0,0140 pokazuje średnią stratę na poziomie 1,40% w najgorszych 5% przypadków.

Porównanie modeli wskazuje, że najbezpieczniejszym wyborem są modele DCC zarówno z rozkładem normalnym, jak i t-Studenta, które charakteryzują się niższą zmiennością (9,69%) oraz wartościami VaR i ES bliższymi zeru niż model BEKK. Model BEKK uzyskał najwyższą zannualizowaną stopę zwrotu (8,13%), czyli średnią dzienną stopę zwrotu pomnożoną przez 252 dni, jednak odbywa się to kosztem wyższego ryzyka, co potwierdzają bardziej ujemne miary VaR i ES.

Rozkład stóp zwrotu – porównanie modeli



Wąskie pudełka skupione wokół zera wskazują, że wszystkie modele skutecznie realizują strategię MVP, utrzymując dzienne stopy zwrotu w bardzo ograniczonym przedziale zmienności. Potwierdza to wysoką stabilność portfeli oraz efektywność minimalizacji ryzyka. Wartości odstające po lewej stronie, sięgające nawet -4%, odpowiadają za kształtowanie miar VaR i ES, przy czym w modelu BEKK występują one częściej, co tłumaczy jego bardziej ujemny ES. Z kolei skrajne dodatnie obserwacje po prawej stronie wyjaśniają wyższą średnią stopę zwrotu BEKK mimo większej zmienności.

Wnioski

Mimo że model BEKK pozwala na bezpośrednie modelowanie interakcji między zmiennościami (*spillovers*), w badanym okresie (2020–2025) wykazał on tendencję do generowania głębszych obsunięć kapitału. Modele DCC, charakteryzujące się mniejszą liczbą parametrów, okazały się bardziej odporne na szoki (np. wybuch wojny w Ukrainie), co sugeruje ich lepszą stabilność w warunkach niepewności. Wyższa zannualizowana stopa zwrotu modelu BEKK (8,13%) jest konsekwencją występowania rzadkich, skrajnie dodatnich stóp zwrotu, co potwierdza analiza wykresów pudełkowych.