



AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA IM. STANISŁAWA STASZICA W KRAKOWIE  
Wydział Zarządzania

*Projekt EFID - Projekt 5B*

Autorzy: *Patrycja Piła, Mateusz Strojek, Julia Szutka, Magdalena Wnuk*

Kierunek studiów: *Informatyka i Ekonometria*

Prowadzący: *dr hab. Tomasz Wójtowicz*

Kraków, 2025

## **Spis treści**

Polecenie zadania .....	3
Wstęp .....	3
Przebieg badania .....	3
Użyte biblioteki .....	4
Wyniki .....	5
Symulacja dla N= 20 .....	5
Symulacja dla N= 100 .....	12
Symulacja dla N= 500 .....	19
Podsumowanie wyników .....	26

## Polecenie zadania

### Część A

**Wersja E** (działanie różnych wersji testu ADF) Dla ustalonej długości danych  $N = 100$  i dla  $\varphi_0 = 1$  i  $\varphi_1 = 0,9$  oraz  $\sigma^2 = 1$  przeprowadzić następującą symulację:

1. Wygenerować  $N$  wartości modelu AR (1):  $X_t = \varphi_0 + \varphi_1 X_{t-1} + \varepsilon_t$ ,  $\varepsilon_t \sim iid(0, \sigma^2)$ .
2. Za pomocą różnych wersji testu ADF (bez stałej, ze stałą, z trendem liniowym) zbadać stacjonarność wygenerowanych danych.
3. Zapamiętać p-value przeprowadzonych testów.
4. Kroki 1-3 powtórzyć 1000 razy.

Obliczyć statystyki opisowe rozkładów uzyskanych wartości p-value. Przedstawić graficznie ich te rozkłady. Obliczyć odsetek przypadków odrzuceń hipotezy głównej w teście ADF. Ocenić jaki działanie i wnioskowanie z różnych postaci testów ADF w zależności od wartości parametrów procesu AR (1).

### Część B

**Uzupełnić badania z części 5A dla wszystkich wymienionych wartości parametrów. Powtórzyć badania dla długości danych  $N = 20$  i  $N = 500$ . Porównać wyniki uzyskane dla różnych wartości parametrów i dla różnych długości danych.**

**Wersja E:** Jaki wpływ na działanie testów ADF ma długość danych? Jaki wpływ na działanie testów ADF mają wartości parametrów modelu AR (1)? Można zbadać wpływ wartości  $\varphi_0$  i  $\varphi_1$ , ale można też zbadać jakie jest znaczenie wartości oczekiwanej szeregu i wsp. autokorelacji rzędu 1. Czy ma znaczenie, którą wersję testu ADF stosujemy? Czy długość danych ma znaczenie?

## Wstęp

Celem niniejszego zadania jest zbadanie działania różnych wersji testu ADF (Augmented Dickey-Fuller) w kontekście procesu autoregresyjnego rzędu pierwszego - AR(1). Test ADF jest jednym z podstawowych narzędzi służących do oceny stacjonarności szeregów czasowych, co stanowi kluczowy etap w analizie i modelowaniu danych czasowych.

## Przebieg badania

W ramach eksperymentu symulacyjnego analizowany jest model:

$$X_t = \phi_0 + \phi_1 X_{t-1} + \varepsilon_t$$

gdzie  $\varepsilon_t \sim iid(0, \sigma^2)$ , przy  $\sigma^2 = 1$ .

W badaniu użyto parametrów:

- $\phi_0 = \{0; 1; 5; 10\}$
- $\phi_1 = \{-0,9; -0,5; -0,1; 0; 0,1; 0,5; 0,9\}$

W celu przeprowadzenia analizy wygenerowano dane z modelu AR(1) dla trzech różnych długości próby: 20, 100 i 500 obserwacji. Aby zapewnić stacjonarność procesu, pierwsza wartość zmiennej została wyznaczona jako  $X_0 = \frac{\phi_0}{1-\phi_1}$ , co odpowiada wartości oczekiwanej stacjonarnego modelu AR(1). Następnie, dla każdego przypadku, wygenerowano odpowiednio 1020, 1100 oraz 1500 obserwacji, z których pierwsze 1000 zostało odrzucone jako część rozruchowa, aby wyeliminować wpływ wartości początkowej na właściwe obserwacje. Następnie przeprowadzane są trzy wersje testu ADF:

1. bez stałej,
2. ze stałą,
3. ze stałą i trendem liniowym.

Wartości p uzyskane z testów są zapisywane, a procedura powtarzana jest 1000 razy. Następnie obliczane są statystyki opisowe, wizualizowane rozkłady oraz wyznaczany jest odsetek przypadków, w których hipoteza zerowa testu została odrzucona.

Hipotezy testu ADF można sformułować następująco:

- $H_0: X_t \sim I(1)$ ,
- $H_1: X_t \sim I(0)$ .

Analiza uzyskanych wyników pozwala ocenić skuteczność i zachowanie testu ADF w różnych warunkach, w szczególności dla wartości  $\phi_1$  bliskich jedności, gdzie proces staje się niemal niestacjonarny. Ponadto umożliwia porównanie wpływu dołączenia stałej i trendu liniowego do modelu testowego na decyzje statystyczne testu.

## Użyte biblioteki

W badaniu wykorzystano funkcję **statsmodels.tsa.stattools.adfuller** do przeprowadzenia rozszerzonego testu pierwiastka jednostkowego Dickeya-Fullera. Rozszerzony test Dickeya-Fullera służy do badania stacjonarności szeregu czasowego poprzez testowanie obecności pierwiastka jednostkowego. Użyto trzech rodzajów testu ADF – testu bez stałej (n), ze stałą (c) oraz testu stałej z trendem (ct).

## Wyniki

### Symulacja dla N= 20

Dla wygenerowanych szeregów czasowych liczących 20 obserwacji, otrzymano następujące wyniki:

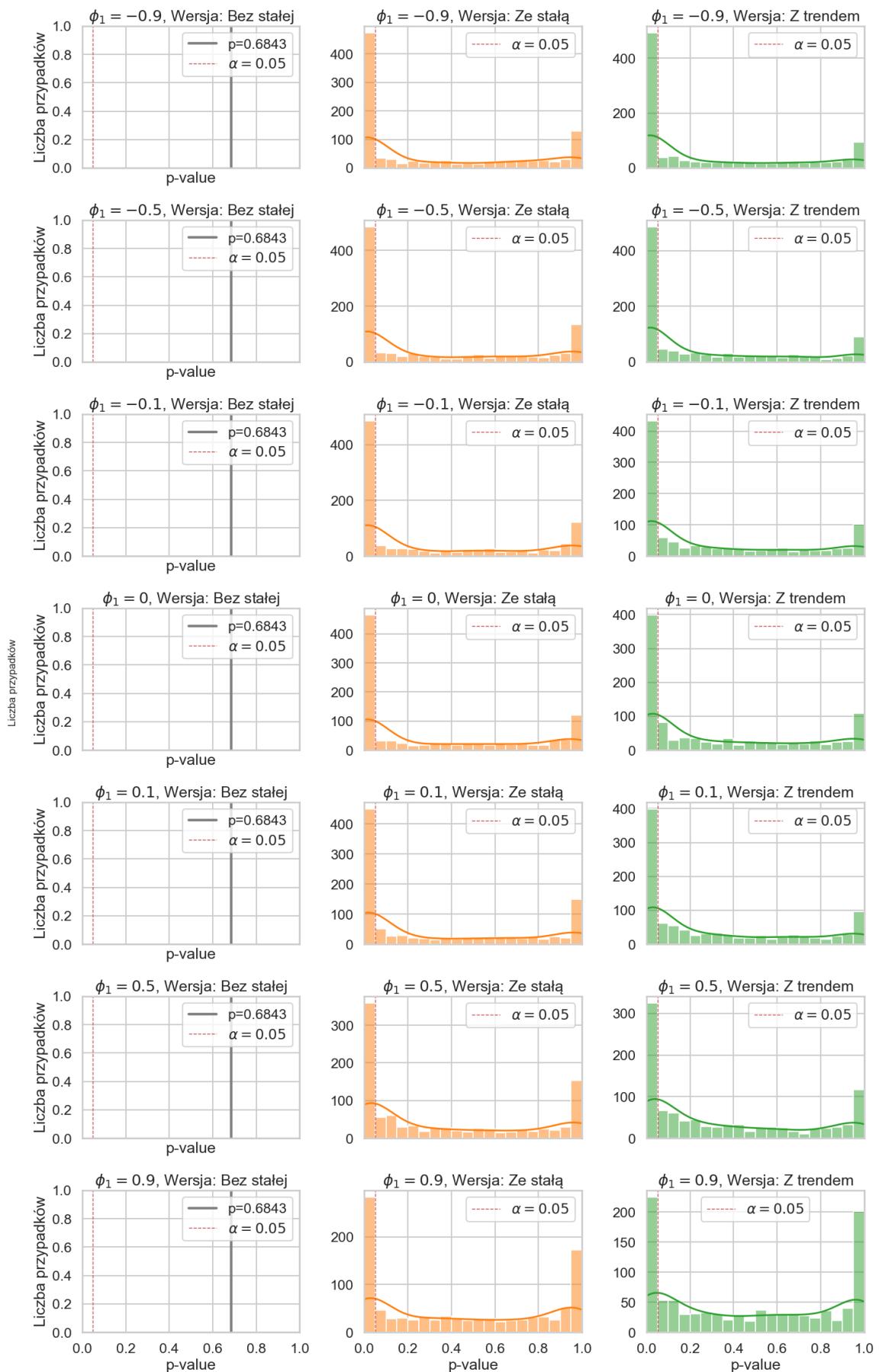
Tabela 1. Wyniki testów ADF dla N=20

$\Phi_0$	$\Phi_1$	Wersja ADF	Średnia wartość p	Medianą wartości p	Odch. std. Wartość p	Odsetek odrzuceń $H_0$ (%)
0	-0,9	n	0,6843	0,6843	0,0000	0,0000
0	-0,9	c	0,3272	0,0881	0,3855	47,4000
0	-0,9	ct	0,2879	0,0589	0,3639	49,3000
0	-0,5	n	0,6843	0,6843	0,0000	0,0000
0	-0,5	c	0,3188	0,0655	0,3860	48,4000
0	-0,5	ct	0,2719	0,0623	0,3480	48,6000
0	-0,1	n	0,6843	0,6843	0,0000	0,0000
0	-0,1	c	0,3154	0,0658	0,3840	48,6000
0	-0,1	ct	0,3033	0,1113	0,3604	43,3000
0	0	n	0,6843	0,6843	0,0000	0,0000
0	0	c	0,3309	0,1038	0,3832	46,5000
0	0	ct	0,3199	0,1335	0,3628	39,9000
0	0,1	n	0,6843	0,6843	0,0000	0,0000
0	0,1	c	0,3347	0,0989	0,3872	45,0000
0	0,1	ct	0,3109	0,1369	0,3550	39,9000
0	0,5	n	0,6843	0,6843	0,0000	0,0000
0	0,5	c	0,3661	0,1910	0,3833	35,9000
0	0,5	ct	0,3514	0,2068	0,3619	32,5000
0	0,9	n	0,6843	0,6843	0,0000	0,0000
0	0,9	c	0,4446	0,3918	0,3860	28,3000
0	0,9	ct	0,4708	0,4372	0,3820	22,5000
1	-0,9	n	0,6843	0,6843	0,0000	0,0000
1	-0,9	c	0,3062	0,0505	0,3768	50,0000
1	-0,9	ct	0,3105	0,0944	0,3711	46,4000
1	-0,5	n	0,6843	0,6843	0,0000	0,0000
1	-0,5	c	0,3259	0,0882	0,3874	47,6000
1	-0,5	ct	0,3013	0,0874	0,3674	46,5000
1	-0,1	n	0,6843	0,6843	0,0000	0,0000
1	-0,1	c	0,3234	0,0957	0,3870	46,6000
1	-0,1	ct	0,3121	0,1367	0,3573	42,0000
1	0	n	0,6843	0,6843	0,0000	0,0000
1	0	c	0,3270	0,1017	0,3795	44,4000
1	0	ct	0,3112	0,1340	0,3600	42,0000
1	0,1	n	0,6843	0,6843	0,0000	0,0000
1	0,1	c	0,3343	0,1211	0,3832	44,3000
1	0,1	ct	0,3136	0,1367	0,3571	39,0000
1	0,5	n	0,6843	0,6843	0,0000	0,0000

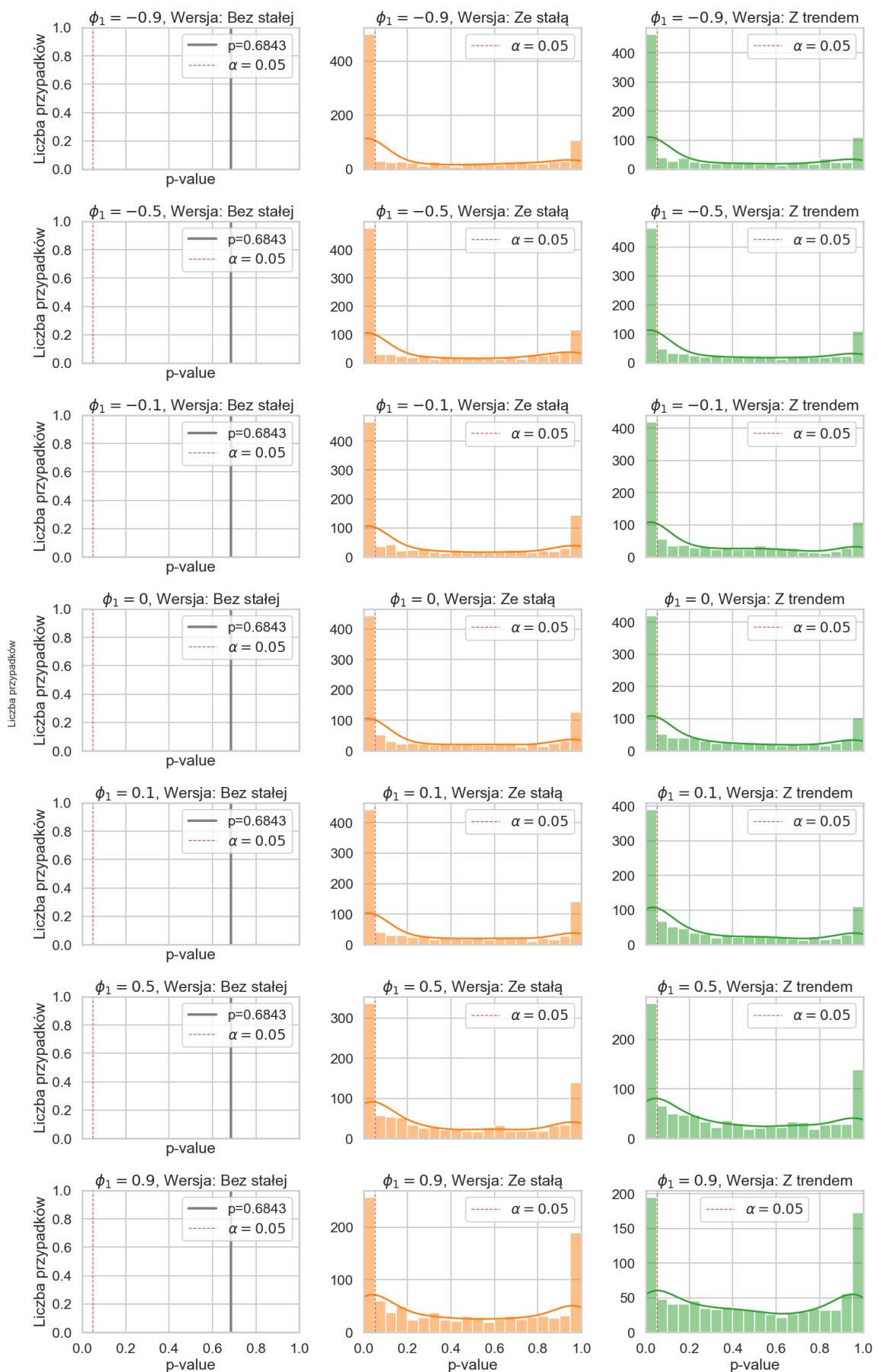
1	0,5	c	0,3684	0,2011	0,3759	33,6000
1	0,5	ct	0,3958	0,2730	0,3680	27,3000
1	0,9	n	0,6843	0,6843	0,0000	0,0000
1	0,9	c	0,4429	0,3594	0,3843	25,7000
1	0,9	ct	0,4780	0,4397	0,3706	19,5000
5	-0,9	n	0,6843	0,6843	0,0000	0,0000
5	-0,9	c	0,3042	0,0478	0,3783	50,2000
5	-0,9	ct	0,3104	0,0862	0,3711	46,4000
5	-0,5	n	0,6843	0,6843	0,0000	0,0000
5	-0,5	c	0,2903	0,0436	0,3693	50,6000
5	-0,5	ct	0,2837	0,0816	0,3500	47,0000
5	-0,1	n	0,6843	0,6843	0,0000	0,0000
5	-0,1	c	0,3238	0,1014	0,3800	45,1000
5	-0,1	ct	0,3127	0,1192	0,3615	43,1000
5	0	n	0,6843	0,6843	0,0000	0,0000
5	0	c	0,3263	0,1095	0,3781	44,8000
5	0	ct	0,3081	0,1165	0,3587	42,2000
5	0,1	n	0,6843	0,6843	0,0000	0,0000
5	0,1	c	0,3488	0,1257	0,3949	45,5000
5	0,1	ct	0,3325	0,1576	0,3648	39,5000
5	0,5	n	0,6843	0,6843	0,0000	0,0000
5	0,5	c	0,3730	0,2205	0,3794	33,6000
5	0,5	ct	0,3479	0,2334	0,3484	30,2000
5	0,9	n	0,6843	0,6843	0,0000	0,0000
5	0,9	c	0,4582	0,4183	0,3773	23,9000
5	0,9	ct	0,4783	0,4485	0,3749	20,7000
10	-0,9	n	0,6843	0,6843	0,0000	0,0000
10	-0,9	c	0,3229	0,0668	0,3863	48,4000
10	-0,9	ct	0,2927	0,0901	0,3563	46,6000
10	-0,5	n	0,6843	0,6843	0,0000	0,0000
10	-0,5	c	0,2853	0,0290	0,3742	52,4000
10	-0,5	ct	0,2938	0,0820	0,3575	46,4000
10	-0,1	n	0,6843	0,6843	0,0000	0,0000
10	-0,1	c	0,3078	0,0724	0,3732	47,7000
10	-0,1	ct	0,3332	0,1682	0,3623	39,8000
10	0	n	0,6843	0,6843	0,0000	0,0000
10	0	c	0,3556	0,1643	0,3931	43,9000
10	0	ct	0,3243	0,1574	0,3630	39,5000
10	0,1	n	0,6843	0,6843	0,0000	0,0000
10	0,1	c	0,3041	0,0632	0,3778	48,6000
10	0,1	ct	0,3267	0,1520	0,3616	39,5000
10	0,5	n	0,6843	0,6843	0,0000	0,0000
10	0,5	c	0,3690	0,2082	0,3805	34,2000
10	0,5	ct	0,3867	0,2820	0,3632	27,9000
10	0,9	n	0,6843	0,6843	0,0000	0,0000
10	0,9	c	0,4504	0,4029	0,3828	25,4000
10	0,9	ct	0,4666	0,4337	0,3780	22,2000

Dla długości szeregu czasowego  $N = 20$  wyniki testów ADF wskazują wyraźnie, że skuteczność poszczególnych wersji testu różni się w zależności od uwzględnienia stałej i trendu oraz od wartości parametru autokorelacji  $\phi_1$ . Wersja testu bez stałej (oznaczona jako „n”) okazała się całkowicie nieskuteczna, ponieważ w każdym przypadku średnia wartość  $p$  wynosiła 0,6843, odchylenie standardowe było równe zero, a hipoteza zerowa o niestacjonarności nie została odrzucona ani raz. Dla ciekawości przetestowano, jak kształtowałaby się wartość  $p$  dla testu bez stałej dla  $N=21,22$ . Wtedy wartości  $p$  są różne; odchylenie standardowe nie jest równe 0. Można zatem stwierdzić, że przy tak niewielkiej liczbie obserwacji test ADF przeprowadzony bez uwzględnienia wyrazu wolnego nie był w stanie poprawnie zidentyfikować stacjonarności procesu. Z kolei test ADF ze stałą („c”) dawał znacznie lepsze rezultaty. Średnie wartości  $p$  były w tym przypadku niższe, a odsetek odrzuceń hipotezy  $H_0$  o pierwiastku jednostkowym wahał się od około 50% dla silnie ujemnych wartości  $\phi_1$  (np. -0,9) do około 25–30% dla wartości  $\phi_1$  zbliżonych do jedności. Oznacza to, że test ze stałą lepiej wykrywa stacjonarność procesów z ujemną autokorelacją, natomiast traci moc, gdy  $\phi_1$  rośnie i proces staje się prawie niestacjonarny. Poziom  $\phi_0$  nie miał w tym wypadku znaczenia. Wersja testu z uwzględnieniem stałej i trendu liniowego zachowywała się podobnie do wersji ze stałą, jednak była bardziej konserwatywna - wartości  $p$  były nieco wyższe, a odsetek odrzuceń hipotezy zerowej niższy, co oznacza, że dodanie trendu osłabia w tym przypadku zdolność testu do wykrywania stacjonarności.

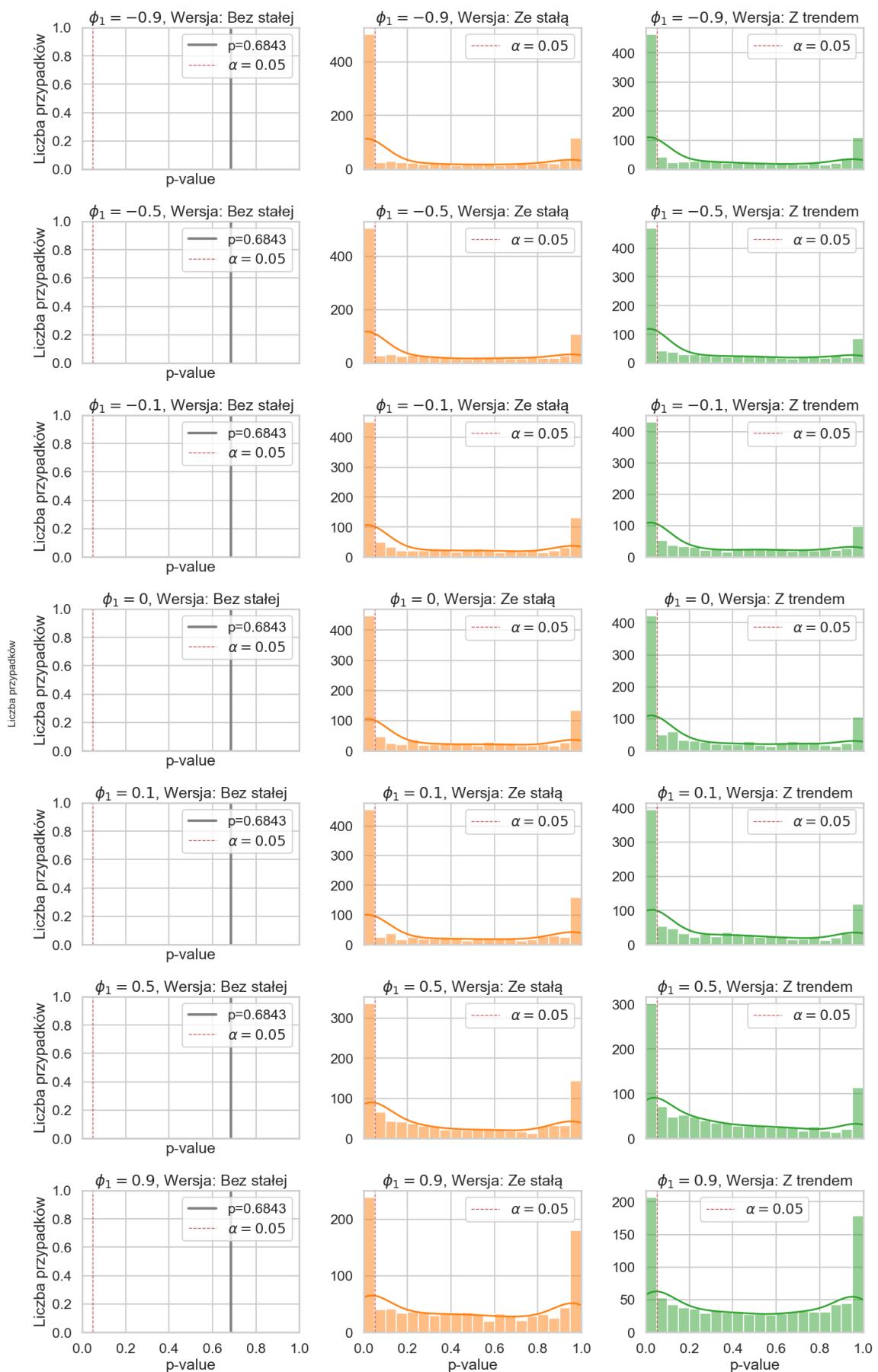
Rozkład p-value dla  $\phi_0 = 0$  (N=20, T=1000)



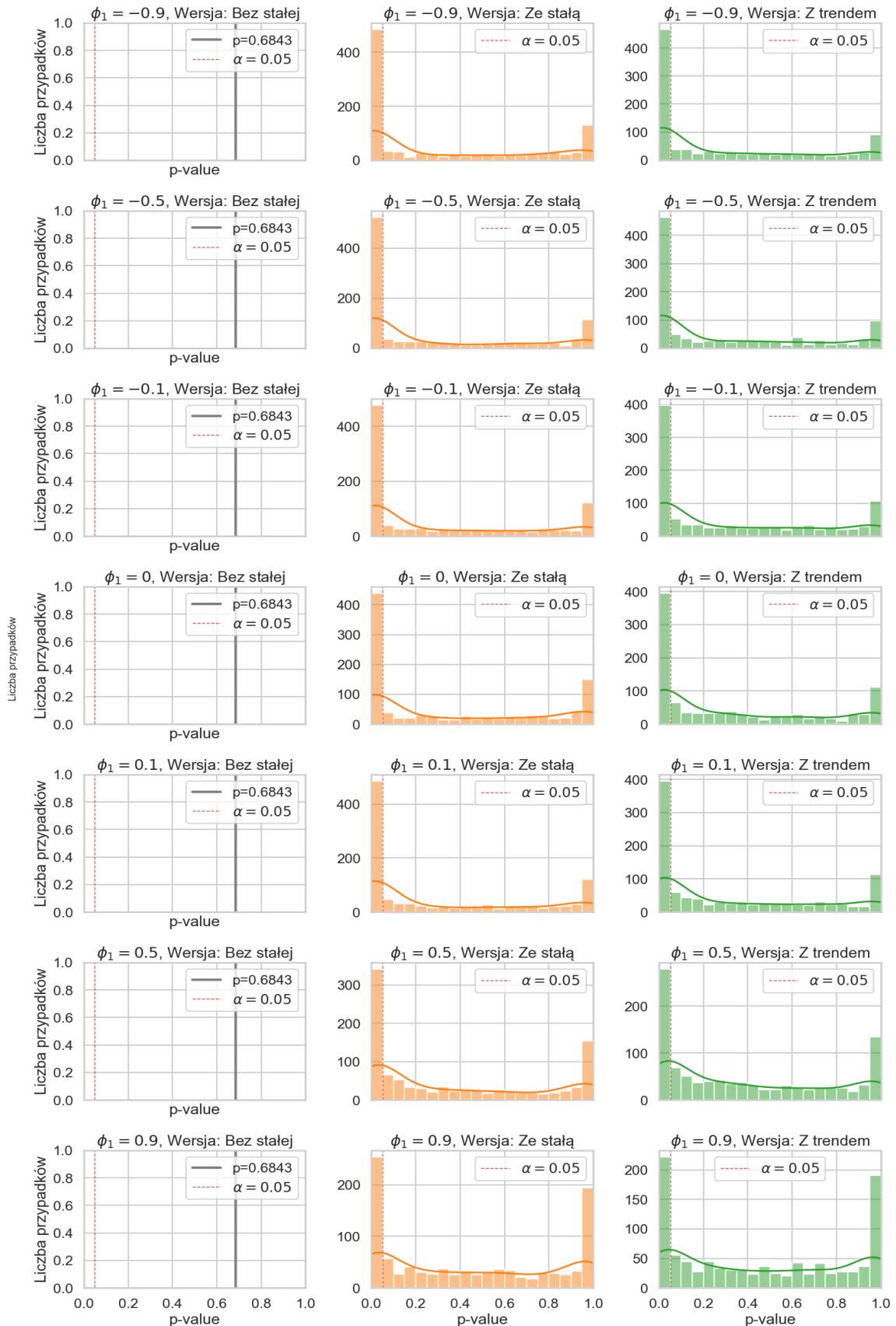
Rozkład p-value dla  $\phi_0 = 1$  (N=20, T=1000)



Rozkład p-value dla  $\phi_0 = 5$  (N=20, T=1000)



Rozkład p-value dla  $\phi_0 = 10$  (N=20, T=1000)



Widać bardzo dobrze jak test bez stałej nie poradził sobie przy N=20. Tak jak wspomniano, wszystkie wartości p wynoszą 0,68. Z tego powodu na wykresach widać jeden słupek, który dodano w przypadku braku zmienności wartości p. Rozkłady wartości p dla testu ze stałą oraz testu ze stałą i trendem są bardzo zbliżone do siebie. Im większa dodatnia autokorelacja, tym gorsze wyniki. Można zauważać niepokojące zachowanie wartości p - im większa dodatnia autokorelacja tym mniej jest wartości p bliskich zeru oraz o wiele więcej jest wartości p bliskich 1, co jest dość ciekawym zjawiskiem.

### Symulacja dla N= 100

Dla wygenerowanych szeregów czasowych liczących 100 obserwacji, otrzymano następujące wyniki:

Tabela 2. Wyniki testów ADF dla N=100

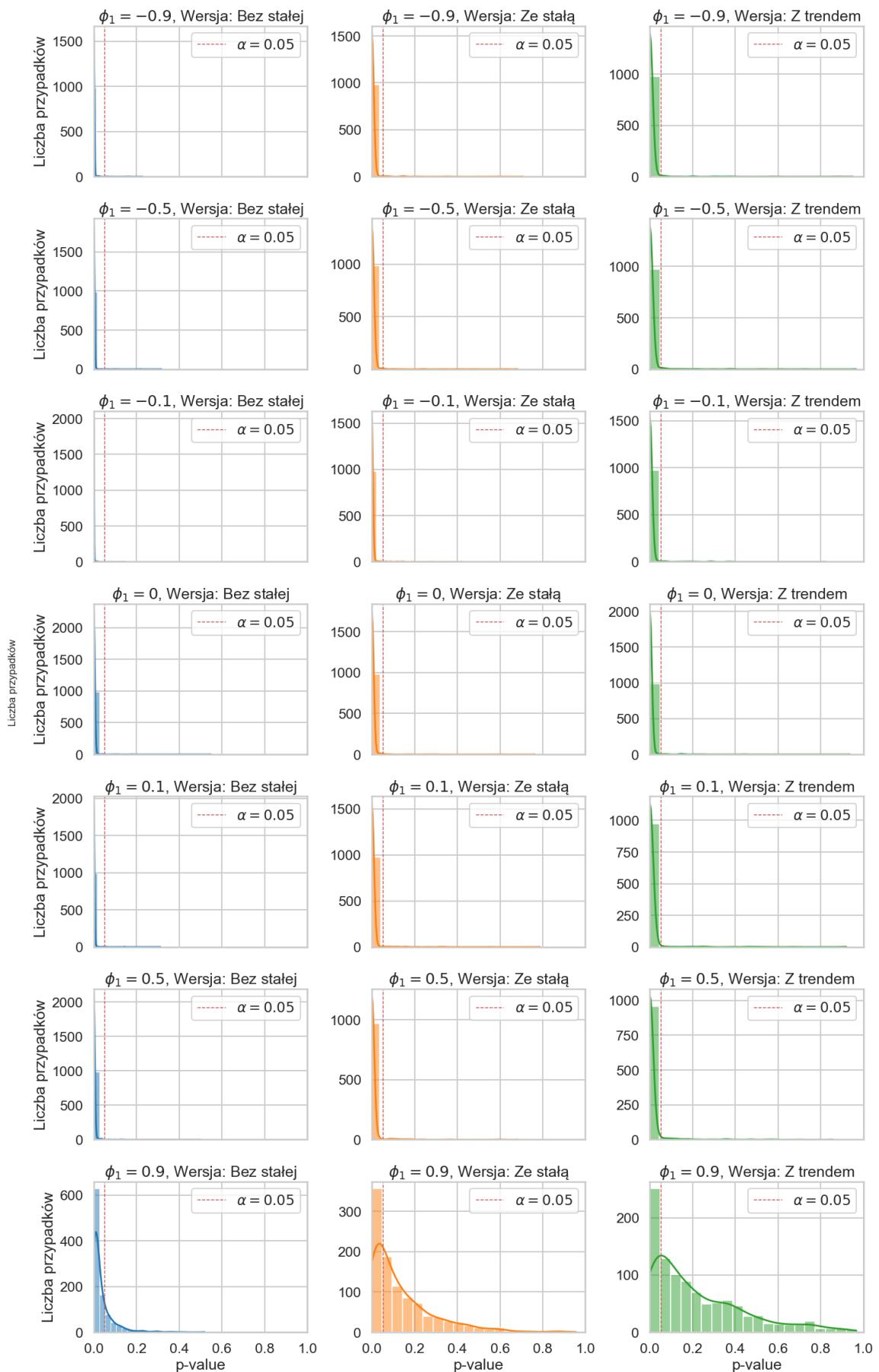
$\Phi_0$	$\Phi_1$	Wersja ADF	Średnia wartość p	Medianowa wartość p	Odch. std. Wartość p	Odszczek odrzucenia $H_0$ (%)
0	-0,9	n	0,0010	0,0000	0,0111	99,40
0	-0,9	c	0,0037	0,0000	0,0356	98,40
0	-0,9	ct	0,0058	0,0000	0,0523	98,00
0	-0,5	n	0,0011	0,0000	0,0134	99,40
0	-0,5	c	0,0039	0,0000	0,0387	98,50
0	-0,5	ct	0,0064	0,0000	0,0532	97,50
0	-0,1	n	0,0005	0,0000	0,0056	99,80
0	-0,1	c	0,0026	0,0000	0,0209	98,50
0	-0,1	ct	0,0054	0,0000	0,0414	97,60
0	0	n	0,0012	0,0000	0,0189	99,60
0	0	c	0,0028	0,0000	0,0338	99,10
0	0	ct	0,0033	0,0000	0,0360	98,70
0	0,1	n	0,0011	0,0000	0,0124	99,40
0	0,1	c	0,0045	0,0000	0,0389	98,00
0	0,1	ct	0,0084	0,0000	0,0622	97,50
0	0,5	n	0,0018	0,0000	0,0182	99,30
0	0,5	c	0,0063	0,0000	0,0430	97,30
0	0,5	ct	0,0109	0,0000	0,0615	96,10
0	0,9	n	0,0357	0,0171	0,0536	78,20
0	0,9	c	0,1363	0,0840	0,1512	36,60
0	0,9	ct	0,2232	0,1548	0,2174	25,30
1	-0,9	n	0,2983	0,2933	0,1759	7,60
1	-0,9	c	0,0011	0,0000	0,0106	99,20
1	-0,9	ct	0,0022	0,0000	0,0215	98,90
1	-0,5	n	0,2992	0,2914	0,1756	9,10
1	-0,5	c	0,0025	0,0000	0,0216	98,60
1	-0,5	ct	0,0038	0,0000	0,0361	98,60
1	-0,1	n	0,2906	0,2831	0,1800	9,80
1	-0,1	c	0,0025	0,0000	0,0222	98,80
1	-0,1	ct	0,0049	0,0000	0,0446	98,60

1	0	n	0,2894	0,2804	0,1783	7,00
1	0	c	0,0043	0,0000	0,0356	97,90
1	0	ct	0,0064	0,0000	0,0512	97,90
1	0,1	n	0,2941	0,2810	0,1789	8,60
1	0,1	c	0,0028	0,0000	0,0252	98,60
1	0,1	ct	0,0056	0,0000	0,0418	97,60
1	0,5	n	0,2958	0,2800	0,1910	9,20
1	0,5	c	0,0054	0,0000	0,0374	97,60
1	0,5	ct	0,0109	0,0000	0,0612	96,00
1	0,9	n	0,5134	0,5129	0,1466	0,00
1	0,9	c	0,1409	0,0854	0,1546	37,60
1	0,9	ct	0,2287	0,1509	0,2246	25,40
5	-0,9	n	0,6115	0,6140	0,1031	0,00
5	-0,9	c	0,0023	0,0000	0,0293	99,10
5	-0,9	ct	0,0037	0,0000	0,0374	98,70
5	-0,5	n	0,6120	0,6159	0,1026	0,00
5	-0,5	c	0,0015	0,0000	0,0131	98,90
5	-0,5	ct	0,0043	0,0000	0,0315	97,60
5	-0,1	n	0,6052	0,6125	0,1046	0,00
5	-0,1	c	0,0032	0,0000	0,0235	98,20
5	-0,1	ct	0,0055	0,0000	0,0416	97,90
5	0	n	0,6062	0,6135	0,1063	0,00
5	0	c	0,0025	0,0000	0,0199	98,40
5	0	ct	0,0054	0,0000	0,0433	97,60
5	0,1	n	0,6149	0,6130	0,1049	0,00
5	0,1	c	0,0038	0,0000	0,0398	98,70
5	0,1	ct	0,0044	0,0000	0,0354	98,00
5	0,5	n	0,6106	0,6104	0,1062	0,00
5	0,5	c	0,0041	0,0000	0,0258	97,80
5	0,5	ct	0,0079	0,0000	0,0473	96,40
5	0,9	n	0,6432	0,6554	0,1310	0,00
5	0,9	c	0,1516	0,0874	0,1746	37,40
5	0,9	ct	0,2224	0,1478	0,2243	27,70
10	-0,9	n	0,6481	0,6512	0,0955	0,00
10	-0,9	c	0,0031	0,0000	0,0294	98,60
10	-0,9	ct	0,0058	0,0000	0,0466	97,80
10	-0,5	n	0,6440	0,6444	0,0922	0,00
10	-0,5	c	0,0020	0,0000	0,0219	99,10
10	-0,5	ct	0,0024	0,0000	0,0255	99,00
10	-0,1	n	0,6492	0,6535	0,0963	0,00
10	-0,1	c	0,0022	0,0000	0,0218	99,10
10	-0,1	ct	0,0043	0,0000	0,0377	98,10
10	0	n	0,6443	0,6448	0,0997	0,00
10	0	c	0,0033	0,0000	0,0335	98,80
10	0	ct	0,0058	0,0000	0,0497	98,10
10	0,1	n	0,6443	0,6458	0,0974	0,00
10	0,1	c	0,0052	0,0000	0,0410	98,00

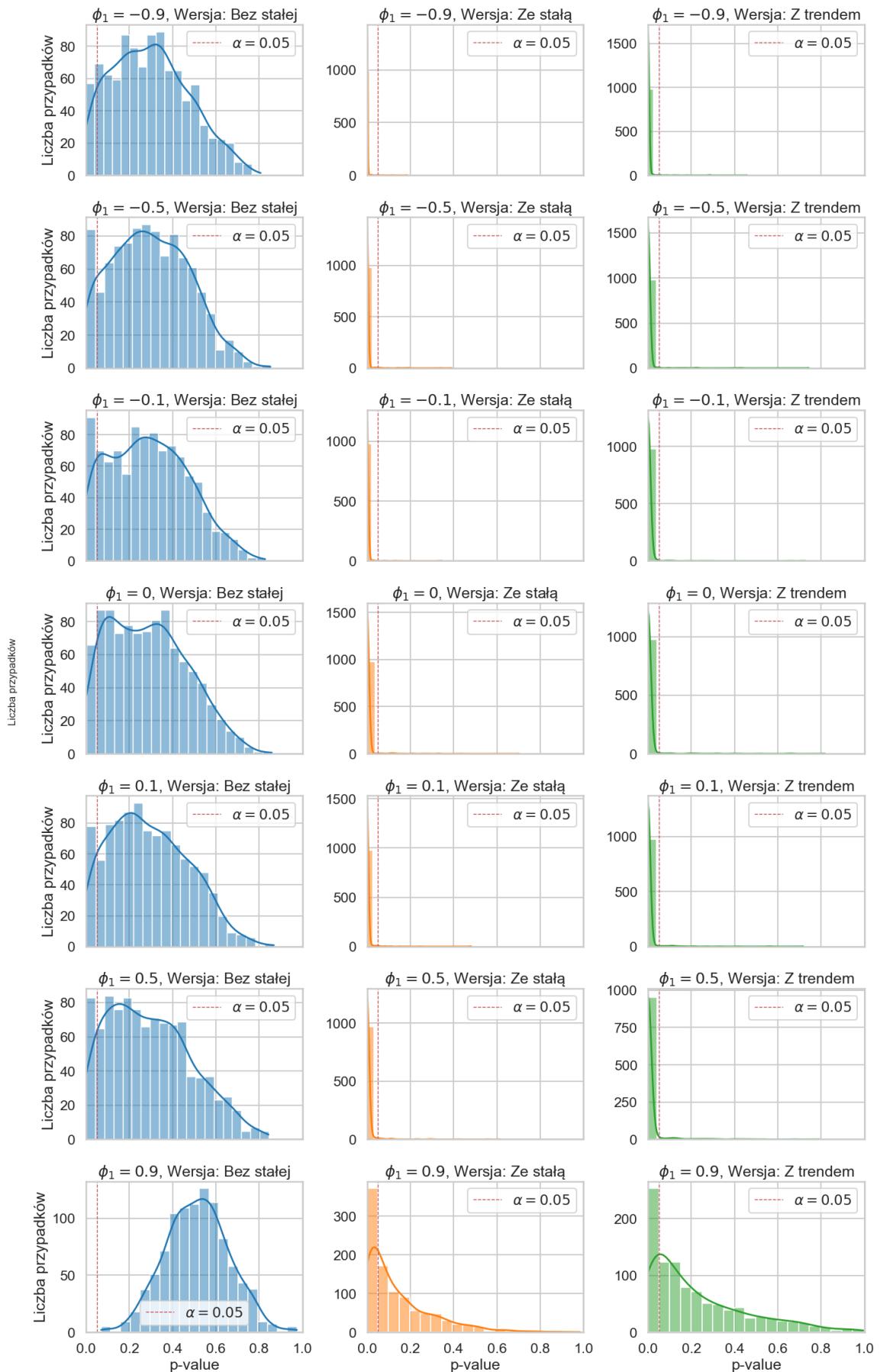
10	0,1	ct	0,0076	0,0000	0,0539	97,10
10	0,5	n	0,6411	0,6486	0,1055	0,00
10	0,5	c	0,0049	0,0000	0,0328	97,50
10	0,5	ct	0,0101	0,0000	0,0610	96,20
10	0,9	n	0,6575	0,6682	0,1261	0,00
10	0,9	c	0,1513	0,0949	0,1648	35,10
10	0,9	ct	0,2341	0,1633	0,2230	24,60

Analizując wyniki testów ADF dla N=100, widać wyraźnie, że moc testu zależy zarówno od wartości parametrów  $\phi_0$  i  $\phi_1$ , jak i od wersji testu. Dla procesów wyraźnie stacjonarnych (np.  $\phi_1$  od -0,9 do 0,5 przy  $\phi_0=0$ ) wszystkie wersje testu prawidłowo odrzucają hipotezę  $H_0$  w bardzo dużym odsetku przypadków, często powyżej 96%, a średnie i mediany wartości p są ekstremalnie niskie, co wskazuje na jednoznaczny sygnał stacjonarności. W miarę zbliżania się  $\phi_1$  do wartości 0,9 widać spadek mocy testu. Moc testu ze stałą jest nieco wyższy, niż moc testu ze stałą i trendem. Dla  $\phi_0$  różnych od zera, można zauważyć, że test bez stałej radzi sobie o wiele gorzej od pozostałych testów. W miarę wzrostu  $\phi_0$  do wartości 5 i 10 odsetek odrzuceń  $H_0$  w wersji n spada do zera, a w wersjach z c i ct pozostaje bardzo wysoki dla wartości ujemnych  $\phi_1$ . Wartości średnie i mediany p w tych przypadkach są zróżnicowane między wersjami testu, a odchylenia standardowe p pokazują większą zmienność dla wersji z c i ct przy  $\phi_1$  bliskich 0,9. Widać, że dla N=100 test ADF ma większą moc w wykrywaniu stacjonarności niż w przypadku N=20.

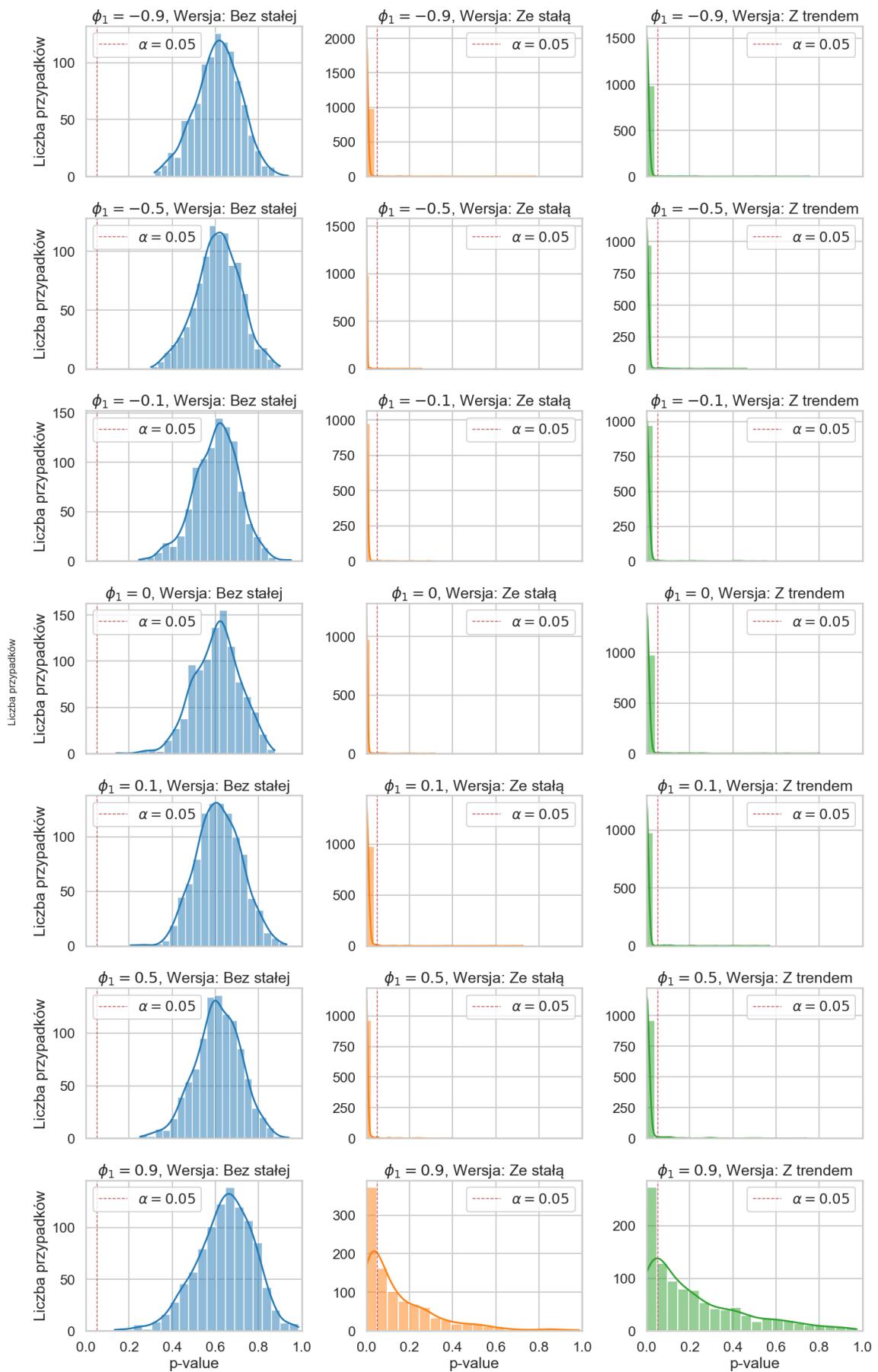
Rozkład p-value dla  $\phi_0 = 0$  (N=100, T=1000)



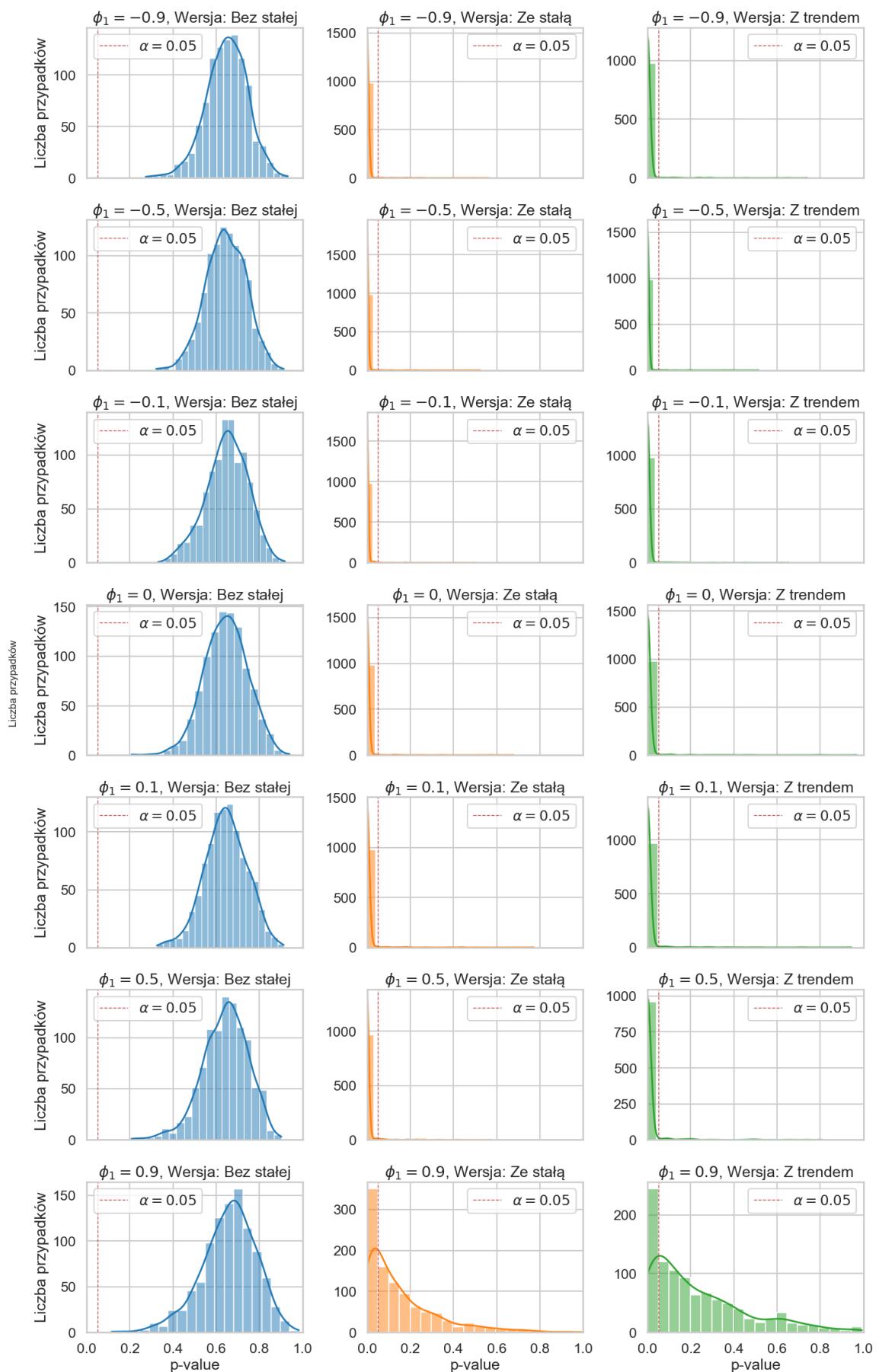
Rozkład p-value dla  $\phi_0 = 1$  (N=100, T=1000)



Rozkład p-value dla  $\phi_0 = 5$  (N=100, T=1000)



Rozkład p-value dla  $\phi_0 = 10$  (N=100, T=1000)



Widać bardzo dobrze zmianę rozkładu wartości p dla testu bez stałej wraz ze zmianą stałej w modelu AR. Przy stałej równej 10, rozkład wartości p przypomina rozkład normalny. Jednakże, lewy ogon nie dosiąga wartości poniżej 0,05 – dlatego odsetek odrzuceń wynosi wtedy 0%. Zachowanie tego testu bez stałej jest dość logiczne. Oddalając się od wartości oczekiwanej równej 0, wartości p zaczynają rosnąć. Rozkłady wartości p dla testu ze stałą oraz testu ze stałą i trendem są bardzo zbliżone do siebie. Im większa dodatnia autokorelacja, tym gorsze wyniki. W tym przypadku jednak nie można dostrzec rozkładu przypominającego dolinę (litery „U”). Najczęściej występuje wartość p bliska零. Potem wraz ze zwiększeniem się wartości p, częstości występowania maleją.

### Symulacja dla N= 500

Dla wygenerowanych szeregów czasowych liczących 500 obserwacji, otrzymano następujące wyniki:

*Tabela 3. Wyniki testów ADF dla N=500*

$\Phi_0$	$\Phi_1$	Wersja ADF	Średnia wartość p	Mediania wartości p	Odch. std. Wartość p	Odsetek odrzuceń $H_0$ (%)
0	-0,9	n	0,0000	0,0000	0,0000	100,00
0	-0,9	c	0,0000	0,0000	0,0000	100,00
0	-0,9	ct	0,0000	0,0000	0,0000	100,00
0	-0,5	n	0,0000	0,0000	0,0000	100,00
0	-0,5	c	0,0000	0,0000	0,0000	100,00
0	-0,5	ct	0,0000	0,0000	0,0001	100,00
0	-0,1	n	0,0000	0,0000	0,0000	100,00
0	-0,1	c	0,0000	0,0000	0,0000	100,00
0	-0,1	ct	0,0000	0,0000	0,0000	100,00
0	0	n	0,0000	0,0000	0,0000	100,00
0	0	c	0,0000	0,0000	0,0000	100,00
0	0	ct	0,0000	0,0000	0,0001	100,00
0	0,1	n	0,0000	0,0000	0,0000	100,00
0	0,1	c	0,0000	0,0000	0,0000	100,00
0	0,1	ct	0,0000	0,0000	0,0001	100,00
0	0,5	n	0,0000	0,0000	0,0000	100,00
0	0,5	c	0,0000	0,0000	0,0000	100,00
0	0,5	ct	0,0000	0,0000	0,0001	100,00
0	0,9	n	0,0000	0,0000	0,0002	100,00
0	0,9	c	0,0003	0,0000	0,0021	100,00
0	0,9	ct	0,0013	0,0000	0,0083	99,50
1	-0,9	n	0,2087	0,2031	0,0893	1,90
1	-0,9	c	0,0000	0,0000	0,0000	100,00
1	-0,9	ct	0,0000	0,0000	0,0000	100,00
1	-0,5	n	0,2067	0,2000	0,0914	3,20
1	-0,5	c	0,0000	0,0000	0,0000	100,00

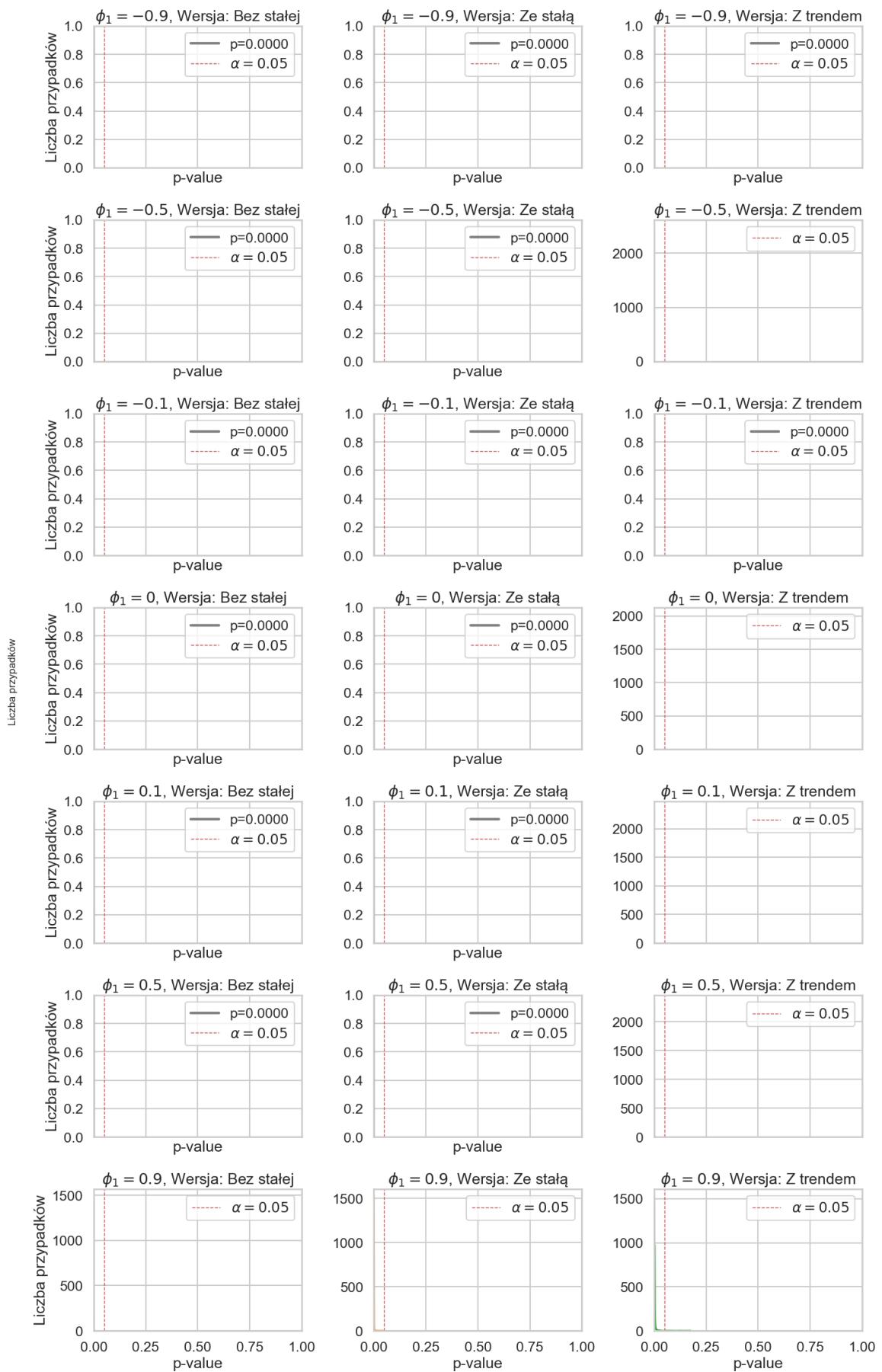
1	-0,5	ct	0,0000	0,0000	0,0001	100,00
1	-0,1	n	0,2190	0,2172	0,0957	3,00
1	-0,1	c	0,0000	0,0000	0,0000	100,00
1	-0,1	ct	0,0000	0,0000	0,0000	100,00
1	0	n	0,2171	0,2135	0,0988	1,90
1	0	c	0,0000	0,0000	0,0000	100,00
1	0	ct	0,0000	0,0000	0,0001	100,00
1	0,1	n	0,2173	0,2113	0,0975	3,10
1	0,1	c	0,0000	0,0000	0,0000	100,00
1	0,1	ct	0,0000	0,0000	0,0001	100,00
1	0,5	n	0,2457	0,2394	0,1035	1,70
1	0,5	c	0,0000	0,0000	0,0001	100,00
1	0,5	ct	0,0000	0,0000	0,0004	100,00
1	0,9	n	0,3431	0,3304	0,1098	0,00
1	0,9	c	0,0006	0,0000	0,0060	99,70
1	0,9	ct	0,0017	0,0001	0,0140	99,40
5	-0,9	n	0,5928	0,5954	0,0600	0,00
5	-0,9	c	0,0000	0,0000	0,0000	100,00
5	-0,9	ct	0,0000	0,0000	0,0000	100,00
5	-0,5	n	0,5919	0,5929	0,0603	0,00
5	-0,5	c	0,0000	0,0000	0,0000	100,00
5	-0,5	ct	0,0000	0,0000	0,0000	100,00
5	-0,1	n	0,5930	0,5923	0,0597	0,00
5	-0,1	c	0,0000	0,0000	0,0000	100,00
5	-0,1	ct	0,0000	0,0000	0,0001	100,00
5	0	n	0,5940	0,5974	0,0616	0,00
5	0	c	0,0000	0,0000	0,0001	100,00
5	0	ct	0,0000	0,0000	0,0007	100,00
5	0,1	n	0,5949	0,5963	0,0637	0,00
5	0,1	c	0,0000	0,0000	0,0000	100,00
5	0,1	ct	0,0000	0,0000	0,0000	100,00
5	0,5	n	0,6008	0,6020	0,0639	0,00
5	0,5	c	0,0000	0,0000	0,0001	100,00
5	0,5	ct	0,0000	0,0000	0,0005	100,00
5	0,9	n	0,6216	0,6236	0,0701	0,00
5	0,9	c	0,0006	0,0000	0,0075	99,80
5	0,9	ct	0,0020	0,0001	0,0192	99,30
10	-0,9	n	0,6370	0,6371	0,0549	0,00
10	-0,9	c	0,0000	0,0000	0,0000	100,00
10	-0,9	ct	0,0000	0,0000	0,0002	100,00
10	-0,5	n	0,6331	0,6345	0,0573	0,00
10	-0,5	c	0,0000	0,0000	0,0000	100,00
10	-0,5	ct	0,0000	0,0000	0,0000	100,00
10	-0,1	n	0,6350	0,6377	0,0581	0,00
10	-0,1	c	0,0000	0,0000	0,0000	100,00
10	-0,1	ct	0,0000	0,0000	0,0000	100,00
10	0	n	0,6384	0,6410	0,0567	0,00

10	0	c	0,0000	0,0000	0,0001	100,00
10	0	ct	0,0000	0,0000	0,0001	100,00
10	0,1	n	0,6350	0,6372	0,0553	0,00
10	0,1	c	0,0000	0,0000	0,0000	100,00
10	0,1	ct	0,0000	0,0000	0,0001	100,00
10	0,5	n	0,6418	0,6424	0,0559	0,00
10	0,5	c	0,0000	0,0000	0,0000	100,00
10	0,5	ct	0,0000	0,0000	0,0000	100,00
10	0,9	n	0,6515	0,6539	0,0642	0,00
10	0,9	c	0,0003	0,0000	0,0039	99,90
10	0,9	ct	0,0013	0,0000	0,0112	99,70

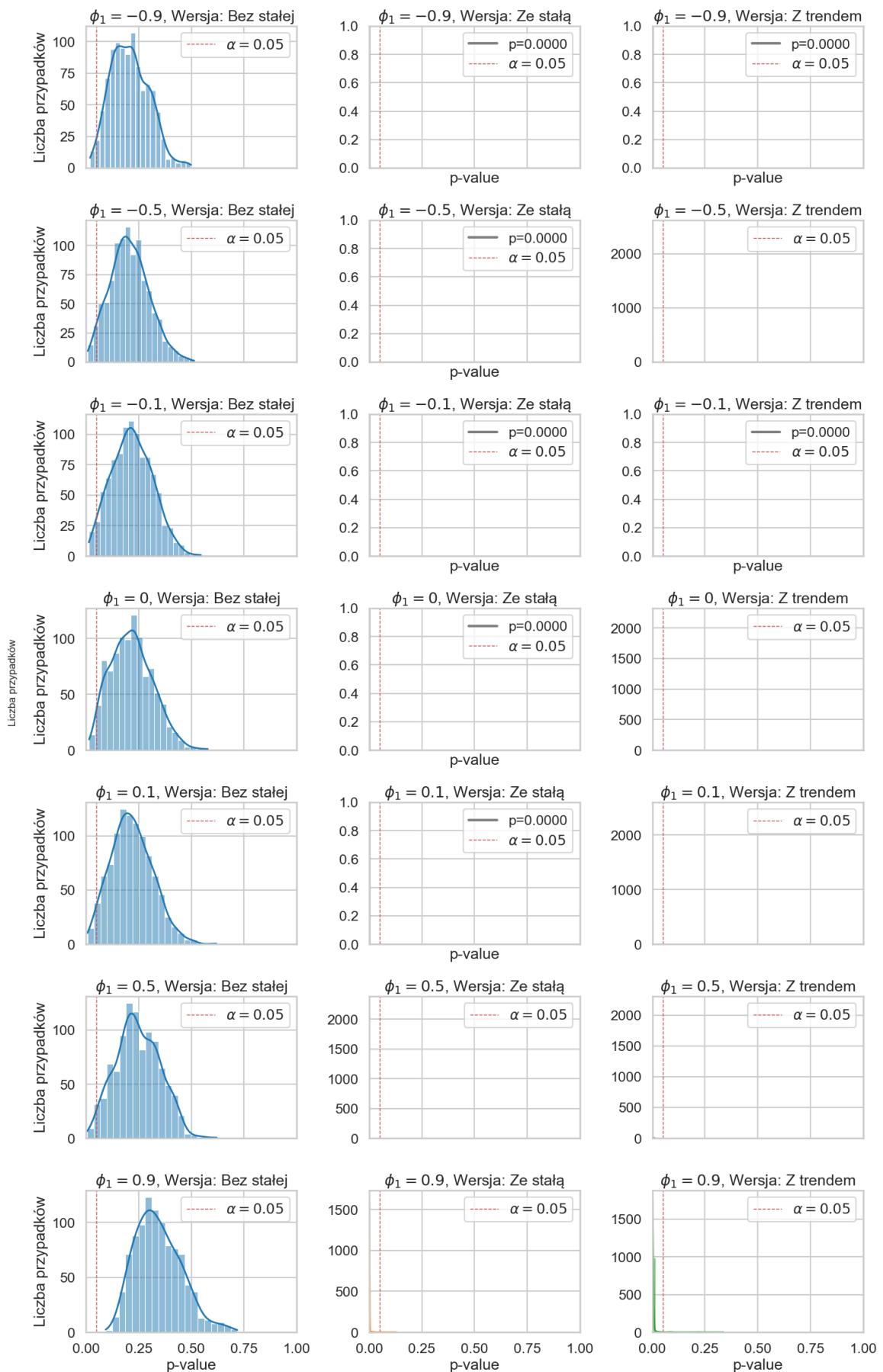
Dla procesów stacjonarnych dla  $\phi_0 = 0$  wszystkie trzy wersje testu ADF poprawnie odrzucały hipotezę o niestacjonarności, jednak najbardziej efektywna była wersja bez stałej (n), ponieważ dokładnie odpowiadała rzeczywistemu mechanizmowi generowania danych. Wprowadzenie stałej lub trendu jedynie nieznacznie obniżało moc testu. Odmienna sytuacja występowała jednak w przypadku procesów stacjonarnych z niezerowym  $\phi_0$ . Test ADF bez stałej całkowicie zawodził - niski odsetek odrzuceń hipotezy zerowej (nawet 0%) prowadził do błędного wniosku o niestacjonarności szeregu. Dopiero uwzględnienie stałej w modelu testowym (wersja c) zapewniało poprawne rozstrzygnięcia, przy zachowaniu bardzo wysokiej mocy testu. Wersja z trendem (ct) również działała poprawnie, lecz dodanie trendu powodowało niewielkie pogorszenie siły statystycznej.

Zbliżanie się wartości  $\phi_1$  do jedności zwiększało zmienność wartości p i utrudniało wykrycie stacjonarności, jednak przy dużej liczbie obserwacji ( $N = 500$ ) nawet w takich przypadkach poprawnie określona wersja testu zapewniała niemal stuprocentowe odrzucenia hipotezy zerowej.

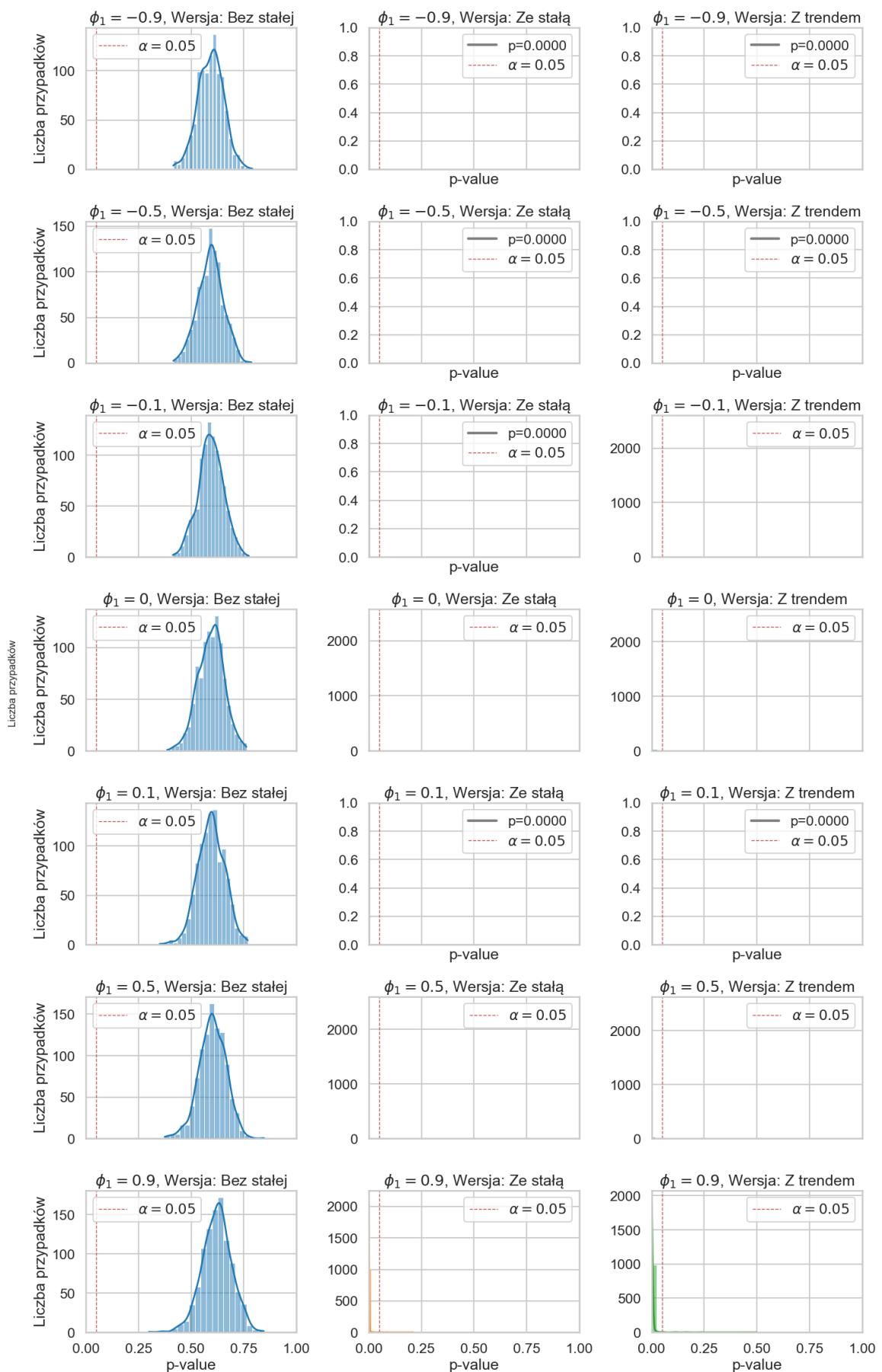
Rozkład p-value dla  $\phi_0 = 0$  (N=500, T=1000)



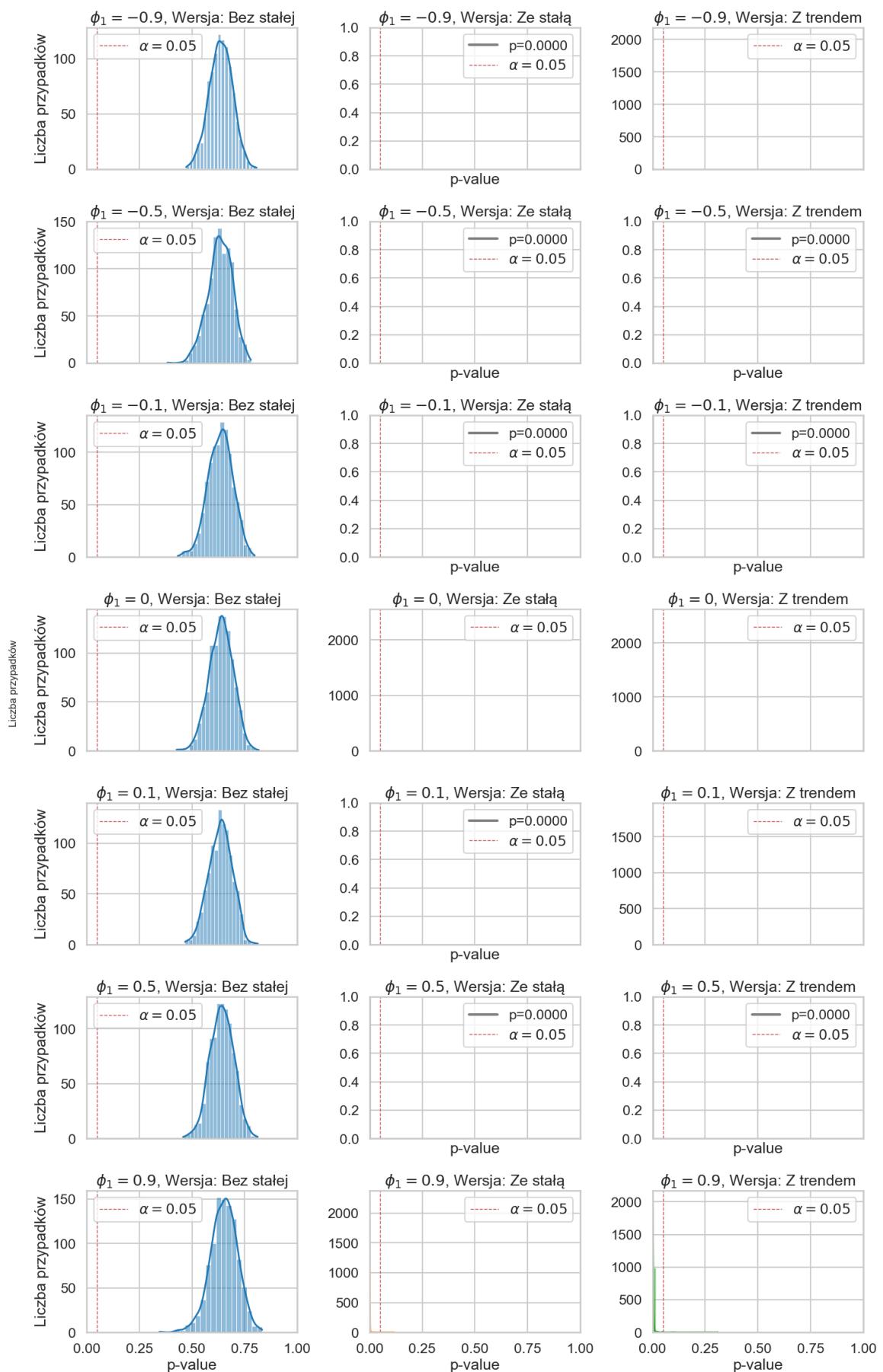
Rozkład p-value dla  $\phi_0 = 1$  (N=500, T=1000)



Rozkład p-value dla  $\phi_0 = 5$  (N=500, T=1000)

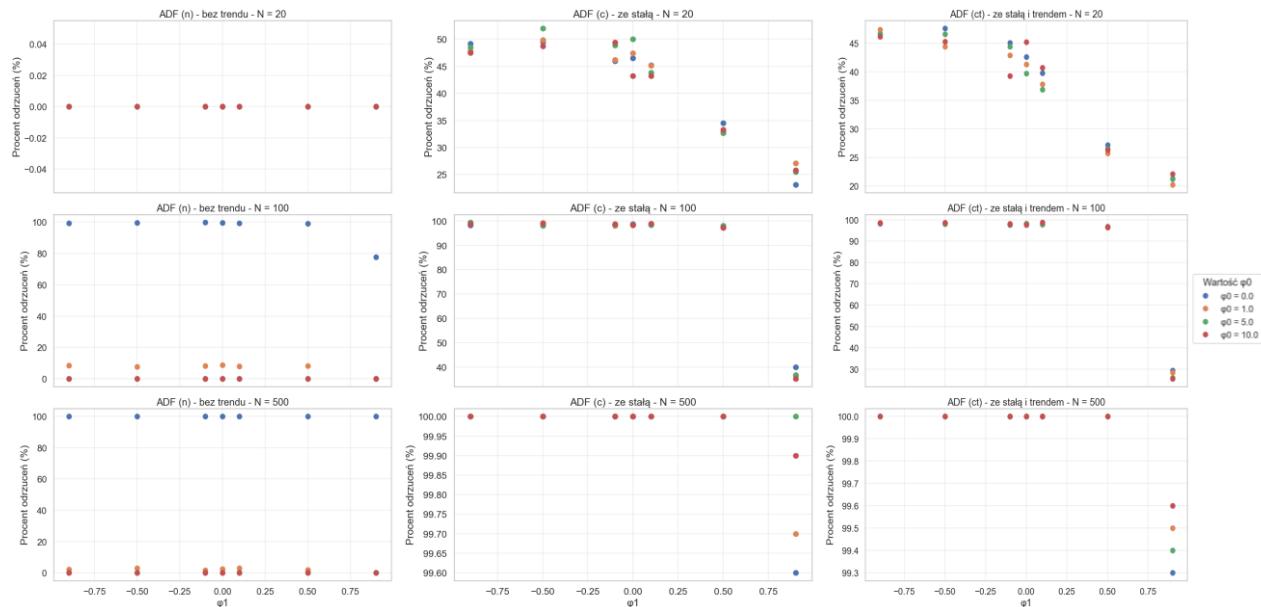


Rozkład p-value dla  $\phi_0 = 10$  (N=500, T=1000)



W przeprowadzonych symulacjach poprawnie dobrane wersje testu ADF dawały bardzo małe wartości p (bliskie 0). Ich histogramy były więc bardzo wąskie i skupione przy zerze, co oznacza niemal pewne odrzucenie hipotezy zerowej o niestacjonarności szeregu. Natomiast gdy test był źle dobrany do danych - głównie wtedy, gdy użyto wersji ADF bez stałej (n), mimo że proces miał  $\phi_0 \neq 0$  - wartości p przesuwały się w stronę 1 i były rozłożone szeroko na przedziale [0,1]. W takim przypadku test błędnie sugerował, że szereg jest niestacjonarny, mimo że faktycznie był stacjonarny.

## Podsumowanie wyników



Na podstawie przeprowadzonych symulacji można sformułować następujące wnioski:

1. Długość szeregu ma kluczowe znaczenie dla działania testu ADF. Przy krótkich próbach (np.  $N = 20$ ) test ma niską moc i często nie odrzuca hipotezy o pierwiastku jednostkowym nawet w przypadku procesów stacjonarnych. Wraz ze wzrostem liczby obserwacji (dla  $N = 100$  i  $N = 500$ ) skuteczność testu znaczco rośnie, a wyniki stają się stabilne i wiarygodne.
2. Wartość parametru  $\varphi_1$  (autokorelacji) ma duży wpływ na wynik testu ADF. Im bliżej jedności znajduje się współczynnik  $\varphi_1$ , tym trudniej testowi odrzucić hipotezę zerową o obecności pierwiastka jednostkowego.  
Z kolei parametr  $\varphi_0$  (stała w modelu) wpływa na poziom średni procesu. Jego wartość ma wpływ na to która wersja testu jest odpowiednia. W przypadku testu ADF bez stałej, gdy  $\varphi_0 \neq 0$ , odsetek odrzuceń hipotezy zerowej był istotnie niższy niezależnie od długości próby.
3. Wybór odpowiedniego wariantu testu ma duże znaczenie. Wersja bez stałej (n) ma bardzo ograniczoną użyteczność i często błędnie sugeruje niestacjonarność. Wersje ze stałą (c) oraz ze stałą i trendem (ct) dają znacznie bardziej wiarygodne wyniki,

zwłaszcza gdy dane zawierają składnik deterministyczny (trend lub przesunięcie średniej).

Skuteczność testu ADF zależy przede wszystkim od długości próby i wartości współczynnika autokorelacji  $\varphi_1$ . Wybór odpowiedniego wariantu testu (z uwzględnieniem stałej lub trendu) jest również istotny, natomiast sama wartość  $\varphi_0$  ma drugorzędne znaczenie. Dla krótkich szeregów test może być zawodny, dlatego interpretacja wyników w takich przypadkach powinna być ostrożna.