Lekcja 1: Wstęp do NAI. Rozwiązanie

S. Hoa Nguyen

1 Funkcje i wykresy

Zadanie 1 Zapisać w *postaci ogólnej*:

a) $2x - y - 5 = 0$

b) $x - 3y + 12 = 0$

c) $0x + y + 5 = 0$

d) $2x + 0y - 1 = 0$

e) $3x - 2y - 7 = 0$

Zadanie 2 Zapisać w *postaci kierunkowej*:

a) $y = 2x + 4$

b) $y = -6x + 12$

c) $y = -\frac{1}{2}x$

d) $y = 5$

Zadanie 4. Wyznaczyć równanie prostej przechodzącej przez podane punkty. Zapisać je w *postaci ogólnej* i *kierunkowej*.

a) $y = 2x \leftrightarrow 2x - y = 0$

b) $y = -\frac{1}{2}x + 3 \leftrightarrow x + 2y - 6 = 0$

c) $y = 3 \leftrightarrow 0x + y - 3 = 0$

d) $y = -3x + 9 \leftrightarrow 3x + y - 9 = 0$

Zadanie 5. Do każdej z prostych podanych w Zadaniu 4

a) Wektory prostopadłe:

- $[2, -1]$ i $[-2, 1]$
- $[1, 2]$ i $[-1, -2]$
- $[0, 1]$ i $[0, -1]$

- $[3, 1]$ i $[-3, -1]$

b) zbiór punktów na płaszczyznie, które spełniają podane warunki:

- poniżej prostej, na prostej, powyżej prostej.
- powyżej prostej, na prostej, poniżej prostej.
- powyżej prostej, na prostej, poniżej prostej.
- powyżej prostej, na prostej, poniżej prostej.

c) Jaka jest obserwacja? Pierwszy wektor normalny kieruje w zbiór punktów z wartością $L(x, y) > 0$.

Zadanie 6.
Wskazówka: Dla każdej nierówności narysuj zbiór punktów ją spełniających, potem wyznaczyć ich część wspólną.
Zadanie 7. Wyznaczyć dziedzinę, zbiór wartości, monotoniczność i asymptoty funkcji aktywacji.

a) Funkcja sigmoidalna unipolarna:

- $x \in R$, $y \in (0, 1)$.
- rosnąca.
- $y = 0$, $y = 1$.

b) Funkcja sigmoidalna bipolarna (tangensoidalna):

- $x \in R$, $y \in (-1, 1)$.
- rosnąca.
- $y = -1$, $y = 1$.

Im większa jest λ, tym szybciej rośnie funkcja.

2 Działanie na wektorach

Zadanie 8. Dane są dwa wektory $u = [2, 1, -2]$ i $v = [3, -2, -1]$. Wyznaczyć

a) $u + v = [5, -1, -3]$

b) $u - v = [-1, 3, -1]$

c) $3u - 2v = [6, 3, -6] - [6, -4, -2] = [0, 7, -4]$

d) $|u|$, $|v|$

- $|u| = \sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2} = \sqrt{9} = 3$
- $|v| = \sqrt{3^2 + (-2)^2 + (-1)^2} = \sqrt{14}$

e) wektor jednostkowa u (wektor unormowany)
$u' = \frac{1}{|u|} \cdot u = \frac{1}{3} \cdot [2, 1, -2] = [\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}]$

Zadanie 9. Dla wektorów $u = [2, 1, -2]$ i $v = [3, -2, -1]$.

a) iloczyn skalarny $u \cdot v = 2 \cdot 3 + 1 \cdot (-2) + (-2) \cdot (-1) = 6 - 2 + 2 = 6$

b) kąt między u i v
$cos(u, v) = \frac{u \cdot v}{|u| \cdot |v|} = \frac{6}{3\sqrt{14}}$
$\angle(u, v) = cos^{-1}(\frac{6}{3\sqrt{14}}) = 57^o$

Zadanie 10. Nie dane będą $A(-1, 5)$, $B(-4, 9)$. Wyznaczyć

a) wektor $\overrightarrow{AB} = [-3, 4]$

b) wektor unormowany $\overrightarrow{AB_u} = [-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}]$

c) wektor prostopadły do $\overrightarrow{AB} = [-4, -3]$ i $[4, 3]$

d) wektor jednostkowy prostopadły do $\overrightarrow{AB} = [-\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}]$ i $[\frac{4}{5}, \frac{3}{5}]$

Zadanie 11. Sprawdzić, wzajemne położenie następujących wektorów.

a) $u = [4, -3, 1]$ i $v = [15, 20, 0]$:
$u \cdot v = 0$: prostopadłe.

b) $u = [-2, -4, 1]$ i $v = [-3, -6, 1.5]$:
$u = \frac{2}{3}v$: równoległe.

c) $u = [-2, 1, 4]$ i $v = [3, 4, -1]$:
nie są ani prostopadłe ani równoległe.

3 Działania na macierzach

Zadanie 12. Wykonać następujące działania:

a)
$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -4 & -5 & 20 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -3 & 2 \\ 1 & -4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 4 \\ -3 & -9 & 20 \end{bmatrix}$$

b)
$$(-2) \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -4 & -5 & 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 2 & -4 \\ 8 & 10 & -40 \end{bmatrix}$$

c)
$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -4 & -5 & 20 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -1 & -5 \\ 2 & 20 \end{bmatrix}$$

d)

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -4 & -5 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & -3 & 1 \\ 1 & 3 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 7 & -5 \\ -4 & 28 & -25 \end{bmatrix}$$

e)

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & -3 & 1 \\ 1 & 3 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -4 & -5 & 3 \end{bmatrix}$$

Nie da się.

Zadanie 13.

a) Sprawdzić prawo przemienności sumy dwóch macierzy:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 4 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} -5 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Zachodzi.

b) Sprawdzić prawo przemienności iloczynu dwóch macierzy:

$$C = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} -5 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Nie zachodzi.