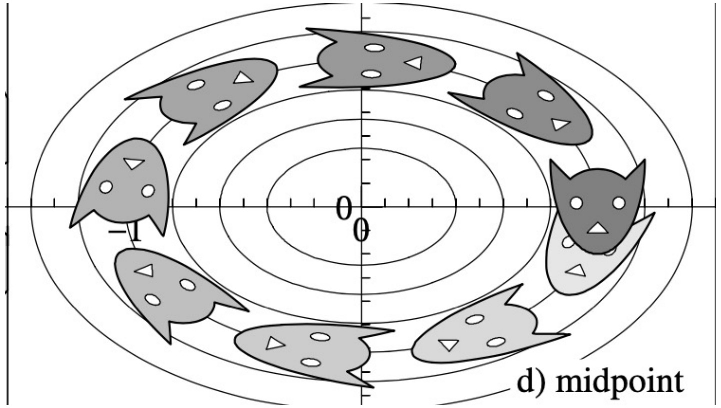
Rozwiązywanie równań różniczkowych



Jerzy Baranowski

Metody Numeryczne

14.01.2022

Jak obliczyć rozwiązanie w dowolnym punkcie?

- Kontrola długości kroku pozwala na optymalne znalezienie rozwiązania w punkcie X
- Co jeżeli interesują nas wartości dla wielu chwil z przedziału $[x_0, X]$?
- Wyliczanie z gęstym krokiem redukuje wydajność obliczeń

Gęste wyjście
Runge-Kutta + Interpolacja

- $y_1 = y(x_0 + h)$, jest rozwiązaniem z RK
- Szukamy „taniej" aproksymacji:
  $y(x_0 + \theta h)$, dla $\theta \in (0,1)$
- Generalnie

$$u(\theta) = y_0 + \sum_{i=1}^{s^*} b_i(\theta) k_i$$

gdzie $b_i(\theta)$ to wielomiany, takie, że

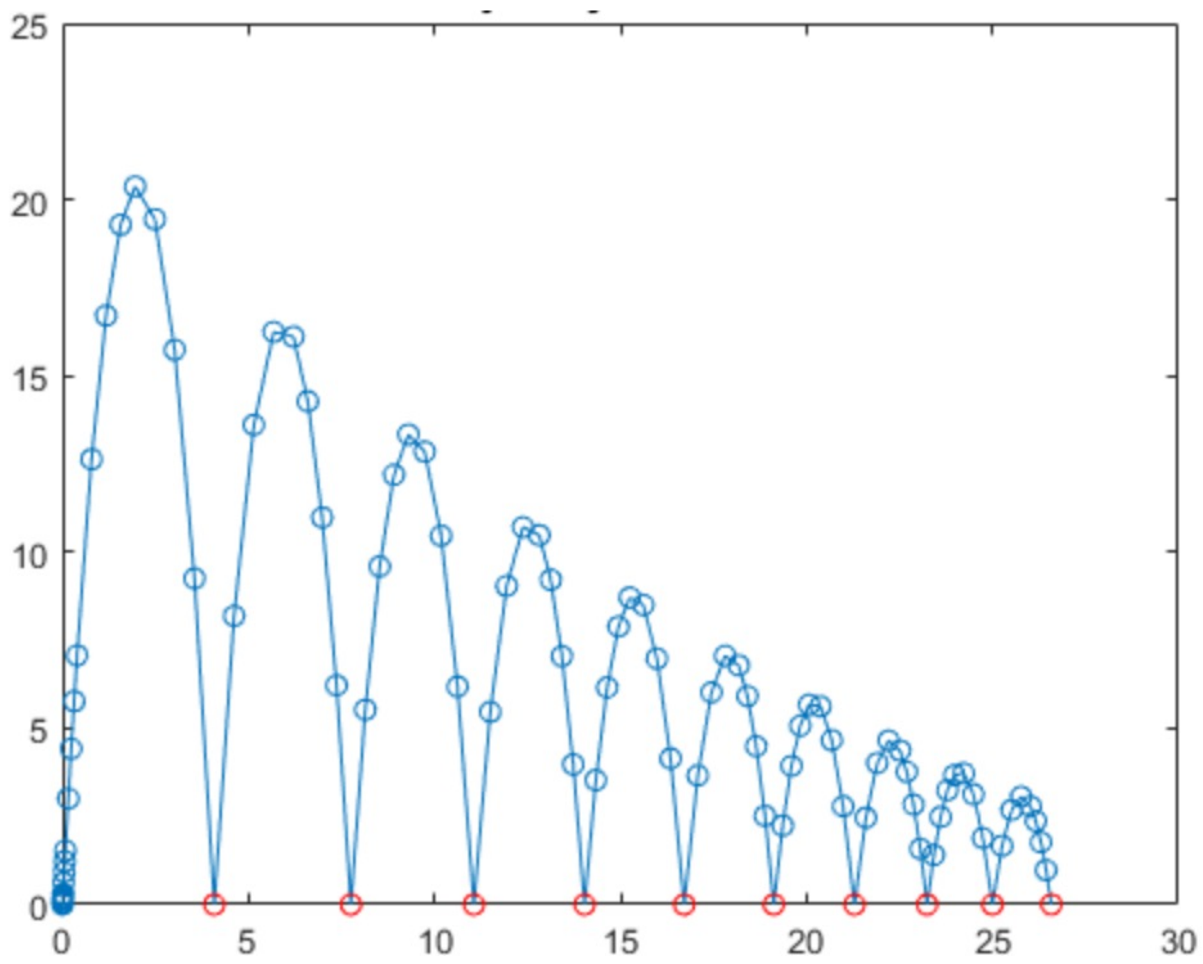
$$u(\theta) - y(x_0 + \theta h) = O(h^{p^*+1})$$

Wyznaczanie wielomianów

- Warunki interpolacji lokalnej nie gwarantują globalnej regularności
- Interpolacja Hermite'a
- Bootstrapping

Zastosowania gęstego wyjścia

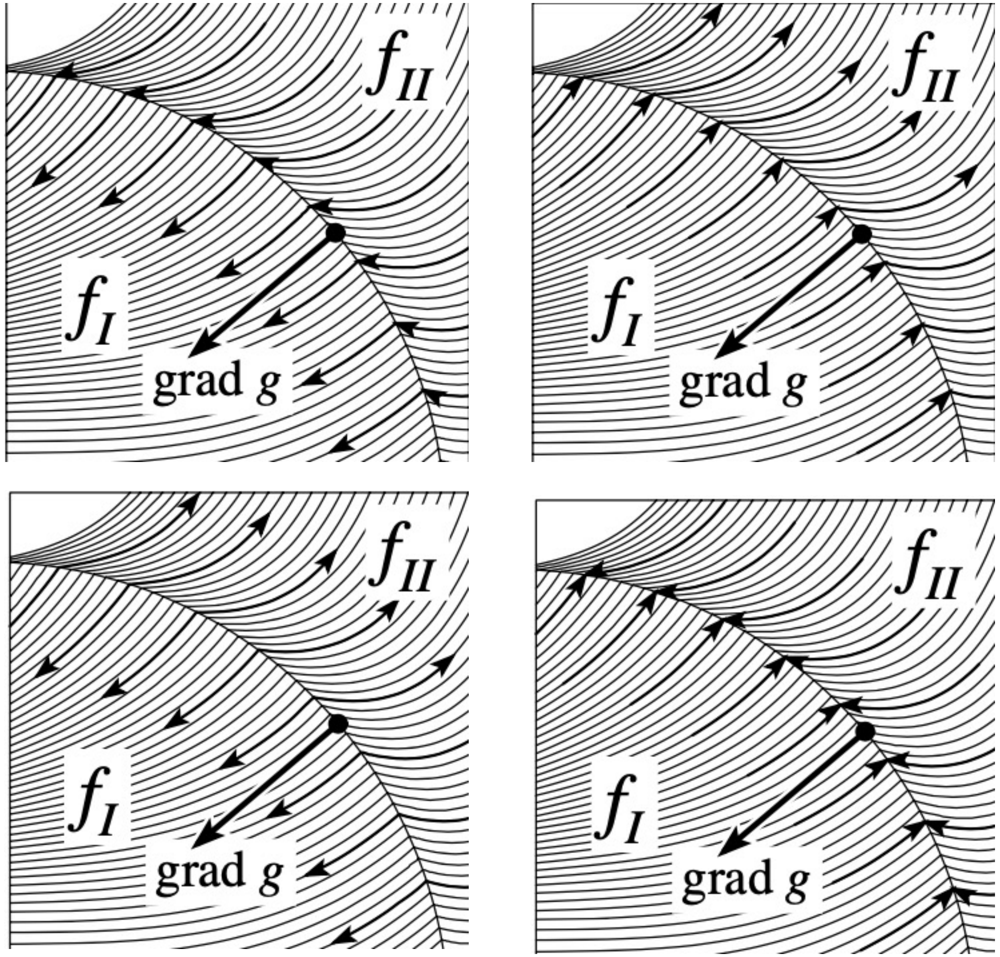
Lokalizacja zdarzeń



Nieciągłości

Powierzchnia przełączająca

$$y' = \begin{cases} f_I \text{ dla } g(y) < 0 \\ f_{II} \text{ dla } g(y) > 0 \end{cases}$$



Jak ogarnąć nieciągłości?

- Zignorować
- Automatyczne wykrywanie osobliwości
- Wykorzystanie powierzchni przełączającej

Metody odwrotne (implicit)

- Formalnie rozwiązanie

$$y(x_1) = y(x_0) + \int_{x_0}^{x_1} f\big(x, y(x)\big)\mathrm{d}x$$

- Metoda punktu środkowego

$$k_1 = f(x_0 + h/2, y_0 + h/2\, k_1)$$
$$y_1 = y_0 + hk_1$$

Wzór trapezów

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{2}(f(x_0, y_0) + f(x_1, y_1))$$

Rodzaje metod RK

$$
\begin{array}{c|ccccc}
0 & & & & & \\
c_2 & a_{21} & & & & \\
c_3 & a_{32} & a_{32} & & & \\
\vdots & \vdots & \ddots & & & \\
c_s & a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{s,s-1} & \\
\hline
 & b_1 & b_2 & \cdots & b_{s-1} & b_s \\
\hline
 & \widehat{b}_1 & \widehat{b}_2 & \cdots & \widehat{b}_{s-1} & \widehat{b}_s
\end{array}
$$

- Jeżeli $a_{ij} = 0$ dla $i \leq j$ - metoda otwarta (ERK, *Explicit Runge-Kutta*)
- Jeżeli $a_{ij} = 0$ dla $i < j$ oraz co najmniej jedna $a_{ii} \neq 0$- metoda diagnoanlnie odwrotna (DIRK, *Diagonally Implicit RK*)
- W pozostałych przypadkach metoda odwrotna (IRK, *Implicit RK*)

Rząd metod odwrotnych jest wyższy dla takich samych s

- Rząd 3

$$
\begin{array}{c|cc}
\gamma & \gamma & 0 \\
1-\gamma & 1-2\gamma & \gamma \\
\hline
 & 1/2 & 1/2
\end{array}
\qquad
\gamma = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{6}
$$

- Rząd 4

$$
\begin{array}{c|cc}
\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{6} \\
\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{4} \\
\hline
 & 1/2 & 1/2
\end{array}
$$

Problemy z długimi obliczeniami

- Systemy zachowujące energię
- Obliczenia astronomiczne
- Problemy wielu ciał

Systemy Hamiltonowskie

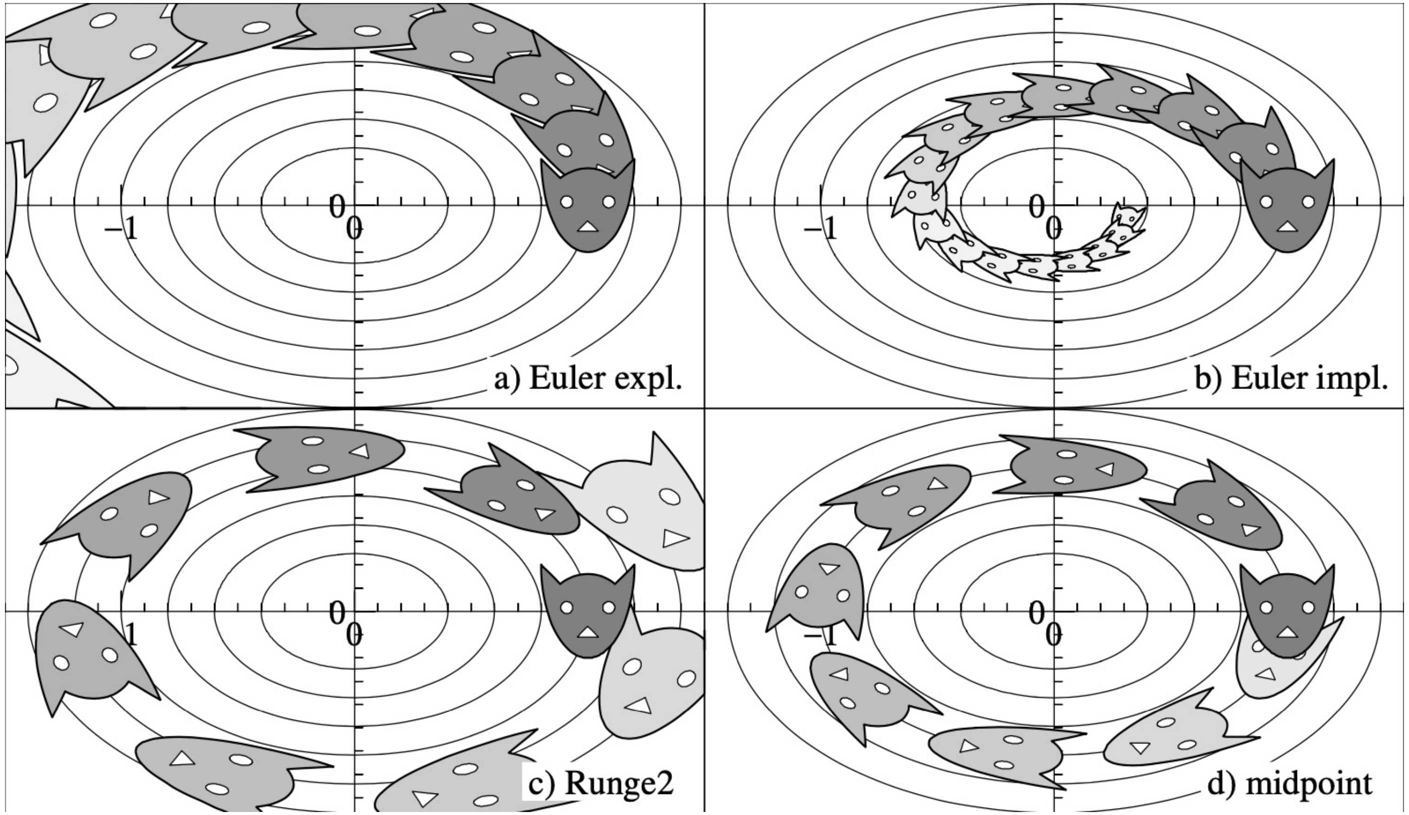
- Dana jest funkcja $H(p,q)$ nazywana Hamiltonianem
- Układ równań różniczkowych

$$\dot{p}_i = \frac{\partial H}{\partial q_i}(p,q), \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}(p,q)$$

- Własności:
  - Hamiltonian jest stały na rozwiązaniach
  - Strumień fazowy zachowuje objętość

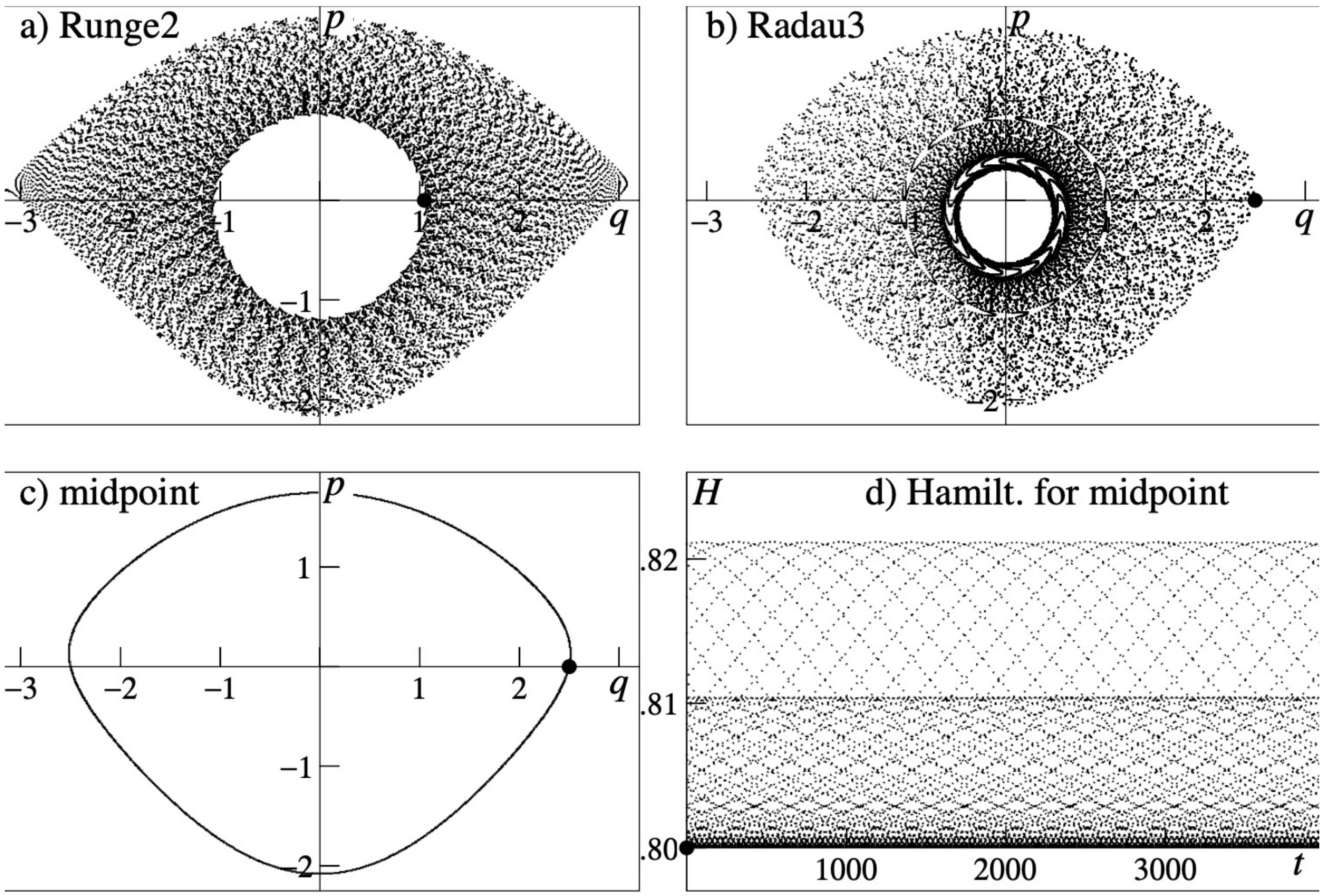
Długie obliczenia zniekształcają

Oscylator liniowy



Istotą jest zachowanie Hamiltonianu

Oscylator nieliniowy



Metody symplektyczne

- Muszą zachowywać pewne formy różniczkowe dla rozwiązań systemów Hamiltonowskich
- Otwarte RK nie są nigdy symplektyczne
- Metody odwrotne oparte o kwadratury Gaussa są symplektyczne

Zastosowania metod symplektycznych

- Obliczenia astronomiczne
- Nowoczesne metody Hamiltonian Monte Carlo i pokrewne

Metody wielokrokowe

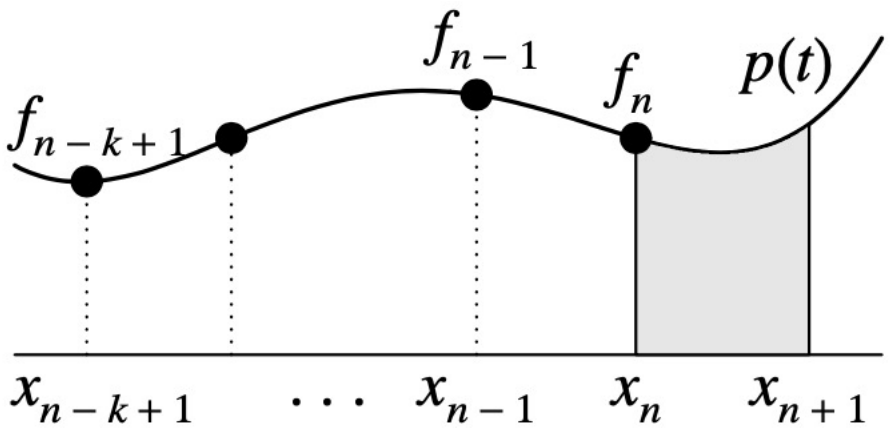
- Metody bazują na rozwiązaniu w formie całkowej

$$y(x_n) = y(x_{n+1}) + \int_{x_n}^{x_{n+1}} f\big(t, y(t)\big)\mathrm{d}t$$

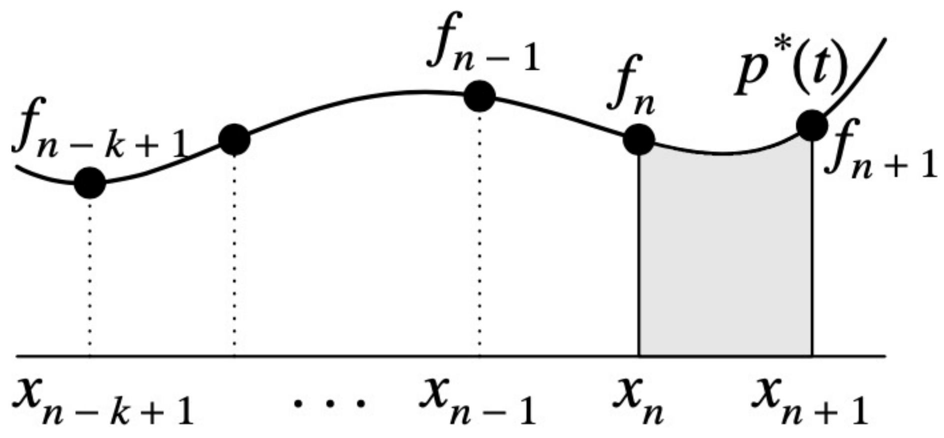
- Ideą metody jest zastąpienie nieznanego rozwiązania za pomocą wielomianu interpolacyjnego

Metody Adamsa

Otwarta



Odwrotna



Połączenie obydwu daje metody predyktor-korektor

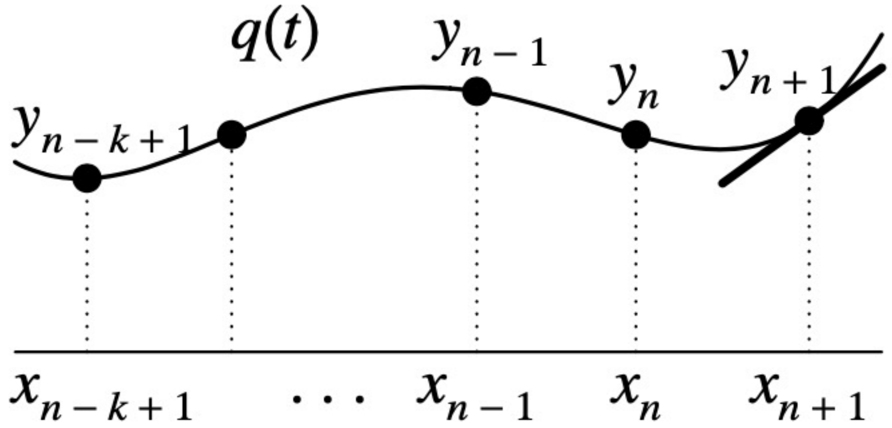
- Predyktor wylicza rozwiązanie metodą otwartą dla $\hat{y}(x_{n+1})$
- Wylicza się funkcję $\hat{f}(x_{n+1},\hat{y}(x_{n+1}))$
- Wykorzystuje się ją w metodzie odwrotnej uzyskując $y(x_{n+1})$
- Wylicza się $f(x_{n+1},y(x_{n+1}))$

Metody wielokrokowe współcześnie

- Raczej historia
- Problemy ze zmianą długości kroku
- Wyjątkiem są metody różnic wstecznych

Metody różnic wstecznych

- Zamiast całkowania, wykorzystuje się wielomian interpolacyjny do estymacji pochodnej

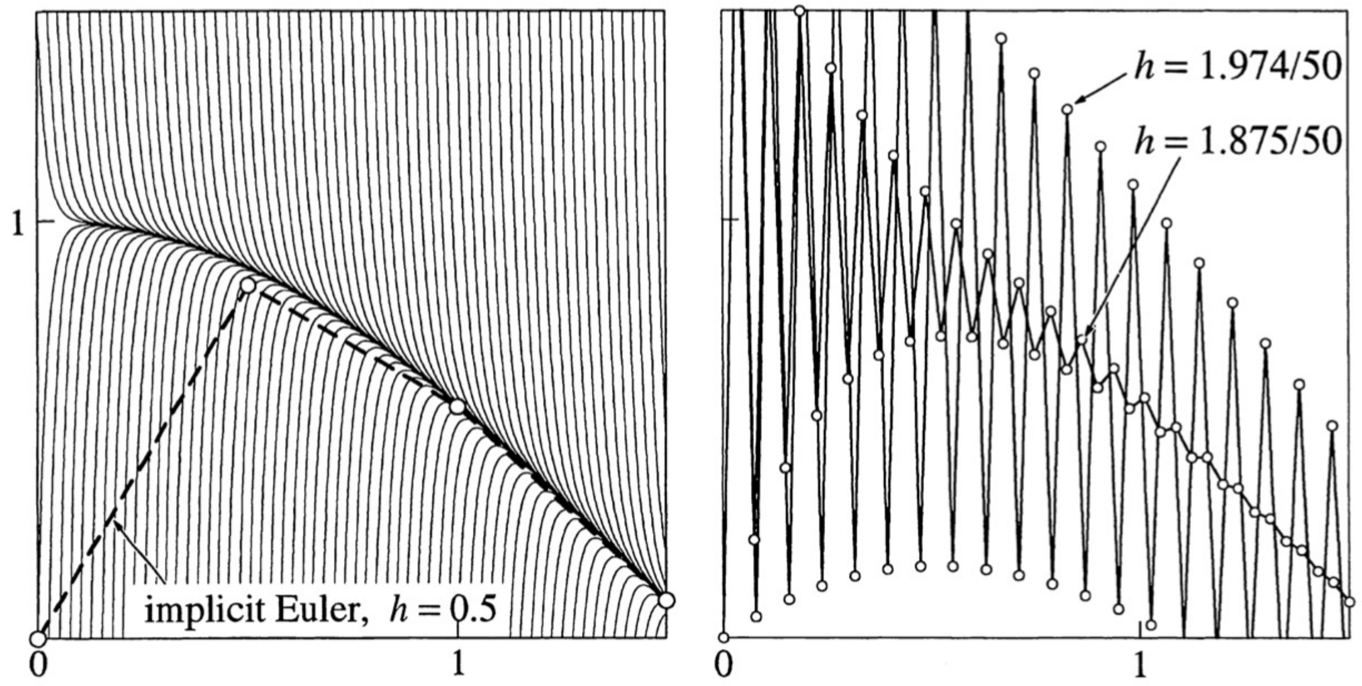


Kilka słów o stabilności

- Stabilność w sensie Lapunowa
- Asymptotyczna stabilność
- Rozwiązania równań powinny
  się zachowywać tak jak równania

Równania sztywne

$\dot{y} = -50(y - \cos x)$



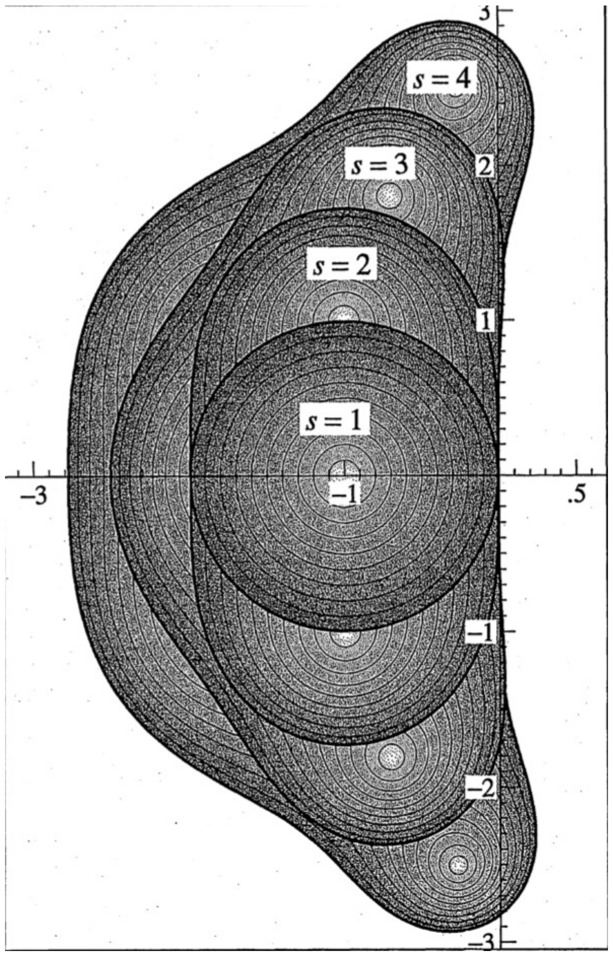
Funkcja stabilności

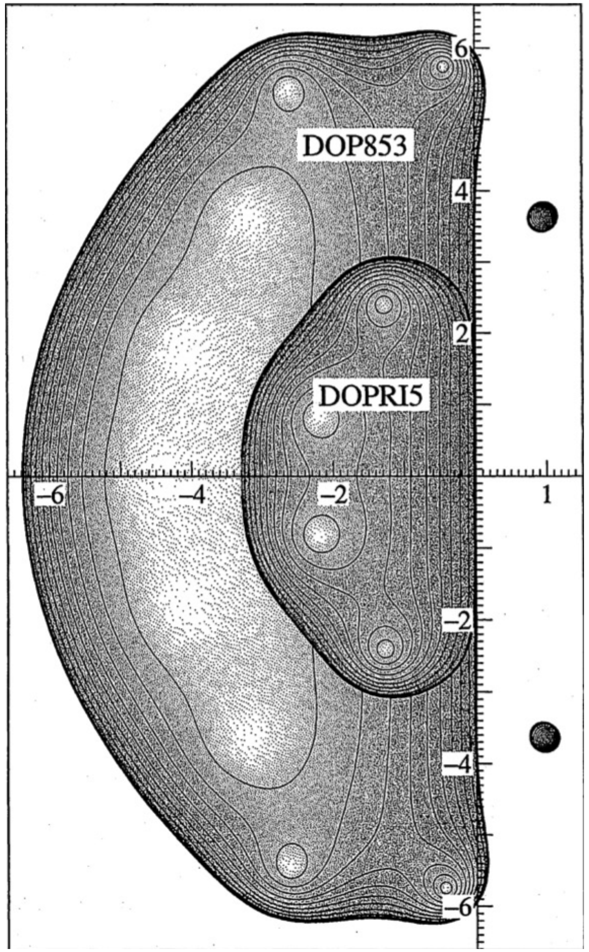
- Dane jest równanie różniczkowe
$$\dot{y} = \lambda y,\ y_0 = 1$$
- Jego rozwiązanie numeryczne ma postać
$$y_{m+1} = R(h\lambda)y_m$$
- Niech $z = h\lambda$, wtedy $R(z)$ nazywamy funkcją stabilności

Obszar stabilności

$$S = \{z \in \mathbb{C} : |R(z)| < 1\}$$

Stabilność metod RK





Wykrywanie sztywności

- Specjalny estymator błędu
- Estymacja wartości własnych linearyzacji
- Wykrycie sztywności sugeruje przejście do metod dla równań sztywnych

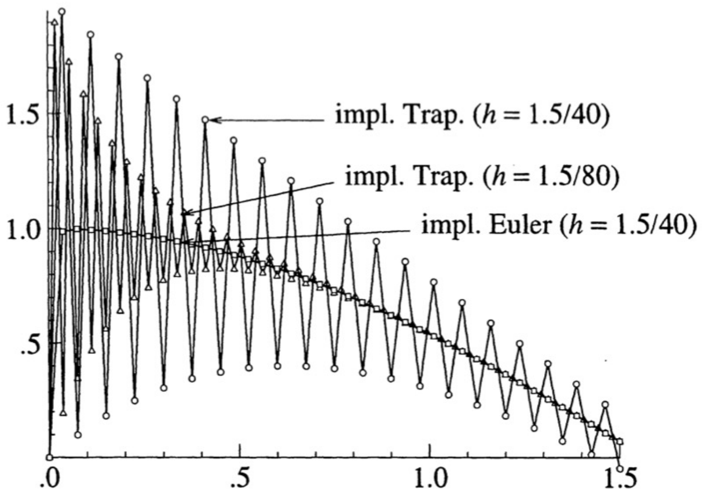
Stabilność doboru kroku

- Problem pojawia się, gdy kroki są za często odrzucane, gdy znajdują się na brzegu obszaru stabilności
- Dotyczny to zwłaszcza metod DP
- Regulator PI do długości kroku

A-Stabilność

- Odwrotne metody RK mają funkcje stabilności w postaci funkcji wymiernych
- Jeżeli $|R(z)| < 1$ dla wszystkich $\lambda \in \mathbb{C}^{-}$ i $h > 0$ metoda jest A stabilna
- Dotyczy to większości odwrotnych metod RK

L-stabilności i A(α) stabilność



- L stabilność jest mocniejsza, bo wymaga, żeby $R(\infty) = 0$
- A(α) stabilność jest słabsza, ponieważ wymaga aby sektor stabilności zawierał

$$S_\alpha = \{z; \quad |\arg(-z)| < \alpha, \ \ z \neq 0\}$$

Implementacja odwrotnych RK

- Wymagana metoda Newtona
- Uproszczony wariant – metody Rosenbrocka
- Dobór kroku podobny