Rozwiązywanie Równań Różniczkowych Zwyczajnych

Metody numeryczne

Równanie I-go rzędu

- Równanie

$$y' = f(x, y)$$

- Rozwiązanie $y(x)$

$$y'(x) = f\big(x, y(x)\big) \qquad y(x_0) = y_0$$

Równanie II-rzędu

- Równoważność

$$y'' = f(x, y, y').$$

$$y(x_0) = y_0,$$

$$y'(x_0) = y'_0.$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$y'_1 = y_2 \qquad y_1(x_0) = y_0$$

$$y'_2 = f(x, y_1, y_2) \qquad y_2(x_0) = y'_0.$$

Równania I rzędu ogólnie

- W ogólnym przypadku

$$y' = f(x, y)$$
$$y(x_0) = y_0$$
$$x \in R^n$$

Istnienie i jednoznaczność

- Równanie różniczkowe ma rozwiązanie, i jest ono jednoznaczne wtedy i tylko wtedy, gdy funkcja f spełnia warunek Lipshitza

$$|f(x,z) - f(x,y)| \leq L|z-y|$$

Rozwinięcie rozwiązania w szereg Taylora

$$y(x - x_0) = y_0 + (x - x_0)y'(x_0) + \cdots = y_0 + (x - x_0)f(x_0, y_0) + \cdots$$

Metoda prostokątów Eulera (1768)

- Szukamy rozwiązania problemu na przedziale całkowania

$$y' = f(x, y), \qquad y(x_0) = y_0, \qquad y(X) = ?$$

$$x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n = X$$

- Na każdym podprzedziale stosujemy pierwszy wyraz szeregu Taylora

$$\begin{aligned} y_1 - y_0 &= (x_1 - x_0) f(x_0, y_0) \\ y_2 - y_1 &= (x_2 - x_1) f(x_1, y_1) \\ &\ldots \\ y_n - y_{n-1} &= (x_n - x_{n-1}) f(x_{n-1}, y_{n-1}). \end{aligned}$$

$$h = (h_0, h_1, \ldots, h_{n-1}) \qquad h_i = x_{i+1} - x_i$$

Łamana Eulera

- Połączenie punktów $y_1, y_2, y_3, \ldots$ prostymi

$$y_h(x) = y_i + (x - x_i) f(x_i, y_i) \qquad \text{for} \quad x_i \le x \le x_{i+1}.$$

Zbieżność metody Eulera

- Niech $|h| := \max_{i=0,\ldots,n-1} h_i \to 0,$
- Tw. Niech *f*, będzie ciągła, ograniczona przez *A* i spełnia warunek Lipschitza na zbiorze
$$D = \Big\{(x,y) \mid x_0 \le x \le X,\ |y - y_0| \le b\Big\}.$$
- Dla $X - x_0 \le b/A,$ mamy:
    - Dla $|h| \to 0$ łamana Eulera zmierza jednostajnie do ciągłej funkcji $\phi(x)$
    - $\phi(x)$ jest ciągle różniczkowalnym rozwiązaniem równania na przedziale $x_0 \le x \le X$
    - Nie istnieją inne rozwiązania równania na tym przedziale

Błąd metody Eulera

- Niech w otoczeniu rozwiązania

$$|f| \le A, \qquad \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \le L, \qquad \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| \le M$$

- Wtedy dla dostatecznie małych |h|

$$\left|y(x) - y_h(x)\right| \le \frac{M + AL}{L}\left(e^{L(x-x_0)} - 1\right) \cdot |h|,$$

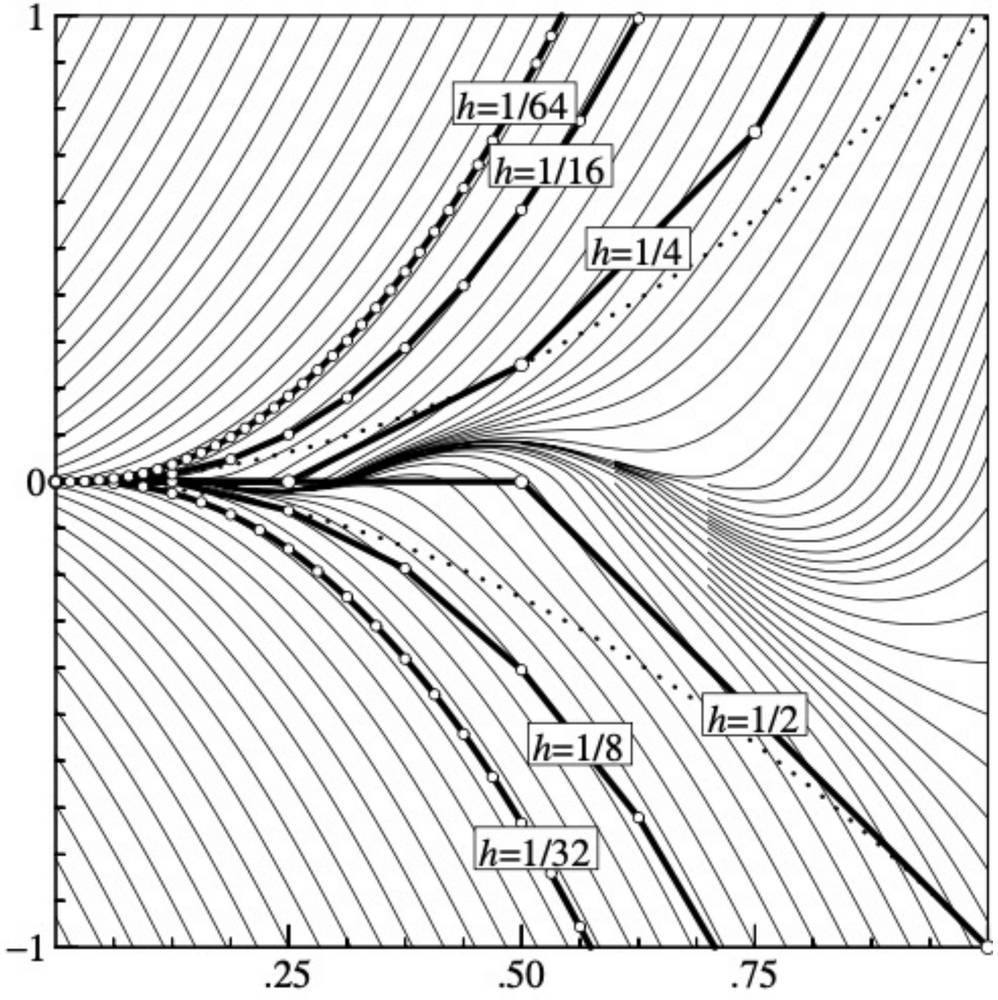
Konsekwencje błędu metody Eulera

- Całkowity (globalny) błąd metody Eulera jest proporcjonalny do maksymalnej długości kroku.
- Czyli:
  - Dla dokładności 3 miejsc po przecinku potrzeba tysiąc kroków
  - Dla dokładności 6 miejsc po przecinku potrzeba milion kroków

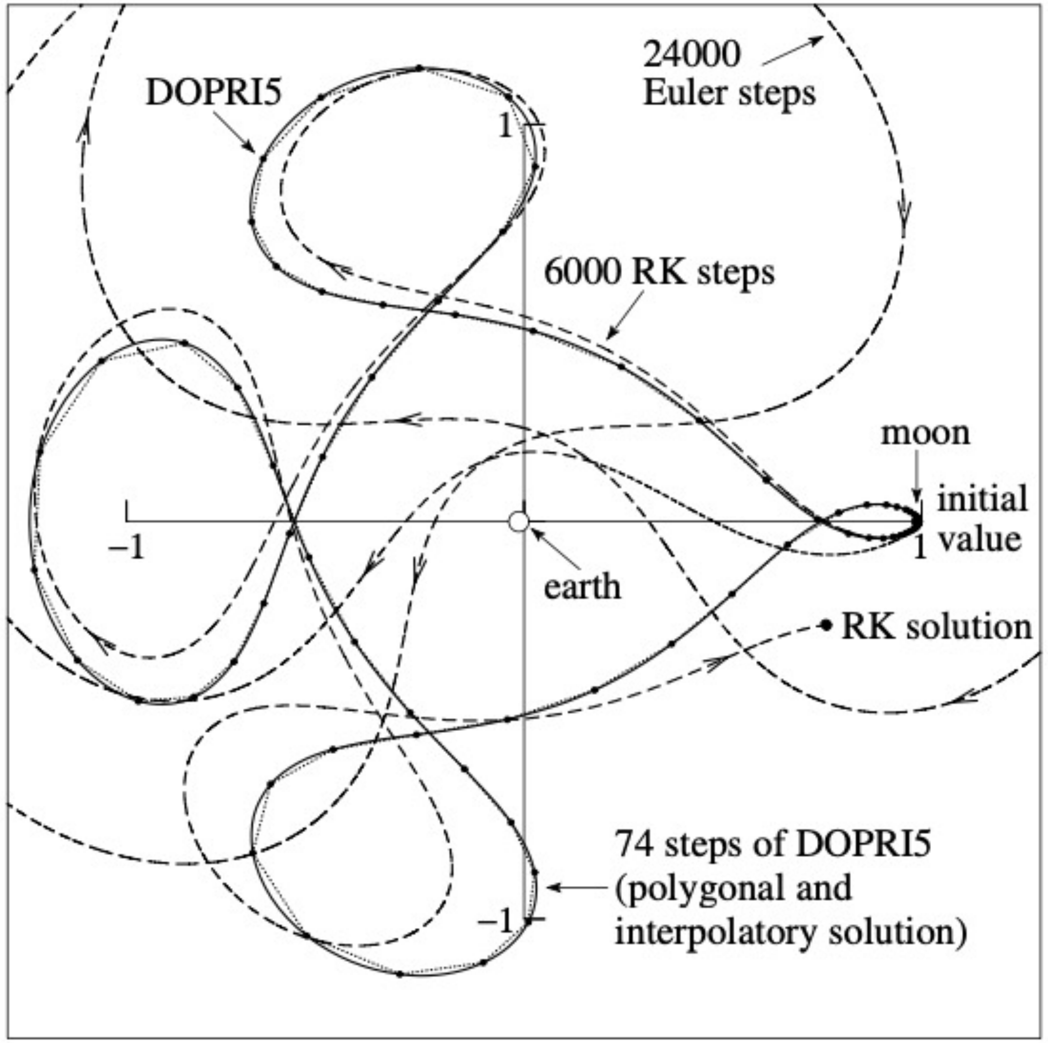
Brak warunku Lipschitza

$$y' = 4\left(\operatorname{sign}(y)\sqrt{|y|} + \max\left(0, x - \frac{|y|}{x}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi \log x}{\log 2}\right)\right)$$

- Zmiana kroku $h = 2^{-i}$ prowadzi do innych rozwiązań po parzystych i nieparzystych



Dokładność jest problemem



Jak usprawnić Eulera – Metody Rungego-Kutty

- Zacznijmy od metody punktu środkowego

$$y' = f(x), \qquad y(x_0) = y_0$$

$$y(X) = y_0 + \int_{x_0}^{X} f(x)\, dx.$$

$$y(x_0 + h_0) \approx y_1 = y_0 + h_0 f\left(x_0 + \frac{h_0}{2}\right)$$
$$y(x_1 + h_1) \approx y_2 = y_1 + h_1 f\left(x_1 + \frac{h_1}{2}\right)$$
$$\cdots$$
$$y(X) \approx Y = y_{n-1} + h_{n-1} f\left(x_{n-1} + \frac{h_{n-1}}{2}\right)$$

- Błąd globalny metody punktu środkowego to Ch^2 (dla 3 miejsc po przecinku dokladnosci – 1000 x szybciej niż Euler)

Jak by wyglądała metoda?

- W idealnym przypadku

$$y(x_0 + h) \approx y_0 + hf\Big(x_0 + \frac{h}{2}, y(x_0 + \frac{h}{2})\Big)$$

- Skąd wziąć wartość $y(x_0 + h/2)$?
- Odpowiedź: mały krok Eulerem

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_0, y_0) \\ k_2 &= f\Big(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{h}{2}k_1\Big) \\ y_1 &= y_0 + hk_2. \end{aligned}$$

Analiza błędu – szereg Taylora

- Szereg Taylora rozwiązania numerycznego

$$
\begin{aligned}
y_1 &= y_0 + hf\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{h}{2} f_0\right) \\
&= y_0 + hf(x_0, y_0) + \frac{h^2}{2}\left(f_x + f_y f\right)(x_0, y_0) \\
&\quad + \frac{h^3}{8}\left(f_{xx} + 2 f_{xy} f + f_{yy} f^2\right)(x_0, y_0) + \dots .
\end{aligned}
$$

Analiza błędu – szereg Taylora cd..

- Szereg Taylora rozwiązania analitycznego

$$y(x_0+h) = y_0 + hf(x_0, y_0) + \frac{h^2}{2}\Big(f_x + f_y f\Big)(x_0, y_0)$$
$$+ \frac{h^3}{6}\Big(f_{xx} + 2f_{xy}f + f_{yy}f^2 + f_y f_x + f_y^2 f\Big)(x_0, y_0) + \dots$$

Różnica szeregów

$$y(x_0+h) - y_1 = \frac{h^3}{24}\Big(f_{xx} + 2f_{xy}f + f_{yy}f^2 + 4(f_y f_x + f_y^2 f)\Big)(x_0, y_0) + \ldots.$$

$$\|y(x_0+h) - y_1\| \leq Kh^3$$

Metody Rungego-Kutty

- Niech s będzie liczbą etapów, s-etapowa otwarta metoda RK ma postać

$$
\begin{aligned}
k_1 &= f(x_0, y_0) \\
k_2 &= f(x_0 + c_2 h, y_0 + h a_{21} k_1) \\
k_3 &= f\left(x_0 + c_3 h, y_0 + h\left(a_{31} k_1 + a_{32} k_2\right)\right) \\
&\cdots \\
k_s &= f\left(x_0 + c_s h, y_0 + h\left(a_{s1} k_1 + \ldots + a_{s,s-1} k_{s-1}\right)\right) \\
y_1 &= y_0 + h\left(b_1 k_1 + \ldots + b_s k_s\right)
\end{aligned}
$$

$$c_i = \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}.$$

Rząd metody Rungego Kutty

- Metoda Rungego-Kutty ma rząd p, jeśli dla odpowiednio gładkich problemów zachodzi

$$\|y(x_0 + h) - y_1\| \leq K h^{p+1}$$

Tablice Butchera

$$
\begin{array}{c|ccccc}
0 & & & & & \\
c_2 & a_{21} & & & & \\
c_3 & a_{31} & a_{32} & & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \\
c_s & a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{s,s-1} & \\
\hline
 & b_1 & b_2 & \cdots & b_{s-1} & b_s
\end{array}
$$

Metody 4-go rzędu

- Najbardziej znane
- Analityczne obliczenia bardzo uciążliwe i pracochłonne

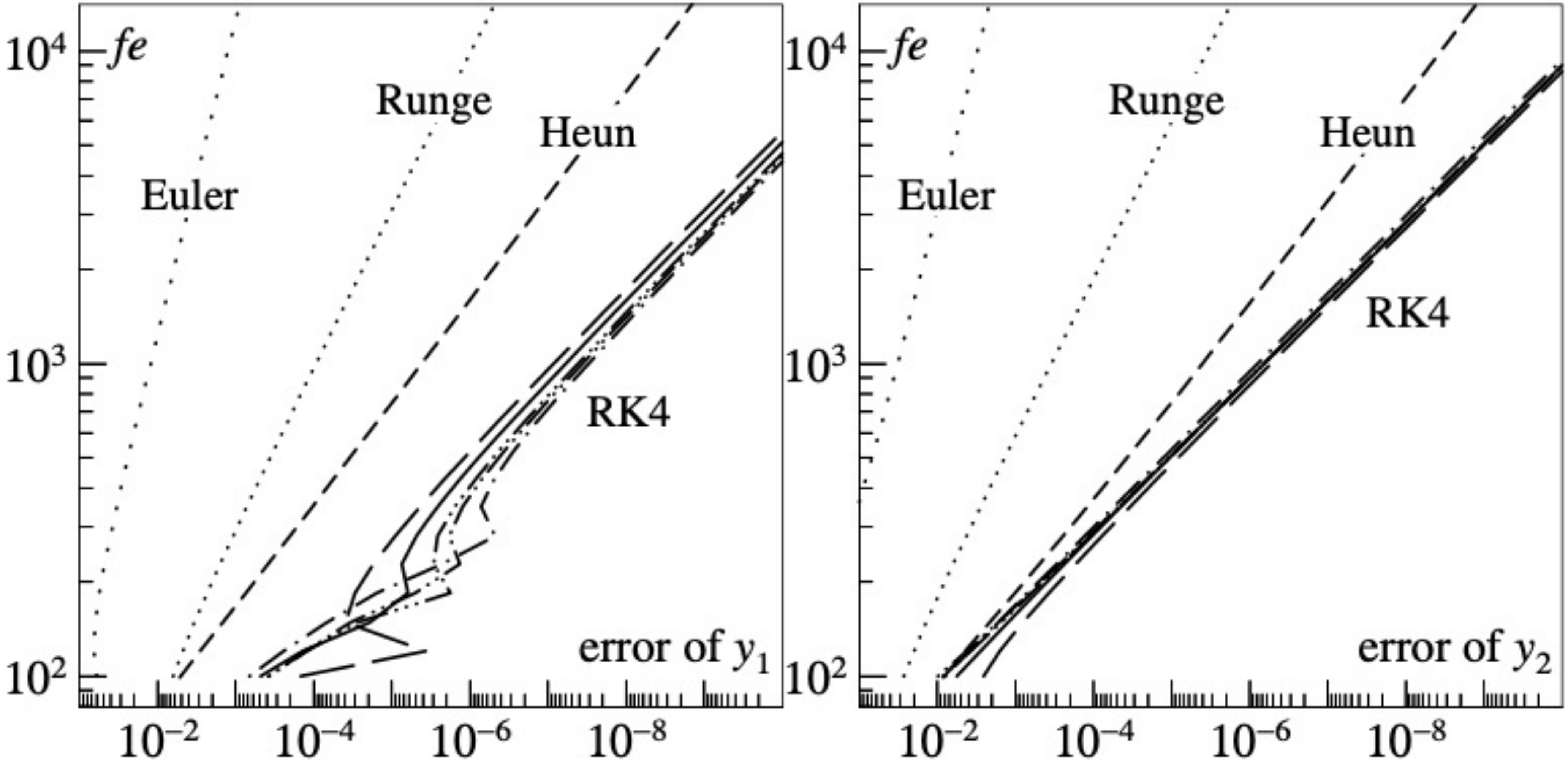
$$
\begin{array}{c|cccc}
0 & & & & \\
1/2 & 1/2 & & & \\
1/2 & 0 & 1/2 & & \\
1 & 0 & 0 & 1 & \\
\hline
 & 1/6 & 2/6 & 2/6 & 1/6
\end{array}
$$

“The” Runge-Kutta method

$$
\begin{array}{c|cccc}
0 & & & & \\
1/3 & 1/3 & & & \\
2/3 & -1/3 & 1 & & \\
1 & 1 & -1 & 1 & \\
\hline
 & 1/8 & 3/8 & 3/8 & 1/8
\end{array}
$$

3/8–Rule

Rząd metody ma znaczenie



Wyznaczanie nowych metod

- Korzysta się z teorii grafów do wyznaczania warunków na rząd

order p	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
no. of conditions	1	2	4	8	17	37	85	200	486	1205

Błąd globalny metod RK

- Dla układów z ograniczonymi pochodnymi (ew. warunkiem Lipszyca)

$$\|E\| \leq h^p \frac{C'}{L}\Big(\exp\big(L(X - x_0)\big) - 1\Big)$$

- Oznacza to, że błąd globalny jest rzędu Kh^p ze stalą zależną od długości przedziału.

Dobór długości kroku

- Jeżeli nie znamy rozwiązania analitycznego, to jak sprawdzić czy rozwiązanie jest dobre?
- Najstarszy sposób – zrobić obliczenia z krokiem o połowę mniejszym – te cyfry rozwiązania, które się nie zmieniły powinny być poprawne (bardzo niewydajna metoda)
- Lepsze metody estymacji błędu.

Wbudowane metody Rungego-Kutty

- Dwie metody za cenę jednej

$$
\begin{array}{c|ccccc}
0 & & & & & \\
c_2 & a_{21} & & & & \\
c_3 & a_{32} & a_{32} & & & \\
\vdots & \vdots & \ddots & & & \\
c_s & a_{s1} & a_{s2} & \dots & a_{s,s-1} & \\
\hline
 & b_1 & b_2 & \dots & b_{s-1} & b_s \\
\hline
 & \widehat{b}_1 & \widehat{b}_2 & \dots & \widehat{b}_{s-1} & \widehat{b}_s
\end{array}
$$

$$y_1 = y_0 + h(b_1 k_1 + \ldots + b_s k_s)$$

$$\widehat{y}_1 = y_0 + h(\widehat{b}_1 k_1 + \ldots + \widehat{b}_s k_s)$$

- Porównanie dwóch rozwiązań da nam estymatę błędu

Automatyczna kontrola długości kroku

- Chcemy zapewnić tolerancję

$$|y_{1i} - \widehat{y}_{1i}| \leq sc_i, \qquad sc_i = Atol_i + \max(|y_{0i}|, |y_{1i}|) \cdot Rtol_i$$

- Całkowita miara błędu

$$err = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{y_{1i} - \widehat{y}_{1i}}{sc_i}\right)^2} \qquad err \approx C \cdot h^{q+1}$$

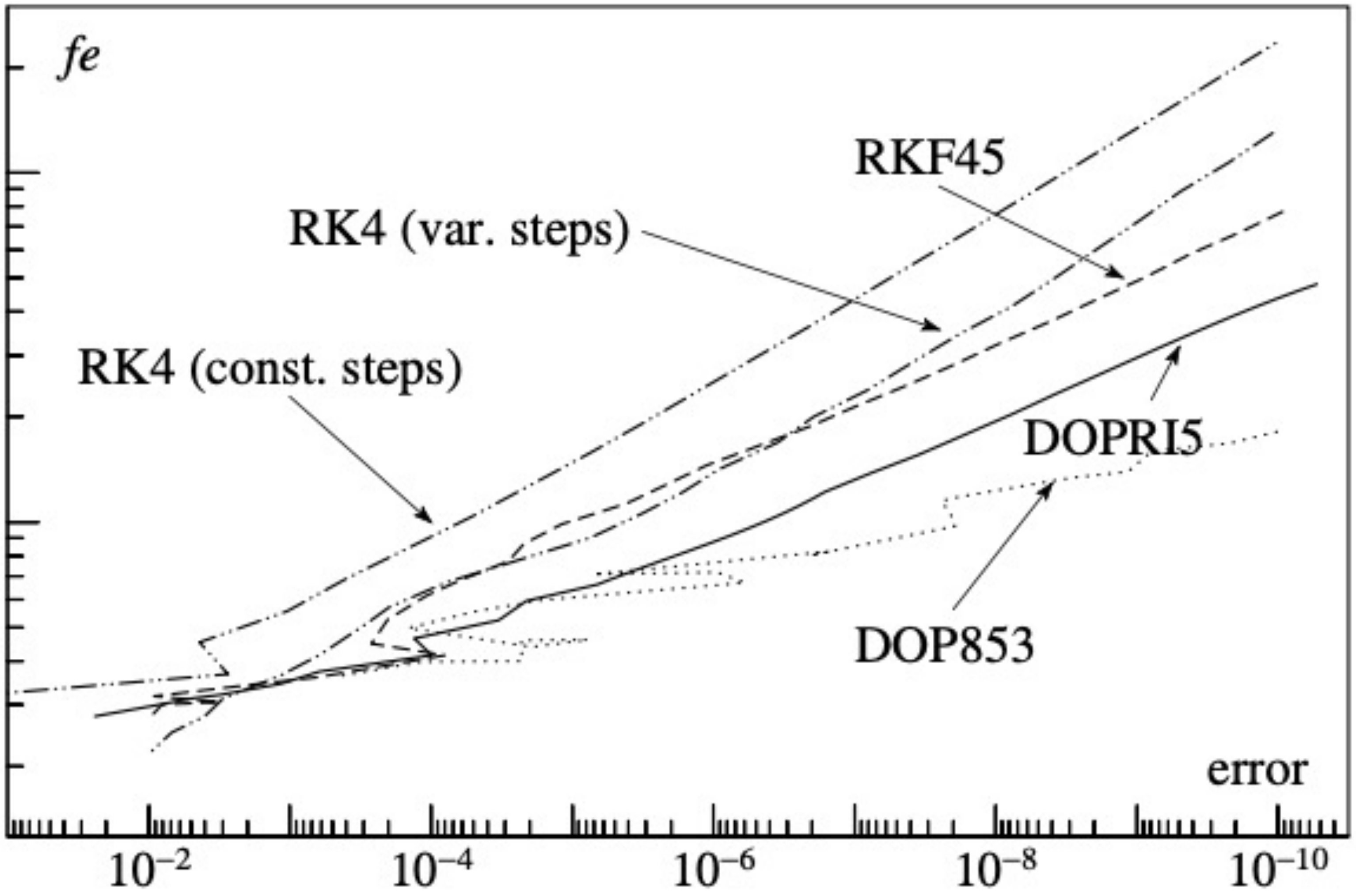
- Porównujemy err do 1.

$$h_{\text{opt}} = h \cdot (1/err)^{1/(q+1)}$$

Lokalna ekstrapolacja

- Zamiast brać konserwatywne rozwiązanie rzędu niższego bierze się ekstrapolacyjne rozwiązanie rzędu wyższego

Uzysk zmiennego kroku



Bariery Butchera

- Nie istnieją metody p etapowe rzędu p dla p większego od 4
- Nie istnieją metody p+1 etapowe rzędu p dla p większego od 6
- Nie istnieją metody p+2 etapowe rzędu p dla p większego od 7

Metoda Dormanda-Prince'a 5(4)

0							
$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$						
$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{40}$	$\frac{9}{40}$					
$\frac{4}{5}$	$\frac{44}{45}$	$-\frac{56}{15}$	$\frac{32}{9}$				
$\frac{8}{9}$	$\frac{19372}{6561}$	$-\frac{25360}{2187}$	$\frac{64448}{6561}$	$-\frac{212}{729}$			
1	$\frac{9017}{3168}$	$-\frac{355}{33}$	$\frac{46732}{5247}$	$\frac{49}{176}$	$-\frac{5103}{18656}$		
1	$\frac{35}{384}$	0	$\frac{500}{1113}$	$\frac{125}{192}$	$-\frac{2187}{6784}$	$\frac{11}{84}$	
y_1	$\frac{35}{384}$	0	$\frac{500}{1113}$	$\frac{125}{192}$	$-\frac{2187}{6784}$	$\frac{11}{84}$	0
$\widehat{y}_1$	$\frac{5179}{57600}$	0	$\frac{7571}{16695}$	$\frac{393}{640}$	$-\frac{92097}{339200}$	$\frac{187}{2100}$	$\frac{1}{40}$