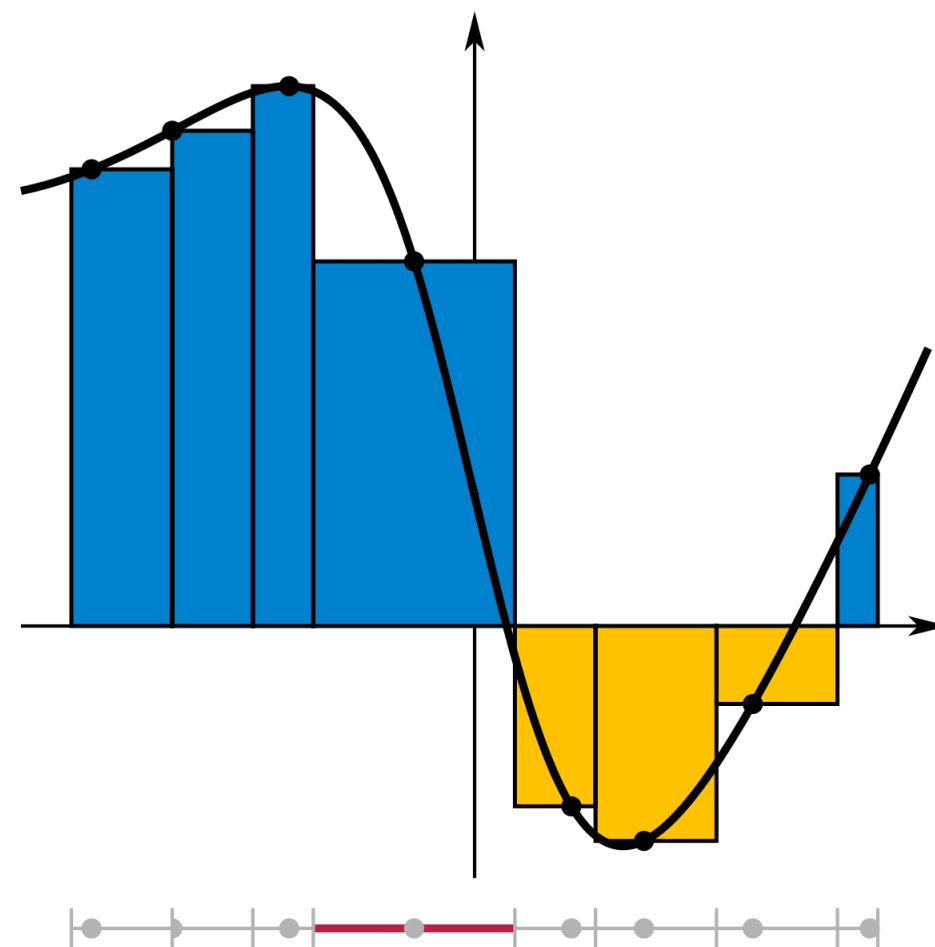
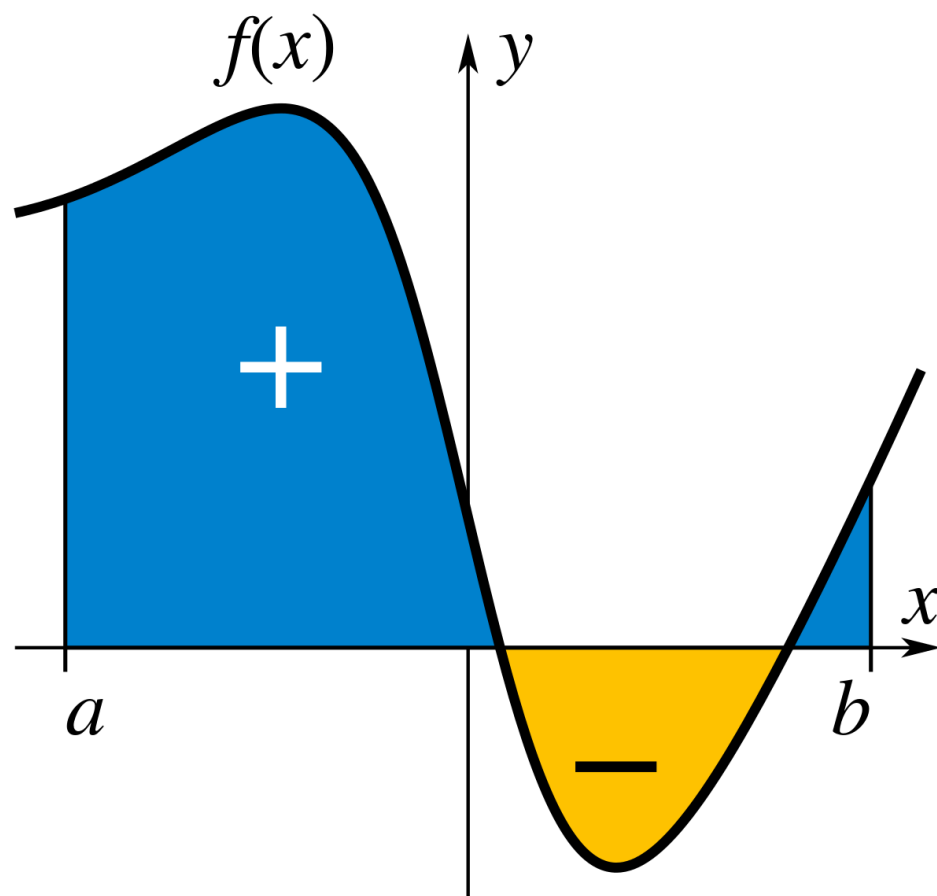


Całkowanie numeryczne

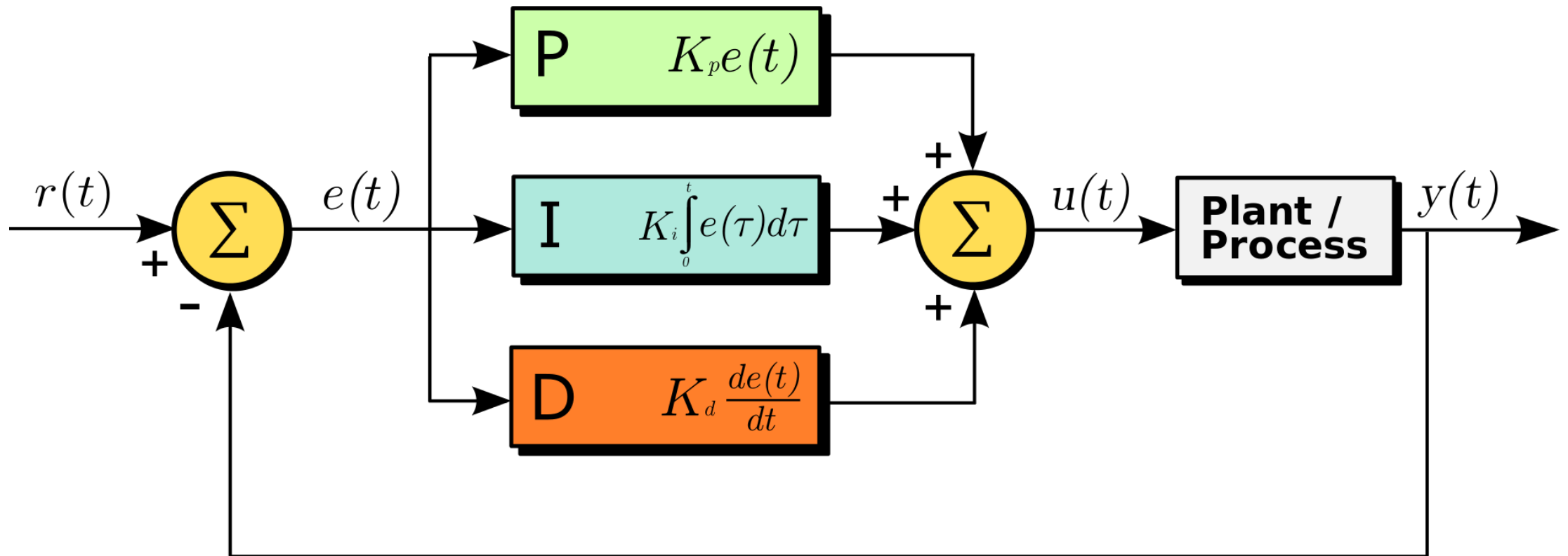
Praktyka to całki oznaczone



Trzy obszary całkowania numerycznego

- Całkowanie w czasie rzeczywistym
- Całkowanie funkcji jednej zmiennej
- Całkowanie funkcji wielu zmiennych

Całkowanie w czasie rzeczywistym

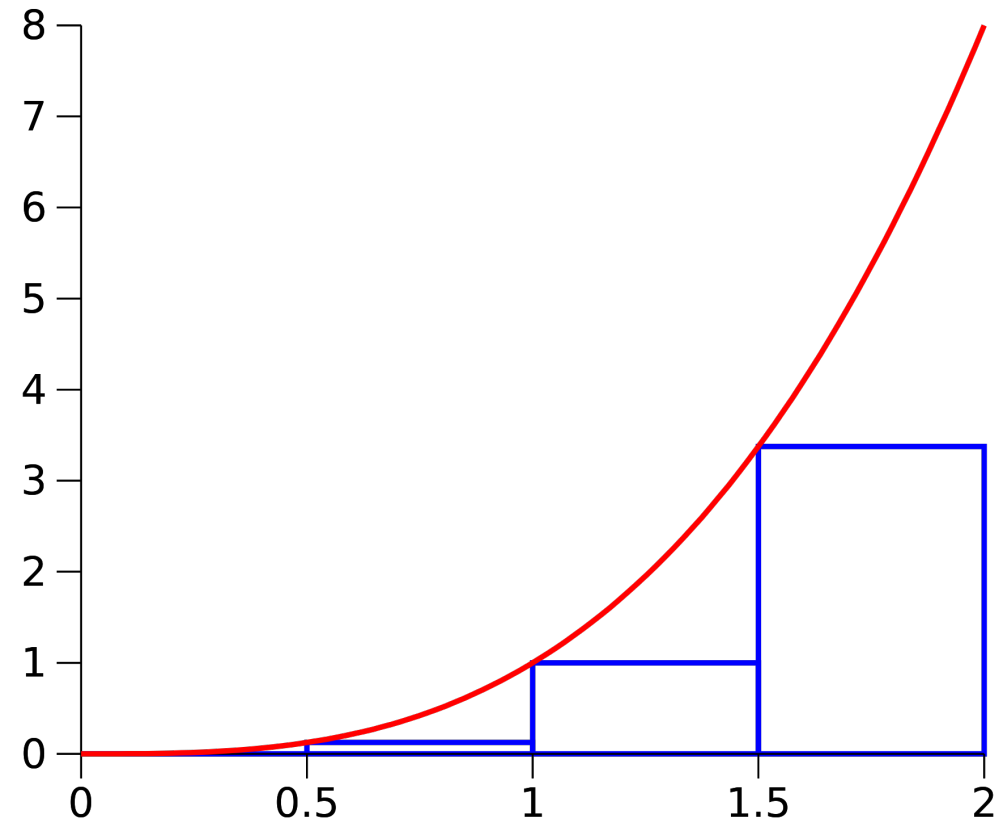


Praktyka całkowania on-line

- Otrzymujemy kolejne wartości funkcji w określonych odstępach czasu
- Nie możemy wybierać punktów
- Wartości funkcji są obarczone błędem pomiaru

Jak najprościej?

- Wzór prostokątów w przód, kwadratura Eulera, metoda prostokątów – wiele nazw na to samo
- Przybliżenie całki to poprzednia wartość pomnożona przez długość kroku między wartościami



Postać matematyczna

$$I(t_i) = I(t_{i-1}) + \int_{t_{i-1}}^{t_i} e(t)dt \approx \hat{I}(t_{i-1}) + e(t_{i-1}) \cdot \Delta t$$
$$t_i = t_{i-1} + \Delta t$$

Transmitancja

- Całkowanie w dziedzinie transformaty Laplace'a przedstawiamy jako

$$I(s) = \frac{1}{s} E(s)$$

- Do obliczeń dyskretnych w czasie używamy transformaty z , $z^{-1} = e^{-s\Delta t}$

$$\hat{I}(t_i) = \hat{I}(t_{i-1}) + e(t_{i-1}) \cdot \Delta t$$

$$\hat{I}(z) = z^{-1} \hat{I}(z) + \Delta t z^{-1} E(z)$$

$$\hat{I}(z) = \frac{\Delta t z^{-1}}{1 - z^{-1}} E(z) = \frac{\Delta t}{z - 1} E(z)$$

Aproksymacja Eulera w przód

- Aproksymacja integratora

$$\frac{1}{s} \approx \frac{\Delta t}{z - 1}$$

- Lub analogicznie różniczki

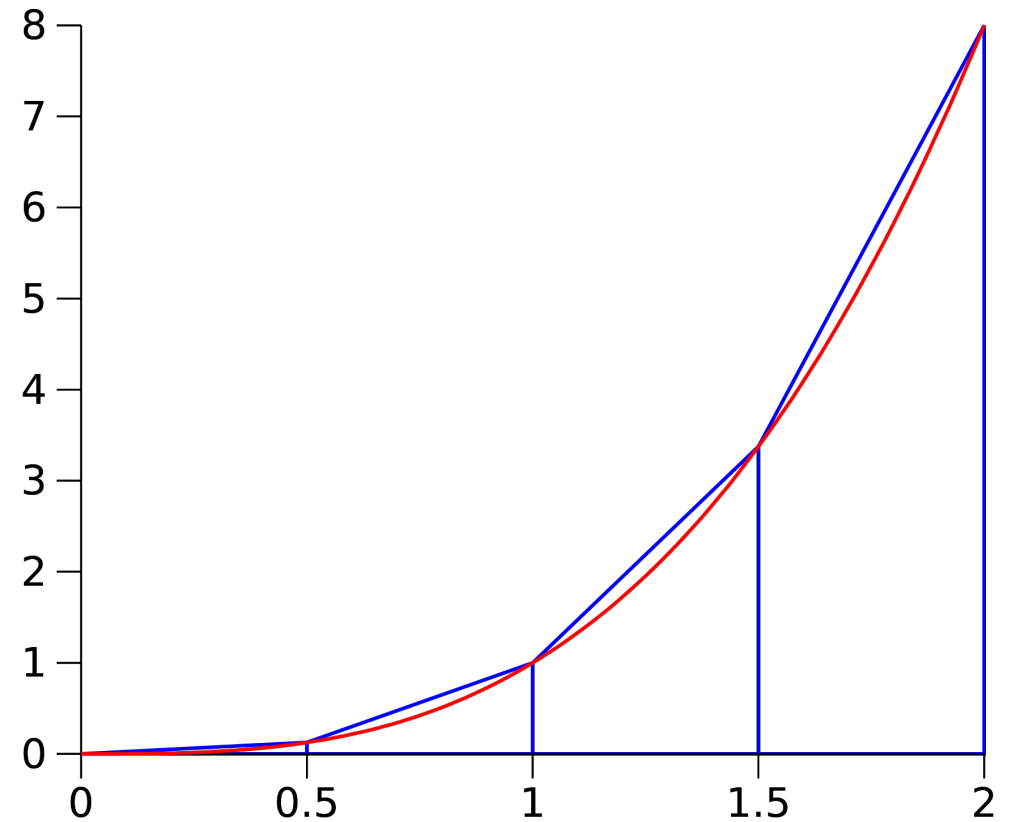
$$z \approx 1 + \Delta t \cdot s \iff s \approx \frac{1}{\Delta t} (1 - z)$$

Aproksymacja Eulera - zalety i wady

- Bardzo prosta do wyliczenia
- Da się przenieść na układy nieliniowe
- Nie gwarantuje zachowania stabilności
- Mało dokładna

Wzór trapezów

- Wykorzystujemy wartości zarówno poprzednią jak i obecną
- Podstawa bardzo popularnej aproksymacji Tustina



Postać matematyczna

$$I(t_i) = I(t_{i-1}) + \int_{t_{i-1}}^{t_i} e(t)dt \approx \hat{I}(t_{i-1}) + (e(t_i) + e(t_{i-1})) \cdot \frac{\Delta t}{2}$$
$$t_i = t_{i-1} + \Delta t$$

Transmitancja

- Zasada wyznaczania transmitancji jest analogiczna

$$\hat{I}(t_i) = \hat{I}(t_{i-1}) + (e(t_i) + e(t_{i-1})) \cdot \frac{\Delta t}{2}$$

$$\begin{aligned}\hat{I}(z) &= z^{-1}\hat{I}(z) + \frac{\Delta t}{2}(1 + z^{-1})E(z) \\ \hat{I}(z) &= \frac{\Delta t(1 + z^{-1})}{2(1 - z^{-1})}E(z) = \frac{\Delta t(z + 1)}{2(z - 1)}E(z)\end{aligned}$$

Aproksymacja Tustina

- Aproksymacja integratora

$$\frac{1}{s} \approx \frac{\Delta t(z + 1)}{2(z - 1)}$$

- Lub analogicznie różniczki

$$z \approx \frac{1 + s \Delta t/2}{1 - s \Delta t/2} \Leftrightarrow s \approx \frac{2}{\Delta t} \frac{z - 1}{z + 1}$$

Aproksymacja Tustina – zalety i wady

- Generalnie powszechnie stosowana
- Czasem może być trudna w obliczeniach analitycznych
- Nie przenosi się łatwo na obliczenia nieliniowe
- Gwarantuje stabilność
- Potencjalnie większe wymogi obliczeniowe

Kwadratury jednej zmiennej

- Numeryczne wyliczanie całki nazywamy kwadraturą
- Ogólnie chodzi o przedstawienie wartości całki na przedziale za pomocą ważonej sumy jej wartości w n punktach tj.

$$\int_{-1}^1 f(t) dt \approx \sum_{i=1}^n w_i f(t_i)$$

- O kwadraturze mówimy, że ma rząd wielomianowy m (zależny od n), jeżeli dla wielomianów stopnia m , tj. $f = p_m$ kwadratura jest równa dokładnie wartości całki.

Kwadratury interpolacyjne

- Postać wzoru na kwadraturę naturalnie kieruje nas w stronę interpolacji.
- Interpolujemy funkcję wielomianem i liczymy jego całkę
- Wyróżniamy kwadratury:
 - Newtona-Cotesa – interpolacja na węzłach równoodległych
 - Gaussa – wykorzystująca własności wielomianów ortogonalnych, w tym:
 - Gaussa-Legendre'a – kwadratura interpolacyjna na węzłach Legendre'a
 - Clenshawa-Curtisa – kwadratura interpolacyjna na węzłach Czebyszewa

Wielomiany Legendre'a

- Wielomiany ortogonalne dla iloczynu skalarnego

$$f \circ g = \int_{-1}^1 f \cdot g \, dt$$

- Wielomiany te spełniają relację

$$(k + 1)p_{k+1}(x) = (2k + 1)xp_k(x) - kp_{k-1}(x)$$

- Węzły Legendre'a to miejsca zerowe tych wielomianów

Podstawowe twierdzenie o kwadraturach interpolacyjnych

Dla każdego $n \geq 0$ kwadratura interpolacyjna na $n + 1$ węzłach ma rząd wielomianowy n . Kwadratura Gaussa-Legendre'a ma rząd wielomianowy $2n + 1$

Dowód:

Każdy wielomian stopnia $2n + 1$ możemy przedstawić jako $f(x) = P_{n+1}(x)q_n(x) + r_n(x)$

$$I = \int_{-1}^1 f(x) dx = \int_{-1}^1 P_{n+1}(x)q_n(x) dx + \int_{-1}^1 r_n(x) dx$$

Dowód cd.

- Z ortogonalności mamy

$$I = \int_{-1}^1 r_n(x) dx$$

- Ponieważ węzły Legendre'a to pierwiastki $P_{n+1}(x)$ to $f(x_k) = r_n(x_k)$
- Więc wartość kwadratury f będzie taka sama jak r_n , dla której jest dokładna z pierwszej części twierdzenia.

Podstawowe różnice

- Kwadratura Gaussa-Legendre'a jest najdokładniejsza dla wielomianów, ale jej węzły i wagi można wyliczyć jedynie numerycznie, co ma złożoność $O(n^3)$
- Kwadratura Clenshawa-Curtisa wykorzystuje aparat wielomianów Czebyszewa, więc złożoność jest dużo mniejsza $O(n \log(n))$
- Wszystkie kwadratury Gaussa mają w zasadzie niepowtarzalne węzły, więc podniesienie rzędu kwadratury wymaga wyliczenia wartości w nowych węzłach
- Kwadratury Newtona-Cotesa są używalne tylko dla niskich rzędów

Schemat wyliczania kwadratury CC

Kwadratura Clenshawa-Curtisa:

1. Wyliczamy wielomian interpolacyjny
2. Za pomocą FFT zamieniamy go na szereg Czebyszewa
3. Całki z poszczególnych wielomianów Czebyszewa znamy, więc obliczenie całki to suma iloczynów współczynników i odpowiadających im wartości całek.

Schemat wyliczania kwadratury GL

- Kwadraturę Gaussa-Legendre'a (a w zasadzie każdą Gaussa), czyli jej węzły i wagi, można wyliczyć rozwiązując pewien problem własny
- Klasyczna praca: G. H. Golub and J. H. Welsch, Calculation of Gauss quadrature rules, Math. Comp., 23 (1969), 221–230.

Algorytm Goluba-Welscha

- Każdy zbiór wielomianów ortogonalnych spełnia zależność

$$p_j(x) = (a_jx + b_j)p_{j-1}(x) - c_jp_{j-2}(x)$$

$$j = 1, 2, \dots, N ; \quad p_{-1}(x) \equiv 0 , \quad p_0(x) \equiv 1 ,$$

Równanie macierzowe

$$x \begin{bmatrix} p_0(x) \\ p_1(x) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ p_{N-1}(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -b_1/a_1, & 1/a_1, & 0 & & & \\ c_2/a_2, & -b_2/a_2, & 1/a_2 & & & \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ & & & \cdot & \cdot & \cdot \\ \bigcirc & & & \cdot & \cdot & 1/a_{N-1} \\ & & & & c_N/a_N, & -b_N/a_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_0(x) \\ p_1(x) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ p_{N-1}(x) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ p_N(x)/a_N \end{bmatrix}$$

Problem własny

Macierzowa postać układu równań

$$x\mathbf{p}(x) = T\mathbf{p}(x) + (1/a_N)p_N(x)\mathbf{e}_N$$

t_j jest pierwiastkiem wielomianu $p_N(x)$ wtedy i tylko wtedy, gdy

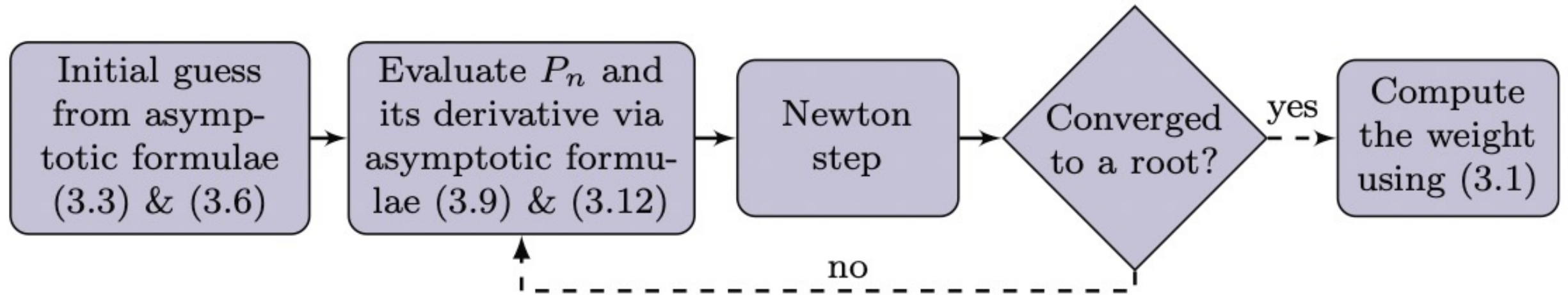
$$t_j\mathbf{p}(t_j) = T\mathbf{p}(t_j)$$

Czyli gdy t_j jest wartością własną macierzy T , dodatkowo wagi spełniają

$$w_j[\mathbf{p}(t_j)]^T[\mathbf{p}(t_j)] = 1, \quad j = 1, 2, \dots, N$$

Algorytm Hale'a-Towsenda

- Obecnie najszybszy, który dla dużych n ma złożoność liniową.



Asymptotyczne wzory na pierwiastki

- Ze względu na symetrię w przedziale $[-1,1]$ wystarczą pierwiastki w $[0,1]$
- Dla pierwiastków oddalonych od 1

$$(3.3) \quad x_{\bar{k}} = \left\{ 1 - \frac{(n-1)}{8n^3} - \frac{1}{384n^4} \left(39 - \frac{28}{\sin^2 \phi_k} \right) \right\} \cos \phi_k + \mathcal{O}(n^{-5})$$

- Dla pierwiastków bliskich 1 $\phi_k = (k - 1/4) \pi / (n + 1/2)$

$$x_{\bar{k}} = \cos \left\{ \psi_k + \frac{\psi_k \cot(\psi_k) - 1}{8\psi_k(n + 1/2)^2} \right\} + j_k^2 \mathcal{O}(n^{-5}), \quad \psi_k = \frac{j_k}{n + 1/2},$$

j_k jest pierwiastkiem funkcji Bessela $J_0(x)$

Asymptotyczne wzory na wartość wielomianu

- Wyliczenie wartości wielomianu wysokiego stopnia w formie innej niż iloczynowa jest kosztowne
- Można sformułować wzory przybliżające P_n , podobnie jak poprzednio inne wewnątrz i na brzegu przedziału
- Aby wyliczyć pochodną P'_n , potrzebną do iteracji Newtona, wykorzystujemy rekurencję

$$(1 - x^2)P'_n(x) = -nxP_n(x) + nP_{n-1}(x)$$

Obliczanie wag kwadratury

$$w_k = \frac{C_{n,\alpha,\beta}}{(1-x_k^2) [P'_n(x_k)]^2} = \frac{C_{n,\alpha,\beta}}{\left[\frac{d}{d\theta} P_n(\cos \theta_k)\right]^2},$$

$$C_{n,\alpha,\beta} = 2^{\alpha+\beta+1} \frac{\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}{\Gamma(n+\alpha+\beta+1)n!}.$$

Przy czym dla wielomianów Legendre'a α i β są równe 0

Kwadratury Gaussa-Lobatto

- Modyfikacja GL, ale
 - Pierwszy i ostatni węzeł to odpowiednio krańce przedziału
 - Pozostałe węzły to pierwiastki wielomianu P_{n-1}'
 - Dokładna dla wielomianów do stopnia $2n - 3$
 - Wagi:
 - Skrajne

$$\frac{2}{n(n-1)}$$

- Pozostałe

$$w_i = \frac{2}{n(n-1)[P_{n-1}'(x_i)]^2}$$

Kwadratury adaptacyjne

- Idea kwadratury adaptacyjnej polega na tym, aby liczyć kwadratury w podprzedziałach.
- Jednocześnie liczy się kwadratury dwóch różnych rzędów, które mają węzły na brzegach przedziału (i jak najwięcej wspólnych)
- Jak różnica między kwadraturami jest duża, to stosujemy każdą z kwadratur na podprzedziałach pomiędzy już wyliczonymi węzłami.