Akademia Górniczo-Hutnicza
im. Stanisława Staszica w Krakowie

Metody numeryczne

Układy równań liniowych

Dr hab.. inż. Jerzy Baranowski
Katedra Automatyki i Robotyki

Macierz

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \left[a_1 \middle| \; a_2 \middle| \; a_3 \right]$$

Iloczyn macierz wektor

$$Ax = \sum_{j=1}^{n} x_j a_j$$

$$\begin{bmatrix} \\ b \\ \\ \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c|c|c} & & & \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ & & & \end{array}\right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} \\ a_1 \\ \\ \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} \\ a_2 \\ \\ \end{bmatrix} + \cdots + x_n \begin{bmatrix} \\ a_n \\ \\ \end{bmatrix}.$$

AGH

Rząd macierzy

- Rzędem macierzy nazywamy liczbę liniowo niezależnych kolumn

Macierz odwrotna

- Macierz kwadratowa A o wymiarach m x m
- Macierz odwrotna do A to taka macierz, że

$$A \cdot Z = I$$

- Macierz odwrotną oznaczamy A^{-1}
- Zachodzi $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = I$
- Macierz odwrotna istnieje tylko jeżeli rząd jest równy m

Macierz Sprzężona (Transponowana)

- Macierz, w której elementy zamieniamy na sprzężone, a kolumny zamieniamy na wiersze

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{22} & a_{32} \end{bmatrix} \implies \quad A^* = \begin{bmatrix} \bar{a}_{11} & \bar{a}_{21} & \bar{a}_{31} \\ \bar{a}_{12} & \bar{a}_{22} & \bar{a}_{32} \end{bmatrix}$$

- Jeżeli macierz jest rzeczywista, to sprzężenie jest transpozycją

Iloczyn skalarny

- Iloczyn skalarny wektorów

$$x^*y = \sum_{i=1}^{m} \bar{x}_i y_i$$

- Długość wektora

$$\|x\| = \sqrt{x^*x} = \left(\sum_{i=1}^{m} |x_i|^2\right)^{1/2}$$

- Kąt między wektorami

$$\cos\alpha = \frac{x^*y}{\|x\|\,\|y\|}$$

Wektory ortogonalne

- Dwa wektory nazywamy ortogonalnymi, jeżeli iloczyn skalarny między nimi jest równy 0

$$x^*y = 0$$

- Zbiór S wektorów, jest ortogonalny, jeżeli wektory są parami ortogonalne

$$x, y \in S, x \neq y \Rightarrow x^*y = 0$$

- Wektory ortogonalne są liniowo niezależne
- Wektory ortogonalne o długości 1 nazywamy ortonormalnymi

Macierz Unitarna (Ortogonalna)

- Macierz unitarna (ortogonalna), to taka, której sprzężenie (transpozycja) jest jej odwrotnością

$$Q^* = Q^{-1}$$

- Kolumny macierzy unitarnej tworzą zbiór wektorów ortonormalnych

$$\begin{bmatrix} q_1^* \\ \hline q_2^* \\ \hline \vdots \\ \hline q_m^* \end{bmatrix} \left[\begin{array}{c|c|c|c} q_1 & q_2 & \cdots & q_m \end{array}\right] = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

Kilka słów o normach

- Norma wektora to funkcja, która każdemu wektorowi przyporządkowuje liczbę nieujemną

$$\| \cdot \| : X \to [0, \infty)$$

- Norma jest pewnym uogólnieniem długości wektora

Aksjomaty normy

- Norma równa 0 oznacza, że wektor jest wektorem zerowym

$$\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$$

- Skalowanie wektora skaluje normę

$$\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$$

- Nierówność trójkąta

$$\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$$

Norma jako odległość

- Odległość między dwoma punktami w danej normie to norma wektora jaki poprowadzono między nimi

Norma w definicji zbiorów

- Przy użyciu normy łatwo zdefiniować zbiory, zwłaszcza w ogólniejszej formie, np.
  - Kula

$$K(x_0, r) = \{x \colon \|x - x_0\| \leq r\}$$

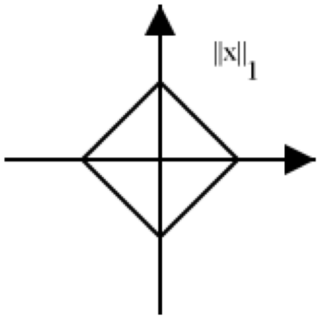
  - Sfera

$$S(x_0, r) = \{x \colon \|x - x_0\| = r\}$$

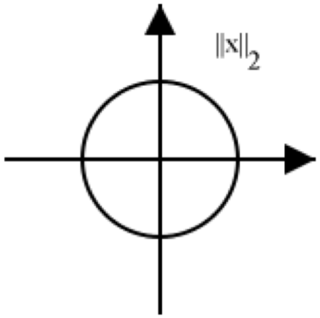
Kula nie musi być okrągła!

Kształt kuli zależy od normy

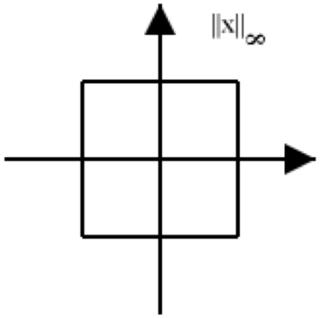
$$\|\mathbf{x}\|_1 = \left(|x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n|\right)$$



$$\|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{\left(|x_1|^2 + |x_2|^2 + \ldots + |x_n|^2\right)}$$



$$\|\mathbf{x}\|_\infty = \max\{|x_i|\colon\ i = 1, \ldots, n\}$$



Norma macierzy

- Istnieją dwa rodzaje norm macierzowych
  - indukowana
  - elementowa

Norma indukowana

- To taka norma, która mówi nam jak silnie dana macierz wpływa na wektor

$$\begin{aligned}\|A\| &= \max\{\|Ax\| : x \in R^n \text{ gdzie } \|x\| = 1\} \\ &= \max\left\{\frac{\|Ax\|}{\|x\|} : x \in R^n \text{ gdzie } x \neq 0\right\}.\end{aligned}$$

- Przykłady:

$$\|A\|_1 = \max_{1\leq j\leq n} \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}| \qquad \|A\|_\infty = \max_{1\leq i\leq m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

Normy elementowe

- To normy, które definiowane są wprost w oparciu o parametry macierzy

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2} = \sqrt{\operatorname{trace}(A^*A)}$$

$$\|A\|_{\max} = \max\{|a_{ij}|\}$$

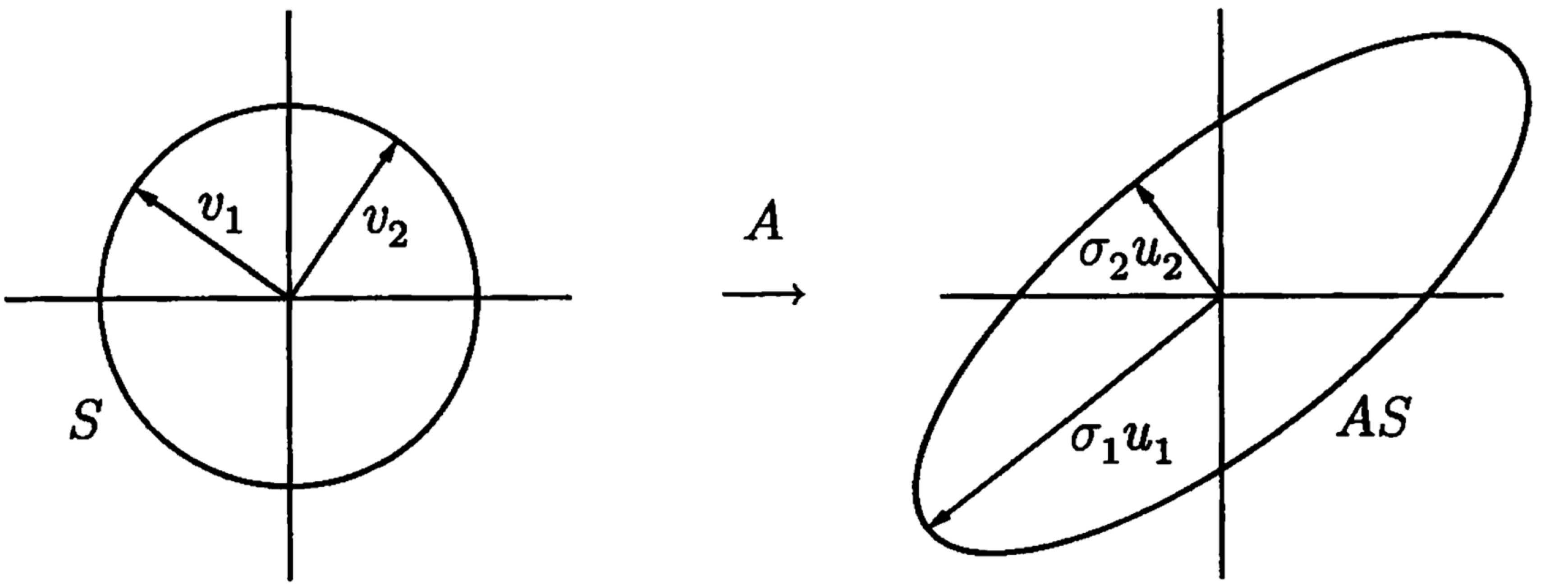
Równoważność norm

- Wszystkie normy w przestrzeniach skończenie wymiarowych są równoważne

$$c\|x\|_1 \leqslant \|x\|_2 \leqslant C\|x\|_1$$

SVD – Rozkład na wartości singularne

- Rozważmy macierz jako przekształcenie geometryczne



SVD – Rozkład na wartości singularne

- Interpretacja macierzowa

$$\begin{bmatrix} \\ \\ & A & \\ \\ \\ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \\ v_1 \bigg| v_2 \bigg| \cdots \bigg| v_n \\ \\ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \\ u_1 \bigg| u_2 \bigg| \cdots \bigg| u_n \\ \\ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 & & & \\ & \sigma_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sigma_n \end{bmatrix}$$

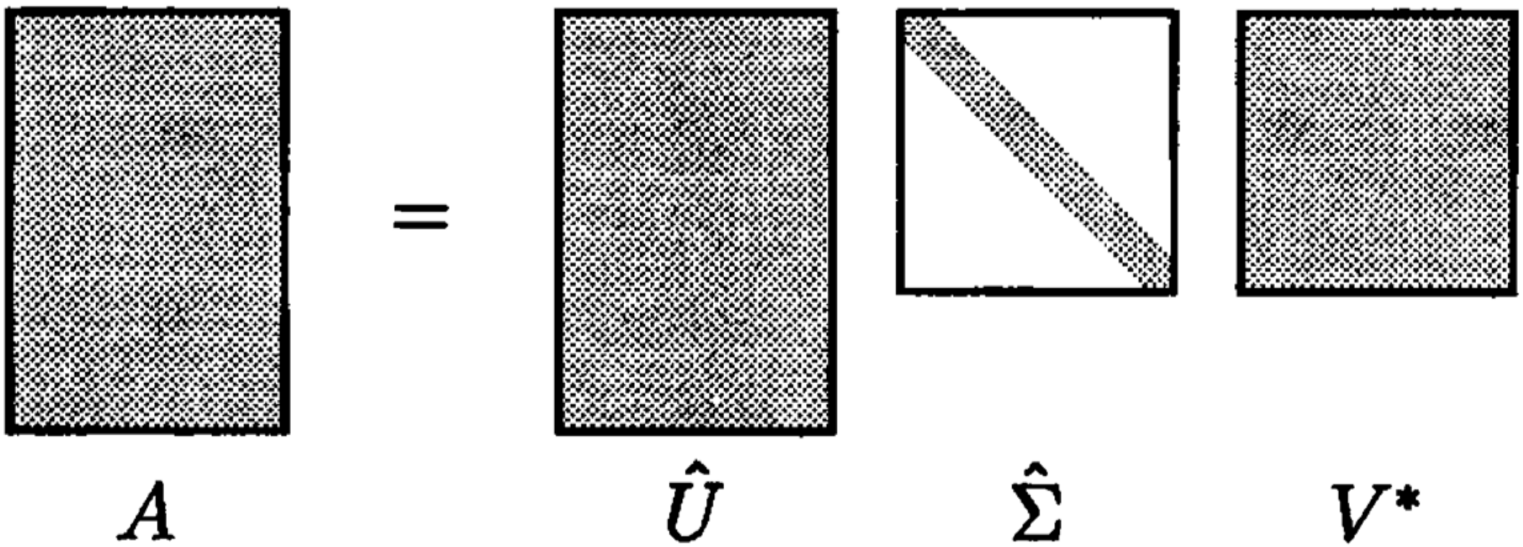
lub w skrócie

$$AV = \hat{U}\hat{\Sigma}.$$

SVD – Rozkład na wartości singularne

- Macierze $\hat{U}$ i V są unitarne

$$A = \hat{U}\hat{\Sigma}V^*$$



Wartości singularne

- Dodatnie, uporządkowane liczby rzeczywiste

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 & & & \\ & \sigma_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sigma_n \end{bmatrix}$$

Ważne cechy wartości singularnych

- Rząd macierzy to liczba niezerowych wartości singularnych
- Normy macierzy wyrażają się przez wartości singularne

$$\|A\|_2 = \sigma_1$$

$$\|A\|_F = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \cdots + \sigma_r^2}$$

- Wyznacznik macierzy kwadratowej jest iloczynem wartości singularnych
- Wartości singularne macierzy odwrotnej są odwrotnościami wartości singularnych

Prosty układ równań liniowych

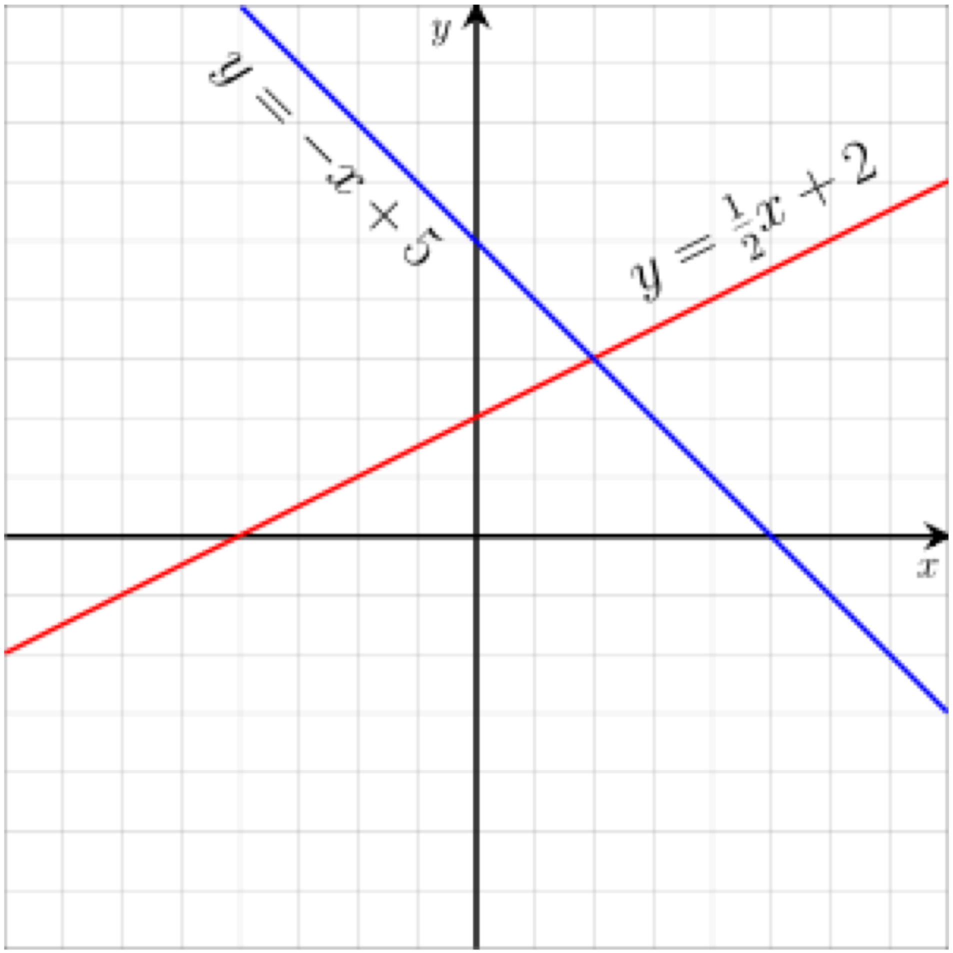
$$x + y = 5$$

$$-\frac{1}{2}x + y = 2$$

$$\frac{3}{2}x = 3$$

$$x = 2$$

$$y = 3$$



Układ *n* równań z *n* niewiadomymi

$$
\begin{array}{ccccccccc}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & = b_1, \\
a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \ldots & + & a_{2n}x_n & = b_2, \\
\vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & \vdots \\
a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \ldots & + & a_{nn}x_n & = b_n.
\end{array}
$$

Postać macierzowa układu równań

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Lub w skrócie

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

Kiedy układ równań ma rozwiązanie?

- Twierdzenie Kroneckera-Capelliego:

  Układ równań z m niewiadomymi ma rozwiązanie wtedy i tylko wtedy gdy macierze A i $[A \mid b]$ mają ten sam rząd. Rozwiązanie jest unikalne gdy ten rząd wynosi m. W przeciwnym wypadku jest ich nieskończenie wiele.

Uwarunkowanie układu równań

- Dla układu *m* równań z *m* niewiadomymi można policzyć stałą uwarunkowania κ i wynosi ona

$$\kappa = \frac{\sigma_1}{\sigma_n}$$

Jakie układy równań łatwo rozwiązać?

- Układy z macierzą trójkątną

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Układ z macierzą trójkątną

- Bardzo proste wzory

$$x_n = \frac{b_n}{a_{nn}}$$

$$x_i = \frac{b_i - \sum_{i+1}^{n} a_{ij} x_j}{a_{ij}}, \quad i = n-1,\ n-2,\ \ldots,\ 1$$

- Mała złożoność $O(n^2)$

Zamiana układu równań - dekompozycja

- Aby rozwiązać układ równań stosujemy dekompozycję macierzy

$$A = CD$$

Wtedy rozwiązanie układu równań ma postać

$$Ax = b$$

$$CDx = b$$

$$\begin{cases} Cy = b \\ Dx = y \end{cases}$$

Jeżeli D jest trójkątna, a C trójkątna lub łatwa do odwrócenia układ równań można łatwo rozwiązać.

Rozkład LU

- Najpopularniejszy sposób rozwiązywania układów równań liniowych

$$A = LU$$

- L jest trójkątna dolna (z 1 na przekątnej), U jest trójkątna górna

Eliminacja Gaussa

- Rozkład LU konstruuje się przez eliminację Gaussa

$$\underbrace{L_{m-1}\cdots L_2 L_1}_{L^{-1}} A = U$$

$$L = L_1^{-1} L_2^{-1} \cdots L_{m-1}^{-1}$$

$$\underset{A}{\begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \end{bmatrix}} \xrightarrow{L_1} \underset{L_1 A}{\begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\times} & \boldsymbol{\times} & \boldsymbol{\times} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\times} & \boldsymbol{\times} & \boldsymbol{\times} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\times} & \boldsymbol{\times} & \boldsymbol{\times} \end{bmatrix}} \xrightarrow{L_2} \underset{L_2 L_1 A}{\begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times \\ & \times & \times & \times \\ & \mathbf{0} & \boldsymbol{\times} & \boldsymbol{\times} \\ & \mathbf{0} & \boldsymbol{\times} & \boldsymbol{\times} \end{bmatrix}} \xrightarrow{L_3} \underset{L_3 L_2 L_1 A}{\begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times \\ & \times & \times & \times \\ & & \times & \times \\ & & \mathbf{0} & \boldsymbol{\times} \end{bmatrix}}$$

Konstrukcja macierzy L_k

$$L_k = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & -\ell_{k+1,k} & 1 & & \\ & & \vdots & & \ddots & \\ & & -\ell_{mk} & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$\ell_{jk} = \frac{x_{jk}}{x_{kk}} \qquad (k < j \leq m)$$

Macierz L

$$L = L_1^{-1} L_2^{-1} \cdots L_{m-1}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ \ell_{21} & 1 & & & \\ \ell_{31} & \ell_{32} & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \\ \ell_{m1} & \ell_{m2} & \cdots & \ell_{m,m-1} & 1 \end{bmatrix}$$

Algorytm

$$
\begin{aligned}
&U = A,\ \ L = I \\
&\textbf{for } k = 1 \textbf{ to } m - 1 \\
&\qquad \textbf{for } j = k + 1 \textbf{ to } m \\
&\qquad\qquad \ell_{jk} = u_{jk}/u_{kk} \\
&\qquad\qquad u_{j,k:m} = u_{j,k:m} - \ell_{jk} u_{k,k:m}
\end{aligned}
$$

Złożoność obliczeniowa $O(2/3\ m^3)$

Niestabilność

- Jeżeli w macierzy będą 0 w niewłaściwych miejscach to eliminacja będzie niemożliwa
- Jeżeli zamiast zer będą bardzo małe liczby jest duży potencjał na błędy numeryczne.

Przykład

$$A = \begin{bmatrix} 10^{-20} & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Rozkład LU

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 10^{20} & 1 \end{bmatrix} \qquad U = \begin{bmatrix} 10^{-20} & 1 \\ 0 & 1 - 10^{20} \end{bmatrix}$$

Zaokrąglenia

$$\tilde{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 10^{20} & 1 \end{bmatrix}, \qquad \tilde{U} = \begin{bmatrix} 10^{-20} & 1 \\ 0 & -10^{20} \end{bmatrix}$$

Iloczyn

$$\tilde{L}\tilde{U} = \begin{bmatrix} 10^{-20} & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad A \neq \tilde{L} \cdot \tilde{U}$$

Pivoting (przestawianie)

Wybieramy wiersz zaczynający się od największego elementu i zamieniamy go z bieżącym

$$
\begin{bmatrix}
\times & \times & \times & \times & \times \\
 & \times & \times & \times & \times \\
 & \times & \times & \times & \times \\
 & \boldsymbol{x_{ik}} & \boldsymbol{\times} & \boldsymbol{\times} & \boldsymbol{\times} \\
 & \times & \times & \times & \times
\end{bmatrix}
\xrightarrow{P_1}
\begin{bmatrix}
\times & \times & \times & \times & \times \\
 & \boldsymbol{x_{ik}} & \boldsymbol{\times} & \boldsymbol{\times} & \boldsymbol{\times} \\
 & \times & \times & \times & \times \\
 & \boldsymbol{\times} & \boldsymbol{\times} & \boldsymbol{\times} & \boldsymbol{\times} \\
 & \times & \times & \times & \times
\end{bmatrix}
\xrightarrow{L_1}
\begin{bmatrix}
\times & \times & \times & \times & \times \\
 & \boldsymbol{x_{ik}} & \times & \times & \times \\
 & \mathbf{0} & \boldsymbol{\times} & \boldsymbol{\times} & \boldsymbol{\times} \\
 & \mathbf{0} & \boldsymbol{\times} & \boldsymbol{\times} & \boldsymbol{\times} \\
 & \mathbf{0} & \boldsymbol{\times} & \boldsymbol{\times} & \boldsymbol{\times}
\end{bmatrix}
$$

$$L_{m-1}P_{m-1}\cdots L_2P_2L_1P_1A = U.$$

Przykład

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 1 \\ 8 & 7 & 9 & 5 \\ 6 & 7 & 9 & 8 \end{bmatrix}$$

$$P_1 \begin{bmatrix} & & 1 & \\ & 1 & & \\ 1 & & & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 1 \\ 8 & 7 & 9 & 5 \\ 6 & 7 & 9 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 7 & 9 & 5 \\ 4 & 3 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 6 & 7 & 9 & 8 \end{bmatrix}$$

$$L_1 \begin{bmatrix} 1 & & & \\ -\frac{1}{2} & 1 & & \\ -\frac{1}{4} & & 1 & \\ -\frac{3}{4} & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 & 7 & 9 & 5 \\ 4 & 3 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 6 & 7 & 9 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 7 & 9 & 5 \\ & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ & -\frac{3}{4} & -\frac{5}{4} & -\frac{5}{4} \\ & \frac{7}{4} & \frac{9}{4} & \frac{17}{4} \end{bmatrix}$$

$$P_2 \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & & & 1 \\ & & 1 & \\ & 1 & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 & 7 & 9 & 5 \\ & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ & -\frac{3}{4} & -\frac{5}{4} & -\frac{5}{4} \\ & \frac{7}{4} & \frac{9}{4} & \frac{17}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 7 & 9 & 5 \\ & \frac{7}{4} & \frac{9}{4} & \frac{17}{4} \\ & -\frac{3}{4} & -\frac{5}{4} & -\frac{5}{4} \\ & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

$$L_2 \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & \frac{3}{7} & 1 & \\ & \frac{2}{7} & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 & 7 & 9 & 5 \\ & \frac{7}{4} & \frac{9}{4} & \frac{17}{4} \\ & -\frac{3}{4} & -\frac{5}{4} & -\frac{5}{4} \\ & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 7 & 9 & 5 \\ & \frac{7}{4} & \frac{9}{4} & \frac{17}{4} \\ & & -\frac{2}{7} & \frac{4}{7} \\ & & -\frac{6}{7} & -\frac{2}{7} \end{bmatrix}$$

Przykład cd

$$P_3 \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & & 1 \\ & & 1 & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 & 7 & 9 & 5 \\ & \frac{7}{4} & \frac{9}{4} & \frac{17}{4} \\ & & -\frac{2}{7} & \frac{4}{7} \\ & & -\frac{6}{7} & -\frac{2}{7} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 7 & 9 & 5 \\ & \frac{7}{4} & \frac{9}{4} & \frac{17}{4} \\ & & -\frac{6}{7} & -\frac{2}{7} \\ & & -\frac{2}{7} & \frac{4}{7} \end{bmatrix}$$

$$L_3 \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & -\frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 & 7 & 9 & 5 \\ & \frac{7}{4} & \frac{9}{4} & \frac{17}{4} \\ & & -\frac{6}{7} & -\frac{2}{7} \\ & & -\frac{2}{7} & \frac{4}{7} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 7 & 9 & 5 \\ & \frac{7}{4} & \frac{9}{4} & \frac{17}{4} \\ & & -\frac{6}{7} & -\frac{2}{7} \\ & & & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} & & 1 & \\ & & & 1 \\ & 1 & & \\ 1 & & & \end{bmatrix}}_{P} \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 1 \\ 8 & 7 & 9 & 5 \\ 6 & 7 & 9 & 8 \end{bmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & & & \\ \frac{3}{4} & 1 & & \\ \frac{1}{2} & -\frac{2}{7} & 1 & \\ \frac{1}{4} & -\frac{3}{7} & \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{bmatrix} 8 & 7 & 9 & 5 \\ & \frac{7}{4} & \frac{9}{4} & \frac{17}{4} \\ & & -\frac{6}{7} & -\frac{2}{7} \\ & & & \frac{2}{3} \end{bmatrix}}_{U}$$

Algorytm

$U = A,\ \ L = I,\ \ P = I$

for $k = 1$ **to** $m - 1$

Select $i \geq k$ to maximize $|u_{ik}|$

$u_{k,k:m} \leftrightarrow u_{i,k:m}$ (interchange two rows)

$\ell_{k,1:k-1} \leftrightarrow \ell_{i,1:k-1}$

$p_{k,:} \leftrightarrow p_{i,:}$

for $j = k + 1$ **to** m

$\ell_{jk} = u_{jk}/u_{kk}$

$u_{j,k:m} = u_{j,k:m} - \ell_{jk} u_{k,k:m}$

Uwagi o LU

- LU z pivotingiem jest stabilna wstecznie (stała uwarunkowania mnoży rząd błędu) dla wszystkich praktycznych macierzy
- Istnieją macierze, w których elementy A i U mają różne rzędy wielkości (U dużo większy), takie macierze muszą mieć bardzo specyficzną strukturę i praktycznie nie występują w zastosowaniach

Rozkład Choleskiego

- Dla macierzy symetrycznych dodatnio określonych istnieje wariant LU

$$A = R^*R, \qquad r_{jj} > 0$$

- Przy czym R jest trójkątna górna. Złożoność obliczeniowa wynisi $O(1/3m^3)$

Rozkład QR

- Innym popularnym rozkładem jest rozkład QR

$$A = \hat{Q}\hat{R}$$

$$\left[\begin{array}{c|c|c|c} & & & \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ & & & \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c|c|c} & & & \\ q_1 & q_2 & \cdots & q_n \\ & & & \end{array}\right] \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ & r_{22} & & \vdots \\ & & \ddots & \\ & & & r_{nn} \end{bmatrix}$$

przy czym $\hat{Q}$ jest macierzą ortogonalną

Rozwiązanie układu równań rozkładem QR

$$Rx = Q^*b$$

Wyliczamy faktoryzację
Wyliczamy prawą stronę
Rozwiązujemy układ równań z macierzą trójkątną

Uwagi o QR

- Działa również dla macierzy prostokątnych
- Złożoność obliczeniowa $O(2mn^2-2/3n^3)$
- Metoda stabilna wstecznie
- Stosowana głównie do problemu najmniejszych kwadratów
- Dwa algorytmy:
  - Ortogonalizacja Grama-Schmidt'a buduje macierz trójkątną R tak aby Q była ortogonalna
  - Triangularyzacja Hauseholdera buduje macierz ortogonalną Q aby R była trójkątna.

Jak się to robi w praktyce