Poniżej znajdziesz treściwe podsumowanie najważniejszych zagadnień, o które pytałeś, wraz z kluczowymi przykładami i spostrzeżeniami:

---

1. Metoda Bisekcji

Główna Idea

- **Cel:** Znalezienie przybliżonego pierwiastka funkcji $f(x)$.
- **Wymagania:** Funkcja musi być ciągła na przedziale $[a, b]$ i spełniać warunek $f(a) \cdot f(b) < 0$ (czyli wartości na końcach przedziału mają przeciwne znaki).

Algorytm

1. **Wybór przedziału $[a, b]$:** Upewniamy się, że $f(a)$ i $f(b)$ mają przeciwne znaki.
2. **Wyznaczenie środka przedziału:** $c = \frac{a + b}{2}$.
3. **Ocena funkcji w punkcie c:**
    - Jeśli $|f(c)|$ jest mniejsze od przyjętej dokładności (ϵ) lub $f(c)$ jest zerem, metoda kończy działanie.
    - W przeciwnym przypadku, na podstawie znaku $f(c)$ wybieramy nowy przedział: $[a, c]$ lub $[c, b]$.
4. **Powtarzanie:** Dzielimy wybrany przedział na pół iteracyjnie aż do osiągnięcia zadanej dokładności.

Zbieżność i Błąd

- **Błąd przybliżenia:**
  Po n iteracjach maksymalny błąd jest oszacowany jako: $$| \xi - c | < \frac{b-a}{2^{n+1}},$$ gdzie ξ to dokładny pierwiastek.
- **Charakterystyka:** Zbieżność liniowa (każda iteracja zmniejsza przedział dwukrotnie).

Zalety i Wady

- **Zalety:**
    - Prosty do zaimplementowania i bardzo stabilny.
    - Gwarantowana zbieżność przy spełnieniu warunków.
    - Łatwo oszacować maksymalny błąd.
- **Wady:**
    - Relatywnie wolna zbieżność (wymaga wielu iteracji w porównaniu do metod o zbieżności kwadratowej, np. Newtona).
    - Wymaga, aby na końcach przedziału był różny znak funkcji.

---

2. Metoda Siecznych

Główna Idea

- **Cel:** Znalezienie pierwiastka $f(x) = 0$ przy użyciu przybliżeń opartych na liniach prostych (siecznych) przecinających oś x.
- **Wymagania:** Potrzebujemy dwóch punktów startowych x_0 i x_1. Nie wymaga warunku zmiany znaku, choć dobre przybliżenia zwiększają efektywność.

Algorytm

1. **Start:** Wybieramy dwa punkty x_0 i x_1.
2. **Obliczenie nowego punktu:** Korzystamy z wzoru: $$x_{n+1} = x_n - f(x_n) \cdot \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}.$$
3. **Iteracja:** Aktualizujemy punkty i powtarzamy procedurę, aż przybliżenie osiągnie zadaną dokładność.

Zbieżność

- **Szybkość:** Zbieżność superliniowa, o porządku około 1.618 (złota liczba). Zapewnia to szybsze zbliżanie się do pierwiastka w porównaniu do metody bisekcji.
- **Czułość:** Metoda może zawieść, gdy różnica $f(x_n) - f(x_{n-1})$ jest bardzo mała – wtedy pojawia się ryzyko dzielenia przez bliskie zeru wartości.

Zalety i Wady

- **Zalety:**
    - Szybsza niż metoda bisekcji.
    - Nie wymaga obliczania pochodnej (jak w metodzie Newtona).
- **Wady:**
    - Może być niestabilna, jeśli punkty startowe nie są dobrze dobrane.
    - Wrażliwa na sytuacje, gdy różnica wartości funkcji w kolejnych punktach jest bardzo mała.

---

3. Stały Znak Pochodnej

Definicja i Znaczenie

- **Stały znak pochodnej:** Funkcja (f(x)) ma pochodną o stałym znaku na przedziale, gdy (f'(x)) jest zawsze dodatnia (funkcja rosnąca) lub zawsze ujemna (funkcja malejąca).
- **Monotoniczność:** Taka funkcja jest ściśle monotoniczna, co zapewnia, że:
  - Jej przebieg nie zawiera ekstremów lokalnych.
  - Mamy **jednoznaczność pierwiastka** – na przedziale, gdzie występuje zmiana znaku, jest tylko jeden pierwiastek.

Wpływ na Metody Iteracyjne

- **Stabilność iteracji:**
  W metodach opartych na pochodnych (np. Newtona), stały i niezerowy (f'(x)) gwarantuje, że kroki iteracyjne nie będą niespodziewanie duże (co mogłoby wystąpić, gdy (f'(x)) zbliża się do zera).
- **Oszacowania błędu:**
  Stały znak (oraz ograniczenie wartości (|f'(x)|)) umożliwia lepsze oszacowanie szybkości zbieżności oraz błędu przybliżenia.
- **Unikalność rozwiązania:**
  Dzięki monotoniczności wiemy, że w zadanym przedziale, przy spełnieniu warunku zmiany znaku na końcach, istnieje dokładnie jeden pierwiastek.

Końcowe Wnioski

- **Metoda bisekcji** to niezawodny, choć wolniejszy sposób znajdowania pierwiastków poprzez iteracyjne dzielenie przedziału.
- **Metoda siecznych** oferuje szybszą zbieżność poprzez przybliżanie funkcji liniami (siecznymi), ale wymaga bardziej starannego wyboru punktów startowych i uwagi, gdy różnice funkcjonalne stają się małe.
- **Stały znak pochodnych** gwarantuje monotoniczność funkcji, co jest kluczowe dla zapewnienia jednoznaczności pierwiastka, stabilności metod iteracyjnych oraz precyzyjnych oszacowań błędu.

To podsumowanie powinno pomóc Ci treściwie przypomnieć sobie najważniejsze aspekty omawianych metod numerycznych oraz znaczenie założeń związanych z pochodnymi. Jeśli chcesz zgłębić jeszcze któryś z tematów lub zobaczyć przykłady implementacyjne, daj znać!