

# Politechnika Warszawska

W Y D Z I A Ł   M E C H A N I C Z N Y  
E N E R G E T Y K I   I   L O T N I C T W A



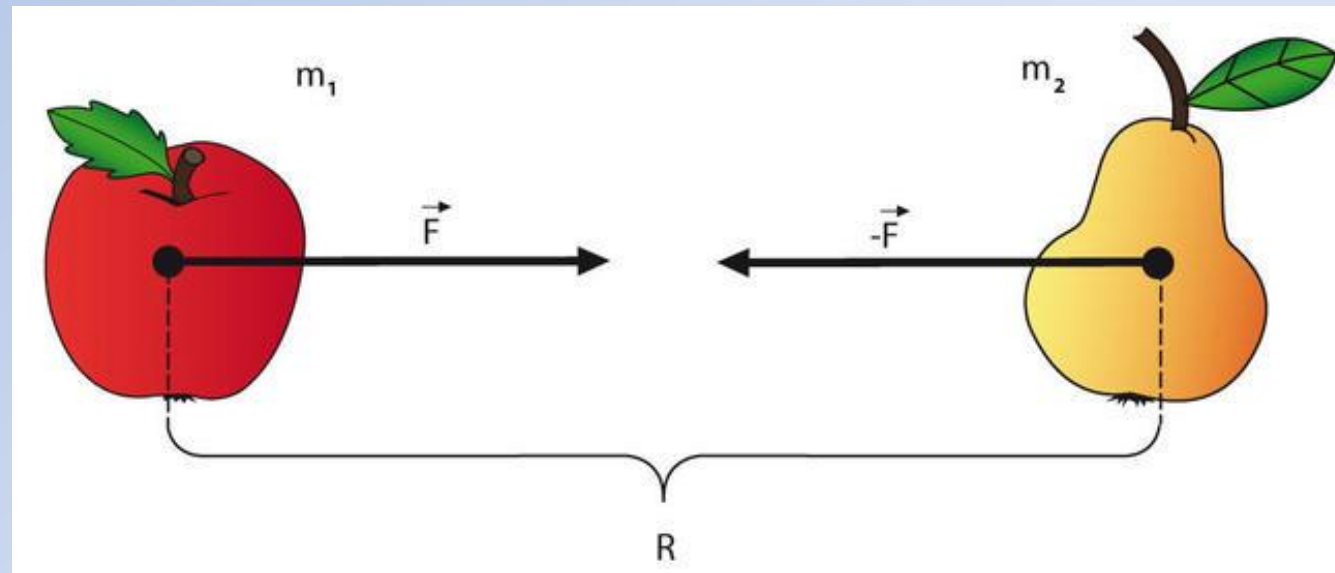
Mechanika Nieba

## Przyciąganie grawitacyjne i potencjał

Mateusz Lorent

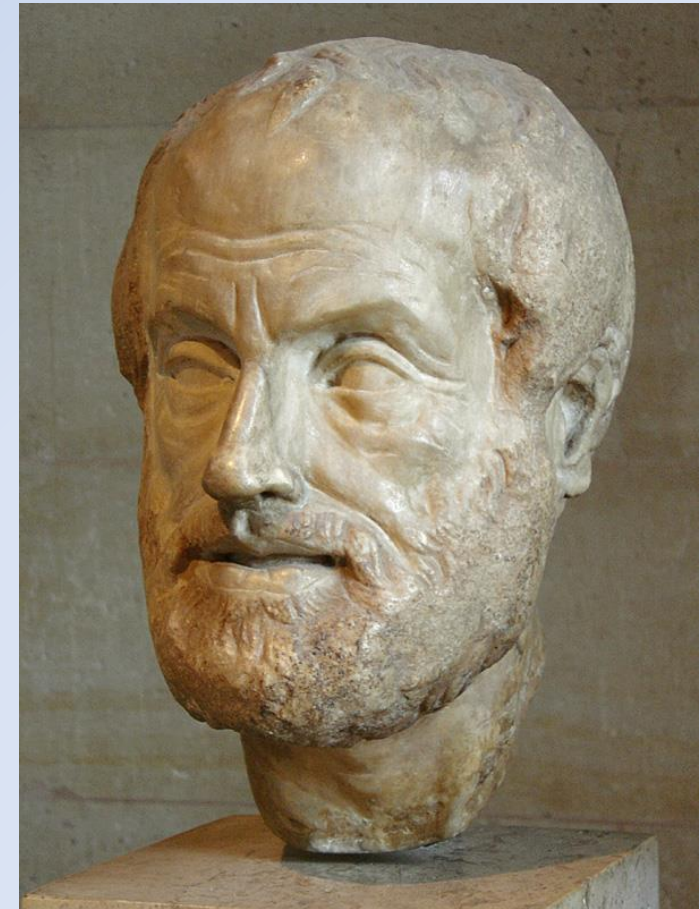
# Co to jest grawitacja?

- Jedno z czterech podstawowych oddziaływań;
- Wszystkie obiekty przyciągają posiadające masę przyciągają się wzajemnie.



# Grawitacja na przestrzeni dziejów

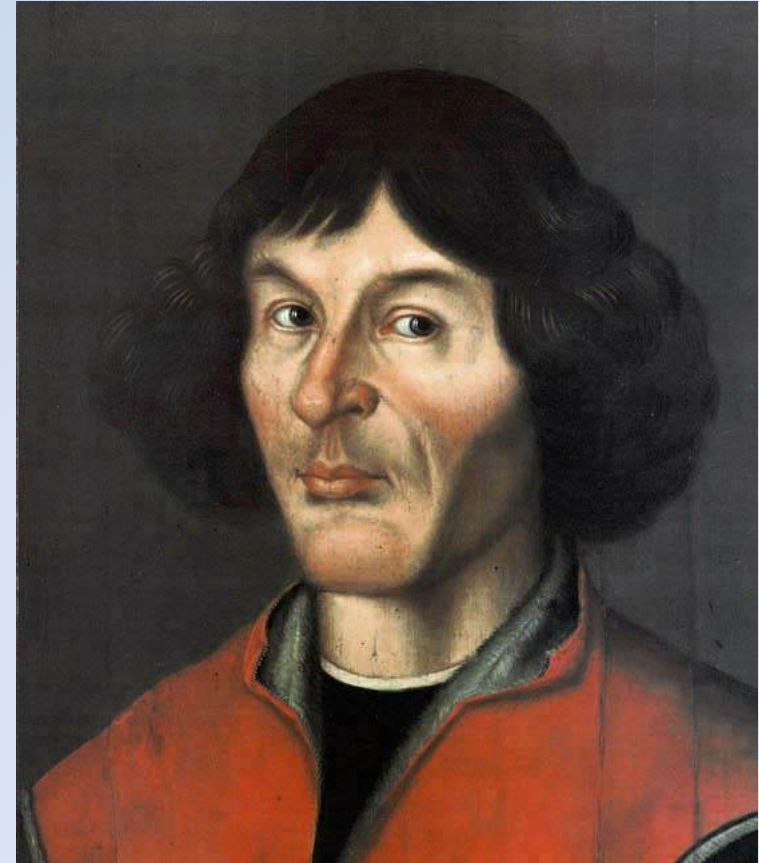
- Starożytni uznają, że proces spadania zależy od natury przedmiotu;
- Brak powiązań pomiędzy prawami na Ziemi a prawami na niebie.



Arystoteles 384 p.n.e. – 322 p.n.e.

# Grawitacja na przestrzeni dziejów

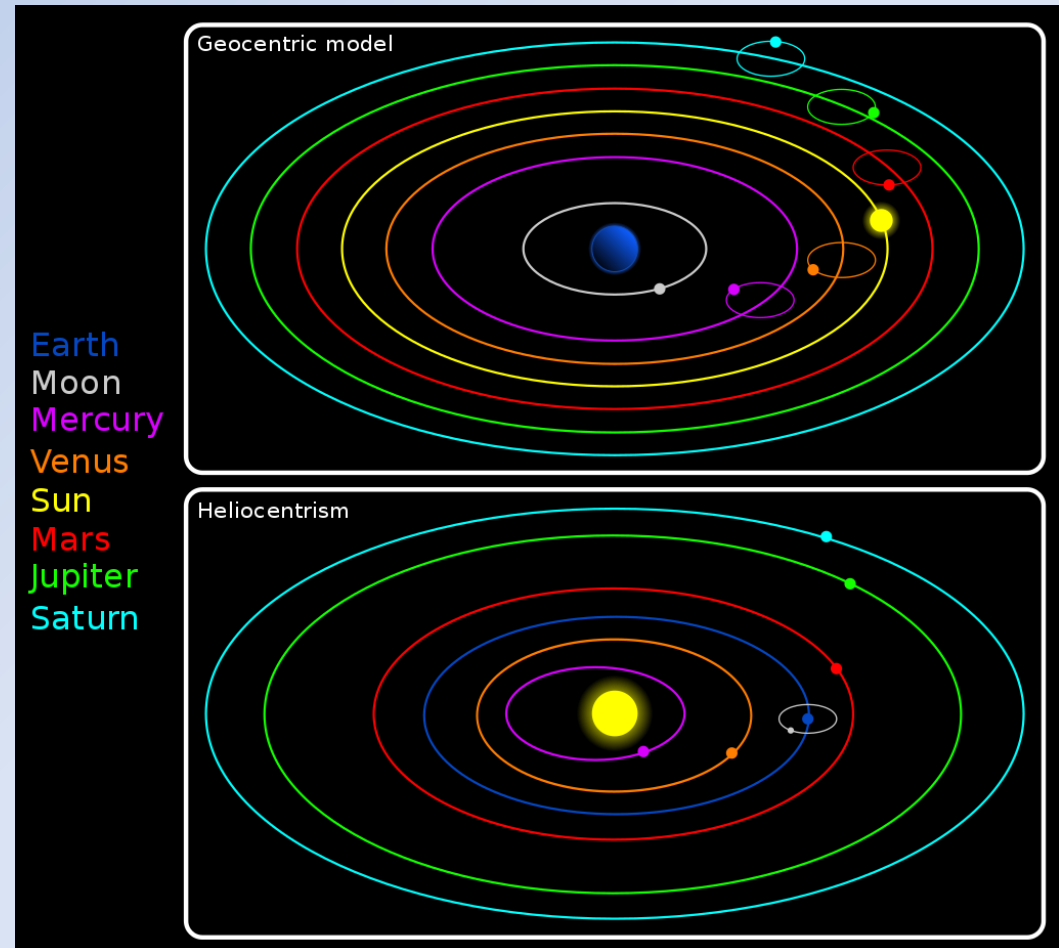
- Rok 1515 – model heliocentryczny Układu Słonecznego, zaproponowany przez Kopernika;
- Rok 1584 – Giardo Bruno głosi zasadę, że Ziemią i niebem rządzą te same prawa.



Mikołaj Kopernik 1473-1543

# Heliocentryczny model Układu Słonecznego

- Rok 1604 Galileusz – pozorne różnice pomiędzy ciężeniem wynikają z oporów i wypierania;
- Odrzucił zależność przyspieszenia grawitacyjnego od „natury” materiału.

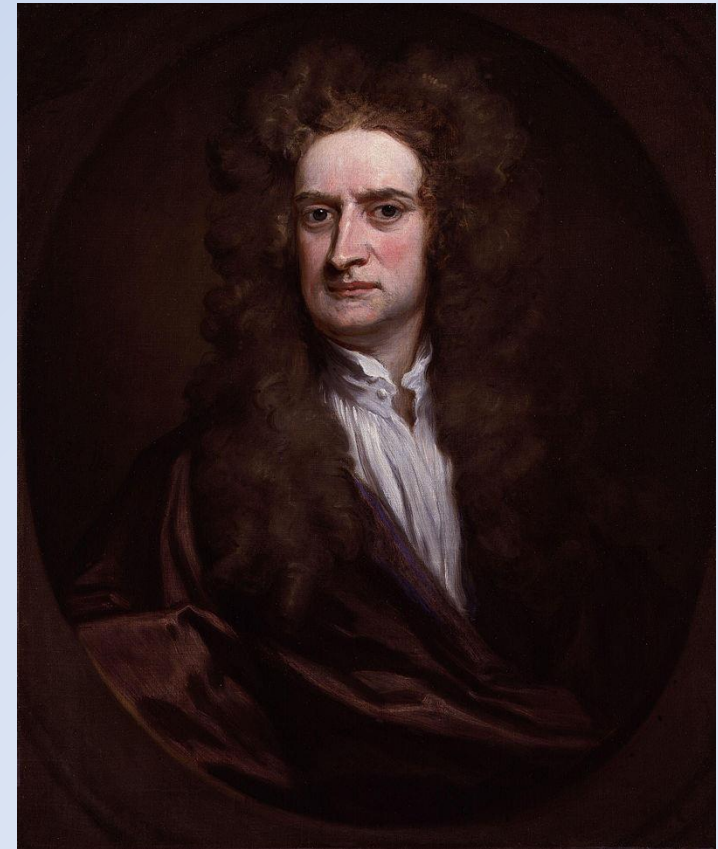


Schemat porównawczy geo- i heliocentrycznego modelu



# Klasyczne ujęcie grawitacji

- Rok 1687 – Spójna teoria grawitacji opisująca spadanie obiektów na Ziemi oraz ruch ciał niebieskich.



Isaac Newton 1642 - 1726

# Prawo powszechnego ciążenia

*Między dowolną parą ciał posiadających masy pojawia się siła przyciągająca, która działa na linii łączącej ich środki mas, a jej wartość rośnie z iloczynem ich mas i maleje z kwadratem odległości.*

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

- $F$  – siła przyciągania;
- $m_1, m_2$  - masy przyciąganych ciał;
- $G$ - stała grawitacyjna;
- $r$ - odległość pomiędzy środkami ciał.

# Klasyczne ujęcie grawitacji

Założenia:

- Orbity kołowe
- $F_d = F_g$

Z definicji siły dośrodkowej:

$$F_d = \frac{mv^2}{R} = m\omega^2 R = \frac{4\pi^2 R}{T^2} = F_g$$

Gdzie:

- $R$  – promień orbity;
- $T$  – okres obiegu orbity



# Klasyczne ujęcie grawitacji

Założenia:

- Orbity kołowe
- $F_d = F_g$

Gdzie:

- $R$  – promień orbity;
- $T$  – okres obiegu orbity

Stosunek sił przyciągania gwiazda – planeta

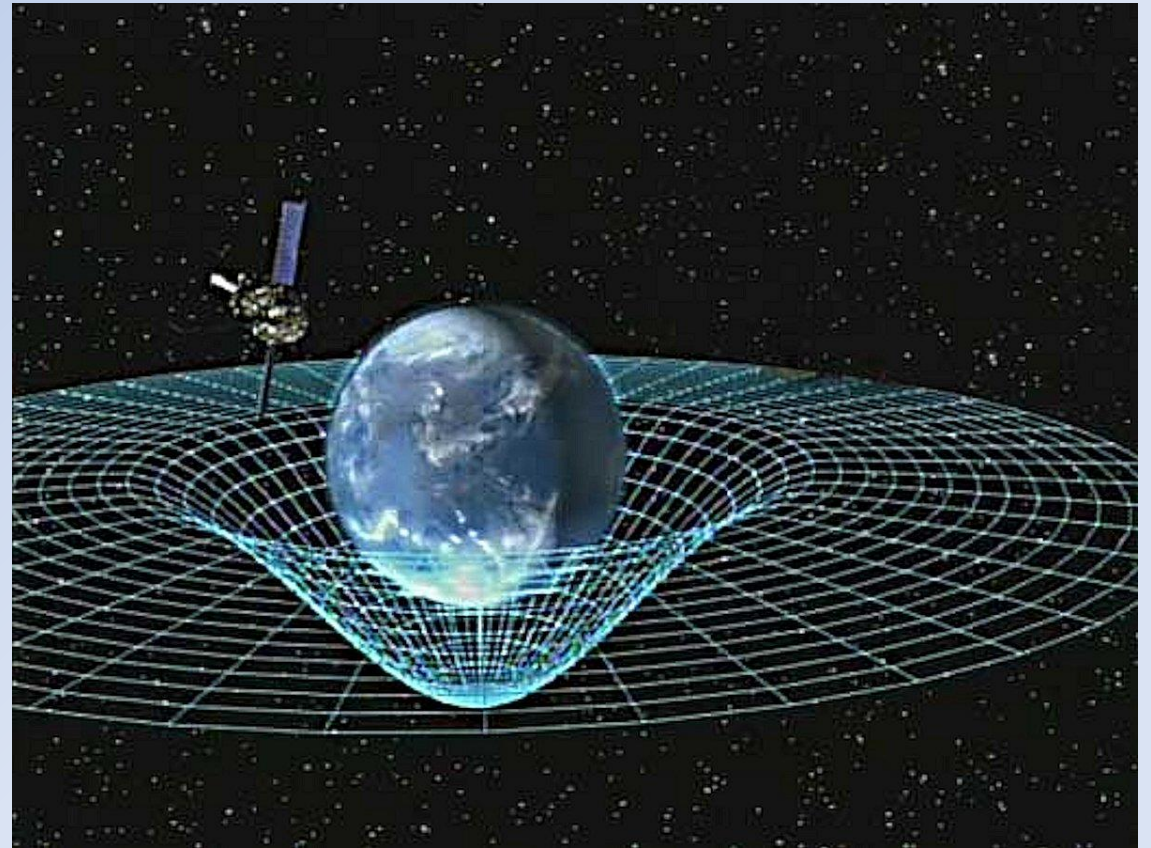
$$\frac{F_{g1}}{F_{g2}} = \frac{m_1 R_1 T_1^2}{m_2 R_2 T_2^2}$$

Z trzeciego prawa Keplera  $\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^3 = \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2$

$$\frac{F_{g1}}{F_{g2}} = \frac{m_1 R_2^2}{m_2 R_1^2}$$

# Ujęcie relatywistyczne

- Równość masy bezwładnościowej i grawitacyjnej;
- Zasada równoważności siły bezwładnościowej i grawitacyjnej;
- Masa jako źródło zagięcia czasoprzestrzeni.



Wizualizacja zagięcia czasoprzestrzeni

# Stała grawitacyjna

- Stała fizyczna służąca do opisu pola grawitacyjnego;
- Interpretowana jako współczynnik proporcjonalności w prawie powszechnego ciężenia;
- Obecnie używana wartość została ustalona przez Komitet Danych dla Nauki i Techniki (CODATA)

$$G = 6.67408(11) \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg \, s^2}$$

# Stała grawitacyjna

- Metody wyznaczania:
  - eksperyment Jollego;
  - eksperyment Cavendisha.

# Eksperyment Jollego

Pomiar stałej grawitacyjnej przy  
użyciu wagi szalkowej;

Dane do eksperymentu:

- Kolba:  $\Phi = 5cm, m = 5kg$
- Ołowiana kula:  
 $\Phi = 50cm, m = 5800kg$
- Długość liny: 25m

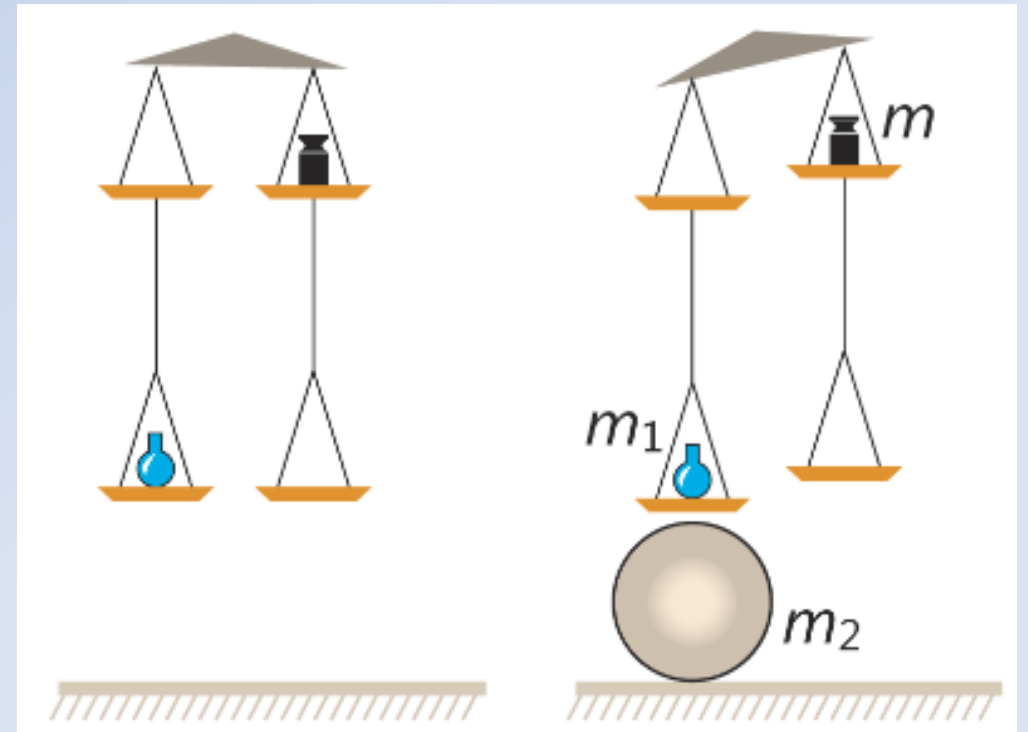


# Eksperyment Jollego

- Wywarzenie układu za pomocą ciężarka o masie  $m = 0.59\text{mg}$ .

$$G = \frac{Fr^2}{m_1 m_2}$$

$$G = 6.46 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^2}{\text{kg s}^2}$$



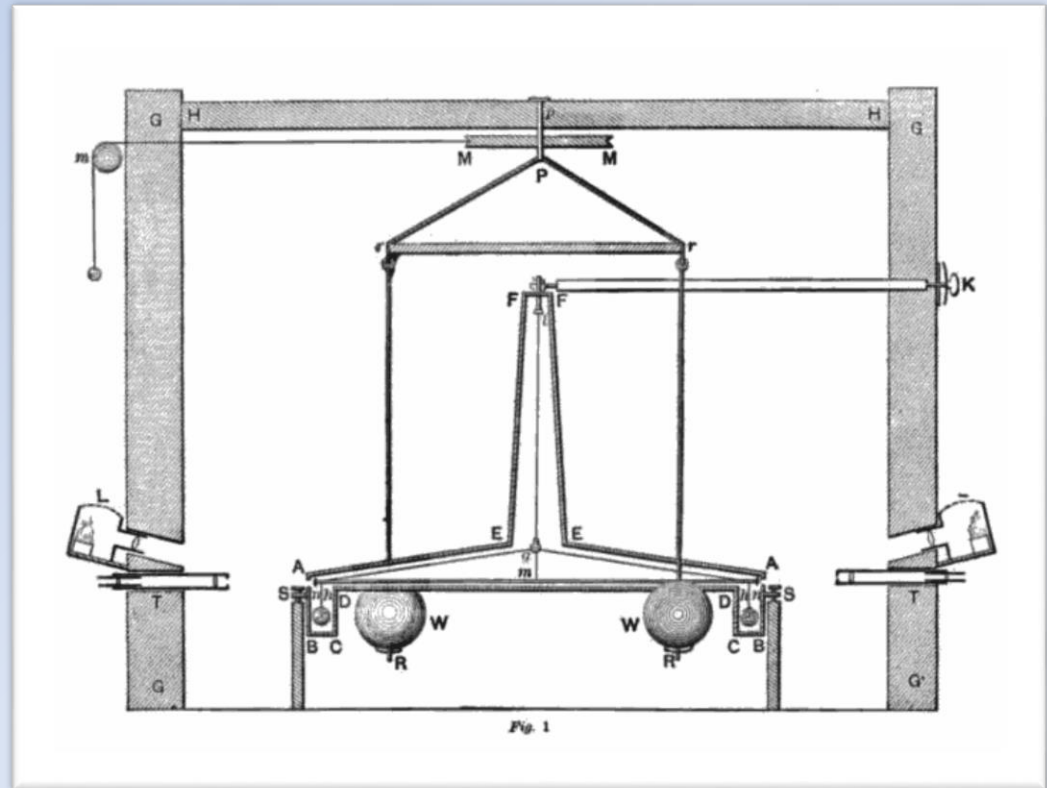
Waga Jollego

# Eksperyment Cavendisha

Pomiar stałej grawitacji za pomocą wagi skręceń.

Dane do eksperymentu:

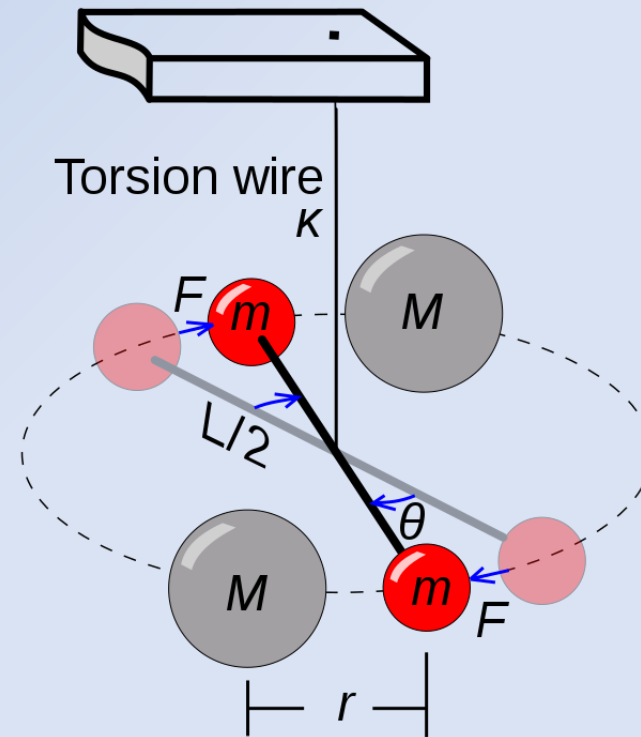
- mniejsza kula:  $\Phi = 5.1cm$ ,  
 $m = 0.78kg$ ,  $l = 1.8m$
- większa kula:  $\Phi = 30cm$ ,  
 $m = 158 kg$
- odległość pomiędzy kulami:  
230 mm



Waga skręceń Cavendisha

# Eksperyment Cavendisha

- Zasada działania opiera się na wahadle torsyjnym
- Pomiar okresu oscylacji wahadła
- Pomiar kąta wychylenia



Schemat wahadła torsyjnego.

# Eksperyment Cavendisha

$$\theta = 0.00783 \text{ rad} = 0.449^\circ$$

$$T = 1200 \text{ s}$$

$$G = \frac{2\pi^2 L r^2}{M T^2} \theta$$

$$G = 6.74 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^2}{\text{kg s}^2}$$

Błąd na poziomie 1%

# Pole grawitacyjne

- Pole grawitacyjne wytwarzane jest przez obiekty posiadające masę;
- Pozwala określić kierunek i wielkości siły grawitacyjnej;
- Pole grawitacyjne jest polem potencjalnym:

$$\nabla \times \mathbf{F}_g(r, \rho, \theta) = \nabla \times \left[ G \frac{m_1 m_2}{r^2}; 0; 0 \right] = \mathbf{0}$$

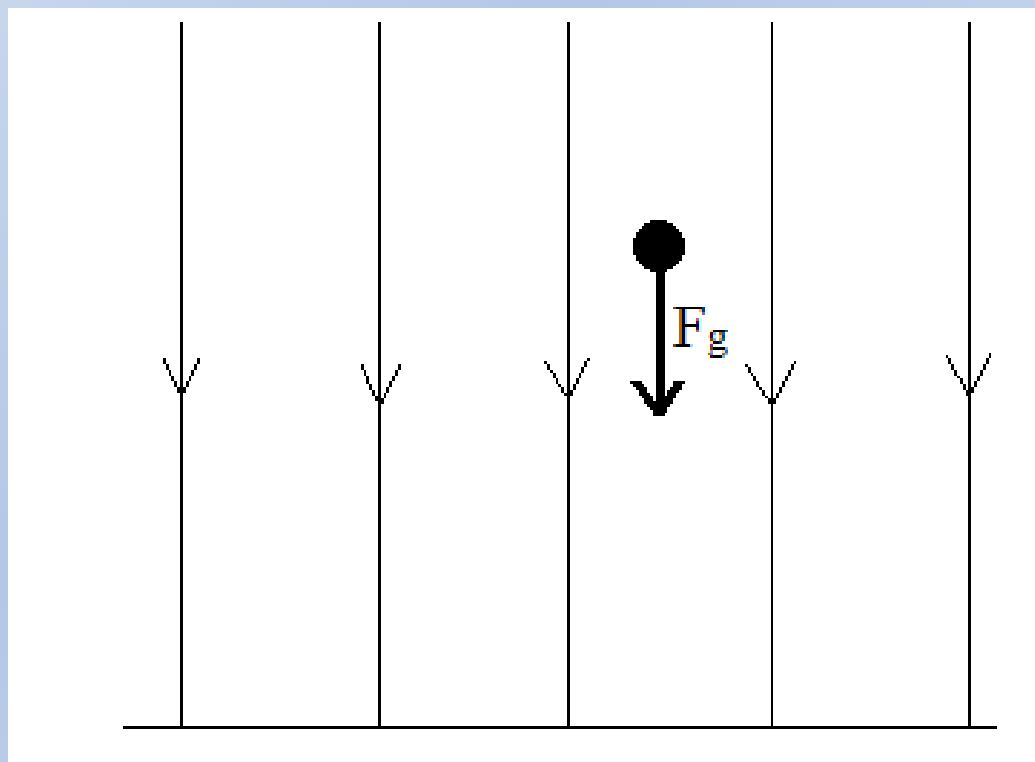


# Pole grawitacyjne

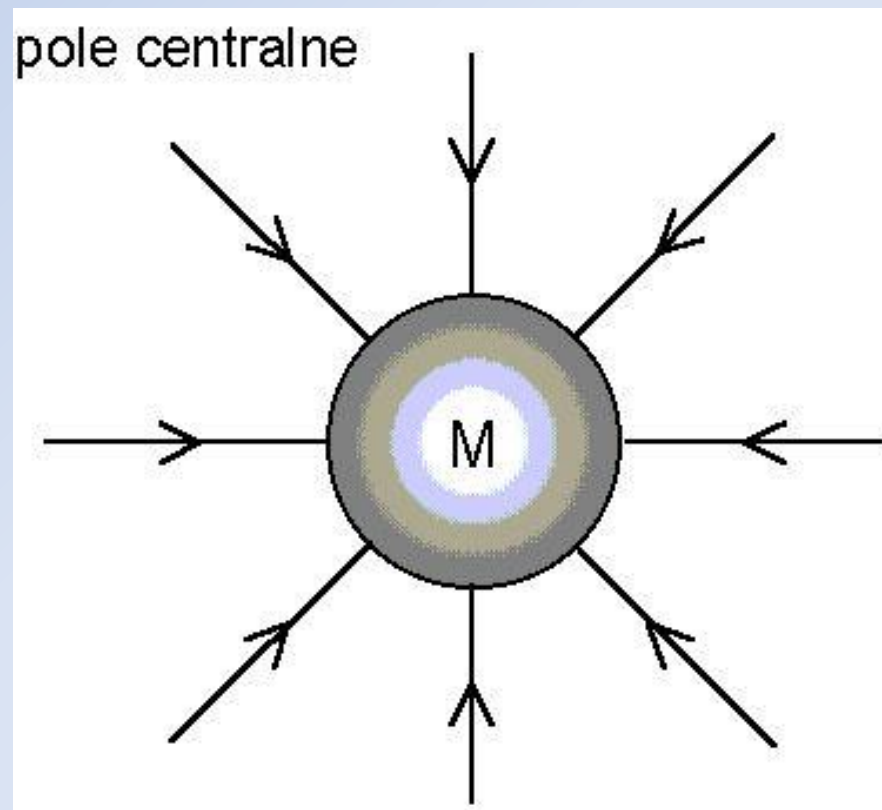
Parametry opisujące pole grawitacyjne:

- Natężenie pola grawitacyjnego  $\gamma$
- Potencjał pola grawitacyjnego  $\Phi$
- Energia potencjalna  $E_p$
- Siła grawitacji  $F$

# Pole grawitacyjne



Pole jednorodne



Pole centralne

# Energia potencjalna

Ze względu na to, że pole grawitacyjne jest polem zachowawczym to praca wykonana równa się ubytkowi energii.

$$dE_p \equiv -dW \quad (\text{lub } \Delta E_p = -\Delta W)$$

$$E_p(r) = \int_{\infty}^r F_g(r) dr = - \int_r^{\infty} G \frac{Mm}{r^2} dr = GMm \left( \frac{1}{\infty} - \frac{1}{r} \right) = - \frac{GMm}{r}$$

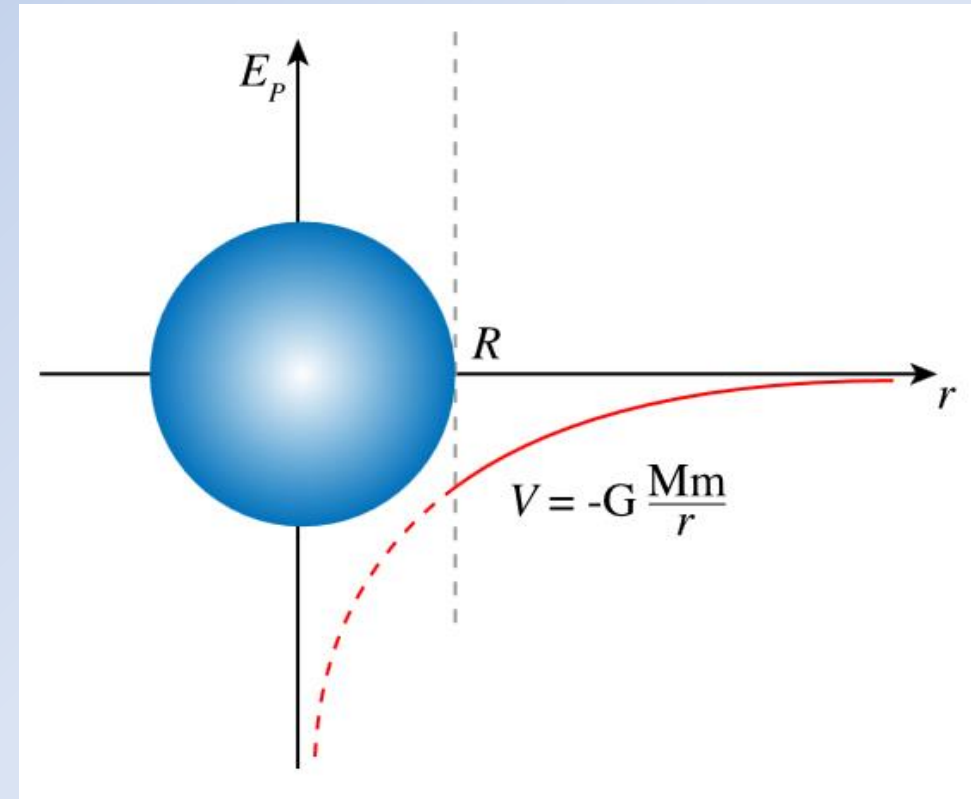
dla odległości  $h \ll R_z$

$$E_p(h) = \int_0^h F(x) dx = mgh$$

# Energia potencjalna

$E_p = 0$  w nieskończoności

$$E_p(r) = -G \frac{Mm}{r}$$



Energia potencjalna w funkcji odległości.

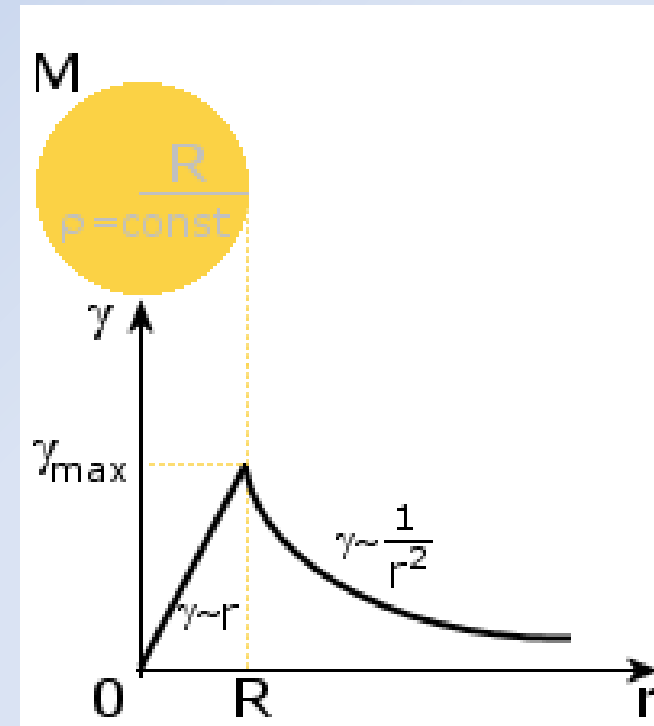
# Natężenie pola grawitacyjnego

Natężenie pola grawitacyjnego równe jest sile z jaką dane pole grawitacyjne działa na jednostkową masę.

$$\gamma(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{F}(\mathbf{r})}{m}$$

$$\gamma(r) = G \frac{M}{r^2}$$

Jednostką natężenia grawitacyjnego jest  $\frac{N}{kg} = \frac{m}{s^2}$



Natężenie pola grawitacyjnego  
w funkcji odległości



# Natężenie pola grawitacyjnego

Przy pominięciu ruchu obrotowego Ziemi i założeniu  $r = R_Z$  natężenie pola grawitacyjnego na powierzchni Ziemi:

$$\gamma(R_Z) = g = \frac{GM_Z}{R_Z^2} = 9.81 \frac{m}{s^2}$$

Zasada superpozycji:

$$\gamma = \sum_{i=1}^n \gamma_i$$

# Potencjał grawitacyjny

Potencjał pola grawitacyjnego – wielkość skalarna równa stosunkowi energii potencjalnej punktu materialnego umieszczonego w rozpatrywanym punkcie pola do masy tego punktu materialnego.

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{E_p(\mathbf{r})}{m}$$

Potencjał pola grawitacyjnego jest również definiowany jako pole skalarne wektora natężenia grawitacyjnego:

$$\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{r}) = \text{grad}\Phi(\mathbf{r})$$

# Potencjał grawitacyjny

Praca potrzebna do przesunięcia ciała próbnego o masie z punktu 1 do punktu 2 przeciwko sile ciężenia jest równa iloczynowi masy tego ciała i różnicy potencjałów między tymi punktami.

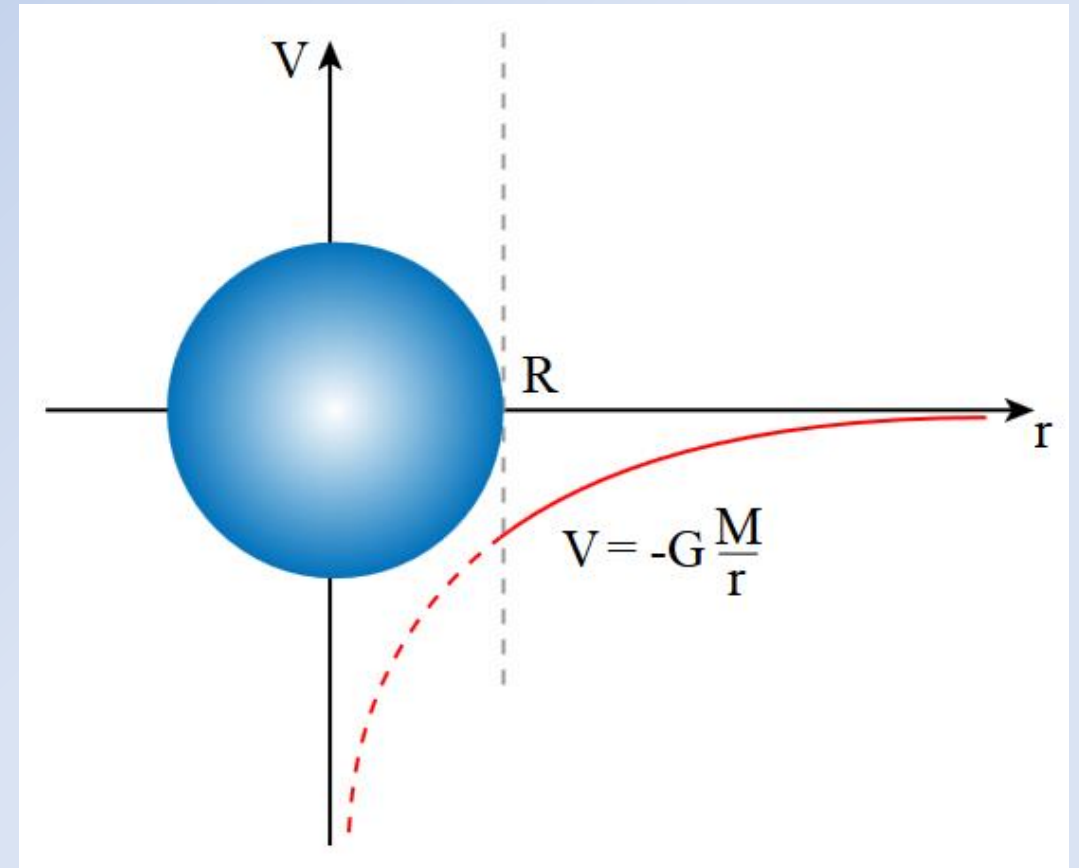
$$W_{12} = m\Delta\Phi = m(\Phi_2 - \Phi_1)$$

# Potencjał grawitacyjny

Jednostką potencjału jest  $\frac{J}{kg} = \frac{m^2}{s^2}$

Zasada superpozycji:

$$\Phi = \sum_{i=1}^n \Phi_i$$



Potencjał pola grawitacyjnego w funkcji odległości

# Zadanie nr 1

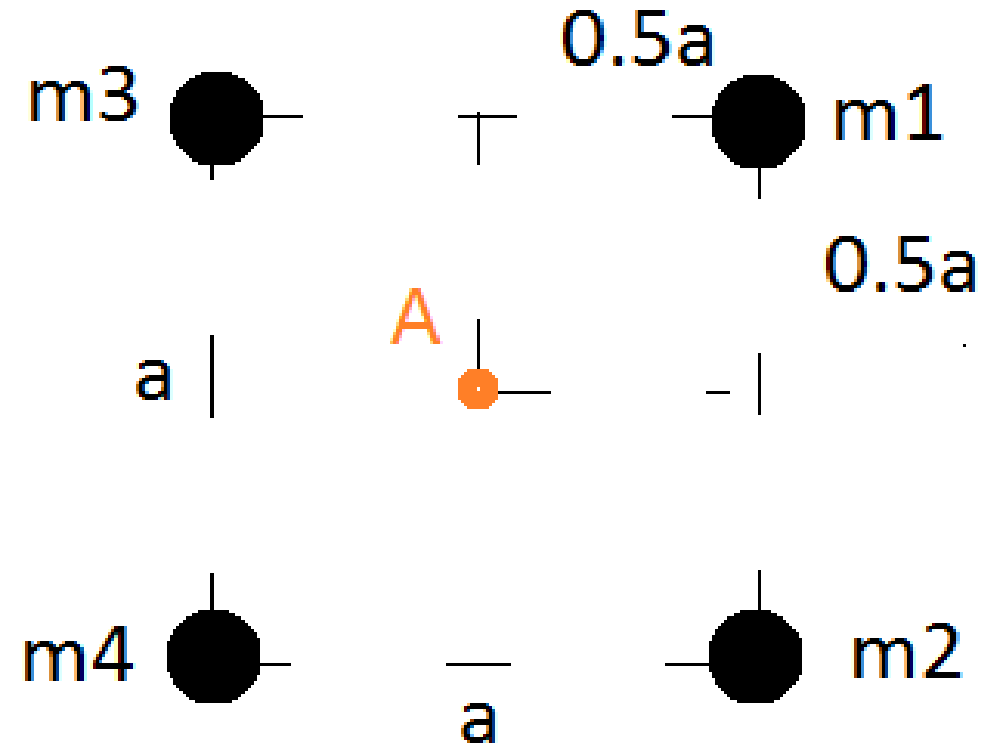
Oblicz natężenie pola grawitacyjnego w punkcie A.

Dane:

$$a = 20m$$

$$m_1 = m_2 = 1 \cdot 10^6 \text{ kg}$$

$$m_4 = m_3 = 2 \cdot 10^6 \text{ kg}$$





## Zadanie nr 2

Oblicz potencjał pola grawitacyjnego w punkcie A.

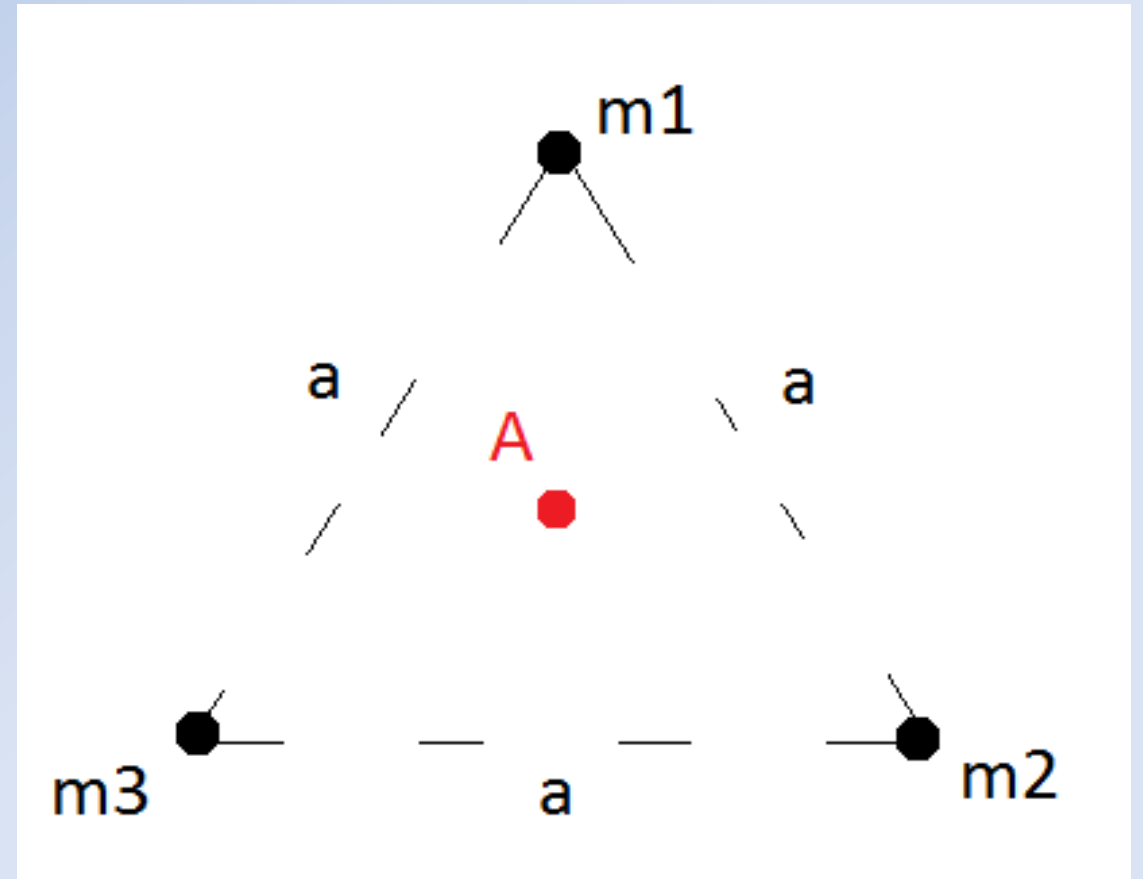
Dane:

$$a = 15m$$

$$m_1 = 10^6 kg$$

$$m_2 = 2 \cdot 10^6 kg$$

$$m_3 = 3 \cdot 10^6 kg$$



# Bibliografia

## Literatura:

1. Jay Orear, *Fizyka tom 1*;
2. Jan Blinowski, Włodzimierz Zielicz, *Fizyka i astronomia*;
3. Marcus Chown, Graham Swinerd, *Teoria kwantowa nie gryzie*;

## Źródła internetowe:

1. <https://www.wikipedia.pl>;

Dziękuję za uwagę