Zadanie 1. 1 punkt

Wykaż, że dla wielomianów

$$\lambda_k(x) = \prod_{j=0, j\neq k}^{n} \frac{x - x_j}{x_k - x_j} \; (k = 0,1, \dots , n)$$

zachodzi

a) $\sum_{k=0}^{n} \lambda_k(x) = 1$

b) $\sum_{k=0}^{n} \lambda_k(0) {x_k}^j = 0 \; (j = 1,2, \dots , n)$

a) Wiemy, że zachodzi $w_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) * \lambda_k(x)$

Skoro $w_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) * \lambda_k(x) = \sum_{i=0}^{n} \lambda_k(x)$, to f(x) = 1

Z jednoznaczności wielomianu interpolacyjnego:

$$1 = f(x) = w_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k(x) \blacksquare$$

b) $\sum_{k=0}^{n} \lambda_k(0) {x_k}^j = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k(0) * \sum_{k=0}^{n} {x_k}^j = \sum_{k=0}^{n} {x_k}^j$

Stąd $f(x) = x^n$

Zatem z jednoznaczności wielomianu interpolacyjnego:

$$x^j = w_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \lambda_i(x) = \sum_{i=0}^{n} {x_i}^j \lambda_i(x)$$

Stąd dla x = 0 mamy

$$0^j = \sum_{i=0}^{n} 0 * \lambda_i(0) = 0 \blacksquare$$

Zadanie 2. 1 punkt

Sprawdź, że wielomian Ln ∈ Пn interpolujący funkcję f w parami różnych n + 1 węzłach x0, … , xn można zapisać w postaci

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) \frac{p_{n+1}(x)}{(x - x_k) * p'_{n+1}(x_k)}$$

gdzie $p_{n+1}(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)$

Najpierw wyliczmy pochodną:

$$p'_{n+1}(x_k) = \sum_{i=0}^{n} (x_k - x_i)' * \prod_{j=0, j\neq i}^{n} (x_k - x_j) = \sum_{i=0}^{n} \prod_{j=0, j\neq i}^{n} (x_k - x_j)$$

(bo dla każdego k,i $(x_k - x_i)' = 1$, zatem można to pominąć przy mnożeniu)

Stąd otrzymujemy:

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) \frac{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)}{(x - x_k) * \sum_{i=0}^{n} \prod_{j=0, j\neq i}^{n} (x_k - x_j)} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} f(x_k) \frac{(x - x_0) \dots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \dots (x - x_n)}{\sum_{i=0}^{n} \prod_{j=0, j\neq i}^{n} (x_k - x_j)} = (*) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} f(x_k) \frac{\prod_{i=0, i\neq k}^{n} (x - x_i)}{\prod_{j=0, j\neq k}^{n} (x_k - x_j)} = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) \prod_{i=0, i\neq k}^{n} \frac{x - x_i}{x_k - x_i} \blacksquare$$

(pomijamy sumę w mianowniku, bo k = i oraz i≠j)

Zadanie 3. 1 punkt

Używając postaci Newtona, podaj wielomian interpolacyjny dla następujących danych:

a)

x_k	-3	0	3	4
y_k	4	-5	22	11

b)

x_k	3	4	-3	-4	0
y_k	22	11	4	43	-5

c)

x_k	-4	-3	-2	2	3	4
y_k	8	6	4	-4	-6	1977

Do rozwiązania tych zadań skorzystamy z rekurencyjnego wzoru na ilorazy różnicowe:

$$\begin{cases} f[x_i] = y_i \\ f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+n-1}, x_{i+n}] = \dfrac{f[x_{i+1}, \dots, x_{i+n-1}, x_{i+n}] - f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+n-1}]}{x_{i+n} - x_i} \end{cases}$$

a)

x_k	y_k	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}]$
-3	4	-	-	-
0	-5	-3	-	-
3	22	9	2	-
4	11	-11	-5	-1

Zatem wielomian a) w postaci Newtona wygląda następująco:

$$4 - 3(x+3) + 2(x+3)x - (x+3)x(x-3)$$

b)

x_k	y_k	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}, x_{i+4}]$
-3	4	-	-	-	-
0	-5	-3	-	-	-
3	22	9	2	-	-
4	11	-11	-5	-1	-
-4	43	-4	-1	-1	0

Zatem wielomian b) w postaci Newtona wygląda tak samo jak ten z a)

c)

x_k	y_k	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$	$f[x_i - x_{i+3}]$	$f[x_i - x_{i+4}]$	$f[x_i - x_{i+5}]$
-4	8	-	-	-	-	-
-3	6	-2	-	-	-	-
-2	4	-2	0	-	-	-
2	-4	-2	0	0	-	-
3	-6	-2	0	0	0	-
4	1977	1983	$\frac{1985}{2}$	$\frac{1985}{12}$	$\frac{1985}{84}$	$\frac{1985}{672}$

Zatem wielomian c) w postaci Newtona wygląda następująco:

$$8 - 2(x+4) + \frac{1985}{672}(x+4)(x+3)(x+2)(x-2)(x-3)$$

Zadanie 5. 1 punkt

Niech ${t_{nk}}^{[a,b]}$ $(0 \leq k \leq n; n \in N)$ oznacza węzły Czebyszewa w przedziale [a, b] (a < b).
Podaj jawny wzór dla tych węzłów. Jaką wartość przyjmuje wyrażenie

$$max_{x\in[a,b]}\left|\left(x - {t_{n0}}^{[a,b]}\right)\left(x - {t_{n1}}^{[a,b]}\right) \dots \left(x - {t_{nn}}^{[a,b]}\right)\right|$$

$$w(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n), x \in [a, b]$$
$$v(t) = (t - t_0)(t - t_1) \dots (t - t_n), x \in [-1,1]$$

ti to miejsca zerowe n+1 szego wielomianu Czebyszewa.
Z poprzedniej listy wiemy, że współczynnik wiodący wielomianu Czebyszewa to 2^n.
Zatem skoro $\max|T_{n+1}(x)| = 1$ to $\max|v(t)| = \frac{1}{2^n}$
Stąd $x = a + \frac{b-a}{2}(t + 1)$
Zatem otrzymujemy:

$$max_{[a,b]}\left|\prod_{j=0}^{n}(x - x_j)\right| = max_{t\in[-1,1]}\left|\prod_{j=0}^{n}\left(\left(a + \frac{b-a}{2}(t+1)\right) - \left(a + \frac{b-a}{2}(t_j + 1)\right)\right)\right| =$$

$$= max_{t\in[-1,1]}\left|\prod_{j=0}^{n}\left(\frac{b-a}{2}(t - t_j)\right)\right| = \left(\frac{b-a}{2}\right)^{n+1} * max_{t\in[-1,1]}\left|\prod_{j=0}^{n}(t - t_j)\right| = \left(\frac{b-a}{2}\right)^{n+1} * \frac{1}{2^n}$$

Zadanie 6. 1 punkt

Funkcję $f(x) = ln(2x - 3)$ interpolujemy wielomianem Ln ∈ Πn w pewnych n + 1 różnych punktach przedziału [4, 5]. Znajdź wartość n, dla której $max_{x\in[4,5]}|f(x) - L_n(x)| \leq 10^{-10}$.
Jak zmieni się sytuacja, gdy użyjemy węzłów Czebyszewa odpowiadającym przedziałowi [4, 5]?

Oznaczenie z repetytorium: $\|f\| = \max(f)$ na danym przedziale (tu na przedziale [4,5])
Wiemy, że $(*)$ $\|f(x) - L_n(x)\| \leq \frac{|f^{(n+1)}(x)|}{(n+1)!}\|p_{n+1}(x)\|$
Wyliczmy kolejne pochodne f(x):

$$f'(x) = \frac{2}{2x - 3}$$
$$f''(x) = -\frac{4}{(2x - 3)^2}$$
$$f^{(3)}(x) = \frac{16}{(2x - 3)^3}$$
$$f^{(4)}(x) = -\frac{96}{(2x - 3)^4}$$

W ogólności można zauważyć:

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}\frac{2^n * (n-1)!}{(2x - 3)^n}$$
$$f^{(n+1)}(x) = (-1)^n\frac{2^{n+1} * n!}{(2x - 3)^{n+1}}$$

Wstawiając to do (*) otrzymujemy:

$$\|f(x)-L_n(x)\| \leq \frac{\left|(-1)^n \frac{2^{n+1}*n!}{(2x-3)^{n+1}}\right|}{(n+1)!}\|p_{n+1}(x)\|$$

$$\|f(x)-L_n(x)\| \leq \frac{\left|\frac{2^{n+1}}{(2x-3)^{n+1}}\right|}{n+1}\|p_{n+1}(x)\|$$

$$\|f(x)-L_n(x)\| \leq \left|\frac{2^{n+1}}{(n+1)(2x-3)^{n+1}}\right| * \frac{1}{2^n}$$

Skoro $max_{x\in[4,5]}|f(x)-L_n(x)| \leq 10^{-10}$ to znaczy, że szukamy $x \in [4,5]$ dla którego wartość $\left|\frac{2^{n+1}}{(n+1)(2x-3)^{n+1}}\right|$ jest jak największa, czyli mianownik $(n+1)(2x-3)^{n+1}$ jest jak najmniejszy, zatem niech x = 4, wtedy:

$$\frac{2^{n+1}}{(n+1)5^{n+1}} * \frac{1}{2^n} \leq 10^{-10}$$

$$\frac{2}{5^{n+1}(n+1)} \leq 10^{-10}$$

$$\frac{2}{5^{n+1}} \leq (n+1)10^{-10}$$

$$n \geq \frac{2*10^{10}}{5^{n+1}} - 1$$

Zatem $n \geq 13$

Część z węzłami Czebyszewa:

Dla węzłów Czebyszewa zachodzi

$$\|f(x)-L_n(x)\| \leq \frac{2^{n+1}}{(n+1)5^{n+1}}\|p_{n+1}(x)\|$$

$$\|f(x)-L_n(x)\| \leq \frac{2^{n+1}}{(n+1)5^{n+1}} * \frac{1}{2^n} * \frac{1}{2^{n+1}} \leq 10^{-10}$$

$$\frac{1}{(n+1)5^{n+1}} * \frac{1}{2^n} \leq 10^{-10}$$

$$\frac{1}{(n+1)*5*10^n} \leq 10^{-10}$$

$$\frac{10^{10}}{5*10^n} \leq n+1$$

$$n \geq \frac{10^{10-n}}{5} - 1$$

Zatem $n \geq 9$

Wniosek:

Używając węzłów Czebyszewa możemy otrzymać podobne przybliżenie przy mniejszej ilości punktów.