Zadanie 1. 1 punkt

Niech dane będą parami różne punkty $X = \{x_0, x_1, \dots, x_N\}$
i funkcja p o własności p(x) > 0 dla x ∈ X . Udowodnij, że wzór

$$\|f\| = \sqrt{\sum_{k=0}^{N} p(x_k) f(x_k)^2}$$

określa normę na zbiorze dyskretnym X.
Przypomnienie kilku wzorów:
1) $(f, g)_N = \sum_{k=0}^{N} f(x_k) g(x_k)$
2) $(f, f)_N = \|f\|_2^2 \geq 0$
3) $\|f\| = 0 \leftrightarrow \forall i \in N \; f(x_i) = 0$
4) $\|af\| = a\|f\|$
5) $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$

Dowód tw. 3:

$$\|f\| = 0 \leftrightarrow \forall i \in N \sqrt{\sum_{k=0}^{N} p(x_k) f(x_k)^2} = 0$$

Z założenia p > 0 oraz nieujemności pierwiastka otrzymujemy:

$$\sum_{k=0}^{N} f(x_k)^2 = 0$$

Z nieujemności 2 potęgi otrzymujemy tezę - $\|f\| = 0 \leftrightarrow \forall i \in N \; f(x_i) = 0$■

Dowód tw. 4:

$$\|af\| = \sqrt{\sum_{k=0}^{N} p(x_k) \big(af(x_k)\big)^2} = |a| \sqrt{\sum_{k=0}^{N} p(x_k) \big(f(x_k)\big)^2} = a\|f\| \blacksquare$$

Dowód tw. 5:
Wiemy, że zachodzą:

$$\|f + g\| = \sqrt{\sum_{k=0}^{N} p(x_k) \big(f(x_k) + g(x_k)\big)^2}$$

$$\|f\| + \|g\| = \sqrt{\sum_{k=0}^{N} p(x_k) f(x_k)^2} + \sqrt{\sum_{k=0}^{N} p(x_k) g(x_k)^2}$$

Zatem należy wykazać nierówność:

$$\sqrt{\sum_{k=0}^{N} p(x_k)\big(f(x_k)+g(x_k)\big)^2} \leq \sqrt{\sum_{k=0}^{N} p(x_k)f(x_k)^2} + \sqrt{\sum_{k=0}^{N} p(x_k)g(x_k)^2}$$

Z nieujemności pierwiastka możemy podnieść obie strony do kwadratu:

$$\sum_{k=0}^{N} p(x_k)f(x_k)^2 + 2\sum_{k=0}^{N} p(x_k)f(x_k)g(x_k) + \sum_{k=0}^{N} p(x_k)g(x_k)^2 \leq$$

$$\sum_{k=0}^{N} p(x_k)f(x_k)^2 + \sum_{k=0}^{N} p(x_k)g(x_k)^2 + 2\sqrt{\sum_{k=0}^{N} p(x_k)f(x_k)^2}\sqrt{\sum_{k=0}^{N} p(x_k)g(x_k)^2}$$

Po skróceniu powtarzających się wyrazów otrzymujemy nierówność (*):

$$\sum_{k=0}^{N} p(x_k)f(x_k)g(x_k) \leq \sqrt{\sum_{k=0}^{N} p(x_k)f(x_k)^2 \sum_{k=0}^{N} p(x_k)g(x_k)^2}$$

Zauważmy, że zachodzą:

1. $p(x_k)f(x_k)g(x_k) = \left(\sqrt{p(x_k)}f(x_k)\right)\left(\sqrt{p(x_k)}g(x_k)\right)$
2. $p(x_k)f(x_k)^2 = \left(\sqrt{p(x_k)}f(x_k)\right)^2$
3. $p(x_k)g(x_k)^2 = \left(\sqrt{p(x_k)}g(x_k)\right)^2$

Stąd (*) można zapisać jako (#):

$$\sum_{k=0}^{N} \left(\sqrt{p(x_k)}f(x_k)\right)\left(\sqrt{p(x_k)}g(x_k)\right)$$

$$\leq \sqrt{\sum_{k=0}^{N} \left(\sqrt{p(x_k)}f(x_k)\right)^2 \sum_{k=0}^{N} \left(\sqrt{p(x_k)}g(x_k)\right)^2}$$

Niech $a = \sqrt{p(x_k)}f(x_k), b = \sqrt{p(x_k)}g(x_k)$, wtedy (#) jest równoważna:

$$\sum_{k=0}^{N} ab \leq \sqrt{\sum_{k=0}^{N} a^2 \sum_{k=0}^{N} b^2}$$

Potęgując obie strony otrzymujemy nierówność Cauchy'ego-Schwarza:

$$\left(\sum_{k=0}^{N} ab\right)^2 \leq \sum_{k=0}^{N} a^2 \sum_{k=0}^{N} b^2 \blacksquare$$

Zadanie 2. 1 punkt

Wyznacz funkcję postaci $y(x) = ax(2023x + 2022) - 1977x$ najlepiej dopasowaną w sensie aproksymacji średniokwadratowej do danych

| $x_k$ | $x_0$ | $x_1$ | … | $x_n$ |
|---|---|---|---|---|
| $y_k$ | $y_0$ | $y_1$ | … | $y_n$ |

$$E(a) = \|f(x_k) - y(x_k)\| = \sum_{k=0}^{N} [f(x_k) - y(x_k)]^2$$

Szukamy minimum funkcji błędu E(a), zatem należy wyliczyć pochodną:

$$E'(a) = \left(\sum_{k=0}^{N} [f(x_k) - y(x_k)]^2\right)' =$$

$$= \left(\sum_{k=0}^{N} [f(x_k) - ax(2023x + 2022) - 1977x]^2\right)' =$$

$$= -2\sum_{k=0}^{N} [f(x_k) - ax(2023x + 2022) - 1977x]$$

$$* [a(4046x + 2022) + 1977]$$

Zatem E’(a) = 0 wtw gdy:

$$\sum_{k=0}^{N} [f(x_k) - ax(2023x + 2022) - 1977x] = 0 => a = \sum_{k=0}^{N} \frac{f(x_k) - 1977x}{2023x^2 + 2022x}$$

Zadanie 3. 1 punkt

Dla jakiej stałej a wyrażenie

$$\sum_{k=0}^{r} \frac{e^{2x_k} + 2022}{2 + \cos(x_k - 2023)} [y_k - a(\ln(1 + 2023x_k^2) - 5x_k^3)]^2$$

i2 przyjmuje najmniejszą możliwą wartość?

Niech $b_k = \frac{e^{2x_k+2022}}{2+\cos(x_k-2023)}, c_k = \ln(1 + 2023x_k^2) - 5x_k^3$

Wtedy $E(a) = \sum_{k=0}^{r} b_k[y_k - ac_k]^2$

$$E'(a) = -2\sum_{k=0}^{r} b_k(y_k - ac_k)c_k$$

$$E'(a) = 0 \leftrightarrow \sum_{k=0}^{r} b_k(y_k - ac_k)c_k = 0$$

$$\sum_{k=0}^{r}(b_k c_k y_k) - \sum_{k=0}^{r}(a b_k c_k^2) = 0$$

$$a = \sum_{k=0}^{r} \frac{b_k c_k y_k}{b_k c_k^2}$$

Zadanie 4. 1 punkt

Pomiary $(t_k, C_k)$ $(0 \le k \le N;\ tk, Ck > 0)$ pewnej zależnej od czasu wielkości fizycznej C sugerują, że wyraża się ona wzorem:

$C(t) = \frac{2\sin(t^3)+3}{Aln(t^4+2023)+Be^{2t+1}-2022t}$.

Stosując aproksymację średniokwadratową, wyznacz prawdopodobne wartości stałych A i B.

$$Aln(t^4 + 2023) + Be^{2t+1} - 2022t = \frac{2\sin(t^3) + 3}{C(t)}$$

$$Ag_o(t) + Bg_1(t) = f(t) + 2022t$$

Dla funkcji:

$$g_o(t) = ln(t^4 + 2023)$$
$$g_1(t) = e^{2t+1}$$
$$f(t) = \frac{2\sin(t^3) + 3}{C(t)}$$
$$W = lin\{g_0, g_1\}$$
$$\begin{bmatrix} < g_0, g_0 > & < g_0, g_1 > \\ < g_1, g_0 > & < g_1, g_1 > \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} < g_0, f > \\ < g_1, f > \end{bmatrix}$$

Układ równań jest postaci:

$$\begin{cases} A < g_0, g_0 > +B < g_0, g_1 > =< g_0, f > \\ A < g_1, g_0 > +B < g_1, g_1 > =< g_1, f > \end{cases}$$

Stąd 1 równanie można zapisać w postaci:

$$B = \frac{< g_0, f > -A < g_0, g_0 >}{< g_0, g_1 >}$$

Podstawiając powyższą zależność do 2 równania:

$$A < g_1, g_0 > + \frac{< g_0, f > -A < g_0, g_0 >}{< g_0, g_1 >} < g_1, g_1 > =< g_1, f >$$

$$A\left(< g_1, g_0 > - \frac{< g_0, g_0 >< g_1, g_1 >}{< g_0, g_1 >}\right) =< g_1, f > - \frac{< g_0, f >< g_1, g_1 >}{< g_0, g_1 >}$$

Zatem stałe są postaci:

$$A = \frac{< g_1, f >< g_0, g_1 > -< g_0, f >< g_1, g_1 >}{< g_1, g_0 >< g_0, g_1 > -< g_0, g_0 >< g_1, g_1 >}$$
$$B = \frac{< g_0, f > -A < g_0, g_0 >}{< g_0, g_1 >}$$

Zadanie 5. 1 punkt

Wiadomo, że napięcie powierzchniowe cieczy S jest funkcją liniową temperatury T: $S = aT + b$

Dla konkretnej cieczy wykonano pomiary S w pewnych temperaturach, otrzymując następujące wyniki:

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| T | 0 | 10 | 20 | 30 | 40 | 80 | 90 | 95 |
| S | 68.0 | 67.1 | 66.4 | 65.6 | 64.6 | 61.8 | 61.0 | 60.0 |

Wyznacz prawdopodobne wartości stałych a i b.

Z wykładu wiemy, że dla modelu $S = aT + b$ zachodzi:

$$a = \frac{(n+1)S_4 - S_1S_3}{(n+1)S_2 - {S_1}^2}$$

$$b = \frac{S_2S_3 - S_1S_4}{(n+1)S_2 - {S_1}^2}$$

$$S_i = \sum_{k=0}^{n} x_k^i \ \ (i = 1,2)$$

$$S_3 = \sum_{k=0}^{n} f(x_k)$$

$$S_4 = \sum_{k=0}^{n} x_k f(x_k)$$

Co pokazaliśmy za pomocą pochodnej 2 zmiennych. Stąd:

$$S_1 = \sum_{k=0}^{7} x_k = 10 + 20 + 30 + 40 + 80 + 90 + 95 = 365$$

$$S_2 = \sum_{k=0}^{7} x_k^2 = 10^2 + 20^2 + 30^2 + 40^2 + 80^2 + 90^2 + 95^2 = 26525$$

$$S_3 = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) = 68 + 67.1 + 66.4 + 65.6 + 64.6 + 61.8 + 61 + 60 = 514{,}5$$

$$S_4 = \sum_{k=0}^{n} x_k f(x_k) = 22685$$

Zatem stałymi są:

$$a = \frac{(n+1)S_4 - S_1S_3}{(n+1)S_2 - {S_1}^2} = \frac{8 * 22685 - 365 * 514{,}5}{8 * 26525 - 365^2} \approx -0{,}07993$$

$$b = \frac{S_2S_3 - S_1S_4}{(n+1)S_2 - {S_1}^2} = \frac{26525 * 514{,}5 - 365 * 22685}{8 * 26525 - 365^2} \approx 67{,}95932$$