Zadanie 2.
Określ liczbę drzew binarnych, zawierających n wierzchołków wewnętrznych.
W drzewie binarnym każdy wierzchołek ma zero lub dwóch synów.

Niech b_n oznacza liczbę drzew binarnych, zawierających n wierzchołków wewn.
Zachodzi $b_0 = 1$, bo istnieje tylko 1 drzewo binarne niezawierające żadnych wierzchołków wewnętrznych – drzewo zawierające tylko liść.

Dodatkowo, niech B_n oznacza zbiór wszystkich drzew binarnych, zaw…
Natomiast $B_{L,P}$ oznacza zbiór wszystkich drzew binarnych, zawierających L ww. w lewym poddrzewie i P ww. w prawym poddrzewie.
Wtedy zachodzi $|B_n| = \left|B_{L,P}\right| = |B_L \times B_P| = |B_L| * |B_P| = b_L * b_P$

Następnie rozważmy drzewa zawierające n wierzchołków wewnętrznych.
Niech L oznacza liczbę wierzchołków wewnętrznych lewego poddrzewa korzenia. Wtedy liczba wierzchołków wewnętrznych prawego poddrzewa korzenia wynosi P = n – L – 1 (odejmujemy 1 bo korzeń).

Następnie rozważmy przypadki w zależności od wartości L:
1) L = 0, wtedy P = n – 1, czyli $b_n = b_0 * b_{n-1}$
2) L = 1, wtedy P = n – 2, czyli $b_n = b_1 * b_{n-2}$
… n-1) L = n - 2, wtedy P = 1, czyli $b_n = b_{n-2} * b_1$
n) L = n - 1, wtedy P = 0, czyli $b_n = b_{n-1} * b_0$

Zatem rozwiązaniem będzie suma przypadków: $\sum_{i=1}^{n} b_{i-1} * b_{n-i} = c_n$

Zadanie 3.

Ile niekrzyżujących się uścisków dłoni może wykonać jednocześnie n par osób siedzących za okrągłym stołem?

Ponumerujmy osoby numerami od 1 do 2n.
Najpierw pierwsza osoba wybiera i-tą.
Dzieli to nam stół na 2 części: osoby o numerach 2 do i-1 oraz osoby i+1 do 2n.
Żeby każda osoba wykonała uścisk, obie grupy muszą mieć parzystą ilość osób, stąd i też musi być parzyste.
Przypomina to problem nawiasowania, gdzie dla pary osób o pozycjach i,j, i<j
i-ta osoba tworzy uścisk „wychodzący” (otwarcie nawiasu), natomiast
j-ta osoba tworzy uścisk „przychodzący” (zamknięcie nawiasu).
Dlatego zawsze 1 osoba tworzy uścisk „wychodzący”, bo zawsze 1 nawias musi być otwierający. Stąd odpowiedzią jest $C_n = \sum_{i=1}^{n} C_{i-1}C_{n-i}$

Zadanie 5.

Podaj funkcję tworzącą dla ciągu $(1, 3, 7, 15, 31, \dots)$.

Niech będą oznaczenia:

$$\langle a_n \rangle = (1, 3, 7, 15, 31, \dots)$$
$$\langle b_n \rangle = (2, 4, 8, 16, 32, \dots)$$
$$\langle c_n \rangle = (-1, -1, -1, -1, -1, \dots)$$

Wtedy zachodzi

$$\langle a_n \rangle = \langle b_n \rangle + \langle c_n \rangle$$

Zatem aby znaleźć funkcję tworzącą $A(x)$ ciągu $\langle a_n \rangle$, należy znaleźć funkcje tworzące $B(x), C(x)$ ciągów $\langle b_n \rangle, \langle c_n \rangle$, wtedy $A(x) = B(x) + C(x)$

$$B(x) = \sum_{i=0}^{\infty} (2x)^i = \frac{1}{1-2x}$$

$$C(x) = \sum_{i=0}^{\infty} -x^i = \frac{-1}{1-x}$$

Stąd:

$$A(x) = \frac{1}{1-2x} + \frac{-1}{1-x} = \frac{x}{2x^2 - 3x + 1}$$

Zadanie 6.

Oblicz dwie ostatnie cyfry w rozwinięciu dziesiętnym liczby 71^{71}.
Wskazówka: przyda się chińskie twierdzenie o resztach.

Wzór (*): $(a * b)\ mod\ n = \big((a\ mod\ n) * (b\ mod\ n)\big)\ mod\ n$

$71^{71}\ mod\ 100 \equiv 71^{1+2+4+64}\ mod\ 100$
$71^{1}\ mod\ 100 = 71$
$71^{2}\ mod\ 100 = 41$
$71^{4}\ mod\ 100 = \big((71^{2}\ mod\ 100) * (71^{2}\ mod\ 100)\big)\ mod\ 100 =$
$= 41^{2}\ mod\ 100 = 81$
$71^{8}\ mod\ 100 = \big((71^{4}\ mod\ 100) * (71^{4}\ mod\ 100)\big)\ mod\ 100 =$
$= 81^{2}\ mod\ 100 = 61$
$71^{16}\ mod\ 100 = \big((71^{8}\ mod\ 100) * (71^{8}\ mod\ 100)\big)\ mod\ 100 =$
$= 61^{2}\ mod\ 100 = 21$
$71^{32}\ mod\ 100 = \big((71^{16}\ mod\ 100) * (71^{16}\ mod\ 100)\big)\ mod\ 100 =$
$= 21^{2}\ mod\ 100 = 41$
$71^{64}\ mod\ 100 = \big((71^{32}\ mod\ 100) * (71^{32}\ mod\ 100)\big)\ mod\ 100 =$
$= 41^{2}\ mod\ 100 = 81$

$$\begin{aligned}
71^{71}\ mod\ 100 & \\
&\equiv \big((71^{1}\ mod\ 100) * (71^{2}\ mod\ 100) * (71^{4}\ mod\ 100) \\
&* (71^{64}\ mod\ 100)\big)\ mod\ 100 \equiv (71 * 41 * 81 * 81)\ mod\ 100 = \\
&= \Big(\big((71 * 41)\ mod\ 100\big) * \big((81 * 81)\ mod\ 100\big)\Big)\ mod\ 100 = \\
&= (11 * 61)\ mod\ 100 = 71
\end{aligned}$$

Zadanie 8. (Niedeklarowalne)

Pokaż, że $n^5 - n$ jest podzielne przez 30 dla każdego naturalnego n.

Dowód indukcyjny

Podstawa: $n = 0 \rightarrow n^5 - n = 0$

Krok: załóżmy, że $n^5 - n$ jest podzielne przez 30.

Pokażę, że $(n+1)^5 - (n+1)$ też jest podzielne przez 30.

$$
\begin{aligned}
&(n+1)^5 - (n+1) = (n+1)((n+1)^4 - 1) = \\
&= (n+1)\big(((n+1)^2 - 1)((n+1)^2 + 1)\big) = \\
&= n(n+1)(n+2)(n^2 + 2n + 2) = \\
&= n^5 + 5n^4 + 10n^3 + 10n^2 + 4n = \\
&= (n^5 - n) + 5n^4 + 10n^3 + 10n^2 + 5n = \\
&= (n^5 - n) + 5(n^4 + 2n^3 + 2n^2 + n) = \\
&= (n^5 - n) + 5\big(n(n+1)(n^2 + n + 1)\big) = (n^5 - n) + 5k
\end{aligned}
$$

Z założenia $(n^5 - n)$ jest podzielne przez 30, natomiast 5k jest podzielne przez 5 (oczywiste) oraz 2 (bo iloczyn zawiera 2 kolejne liczby, jedna z nich musi być parzysta). Dodatkowo jest podzielna przez 3, dowód przez przypadki:

$n \; mod \; 3 = 0$ trywialnie,

$n \; mod \; 3 = 2$, wtedy n + 1 jest podzielne przez 3,

$n \; mod \; 3 = 1$, wtedy $(n^2 + n + 1)_3 = (1 + 1 + 1)_3 = 0$

Zatem liczba $(n^5 - n) + 5k$ jest podzielna przez 30 cnd

Zadanie 9. (Niedeklarowalne)

Danych jest 12 różnych liczb dwucyfrowych. Wykaż, że wśród nich istnieją takie dwie, których różnica jest liczbą dwucyfrową o jednakowych cyfrach.

Weźmy wszystkie liczby dwucyfrowa o jednakowych cyfrach:

$$11,22,33,44,55,66,77,88,99$$

Zauważmy, że każda z nich jest podzielna przez 11.

Skoro mamy 12 różnych liczb, to z zasady szufladkowej co najmniej 2 z nich będą miały taką samą resztę z dzielenia przez 11.

Nazwijmy je x,y i niech $x > y, x \; mod \; 11 = y \; mod \; 11 = R$.

Wtedy $\exists d_1, d_2, d_1 > d_2$: $R + 11d_1 = x \; oraz \; R + 11d_2 = y$

Stąd $x - y = (R + 11d_1) - (R + 11d_2) = (R - R) + 11(d_1 - d_2) = 11k$

Teraz weźmy wszystkie liczby dwucyfrowe podzielne przez 11:

11,22,33,44,55,66,77,88,99, jak widać wszystkie mają jednakowe obie cyfry.