Zadanie 1

Wśród liczb naturalnych $1, 2, ..., 800$, ile jest takich, które nie są podzielne przez 7, ale są podzielne przez 6 lub przez 8.

Liczymy: $|(\neg\%7) \cap (\%6 \cup \%8)| =$

$$= |\%6 \cup \%8| - |(\%6 \cap \%7) \cup (\%8 \cap \%7)| =$$
$$= |\%6 + \%8 - \%24| - |\%42 + \%56 - \%168| =$$
$$= |\%6| + |\%8| - |\%24| - |\%42| - |\%56| + |\%168| =$$
$$= 133 + 100 - 33 - 19 - 14 + 4 = 171$$

Zadanie 2

Korzystając z zasady włączeń-wyłączeń oblicz, ile jest sposobów ustawienia liter *a, a, a, a, b, b, b, c, c* w taki sposób, aby takie same litery nie tworzyły jednego bloku, tzn. ustawienie *a, a, a, a, b, c, b, c, b* jest zakazane, ale ustawienie *a, a, a, b, a, c, b, c, b* jest dobre.

Mamy 4x a, 3x b, 2x c, łącznie 9x

Wszystkich sposobów: $\binom{9}{4} * \binom{5}{3} = 1260$

Złych sposobów (same 'a'): $6 * \binom{5}{2} = 60$

Złych sposobów (same 'b'): $7 * \binom{6}{2} = 105$

Złych sposobów (same 'c'): $8 * \binom{7}{3} = 280$

Złych sposobów (kolejno 'ab', 'ac', 'bc'): $2 * 6 + 2 * 10 + 2 * 15 = 62$

Złych sposobów ('abc'): $3! = 6$

Ilość złych sposobów to $|\bigcup_{i=1}^{n} A_i| = \sum_{\emptyset \neq I \subseteq \{1,2,\dots,n\}} (-1)^{|I|-1} |\bigcup_{i \in I} A_i| =$

$$= \sum_{\emptyset \neq I \subseteq \{1,2,3\}} (-1)^{|I|-1} \left|\bigcup_{i \in I} A_i\right| = 445 - 62 + 6 = 389$$

Zatem rozwiązaniem jest $1260 - 389 = 871$

Zadanie 3 (Niedeklarowalne)

Wykaż, że jeśli $2^n - 1$ jest liczbą pierwszą, to n jest liczbą pierwszą.

Równoważnie:

Wykaż, że jeśli n nie jest liczbą pierwszą, to $2^n - 1$ też nie jest

Nie wprost:

Załóżmy, że n nie jest liczbą pierwszą i $2^n - 1$ jest liczbą pierwszą.

Niech $n = a * b$, wtedy mamy:

$2^n - 1 = 2^{ab} - 1 = (2^a)^b - 1$, niech $x = 2^a$, wtedy:

$2^n - 1 = x^b - 1 = (x - 1)(x^{b-1} + x^{b-2} + \cdots + x^2 + x + 1)$

Czyli $\frac{2^n-1}{x-1} = (x^{b-1} + x^{b-2} + \cdots + x^2 + x + 1)$, zatem x – 1 jest dzielnikiem $2^n - 1$, co jest sprzecznością z założeniem.

Zadanie 4 (Niedeklarowalne)
Wykaż, że jeśli $a^n - 1$ jest liczbą pierwszą, to a = 2

Podobnie jak w poprzednim mamy:
$$a^n - 1 = (a-1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \cdots + a^2 + a + 1)$$
Żeby $(a-1)$ było liczbą pierwszą, to musi zachodzić
$(a-1) = 1$, czyli $a = 2$

Zadanie 5 (Niedeklarowalne)
Wykaż, że jeśli $2^n - 1$ jest liczbą pierwszą, to n jest potęgą liczby 2

Wiemy, że każde n jest postaci $2^p * k$, stąd:
$2^n - 1 = 2^{(2^p * k)} - 1 = (2^k)^{2^p} - 1 =$
$= (2^k - 1)\left(2^{(2^p-1)} + 2^{(2^p-2)} + \cdots + 2 + 1\right) =$
$= \left(2^{\left(\frac{n}{2^p}\right)} - 1\right)\left(2^{(2^p-1)} + 2^{(2^p-2)} + \cdots + 2 + 1\right)$
Żeby $2^n - 1$ było liczbą pierwszą, to musi zachodzić:
$$2^{\left(\frac{n}{2^p}\right)} - 1 = 1 \Rightarrow 2^{\left(\frac{n}{2^p}\right)} = 2 \Rightarrow \frac{n}{2^p} = 1 \Rightarrow n = 2^p \blacksquare$$

Zadanie 6. (Niedeklarowalne)
Określ liczbę podzielną przez 7, która leży najbliżej liczby 10^{100000}.

Rozpiszmy reszty z dzielenia przez 7 pierwszych kilku potęg 10:

Potęga 10	Reszta z dzielenia przez 7
1	3
2	2
3	6
4	4
5	5
6	1
7	3
8	2
9	6

Widzimy, że poszczególne reszty powtarzają się co 6 potęg, stąd:
$$10^{100000} \equiv 10^4 \ (mod\ 7) \equiv 4\ (mod\ 7)$$
Skoro tak, to najbliższą liczbą podzielną przez 7 jest $10^{100000} - 4$

Zadanie 7.

Podaj dwie ostatnie cyfry liczby $9^{8^{7^{6^{5^{4^{3^{2^{1}}}}}}}}$ w rozwinięciu dziesiętnym.

Ostatnimi 2 cyframi 9^8 są 21, bo dla kolejnych parzystych potęg k dziewiątki dwie ostatnie cyfry są postaci [k-2 mod 10][1]:

$$9^1 = 9, 9^2 = 81, 9^3 = 729, 9^4 = 6\,561$$

Stąd $9^{8^{7^{6^{5^{4^{3^{2^{1}}}}}}}} \equiv 21^{7^{6^{5^{4^{3^{2^{1}}}}}}}$ $(\textit{równoważność}\ mod\ 100)$

Ostatnimi 2 cyframi 21^7 są 41, bo dla kolejnych potęg k dwadzieścia jeden dwie ostatnie cyfry są postaci [2k mod 10][1]:

$$21^1 = 21, 21^2 = 441, 21^3 = 9261$$

Stąd $21^{7^{6^{5^{4^{3^{2^{1}}}}}}} \equiv 41^{6^{5^{4^{3^{2^{1}}}}}}$ $(\textit{równoważność}\ mod\ 100)$

Ostatnimi 2 cyframi 41^6 są 41, bo dla kolejnych potęg k czterdzieści jeden dwie ostatnie cyfry są postaci [4k mod 10][1]:

$$41^1 = 41, 41^2 = 1681, 41^3 = 68\,921$$

Stąd $41^{6^{5^{4^{3^{2^{1}}}}}} \equiv 41^{5^{4^{3^{2^{1}}}}}$ $(\textit{równoważność}\ mod\ 100)$

Ostatnimi 2 cyframi 41^5 są 01, bo dla kolejnych potęg k czterdzieści jeden dwie ostatnie cyfry są postaci [4k mod 10][1]:

$$41^1 = 41, 41^2 = 1681, 41^3 = 68\,921$$

Stąd $41^{5^{4^{3^{2^{1}}}}} \equiv 1^{4^{3^{2^{1}}}}$ $(\textit{równoważność}\ mod\ 100)$

Stąd $1^{4^{3^{2^{1}}}} \equiv 1 (\textit{równoważność}\ mod\ 100)$, więc rozwiązaniem jest 01.

Zadanie 10.

Każdy punkt płaszczyzny pomalowano na jeden z dwóch kolorów: pistacjowy lub morelowy. Pokaż, że na tej płaszczyźnie istnieje prostokąt o wierzchołkach takiego samego koloru.

Weźmy 9 równoległych odcinków, każdy zawierający 3 punkty.
Każdy taki odcinek można pokolorować na $2^3 = 8$ sposobów.
Z zasady szufladkowej 2 z nich będą tak samo pokolorowane, więc znajdą się takie 4 punkty, które utworzą prostokąt 1-kolorowy.

Zadanie 11 (Pisemne)
Wykaż, że wśród n + 1 różnych liczb wybranych spośród 2n kolejnych liczb naturalnych zaczynając od 1 istnieją dwie, w których jedna dzieli drugą.

Każda liczba naturalna to $2^p * k, gdzie\ p, k \in N\ oraz\ k\ \%\ 2 = 1$
Dla każdej liczby nieparzystej x można ten zapis uprościć do $2^0 * x$
Jeśli podzielimy liczby z zakresu $[1; 2n]$ na szufladki względem k,
to pierwsza szufladka będzie miała indeks 1, druga indeks 3, i tak dalej co 2 indeksy aż do 2n – 1. Zatem takich szufladek będzie n.
Ale skoro wybieramy n + 1 liczby, to co najmniej 2 będą należeć do tej samej szufladki, czyli będą postaci $2^{n1} * k\ oraz\ 2^{n2} * k\ dla\ n1 \neq n2$
Zatem zawsze istnieją dwie liczby, w których jedna dzieli drugą.