Zadanie 1. 1 punkt

Wytłumacz na przykładzie, dlaczego – z geometrycznego punktu widzenia – operacja dodawania punktów po współrzędnych nie jest dobrym pomysłem.

Operacja dodawania punktów po współrzędnych nie jest dobrym pomysłem, ponieważ nie zachowuje ona geometrii przestrzeni, w której są one zdefiniowane.
Na przykład, jeśli mamy dwa punkty A (1,2) oraz B (3,4), to ich suma po współrzędnych da nam punkt C (4,6).
Jednak punkt C nie leży na tej samej prostej co punkty A i B.

Zadanie 2. 2 punkty

Sprawdź, że wielomiany Bernsteina mają następujące własności:
(a) B_i^n jest nieujemny w przedziale [0, 1] i osiąga w nim dokładnie jedno maksimum,
(b) $\sum_{i=0}^{n} B_i^n(u) = 1$,
(c) $B_i^n(u) = (1-u)B_i^{n-1}(u) + uB_{i-1}^{n-1}(u)\ dla\ (0 \le i \le n)$
(d) $\left(B_i^n(u)\right)' = n\left(B_{i-1}^{n-1}(u) - B_i^{n-1}(u)\right)\ dla\ (0 \le i \le n)$

Przypomnienie: $B_i^n(u) = \binom{n}{i} u^i (1-u)^{n-i}$
Wzór do b: $(x+y)^n = \sum_{i=0}^{n} x^{n-i} y^i$
(a)
1) nieujemność:
Zauważmy, że dla $u \in [0,1]$ zachodzą $u^i \ge 0$ oraz $(1-u)^{n-i} \ge 0$.
Skoro zawsze zachodzi $\binom{n}{i} \ge 0$ to iloczyn tych wyrażeń również jest nieujemny.
2) jedno maksimum:
Żeby poznać ilość ekstremów należy wyliczyć pochodną:

$$\left(B_i^n(u)\right)' = \left(\binom{n}{i} u^i (1-u)^{n-i}\right)' = (abc)' = (dc)' = d'c + dc'$$

dla $a = \binom{n}{i}, b = u^i, c = (1-u)^{n-i}, d = a * b$
Gdzie $c' = -(n-i)(1-u)^{n-i-1}, d' = a * b' = i\binom{n}{i}u^{i-1}$

$$\left(B_i^n(u)\right)' = i\binom{n}{i}u^{i-1}(1-u)^{n-i} - \binom{n}{i}u^i(n-i)(1-u)^{n-i-1}$$

Ekstrema występują wtedy, gdy $\left(B_i^n(u)\right)' = 0$, zatem:

$$\binom{n}{i}\left[iu^{i-1}(1-u)^{n-i} - u^i(n-i)(1-u)^{n-i-1}\right] = 0$$
$$u^{i-1}(1-u)^{n-i-1}[i(1-u) - u(n-i)] = 0$$
$$i(1-u) - u(n-i) = 0$$
$$i - un = 0$$
$$u = \frac{i}{n}\blacksquare$$

(b) $L = \sum_{i=0}^{n} B_i^n(u) = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}u^i(1-u)^{n-i} = \left((1-t)+t\right)^n = 1 = P\blacksquare$

(c) $P = (1-u)B_i^{n-1}(u) + uB_{i-1}^{n-1}(u) =$

$$= (1-u)\left(\binom{n-1}{i}u^i(1-u)^{n-i-1}\right) + u\left(\binom{n-1}{i-1}u^{i-1}(1-u)^{n-i}\right) =$$
$$= u^i(1-u)^{n-i}\left[\binom{n-1}{i} + \binom{n-1}{i-1}\right] =$$
$$= \binom{n}{i}u^i(1-u)^{n-i} = B_i^n(u) = L\blacksquare$$

(d) $L = \left(B_i^n(u)\right)' = i\binom{n}{i}u^{i-1}(1-u)^{n-i} - \binom{n}{i}u^i(n-i)(1-u)^{n-i-1} =$

$$= \binom{n}{i}u^{i-1}(1-u)^{n-i-1}[i(1-u) - u(n-i)] =$$
$$= i\binom{n}{i}u^{i-1}(1-u)^{n-i} - (n-i)\binom{n}{i}u^i(1-u)^{n-i-1} =$$
$$= n\left(\frac{i}{n}\binom{n}{i}u^{i-1}(1-u)^{n-i} - \frac{n-i}{n}\binom{n}{i}u^i(1-u)^{n-i-1}\right) =$$
$$= n\left(\binom{n-1}{i-1}u^{i-1}(1-u)^{n-i} - \binom{n-1}{i}u^i(1-u)^{n-i-1}\right) =$$
$$= n\left(B_{i-1}^{n-1}(u) - B_i^{n-1}(u)\right) = P\blacksquare$$

Zadanie 3. 1 punkt

Udowodnij, że wielomiany $B_0^n, B_1^n, \dots, B_n^n$ tworzą bazę przestrzeni Πn.

Liniowa niezależność

Załóżmy, że zachodzi

$$\sum_{i=0}^{n}\alpha_i B_i^n(u) = 0$$

Aby pokazać liniową niezależność wystarczy pokazać, że $\alpha_0 = \dots = \alpha_n = 0$.

Niech u = 1, wtedy:

$$\sum_{i=0}^{n} \alpha_i B_i^n(1) = \alpha_n B_n^n(1) = \alpha_n = 0$$

Pierwsze przejście wynika z definicji: $B_i^n(1) = \binom{n}{i} 1^i (1-1)^{n-i} = 0 \; dla \; i \neq n$
Nie możemy tego wzoru zastosować dla $i = n, bo \; wtedy (1-1)^{n-i} = 0^0$
Skoro wszystkie wyrazy $B_i^n(1)$ oprócz ostatniego są zerowe, to z własności z zadania 2b ostatni wyraz $B_n^n(1)$ musi być równy 1, stąd drugie przejście.

Podobnie dla u = 0, wtedy:

$$\sum_{i=0}^{n} \alpha_i B_i^n(0) = \alpha_0 B_0^n(0) = \alpha_0 = 0$$

Aby udowodnić, że $\alpha_i = 0$ dla pozostałych i (tzn. $0 < i < n$),
założymy, że $\alpha_i B_i^n(u) = 0 \; oraz \; u \in (0,1)$.
Wtedy $\alpha_i B_i^n(u) = \alpha_i \binom{n}{i} u^i (1-u)^{n-i} = 0$
Aby iloczyn był równy zero, jeden z czynników musi być równy 0,
stąd mamy przypadki:
1) $\binom{n}{i} = 0$ wtw gdy $i \leq 0 \; lub \; i \geq n$, sprzeczność z założeniem,
2) $u^i = 0$ wtw gdy u = 0, sprzeczność z założeniem,
3) $(1-u)^{n-i} = 0$ wtw gdy u = 1, sprzeczność z założeniem,
Zatem jak widać, aby iloczyn był zerem, musi zachodzić $\alpha_i = 0$.

Rozpinanie całej przestrzeni Pi(n)
Z algebry pamiętamy, że n liniowo niezależnych wektorów n-tego stopnia tworzy bazę przestrzeni n-wymiarowej. Tak samo zachodzi dla wielomianów.

Zadanie 6. 1 punkt

Wykorzystaj schemat Hornera do opracowania algorytmu obliczania punktu na krzywej Beziera, który działa w czasie liniowym względem liczby jej punktów kontrolnych.

$$P(t) = \sum_{i=0}^{n} B_i^n(t) W_i = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} W_i$$

$$P(t) = \binom{n}{0} t^0 (1-t)^n W_0 + \binom{n}{1} t^1 (1-t)^{n-1} W_1 + \cdots$$
$$+ \binom{n}{n-1} t^{n-1} (1-t)^1 W_{n-1} + \binom{n}{n} t^n (1-t)^0 W_n$$

Następnie wyłączamy $(1-t)$ przed nawias:

$$P(t) = \left(\ldots \left(\binom{n}{0} (1-t) W_0 + \binom{n}{1} t W_1 \right) + \cdots + \binom{n}{n-1} t^{n-1} W_{n-1} \right) (1-t)$$
$$+ \binom{n}{n} t^n W_n$$

Stąd algorytm działający w czasie $O(n)$ wygląda następująco:

$b = n$ (dwumian Newtona)

$p = p_0$ (wynik)

$d = 1\ (dąży\ do\ t^n)$

for i from 1 to n:

$$p = p * (1-t) + b * p_i * d$$
$$d = d * t$$
$$b = \frac{(b * (n-i))}{i+1}$$

return p

Zadanie 8. 1 punkt

Wykaż, że dla każdego $t \in [0,1]$ $R_n(t)$ jest punktem na płaszczyźnie będącym kombinacją barycentryczną punktów kontrolnych $W_0, W_1, \ldots, W_n \in E^2$.

$$R_n(t) = \frac{\sum_{i=0}^n w_i W_i B_i^n(t)}{\sum_{i=0}^n w_i B_i^n(t)} = \sum_{i=0}^{n} \frac{w_i W_i B_i^n(t)}{\sum_{j=0}^n w_j B_j^n(t)} = \sum_{i=0}^{n} \frac{w_i B_i^n(t)}{\sum_{j=0}^n w_j B_j^n(t)} W_i$$

Kombinacja barycentryczna opisuje się wzorem $\alpha_0 W_0 + \alpha_1 W_1 + \cdots + \alpha_n W_n$, dla $\alpha_i \in R$ oraz $\sum_{i=0}^n \alpha_i W_i = 0, W_i$ to punkty kontrolne.

Stąd wynika, że $\alpha_i = \frac{w_i B_i^n(t)}{\sum_{j=0}^n w_j B_j^n(t)}$

Zatem $\sum_{i=0}^n \alpha_i = \sum_{i=0}^n \frac{w_i B_i^n(t)}{\sum_{j=0}^n w_j B_j^n(t)} = \frac{\sum_{i=0}^n w_i B_i^n(t)}{\sum_{i=0}^n w_i B_i^n(t)} = 1$

Zatem $R_n(t)$ rzeczywiście jest kombinacją barycentryczną punktów kontrolnych.