Zadanie 1. (Pisemne)
Nieporządkiem nazywa się taką permutację elementów, w której żaden element nie znajduje się na swoim miejscu.
Niech d_n oznacza liczbę nieporządków utworzonych z n kolejnych liczb naturalnych. Wyprowadź wzór na d_n stosując zasadę włączeń-wyłączeń.

Wprowadźmy oznaczenia:
NN – zbiór zawierający wszystkie permutacje niebędące nieporządkami,
$\widehat{P}_i$ – zbiór zawierający te permutacje, w których i-ty element jest na i-tej pozycji oraz dopuszczamy możliwość, że inne elementy też są na swojej pozycji

Wtedy wzór na ilość nieporządków wygląda następująco:
$$d_n = n! - |NN| = n! - \left|\widehat{P}_1 \cup \widehat{P}_2 \cup \widehat{P}_3 \cup \ldots \cup \widehat{P}_n\right| = n! - \left|\bigcup_{i=1}^{n} \widehat{P}_i\right|$$
Z zasady włączeń i wyłączeń zachodzi:
$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} \widehat{P}_i\right| = \bigcup_{i=1}^{n} |P_i| - \bigcup_{i,j;i<j}^{n} \left|P_i \cap P_j\right| + \bigcup_{i,j,k;i<j<k}^{n} \left|P_i \cap P_j \cap P_k\right| - \cdots + (-1)^{n-1}|P_1 \cap P_2 \cap \ldots \cap P_n|$$
Zauważmy, że dla każdego i zachodzi $|P_i| = (\mathrm{n}-1)!$, bo i-tą pozycję wybieramy w 1 sposób, a pozostałe n-1 elementów wybieramy dowolnie.
Dalej, zachodzi $\left|P_i \cap P_j\right| = (\mathrm{n}-2)!$, bo 2 pozycje wybieramy w 1 sposób, a pozostałe n-2 elementów wybieramy dowolnie.
W ogólnym przypadku, dla m elementów mamy:
$$\left|P_{i_1} \cap P_{i_2} \cap \ldots \cap P_{i_m}\right| = (\mathrm{n}-\mathrm{m})!$$
Dodatkowo, m pozycji uporządkowanych wybieramy na $\binom{n}{m}$ sposobów, stąd:
$$\bigcup_{i=1}^{n} |P_i| = \binom{n}{1} * (n-1)!$$
$$\bigcup_{1 \le i,j;i<j}^{n} \left|P_i \cap P_j\right| = \binom{n}{2} * (n-2)!$$
Ogólnie dla m elementów:
$$\bigcup_{1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_m}^{n} \left|P_{i_1} \cap P_{i_2} \cap \ldots \cap P_{i_m}\right| = \binom{n}{m} * (n-m)!$$
Podstawiając to do wzoru na d_n otrzymujemy:

$$
\begin{aligned}
d_n = n! - |NN| = \\
&= n! - \binom{n}{1} * (n-1)! + \binom{n}{2} * (n-2)! + .. + (-1)^n \binom{n}{n} * (n-n)! \\
&= n! - \frac{n!}{(n-1)! * 1!} * (n-1)! + \frac{n!}{(n-2)! * 2!} \\
&* (n-2)! + .. + (-1)^n \frac{n!}{(n-n)! * n!} * (n-n)! = \\
&= n! * \left[1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + .. + (-1)^n \frac{1}{n!}\right] = n! * \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i!}
\end{aligned}
$$

Zatem wzorem na liczbę nieporządków jest $n! * \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i!}$

Zadanie 2.

Podwójna wieża Hanoi składa się z 2n krążków n różnych rozmiarów, po 2 krążki każdego rozmiaru. W jednym kroku przenosimy dokładnie jeden krążek i nie możemy kłaść większego krążka na mniejszym.
Ile kroków jest potrzebnych, aby przenieść wieżę z pręta A na pręt B, posługując się przy tym prętem C?

Wyniki dla kilku pierwszych n:

$$H_1 = 2, H_2 = 6, H_3 = 14$$

Algorytm rekurencyjny przekładania 2n krążków n różnych rozmiarów ze słupka A na słupek B składa się z następujących kroków:

1. przenieś (rekurencyjnie) 2(n-1) krążków ze słupka A na słupek B posługując się słupkiem C,
2. przenieś dwa (największe) krążki ze słupka A na słupek C,
3. przenieś (rekurencyjnie) 2(n-1) krążków ze słupka B na słupek C posługując się słupkiem A

Zatem wzór rekurencyjny jest postaci:

$$H_n = \begin{cases} 2 \; dla \; n = 1 \\ 2H_{n-1} + 2 \; dla \; n \geq 2 \end{cases}$$

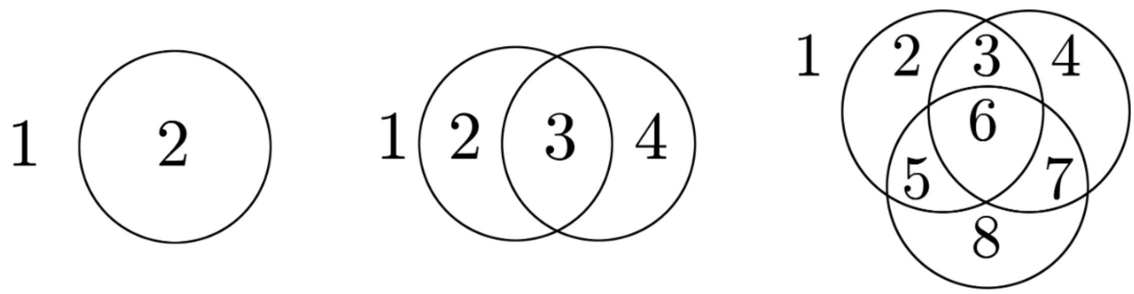
Na koniec wystarczy przekształcić ten wzór do postaci jawnej:

$$H_n = 2H_{n-1} + 2 = 2(2H_{n-2} + 2) + 2 = 4H_{n-2} + 6 = 4(2H_{n-3} + 2) + 6$$
$$= 8H_{n-3} + 14 = \cdots = 2^{n-2}(2H_1 + 2) + \sum_{i=1}^{n-2} 2^i =$$
$$= 2^{n-1}(H_1 + 1) + 2^{n-1} - 2 = 3 * 2^{n-1} + 2^{n-1} - 2$$
$$= 4 * 2^{n-1} - 2 = 2^{n+1} - 2 \ \ dla\, n \geq 1$$

Zadanie 3. (Pisemne)

Na płaszczyźnie danych jest n okręgów. Jaka jest maksymalna liczba obszarów, na które dzielą one płaszczyznę? Wyprowadź rozwiązanie za pomocą odpowiedniej zależności rekurencyjnej.

Aby otrzymać największą możliwą ilość obszarów to każde 2 okręgi muszą przecinać się w dokładnie 2 punktach:



Rysunki przedstawiające podział płaszczyzny na obszary dla $n = 1, 2, 3$

Niech O_n oznacza maksymalną ilość obszarów, na które n okręgów może podzielić płaszczyznę. Wtedy mamy $O_1 = 2, O_2 = 4, O_3 = 8$ (jak na rysunku).
Następnie rozważmy przypadek ogólny: znając O_{n-1} chcemy policzyć O_n.
Aby otrzymać przypadek maksymalny, nowy okrąg musi przecinać się z n-1 dotychczasowymi okręgami w 2(n-1) punktach.
Te 2(n-1) punkty dzielą n-ty okrąg na 2(n-1) łuków, a każdy z nich dzieli każdy dotychczas istniejący obszar na 2 nowe. Zatem otrzymujemy wzór:

$$r_n = \begin{cases} 1 \ dla\, n = 0 \\ 2 \ dla\, n = 1 \\ r_{n-1} + 2(n-1) \ dla\, n \geq 2 \end{cases}$$

Stąd można wyliczyć wzór jawny:

$$
\begin{aligned}
r_n = r_{n-1} + 2(n-1) &= r_{n-2} + 2(n-2) + 2(n-1) \\
&= r_{n-3} + 2(n-3) + 2(n-2) + 2(n-1) = \cdots \\
&= r_1 + 2(1) + 2(2) + \cdots + 2(n-2) + 2(n-1) = \\
&= 2 + \sum_{i=1}^{n-1} 2(n-i) = 2 + 2\sum_{i=1}^{n-1}(n-i) = 2 + 2 * \frac{(n-1)*n}{2} = \\
&= n^2 - n + 2 \; dla \; n \geq 0
\end{aligned}
$$

Zadanie 4 (2p)

Na ile maksymalnie obszarów można podzielić trójwymiarową przestrzeń za pomocą n płaszczyzn? Wyprowadź rozwiązanie za pomocą odpowiedniej zależności rekurencyjnej.

Zauważmy, że każde 2 nierównoległe płaszczyzny przecinają się w 1 linii, zatem żeby obliczyć ilość podziałów przestrzeni 3-wymiarowych musimy znać ilość podziałów przestrzeni 2-wymiarowych (płaszczyzn).
Każde 2 nierównoległe proste przecinają się w 1 punkcie, stąd mamy dla kilku pierwszych n: $P_0 = 1, P_1 = 2, P_2 = 4$.
Jeśli mamy 3 proste, to aby otrzymać przypadek maksymalny musimy dokonać podziału za pomocą prostych parami nierównoległych i takich, że każdy punkt przecięcia przecina 2 proste. Wtedy $P_3 = 7$.
Teraz rozważmy przypadek ogólny – mamy optymalne ułożenie n-1 prostych i chcemy dołożyć n-tą prostą w optymalny sposób.
Maksymalnym rozwiązaniem będzie takie ustawienie, żeby n-ta prosta przecinała się z każdą inną w n-1 różnych punktach, tworząc n nowych podziałów. Wtedy maksymalna ilość podziałów płaszczyzny n prostymi wyraża się wzorem rekurencyjnym:

$$P_n = \begin{cases} 1 \; dla \; n = 0 \\ P_{n-1} + n \; dla \; n \geq 1 \end{cases}$$

Następnie liczymy wzór jawny tej funkcji:

$$
\begin{aligned}
P_n = P_{n-1} + n = P_{n-2} + (n-1) + n = \cdots = P_0 + 1 + 2 + \cdots + n = \\
= 1 + \frac{n(n+1)}{2} \; dla \; n \geq 0
\end{aligned}
$$

Teraz można wrócić do zadania z 3-wymiarową płaszczyzną i łatwo zauważyć:

$$T_0 = 1, T_1 = 2, T_2 = 4, T_3 = 8$$

Podobnie jak dla prostych, n-ta płaszczyzna przetnie n-1 dotychczasowych płaszczyzn w maksymalnie n-1 liniach. W ten sposób utworzy n-1 nowych linii, tworzących P_{n-1} obszarów, czyli do T_{n-1} obszarów zostanie dodanych P_{n-1} obszarów stworzonych przez linie, stąd wzór rekurencyjny:

$$T_n = \begin{cases} 1\ dla\ n = 0 \\ T_{n-1} + P_{n-1} = T_{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} + 1\ dla\ n \geq 1 \end{cases}$$

Wzór jawny będzie postaci:

$$T_n = T_{n-1} + P_{n-1} = T_{n-2} + P_{n-1} + P_{n-2} = \cdots = T_0 + \sum_{i=0}^{n-1} P_i =$$
$$= 1 + \sum_{i=0}^{n-1} 1 + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{i(i+1)}{2} = n + 1 + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{i(i+1)}{2} =$$
$$= n + 1 + \frac{(n-1)n(n+1)}{6} = n + 1 + \frac{n^3 - n}{6} =$$
$$= \frac{n^3 + 5n + 6}{6}\ dla\ n \geq 0$$

Zadanie 6.

Ile jest różnych sposobów wejścia po schodach zbudowanych z n stopni, jeśli w każdym kroku można pokonać jeden lub dwa stopnie?

Najpierw policzę ilość sposobów dla kilku pierwszych n:

$$S_1 = 1, S_2 = 2, S_3 = 3$$

Można zauważyć, że z pierwszego stopnia można pójść na dwa sposoby – jeśli wejdziemy 1 stopień, to problem zredukuje się do rozwiązania rekurencyjnego dla n-1, albo do rekurencji dla n-2 jeśli wejdziemy o 2 stopnie , zatem wszystkich sposobów na wejście na n-ty stopień jest:

$$S_n = S_{n-1} + S_{n-2}\ dla\ n \geq 3\ oraz\ S_1 = 1, S_2 = 2$$

Zadanie 7.

Baltazar Gąbka ma 7 przyjaciół. Określ, na ile sposobów może zapraszać po 3 z nich na kolację przez 7 kolejnych dni tak, aby każdy z nich został zaproszony co najmniej raz.

Skorzystamy z zasady włączeń-wyłączeń: $|R_7| = |R| - |R - R_7|$, gdzie

$R_7 - sposoby, w\ których\ każda\ osoba\ została\ zaproszona\ min.raz$

$R - wszystkie\ sposoby\ zaproszeń$

$R - R_7 - ilość\ sposobów\ niepoprawnych, czyli\ takich,$

$w\ których\ istnieją\ osoby\ nie\ zaproszone\ ani\ razu$

$$|R| = \binom{7}{3}^7 = 35^7$$

$$|R - R_7| = 7 * \binom{6}{3}^7 - \binom{7}{2}\binom{5}{3}^7 + \binom{7}{3}\binom{4}{3}^7 - \binom{7}{4}\binom{3}{3}^7$$

Wyjaśnienie: na początku tygodnia wybieramy, na ile osób się „obrażamy”, czyli ile osób nie zaprosimy ani razu w tym tygodniu.
Stąd jeśli wykluczymy 1 osobę (można to zrobić na 7 sposobów), to wybieramy dalej 3 osoby, ale już z 6 możliwych, przez 7 dni. Można wykluczyć też 2, 3 lub 4 osoby (wtedy będzie trywialny wybór 3 osób z 3 dostępnych) ale nie więcej niż 4 (bo wtedy nie da się wybrać 3 osób), stąd wzór jest sumą poszczególnych przypadków.

$$|R_7| = 35^7 - 7 * \binom{6}{3}^7 + \binom{7}{2}\binom{5}{3}^7 - \binom{7}{3}\binom{4}{3}^7 + \binom{7}{4}\binom{3}{3}^7$$

Zadanie 8. (niedeklarowalne)

Stosując metodę podstawiania rozwiąż następujące zależności rekurencyjne:
(a) $t_n = t_{n-1} + 3^n \; dla \; n > 1 \; i \; t_1 = 3$

(b) $h_n = h_{n-1} + (-1)^{n+1} n \; dla \; n > 1 \; i \; h_1 = 1$

(a) $t_n = t_{n-1} + 3^n = (t_{n-2} + 3^{n-1}) + 3^n = (t_{n-3} + 3^{n-2}) + 3^{n-1} + 3^n =$
$\cdots = (t_1 + 3^2) + 3^3 + \cdots + 3^{n-1} + 3^n = \sum_{i=1}^{n} 3^i = 3 * \frac{1-3^n}{1-3}$

(b) $h_1 = 1, h_2 = -1, h_3 = 2, h_4 = -2, h_5 = 3, h_6 = -3$

$$h_n = \begin{cases} \frac{n+1}{2}, dla \; n \; nieparzystego \\ -\frac{n}{2}, dla \; n \; parzystego \end{cases}$$

Dowód indukcyjny poprawności wzoru:
Podstawa: n = 1, zatem $h_n = \frac{n+1}{2} = \frac{1+1}{2} = 1$
Krok: załóżmy, że wzór działa dla każdego n, pokażę, że działa też dla n+1:

$$h_{n+1} = \begin{cases} \frac{n+2}{2}, dla \; n+1 \; nieparzystego \\ -\frac{(n+1)}{2}, dla \; n+1 \; parzystego \end{cases}$$

Rozważmy 2 przypadki:

1) n jest nieparzyste, wtedy:

$$h_{n+1} = h_n + (-1)^{n+2}(n+1) = \frac{n+1}{2} + (-1)^{n+2}(n+1) =$$

$$= \frac{n+1}{2} - (n+1) = -\frac{(n+1)}{2} \blacksquare$$

2) n jest parzyste, wtedy:

$$h_{n+1} = h_n + (-1)^{n+2}(n+1) = -\frac{n}{2} + (-1)^{n+2}(n+1) = -\frac{n}{2} + (n+1) =$$

$$= \frac{n+2}{2} \blacksquare$$