Zadanie 1. (1pkt)
Pokaż, że problem znajdowania otoczki wypukłej nie może być rozwiązany w modelu drzew decyzyjnych.

[UWR/C5.md at master · WojciechAdamiec/UWR · GitHub]

Zadanie 2. (2pkt)
Rozważmy następujący problem:
Dane: Liczby rzeczywiste x1,…,xn
Wynik: TAK jeśli istnieją $0 \leq i, j, k \leq n, że\ x_i + x_j + x_k = 0$
NIE w p.p.

Udowodnij, że Ω(n log n) jest dolną granicą na rozwiązanie tego problemu w modelu liniowych drzew decyzyjnych.

Problem nazywa się 3-SUM

Zadanie 4. (1.5pkt)
Udowodnij, że 2n − 1 porównań trzeba wykonać, aby scalić dwa ciągi n elementowe w modelu drzew decyzyjnych. Zastosuj grę z adwersarzem, w której adwersarz na początku ogranicza przestrzeń danych tak, by zawierała 2n zestawów danych takich i by każde porównanie wykonane przez algorytm eliminowało co najwyżej jeden zestaw.

Mamy ciągi $A =< a_1, a_2, \dots, a_n >, B =< b_1, b_2, \dots, b_n >$. Wszystkich możliwych ciągów 2n-elementowych po scaleniu jest $\binom{2n}{n}$, jednak my wybierzemy 2n określonych wzorem:

$$X_0 =< a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_n, b_n >$$
$$X_i =< a_1, b_1, \dots, b_i, a_i, \dots, a_n, b_n >$$

Czyli Xi to jest X0 z zamianą (2i-1)-ego elementu z 2i-szym.
Teraz wystarczy pokazać, że dowolne zapytanie eliminuje maksymalnie 1 zestaw, wtedy będzie trzeba wykonać 2n-1 porównań.
Dla zapytania a_i ? b_j:
1) i < j nie usuwamy żadnego zestawu, bo wtedy zawsze $a_i < b_j$,
2) i = j usuwamy tylko zestaw X_{2j-1}, bo w innych przypadkach zawsze $a_i < b_j$,
3) i = j+1 usuwamy tylko zestaw X_{2j}, bo w innych przypadkach zawsze $a_i > b_j$,
4) i > j+1 nie usuwamy żadnego zestawu, bo wtedy zawsze $a_i > b_j$.

Zadanie 6. (2pkt)
Rozważmy problem wyznaczenia za pomocą porównań elementów największego i drugiego z kolei w zbiorze n-elementowym.
Udowodnij, że $n + \lceil \log(n) \rceil - 2$ porównań potrzeba i wystarcza do wyznaczenia tych elementów.

1. Wystarcza (górna granica)
Porównujemy elementy parami – 2i-ty z (2i+1)-szym. Każdy większy z pary przechodzi do następnego poziomu i tak aż zostanie nam 1 para.
W ten sposób jesteśmy w stanie wyznaczyć największy element za pomocą

$$\frac{n}{2} + \frac{n}{4} + \frac{n}{8} + \cdots = \sum_{i=1}^{\log_2 n} \frac{n}{2^i} = n \sum_{i=1}^{\log_2 n} \left(\frac{1}{2}\right)^i = n * \frac{1}{2} * \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{\log_2 n}}{1 - \frac{1}{2}} =$$

$$= n\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{\log_2 n}\right) = n\left(1 - \frac{1}{n}\right) = n\left(\frac{n-1}{n}\right) = n - 1$$

porównań. Następnie wiemy, że drugi największy element był na jakimś etapie porównany z największym (inaczej odpadłby w porównaniu z innym elementem, czyli nie byłby drugim największym, sprzeczność).
Zatem wystarczy że wyznaczymy największy element spośród tych, które były porównywane z elementem największym. Takich elementów było $\lceil \log(n) \rceil$, zatem należy wykonać dodatkowe $\lceil \log(n) \rceil - 1$ porównań, co oznacza, że łącznie wykonamy $n + \lceil \log(n) \rceil - 2$ porównań, co należało wykazać.

2. Potrzeba (dolna granica)
Niech a_j oznacza ilość elementów które przegrały co najmniej j porównań.
Oczywiście $a_1 = n - 1$, bo aby poznać drugi największy element musimy znać największy, a do tego potrzeba n – 1 porównań.
Aby pokazać dolną granicę należy udowodnić, że $a_2 \geq \lceil \log(n) \rceil - 1$.

Załóżmy, że aby odnaleźć element maksymalny M musieliśmy wykonać p porównań, jedno z wicemistrzem, a pozostałe z elementami które przegrały co najmniej 2 razy, zatem $a_2 \geq p - 1$.
Niech relacja $A \geq^* B$ oznacza, że A = B albo $A \geq^* W$, gdzie W jest pierwszym elementem, który wygrał z B ($W \geq B$, czyli B przegrał >=2 razy).
To oznacza, że $M \geq^* X$ dla co najwyżej 2^p elementów X.
Logarytmując otrzymujemy, że $M \geq^* X$ dla n elementów gdy wykonamy co najmniej $\lceil \log(n) \rceil$ porównań, co kończy dowód.