Zadanie 1. 1 punkt

Metodę siecznych definiuje wzór iteracyjny

$x_{n+1} = x_n - f_n \frac{x_n - x_{n-1}}{f_n - f_{n-1}} (f_n \neq f_{n-1}; n = 1, 2, \dots; x_0, x_1 - dane)$,

gdzie $f_m = f(x_m)$ $(m = 0, 1, \dots)$.

Wykaż, że wzór ten można również zapisać w postaci

$x_{n+1} = \frac{f_n x_{n-1} - f_{n-1} x_n}{f_n - f_{n-1}} (f_n \neq f_{n-1}; n = 1, 2, \dots; x_0, x_1 - \ dane)$, a następnie wyjaśnij, który z wzorów jest przydatniejszy w praktyce numerycznej.

$$x_{n+1} = x_n - f_n \frac{x_n - x_{n-1}}{f_n - f_{n-1}} = x_n - \frac{f_n x_n - f_n x_{n-1}}{f_n - f_{n-1}} =$$
$$= \frac{f_n x_n - f_{n-1} x_n}{f_n - f_{n-1}} - \frac{f_n x_n - f_n x_{n-1}}{f_n - f_{n-1}} = \frac{f_n x_{n-1} - f_{n-1} x_n}{f_n - f_{n-1}} \blacksquare$$

W przypadku, gdy $f_n \approx f_{n-1} \approx 0$, to dla pierwszego wzoru zajdzie $x_{n+1} = x_n$, natomiast drugi wzór wyznaczy $x_{n+1} = 0$, czyli 1 wzór jest lepszy.

Zadanie 2. 1 punkt

Zapoznaj się z opisem metody regula falsi – będącej pewnym wariantem metody siecznych – przedstawionym w paragrafie 6.2.1. książki G. Dahlquist, A. Bjorck, Numerical methods in scientific computing, Vol. I, SIAM, 2008. Przedstaw jej ideę (rysunek i przykłady są tu wskazane), a następnie wyjaśnij czym różni się ona od metody siecznych. Co jest główną zaletą tej metody?

Wskazówka: W tym wypadku nie warto zaglądać do polskiej Wikipedii.

Wzór metody regula falsi:

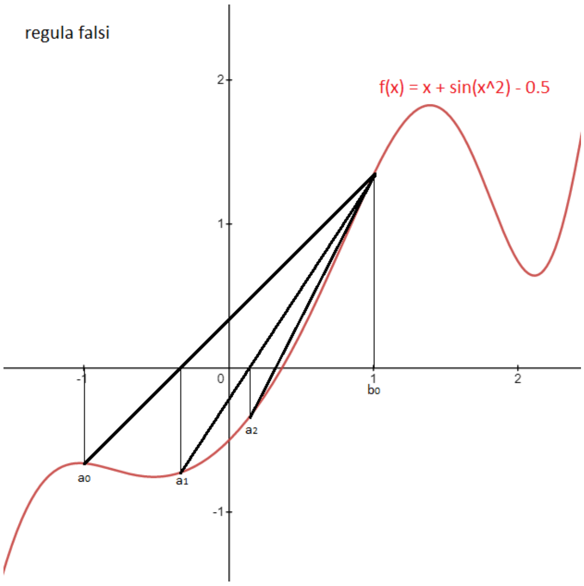
$$a_{n+1} = a_n - f(a_n) \frac{b_n - a_n}{f(b_n) - f(a_n)}, n = 0, 1, 2, \dots$$

Idea jest taka, że funkcja w coraz mniejszych przedziałach przypomina funkcję liniową, zatem przybliżenie miejsca zerowego otrzymujemy wybierając krańce przedziału $[a_0, b_0]$, w którym znajduje się miejsce zerowe funkcji, a następnie wyliczając $f(a_0)\ oraz\ f(b_0)$.

Żeby metoda działała, musi zachodzić $f(a_n) * f(b_n) \leq 0$ dla każdego n.

(*) Następnie wyznaczamy taką prostą, która przechodzi przez oba punkty $f(a_n), f(b_n)$. Skoro $f(a_n) * f(b_n) \leq 0$, to prosta ta przechodzi też przez punkt $[x, 0]\ dla\ x \in [a_n, b_n]$. Wtedy $f(x)$ jest kolejnym przybliżeniem miejsca zerowego f. Jeśli nas ono nie satysfakcjonuje, to powtarzamy (*) dla przedziału $[a_n, x]\ gdy\ f(a_n) * f(x) < 0\ lub\ [x, b_n]\ w\ p.p.$

Rysunek 1. Jak widać, zachodzi $b_0 = b_1 = \cdots = b_n$, czyli prawy kraniec jest stały



Metoda ta posiada wady, a największa z nich to powolność, zwłaszcza kiedy wartości w pobliżu a_0 są bliskie zera, natomiast w pobliżu b_0 są dużo wyższe, oraz miejsce zerowe jest blisko b_0.

Różnica między regula falsi a metodą siecznych to fakt, że w tej pierwszej jeden z krańców przedziału nie zmienia się, przez co metoda ta ma zbieżność liniową, a metoda siecznych ma zbieżność ponadliniową (dokładnie złota liczba).

Zadanie 3. 1 punkt

Załóżmy, że metoda iteracyjna postaci

$$x_0 - dane, (1)\ x_{k+1} = F(x_k)\ (k = 0,1, \dots)$$

(metody takie nazywamy metodami jednokrokowymi; np. metodą taką jest metoda Newtona, dla której $F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$)

jest zbieżna do pierwiastka α równania f(x) = 0.

Wykaż, że jeśli

$$(*)\ F(\alpha) = \alpha, F'(\alpha) = F''(\alpha) = \dots = F^{(p-1)}(\alpha) = 0, F^{(p)}(\alpha) \neq 0$$

to rząd metody jest równy p, tzn. (2) $\lim_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1} - \alpha|}{|x_n - \alpha|^p} = C \neq 0.$

Jakim wzorem wyraża się stała asymptotyczna C?

Wiemy, że $\epsilon_n = x_n - \alpha$ jest błędem przybliżenia, zatem $x_n = \epsilon_n + \alpha$

$x_{k+1} = F(x_k)$ można zapisać jako $\epsilon_{k+1} + \alpha = F(\epsilon_k + \alpha)$, stąd:

$$\epsilon_{k+1} = F(\epsilon_k + \alpha) - \alpha$$

Teraz można rozwinąć $F(\epsilon_k + \alpha)$ w szereg Taylora dzięki założeniu (*):

$$F(\epsilon_k + \alpha) = F(\alpha) + F'(\alpha) * \epsilon_k + \frac{F''(\alpha)}{2} * {\epsilon_k}^2 + \dots + \frac{F^{(p-1)}(\alpha)}{(p-1)!} * {\epsilon_k}^{(p-1)} + \frac{F^{(p)}(\alpha)}{p!} * {\epsilon_k}^p = \alpha + \frac{F^{(p)}(\alpha)}{p!} * {\epsilon_k}^p$$

Zatem $\epsilon_{k+1} = F(\epsilon_k + \alpha) - \alpha$ można zapisać jako:

$$(3)\ \epsilon_{k+1} = \frac{F^{(p)}(\alpha)}{p!} * {\epsilon_k}^p = C * {\epsilon_k}^p$$

Co udowadnia rząd zbieżności równy p oraz wyznacza stałą C równą $\frac{F^{(p)}(\alpha)}{p!}$.

Możemy to zobaczyć, podstawiając do wzoru 2:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1} - \alpha|}{|x_n - \alpha|^p} = \lim_{n\to\infty} \frac{|\epsilon_{n+1} + \alpha - \alpha|}{|\epsilon_n + \alpha - \alpha|^p} = \lim_{n\to\infty} \frac{|\epsilon_{n+1}|}{|\epsilon_n|^p} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left|\frac{F^{(p)}(\alpha)}{p!} * {\epsilon_n}^p\right|}{|\epsilon_n|^p} = \frac{F^{(p)}(\alpha)}{p!} = C$$

(Wiemy, że p > 0, stąd $\frac{|{\epsilon_n}^p|}{|\epsilon_n|^p} = \frac{{\epsilon_n}^p}{{\epsilon_n}^p} = 1$)

Zadanie 4. 1 punkt
Niech α będzie pojedynczym zerem funkcji f $(*)$ $tzn. f(\alpha) = 0, f'(\alpha) \neq 0.$
Wykaż, że metoda Newtona jest wówczas zbieżna kwadratowo.
Wskazówka: Wykorzystaj zadanie L5.3.

Wiemy, że $e_{n+1} = x_{n+1} - \alpha = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - \alpha = \epsilon_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = \frac{\epsilon_n f'(x_n) - f(x_n)}{f'(x_n)}$,
Następnie z rozwinięcia Taylora:

$$0 = f(\alpha) = f(x_n - \epsilon_n) = f(x_n) - \epsilon_n f'(x_n) + \frac{1}{2}{\epsilon_n}^2 f''(\varphi_n), \text{dla } \varphi_n \in (x_n, \alpha)$$

Stąd:

$$\frac{1}{2}{\epsilon_n}^2 f''(\varphi_n) = \epsilon_n f'(x_n) - f(x_n)$$

Podstawiając lewą część powyższej równości do wzoru z 1 linijki:

$$e_{n+1} = \frac{\frac{1}{2} f''(x_n)}{f'(x_n)} {\epsilon_n}^2 = C * {\epsilon_n}^2$$

Zatem zbieżność metody Newtona jest kwadratowa.

Zadanie 5. 1 punkt
Niech α będzie podwójnym zerem funkcji f, zatem niech
$f(\alpha) = f'(\alpha) = 0 \neq f''(\alpha).$
Wykaż, że metoda Newtona jest wówczas zbieżna liniowo
(pamiętaj też o sprawdzeniu odpowiedniej wartości stałej asymptotycznej).

Wiemy, że $e_{n+1} = \frac{\epsilon_n f'(x_n) - f(x_n)}{f'(x_n)}$ oraz:

$$F'(x_n) = 1 - \frac{f'(x_n)f'(x_n) - f(x_n)f''(x_n)}{f'(x_n)^2} =$$

$$= \frac{f'(x_n)^2 - f'(x_n)f'(x_n) + f(x_n)f''(x_n)}{f'(x_n)^2} = \frac{f(x_n)f''(x_n)}{f'(x_n)^2}$$

$$F'(x_n) = \sqrt[3]{f(x_n)f''(x_n)}$$

???

Zadanie 7. 1 punkt

Zaproponuj numeryczną metodę wyznaczania wykładnika zbieżności jednokrokowej metody iteracyjnej (por. zadanie L5.3) rozwiązywania równania nieliniowego f(x) = 0.

Z definicji zachodzi $\lim_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1}-\alpha|}{|x_n-\alpha|^p} = C > 0$

Niech $e_n = x_{n+1} - \alpha$, wtedy $(1)\ \lim_{n\to\infty} \frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^p} = C$, stąd

$$|e_{n+1}| \approx C * |e_n|^p$$

$$(2)\ C \approx \frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^p} = \frac{|e_n|}{|e_{n-1}|^p}$$

Podstawiając (2) do wzoru (1) i obustronnie logarytmując otrzymujemy:

$$\log\frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^p} = \log\frac{|e_n|}{|e_{n-1}|^p}$$

$$\log\frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^p} - \log\frac{|e_n|}{|e_{n-1}|^p} = 0$$

$$\log|e_{n+1}| - \log|e_n|^p - \log|e_n| + \log|e_{n-1}|^p = 0$$

$$\log|e_{n+1}| - p\log|e_n| - \log|e_n| + p\log|e_{n-1}| = 0$$

$$\log|e_{n+1}| - \log|e_n| = p(\log|e_n| - \log|e_{n-1}|)$$

$$\log\frac{|e_{n+1}|}{|e_n|} = p\log\frac{|e_n|}{|e_{n-1}|}$$

$$p = \frac{\left(\log\frac{|e_{n+1}|}{|e_n|}\right)}{\left(\log\frac{|e_n|}{|e_{n-1}|}\right)}$$