Zadanie 1. 1 punkt

Znajdź naturalną interpolacyjną funkcję sklejaną trzeciego stopnia (w skrócie: NIFS3) dla danych

a)

x_k	-3	0	3
y_k	27	54	-27

Szukamy takich stałych A,B,C,D,E,F,G, że zachodzą wszystkie poniższe warunki:

$$s(x) = \begin{cases} s_1(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D, x \in [-3,0] \\ s_2(x) = Ex^3 + Fx^2 + Gx + H, x \in [0,3] \end{cases}$$

$$s'(x) = \begin{cases} s_1'(x) = 3Ax^2 + 2Bx + C, x \in [-3,0] \\ s_2'(x) = 3Ex^2 + 2Fx + G, x \in [0,3] \end{cases}$$

$$s''(x) = \begin{cases} s_1''(x) = 6Ax + 2B, x \in [-3,0] \\ s_2''(x) = 6Ex + 2F, x \in [0,3] \end{cases}$$

$$s_1''(-3) = s_2''(3) = 0$$

Wyliczamy warunki interpolacji:

$$s(-3) = 27 \rightarrow -27A + 9B - 3C + D = 27$$
$$s(0) = 54 \rightarrow D = 54 \; oraz \; H = 54$$
$$s(3) = -27 \rightarrow 27E + 9F + 3G + H = -27$$

Warunki ciągłości funkcji:

$$s_1'(0) = s_2'(0) \rightarrow C = G$$
$$s_1''(0) = s_2''(0) \rightarrow B = F$$

Oraz warunek 3 NIFS3:

$$s_1''(-3) = s_2''(3) = 0 \rightarrow -18A + 2B = 18E + 2F \rightarrow A = -E$$

Teraz rozwiązujemy ten układ równań:

$$\begin{cases} A=? \\ B=9A \\ C=18A+9 \\ D=54 \\ E=-A \\ F=9A \\ G=18A+9 \\ H=54 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A=-1 \\ B=-9 \\ C=-9 \\ D=54 \\ E=1 \\ F=-9 \\ G=-9 \\ H=54 \end{cases}$$

Stąd rozwiązaniem jest:

$$s(x) = \begin{cases} s_1(x) = -x^3 - 9x^2 - 9x + 54, x \in [-3,0] \\ s_2(x) = x^3 - 9x^2 - 9x + 54, x \in [0,3] \end{cases}$$

b)

x_k	-5	-3	-1	0	1	3	5
y_k	-10110	-6066	-2022	0	2022	6066	10110

Widać, że wielomianem interpolacyjnym będzie $2022x$, ale pokażę to używając przeklętego wzoru.

Przeklęty wzór:

$$s(x) = {h_k}^{-1}\left[\frac{1}{6}M_{k-1}(x_k - x)^3 + \frac{1}{6}M_k(x - x_{k-1})^3 + \left(f(x_{k-1}) - \frac{1}{6}M_{k-1}{h_k}^2\right)(x_k - x) + \left(f(x_k) - \frac{1}{6}M_k{h_k}^2\right)(x - x_{k-1})\right]$$

Gdzie $h_k = x_k - x_{k-1}$, $M_k = s''(x_k)$, $M_0 = M_6 = 0$, $\lambda_k = \frac{h_k}{h_k + h_{k+1}}$

Najpierw wyliczamy ilorazy różnicowe:

	x_n	$f[x_n]$	$f[x_{n-1}, x_n]$	$f[x_{n-2}, x_{n-1}, x_n]$
x_0	-5	-10110	-	-
x_1	-3	-6066	2022	-
x_2	-1	-2022	2022	0
x_3	0	0	2022	0
x_4	1	2022	2022	0
x_5	3	6066	2022	0
x_6	5	10110	2022	0

Teraz wyliczmy wartości h oraz lambd:

n	x_n	λ_n
n > 0	$x_n - x_{n-1}$	$\frac{h_n}{h_n + h_{n+1}}$
1	2	1 / 2
2	2	2 / 3
3	1	1 / 2
4	1	1 / 3
5	2	1 / 2
6	2	-

Następnie wyliczamy wartości momentów M_1, M_2, M_3, M_4, M_5 ze wzoru:
$\lambda_k M_{k-1} + 2M_k + (1 - \lambda_k)M_{k+1} = 6f[x_{k-1}, x_k, x_{k+1}] = 0$, czyli:

$$\begin{cases} 2M_1 + (1-\lambda_1)M_2 = 0 \\ \lambda_2 M_1 + 2M_2 + (1-\lambda_2)M_3 = 0 \\ \lambda_3 M_2 + 2M_3 + (1-\lambda_3)M_4 = 0 \\ \lambda_4 M_3 + 2M_4 + (1-\lambda_4)M_5 = 0 \\ \lambda_5 M_4 + 2M_5 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2M_1 + \frac{1}{2}M_2 = 0 \\ \frac{2}{3}M_1 + 2M_2 + \frac{1}{3}M_3 = 0 \\ \frac{1}{2}M_2 + 2M_3 + \frac{1}{2}M_4 = 0 \\ \frac{1}{3}M_3 + 2M_4 + \frac{2}{3}M_5 = 0 \\ \frac{1}{2}M_4 + 2M_5 = 0 \end{cases}$$

Otrzymujemy $M_1 = M_2 = M_3 = M_4 = M_5 = 0$
Stąd przeklęty wzór uprości się do:

$$s_k(x) = \frac{f(x_{k-1})(x_k - x) + f(x_k)(x - x_{k-1})}{h_k}$$

Podstawiając do niego wartości otrzymujemy:

$$s_1(x \in [-5,-3]) = \frac{-10110 * (-3 - x) - 6066 * (x + 5)}{2} = 2022x$$

$$s_2(x \in [-3,-1]) = \frac{-6066 * (-1 - x) - 2022 * (x + 3)}{2} = 2022x$$

$$s_3(x \in [-1,0]) = \frac{-2022 * (-x) - 0 * (x + 1)}{1} = 2022x$$

$$s_4(x \in [0,1]) = \frac{0 * (1 - x) + 2022 * (x - 0)}{1} = 2022x$$

$$s_5(x \in [1,3]) = \frac{2022 * (3 - x) + 6066 * (x - 1)}{2} = 2022x$$

$$s_6(x \in [3,5]) = \frac{6066 * (5 - x) + 10110 * (x - 3)}{2} = 2022x$$

Zadanie 2. 1 punkt

Czy funkcja

$$f(x) = \begin{cases} 10x^3 + 60x^2 + 96x + 39 \ \ dla - 2 \le x \le -1 \\ -22x^3 - 36x^2 + 7 \ \ dla - 1 \le x \le 0 \\ 22x^3 - 36x^2 + 7 \ \ dla\ 0 \le x \le 1 \\ -10x^3 + 60x^2 - 96x + 39 \ \ dla\ 1 \le x \le 2 \end{cases}$$

jest NIFS3 dla pewnych danych (obserwacji) odpowiadającym węzłom −2, −1, 0, 1, 2?

Warunki, które f musi spełnić, aby być NIFS3:

1) ciągłość f w punktach -1, 0, 1,
2) ciągłość f’ w punktach -1, 0, 1,
3) ciągłość f’’ w punktach -1, 0, 1,
4) $f(x) \in \Pi_3$,
5) $f''(-2) = f''(2) = 0$

1) ciągłość f, czyli $\forall x \in \{-1{,}0{,}1\}$ $ma\ zachodzić\ \lim_{x\to x_i^-} f(x) = \lim_{x\to x_i^+} f(x)$:

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-}[10x^3 + 60x^2 + 96x + 39] = -10 + 60 - 96 + 39 = -7$$
$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+}[-22x^3 - 36x^2 + 7] = 22 - 36 + 7 = -7$$
$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}[-22x^3 - 36x^2 + 7] = 7$$
$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}[22x^3 - 36x^2 + 7] = 7$$
$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}[22x^3 - 36x^2 + 7] = 22 - 36 + 7 = -7$$
$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}[-10x^3 + 60x^2 - 96x + 39] = -10 + 60 - 96 + 39 = -7$$

2) ciągłość f’ w punktach -1, 0, 1:

$$\lim_{x\to -1^-} f'(x) = \lim_{x\to -1^-}[30x^2 + 120x + 96] = 30 - 120 + 96 = 6$$
$$\lim_{x\to -1^+} f'(x) = \lim_{x\to -1^+}[-66x^2 - 72x] = -66 + 72 = 6$$
$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-}[-66x^2 - 72x] = 0$$
$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+}[66x^2 - 72x] = 0$$
$$\lim_{x\to 1^-} f'(x) = \lim_{x\to 1^-}[66x^2 - 72x] = 66 - 72 = -6$$
$$\lim_{x\to 1^+} f'(x) = \lim_{x\to 1^+}[-30x^2 + 120x - 96] = -30 + 120 - 96 = -6$$

3) ciągłość f’’ w punktach -1, 0, 1:

$$\lim_{x\to -1^-} f''(x) = \lim_{x\to -1^-}[60x + 120] = 60$$
$$\lim_{x\to -1^+} f''(x) = \lim_{x\to -1^+}[-132x - 72] = 60$$
$$\lim_{x\to 0^-} f''(x) = \lim_{x\to 0^-}[-132x - 72] = -72$$
$$\lim_{x\to 0^+} f''(x) = \lim_{x\to 0^+}[132x - 72] = -72$$
$$\lim_{x\to 1^-} f''(x) = \lim_{x\to 1^-}[132x - 72] = 60$$
$$\lim_{x\to 1^+} f''(x) = \lim_{x\to 1^+}[-60x + 120] = 60$$

4) $f(x) \in \Pi_3$ jest spełnione na całym przedziale

5) $f''(-2) = f''(2) = 0$

$$f''(-2) = 60 * (-2) + 120 = 0$$
$$f''(2) = -60 * 2 + 120 = 0$$

Skoro wszystkie warunki są spełnione, to f jest NIFS3.

Zadanie 3. 1 punkt

Czy istnieją takie stałe a, b, c, d, że funkcja

$$f(x)=\begin{cases}-2022x-2023\ dla-2\le x\le -1\\ ax^3+bx^2+cx+d\ dla-1\le x\le 1\\ 2022x+4046\ dla\ 1\le x\le 2\end{cases}$$

jest NIFS3 dla pewnych danych (obserwacji) odpowiadającym węzłom −2, −1, 1, 2?

Aby funkcja była NIFS3, muszą zachodzić:

1) ciągłość f w punktach -1, 1:

$$\lim_{x\to -1^-} f(x)=\lim_{x\to -1^-}[-2022x-2023]=2022-2023=-1$$
$$\lim_{x\to -1^+} f(x)=\lim_{x\to -1^+}[ax^3+bx^2+cx+d]=-a+b-c+d$$
$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}[ax^3+bx^2+cx+d]=a+b+c+d$$
$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}[2022x+4046]=2022+4046=6068$$

2) ciągłość f' w punktach -1, 1:

$$\lim_{x\to -1^-} f'(x)=\lim_{x\to -1^-}[-2022]=-2022$$
$$\lim_{x\to -1^+} f'(x)=\lim_{x\to -1^+}[3ax^2+2bx+c]=3a-2b+c$$
$$\lim_{x\to 1^-} f'(x)=\lim_{x\to 1^-}[3ax^2+2bx+c]=3a+2b+c$$
$$\lim_{x\to 1^+} f'(x)=\lim_{x\to 1^+}[2022]=2022$$

3) ciągłość f'' w punktach -1, 1:

$$\lim_{x\to -1^-} f''(x)=0$$
$$\lim_{x\to -1^+} f''(x)=\lim_{x\to -1^+}[6ax+2b]=-6a+2b$$
$$\lim_{x\to 1^-} f''(x)=\lim_{x\to 1^-}[6ax+2b]=6a+2b$$
$$\lim_{x\to 1^+} f''(x)=0$$

Zatem pozostaje rozwiązać następujący układ równań:

$$\begin{cases}-a+b-c+d=-1\\ a+b+c+d=6068\\ 3a-2b+c=-2022\\ 3a+2b+c=2022\\ -6a+2b=0\\ 6a+2b=0\end{cases}\to\begin{cases}-a+b-c+d=-1\\ a+b+c+d=6068\\ 3a-2b+c=-2022\\ 3a+2b+c=2022\\ a=b=0\end{cases}\to\begin{cases}-c+d=-1\\ c+d=6068\\ c=-2022\\ c=2022\\ a=b=0\end{cases}$$

Otrzymujemy sprzeczność, zatem nie istnieją takie parametry a,b,c,d dla których f jest NIFS3.