Zadanie 1. 1 punkt

Jak już wiadomo, język programowania PWO++ ma obszerną bibliotekę funkcji i procedur numerycznych. Wśród nich znajduje się procedura $Integral(f)$ znajdująca z dużą dokładnością wartość całki $\int_{-1}^{7} f(x)dx$, gdzie $f \in C[-1,7]$. W jaki sposób użyć procedury Integral do obliczenia całki $\int_a^b g(x)dx \quad (\mathrm{a} < \mathrm{b}; \mathrm{g} \in \mathrm{C}[\mathrm{a}, \mathrm{b}])$?

Wystarczy użyć całkowania przez podstawienie:

$$\int_a^b g(x)dx = \begin{cases} y = 8\dfrac{x-a}{b-a} - 1 \\ dy = \dfrac{8}{b-a}dx \end{cases} = \begin{cases} x = \dfrac{y+1}{8}(b-a) + a \\ dx = \dfrac{b-a}{8}dy \end{cases}$$

$$= \int_{-1}^{7} f\left(\frac{y+1}{8}(b-a)+a\right)\left(\frac{b-a}{8}\right)dy$$

Bo zauważmy, że $\begin{cases} y = 8\frac{x-a}{b-a} - 1 = 8\frac{b-a}{b-a} - 1 = 8 * 1 - 1 = 7 \; gdy \; x = b \\ y = 8\frac{x-a}{b-a} - 1 = 8\frac{a-a}{b-a} - 1 = -1 \; gdy \; x = a \end{cases}$

Zadanie 2. 1 punkt

Udowodnij, że kwadratura postaci

$$(1) \; Q_n(f) = \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$$

ma rząd ≥ n + 1 wtedy i tylko wtedy, gdy jest kwadraturą interpolacyjną.

Dowód =>

Załóżmy, że $Q_n(f)$ ma rząd ≥ n + 1. Pokażę, że jest ona interpolacyjna.

Rozważmy wielomian Lagrange'a w węzłach kwadratury.

Wiemy, że zachodzi:

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\lambda_i$$

gdzie:

$$\lambda_i(x) = \prod_{k=0, k\neq i}^{n} \frac{x - x_k}{x_i - x_k}, \lambda_i(x_k) = 0 \; oraz \; \lambda_i(x_i) = 1$$

Niech $f(x) = \lambda_i(x) \in \Pi_n$, wtedy:
$$\int_a^b \lambda_i(x)dx = Q_n(\lambda_i) = \sum_{k=0}^{n} A_k \lambda_i(x_k) = A_i \lambda_i(x) = A_i$$
Stąd otrzymujemy:
$$Q(f) = \int_a^b f(x) = \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k) = \int_a^b L_n(x)dx \blacksquare$$

Dowód $<=$
Załóżmy, że $Q_n(f)$ jest kwadraturą interpolacyjną. Pokażę, że jej rząd ≥ n + 1.

Wiemy, że kwadratura jest interpolacyjna, więc zachodzi:
$$\sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k) = \int_a^b L_n(x)$$
Weźmy dowolny wielomian W stopnia n. Z jednoznaczności interpolacji wiemy, że L_n interpolujący wielomian stopnia n w n+1 punktach musi być wielomianem W. Stąd otrzymujemy:
$$\int_a^b W(x) = \int_a^b L_n(x)$$
Z wykładu wiemy, że zależność między dowolnym wielomianem W, wielomianem interpolacyjnym oraz błędem kwadratury jest postaci:
$$\int_a^b W(x) = \int_a^b L_n(x) + R_n(x)$$
Stąd błąd kwadratury wynosi:
$$R_n(x) = \int_a^b W(x) - \int_a^b L_n(x) = 0$$
Czyli kwadratura interpolacyjna rzeczywiście jest rzędu co najmniej n+1.

Zadanie 3. 1 punkt
Udowodnij, że rząd kwadratury postaci (1) nie przekracza 2n + 2.

Zbudujemy wielomian $W \in \Pi_{2n+2}$ dla którego $\int_a^b f(x)dx \neq \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$.
Weźmy funkcję $f(x) = \prod_{k=0}^{n}(x - x_k)^2 \in \Pi_{2n+2}$, dla której $f(x) \geq 0$.
Stąd $\int_a^b f(x) > 0$ (bo $f(x) = 0$ tylko dla miejsc zerowych)
Jednocześnie $\sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k) = 0$ (bo są to miejsca zerowe wielomianu interp.)
Zatem nie zachodzi $\int_a^b f(x) = \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k) \blacksquare$

Zadanie 5. 1 punkt

Jak upraszcza się wzór interpolacyjny Lagrange'a dla węzłów równoodległych?

Wiemy, że dla węzłów równoodległych zachodzi:

$$(*)\ x_i = a + hi, i \in [0,n], h = \frac{b-a}{n}$$

Gdzie a,b to końce przedziałów, h to odległość między 2 węzłami.
Przypomnienie wzoru interpolacyjnego Lagrange'a:

$$(L)\ \sum_{i=0}^{n} y_i \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

Teraz podstawiamy (*) do wzoru (L):

$$\sum_{i=0}^{n} y_i \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{x - a - hj}{a + hi - (a + hj)} = \sum_{i=0}^{n} y_i \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{x - a - hj}{h(i-j)}$$

W tym wzorze nie musimy znać wartości x_i, co oszczędza nam obliczeń.

Zadanie 6. 1 punkt

Sprawdź, że współczynniki kwadratury Newtona-Cotesa

$$(2)\ Q_n^{NC}(f) = \sum_{k=0}^{n} A_k f(a + k * h_n)\ \left(h_n = \frac{b-a}{n}\right)$$

są takie, że $A_k = A_{n-k}\ (k = 0, 1, \ldots, n)$.

Z poprzedniego zadania wiemy, że dla metody N-C zachodzi:

$$A_k = \int_a^b \frac{x - a - hj}{h(i-j)}$$

Wprowadzając zmienną t, taką, że $x = a + th$ możemy zapisać:

$$L_i(x) = L_n(a + th) = \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{t - j}{i - j}$$

Stąd po zmianie zmiennej i granicy całkowania otrzymujemy:

$$(A)\ A_k = \int_a^b L_k(x)dx = h\int_0^n \prod_{j=0, j\neq k}^{n} \frac{t-j}{k-j} dt$$

Teraz pora pokazać, że $A_k = A_{n-k}$ dla postaci (A):
Niech $v = n - t$. Wtedy $dt = -dv$ oraz

$$A_k = -h\int_n^0 \prod_{j=0, j\neq k}^{n} \frac{n-v-j}{k-j} dv$$

$$A_k = h\int_0^n \prod_{j=0, j\neq k}^{n} \frac{(n-j)-v}{(n-j)-(n-i)} dv$$

Niech $v' = n - j$. Wtedy

$$A_k = h\int_0^n \prod_{v\prime=0, v\prime\neq(n-k)}^{n} \frac{v'-v}{v'-(n-i)} dv$$

Na koniec wyciągamy -1 przed ułamek i otrzymujemy:

$$A_k = h\int_0^n \prod_{v\prime=0, v\prime\neq(n-k)}^{n} \frac{v-v'}{(n-k)-v'} dv = A_{n-k} \blacksquare$$

Zadanie 7. 1 punkt

Niech A_k $(k = 0, 1, \dots, n)$ oznaczają współczynniki kwadratury Newtona-Cotesa (2). Udowodnij, że $\frac{A_k}{b-a}$ $(0 \leq k \leq n)$ są liczbami wymiernymi.

Z poprzedniego zadania wiemy, że zachodzi:

$$(A)\ A_k = h\int_0^n \prod_{j=0, j\neq k}^{n} \frac{t-j}{k-j} dt$$

Pokażę, że $\frac{A_k}{b-a}$ są liczbami wymiernymi.

$$\frac{A_k}{b-a} = \frac{h}{b-a}\int_0^n \prod_{j=0, j\neq k}^{n} \frac{t-j}{k-j} dt = \frac{1}{n}\int_0^n \prod_{j=0, j\neq k}^{n} \left(\frac{1}{k-j}(t-j)\right) dt$$

Wiemy, że $\frac{1}{n}, \frac{1}{k-j}$ są wymierne. Wystarczy zatem sprawdzić, czy całka $\int_0^n \prod_{j=0, j\neq k}^{n}(t-j)\, dt$ również jest wymierna.

$$\int_0^n \prod_{j=0, j\neq k}^{n} (t-j)\, dt = \int_0^n t(t-1)\dots(t-k-1)(t-k+1)\dots(t-n)\, dt =$$

$$= \int_0^n a_{n-1}t^{n-1} + a_{n-2}t^{n-2} + \cdots a_0\, dt =$$

$$= \int_0^n a_{n-1}t^{n-1} dt + \int_0^n a_{n-2}t^{n-2} dt + \cdots + \int_0^n a_0 dt =$$

$$= -a_{n-1}\frac{n^n}{n} - a_{n-2}\frac{n^{n-1}}{n-1} + \cdots - a_0\frac{n^1}{1} \in Q \blacksquare$$
