Zadanie 1.

Dla k ≥ 1 wykaż tożsamość absorbcyjną $\binom{n}{k} = \frac{n}{k} * \binom{n-1}{k-1}$.

Czy potrafisz udowodnić ją kombinatorycznie?

$$L = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k! * (n-k)!} = \frac{n}{k} * \frac{(n-1)!}{(k-1)! * (n-k)!} = \frac{n}{k} * \binom{n-1}{k-1} = P$$

Dowód kombinatoryczny: $\binom{n}{k} = \frac{n}{k} * \binom{n-1}{k-1}$

Po kilku trywialnych przekształceniach otrzymujemy $\binom{n}{k} * \binom{k}{1} = \binom{n}{1} * \binom{n-1}{k-1}$

Po lewej stronie wybieramy najpierw k-elementowy podzbiór (np. kandydatów na prezydenta) spośród n-elementowego zbioru (np. obywateli), a następnie z tego k-elementowego zbioru wybieramy 1 element (np. prezydenta).

Po prawej stronie wybieramy najpierw 1 element (prezydenta) spośród n-elementowego zbioru (obywateli), a następnie k-1 elementowy podzbiór (kandydatów, którzy nie zostali prezydentem) spośród n-1 elementowego zbioru (obywateli niebędących prezydentem).

Zadanie 2.

Podaj interpretację następującej tożsamości w terminach zbiorów:

$$\binom{n}{k}\binom{k}{m} = \binom{n}{m}\binom{n-m}{k-m}$$

(rysowanie tych zbiorów na tablicy znacznie ułatwi przedstawienie zadania)

Lewa strona:

Mamy n-elementowy zbiór N. Wybieramy jego k-elementowy podzbiór K.

W tym podzbiorze K wybieramy jego m-elementowy podzbiór M.

Prawa strona:

Mamy n-elementowy zbiór N. Wybieramy jego m-elementowy podzbiór M.

W zbiorze N wybieramy taki n-m elementowy podzbiór N\M, że $N \backslash M \cap M = \emptyset$.

W tym podzbiorze N\M wybieramy podzbiór k-m elementowy K\M.

W ten sposób otrzymujemy identyczny zbiór jak dla lewej strony.

Zadanie 3.

Wykaż prawdziwość tożsamości Cauchy'ego: $\binom{m+n}{r} = \sum_{i=0}^{r}\binom{m}{i}\binom{n}{r-i}$.

Czy potrafisz udowodnić ją kombinatorycznie?

Dowód kombinatoryczny:

Lewa strona oznacza, że mamy zbiór m+n elementowy M+N, z którego wybieramy r-elementowy podzbiór R.

Można to też interpretować w taki sposób, że mamy 2 rozłączne zbiory M (m-elementowy) i N (n-elementowy), i chcemy wybrać taki zbiór R, że każdy jego element będzie należał albo do M albo N (pamiętajmy, że żaden element nie może należeć do obu z nich).

Wariant 1. Wszystkie elementy R należą do N

Wtedy mamy $\binom{m}{0}\binom{n}{r} = \binom{n}{r}$ różnych podzbiorów R spełniających ten warunek.

Wariant 2. Jeden element R należy do M, pozostałe do N

Wtedy mamy $\binom{m}{1}\binom{n}{r-1}$ różnych podzbiorów R spełniających ten warunek.

Wariant 3. Dwa elementy R należą do M, pozostałe do N

Wtedy mamy $\binom{m}{2}\binom{n}{r-2}$ różnych podzbiorów R spełniających ten warunek. Itd…

Widzimy, że takich wariantów jest $r+1$, stąd ilość sposobów wybrania r-elementowego zbioru R będącego podzbiorem m+n elementowego zbioru M+N będzie sumą tych wariantów:

$$\binom{m+n}{r} = \binom{m}{0}\binom{n}{r} + \binom{m}{1}\binom{n}{r-1} + \cdots + \binom{m}{r}\binom{n}{0} = \sum_{i=0}^{r}\binom{m}{i}\binom{n}{r-i} \blacksquare$$

Zadanie 4.

Niech x ∈ R. Udowodnij, że $\lfloor -x \rfloor = -\lceil x \rceil$.

$$\lfloor -x \rfloor + \lceil x \rceil = 0;\ \lfloor -x \rfloor + \lfloor x \rfloor + 1 = 0\ ???$$

Zadanie 5.

Zadanie 6.

Zdefiniuj funkcję f : R → Z, która spełnia dla dowolnego $x \in R$: $|f(x) - x| \leq \frac{1}{2}$

W definicji funkcji f można używać jedynie podłogi, sufitu, dodawania, odejmowania i stałych.

$$f(x) = \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor$$

Zadanie 7.
Na ile sposobów 3n dzieci może uformować trzy równoliczne koła graniaste? (Dwie formacje są równe jeśli istnieje dziecko, które kogo innego trzyma lewą ręką w obu układach lub kogo innego prawą ręką.)

$$\binom{3n}{n} * \binom{2n}{n} * \binom{n}{n} * \frac{\left((n-1)!\right)^3}{3!}$$

Zadanie 8.
Niech n będzie liczbą naturalną. Na ile sposobów można pokolorować pola tablicy n × n na dwa kolory (każde pole jednym kolorem) tak, by liczba pól jednego koloru nie przewyższała liczby pól drugiego koloru o więcej niż 1?

Ilość pól może być zarówno liczbą parzystą (np. dla n = 2 są 4 pola) jak i nieparzystą (np. dla n = 3 jest 9 pól).
Warunek zadania oznacza, że jeśli ilość pól:
a) jest parzysta, to oba kolory muszą zajmować tyle samo pól,
b) jest nieparzysta, to mamy 2 przypadki:
(przykład: n = 3, 9 pól, (1) 4 pola 1 koloru, 5 pól 2 koloru, (2) na odwrót).

n	Ilość sposobów
1	$2 * \binom{1}{1} = 2$
2	$\binom{4}{2} = 6$
3	$2 * \binom{9}{5} = 2 * 126 = 252$
4	$\binom{16}{8} = 12\,870$
parzyste	$\binom{n^2}{\left\lceil \frac{n^2}{2} \right\rceil}$
nieparzyste	$2 * \binom{n^2}{\left\lceil \frac{n^2}{2} \right\rceil}$

Zadanie 9.

Niech n będzie liczbą naturalną. Udowodnij indukcyjnie, że liczba podzbiorów zbioru n-elementowego wynosi 2^n.

Podstawa: $n = 0$

Jedyny zbiór 0-elementowy to zbiór pusty, którego jedynym podzbiorem jest on sam. Stąd liczba podzbiorów zbioru 0-elementowego wynosi $2^n = 2^0 = 1$

Krok:

Załóżmy, że dla dowolnego n naturalnego liczba podzbiorów zbioru n-elementowego wynosi 2^n.

Udowodnię, że liczba podzbiorów zbioru (n+1)-elementowego wynosi 2^{n+1}.

Wiemy z wykładu, że liczba k-elementowych podzbiorów n-elementowego zbioru wynosi $\binom{n}{k}$.

Stąd wynika, że liczba podzbiorów n-elementowego zbioru wynosi

$$2^n = 1 + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 1 + \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i}$$

Analogicznie dla zbioru (n+1)-elementowego liczba jego podzbiorów wynosi

$$1 + \binom{n+1}{1} + \binom{n+1}{2} + \cdots + \binom{n+1}{n} + \binom{n+1}{n+1} = 1 + \sum_{i=1}^{n+1} \binom{n+1}{i}$$

$\text{Zatem chcemy udowodnić, że dodanie nowego elementu x do dowolnego zbioru n} - \text{elementowego zwiększa jego ilość podzbiorów o } 2^n.$

Oznacza to, że w dotychczasowym zbiorze powstanie 1 nowy podzbiór 1-elementowy {x}, $\binom{n}{1} = n$ nowych podzbiorów 2-elementowych, $\binom{n}{2}$ nowych podzbiorów 3-elementowych itd., ogólnie powstanie $1 + \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} = 2^n$ nowych podzbiorów.

$$\begin{cases} 1 + \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} = 2^n \\ 1 + \sum_{i=1}^{n+1} \binom{n+1}{i} = 2^{n+1} \end{cases} \Rightarrow \sum_{i=1}^{n+1} \binom{n+1}{i} = 1 + 2 * \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i}$$

Niedokończone, ale może pomoże wpaść na rozwiązanie.