Zadanie 1

Włącz komputer!, 1 punkt

Niech dana będzie funkcja $f(x) = 4044 * \frac{\sqrt{x^{13}+1}-1}{x^{13}}$.

Napisz program, który działając w trybie podwójnej precyzji (double) obliczy wartość $f(0.001)$. Czy wynik jest wiarygodny? Odpowiedź uzasadnij.

Oczekujemy wyniku bliskiego $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} 4044 * \frac{\sqrt{x^{13}+1}-1}{x^{13}} =$

$$= 4044 * \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^{13}+1}-1}{x^{13}} = 4044 * \lim_{x\to 0} \frac{x^{13}+1-1}{x^{13} * \left(\sqrt{x^{13}+1}+1\right)} =$$

$$= 4044 * \lim_{x\to 0} \frac{1}{\left(\sqrt{x^{13}+1}+1\right)} = 4044 * \frac{1}{\left(\sqrt{0+1}+1\right)} = 2022$$

W wyniku błędnego zaokrąglenia x do 0 otrzymamy błędny wynik równy 0.

Zadanie 2

Włącz komputer!, 1 punkt

Niech dana będzie funkcja $f(x) := \ 12132\frac{x - sin\, x}{x^3}$.

Przy pomocy komputera oblicz w arytmetyce pojedynczej (single) i podwójnej precyzji (double) wartości $f(10^{-i})$ dla $i = 11, 12, \ldots, 20$.

Czy otrzymane wyniki są poprawne? Odpowiedź uzasadnij.

Oczekujemy wyniku bliskiego $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} 12132\frac{x - sin\, x}{x^3} =$

$$= 12132 * \lim_{x\to 0} \frac{x\ -\ sin\, x}{x^3} = 12132 * \lim_{x\to 0} \frac{1\ -\ cos\, x}{3x^2} =$$

$$= 12132 * \lim_{x\to 0} \frac{sin\, x}{6x} = 12132 * \lim_{x\to 0} \frac{cos\, x}{6} = \frac{1}{6}$$

(Korzystamy z reguły de l'Hospitala)

W wyniku błędnego zaokrąglenia x do 0 otrzymamy błędny wynik – 0 lub NaN.

Zadanie 3

Włącz komputer!, 1 punkt

Liczby rzeczywiste $y_0, y_1, \ldots$ są zdefiniowane rekurencyjnie w następujący sposób: $y_0 = 1, y_1 = -\frac{1}{7}, y_{n+2} = \frac{146}{7} y_{n+1} + 3y_n \ (n = 0, 1, \ldots)$.

Użyj komputera i podanej zależności do obliczenia (w pojedynczej lub podwójnej precyzji) kolejno wartości liczb $y_2, y_3, \ldots, y_{50}$.

Skomentuj otrzymane wyniki. Czy są one wiarygodne? Odpowiedź uzasadnij.

Najpierw spróbujmy znaleźć wzór ogólny ciągu, obliczając jego kilka pierwszych elementów:

$$y_0 = 1, y_1 = -\frac{1}{7}, y_2 = \frac{1}{49}, y_3 = -\frac{1}{343}, itd.$$

Widzimy, że wzór ogólny jest postaci $y_n = \frac{(-1)^n}{7^n}$

Wartości kolejnych elementów będą zbliżać się do zera, nigdy jednak go nie osiągając. Zatem jeśli którykolwiek element ciągu będzie miał wynik z zakresu $y_n \in (-\infty, -1 > \cup \{0\} \cup (1, +\infty)$ to będzie to niepoprawny wynik.

Zadanie 4

Włącz komputer!, 2 punkt

Sprawdź, że całki $I_n := \int_0^1 \frac{x^n}{x+2022} dx \ (n = 0, 1, \ldots)$ spełniają następującą zależność rekurencyjną: (1) $I_n = \frac{1}{n} - 2022 * I_{n-1} \ \left(n = 1, 2, \ldots; I_0 = ln \frac{2023}{2022}\right)$.

Następnie wykorzystaj związek (1) do wyznaczenia wartości całek $I_1, I_2, \ldots, I_{20}$ (w takiej właśnie kolejności) wykonując obliczenia w arytmetyce pojedynczej lub podwójnej precyzji używając pętli for.

Rozważ osobno podciągi $I_1, I_3, \ldots, I_{19}$ oraz $I_2, I_4, \ldots, I_{20}$.

Czy w obu wypadkach wyniki są wiarygodne? Odpowiedź uzasadnij.

Podstawmy podaną całkę do związku (1):

$$\int_0^1 \frac{x^n}{x + 2022} dx + 2022 * \int_0^1 \frac{x^{n-1}}{x + 2022} dx = \frac{1}{n} \left(n = 1, 2, \ldots; I_0 = ln \frac{2023}{2022}\right)$$

Pamiętając, że suma całek jest równa całce sumy otrzymujemy:

$$\int_0^1 \frac{x^n + 2022 * x^{n-1}}{x + 2022} dx = \frac{1}{n}$$

$$\int_0^1 \frac{x^{n-1} * (x + 2022)}{x + 2022} dx = \frac{1}{n}$$

$$\int_0^1 x^{n-1} \, dx = \frac{1}{n}$$

$$\frac{x^n}{n} \Big|_0^1 = \frac{1}{n}$$

$$\frac{1^n}{n} - \frac{0^n}{n} = \frac{1}{n} \ \blacksquare$$

Zadanie 5.

Włącz komputer!, 1 punkt

Wykorzystując własności szeregów naprzemiennych, ustal ilu teoretycznie wyrazów szeregu $\pi = 4\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}$ należy użyć do obliczenia wartości π z błędem mniejszym niż 10^{-6}. Następnie wykonaj odpowiedni eksperyment obliczeniowy przy pomocy komputera w arytmetyce pojedynczej lub podwójnej precyzji. Co z niego wynika?

$$\pi = 4\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1} = 4\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k * \frac{1}{2k+1} = 4\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k * a_n$$

Wiemy, że równanie to spełnia następujące zależności:

1) $a_n > 0, bo\ \forall k \in N\left(\frac{1}{2k+1} > 0\right)$
2) $a_{n+1} < a_n, bo\ \forall n \in N\left(a_{n+1} = \frac{1}{2(n+1)+1} = \frac{1}{2n+3} < \frac{1}{2n+1}\right)$
3) $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n+1} = 0$

Zatem z twierdzenia Leibnitza o szeregu naprzemiennym:

$$|S - S_n| \leq a_{n+1}$$

Nasz akceptowalny błąd to $\varepsilon = \frac{10^{-6}}{4}$.

Stąd

$$|S - S_n| \leq a_{n+1} < \varepsilon = \frac{10^{-6}}{4}$$
$$4a_{n+1} < 10^{-6}$$
$$4 * \frac{1}{2n+3} < 10^{-6}$$
$$4 * 10^6 < 2n + 3$$
$$n > \frac{4 * 10^6 - 3}{2}$$
$$n > \frac{3\,999\,997}{2}$$

Zatem wystarczy zsumować 2 000 000 wyrazów ciągu.