Zadanie 1! 1 punkt

Wykaż, że dla dowolnej funkcji f ciągłej w przedziale [a, b] ciąg złożonych wzorów trapezów $\{T_n(f)\}$ jest zbieżny do wartości całki $\int_a^b f(x)dx$ gdy $n \to \infty$

Wiemy z wykładu, że zachodzi:

$$\int_a^b f(x)dx = T_n(f) + R_n^T(f)$$

$$gdzie\ R_n^T = \frac{-1}{12n^2}(b-a)^3 f''(\theta)$$

Zatem wystarczy pokazać, że reszta w metodzie trapezów dąży do zera:

$$\lim_{n\to\infty} R_n^T = \lim_{n\to\infty} \frac{-1}{12n^2}(b-a)^3 f''(\theta) = \left[\frac{-1}{\infty}(b-a)^3 f''(\theta)\right] = 0 \blacksquare$$

Zadanie 2. 1 punkt

O funkcji ciągłej f wiadomo, że $max_{x\in R}\left|f^{(2)}(x)\right| < 2023$.

Załóżmy, że dla dowolnego x ∈ R potrafimy z dużą dokładnością obliczać f(x).

Opracuj algorytm wyznaczania przybliżonej wartości całki $\int_a^b f(x)dx$ z błędem bezwzględnym nie przekraczającym ε, gdzie a, b ∈ R (a < b) oraz ε > 0 są dane.

Całkę będę przybliżał metodą trapezów.

Skoro $max_{x\in R}\left|f^{(2)}(x)\right| < 2023$, to możemy oszacować ten błąd:

$$R_n^T = \frac{-1}{12n^2}(b-a)^3 f''(\theta) < \frac{-2023}{12n^2}(b-a)^3$$

Chcemy, aby błąd był mniejszy od danego epsilona, czyli:

$$\left|\frac{-2023}{12n^2}(b-a)^3\right| < \varepsilon$$

$$\frac{2023}{12}(b-a)^3 < n^2\varepsilon$$

$$n > \sqrt{\frac{2023}{12\varepsilon}(b-a)^3}$$

Algorytm będzie wyglądał następująco:

1. Niech $n = \left\lceil\sqrt{\frac{2023}{12\varepsilon}(b-a)^3}\right\rceil$
2. Niech $h = \frac{b-a}{n}$
3. Oblicz $\sum_{i=0}^{n}{}'' f(a+ih)$ i zwróć to jako wynik

Zadanie 3. 1 punkt

Jak należy dobrać n, aby stosując złożony wzór Simpsona S_n obliczyć przybliżoną wartość całki $\int_{-2\pi}^{\pi/3} cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)dx$ z błędem względnym $\leq 10^{-8}$?

Najpierw obliczmy dokładną wartość całki oznaczonej:

$$\int_{-2\pi}^{\pi/3} cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)dx = \begin{cases} t = 2x-\frac{\pi}{6} \\ dt = 2dx \end{cases} = \frac{1}{2}\int_{-\frac{25}{6}\pi}^{\pi/2} cos(t)dt = \frac{1}{2}[\sin(t)]_{-\frac{25}{6}\pi}^{\pi/2} =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)-\sin\left(-\frac{25}{6}\pi\right)\right] = \frac{1}{2}\left[1+\frac{1}{2}\right] = \frac{3}{4}$$

Wiemy, że wzór na błąd złożonego wzoru Simpsona to:

$$R_n^s = (b-a)\frac{h^4}{180}f^{(4)}(\theta)$$

Chcemy, aby błąd względny nie przekraczał 10^{-8}, czyli:

$$\frac{|R_n^s|}{\frac{3}{4}} \leq 10^{-8}$$

Podstawiając $h=\frac{b-a}{n}$ otrzymujemy:

$$\frac{|R_n^s|}{\frac{3}{4}} = \left|(b-a)\frac{\left(\frac{b-a}{n}\right)^4}{135}f^{(4)}(\theta)\right| = \left|\frac{(b-a)^5}{135n^4}f^{(4)}(\theta)\right|$$

Teraz wyliczymy maksymalną możliwą wartość $f^{(4)}(\theta)$, czyli $\max_{x\in[-2\pi,\pi/3]}\left[f^{(4)}(x)\right]$ (oszacowanie błędu z góry):

$$f(x) = cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$f^{(1)}(x) = -\sqrt{3}sin(2x)+\cos(2x)$$

$$f^{(2)}(x) = -2sin(2x)-2\sqrt{3}\cos(2x)$$

$$f^{(3)}(x) = 4\sqrt{3}sin(2x)-4\cos(2x)$$

$$f^{(4)}(x) = 8sin(2x)+8\sqrt{3}\cos(2x) = 16\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$$

Stąd $\max_{x\in[-2\pi,\pi/3]}\left[f^{(4)}(x)\right] = 16$

Zatem obliczamy oszacowanie z góry błędu:

$$|R_n^s| = \left|\frac{(b-a)^5}{135n^4}f^{(4)}(\theta)\right| = \left|\frac{16807\pi^5}{243*135n^4}*16\right| = \left|\frac{268912\pi^5}{32805n^4}\right|$$

$$|R_n^s| = \left|\frac{268912\pi^5}{32805n^4}\right| \leq 10^{-8}$$

Stąd otrzymujemy:

$$n \geq \frac{280\pi\sqrt[4]{875\pi}}{9}$$
$$n \geq 708$$

Zadanie 5. Włącz komputer! 1 punkt

Stosując metodę Romberga znajdź przybliżenia $T_{m,k}$ $(0 \leq m \leq 20; 0 \leq k \leq 20 - m)$ następujących całek:

a) $\int_{-3}^{2}(2023x^{10} - 1977x^5 - 1939)dx$

b) $\int_{-5}^{5}\frac{dx}{1+x^2}$

c) $\int_{-2\pi}^{\pi/3}\left(\cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)\right)dx$

Przykład	Wynik dokładny	Mój wynik przybliżony
A	3,3165 * 10^7	3,31644 * 10^7 (świetnie)
B	-0,394791	2,7468 (bardzo źle)
c	0,75	0,749994 (dobrze)

Zadanie 6. 1 punkt

Rozważmy zadanie obliczania przybliżonej wartości całki $I = \int_{-3}^{8} f(x)dx$ (f – funkcja ciągła) metodą Romberga. W ilu, i w których, punktach przedziału [−3, 8] wystarczy wyznaczyć wartość funkcji f, aby obliczyć przybliżenie $T_{15,0}$ całki I?

Przypomnienie wzoru na elementy tablicy Romberga:

$$(*)\begin{cases} T_{0,n} = T_{2^n} \\ T_{m,n} = \dfrac{4^m T_{m-1,n+1} - T_{m-1,n}}{4^m - 1} \end{cases}$$

Zatem wystarczy obliczyć wyrazy pierwszej kolumny $T_{0,i}$ $(i = 0,1, \dots, 15)$, resztę wyznaczymy rekurencyjnie (nie potrzebujemy do tego znajomości punktów). Aby wyznaczyć $T_{15,0}$, należy znać $T_{2^{15}}$, czyli musimy podzielić przedział na 2^{15} równoodległych punktów. Każdy z nich będzie się wyrażał wzorem:

$$x_i = a + ih = a + i\frac{b-a}{n} = -3 + 11\frac{i}{2^{15}} \, (i = 0,1, \dots, 2^{15})$$

Zadanie 7. 1 punkt

Wykaż, że ciąg elementów dowolnej kolumny tablicy Romberga, utworzonej dla funkcji f ∈ C[a, b], jest zbieżny do całki $I = \int_a^b f(x)dx$.

Dowód indukcyjny względem m

Podstawa: m = 0

Wyrazy pierwszej kolumny $(T_{0,n})$ są zbieżne do całki, bo są równe wyrazom metody trapezów, której zbieżność udowodniliśmy w zadaniu 1.

Krok: załóżmy, że $T_{m,n}$ jest zbieżne do całki (czyli $\lim\limits_{n\to\infty} T_{m,n} = I$).

Pokażę, że $T_{m+1,n}$ też jest zbieżne do I.

$$\lim_{n\to\infty} T_{m+1,n} = \lim_{n\to\infty} \frac{4^{m+1}T_{m,n+1} - T_{m,n}}{4^{m+1} - 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{4^{m+1}I - I}{4^{m+1} - 1} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{I(4^{m+1} - 1)}{4^{m+1} - 1} = I \blacksquare$$