Zadanie 1

Podaj postać funkcji tworzącej dla liczby podziałów liczby naturalnej *n* (czyli rozkładów liczby *n* na sumę składników naturalnych, gdy rozkładów różniących się kolejnością nie uważamy za różne):

(a) na dowolne składniki,

(b) na różne składniki nieparzyste,

(c) na składniki mniejsze od *m*,

(d) na różne potęgi liczby 2.

a) z wykładu: $r_n = \prod_{i=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1-x^i}\right)$

b) z wykładu różnych rozkładów jest $rr_n = \prod_{i=1}^{\infty}(1 + x^i)$

Ponieważ interesują nas tylko składniki nieparzyste, to wynik należy zmodyfikować zmieniając potęgę przy x: $rr_n = \prod_{i=1}^{\infty}(1 + x^{2i-1})$

c) wystarczy zmodyfikować wzór z a): $r_n = \prod_{i=1}^{m-1}\left(\frac{1}{1-x^i}\right)$

d) wystarczy zmodyfikować wzór z b): $rr_n = \prod_{i=1}^{\infty}\left(1 + x^{2^i}\right)$

Zadanie 3.

Niech A(x) będzie funkcją tworzącą ciągu an.

Podaj postać funkcji tworzącej dla ciągu $s_n = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n$.

Wskazówka: Trzeba użyć funkcji tworzącej $\frac{1}{1-x}$.

Wiemy, że zachodzi zależność (*):

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n * \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right) x^n$$

Dodatkowo, $s_n = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{i=0}^{n} a_i$

Stąd funkcją tworzącą będzie:

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{n} a_i\right) x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{n}(a_i x^i) x^{n-i}\right) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(a_n x^n) * \sum_{n=0}^{\infty}(1 * x^n) = A(x) * \frac{1}{1-x} = \frac{A(x)}{1-x}$$

Zadanie 5.

Oblicz funkcje tworzące ciągów:

(a) $a_n = n$ dla parzystych n i $a_n = \frac{1}{n}$ dla nieparzystych n

(b) $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} (H_0 = 0)$.

(a) $a_n = n$ dla parzystych n i $a_n = \frac{1}{n}$ dla nieparzystych n

$$\langle a_n \rangle = \langle 0,1,2,\frac{1}{3},4,\frac{1}{5},6,\frac{1}{7},8 \rangle$$

$$\langle b_n \rangle = \langle 0,1,0,\frac{1}{3},0,\frac{1}{5},0,\frac{1}{7},0 \rangle = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^{2i+1}}{2i+1}$$

$$\langle c_n \rangle = \langle 0,0,2,0,4,0,6,0,8 \rangle = \sum_{i=0}^{\infty} 2ix^{2i}$$

$$\langle a_n \rangle = \langle b_n \rangle + \langle c_n \rangle$$

$$\langle a_n \rangle = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^{2i+1}}{2i+1} + \sum_{i=0}^{\infty} 2ix^{2i} = \int \sum_{i=0}^{\infty} x^{2i} + x \sum_{i=0}^{\infty} 2ix^{2i-1} =$$

$$= \int \frac{1}{(1-x)^2} + x \left(\sum_{i=0}^{\infty} x^{2i} \right)' = \frac{1}{1-x} + x \left(\frac{1}{(1-x)^2} \right)' =$$

$$= \frac{1}{1-x} + \frac{2x}{(1-x)^3} = \frac{1+x^2}{(1-x)^3}$$

(b) $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} (H_0 = 0)$.

$$H_n = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x^i}{i} = \int \sum_{i=1}^{\infty} x^{i-1} = \int \sum_{i=0}^{\infty} x^i = \int \frac{1}{1-x} = -\ln(1-x)$$

Zadanie 7.

Na ile sposobów można wybrać zbiór k-elementowy ze zbioru {1, 2, . . . , n} tak, by różnica dowolnych dwóch wybranych liczb wynosiła przynajmniej r?

Wprowadźmy oznaczenia:
A – zbiór liczb 1 do n,
F – zbiór liczb określonych przez f, równoliczny z A,
K – k-elementowy podzbiór A $(f(K_i) = 1 \; dla \; każdego \; i)$,
Niech będzie funkcja f określona wzorem:

$$f(x) = \begin{cases} 0 \; jeśli \; x \in A \backslash K \\ 1 \; jeśli \; x \in K \end{cases}$$

Ilość zer między każdą z k-1 par należących do K musi wynosić przynajmniej r. Zatem potrzebujemy minimum r(k-1) zer, aby zadanie było rozwiązywalne. Weźmy n – r(k-1) pozostałych liczb i wybierzmy spośród nich k jedynek. Można to uczynić na $\binom{n-r(k-1)}{k}$ sposobów. Następnie weźmy te r(k-1) zer pozostawione dotychczas na boku i włóżmy je po r sztuk do k-1 przestrzeni między jedynkami. Zawsze takie ułożenie będzie unikalne, stąd rozwiązaniem jest

$$\binom{n - r(k-1)}{k}$$