Zadanie 1 (niedeklarowalne)
Stosując metodę anihilatorów rozwiąż następujące zależności rekurencyjne
(a) $t_n = t_{n-1} + 3^n \; dla \; n > 1 \; i \; t_1 = 3.$
(b) $h_n = h_{n-1} + (-1)^{n+1} * n \; dla \; n > 1 \; i \; h_1 = 1.$

(a) $t_n = t_{n-1} + 3n \; dla \; n > 1 \; i \; t_1 = 3.$

$$< t_n >=< 3, 12,39,120,363, \dots >$$
$$(E-3) < t_n >=< 12,39,120,363, \dots > -3 *< 3,12,39,120, \dots >=$$
$$< 3,3,3,3, \dots >$$
$$(E-3)(E-1) < t_n >= (E-1) < 3,3,3,3, \dots >=< 0 >$$

Zatem anihilatorem jest $(E-3)(E-1)$, który anihiluje ciągi postaci:

$$< \alpha 3^n + \beta 1^n >$$

Stąd otrzymujemy układ równań:

$$\begin{cases} t_1 = 3 = 3\alpha + \beta \\ t_2 = 12 = 9\alpha + \beta \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 6\alpha = 9 \\ \beta = 3 - 3\alpha \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \alpha = \dfrac{3}{2} \\ \beta = -\dfrac{3}{2} \end{cases}$$

Zatem ciąg jest postaci

$$< \frac{3}{2} 3^n - \frac{3}{2} 1^n >=< \frac{3^{n+1} - 3}{2} >=< \frac{3}{2}(3^n - 1) >$$

(b) $h_n = h_{n-1} + (-1)^{n+1} * n \; dla \; n > 1 \; i \; h_1 = 1.$

$$< h_n >=< 1, -1,2, -2,3, -3, \dots >$$
$$E < h_n >=< -1,2, -2,3, -3, \dots >$$
$$E^2 < h_n >=< 2, -2,3, -3, \dots >$$
$$(E^2 - 1) < h_n >=< 1, -1,1, -1, \dots >$$
$$E(E^2 - 1) < h_n >=< -1,1, -1, \dots >$$
$$[E(E^2 - 1) + (E^2 - 1)] < h_n >=< 0 >$$

$$E - 1 =< -2,3, -4,5, -6, \dots >$$
$$E + 1 =< 0,1,0,1,0, \dots >$$

Zatem anihilatorem jest $(E+1)^2(E-1)???$, który anihiluje ciągi postaci:

$$< -(\alpha n + \beta) + \gamma 1^n >???$$

Stąd otrzymujemy układ równań: ???
Zatem ciąg jest postaci: ???

Zadanie 2.

Rozwiąż następujące zależności rekurencyjne:

a) $a_{n+1} = \left|\sqrt{a_n{}^2 + a_{n-1}{}^2}\right|, a_0 = a_1 = 1$

b) $b_{n+1} = \left|\sqrt{b_n{}^2 + 3}\right|, b_0 = 8$

c) $c_{n+1} = (n+1)c_n + (n^2+n)c_{n-1}\ dla\ c_0 = 0, c_1 = 1$

a) $a_{n+1} = \left|\sqrt{a_n{}^2 + a_{n-1}{}^2}\right|, a_0 = a_1 = 1$

Stąd: $(a_{n+1})^2 = \left|\sqrt{a_n{}^2 + a_{n-1}{}^2}\right|^2$

Następnie: $(a_{n+1})^2 = a_n{}^2 + a_{n-1}{}^2$

Zatem: $(a_{n+1})^2 = a_n{}^2 + a_{n-1}{}^2$

$$a_{n+1} = \left|\sqrt{a_n{}^2 + a_{n-1}{}^2}\right| = \left|\sqrt{2a_{n-1}{}^2 + a_{n-2}{}^2}\right| = \left|\sqrt{3a_{n-2}{}^2 + 2a_{n-3}{}^2}\right| =$$
$$= \left|\sqrt{3(a_{n-3}{}^2 + a_{n-4}{}^2) + 2a_{n-3}{}^2}\right| = \left|\sqrt{5a_{n-3}{}^2 + 3a_{n-4}{}^2}\right| =$$
$$= \left|\sqrt{5(a_{n-4}{}^2 + a_{n-5}{}^2) + 3a_{n-4}{}^2}\right| = \left|\sqrt{8a_{n-4}{}^2 + 5a_{n-5}{}^2}\right| = \cdots =$$
$$= \left|\sqrt{F_n{}^2 + F_{n-1}{}^2}\right| = \sqrt{F_{n+1}}$$

b) $b_{n+1} = \left|\sqrt{b_n{}^2 + 3}\right|, b_0 = 8$

$$b_{n+1} = \left|\sqrt{b_n{}^2 + 3}\right| = \left|\sqrt{\left(\left|\sqrt{b_{n-1}{}^2 + 3}\right|\right)^2 + 3}\right| = \left|\sqrt{b_{n-1}{}^2 + 3 + 3}\right| =$$
$$= \left|\sqrt{\left(\left|\sqrt{b_{n-2}{}^2 + 3}\right|\right)^2 + 3 + 3}\right| = \left|\sqrt{b_{n-2}{}^2 + 3 + 3 + 3}\right| = \cdots$$
$$= \left|\sqrt{b_0{}^2 + 3n}\right| = \left|\sqrt{64 + 3n}\right|$$

c) $c_{n+1} = (n+1)c_n + (n^2+n)c_{n-1}\ dla\ c_0 = 0, c_1 = 1$

$$c_2 = (1+1)c_1 + (1^2+1)c_{1-1} = 2$$
$$c_3 = (2+1)c_2 + (2^2+2)c_{2-1} = 3*2 + 6*1 = 12$$
$$c_4 = (3+1)c_3 + (3^2+3)c_{3-1} = 4*12 + 12*2 = 72$$
$$c_5 = (4+1)c_4 + (4^2+4)c_{4-1} = 5*72 + 20*12 = 600$$
$$c_6 = (5+1)c_5 + (5^2+5)c_{5-1} = 6*600 + 30*72 = 5760$$

$$c_0 = 0 = 0! * 0$$
$$c_1 = 1 = 1! * 1$$
$$c_2 = 2 = 2! * 1$$
$$c_3 = 12 = 3! * 2$$
$$c_4 = 72 = 4! * 3$$
$$c_5 = 600 = 5! * 5$$
$$c_6 = 5760 = 6! * 8$$

Zatem wzorem prawdopodobnie jest $c_n = n! * F_n$

Dowód indukcyjny wzoru:

Podstawa: n = 0, n = 1 trywialne

Krok: Załóżmy, że zachodzi $c_n = n! * F_n \ oraz \ c_{n-1} = (n-1)! * F_{n-1}$.

Pokażę, że zachodzi też $c_{n+1} = (n+1)! * F_{n+1}$

$$c_{n+1} = (n+1)! * F_{n+1} = (n+1)! * (F_n + F_{n-1}) = n! * (n+1) * (F_n + F_{n-1})$$
$$= n! * (n+1) * F_n + n! * (n+1) * F_{n-1} =$$
$$= (n+1) * c_n + (n-1)! * n * (n+1) * F_{n-1} =$$
$$= (n+1) * c_n + n * (n+1) * c_{n-1} =$$
$$= (n+1)c_n + (n^2 + n)c_{n-1} \blacksquare$$

Zadanie 3. (Niedeklarowalne)

Rozwiąż zależności rekurencyjne:

(a) $c_0 = 1, c_n = c_0 + c_1 + \dots, c_{n-1}$

(b) $d_0 = 1, d_1 = 2, d_n = \frac{{d_{n-1}}^2}{d_{n-2}}$.

(a) $c_0 = 1, c_n = c_0 + c_1 + \dots, c_{n-1}$

Pierwszych kilka wartości:

$$c_0 = 1, c_1 = 1, c_2 = 2, c_3 = 4, c_4 = 8$$

Stąd wzorem jest $c_n = 2^{n-1} \ dla \ n \geq 1$, dowód indukcyjny:

Podstawa: n = 1

$$c_1 = 2^{n-1} = 2^{1-1} = 2^0 = 1$$

Krok: załóżmy, że dla n zachodzi $c_n = 2^{n-1} \ dla \ n \geq 1$.

Pokażę, że dla n+1 zachodzi $c_{n+1} = 2^n \ dla \ n \geq 1$

$$c_{n+1} = c_0 + c_1 + \dots + c_n = 1 + 1 + 2 + 4 + \dots + 2^{n-2} + 2^{n-1} =$$
$$= 2 + 2 + 4 + \dots + 2^{n-2} + 2^{n-1} == 4 + 4 + \dots + 2^{n-2} + 2^{n-1} =$$
$$= 8 + \dots + 2^{n-2} + 2^{n-1} = \dots = 2^{n-2} + 2^{n-2} + 2^{n-1} =$$
$$= 2^{n-1} + 2^{n-1} = 2^n \blacksquare$$

(b) $d_0 = 1, d_1 = 2, d_n = \frac{{d_{n-1}}^2}{d_{n-2}}$

Pierwszych kilka wartości:

$$d_0 = 1, d_1 = 2, d_2 = 4, d_3 = 8, d_4 = 16$$

Stąd wzorem jest $c_n = 2^n\ dla\ n \geq 0$, dowód indukcyjny:

Podstawa: n = 0 trywialnie

Krok: załóżmy, że dla n zachodzi $d_n = 2^n$.

Pokażę, że dla n+1 zachodzi $d_{n+1} = 2^{n+1}$.

$$d_{n+1} = \frac{{d_n}^2}{d_{n-1}} = \frac{(2^n)^2}{2^{n-1}} = \frac{2^{2n}}{2^{n-1}} = 2^{2n-(n-1)} = 2^{n+1} \blacksquare$$

Zadanie 4.

Wykaż, że iloczyn dowolnych kolejnych k liczb nat. jest podzielny przez k!

Teza: $\frac{n*(n-1)*(n-2)*(n-3)*\ldots*(n-k+1)}{k!} \in N\ dla\ dow. n \in N$

$$\frac{n*(n-1)*(n-2)*(n-3)*\ldots*(n-k+1)}{k!} * \frac{(n-k)!}{(n-k)!} = \frac{n!}{k!*(n-k)!} =$$

$$= \binom{n}{k} \in N \blacksquare$$

Zadanie 5. brak

Zadanie 6.

Rozwiąż zależność rekurencyjną ${a_n}^2 = 2{a_{n-1}}^2 + 1$ z warunkiem początkowym $a_0 = 2$ i założeniem, że $a_n > 0$ dla każdego naturalnego n.

Niech $b_n = {a_n}^2$, wtedy $b_0 = 4$ oraz zachodzi ${b_n}^2 = 2b_{n-1} + 1$, zatem:

$$\begin{aligned} {a_n}^2 &= 2b_{n-1} + 1 = 2(2b_{n-2} + 1) + 1 = 4b_{n-2} + 3 = 4(2b_{n-3} + 1) + 3 \\ &= 8b_{n-3} + 7 = 8(2b_{n-4} + 1) + 7 = 16b_{n-4} + 15 = \cdots = \\ &= 2^n b_0 + 2^n - 1 = 5 * 2^n - 1 \end{aligned}$$

Wracając do a_n otrzymujemy: $a_n = \sqrt{5 * 2^n - 1}$

Zadanie 7.

Ile jest wyrazów złożonych z n liter należących do 25-literowego alfabetu łacińskiego, zawierających parzystą liczbę liter a?

Istnieje tylko jeden wyraz zawierający 0 liter, który zawiera parzystą liczbę powtórzeń a (0), zatem $w_0 = 1$.

Wyraz zawierający 1 literę musi zawierać 0 powtórzeń a, aby była to parzysta ilość wystąpień a, zatem $w_1 = 24$.

Wyraz zawierający n liter ma 2 możliwości:
1) ostatnia litera to jest ‘a’, wtedy pozostałe n – 1 liter musi zawierać nieparzystą ilość powtórzeń a,
2) ostatnia litera to nie jest ‘a’, wtedy pozostałe n – 1 liter musi zawierać parzystą ilość powtórzeń a,
Opisuje to następująca zależność rekurencyjna:

$$a_n = 24 * a_{n-1} + 1 * (25^{n-1} - a_{n-1}) = 25^{n-1} + 23 * a_{n-1} \; dla \; n \geq 1$$

Znajdziemy wzór jawny korzystając z anihilatorów:

$$a_n = 25^{n-1} + 23 * a_{n-1} => a_{n+1} = 25^n + 23 * a_n$$
$$a_{n+1} - 25^n - 23 * a_n = 0$$
$$\begin{cases} a_{n+1} - 23 * a_n \to E - 23 \\ -25^n \to E - 25 \end{cases}$$
$$(E-23)(E-25)\langle a_n \rangle = \langle 0 \rangle$$

Stąd: $a_n = \alpha * 23^n + \beta * 25^n$

$$\begin{cases} a_0 = 1 = \alpha + \beta \\ a_1 = 24 = 23\alpha + 25\beta \end{cases}$$

Zatem wzór jawny to $a_n = \frac{1}{2} * 23^n + \frac{1}{2} * 25^n$

Zadanie 8.

Znajdź ogólną postać rozwiązań następujących równań rekurencyjnych za pomocą anihilatorów i rozwiąż jedno z równań do końca:
(a) $a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n + 3^n - 1, gdy \; a_0 = a_1 = 0.$
(b) $a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n + n2^{n+1}, gdy \; a_0 = a_1 = 1.$
(c) $a_{n+2} = \frac{1}{2^{n+1}} - 2a_{n+1} - a_n, gdy \; a_0 = a_1 = 1.$

(a) $a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n + 3^n - 1, gdy \; a_0 = a_1 = 0.$

$$a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n - 3^n + 1 = 0$$

Anihilatorami poszczególnych wyrażeń są:

$$\begin{cases} a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n \to E^2 - 2E + 1 = (E-1)^2 \\ -3^n \to E - 3 \\ 1 \to E - 1 \end{cases}$$

Stąd:

$$a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n - 3^n + 1 = (E-1)^2(E-3)(E-1)\langle a_n \rangle =$$
$$= (E-1)^3(E-3)\langle a_n \rangle$$

Zatem postacią ogólną rozwiązania jest

$$a_n = \alpha * 1^n + \beta * n * 1^n + \gamma * n^2 * 1^n + \delta * 3^n$$

Ten przykład rozwiążę do końca, zaczynając od zapisania układu równań:

$$\begin{cases} a_0 = 0 = \alpha + \delta \\ a_1 = 0 = \alpha + \beta + \gamma + 3\delta \\ a_2 = 0 = \alpha + 2\beta + 4\gamma + 9\delta \\ a_3 = 2 = \alpha + 3\beta + 9\gamma + 27\delta \end{cases}$$

Układ ten rozwiązujemy eliminacją Gaussa:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 9 & 0 \\ 1 & 3 & 9 & 27 & 2 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 8 & 0 \\ 0 & 3 & 9 & 26 & 2 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 20 & 2 \end{array}\right] \rightarrow$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 20 & 2 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 2 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 2 \end{array}\right] \rightarrow$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0.25 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -0.25 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0.25 \end{array}\right]$$

$a_n = -\frac{1}{4}n - \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{4}3^n$ – wzór jawny ciągu

(b) $a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n + n2^{n+1}, gdy\ a_0 = a_1 = 1.$

$$a_{n+2} - 4a_{n+1} + 4a_n - n2^{n+1} = 0$$

Anihilatorami poszczególnych wyrażeń są:

$$\begin{cases} a_{n+2} - 4a_{n+1} + 4a_n \rightarrow E^2 - 4E + 4 = (E-2)^2 \\ -n2^{n+1} = (-2) * n2^n \rightarrow (E-2)^2 \end{cases}$$

Stąd:

$$a_{n+2} - \ 2a_{n+1} + a_n - 3^n + 1 = (E-2)^4 \langle a_n \rangle$$

Zatem postacią ogólną rozwiązania jest

$$a_n = \alpha * 2^n + \beta * n * 2^n + \gamma * n^2 * 2^n + \delta * n^3 * 2^n$$

(c) $a_{n+2} = \frac{1}{2^{n+1}} - 2a_{n+1} - a_n, gdy\ a_0 = a_1 = 1.$

$$a_{n+2} - \frac{1}{2^{n+1}} + 2a_{n+1} + a_n = 0$$

Anihilatorami poszczególnych wyrażeń są:

$$\begin{cases} a_{n+2} + 2a_{n+1} + a_n \rightarrow E^2 + 2E + 1 = (E+1)^2 \\ -\frac{1}{2^{n+1}} \rightarrow E - \frac{1}{2} \end{cases}$$

Stąd:

$$a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n - 3^n + 1 = (E+1)^2\left(E - \frac{1}{2}\right)\langle a_n\rangle$$

Zatem postacią ogólną rozwiązania jest

$$a_n = \alpha * (-1)^n + \beta * n * (-1)^n + \gamma * \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Zadanie 9. (Pisemne)

Niech c_n oznacza liczbę ciągów długości n złożonych z n cyfr ze zbioru {0, 1, 2}, nie zawierających dwóch następujących po sobie zer i dwóch następujących po sobie jedynek. Wyprowadź zależność rekurencyjną, jaką spełniają liczby c_n przyjmując $c_0 = 1$. Rozwiąż otrzymaną zależność rekurencyjną.

Oczywiste jest, że $c_1 = 3$, bo wybieramy 1 liczbę z 3 bez żadnych ograniczeń.
Następnie zastanówmy się, ile wynosi c_{n+1} jeśli znamy c_n.
Mamy następujące przypadki w zależności od wartości n-tego elementu:
1) 0 lub 1 -> n+1 wartość musi być różna od n-tej, więc w obu przypadkach mamy 2 możliwości wyboru,
2) 2 -> n+1 wartość może być dowolna, mamy więc 3 opcje.

Zatem zawsze możemy dostawić liczbę na n+1 pozycję tak, aby była różna od n-tej na 2 sposoby bez względu na wartość n-tego elementu.
Dodatkowo, jeśli n-ta wartość to 2, to n+1 może też być 2, wtedy 2 ostatnie cyfry wybieramy na 1 sposób, czyli $c_{n+1} = c_{n-1}$.
Po uwzględnieniu obu przypadków otrzymujemy zależność rekurencyjną:
$c_{n+1} = 2c_n + c_{n-1}\ dla\ n \geq 1$
Obliczymy anihilator i postać ogólną ciągu:

$$\langle c_{n+2}\rangle = 2\langle c_{n+1}\rangle + \langle c_n\rangle$$
$$\langle c_{n+2}\rangle - 2\langle c_{n+1}\rangle - \langle c_n\rangle = \langle 0\rangle$$
$$E^2\langle c_n\rangle - 2E\langle c_n\rangle - \langle c_n\rangle = \langle 0\rangle$$
$$(E^2 - 2E - 1)\langle c_n\rangle = \langle 0\rangle$$
$$\left(E - \left(1+\sqrt{2}\right)\right)\left(E - \left(1-\sqrt{2}\right)\right)\langle c_n\rangle = \langle 0\rangle$$
$$\langle c_n\rangle = \langle \alpha\left(1+\sqrt{2}\right)^n + \beta\left(1-\sqrt{2}\right)^n\rangle$$

Stąd układ równań:

$$\begin{cases} c_0 = 1 = \alpha + \beta \\ c_1 = 3 = \alpha\left(1+\sqrt{2}\right) + \beta\left(1-\sqrt{2}\right) \end{cases}$$

Układ rozwiązać można eliminacją Gaussa:

$$\left[\begin{matrix} 1 & 1 \\ 1+\sqrt{2} & 1-\sqrt{2} \end{matrix}\middle|\begin{matrix} 1 \\ 3 \end{matrix}\right] \to \left[\begin{matrix} 1 & 1 \\ 0 & -2\sqrt{2} \end{matrix}\middle|\begin{matrix} 1 \\ 2-\sqrt{2} \end{matrix}\right] \to \left[\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & -2\sqrt{2} \end{matrix}\middle|\begin{matrix} \frac{1+\sqrt{2}}{2} \\ 2-\sqrt{2} \end{matrix}\right]$$

$$\to \left[\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}\middle|\begin{matrix} \frac{1+\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1-\sqrt{2}}{2} \end{matrix}\right]$$

Stąd wzór jawny to

$$c_n = \frac{1+\sqrt{2}}{2}\left(1+\sqrt{2}\right)^n + \frac{1-\sqrt{2}}{2}\left(1-\sqrt{2}\right)^n$$

Zadanie 10.

Na ile sposobów można rozdać n różnych nagród wśród czterech osób A, B, C, D tak, aby:

(a) A dostała przynajmniej jedną nagrodę?

$$4^n - 3^n$$

(b) A lub B nie dostała nic?

$$3^n + 3^n - 2^n = 2 * 3^n - 2^n$$

(c) Zarówno A jak i B dostała przynajmniej jedną nagrodę?

$$4^n - 2 * 3^n + 2^n$$

(d) Przynajmniej jedna spośród A, B, C nic nie dostała?

$$\binom{3}{2} 3^n - \binom{3}{1} 2^n + 1$$

(e) Każda z 4 osób coś dostała?

$$4^n - \binom{4}{3} 3^n \binom{4}{2} 2^n - \binom{4}{1} * 1$$