Zadanie 1. 1 punkt

Niech $[a_0, b_0], [a_1, b_1], \dots$ będzie ciągiem przedziałów zbudowanym za pomocą metody bisekcji zastosowanej do lokalizacji zer funkcji f ciągłej w przedziale $[a_0, b_0]$, niech ponadto

$$m_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n),$$
$$\alpha = \lim_{n\to\infty}(m_n),$$
$$e_n = \alpha - m_{n+1}$$

(a) Wykaż, że $[a_n, b_n] \supset [a_{n+1}, b_{n+1}]\ dla\ \forall n \in N$.
(b) Ile wynosi długość przedziału $[a_n, b_n]$?
(c) Wykaż, że $|e_n| \le 2^{-n-1}(b_0 - a_0)\ (dla\ n \ge 0)$.
(d) Czy może zdarzyć się, że $a_0 < a_1 < a_2 < \dots < a_N$, gdzie N jest dowolną ustaloną liczbą naturalną? Jeśli tak, to podaj odpowiedni przykład.

a) Przedział $[a_n, b_n]$ dzielimy na 2 mniejsze przedziały w punkcie $m_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n)$, który zawiera się w $[a_0, b_0]$, zatem jeśli $f(m_{n+1}) = 0$, to kończymy działanie, w p.p.

$$[a_{n+1}, b_{n+1}] = \begin{cases} [a_n, m_{n+1}] \text{ dla } \mathrm{f}(m_{n+1}) > 0 \\ [m_{n+1}, b_n] \text{ dla } \mathrm{f}(m_{n+1}) < 0 \end{cases}$$

Zatem każdy podprzedział zawiera się w $[a_0, b_0]$

b) długość $[a_n, b_n]$ to $b_n - a_n = \frac{1}{2}(b_{n-1} - a_{n-1}) = \frac{1}{2^2}(b_{n-2} - a_{n-2}) = \dots = \frac{1}{2^n}(b_0 - a_0)$

c) wiemy, że $b_n - a_n = \frac{1}{2}(b_{n-1} - a_{n-1})$, stąd $b_n - a_n = 2^{-n}(b_0 - a_0)$, a zatem

$$|e_n| = |\alpha - m_{n+1}| = \left|\alpha - \frac{1}{2}(a_n + b_n)\right| \le \frac{1}{2}(b_n - a_n) = 2^{-n-1}(b_0 - a_0)$$

d) tak, gdy $x_0 \approx b_N$, wtedy zachodzi $a_0 < a_1 < a_2 < \dots < a_N \le x_0 < b_N$

Zadanie 2. 1 punkt

Ile kroków według metody bisekcji należy wykonać, żeby wyznaczyć zero α z błędem bezwzględnym mniejszym niż zadana liczba ε > 0?

Wiemy, że w metodzie bisekcji wyznaczamy kolejne przedziały $[a_0, b_0], [a_1, b_1], [a_2, b_2], \dots, [a_n, b_n]$, dla których z definicji zachodzi

$$b_n - a_n = \frac{1}{2}(b_{n-1} - a_{n-1})\ dla\ \forall n \ge 1$$

Zatem (*) $b_n - a_n = \frac{1}{2}(b_{n-1} - a_{n-1}) = \frac{1}{2^2}(b_{n-2} - a_{n-2}) = \dots = \frac{1}{2^n}(b_0 - a_0)$

Szukamy takiego przedziału $[a_n, b_n]$, że $\forall x \in [a_n, b_n]\ zachodzi\ f(x) < \varepsilon$, czyli:

$$\frac{1}{2}(b_n - a_n) \le \varepsilon$$

Korzystając z (*) otrzymujemy

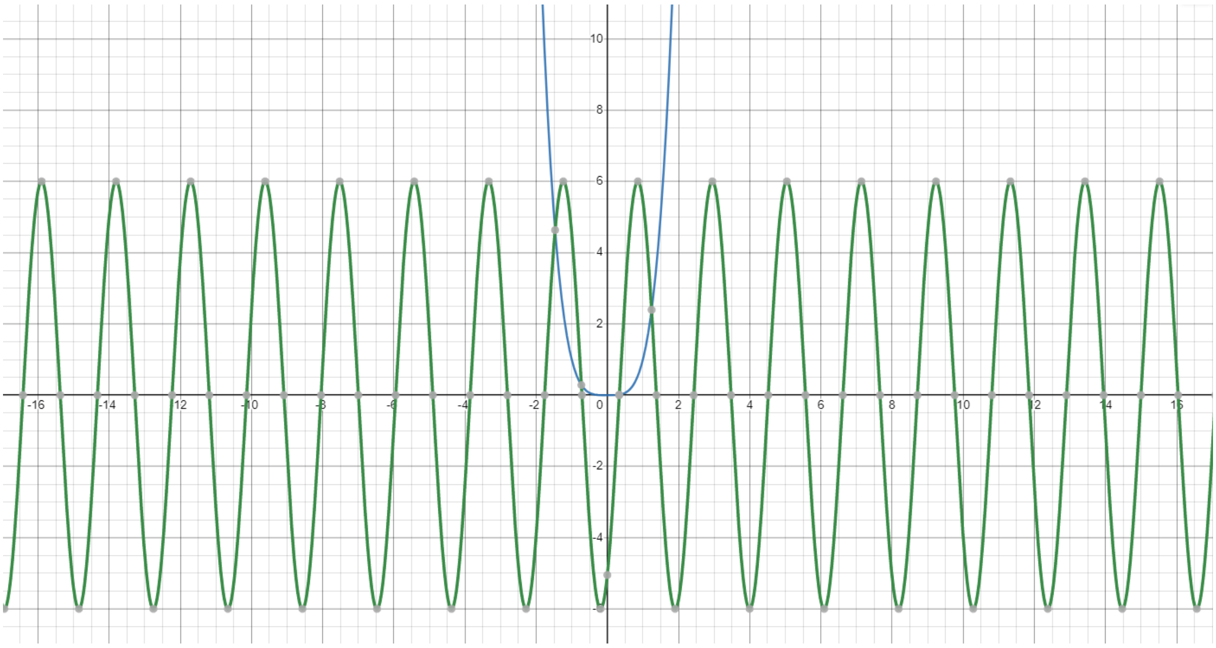
$\frac{b_0 - a_0}{2^{n+1}} \le \varepsilon$, $\quad \frac{b_0 - a_0}{\varepsilon} \le 2^{n+1}$, $\quad \frac{b_0 - a_0}{2\varepsilon} \le 2^n$, $\quad \log_2\left(\frac{b_0 - a_0}{2\varepsilon}\right) \le n$

Aby wyznaczyć zero z błędem bezw. mniejszym niż ε należy wykonać $\left\lceil log_2\left(\frac{b_0 - a_0}{2\varepsilon}\right)\right\rceil$ kroków.

Zadanie 3.
Włącz komputer! 1 punkt
Wykonaj 5 pierwszych kroków metody bisekcji dla funkcji $f(x) = x - 0.49$ i wartości początkowych $a_0 = 0, b_0 = 1$. Porównaj wartości błędów $|e_n|$ $(1 \le n \le 5)$ z ich oszacowaniami (1) (oznaczenia – jak w zadaniu L4.1). Skomentuj wyniki.

$$|e_1| = 0.01, |e_1| \le 0.5$$
$$|e_2| = 0.24, |e_2| \le 0.25$$
$$|e_3| = 0.115, |e_3| \le 0.125$$
$$|e_4| = 0.0525, |e_4| \le 0.0625$$
$$|e_5| = 0.02125, |e_5| \le 0.03125$$

Zadanie 4.
Włącz komputer! 1 punkt
Naszkicuj wykresy funkcji $g(x) = x^4$ oraz $h(x) = 6sin(3x - 1)$, aby wyznaczyć liczbę i położenie wszystkich miejsc zerowych funkcji $f(x) = x^4 - 6sin(3x - 1)$.
Następnie, stosując metodę bisekcji, wyznacz wszystkie zera funkcji f z błędem bezwzględnym nie większym niż 10^{-8}.



Widać, że mamy 4 punkty przecięcia, które są miejscami zerowymi $x^4 - 6sin(3x - 1)$.
Wyznaczymy je z błędem bezwzględnym nie większym niż 10^{-8} używając metody bisekcji na przedziałach $[-2, -1], [-1,0], [0,1], [1,2]$.
Do tego potrzeba będzie $\left\lceil log_2\left(\frac{b_0-a_0}{2\varepsilon}\right)\right\rceil = \left\lceil log_2\left(\frac{1}{2*10^{-8}}\right)\right\rceil = \left\lceil log_2\left(\frac{1}{2*10^{-8}}\right)\right\rceil = 26$ kroków.
Wynik:
Ostatecznie otrzymujemy miejsca zerowe: -1.46705, -0.729613, 0.334025, 1.24377

Zadanie 6.

Włącz komputer! 1 punkt

Stosując metodę Newtona, zaproponuj algorytm numerycznego obliczania $\frac{1}{\sqrt{a}}$ $(a > 0)$ jedynie za pomocą operacji +, − i *, czyli bez wykonywania dzieleń. Opracowaną metodę sprawdź eksperymentalnie, w tym zbadaj m.in. jak warto dobierać x0 oraz ile średnio iteracji wystarczy do osiągnięcia satysfakcjonujących wyników.

$$x = \frac{1}{\sqrt{a}}, \qquad stąd\ x^2 = \frac{1}{a}, \qquad stąd\ \frac{1}{x^2} - a = 0$$
$$x = \sqrt{a}, \qquad stąd\ \ x^2 = a, \qquad stąd\ x^2 - a = 0$$

Stąd funkcja jest postaci: $f(x) = \frac{1}{x^2} - a$

Stąd pochodna wynosi $f'(x) = \frac{-2}{x^3}$

Podstawiając do wzoru na metodę Newtona:

$$F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - \frac{\frac{1}{x^2} - a}{\frac{-2}{x^3}} = x + \frac{x^3\left(\frac{1}{x^2} - a\right)}{2} = \frac{3x - ax^3}{2}$$

$$F'(x) = \frac{3}{2} - \frac{3}{2}\mathrm{a}x^2$$

Metoda jest zbieżna, gdy $|F'(x)| < 1, czyli\ \left|\frac{3}{2} - \frac{3}{2}\mathrm{a}x^2\right| < 1$

Zatem dla $x^2 \in [\frac{1}{3a}, \frac{5}{3a}]$ metoda jest zbieżna.

Zadanie 7.

Włącz komputer! 1 punkt

Niech będzie $(*)\ a = m * 2^c$, gdzie c jest liczbą całkowitą, a m – ułamkiem z przedziału $[\frac{1}{2}, 1)$. Biorąc pod uwagę postać $(*)$, zaproponuj efektywną metodę obliczania $\sqrt{a}$, otrzymaną przez zastosowanie metody Newtona do wyznaczania zera pewnej funkcji f.

Ustal eksperymentalnie dla jakich wartości x0 metoda jest zbieżna.

$$x = \sqrt{a}, \qquad stąd\ \ x^2 = a, \qquad stąd\ x^2 - a = 0$$

Stąd funkcja jest postaci: $f(x) = x^2 - a$

Stąd pochodna wynosi $f'(x) = 2x$

Podstawiając do wzoru na metodę Newtona:

$$F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - \frac{x^2 - a}{2x} = \frac{x^2 + a}{2x} = \frac{x}{2} + \frac{a}{2x}$$

$$F'(x) = \frac{1}{2} - \frac{a}{2x^2}$$

Metoda jest zbieżna, gdy $|F'(x)| < 1, czyli\ \left|\frac{1}{2} - \frac{a}{2x^2}\right| < 1$

Zatem dla $x^2 > \frac{a}{3}$ metoda jest zbieżna.