Zadanie 2. 2 punkty

Niech $P_0, P_1, \dots, P_N$ $(1 \leq k \leq N)$ będzie ciagiem wielomianów ortogonalnych względem iloczynu skalarnego $(\cdot,\cdot)_N$. Udowodnij podaną na wykładzie zależność rekurencyjną spełnianą przez te wielomiany.

Związek rekurencyjny do udowodnienia:

$$\begin{cases} \mathrm{P_0(x) = 1} \\ \mathrm{P_1(x) = x - c_1} \\ \mathrm{P_k(x) = (x - c_k)P_{k-1}(x) - d_k P_{k-2}(x)\ dla\ k \geq 2} \end{cases}$$

Dowód indukcyjny

Podstawa: n = 1

Cel: Pokazać, że $P_1 = (x - c_1)P_0$

$0 =< P_0, P_1 >=< P_0, xP_0 - c_1P_0 >=< P_0, xP_0 > -c_1 < P_0, P_0 >= 0$

Stąd: $c_1 = \frac{<P_0, xP_0>}{<P_0, P_0>}$, zatem $\mathrm{P_1(x) = (x - c_1)P_0(x) - d_1P_{-1}(x)}$

Krok:

Chcemy pokazać, że $\mathrm{P_k(x) = (x - c_k)P_{k-1}(x) - d_kP_{k-2}(x)}$

Obserwacja (*): współczynnik przy najwyższej potędze $P_k(x)$ to 1.

(**) $P_0, P_1, \dots, P_n$ są bazą Π_n.

Zauważmy, że zachodzi (dlaczego?):

$$P_k(x) = xP_{k-1} + \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i P_i$$

Najpierw pokażemy, że dla $j = 0,1, \dots, k-3$ zachodzi $\alpha_j = 0$.

Weźmy dowolne $j \in [0, k-3]$.

$$0 =< P_k, P_j >=< xP_{k-1} + \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i P_i\, , P_j >=< xP_{k-1}, P_j > +< \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i P_i\, , P_j >=$$

$$=< P_{k-1}, xP_j > +\alpha_j < P_j, P_j >=< P_{k-1}, \sum_{i=0}^{k-2} \beta_i P_i > +\alpha_j < P_j, P_j >=$$

$$= \alpha_j < P_j, P_j > \rightarrow\ \alpha_j = 0$$

Teraz wiemy, że zachodzi:

$$P_k(x) = xP_{k-1}(x) + \alpha_{k-1}P_{k-1}(x) + \alpha_{k-2}P_{k-2}(x)$$

a) $0 =< P_k, P_{k-2} >=$

$$=< xP_{k-1}, P_{k-2} > +\alpha_{k-1} < P_{k-1}, P_{k-2} > +\alpha_{k-2} < P_{k-2}, P_{k-2} >=$$
$$=< P_{k-1}, xP_{k-2} > +\alpha_{k-2} < P_{k-2}, P_{k-2} >=$$
$$=< P_{k-1}, P_{k-1} + \sum_{i=0}^{k-2} \beta_i P_i > +\alpha_{k-2} < P_{k-2}, P_{k-2} >=$$
$$=< P_{k-1}, P_{k-1} > +\alpha_{k-2} < P_{k-2}, P_{k-2} >= 0$$

Stąd otrzymujemy $\alpha_{k-2} = -\frac{<P_{k-1},P_{k-1}>}{<P_{k-2},P_{k-2}>} = d_k$

b) $0 =< P_k, P_{k-1} >=$

$$=< xP_{k-1}, P_{k-1} > +\alpha_{k-1} < P_{k-1}, P_{k-1} > +\alpha_{k-2} < P_{k-2}, P_{k-2} >=$$
$$=< xP_{k-1}, P_{k-1} > +\alpha_{k-2} < P_{k-2}, P_{k-2} >= 0$$

Stąd otrzymujemy $\alpha_{k-2} = -\frac{<xP_{k-1},P_{k-1}>}{<P_{k-2},P_{k-2}>} = c_k$

Zadanie 3. 2 punkty

Niech $\{P_k\}$ będzie ciągiem wielomianów ortogonalnych względem iloczynu skalarnego $(f, g)_N = \sum_{k=0}^{N} f(x_k)g(x_k)$, gdzie $x_0, x_1, \dots, x_N$ są parami różnymi punktami. Ustalmy x ∈ R oraz liczbę naturalną n < N. Ile i jakich operacji arytmetycznych wystarczy wykonać, aby obliczyć wartości $P_0(x), P_1(x), \dots, P_n(x)$? Uwzględnij wszystkie szczegóły obliczeń.

$$\begin{cases} \mathrm{P_0(x) = 1} \\ \mathrm{P_1(x) = x - c_1} \\ \mathrm{P_k(x) = (x - c_k)P_{k-1}(x) - d_k P_{k-2}(x) \text{ dla } k \geq 2} \end{cases}$$

gdzie:

$$c_k = \frac{< xP_{k-1}, P_{k-1} >}{< P_{k-1}, P_{k-1} >}, d_k = \frac{< P_{k-1}, P_{k-1} >}{< P_{k-2}, P_{k-2} >}$$

Aby policzyć c_k potrzeba wyliczyć 2 iloczyny skalarne, w tym wykonać:
$2(n + 1)$ mnożeń oraz n dodawań dla licznika,
$n + 1$ mnożeń oraz n dodawań dla mianownika,
Zatem łącznie potrzeba $3(n + 1)$ mnożeń, $2n$ dodawań oraz 1 dzielenie.

Aby policzyć d_k potrzeba wyliczyć 2 iloczyny skalarne, czyli potrzeba $2(n + 1)$ mnożeń, $2n$ dodawań oraz 1 dzielenie.

Mając tą wiedzę można obliczyć ilość działań dla P:
$P_1(x)$ – tyle samo co c_1 plus 1 odejmowanie, czyli $5n + 5$ działań.
$P_{k>1}(x)$ - ???

Zadanie 4. 1 punkt

Niech $\{\mathrm{Q_k}\}$ będzie ciągiem wielomianów określonych w następujący sposób:

$$\begin{cases} \mathrm{Q_0(x) = 1} \\ \mathrm{Q_1(x) = x - c_1} \\ \mathrm{Q_k(x) = (x - c_k)Q_{k-1}(x) - d_kQ_{k-2}(x)\ dla\ k \geq 2} \end{cases}$$

gdzie ck, dk są danymi stałymi. Udowodnij, że następujący algorytm Clenshawa:

$$\begin{cases} \mathrm{B_{m+2} = B_{m+1} = 0} \\ \mathrm{B}_k = \mathrm{a}_k + \mathrm{(x - c_{k+1})B_{k+1}} - \mathrm{d}_{k+2}\mathrm{B_{k+2}}\ \mathrm{(k = m, m-1, \dots, 0)} \\ \mathrm{wynik = B_0} \end{cases}$$

oblicza wartość sumy $\sum_{\mathrm{k=0}}^{\mathrm{m}} \mathrm{a_k Q_k(x)}$.

Jak wykorzystać powyższy algorytm do obliczenia wartości $\mathrm{Q_m(x)}$?

$$\begin{aligned}
\mathrm{B_0} &= \mathrm{a_0 + (x - c_1)B_1 - d_2B_2} = \mathrm{a_0}P_0 + \mathrm{P_1B_1 - d_2B_2} = \\
&= \mathrm{a_0}P_0 + \mathrm{P_1(a_1 + (x - c_2)B_2 - d_3B_3) - d_2B_2} = \\
&= \mathrm{a_0}P_0 + a_1\mathrm{P_1} + P_1\mathrm{(x - c_2)B_2} - P_1\mathrm{d_3B_3 - d_2B_2} = \\
&= \sum_{i=0}^{1}(\mathrm{a}_i P_i) + P_2\mathrm{B_2} - P_1\mathrm{d_3B_3} = \\
&= \sum_{i=0}^{1}(\mathrm{a}_i P_i) + P_2\mathrm{(a_2 + (x - c_3)B_3 - d_4B_4)} - P_1\mathrm{d_3B_3} = \\
&= \sum_{i=0}^{2}(\mathrm{a}_i P_i) + P_3\mathrm{B_3} - \mathrm{P_2d_4B_4} = \cdots = \\
&= \sum_{i=0}^{m}(\mathrm{a}_i P_i) + P_{m+1}\mathrm{B_{m+1}} - \mathrm{P}_m\mathrm{d}_{m+2}\mathrm{B_{m+2}} = \\
&= \sum_{i=0}^{m}(\mathrm{a}_i P_i) + P_{m+1} * 0 - \mathrm{P}_m\mathrm{d}_{m+1} * 0 = \sum_{i=0}^{m}(\mathrm{a}_i P_i)\ \blacksquare
\end{aligned}$$

Aby obliczyć $\mathrm{Q_m(x)}$ należy przyjąć $\mathrm{a_m} = 1$ oraz $\mathrm{a_i} = 0\ \forall i \neq m$.

Zadanie 5. 1 punkt

Dwoma podanymi na wykładzie sposobami zbuduj wielomiany P_0, P_1, P_2 ortogonalne na zbiorze $D_4 = \{x_0, x_1, x_2, x_3, x_4\}$, gdzie
$x_j = -8 + 4j$ $(j = 0, 1, 2, 3, 4)$.

Najpierw wyznaczamy zbiór $D_4 = \{-8, -4, 0, 4, 8\}$

Metoda 1) wzór rekurencyjny postaci:

$$\begin{cases} P_0(x) = 1 \\ P_1(x) = x - c_1 \\ P_k(x) = (x - c_k)P_{k-1}(x) - d_k P_{k-2}(x) \; dla \; k \in \{2,3,4\} \end{cases}$$

gdzie:

$$c_k = \frac{< xP_{k-1}, P_{k-1} >}{< P_{k-1}, P_{k-1} >}, d_k = \frac{< P_{k-1}, P_{k-1} >}{< P_{k-2}, P_{k-2} >}$$

Wyliczamy wartości c_1, c_2, d_2:

$$c_1 = \frac{< x, 1 >}{< 1,1 >} = \frac{-8 - 4 + 4 + 8}{1 + 1 + 1 + 1} = 0$$

$$c_2 = \frac{< x^2, x >}{< x, x >} = \frac{\sum_{i=0}^{4} x_i^3}{\sum_{i=0}^{4} x_i^2} = \frac{-512 - 64 + 64 + 512}{64 + 16 + 16 + 64} = 0$$

$$d_2 = \frac{< P_1, P_1 >}{< P_0, P_0 >} = \frac{< x, x >}{< 1,1 >} = \frac{\sum_{i=0}^{4} x_i^2}{5} = \frac{64 + 16 + 16 + 64}{5} = 32$$

Stąd otrzymujemy P_0, P_1, P_2:

$$P_0(x) = 1$$
$$P_1(x) = x$$
$$P_2(x) = (x - c_2)P_1(x) - d_2 P_0(x) = x^2 - 32$$

Metoda 2) ortogonalizacja Grama-Schmidta:

Zaczynamy od wybrania 3 liniowo niezależnych funkcji:

$$g_0(x) = 1, g_1(x) = x, g_2(x) = x^2$$

Wtedy wielomiany P_0, P_1, P_2 spełniają zależność rekurencyjną:

$$\begin{cases} P_0 = g_0 \\ P_k = g_k - \sum_{j=0}^{k-1} \frac{< g_k, P_j >}{< P_j, P_j >} P_j \;\; dla \; k \in \{1,2,3,4\} \end{cases}$$

Stąd otrzymujemy P_0, P_1, P_2:

$$P_0 = 1$$

$$P_1 = g_1 - \sum_{j=0}^{0} \frac{< g_1, P_0 >}{< P_0, P_0 >} P_0 = x - \frac{< x, 1 >}{< 1,1 >} = x$$

$$P_2 = g_2 - \sum_{j=0}^{1} \frac{< g_2, P_j >}{< P_j, P_j >} P_j = x^2 - \left(\frac{< x^2, 1 >}{< 1,1 >} + \frac{< x^2, x >}{< x, x >} x \right) = x^2 - 32$$

Zadanie 6. 1 punkt

Funkcja h przyjmuje w punktach $x_j = -8 + 4j$ $(j = 0, 1, 2, 3, 4)$ odpowiednio wartości −5, 4, −1, 4, −5. Wykorzystując ortogonalność wielomianów skonstruowanych w poprzednim zadaniu, wyznacz taki wielomian $w_2^* \in \Pi_2$, aby wyrażenie

$$\sum_{j=0}^{4} \left[w_2^*(x_j) - h(x_j)\right]^2$$

przyjmowało najmniejszą możliwą wartość.

$$x_j = \{-8, -4, 0, 4, 8\}$$
$$h_j = \{-5, 4, -1, 4, -5\}$$
$$P_0 = 1$$
$$P_1 = x$$
$$P_2 = x^2 - 32$$

Wiemy, że zachodzi:

$$w_2^*(x) = \sum_{i=0}^{2} a_i P_i(x)\,, gdzie\ a_i = \frac{< P_i, h >}{< P_i, P_i >}$$

Obliczamy wartości poszczególnych iloczynów skalarnych:

$$< P_0, P_0 >= \sum_{i=0}^{4} 1 = 5$$

$$< P_1, P_1 >= \sum_{i=0}^{4} x^2 = 64 + 16 + 16 + 64 = 160$$

$$< P_2, P_2 >= \sum_{i=0}^{4} (x^2 - 32)^2 = 32^2 + 16^2 + 32^2 + 16^2 + 32^2 = 3584$$

$$< h, P_0 >= \sum_{i=0}^{4} h_i = -3$$

$$< h, P_1 >= \sum_{i=0}^{4} h_i x_i = 0$$

$$< h, P_2 >= \sum_{i=0}^{4} h_i\left(x_i^2 - 32\right) = -160 - 64 + 32 - 64 - 160 = -416$$

$$a_0 = \frac{< P_0, h >}{< P_0, P_0 >} = \frac{-3}{5} = -\frac{3}{5}$$

$$a_1 = \frac{< P_1, h >}{< P_1, P_1 >} = \frac{0}{160} = 0$$
$$a_2 = \frac{< P_2, h >}{< P_2, P_2 >} = \frac{-416}{3584} = -\frac{13}{112}$$

Stąd wynikiem jest wielomian:

$$w_2^*(x) = -\frac{3}{5} - \frac{13}{112}(x^2 - 32) = -\frac{13}{112}x^2 + \frac{109}{35}$$