Zadanie 1. 1 punkt

Uzasadnij, że schemat Hornera jest algorytmem numerycznie poprawnym.

Schemat Hornera ma następującą postać:

$$W(x) = a_0 + x(a_1 + x(a_2 + \cdots + xa_n) \dots)$$

Algorytm schematu Hornera:

$$\begin{cases} w_n = a_n \\ w_k = w_{k+1} * x + a_k \ (dla\ k = n-1, n-2, \dots, 0) \end{cases}$$

$$w_0 = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

Błędy będą postaci:

$$w_n = a_n(1 + \beta_n)$$

$$w_0 = \sum_{i=0}^{n} \left(a_i x^i * \prod_{j=0}^{i} (1 + \beta_j) * \prod_{j=1}^{i} (1 + \alpha_j) \right)$$

Niech α, β będą największymi z błędów odpowiednio α_j, β_j, wtedy:

$$w_0 \le \sum_{i=0}^{n} \left(a_i x^i * (1+\beta)^i * (1+a)^i \right)$$

Przyjmijmy też, że $(1+\beta)(1+a) = (1+\varepsilon)$, wtedy:

$$\sum_{i=0}^{n} \left(a_i x^i * (1+\beta)^i * (1+a)^i \right) = \sum_{i=0}^{n} \left(a_i x^i * \left((1+\beta)(1+a)\right)^i \right) =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \left(a_i x^i * (1+\varepsilon)^i \right) = \sum_{i=0}^{n} \left(a_i * \left(x * (1+\varepsilon)\right)^i \right) =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \left(a_i * \tilde{x}^i \right) \blacksquare$$

Zadanie 3. 2 punkty

Niech T_n $(n = 0,1,\dots)$ oznacza n-ty wielomian Czebyszewa.

a) Podaj postać potęgową T_5

b) Jakimi wzorami wyrażają się współczynniki wielomianu T_n przy x^n, x^{n-1}?

c) Korzystając z faktu, że dla dowolnego x z przedziału [-1,1] n-ty wielomian Czebyszewa wyraża się wzorem $T_n(x) = \cos(n * \arccos(x))$:

I) sprawdź, że $|T_n(x)| \leq 1$ $(-1 \leq \mathrm{x} \leq 1, \mathrm{n} \geq 0)$

II) wyznacz wszystkie punkty ekstremalne n-tego wielomianu Czebyszewa, tj. rozwiązania równania $|T_n(x)| = 1$

III) udowodnij, że wielomian Czebyszewa T_{n+1} $(n = 0,1,\dots)$ ma n+1 zer rzeczywistych, pojedynczych, leżących w przedziale (-1,1).

Przypomnienie wzoru na n-ty wielomian Czebyszewa:

$$T_k(x) = \begin{cases} 1 \; dla \; k = 0 \\ x \; dla \; k = 1 \\ 2xT_{k-1}(x) - T_{k-2}(x) \; (k = 2,\dots) \end{cases}$$

a) $T_2(x) = 2xT_1(x) - T_0(x) = 2x^2 - 1$

$T_3(x) = 2xT_2(x) - T_1(x) = 2x(2x^2 - 1) - x = 4x^3 - 3x$

$T_4(x) = 2xT_3(x) - T_2(x) = 2x(4x^3 - 3x) - (2x^2 - 1) = 8x^4 - 8x^2 + 1$

$T_5(x) = 2xT_4(x) - T_3(x) = 2x(8x^4 - 8x^2 + 1) - (4x^3 - 3x) =$

$= 16x^5 - 20x^3 + 5x$

b) współczynniki przy x^n wynoszą 0,1,2,4,8,16,…, czyli 2^{n-1}, dowód:

Podstawa: n = 1, $T_1(x) = x$

Krok: załóżmy, że $\alpha = 2^{n-1}$ jest współczynnikiem $T_n(x) = \alpha x^n + \cdots$, wtedy:

$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x) = 2x(2^{n-1}x^n + \cdots) - (2^{n-2}x^{n-1} + \cdots) =$

$= 2^n x^{n+1} + \cdots \blacksquare$

współczynniki przy x^{n-1} wynoszą 0,0,0,…, czyli zawsze 0, dowód:

Podstawa: n = 1, $T_1(x) = x$

Krok: załóżmy, że dla każdego n $\alpha_n \; oraz \; \beta = 0$ są współczynnikami $T_n(x) = \alpha x^n + \beta x^{n-1} + \cdots$ wtedy:

$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x) =$

$= 2x(\alpha_n x^n + \beta x^{n-1} + \cdots) - (\alpha_{n-1}x^{n-1} + \beta x^{n-2} + \cdots) =$

$= 2\alpha_n x^{n+1} + 2\beta x^n - \alpha_{n-1}x^{n-1} - \beta x^{n-2} + \cdots \blacksquare$

c) $T_n(x) = \cos(n * \arccos(x))\ \ dla\ x \in [-1,1]$

I) $|T_n(x)| \leq 1$

Niech $\alpha = n * \arccos(x)\,, wtedy\ |T_n(x)| = |\cos(\alpha)| \leq 1$■

II) $|T_n(x)| = 1$

Wiedząc, że $|T_n(x)| = |\cos(\alpha)|$, należy wyznaczyć rozwiązania $|\cos(\alpha)| = 1$

Zatem $\alpha = k\pi, czyli\ n * \arccos(x) = k\pi$

$$\arccos(x) = \frac{k\pi}{n}$$

$$\cos(arccos(x)) = \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)$$

Wiedząc, że $\cos(arccos(x)) = x$ dla $x \in [-1,1]$ otrzymujemy:

$$x = \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)$$

III) Szukamy wartości, dla których $T_{n+1}(x) = 0$

Z założenia: $T_{n+1}(x) = \cos\big((n+1) * \arccos(x)\big)$

$$\cos\big((n+1) * \arccos(x)\big) = 0$$

$$\cos\big((n+1) * \arccos(x)\big) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)$$

$$(n+1) * \arccos(x) = \left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)$$

$$\arccos(x) = \frac{\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)}{n+1}$$

$$x = \cos\left(\frac{\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)}{n+1}\right)\ dla\ (k = 0,1,\dots,n)$$

Zadanie 4. 2 punkty

Wykaż, że dla dowolnych $k, l \in N$ oraz $x \in R$ zachodzi:

$$T_{kl}(x) = T_k\big(T_l(x)\big)$$

Wykorzystaj podaną zależność do opracowania szybkiego algorytmu wyznaczania wartości wielomianu Czebyszewa wysokiego stopnia niebędącego liczbą pierwszą.

Przypomnienie wzoru na n-ty wielomian Czebyszewa:

$$T_k(x) = \begin{cases} 1 \; dla \; k = 0 \\ x \; dla \; k = 1 \\ 2xT_{k-1}(x) - T_{k-2}(x) \; (k = 2, \dots) \end{cases}$$

Najpierw przypomnijmy wzór z zadania 4c:

$T_n(x) = \cos(n \arccos(x))$ dla $x \in [-1,1]$

Mając tą wiedzę możemy zacząć dowód od prawej strony:

$$T_k\big(T_l(x)\big) = T_k\big(cos(l * \arccos(x))\big) = T_k(y)$$

$$y = cos(l * \arccos(x))$$

$$T_k(y) = cos\big(k * arcos(y)\big) = cos\Big(k * arcos\big(cos(l * \arccos(x))\big)\Big) =$$

$$= cos(k * l * \arccos(x)) = T_{kl}(x)$$

Pokazałem, że równość zachodzi dla $x \in [-1,1]$.

Podobnie można pokazać zachodzenie dla pozostałych x, bo:

$$T_k(x) = \begin{cases} \cos\big(k * arcos(x)\big) \; dla \; [-1,1] \\ \cosh\big(k * arcosh(x)\big) \; dla \; x \geq 1 \\ (-1)^k \cosh\big(k * arcosh(-x)\big) \; dla \; x \leq -1 \end{cases}$$

Źródło: [Wielomiany Czebyszewa – Wikipedia, wolna encyklopedia]()

Dowód dla $x \geq 1$ jest identyczny, bo zachodzi $arcosh\big(cosh(x)\big) = x$

Dowód dla $x \leq -1$

$$T_k\big(T_l(x)\big) = T_k\big((-1)^l \cosh\big(l * arcosh(-x)\big)\big) = T_k(y)$$

$$y = (-1)^l \cosh\big(l * arcosh(-x)\big)$$

$$T_k(y) = (-1)^k \cosh\big(k * arcosh(-y)\big) =$$

$$= (-1)^k \cosh\Big(k * arcosh\big((-1)^{l+1} \cosh\big(l * arcosh(-x)\big)\big)\Big) =?= T_{kl}(x)$$

Algorytm:
1) Wczytaj n postaci k*l w celu wyznaczenia n-tego wielomianu Czebyszewa,
2) Rozpisz n w postaci iloczynu liczb pierwszych:

$$n = {p_1}^{w_1}{p_2}^{w_2} \dots {p_e}^{w_e}, gdzie\ w_i \geq 1, oraz\ p_1 < p_2 < \cdots < p_e$$

3) Dla każdego i, wylicz rekurencyjnie $T_{p_i}(x)$, korzystając z tablicy wyników wyznaczonych dotychczas.
4) Znając wartości każdego $T_{p_i}(x)$, wylicz wartość $T_n(x)$ korzystając z tablicy:

$$T_n(x) = T_{p_1}(x)^{w_1} * T_{p_2}(x)^{w_2} * \dots * T_{p_e}(x)^{w_e}$$

Przykład: Chcemy wyliczyć $T_{15}(0)$

$$T_{15}(0) = T_3(0) * T_5(0) = \big(2 * 0 * T_2(0) - T_1(0)\big) * T_5(0) =$$
$$= \Big(0 * \big(0 * T_1(0) - T_0(0)\big) - T_1(0)\Big) * T_5(0) =$$
$$= (0 * (0 * 0 - 1) - 0) * T_5(0) = 0 * T_5(0)$$

W tym momencie mamy zapisane w tablicy wyniki dla

$$T_0(0) = 1, T_1(0) = 0, T_2(0) = -1, T_3(0) = 0$$

Zatem $0 * T_5(0) = 0 * \big(0 * T_4(0) - T_3(0)\big) =$
$= 0 * \Big(0 * \big(0 * T_3(0) - T_2(0)\big) - T_3(0)\Big) =$
Następnie korzystamy z zapamiętanych wyników $T_2(0)\ oraz\ T_3(0)$
$= 0 * (0 * (0 * 0 + 1) - 0) = 0 * (0 * 1 - 0) =$ (tu zapamiętujemy $T_4(0) = 1$)

$$= 0 * (0 * 1 - 0) = 0$$

Zatem $T_{15}(0) = 0$

Zadanie 6. 1 punkt

Podaj postać Lagrange'a wielomianu interpolacyjnego dla danych:

x_k	-7	-4	2	5
y_k	5	-2	0	3

Postać Lagrange'a wielomianu:

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{3} y_i * \lambda_i(x)$$

gdzie:

$$\lambda_i(x) = \prod_{j=0 \wedge j \neq i}^{3} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

Najpierw wyliczę wszystkie wartości lambdy:

$$\lambda_0(x) = \prod_{j=1}^{3} \frac{x - x_j}{x_0 - x_j} = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} * \frac{x - x_2}{x_0 - x_2} * \frac{x - x_3}{x_0 - x_3} =$$

$$= \frac{x+4}{-3} * \frac{x-2}{-9} * \frac{x-5}{-12} = \frac{x^3 - 3x^2 - 18x + 40}{-324}$$

$$\lambda_1(x) = \prod_{j=0 \wedge j \neq 1}^{3} \frac{x - x_j}{x_1 - x_j} = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} * \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} * \frac{x - x_3}{x_1 - x_3} =$$

$$= \frac{x+7}{3} * \frac{x-2}{-6} * \frac{x-5}{-9} = \frac{x^3 - 39x + 70}{162}$$

$$\lambda_2(x) = \prod_{j=0 \wedge j \neq 2}^{3} \frac{x - x_j}{x_2 - x_j} = \frac{x - x_0}{x_2 - x_0} * \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} * \frac{x - x_3}{x_2 - x_3} =$$

$$= \frac{x+7}{9} * \frac{x+4}{6} * \frac{x-5}{-3} = \frac{x^3 + 6x^2 - 27x - 140}{-162}$$

$$\lambda_3(x) = \prod_{j=0}^{2} \frac{x - x_j}{x_3 - x_j} = \frac{x - x_0}{x_3 - x_0} * \frac{x - x_1}{x_3 - x_1} * \frac{x - x_2}{x_3 - x_2} =$$

$$= \frac{x+7}{12} * \frac{x+4}{9} * \frac{x-2}{3} = \frac{x^3 + 9x^2 + 6x - 56}{324}$$

A następnie poszczególne wartości $y_i * \lambda_i(x)$:

$$y_0 * \lambda_0(x) = 5 * \frac{x^3 - 3x^2 - 18x + 40}{-324} = \frac{5x^3 - 15x^2 - 90x + 200}{-324}$$

$$y_1 * \lambda_1(x) = -2 * \frac{x^3 - 39x + 70}{162} = \frac{x^3 - 39x + 70}{-81}$$

$$y_2 * \lambda_2(x) = 0 * \frac{x^3 + 6x^2 - 27x - 140}{-162} = 0$$

$$y_3 * \lambda_3(x) = 3 * \frac{x^3 + 9x^2 + 6x - 56}{324} = \frac{x^3 + 9x^2 + 6x - 56}{108}$$

Zatem wielomian ma następującą postać Lagrange'a:

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{3} y_i * \lambda_i(x) =$$

$$= -\frac{5x^3 - 15x^2 - 90x + 200}{324} - \frac{x^3 - 39x + 70}{81}$$

$$+ \frac{x^3 + 9x^2 + 6x - 56}{108} = \frac{-x^3 + 7x^2 + 44x - 108}{54} =$$

$$= \frac{-x^3}{54} + \frac{7x^2}{54} + \frac{22x}{27} - 2$$

Zadanie 7. 1 punkt

Niech $f(x) = 2022x^7 - 1977x^5 + 1410x^4 - 1989x^2 - 966x + 1791$.

(a) Wyznacz wielomian stopnia ≤ 7 interpolujący funkcję f w punktach −2022, 1977, −1410, 1989, −1939, 1996, −1945, π.

(b) Wyznacz wielomian drugiego stopnia, interpolujący funkcję f w punktach 1, 2, 3.

a) Z jednoznaczności interpolacji $W(x) = f(x)$

b) Chcemy wyznaczyć taki wielomian 2 stopnia $W(x)$, dla którego zachodzi:

x	1	2	3
$W(x)$	291	210 015	4 036 905

$$L_2(x) = 291 * \frac{(x-2)(x-3)}{(-1)*(-2)} + 210\,015 * \frac{(x-1)(x-3)}{1*(-1)} + 4\,036\,905 * \frac{(x-1)(x-2)}{2*1} =$$

$$= \frac{291}{2} * (x-2)(x-3) - 210\,015 * (x-1)(x-3) + \frac{4\,036\,905}{2} * (x-1)(x-2) =$$

$$= 1808583x^2 - 5216025x + 3407733$$