Zadanie 2. (Pisemne)
Digraf, w którym każda para różnych wierzchołków jest połączona dokładnie jedną krawędzią skierowaną, nazywamy turniejem. Pokaż, że w każdym turnieju istnieje wierzchołek, z którego można dojść do każdego innego wierzchołka po drodze o długości co najwyżej 2.

Weźmy wierzchołek $w \in T$, który posiada najwięcej krawędzi wychodzących ze wszystkich wierzchołków turnieju i zbiór tych wierzchołków oznaczmy jako S. Ilość krawędzi wychodzących z wierzchołka w to będzie |S|.
Pokażę, że z wierzchołka w można dojść do każdego innego wierzchołka z T po drodze o długości co najwyżej 2.

Rozważmy 2 przypadki:
1) Wszystkie krawędzie w są wychodzące.
Wtedy można z niego dojść do każdego innego wierzchołka w T po drodze o długości 1.
2) Nie wszystkie krawędzie w są wychodzące.
Dowód nie wprost:
Załóżmy, że istnieje taki wierzchołek $k \in T$, że nie istnieje do niego krawędź wchodząca z żadnego z wierzchołków podgrafu $S \cup \{w\}$.
Wtedy wszystkie krawędzie z k do wierzchołków z $S \cup \{w\}$ są wychodzące, zatem stopień wychodzący k to przynajmniej |S|+1, co jest sprzeczne z założeniem, że w miał najwyższy stopień wychodzący w turnieju T.

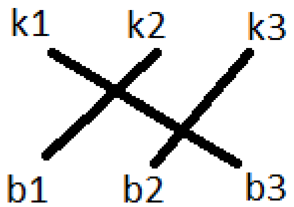
Zadanie 8. (Pisemne)

Kwadratem łacińskim nazywamy kwadrat n×n, w którym na każdym polu stoi liczba ze zbioru $\{1, 2, \dots, n\}$ tak, że w każdej kolumnie oraz w każdym wierszu jest po jednej z liczb $\{1, 2, \dots, n\}$. Prostokątem łacińskim nazywamy prostokąt o n kolumnach i m wierszach, 1 ≤ m ≤ n, w którym na każdym polu stoi liczba ze zbioru $\{1, 2, \dots, n\}$ tak, że w każdym wierszu każda z liczb $\{1, 2, \dots, n\}$ występuje dokładnie raz oraz w każdej kolumnie co najwyżej raz. Czy każdy prostokąt łaciński o m < n wierszach można rozszerzyć o jeden wiersz?

Stwórzmy przykładowy prostokąt łaciński o liczbie kolumn (n = 3) większej od liczby wierszy (m = 2):

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Teraz stwórzmy graf z wierzchołkami k_i, b_i, odpowiadającym i-tej kolumnie oraz liczbie i, której brakuje w kolumnie:



Wtedy każdy wierzchołek (jest ich 2n) k_i ma stopień n – m (bo mamy n liczb, a w każdej kolumnie jest m liczb), a każdy wierzchołek b_i ma stopień n – m (bo mamy n liczb, a w każdym z m wierszy i występuje dokładnie raz).
Tak więc mamy graf dwudzielny regularny w którym każdy wierzchołek ma ten sam stopień. Z twierdzenia Halla wiemy że istnieje skojarzenie doskonałe, czyli możemy utworzyć kolejny wiersz.