Zadanie 5 (pisemne)

Topologiczne porządkowanie wierzchołków acyklicznego digrafu.
Niech D będzie digrafem acyklicznym, tzn. D nie zawiera cykli skierowanych.
Podaj algorytm, który w czasie $O(m+n)$ porządkuje wierzchołki digrafu w taki sposób, że po uporządkowaniu, jeśli (i, j) jest krawędzią skierowaną w D, to $i < j$.

```
def topological_sort(D):
    Q = {queue of vertices with deg_in == 0}

    while Q is not empty:
        remove v from the front of Q
        print v

        for each edge e to u (neighbour of v):
            remove e from D
            if u has no more incoming edges:
                push u to Q

    if G has vertices:
        print "there are cycles in D (which is not acyclic)"
```

W acyklicznym digrafie musi istnieć minimum 1 wierzchołek o stopniu wejściowym równym 0 (inaczej istniałby cykl, co łatwo udowodnić nie wprost). Na początku wkładamy do kolejki Q wszystkie te wierzchołki. Następnie wykonujemy pętlę tak długo, aż ta kolejka będzie pusta.

Wewnątrz pętli stopniowo usuwamy kolejne wierzchołki o stopniu wejściowym 0, a kolejność ich usuwania jest rozwiązaniem.
Po zakończeniu pętli graf D powinien mieć 0 wierzchołków o stopniu wejściowym 0, inaczej nie byłby on acykliczny.

Im mniej krawędzi zawiera D, tym więcej poprawnych rozwiązań istnieje.
Na przykład, graf zawierający n izolowanych wierzchołków ma n! poprawnych uporządkowań, podczas gdy niektóre digrafy mogą mieć tylko 1.
Zwłaszcza ilość elementów w Q na samym początku ma duży wpływ na ilość rozwiązań poprawnych.

Zadanie 6

	Ania	Bartek	Cezary	Dąbrówka	Elwira
Skrzypce	+				+
Harfa	+	+		+	+
Kontrabas	+				+
Wiolonczela	+				+
fortepian		+	+		

Z twierdzenia Halla aby istniało skojarzenie doskonałe (tu: udało się dobrać drużynę) każdy podzbiór k osób musi umieć grać na minimum k różnych instrumentach. W tym przypadku warunek ten nie zachodzi, kontrprzykład:

Weźmy Bartka, Cezarego i Dąbrówkę. Z twierdzenia wynika, że aby dało się dobrać drużynę 5 osób ta trzyosobowa grupa musi umieć grać na minimum 3 różnych instrumentach, co nie zachodzi – potrafią grać tylko na Harfie i Fortepianie. Zatem nie da się stworzyć drużyny, bo

$$|Bartek, Cezary, Dąbrówka| > |harfa, fortepian|$$

Zadanie 8. (Pisemne)

Minimalnym cięciem w grafie jest podzbiór jego krawędzi, których usunięcie rozspaja graf, a usunięcie żadnego podzbioru krawędzi w nim zawartego nie rozspaja grafu. Wykaż, że graf spójny zawiera cykl Eulera wtedy i tylko wtedy, gdy każde minimalne cięcie zawiera parzystą liczbę krawędzi.

Dowód => (nie wprost)

Załóżmy, że graf spójny G zawiera cykl Eulera oraz
istnieje minimalne cięcie zawierające nieparzystą liczbę krawędzi.

Niech M będzie minimalnym cięciem G, zawierającym 2k+1 krawędzi.
Dzieli ono graf G na 2 spójne składowe A oraz G\A.
Bez straty ogólności załóżmy, że cykl Eulera zaczyna się (i kończy) w wierzchołku należącym do A.
Skoro mamy nieparzystą ilość krawędzi w M, to wtedy próba odwiedzenia każdej z nich dokładnie raz zakończy cykl Eulera w składowej G\A, sprzeczność.

Dowód <=
Załóżmy, że każde minimalne cięcie zawiera parzystą liczbę krawędzi.
Pokażę, że graf spójny zawiera cykl Eulera.

Weźmy dowolny wierzchołek v i podzielmy graf G na spójne składowe $g_1, g_2, \dots, g_k$. Wtedy aby rozspójnić graf musimy usunąć parzystą liczbę krawędzi (z założenia że minimalne cięcie jest parzyste) co oznacza, że każdy wierzchołek w grafie ma parzysty stopień, czyli graf zawiera cykl Eulera.

Zadanie 11.
Rozwiąż problem cyklu/drogi Eulera w grafach skierowanych.

Inspirowane tutorialem:
[(106) Proof: Graph is Eulerian iff All Vertices have Even Degree | Euler Circuits, Graph Theory - YouTube]() (tu pokazano dla grafów nieskierowanych, jedyna różnica to zmienić warunek parzystości stopnia każdego wierzchołka na warunek równości stopni wejściowych i wyjściowych)

Niech G będzie grafem spójnym skierowanym.
Twierdzenie: cykl Eulera istnieje w G <-> wszystkie wierzchołki G mają taki sam stopień wejściowy co wyjściowy

---

Dowód ->
Załóżmy, że graf spójny skierowany G zawiera cykl Eulera.
To oznacza, że istnieje wierzchołek $e \in G$, w którym cykl ten zaczyna się i kończy. Weźmy dowolny $v \in G, v \neq e$ i rozważmy jego krawędzie.
Skoro v nie jest wierzchołkiem startowym/końcowym, to dla każdej krawędzi wchodzącej do v musi istnieć krawędź wychodząca, inaczej byłaby sprzeczność z założeniem, że G zawiera cykl Eulera kończący się w wierzchołku $e \neq v$.
Zatem v musi mieć taki sam stopień wejściowy co wyjściowy.
Podobnie dla e, z tym że dodatkowo uwzględniamy krawędź „pierwszą” oraz „ostatnią” cyklu.

Dowód <-
Załóżmy, że wszystkie wierzchołki grafu spójnego skierowanego G mają taki sam stopień wejściowy co wyjściowy. Pokażę, że G zawiera cykl Eulera.

Załóżmy, że S jest najdłuższą ścieżką G. Niech u będzie jej początkiem, natomiast v jej końcem.

(*) Załóżmy nie wprost, że $u \neq v$. Wtedy v zawiera 1 krawędź końcową oraz 2i krawędzi niebędących końcowymi (dla i >= 0). Zatem v ma o 1 krawędź wejściową więcej niż wyjściowych, co jest sprzeczne z założeniem.
Jeśli dodamy do S wierzchołek w, to on również nie będzie spełniał tego założenia, w dodatku będzie kolejna sprzeczność z założeniem, że S jest najdłuższą ścieżką. Zatem musi zachodzić $u = v$.
Skoro tak, to S musi być największym cyklem w G.

Na koniec aby pokazać, że G zawiera cykl Eulera należy pokazać, że cykl S zawiera każdy wierzchołek G.

Nie wprost: załóżmy, że istnieje wierzchołek $y \in G$, który nie należy do S.
Ze spójności G musi istnieć $x \in S$ taki, że istnieje x-y ścieżka.
Niech C' będzie najdłuższą ścieżką w grafie $H = G - E(S)$, zaczynającą się w x.
Z założenia, że każdy wierzchołek G ma taki sam stopień wejściowy i wyjściowy można pokazać jak w (*), że C' jest x-x cyklem.
Skoro tak, to można przedłużyć cykl S o cykl C', co jest sprzecznością z założeniem, że S jest najdłuższym cyklem w G.

Zatem każdy wierzchołek w G należy do S, czyli G zawiera cykl Eulera.

Pokazałem, że cykl Eulera w grafach spójnych skierowanych istnieje wtw gdy dla każdego wierzchołka stopień wejściowy jest równy stopniowi wyjściowemu.

Podobnie jest dla drogi Eulera w grafach spójnych skierowanych – istnieje wtw gdy dokładnie 1 wierzchołek (początkowy drogi) zawiera o 1 krawędź wyjściową więcej od wejściowych oraz dokładnie 1 wierzchołek (końcowy drogi) zawiera o 1 krawędź wyjściową mniej od wejściowych.
Wtedy dla wierzchołków „środkowych" dowód jest podobny jak dla cyklu, a dla wierzchołków początkowego i końcowego istnieje 2i krawędzi wchodzących/wychodzących oraz 1 „bez pary".