Zadanie 1.

Zaczynając od dowolnego pola, czy można obejść ruchem skoczka (konika) szachowego wszystkie pola szachownicy 5 × 5, każde dokładnie raz, i wrócić do punktu początkowego? Odpowiedź uzasadnij.

Planszę szachową należy potraktować jako spójny graf nieskierowany, natomiast możliwość przejścia wszystkich pól jako istnienie cyklu Hamiltona.

Odpowiedź: Nie istnieje żadne poprawne rozwiązanie.
Pokażę to poprzez zaprzeczenie warunkowi koniecznemu z wykładu:
(*) Jeśli graf $G = (A \cup B, E)$ jest dwudzielny, to warunkiem koniecznym na istnienie cyklu Hamiltona jest: $|A| = |B|$.

Zauważmy, że plansza 5x5 ma 25 pól, więc niemożliwe jest zachodzenie równości $|A| = |B|$, gdzie A to zbiór pól czarnych, B to zbiór pól białych. Zatem planszę da się zinterpretować jako graf dwudzielny $G = (A \cup B, E)$ oraz $|A| \neq |B|$, zatem nie istnieje cykl Hamiltona.

Zadanie 2.

Dana jest kostka sera 3 × 3 × 3. Mysz rozpoczyna jedzenie kostki od dowolnego rogu. Po zjedzeniu jednego pola przenosi się do kolejnego mającego wspólną ścianę z ostatnio zjedzonym. Czy możliwe, aby mysz jako ostatnie zjadła środkowe pole?

Odpowiedź: Nie istnieje żadne poprawne rozwiązanie.
Pokażę to poprzez zaprzeczenie warunkowi koniecznemu z wykładu:
(*) Jeśli graf $G = (A \cup B, E)$ jest dwudzielny, to warunkiem koniecznym na istnienie cyklu Hamiltona jest: $|A| = |B|$.

Mamy 27 pól, zatem nie istnieją zbiory równoliczne A,B.
Pokolorujmy każde pole na biało lub czarno i załóżmy, że rogi są koloru czarnego. Z założenia, możemy poruszać się tylko do pól sąsiednich, co oznacza, że każdy ruch oznacza zmianę koloru pola. Żeby odwiedzić 27 pól potrzebujemy 26 ruchów, zatem przedostatnie odwiedzone pole będzie koloru białego. Jednakże, środkowe pole także jest białe, zatem nie można go odwiedzić jako ostatniego.

Zadanie 6. (Pisemne)
Digraf, w którym każda para różnych wierzchołków jest połączona dokładnie jedną krawędzią skierowaną, nazywamy turniejem. Pokaż, że każdy turniej zawiera (skierowaną) ścieżkę Hamiltona tzn. przechodzącą wszystkie wierzchołki.

W tym celu użyjemy indukcji po liczbie wierzchołków.

Podstawa: n = 1, trywialne
n = 2, BSO z założenia istnieje krawędź {u,v}, zatem istnieje też ścieżka Hamiltona postaci u -> v.

Krok: załóżmy, że n-wierzchołkowy turniej zawiera ścieżkę Hamiltona.
Pokażę, że n+1 wierzchołkowy turniej również ją zawiera.

Weźmy dowolny wierzchołek u należący do n+1 wierzchołkowego turnieju.
Z definicji turnieju, wierzchołek ten zawiera dokładnie 1 krawędź z każdym innym wierzchołkiem. Podzielmy resztę grafu na zbiór A wierzchołków, które są początkiem krawędzi do u, oraz zbiór B wierzchołków będących końcem tej krawędzi. Ponieważ $|A| \leq n \; oraz \; |B| \leq n$, to z założenia istnieje ścieżka Hamiltona w grafie $A \cup B$. Na koniec wystarczy połączyć koniec ścieżki z A z u, oraz u z początkiem ścieżki z B. W ten sposób otrzymaliśmy n+1 wierzchołkowy turniej.

Zadanie 7. (Pisemne)
Czy n-wymiarowa kostka zawiera ścieżkę Hamiltona?

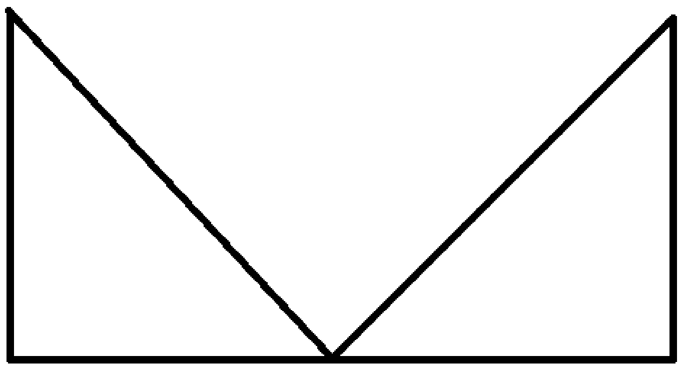
Tak, dowód indukcyjny:
Podstawa: n = 0, mamy 1 wierzchołek, trywialne
Krok: załóżmy, że n-wymiarowa kostka zawiera ścieżkę Hamiltona.
Pokażę, że n+1 wymiarowa kostka także zawiera ścieżkę Hamiltona.

Wiemy, że n+1 wymiarowa kostka składa się z 2 kostek n wymiarowych A,B, gdzie odpowiadające sobie wierzchołki są połączone krawędzią.

Aby stworzyć ścieżkę Hamiltona, wystarczy odwiedzić wszystkie wierzchołki A (wiemy, że się da z założenia), przejść krawędzią do kostki B, a następnie odwiedzić jej wszystkie wierzchołki, zatem istnieje ścieżka Hamiltona.

Zadanie 11. (-)

Podaj przykład grafu pokazujący, że założenie deg(v) ≥ n/2 w twierdzeniu Diraca nie może być zastąpione słabszym założeniem deg(v) ≥ (n − 1)/2.



W tym grafie mamy 5 wierzchołków, każdy spełniający warunek

$$deg(v) \geq \frac{(n-1)}{2} = 2$$

Jednocześnie nie istnieje cykl Hamiltona, gdyż każda próba utworzenia cyklu Hamiltona kończyłaby się odwiedzeniem wierzchołka w dwukrotnie.

Inaczej: nie jest spełniony warunek konieczny istnienia cyklu Hamiltona:
(*) Jeśli graf G = (V, E) zawiera cykl Hamiltona, to dla dowolnego zbioru S ⊆ V, graf G − S (powstały po usunięciu wierzchołków z S wraz z incydentnymi krawędziami) zawiera co najwyżej |S| spójnych składowych.

Dla $S = \{w\}, G - S$ zawiera 2 spójne składowe.