Zadanie 1.

Udowodnij przez indukcję, że dla każdego n naturalnego zachodzi:

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} * a^i * b^{n-i}$$

Podstawa: $n = 0$

$$P = \sum_{i=0}^{0} \binom{0}{i} * a^i * b^{-i} = \binom{0}{0} * a^0 * b^0 = 1 = (a+b)^0 = (a+b)^n = L \blacksquare$$

Krok:

Załóżmy, że dla każdego n naturalnego zachodzi

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} * a^i * b^{n-i}$$

Pokażę, że zachodzi też

$$(a+b)^{n+1} = \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} * a^i * b^{n+1-i}$$

$$L = (a+b)^{n+1} = (a+b) * (a+b)^n = (a+b) * \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} * a^i * b^{n-i} =$$

$$= a * \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} * a^i * b^{n-i} + b * \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} * a^i * b^{n-i} =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} * a^{i+1} * b^{n-i} + \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} * a^i * b^{n-i+1} =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i} * a^{i+1} * b^{n-i} + a^{n+1} + \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} * a^i * b^{n-i+1} + b^{n+1} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i-1} * a^i * b^{n-i+1} + a^{n+1} + \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} * a^i * b^{n-i+1} + b^{n+1} =$$

$$= a^{n+1} + \sum_{i=1}^{n} \left[\left(\binom{n}{i-1} + \binom{n}{i} \right) * a^i * b^{n-i+1} \right] + b^{n+1} =$$

$$= \binom{n+1}{n+1} a^{n+1} + \sum_{i=1}^{n} \left[\binom{n+1}{i} * a^i * b^{n-i+1} \right] + \binom{n+1}{0} b^{n+1} =$$

$$= \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} * a^i * b^{n-i+1} = P$$

Zadanie 2.

Pokaż, że liczba przedstawień liczby naturalnej n w postaci sumy k liczb naturalnych (różnych od zera) wynosi $\binom{n-1}{k-1}$ jeśli przedstawienia różniące się kolejnością składników uważamy za różne. Ile jest przedstawień liczby n w postaci sumy dowolnej ilości liczb naturalnych?

Wiemy, że każdą liczbę naturalną można zapisać w postaci:
$n = 1 + 1 + 1 + 1 + \cdots + 1$ czyli sumy n jedynek.
Sumę k liczb równą n możemy zatem zapisać jako sumę n jedynek oddzielonych k – 1 przecinkami. Przecinki można ustawiać między dowolnymi 2 jedynkami na n – 1 sposobów, stąd liczba przedstawień liczby naturalnej n w postaci sumy k liczb naturalnych (różnych od zera) wynosi $\binom{n-1}{k-1}$.
2) n można zapisać jako sumę od 1 do n liczb, zatem wynikiem będzie suma:

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1}$$

Zadanie 3. (Pisemne)

Oblicz liczbę funkcji niemalejących postaci $f: \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$.

Widzimy, że dla $f: A \to B\ mamy\ |A| = |B|$
Skorzystamy ze wzoru na ilość kombinacji z powtórzeniami:

$$|F| = \binom{n+k-1}{k} = \binom{2n-1}{n}, bo\ |A| = |B|$$

Można to rozumieć tak, że bierzemy wszystkie wartości z B, a następnie stawiamy między nimi n – 1 przegródek. W ten sposób następujące po sobie elementy będą kolejnymi, niemalejącymi wartościami f(x) – elementy z tej samej grupy będą miały tą samą wartość.

Zadanie 4. (Pisemne)

Udowodnij, że $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$ równa się liczbie dróg, po których wieża może przejść z lewego dolnego rogu do prawego górnego rogu szachownicy (n + 1) × (n + 1) poruszając się wyłącznie do góry lub na prawo. Czy potrafisz zwinąć tą sumę?

Zadanie 5.
Na kartce w kratkę zaznaczono 5 punktów kratowych (czyli punktów o obu współrzędnych całkowitoliczbowych). Wykaż, że środek odcinka łączącego pewne dwa spośród tych punktów jest także punktem kratowym.

Mamy następujące możliwości parzystości współrzędnych:
$(P, P), (N, P), (P, N), (N, N)$, mamy zatem 4 różne możliwości.
Skoro wybieramy 5 punktów spośród 4 możliwości, to przynajmniej 2 z nich muszą mieć tą samą kombinację, a wtedy środek odcinka łączącego ma współrzędne całkowite.

Zadanie 6. (Pisemne)
Zadanie 7.
Wykaż, że dla każdej liczby naturalnej n istnieje liczba podzielna przez n, której zapis dziesiętny złożony jest tylko z zer i jedynek.

Wiemy, że ilość różnych reszt z dzielenia przez n wynosi n.
Zatem weźmy n + 1 kolejnych liczb postaci $1, 11, 111, 1111, \ldots$, wtedy istnieją 2 takie liczby $a, b: a > b$ podanej postaci, że $a \,\%\, n = b \,\%\, n$.
Wtedy $(a - b) \% \, n = 0$.

Zadanie 8. (nie deklarowalne)
W każde pole szachownicy n × n wpisujemy jedną z liczb: −1, 0, 1. Następnie dodajemy do siebie liczby stojące w tej samej kolumnie, w tym samym wierszu i na tej samej przekątnej. Udowodnij, że wśród otrzymanych sum co najmniej dwie są równe.

Najpierw policzmy ilość kolumn, wierszy i przekątnych – jest ich $2n + 2$.
Minimalna suma każdego wiersza to -n, a maksymalna to n.
Mamy zatem n sum ujemnych, n sum dodatnich i 1 sumę równą 0.
Zatem łącznie mamy $2n + 1$ różnych sum, stąd co najmniej
2 wiersze/kolumny/przekątne będą miały taką samą sumę.

Zadanie 9. (nie deklarowalne)

Na okręgu zapisujemy w dowolnej kolejności liczby naturalne od 1 do 10. Pokaż, że zawsze znajdą się trzy sąsiednie, których suma wynosi przynajmniej 18.

Ponumerujmy pola, na których zapiszemy liczby, nazwami $k_1, \dots, k_{10}$
Niech pierwsze pole k_1 będzie równe 1.
Wtedy suma pozostałych 9 pól wyniesie 54.
Warunkiem koniecznym dla spełnienia zadania jest to, żeby suma każdej z 3 trójek była mniejsza niż 18, czyli suma 9 pól mniejsza niż 54, co kończy dowód.