Zadanie 2.

W języku programowania PWO++ funkcja cos(x) oblicza z bardzo dużą dokładnością wartość cos(x), jednak tylko wtedy, gdy $0 \leq x \leq \pi/2$.
Wykorzystując funkcję cos, zaproponuj algorytm wyznaczający wartości funkcji cosinus z dużą dokładnością dla $x \in [-2\pi, 2\pi]$.

x = |x| - korzystamy z symetryczności cosinusa aby zawęzić przedział do [0, 2π]
mult = 1
if $x > \pi$
korzystamy z $\cos(x) = -\cos(2\pi - x)$ aby zawęzić przedział do [0, π]

$$mult = -1$$
$$x = 2\pi - x$$

if $x > \frac{\pi}{2}$
korzystamy z $\cos(2x) = 2\cos(x)^2 - 1$ aby zawęzić przedział do [0, π/2]

$$return\ mult * \left(2\cos\left(\frac{x}{2}\right)^2 - 1\right)$$

else

$$return\ mult * \cos(x)$$

Zadanie 4.

Sprawdź dla jakich wartości x zadanie obliczania wartości funkcji f jest źle uwarunkowane, jeśli:
a) f(x) = ln(x),
b) $f(x) = (x-1)^{10}$

Wzór na wskaźnik uwarunkowania zadania:

$$cond(f) = \frac{xf'(x)}{f(x)}$$

Zadanie jest źle uwarunkowane, jeśli

$$\exists x_0 \lim_{x \to x_0} cond(f) = \pm\infty$$

a) $f(x) = ln(x), f'(x) = \frac{1}{x}$

$$\lim_{x \to x_0} cond(f) = \lim_{x \to x_0} \frac{xf'(x)}{f(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{x * \frac{1}{x}}{\ln(x)}$$

Zadanie jest źle uwarunkowane dla $x = 0$

b) $f(x) = (x-1)^{10}, f'(x) = 10(x-1)^9$

$$\lim_{x \to x_0} cond(f) = \lim_{x \to x_0} \frac{xf'(x)}{f(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{x * 10(x-1)^9}{(x-1)^{10}}$$

Zadanie jest źle uwarunkowane dla $x = 1$

Zadanie 7.

Wyprowadź wzór na wskaźnik uwarunkowania zadania obliczania wartości funkcji f w punkcie x. Wartość funkcji $f(x) = e^{5x}$ obliczamy w punkcie x ≈ 0.8. Jak dużej utraty dwójkowych cyfr znaczących spodziewamy się, jeżeli x odbiega od 0.8 o jedną dwójkową cyfrę znaczącą?

$\frac{|(x+h)-x|}{|x|} = \frac{|h|}{|x|}$ – błąd względny zmiany danych

$\frac{|f(x+h)-f(x)|}{|f(x)|}$ – błąd względny zmiany wyniku

$$cond(f) = \frac{\frac{|f(x+h)-f(x)|}{|f(x)|}}{\frac{|h|}{|x|}} = \frac{|f(x+h)-f(x)|}{|f(x)|} * \frac{|x|}{|h|} =$$

$$= \frac{|f(x+h)-f(x)|}{|h|} * \frac{|x|}{|f(x)|} = |f'(x)| * \frac{|x|}{|f(x)|} = \frac{|x * f'(x)|}{|f(x)|}$$

Zadanie 8.

Wytłumacz dokładnie kiedy występuje i na czym polega zjawisko utraty cyfr znaczących wyniku. Dla jakich wartości x obliczanie wartości wyrażenia $\left(\sqrt{x^2+2}+x\right)^{-1}$ może wiązać się z utratą cyfr znaczących wyniku? Zaproponuj sposób obliczenia wyniku dokładniejszego.

Utrata cyfr znaczących występuje kiedy odejmujemy 2 liczby o niewielkiej względnej różnicy. Wtedy przy normalizacji zapisu ostatnie bity są sztucznie wypełnianie bezwartościowymi zerami, tracąc wartość.

Wyrażenie $\frac{1}{\sqrt{x^2+2}+x}$ traci cyfry znaczące, gdy $x \approx -\frac{1}{2}$. Wtedy

$$\lim_{x \to -\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{x^2+2}+x} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4}+2}-\frac{1}{2}} = 1$$

Przy dzieleniu 2 podobnych liczb również zachodzi zjawisko utraty cyfr znaczących.

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+2}+x} = \frac{\sqrt{x^2+2}-x}{2}$$
$$\lim_{x\to-\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{x^2+2}-x}{2} = \frac{\sqrt{\frac{1}{4}+2}+\frac{1}{2}}{2} = 1$$

Zadanie 15.

Opisz metodę bisekcji i podaj jej własności.

Metoda bisekcji jest metodą służącą do znajdowania pojedynczego miejsca zerowego funkcji na danym przedziale [a,b]. Aby zadziałała, wartości na krańcach muszą być różnych znaków, a funkcja ciągła na tym przedziale. Jeśli te warunki są spełnione, to wyznaczamy punkt środkowy m przedziału, jeśli $f(m) = 0$, kończymy proces, jeśli $f(a)f(m) < 0$, to znaczy, że miejsce zerowe jest w lewej połowie przedziału, więc redukujemy przedział do [a,m]. W p.p. redukujemy przedział do [m,b]. Kilka dodatkowych własności:

Po n-tym kroku metody bisekcji przedział ma długość $\frac{b-a}{2^n}$.

Metoda ta jest wolna – zbiega liniowo (jedna cyfra dwójkowa w każdym kroku).

Zbieżność metody jest niezależna od funkcji.

Aby wyznaczyć przybliżenie z błędem mniejszym od e, należy wykonać $\left\lceil \log_2\left(\frac{b-a}{2e}\right)\right\rceil + 1$ kroków.

Zadanie 16.

Stosując metodę Newtona, zaproponuj sposób przybliżonego obliczania wartości $\sqrt[5]{a}$ (a > 0). Jak dobrać x0? Jak powinien wyglądać warunek stopu?

$$x = \sqrt[5]{a}$$
$$x^5 = a$$
$$x^5 - a = 0$$

Stąd otrzymujemy:

$$f(x) = x^5 - a$$
$$f'(x) = 5x^4$$
$$F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - \frac{x^5 - a}{5x^4} = \frac{4x^5 + a}{5x^4}$$

Teraz sprawdzamy zbieżność metody:

$$F'(x) = \frac{4}{5} - \frac{4a}{5x^5}$$

$$|F'(x)| < 1 \; wtw \; \left|\frac{4}{5} - \frac{4a}{5x^5}\right| < 1$$

$$\begin{cases} \dfrac{4}{5} - \dfrac{4a}{5x^5} < 1 \; gdy \; \dfrac{4}{5} - \dfrac{4a}{5x^5} \geq 0 \\ -\left(\dfrac{4}{5} - \dfrac{4a}{5x^5}\right) < 1 \; gdy \; \dfrac{4}{5} - \dfrac{4a}{5x^5} < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a > -\dfrac{x^5}{4} \; gdy \; a \leq x^5 \\ a < \dfrac{9}{4}x^5 \; gdy \; a > x^5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a \in \left(-\dfrac{x^5}{4}, x^5\right] \\ a \in \left(x^5, \dfrac{9}{4}x^5\right) \end{cases}$$

Zatem metoda jest zbieżna dla $a \in \left(-\frac{1}{4}x^5, \frac{9}{4}x^5\right)$

Warunek stopu: jeśli kolejne wartości funkcji różnią się o mniej niż e, zakończ.

Jeśli przekroczono limit n wywołań, zakończ.

Zadanie 19.

Sformułuj i podaj interpretację geometryczną metody siecznych.

Jak w wypadku tej metody powinien wyglądać warunek stopu?

Metoda siecznych wyrażona jest wzorem:

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)\frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

Na początku wybieramy 2 punkty startowe x_0, x_1.

Następnie przeprowadzamy sieczną przechodzącą przez oba punkty.

W miejscu przecięcia się siecznej z osią X ustalamy punkt x_2, który jest kolejnym przybliżeniem miejsca zerowego.

Warunek stopu to osiągnięcie przybliżenia bliższego niż zakładany błąd e, wykonanie podanej ilości kroków albo niewielka odległość względna pomiędzy kolejnymi przybliżeniami.

Zadanie 21.

Sformułuj i uzasadnij uogólniony schemat Hornera obliczania wartości wielomianu podanego w postaci Newtona.

Przypomnienie postaci Newtona wielomianu:

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f[x_0, \dots, x_i] * p_i(x)$$

Wzór ten można zapisać w postaci rekurencyjnej, z której skorzystamy w schemacie Hornera:

$$L_{n+1}(x) = L_n(x) + f[x_0, \dots, x_{n+1}] * p_{n+1}(x)\ dla\ n \in N$$
$$L_0(x) = f[x_0] = f(x_0)$$

Zatem schemat Hornera będzie wyglądał następująco:

$$L_{n+1}(x) = L_n(x) + f[x_0, \dots, x_{n+1}] * p_{n+1}(x) =$$
$$= \left(L_{n-1}(x) + f[x_0, \dots, x_n] * p_n(x)\right) + f[x_0, \dots, x_{n+1}] * p_{n+1}(x) =$$
$$= \Big(\left(L_0(x) + f[x_0, x_1] * p_1(x)\right) \dots\Big) + f[x_0, \dots, x_{n+1}] * p_{n+1}(x) =$$

W każdym kroku będziemy musieli znać wartości $L_n(x), f[x_0, \dots, x_n], p_n(x)$, zatem algorytm wygląda następująco:

$L \leftarrow f(x_0)$ odpowiada za Ln

$F \leftarrow f(x_0)$ odpowiada za ilorazy różnicowe

$P \leftarrow 1$ odpowiada za iloczyn pn

$i \leftarrow 1$ iterator pętli

Dopóki $i < n + 1$

$$F \leftarrow \frac{f[x_1, \dots, x_{i-1}, x_i] - f[x_0, x_1, \dots, x_{i-1}]}{x_i - x_0}$$
$$P \leftarrow P * (x - x_i)$$
$$L \leftarrow L + F * P$$
$$i \leftarrow i + 1$$

zwróc L

Zadanie 22.

Sformułuj i uzasadnij algorytm Clenshawa obliczania wartości wielomianu podanego w postaci Czebyszewa.

Wielomiany Czebyszewa wyrażone są w postaci:

$$\begin{cases} T_0(x) = 1, T_1(x) = x \\ T_k(x) = 2xT_{k-1}(x) - T_{k-2}(x)\ dla\ k \geq 2 \end{cases}$$

Algorytm Clenshawa będzie postaci:

$$\begin{cases} B_{n+1} = B_{n+2} = 0 \\ B_k = 2xB_{k+1} - B_{k+2} + c_k \; dla \; k \geq 2 \end{cases}$$

Chcemy pokazać, że $\frac{B_0 - B_2}{2} = \sum_{k=0}^{n}{}' c_k T_k(x)$

Wzór indukcyjny Bk przekształcamy do postaci:

$$c_k = B_k - 2xB_{k+1} + B_{k+2}$$

A następnie podstawiamy to do wzoru:

$$\sum_{k=0}^{n}{}' c_k T_k(x) = \sum_{k=0}^{n}{}' (B_k - 2xB_{k+1} + B_{k+2}) T_k(x) =$$

$$= \frac{1}{2} B_0 T_0(x) + B_1 T_1(x) - xB_1 T_0(x) + \sum_{k=2}^{n} B_k T_k(x) + \sum_{k=1}^{n-1} -2xB_{k+1} T_k(x)$$

$$+ \sum_{k=0}^{n-2} B_{k+2} T_k(x) - \frac{1}{2} B_2 T_0(x) =$$

$$= \frac{1}{2} B_0 T_0(x) + B_1 T_1(x) - xB_1 T_0(x) + \sum_{k=2}^{n} B_k T_k(x) + \sum_{k=2}^{n} -2xB_k T_{k-1}(x)$$

$$+ \sum_{k=2}^{n} B_k T_{k-2}(x) - \frac{1}{2} B_2 T_0(x) =$$

$$= \frac{1}{2} B_0 T_0(x) + B_1 T_1(x) - xB_1 T_0(x) + \sum_{k=2}^{n} B_k \big(T_k(x) - 2xT_{k-1}(x) + T_{k-2}(x)\big)$$

$$- \frac{1}{2} B_2 T_0(x) =$$

Ze wzoru na wielomiany Czebyszewa nawias pod sumą się zeruje, zatem:

$$= \frac{1}{2} B_0 T_0(x) + B_1 T_1(x) - xB_1 T_0(x) - \frac{1}{2} B_2 T_0(x) =$$

$$= \frac{1}{2} B_0 + xB_1 - xB_1 - \frac{1}{2} B_2 = \frac{1}{2} B_0 - \frac{1}{2} B_2 = \frac{B_0 - B_2}{2} \blacksquare$$

Zadanie 5, lista 6

Udowodnij istnienie i jednoznaczność rozwiązania zadania interpolacyjnego Lagrange'a.

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \prod_{j=0, j \neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

$$x_0, x_1, \dots, x_n - węzły\ interpolacji$$

Istnienie wielomianu interpolacyjnego

Niech $\lambda_i(x) = \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{x-x_j}{x_i-x_j}$. Rozważmy przypadki $x_k \in \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$:

1) $i = k, \lambda_i(x_k) = \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{x_i-x_j}{x_i-x_j} = 1$

2) $i \neq k, \lambda_i(x_k) = \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{x_k-x_j}{x_i-x_j} = \frac{(x_k-x_0)\dots(x_k-x_k)\dots(x_k-x_n)}{x_i-x_j} = 0$

Dla $x_k \in \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ mamy:

$$L_n(x_k) = y_0\lambda_0(x_k) + \dots + y_k\lambda_k(x_k) + \dots + y_n\lambda_n(x_k) = y_k\lambda_k(x_k) = y_k$$

Zatem $L_n(x_k) = y_k$ jest wielomianem interpolacyjnym.

Jednoznaczność wielomianu interpolacyjnego

Załóżmy nie wprost, że P,Q są 2 różnymi wielomianami interpolacyjnymi stopnia n,czyli $\forall x \in \{x_0, x_1, \dots, x_n\}\ P(x) = Q(x) = f(x)$ oraz $\exists x\ P(x) \neq Q(x)$.

Rozważmy wielomian $R = P - Q$, ma on następujące własności:

1) ma stopień maksymalnie n, bo różnica 2 wielomianów stopnia n nie może być wyższego stopnia,

2) $\forall x \in \{x_0, x_1, \dots, x_n\}\ R(x) = P(x) - Q(x) = 0$, zatem ma n+1 miejsc zerowych.

Zatem mamy sprzeczność, bo wielomian n-tego stopnia ma maksymalnie n miejsc zerowych, co kończy dowód.

Zadanie 1, lista 7

Wykaż, że dla wielomianów

$$\lambda_k(x) = \prod_{j=0, j\neq k}^{n} \frac{x - x_j}{x_k - x_j} \ (k = 0,1, \dots, n)$$

zachodzi

a) $\sum_{k=0}^{n} \lambda_k(x) = 1$

b) $\sum_{k=0}^{n} \lambda_k(0){x_k}^j = 0\ (j = 1,2, \dots, n)$

a) Wiemy, że zachodzi $w_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) * \lambda_k(x)$

Skoro $w_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) * \lambda_k(x) = \sum_{i=0}^{n} \lambda_k(x)$, to f(x) = 1

Z jednoznaczności wielomianu interpolacyjnego:

$$1 = f(x) = w_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k(x) \ \blacksquare$$

b) $\sum_{k=0}^{n} \lambda_k(0) {x_k}^j = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k(0) * \sum_{k=0}^{n} {x_k}^j = \sum_{k=0}^{n} {x_k}^j$
Stąd $f(x) = x^n$
Zatem z jednoznaczności wielomianu interpolacyjnego:

$$x^j = w_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \lambda_i(x) = \sum_{i=0}^{n} {x_i}^j \lambda_i(x)$$

Stąd dla x = 0 mamy

$$0^j = \sum_{i=0}^{n} 0 * \lambda_i(0) = 0 \blacksquare$$

Zadanie 6, lista 7

Funkcję $f(x) = ln(2x - 3)$ interpolujemy wielomianem Ln ∈ Πn w pewnych n+1 różnych punktach przedziału [4, 5]. Znajdź wartość n, dla której $max_{x \in [4,5]} |f(x) - L_n(x)| \leq 10^{-10}$.
Jak zmieni się sytuacja, gdy użyjemy węzłów Czebyszewa odpowiadającym przedziałowi [4, 5]?

Oznaczenie z repetytorium: $\|f\| = \max(f)$ na danym przedziale (tu na przedziale [4,5])
Wiemy, że $(*)$ $\|f(x) - L_n(x)\| \leq \frac{|f^{(n+1)}(x)|}{(n+1)!} \|p_{n+1}(x)\|$
Wyliczmy kolejne pochodne f(x):

$$f'(x) = \frac{2}{2x - 3}$$

$$f''(x) = -\frac{4}{(2x-3)^2}$$

$$f^{(3)}(x) = \frac{16}{(2x-3)^3}$$

$$f^{(4)}(x) = -\frac{96}{(2x-3)^4}$$

W ogólności można zauważyć:

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \frac{2^n * (n-1)!}{(2x-3)^n}$$

$$f^{(n+1)}(x) = (-1)^n \frac{2^{n+1} * n!}{(2x-3)^{n+1}}$$

Wstawiając to do (*) otrzymujemy:

$$\|f(x) - L_n(x)\| \leq \frac{\left|(-1)^n \frac{2^{n+1} * n!}{(2x-3)^{n+1}}\right|}{(n+1)!} \|p_{n+1}(x)\|$$

$$\|f(x)-L_n(x)\| \le \frac{\left|\frac{2^{n+1}}{(2x-3)^{n+1}}\right|}{n+1}\|p_{n+1}(x)\|$$

$$\|f(x)-L_n(x)\| \le \left|\frac{2^{n+1}}{(n+1)(2x-3)^{n+1}}\right|$$

Skoro $max_{x\in[4,5]}|f(x)-L_n(x)| \le 10^{-10}$ to znaczy, że szukamy $x \in [4,5]$ dla którego wartość $\left|\frac{2^{n+1}}{(n+1)(2x-3)^{n+1}}\right|$ jest jak największa, czyli mianownik $(n+1)(2x-3)^{n+1}$ jest jak najmniejszy,

zatem niech x = 4, wtedy:

$$\frac{2^{n+1}}{(n+1)5^{n+1}} \le 10^{-10}$$

$$\frac{2^{n+1}}{5^{n+1}(n+1)} \le 10^{-10}$$

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1} \le (n+1)10^{-10}$$

$$n \ge 10^{10}\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1} - 1$$

Zatem $n \ge 21$

Część z węzłami Czebyszewa:

Dla węzłów Czebyszewa zachodzi

$$\|f(x)-L_n(x)\| \le \frac{2^{n+1}}{(n+1)5^{n+1}}\|p_{n+1}(x)\|$$

$$\|f(x)-L_n(x)\| \le \frac{2^{n+1}}{(n+1)5^{n+1}} * \frac{1}{2^n} * \frac{1}{2^{n+1}} \le 10^{-10}$$

$$\frac{1}{(n+1)5^{n+1}} * \frac{1}{2^n} \le 10^{-10}$$

$$\frac{1}{(n+1)*5*10^n} \le 10^{-10}$$

$$\frac{10^{10}}{5*10^n} \le n+1$$

$$n \ge \frac{10^{10-n}}{5} - 1$$

Zatem $n \ge 9$

Wniosek:

Używając węzłów Czebyszewa możemy otrzymać podobne przybliżenie przy mniejszej ilości punktów.

Zadanie 25.

Podaj postać Newtona wielomianu interpolacyjnego dla następujących danych:

a)

x_k	-2	-1	0	1
y_k	2	0	2	-4

b)

x_k	-2	-1	0	1	2
y_k	2	0	2	-4	-30

W tym zadaniu skorzystamy z ilorazów różnicowych:

$$\begin{cases} f[x_i] = f(x_i) = y_i \\ f\left[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{j-1}, x_j\right] = \dfrac{f\left[x_{i+1}, \dots, x_{j-1}, x_j\right] - f\left[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{j-1}\right]}{x_j - x_i} \end{cases}$$

Oraz iloczynu kolejnych miejsc zerowych:

$$p_n(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1})$$

Wtedy postać Newtona wielomianu interpolacyjnego wygląda następująco:

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f[x_0, \dots, x_i] * p_i(x)$$

Tworzymy trójkątną tablicę ilorazów różnicowych:

x_k	y_k	$f[x_k]$	$f[x_k, x_{k+1}]$	$f[x_k, x_{k+1}, x_{k+2}]$	$f[x_k, x_{k+1}, x_{k+2}, x_{k+3}]$
-2	2				
-1	0	-2			
0	2	2	2		
1	-4	-6	-4	-2	
2	-30	-26	-10	-2	0

Zatem postacią Newtona jest:

$$L_n(x) = 2 - 2(x + 2) + 2(x + 2)(x + 1) - 2(x + 2)(x + 1)x$$

Zadanie 29.

(a) Podaj definicję naturalnej funkcji sklejanej trzeciego stopnia.

(b) Znajdź naturalną funkcję sklejaną trzeciego stopnia dla danych

x_k	-1	0	1
y_k	-1	2	-3

NIFS3 to funkcja ciągła, która jest „sklejeniem” n-1 wielomianów 3 stopnia. Wielomiany te spełniają warunki interpolacji oraz są ciągłe. NIFS3 jest gładka, czyli wartość 2 pochodnej na lewym i prawym krańcu przedziału jest równa zero.

$$s(x) = \begin{cases} Ax^3 + Bx^2 + Cx + D \; dla \; x \in [-1,0] \\ Ex^3 + Fx^2 + Gx + H \; dla \; x \in [0,1] \end{cases}$$

$$s'(x) = \begin{cases} 3Ax^2 + 2Bx + C \; dla \; x \in [-1,0] \\ 3Ex^2 + 2Fx + G \; dla \; x \in [0,1] \end{cases}$$

$$s''(x) = \begin{cases} 6Ax + 2B \; dla \; x \in [-1,0] \\ 6Ex + 2F \; dla \; x \in [0,1] \end{cases}$$

Stąd otrzymujemy następujące zależności:

1. Z warunku interpolacji

$$\begin{cases} s(-1) = -1 \rightarrow -A + B - C + D = -1 \\ s(0) = 2 \rightarrow D = 2 \\ s(0) = 2 \rightarrow H = 2 \\ s(1) = -3 \rightarrow E + F + G + H = -3 \end{cases}$$

2. Z warunku ciągłości

$$\begin{cases} s'(0^-) = s'(0^+) \rightarrow C = G \\ s''(0^-) = s''(0^+) \rightarrow B = F \end{cases}$$

3. Z warunku gładkości

$$\begin{cases} s''(-3) = 0 \rightarrow -18A + 2B = 0 \\ s''(3) = 0 \rightarrow 18E + 2F = 0 \end{cases}$$

Stąd otrzymujemy macierz postaci:

$$\left[\begin{array}{cccccccc|c} -1 & 1 & -1 & 1 & & & & & -1 \\ & & & 1 & & & & & 2 \\ & & & & & & & 1 & 2 \\ & & & & 1 & 1 & 1 & 1 & -3 \\ & & 1 & & & & -1 & & 0 \\ & 1 & & & & -1 & & & 0 \\ -18 & 2 & & & & & & & 0 \\ & & & & 18 & 2 & & & 0 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cccccccc|c} 1 & & & & & & & & -1/2 \\ & & & 1 & & & & & 2 \\ & & & & & & & 1 & 2 \\ & & & & 1 & & & & 1/2 \\ & & 1 & & & & & & -1 \\ & 1 & & & & & & & -9/2 \\ & & & & & & 1 & & -1 \\ & & & & & 1 & & & -9/2 \end{array}\right]$$

Stąd NIFS3 jest postaci:

$$s(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x^3 - \frac{9}{2}x^2 - x + 2 \; dla \; x \in [-1,0] \\ \frac{1}{2}x^3 - \frac{9}{2}x^2 - x + 2 \; dla \; x \in [0,1] \end{cases}$$

Zadanie 37.

Pomiary (tk, ck) (0 ≤ k ≤ N; tk > 0, ck > 1) pewnej zależnej od czasu wielkości fizycznej C sugerują, że wyraża się ona wzorem

$$C(t) = 2^{\left(\frac{1}{At^2+2018}\right)}$$

Stosując aproksymację średniokwadratową, wyznacz prawdopodobną wartość parametru A.

$$\log_2 C(t) = \frac{1}{At^2 + 2018}$$

$$At^2 = \frac{1}{\log_2 C(t)} - 2018$$

Niech $g_0(t) = At^2, f(x) = \frac{1}{\log_2 C(t)} - 2018$

Stąd otrzymujemy:

$$\langle g_0, g_0\rangle A = \langle g_0, f\rangle$$

$$A = \frac{\langle g_0, f\rangle}{\langle g_0, g_0\rangle}$$

Zadanie 39.

(a) Znajdź wielomiany P0, P1, P2 ortogonalne względem iloczynu skalarnego

$$(f, g) = f(-2)g(-2) + f(-1)g(-1) + f(0)g(0) + f(1)g(1) + f(2)g(2)$$

(b) Wykorzystując wynik otrzymany w punkcie (a), wyznacz wielomian $w_2^* \in \Pi_2$ najlepiej dopasowany w sensie aproksymacji średniokwadratowej do danych

x_k	-2	-1	0	1	2
y_k	4	1	1	1	4

(a) Wyliczamy ciąg wielomianów ortogonalnych:

$$c_1 = \frac{\langle xP_0, P_0\rangle}{\langle P_0, P_0\rangle} = \frac{\langle x, 1\rangle}{\langle 1,1\rangle} = \frac{\sum_{i=0}^{4} x_i}{5} = 0$$

$$c_2 = \frac{\langle xP_1, P_1\rangle}{\langle P_1, P_1\rangle} = \frac{\langle x^2, x\rangle}{\langle x, x\rangle} = \frac{\sum_{i=0}^{4} x^3}{\sum_{i=0}^{4} x^2} = 0$$

$$d_2 = \frac{\langle P_1, P_1\rangle}{\langle P_0, P_0\rangle} = \frac{\langle x, x\rangle}{\langle 1,1\rangle} = \frac{\sum_{i=0}^{4} x^2}{5} = 2$$

$$\begin{cases} P_0(x) = 1 \\ P_1(x) = x - c_1 = x \\ P_2(x) = (x - c_2)P_1(x) - d_2 = x^2 - 2 \end{cases}$$

(b) Wyliczamy wartości współczynników ak dla $f(x_i) = y_i$:

$$a_0 = \frac{\langle f, P_0 \rangle}{\langle P_0, P_0 \rangle} = \frac{\langle f, 1 \rangle}{\langle 1,1 \rangle} = \frac{\sum_{i=0}^{4} y_i}{5} = 2.2$$

$$a_1 = \frac{\langle f, P_1 \rangle}{\langle P_1, P_1 \rangle} = \frac{\langle f, x \rangle}{\langle x, x \rangle} = \frac{\sum_{i=0}^{4} x_i y_i}{\sum_{i=0}^{4} x^2} = 0$$

$$a_2 = \frac{\langle f, P_2 \rangle}{\langle P_2, P_2 \rangle} = \frac{\langle f, x^2 - 2 \rangle}{\langle x^2 - 2, x^2 - 2 \rangle} = \frac{\sum_{i=0}^{4} (x^2 - 2) y_i}{\sum_{i=0}^{4} (x^2 - 2)^2} = \frac{12}{14} = \frac{6}{7}$$

Stąd wielomianem optymalnym jest:

$$w_2^* = 2,2 + \frac{6}{7}(x^2 - 2) = \frac{6}{7}x^2 + \frac{17}{35}$$

Zadanie 42.

Podaj definicję ciągu wielomianów ortogonalnych względem dyskretnego iloczynu skalarnego $(\cdot,\cdot)_N$. Jak efektywnie wyznaczać takie wielomiany? Jakie jest ich zastosowanie w aproksymacji średniokwadratowej na zbiorze dyskretnym?

Ciąg wielomianów $P_0, P_1, \dots, P_n$ nazywamy ciągiem wielomianów ortogonalnych względem dyskretnego iloczynu skalarnego $(\cdot,\cdot)_N$ jeśli spełniają 2 warunki:

1. P_k jest stopnia k,
2. $\langle P_i, P_j \rangle = \begin{cases} 0 \; dla \; i \neq j \\ > 0 \; dla \; i = j \end{cases}$

Ciąg wielomianów ortogonalnych efektywnie wylicza się wzorem:

$$\begin{cases} P_0(x) = 1 \\ P_1(x) = x - c_1 \\ P_k(x) = (x - c_k)P_{k-1}(x) - d_k P_{k-2}(x) \; dla \; k \geq 2 \end{cases}$$

gdzie $c_k = \frac{\langle x P_{k-1}, P_{k-1} \rangle}{\langle P_{k-1}, P_{k-1} \rangle}$, $d_k = \frac{\langle P_{k-1}, P_{k-1} \rangle}{\langle P_{k-2}, P_{k-2} \rangle}$

W aproksymacji średniokwadratowej na zbiorze dyskretnym korzystamy z wielomianów ortogonalnych aby znaleźć wielomian optymalnie aproksymujący funkcję:

$$w_m^* = \sum_{k=0}^{m} a_k P_k(x)$$

gdzie $a_k = \frac{\langle f, P_k \rangle}{\langle P_k, P_k \rangle}$

Zadanie 43.

Znajdź wielomian $w_2^* \in \Pi_2$ najlepiej dopasowany w sensie aproksymacji średniokwadratowej do następujących danych:

x_k	-4	-3	-2	-1	1	2	3	4
y_k	-5.5	-5	-3.2	-1	1	3.2	5	5.5

$$w_2^* = \sum_{k=0}^{2} a_k P_k(x)$$

Wyliczamy ciąg wielomianów ortogonalnych:

$$c_1 = \frac{\langle xP_0, P_0\rangle}{\langle P_0, P_0\rangle} = \frac{\langle x, 1\rangle}{\langle 1,1\rangle} = \frac{\sum_{i=0}^{7} x_i}{8} = 0$$

$$c_2 = \frac{\langle xP_1, P_1\rangle}{\langle P_1, P_1\rangle} = \frac{\langle x^2, x\rangle}{\langle x, x\rangle} = \frac{\sum_{i=0}^{7} x^3}{\sum_{i=0}^{7} x^2} = 0$$

$$d_2 = \frac{\langle P_1, P_1\rangle}{\langle P_0, P_0\rangle} = \frac{\langle x, x\rangle}{\langle 1,1\rangle} \frac{\sum_{i=0}^{7} x^2}{8} = \frac{15}{2}$$

$$\begin{cases} P_0(x) = 1 \\ P_1(x) = x - c_1 = x \\ P_2(x) = (x - c_2)P_1(x) - d_2 = x^2 - \dfrac{15}{2} \end{cases}$$

Oraz wartości współczynników ak dla $f(x_i) = y_i$:

$$a_0 = \frac{\langle f, P_0\rangle}{\langle P_0, P_0\rangle} = \frac{\langle f, 1\rangle}{\langle 1,1\rangle} = \frac{\sum_{i=0}^{7} y_i}{8} = 0$$

$$a_1 = \frac{\langle f, P_1\rangle}{\langle P_1, P_1\rangle} = \frac{\langle f, x\rangle}{\langle x, x\rangle} = \frac{\sum_{i=0}^{7} x_i y_i}{\sum_{i=0}^{7} x^2} = 1{,}48$$

$$a_2 = \frac{\langle f, P_2\rangle}{\langle P_2, P_2\rangle} = \frac{\langle f, x^2 - \frac{15}{2}\rangle}{\langle x^2 - \frac{15}{2}, x^2 - \frac{15}{2}\rangle} = \frac{\sum_{i=0}^{7}\left(x^2 - \frac{15}{2}\right) y_i}{\sum_{i=0}^{7}\left(x^2 - \frac{15}{2}\right)^2} = 0$$

Stąd wielomianem optymalnym jest:

$$w_2^* = 1{,}48x$$

Zadanie 44.

Podaj definicję rzędu kwadratury liniowej $Q_n(f) = \sum_{k=0}^{n} A_k^{(n)} f\left(x_k^{(n)}\right)$.

Udowodnij, że jeśli rząd kwadratury Qn wynosi przynajmniej n + 1, to jest to kwadratura interpolacyjna.

Rząd kwadratury liniowej Qn to taka stała r, że zachodzą:

1) $\forall w \in \Pi_{r-1}$ błąd kwadratury jest równy 0, czyli $Q_n(w) = \int_a^b w(x)dx$

2) $\exists w$ stopnia r, dla którego błąd kwadratury jest różny od 0, czyli

$$Q_n(w) \neq \int_a^b w(x)dx$$

Załóżmy, że rząd kwadratury wynosi przynajmniej n+1.

Pokażę, że kwadratura ta jest interpolacyjna.

Rozważmy wielomian Lagrange'a w węzłach kwadratury.

Wiemy, że zachodzi:

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\lambda_i$$

gdzie:

$$\lambda_i(x) = \prod_{k=0,k\neq i}^{n} \frac{x - x_k}{x_i - x_k}, \lambda_i(x_k) = 0 \; oraz \; \lambda_i(x_i) = 1$$

Niech $f(x) = \lambda_i(x) \in \Pi_n$, wtedy:

$$\int_a^b \lambda_i(x)dx = Q_n(\lambda_i) = \sum_{k=0}^{n} A_k\lambda_i(x_k) = A_i\lambda_i(x) = A_i$$

Stąd otrzymujemy:

$$Q(f) = \int_a^b f(x) = \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k) = \int_a^b L_n(x)dx \; \blacksquare$$

Zadanie 45.

Jaki maksymalnie rząd może mieć kwadratura liniowa? Odpowiedź uzasadnij.

Maksymalny rząd kwadratury liniowej to 2n+2, dowód:

Zbudujemy wielomian $W \in \Pi_{2n+2}$ dla którego $\int_a^b f(x)dx \neq \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$.

Niech $f(x) = \prod_{k=0}^{n}(x - x_k)^2 \in \Pi_{2n+2}$ dla której $f(x) \geq 0$.

Stąd $\int_a^b f(x) > 0$ (bo $f(x) = 0$ tylko dla miejsc zerowych)

Jednocześnie $\sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k) = 0$ (bo są to miejsca zerowe wielomianu interp.)

Zatem nie zachodzi $\int_a^b f(x) = \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$ $\blacksquare$

Zadanie 46.

Opisz w szczegółach kwadratury interpolacyjne (m.in. podaj ideę, wyprowadź wzory na współczynniki, uwzględnij szczególną sytuację, gdy węzły są równoodległe, nie zapomnij o najlepszych kwadraturach interpolacyjnych, itp.).

Kwadratury interpolacyjne służą do obliczenia przybliżonej wartości całki, gdy funkcja podcałkowa jest trudna do scałkowania. Wtedy zamienia się ją na wielomian interpolacyjny, który łatwiej jest scałkować, i liczy całkę z tego wielomianu. Dla kwadratur interpolacyjnych rząd jest z zakresu $[n+1, 2(n+1)]$. Wtedy zachodzi:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b L_n(x)dx = \int_a^b \left[\sum_{k=0}^{n} \left(\prod_{j=0, j\neq k}^{n} \frac{x-x_j}{x_k-x_j}\right) f(x_k)\right] dx =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$$

$$A_k = \int_a^b \left[\prod_{j=0, j\neq k}^{n} \frac{x-x_j}{x_k-x_j}\right] dx$$

Błąd kwadratury interpolacyjnej wynosi $\frac{1}{(n+1)!}\int_a^b f^{(n+1)}(\theta)(x-x_0)\dots(x-x_n)$

Aby zmaksymalizować rząd kwadratur interpolacyjnych do 2n+2, można wybrać kwadratury interpolacyjne dla węzłów równoodległych, czyli kwadratury Newtona-Cotesa. Wyróżniamy przede wszystkim 2 rodzaje kw. NC:

1. Wzór trapezów Q_1^{NC}:

$$Q_1^{NC}(f) = \frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)]$$

Błąd tego wzoru wynosi:

$$R_1^{NC}(f) = -\frac{h^3}{12} f^{(2)}(\theta)$$

2. Wzór Simpsona Q_2^{NC}:

$$Q_2^{NC}(f) = \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]$$

Błąd tego wzoru wynosi:

$$R_2^{NC}(f) = -\frac{h^5}{90} f^{(4)}(\theta)$$

Zadanie 50. Znajdź rozkład LU macierzy

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ -2 & -5 & 3 & -4 \\ 4 & 12 & -10 & 9 \\ -8 & -24 & 32 & -16 \end{bmatrix}$$

Następnie wykorzystaj otrzymany rozkład do rozwiązania układu równań $Ax = b$, gdzie $b = [17, -33, 70, -112]^T$.

Metoda polega na tym, że dopisujemy z lewej strony macierz jednostkową B, a następnie wykonujemy eliminację Gaussa na macierzy A aż otrzymamy macierz górnotrójkątną U.
Jeśli w danym kroku pole A_{ij} się wyzerowało po odjęciu k-krotności innego wiersza, to w pole B_{ij} wpisujemy k.
Przykładowo, w 1 kroku zerujemy pole A_{21} poprzez odjęcie -2 krotności pierwszego wiersza, stąd w następnym kroku ustalamy $B_{21} = -2$.
Inaczej: jeśli zerujemy pole A_{ij} poprzez odjęcie wielokrotności r-tego rzędu, to wtedy $B_{ij} = \frac{A_{ij}}{A_{rj}}$.

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & -5 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & 12 & -10 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -8 & -24 & 32 & -16 \end{array}\right] \to$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & 12 & -10 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -8 & -24 & 32 & -16 \end{array}\right] \to$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -8 & -24 & 32 & -16 \end{array}\right] \to$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 & -6 & 1 \\ -8 & 0 & 0 & 1 & 0 & -8 & 24 & 0 \end{array}\right] \to$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 4 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ -8 & 0 & 0 & 1 & 0 & -8 & 24 & 0 \end{array}\right] \to$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 4 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ -8 & 8 & 0 & 1 & 0 & 0 & 16 & 0 \end{array}\right] \to$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 4 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ -8 & 8 & -8 & 1 & 0 & 0 & 0 & 8 \end{array}\right]$$

Stąd otrzymujemy rozkład LU postaci:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -4 & 1 & 0 \\ -8 & 8 & -8 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

Teraz obliczamy układ równań metodą faktoryzacji:

$$\begin{cases} Ly = b \\ Ux = y \end{cases}$$

Pierwsza równość jest postaci:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -4 & 1 & 0 \\ -8 & 8 & -8 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 \\ -33 \\ 70 \\ -112 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 17 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & -33 \\ 4 & -4 & 1 & 0 & 70 \\ -8 & 8 & -8 & 1 & -112 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 17 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 8 & -8 & 1 & 24 \end{array}\right] \to$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 17 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & -8 & 1 & 16 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 17 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 64 \end{array}\right] \to \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 \\ 1 \\ 6 \\ 64 \end{bmatrix}$$

Druga równość jest postaci:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 \\ 1 \\ 6 \\ 64 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 & 17 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 64 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 & 17 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 8 \end{array}\right] \to$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 8 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 8 \end{array}\right] \to \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 8 \end{bmatrix}$$