Zadanie 1.

Włącz komputer! 2 punkty

Dla jakich wartości x obliczanie wartości wyrażeń

a) $\left(x+\sqrt{x^2+2022^2}\right)^{-1}$,

b) $log_3 x - 7$,

c) $4\cos^2 x - 3$

może wiązać się z utratą cyfr znaczących wyniku? Zaproponuj sposoby obliczenia wyniku dokładniejszego. Pokaż, że sposoby te działają w praktyce.

a) dla x bardzo dużego i ujemnego mamy $x+\sqrt{x^2+2022^2} \approx 0$

$$\left(x+\sqrt{x^2+2022^2}\right)^{-1} = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+2022^2}} = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+2022^2}} * \frac{x-\sqrt{x^2+2022^2}}{x-\sqrt{x^2+2022^2}} =$$

$$= \frac{x-\sqrt{x^2+2022^2}}{-2022^2} = \frac{\sqrt{x^2+2022^2}-x}{2022^2}$$

b) dla x = 2187 mamy wzór:

$$log_3 x - 7 = log_3 x - log_3(3^7) = log_3 x - log_3(2187) = log_3\left(\frac{x}{2187}\right) =$$

$$= \frac{ln\left(\frac{x}{2187}\right)}{ln3} = ln\left(\frac{x}{2187}\right) * \frac{1}{ln3}$$

c) dla $x \in \left\{\frac{\pi}{6}k, \frac{5\pi}{6}k\right\}$ mamy wzory:

(1) $\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$

Zwłaszcza (1a) $\cos(2x+x) = \cos(2x)\cos(x) - \sin(2x)\sin(x)$

(2) $\cos(2a) = \cos(a)^2 - \sin(a)^2$

(3) $\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$

Stąd: $4\cos^2 x - 3 = 4\cos^2 x - 3(\sin^2 x + \cos^2 x) = \cos^2 x - \sin^2 x - 2\sin^2 x =$

$$= \cos^2 x - \sin^2 x - 2\sin^2 x = (2) = (\cos(2x) - 2\sin^2 x) * \left(\frac{\cos(x)}{\cos(x)}\right) =$$

$$= \left(\frac{\cos(2x) * \cos(x) - 2\sin^2 x * \cos(x)}{\cos(x)}\right) =$$

$$= \left(\frac{\cos(2x) * \cos(x) - 2\sin(x)\cos(x)\sin(x)}{\cos(x)}\right) = (3) =$$

$$= \left(\frac{\cos(2x) * \cos(x) - \sin(2x)\sin(x)}{\cos(x)}\right) = (1a) = \frac{\cos(3x)}{\cos(x)}$$

Zadanie 2.

Włącz komputer! 1 punkt

Podaj (w miarę) bezpieczny numerycznie algorytm obliczania zer równania kwadratowego $ax^2 + bx + c = 0 \; dla \; a \neq 0$. Przeprowadź testy dla odpowiednio dobranych wartości a, b i c pokazujące, że Twój algorytm jest lepszy od metody szkolnej bazującej jedynie na dobrze znanych wzorach

$$x1{,}2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Ten wzór nie jest dobry, gdy $\sqrt{b^2 - 4ac} \approx b$.

Wtedy $x_1 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \approx \frac{-b-b}{2a} = -\frac{b}{a}$

$x_2 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \approx \frac{-b+b}{2a} = 0$ (źle, bo utracimy cyfry znaczące)

Lepiej skorzystać ze wzorów Viete'a żeby wyznaczyć x2:

$$x_1 x_2 = \frac{c}{a} \to x_2 = \frac{c}{a x_1} \to x_2 = \frac{c}{a * \left(-b - \sqrt{b^2 - 4ac}\right)} \to$$

$$x_2 = \frac{c}{-ab - a\sqrt{b^2 - 4ac}}$$

Dla $\sqrt{b^2 - 4ac} \approx b$ otrzymamy:

$$x_2 \approx \frac{c}{-ab - ab} = \frac{c}{-2ab}$$

Zadanie 3. 1 punkt

Wyprowadź wzór na wskaźnik uwarunkowania zadania obliczania wartości funkcji f w punkcie x.

Wzór na względną zmianę danych: $\left|\frac{(x+h)-x}{x}\right| = \left|\frac{h}{x}\right|$

Wzór na względną zmianę wyniku: $\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{f(x)}\right|$

Wzór na wskaźnik uwarunkowania:

$$Cond(x) = \frac{błąd\ względny\ wyniku}{błąd\ względny\ danych}$$

$$Cond(x) = \frac{\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{f(x)}\right|}{\left|\frac{h}{x}\right|} = \left|\frac{f(x+h)-f(x)}{f(x)}\right| * \left|\frac{x}{h}\right| =$$

$$= \left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right| * \left|\frac{x}{f(x)}\right| = |f'(x)| * \left|\frac{x}{f(x)}\right| = \left|\frac{x * f'(x)}{f(x)}\right|$$

Zadanie 4. 2 punkty

Sprawdź dla jakich wartości x zadanie obliczania wartości funkcji f jest źle uwarunkowane, jeśli:

a) $f(x) = (x + 2022)^5$,

b) $f(x) = \cos(x)$,

c) $f(x) = (1 + x^4)^{-1}$

Wzór na wskaźnik uwarunkowania tego zadania:

$$cond\big(f(x)\big) = \left|\frac{xf'(x)}{f(x)}\right|$$

Zadanie jest źle uwarunkowane, jeśli $\lim_{x\to x_0}\Big(cond\big(f(x)\big)\Big) = \infty$

a) $f(x) = (x + 2022)^5$,

$f'(x) = 5(x + 2022)^4$,

$$cond\big(f(x)\big) = \left|\frac{5x(x + 2022)^4}{(x + 2022)^5}\right|$$

$$\lim_{x\to x_0}\Big(cond\big(f(x)\big)\Big) = \lim_{x\to x_0}\left|\frac{5x(x + 2022)^4}{(x + 2022)^5}\right| = \lim_{x\to -2022}\left|\frac{5x}{x + 2022}\right| =$$

$$= \lim_{x\to -2022}\left|\frac{5}{1 + \frac{2022}{x}}\right| = \lim_{x\to -2022}\left|\frac{5}{1 - 1}\right| = \infty$$

Przykład a) jest źle uwarunkowany

b) $f(x) = \cos(x)$,

$f'(x) = -\sin(x)$,

$$cond\big(f(x)\big) = \left|\frac{-x * \sin(x)}{\cos(x)}\right|$$

$$\lim_{x\to x_0}\Big(cond\big(f(x)\big)\Big) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left|\frac{-x * \sin(x)}{\cos(x)}\right| = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}|-x * \tan(x)| =$$

$$= \left(-\frac{\pi}{2}\right) * \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}|\tan(x)| = \mp\infty$$

Przykład b) jest źle uwarunkowany

c) $f(x) = (1 + x^4)^{-1}$,

$f'^{(x)} = -\frac{4x^3}{(1+x^4)^2}$,

$$cond\big(f(x)\big) = \left|\frac{x\left(-\frac{4x^3}{(1+x^4)^2}\right)}{(1+x^4)^{-1}}\right| = \left|x(1+x^4)\left(-\frac{4x^3}{(1+x^4)^2}\right)\right| = \left|-\frac{4x^4}{1+x^4}\right|$$

$$\lim_{x\to x_0}\Big(cond\big(f(x)\big)\Big) = \lim_{x\to x_0}\left|-\frac{4x^4}{1+x^4}\right| = \lim_{x\to x_0}\left|-\frac{4}{\frac{1}{x^4}+1}\right|$$

$$x_0 = 0 \to \lim_{x\to 0}\left|-\frac{4}{\frac{1}{x^4}+1}\right| = \lim_{x\to 0}\left|-\frac{4}{\infty+1}\right| = 0$$

$$x_0 = +\infty \to \lim_{x\to +\infty}\left|-\frac{4}{\frac{1}{x^4}+1}\right| = \lim_{x\to +\infty}\left|-\frac{4}{0+1}\right| = -4$$

$$x_0 = -\infty \to \lim_{x\to -\infty}\left|-\frac{4}{\frac{1}{x^4}+1}\right| = \lim_{x\to -\infty}\left|-\frac{4}{0+1}\right| = -4$$

Przykład c) jest dobrze uwarunkowany

Zadanie 6. 2 punkty

Sprawdź czy podany niżej algorytm obliczania wartości wyrażenia $\frac{b+c+bd}{a(d+1)}$ jest algorytmem numerycznie poprawnym:

$S := d + 1;$
$S := c/S;$
$S := b + S;$
$S := a/S;$
$S := 1/S;$
$Return(S)$

Tak wygląda wzór dla danych dokładnych:

$$S = \left(\frac{1}{\left(\frac{a}{\left(b + \left(\frac{c}{d+1} \right) \right)} \right)} \right)$$

A to jest wzór dla danych przybliżonych:

$$fl(S) = \left(\frac{1}{\left(\frac{a}{\left(b + \left(\frac{c}{(d+1)(1+\varepsilon_d)} \right) (1+\varepsilon_c) \right) (1+\varepsilon_b)} \right) (1+\varepsilon_a)} \right) (1+\varepsilon_1)$$

$$\left(\frac{1}{\left(\frac{a}{\left(b + \frac{c(1+\varepsilon_c)}{(d+1)(1+\varepsilon_d)} \right) (1+\varepsilon_b)} \right) (1+\varepsilon_a)} \right) (1+\varepsilon_1)$$

Teraz korzystamy ze wzoru $(b+w)*E = bE + wE$

$$\left(\frac{1}{\left(\frac{a}{\left(b(1+\varepsilon_b)+\frac{c(1+\varepsilon_c)(1+\varepsilon_b)}{(d+1)(1+\varepsilon_d)}\right)}\right)(1+\varepsilon_a)}\right)(1+\varepsilon_1)$$

$$\left(\frac{1}{\left(\frac{a(1+\varepsilon_a)}{\left(b(1+\varepsilon_b)+\frac{c(1+\varepsilon_c)(1+\varepsilon_b)}{(d+1)(1+\varepsilon_d)}\right)}\right)}\right)(1+\varepsilon_1)$$

Następnie sprowadzamy do wspólnego mianownika:

$$\left(\frac{1}{\left(\frac{a(1+\varepsilon_a)}{\left(\frac{b(1+\varepsilon_b)*(d+1)(1+\varepsilon_d)+c(1+\varepsilon_c)(1+\varepsilon_b)}{(d+1)(1+\varepsilon_d)}\right)}\right)}\right)(1+\varepsilon_1)$$

Teraz upraszczamy ułamek korzystając ze wzoru $\frac{a}{\left(\frac{b}{\left(\frac{c}{d}\right)}\right)} = \frac{a}{\left(\frac{bd}{c}\right)} = \frac{ac}{bd}$

$$\left(\frac{\left(b(1+\varepsilon_b)*(d+1)(1+\varepsilon_d)+c(1+\varepsilon_c)(1+\varepsilon_b)\right)}{a(1+\varepsilon_a)(d+1)(1+\varepsilon_d)}\right)(1+\varepsilon_1)$$

Zamieniamy kolejnością $(1+\varepsilon_b)$ $oraz$ $(d+1),$ $które$ $mnożymy$ $przez$ b:

$$\left(\frac{\left(b(d+1)(1+\varepsilon_b)(1+\varepsilon_d)+c(1+\varepsilon_c)(1+\varepsilon_b)\right)}{a(1+\varepsilon_a)(d+1)(1+\varepsilon_d)}\right)(1+\varepsilon_1)$$

$$\left(\frac{\left((bd+b)[(1+\varepsilon_b)(1+\varepsilon_d)]+c(1+\varepsilon_c)(1+\varepsilon_b)\right)}{a(1+\varepsilon_a)(d+1)(1+\varepsilon_d)}\right)(1+\varepsilon_1)$$

Znowu korzystamy ze wzoru $(bd+b)*E = bdE + bE$

$$\left(\frac{\left(bd(1+\varepsilon_b)(1+\varepsilon_d)+b(1+\varepsilon_b)(1+\varepsilon_d)+c(1+\varepsilon_c)(1+\varepsilon_b)\right)}{a(1+\varepsilon_a)(d+1)(1+\varepsilon_d)}\right)(1+\varepsilon_1)$$

$$\left(\frac{\left(b(1+D)+c+c(1+D)+bd(1+D)\right)}{a(1+D)(d+1)(1+D)}\right)(1+W)$$

$(1 + D) - błąd\ danych, (1 + W) - błąd\ wyniku$
Pokazałem, że otrzymujemy wynik prawie dokładny dla prawie dokładnych danych, zatem algorytm jest numerycznie poprawny.

Zadanie 7. 2 punkty

Zbadaj czy podany niżej algorytm wyznaczania iloczynu liczb maszynowych x1, x2, . . . , xn (zakładamy zatem, że $rd(x_k) = x_k, 1 \leq k \leq n$) jest algorytmem numerycznie poprawnym.

$I := x[1];$
$for\ k = 2\ to\ n\ do$
$\quad I := I * x[k]$
$end;$
$return(I)$

$$fl(I) = \Big(\big((x_1 * x_2)(1 + \varepsilon_2) * \dots\big) * x_n\Big)(1 + \varepsilon_n) =$$
$$= \big(x_1 * (1 + \varepsilon_2)\big)\big(x_2 * (1 + \varepsilon_2)\big) * \dots * \big(x_n * (1 + \varepsilon_n)\big) =$$
$$= I\big(x_1 * (1 + \varepsilon_2), x_2 * (1 + \varepsilon_2), \dots, x_n * (1 + \varepsilon_n)\big) \blacksquare$$

Otrzymaliśmy wynik dokładny dla prawie dokładnych danych, zatem algorytm jest numerycznie poprawny.