# Rozwiązania zadań 1 i 3 z listy nr. 7 z przedmiotu "Rachunek prawdopodobieństwa dla informatyków"

Mateusz Małowiecki

31 stycznia 2022

## Zadanie 1

### Treść

Dla danych z zadania 4 z listy 5 (Transfer pliku...) znaleźć $E(X|X \leqslant Y)$.

### Rozwiązanie

Jak pamiętamy:

$$X \sim G(1-p)$$
$$Y \sim G(1-q)$$

W celu policzenia $E(X|X \leqslant Y)$ skorzystamy z definicji warunkowej wartości oczekiwanej dla zmiennych dyskretnych:

$$E(X|X \leqslant Y) = \sum_{i=1}^{\infty} i * P(X = i|X <= Y) = \sum_{i=1}^{\infty} i * \frac{P(X = i \wedge X <= Y)}{P(X <= Y)} \tag{1}$$

Zauważmy teraz, że

$$P(X <= Y) = \sum_{i=1}^{\infty} P(X = i) * P(Y >= i) = \sum_{i=1}^{\infty} p^{i-1} * (1-p) * q^i = (1-p) * q * \sum_{i=1}^{\infty} (p*q)^{i-1} = \frac{(1-p)*q}{1-p*q} \tag{2}$$

Z kolei

$$P(X = i \wedge X <= Y) = P(X = i \wedge Y >= i) = P(X = i) * P(Y >= i) = p^{i-1} * (1-p) * q^i \tag{3}$$

Zatem

$$E(X|X \leqslant Y) = \sum_{i=1}^{\infty} i * \frac{p^{i-1} * (1-p) * q^i}{\frac{(1-p)*q}{1-p*q}} = \frac{1-p*q}{(1-p)*q} * (1-p) * q * \sum_{i=1}^{\infty} i * (p*q)^{i-1} = (1-p*q) * \sum_{i=1}^{\infty} i * (p*q)^{i-1} \tag{4}$$

Następnie można policzyć, że

$$\sum_{i=1}^{\infty} i * (p * q)^{i-1} = \frac{1}{(1-p*q)^2} \tag{5}$$

Zatem

$$E(X|X \leqslant Y) = (1 - p * q) * \frac{1}{(1 - p * q)^2} = \frac{1}{1 - p * q} \tag{6}$$

# Zadanie 3

## Treść

Rzucamy dwiema kostkami do gry. Niech U oznacza minimum, a V maximum otrzymanych liczb. Wyznacz $P(U < 3|V = 4)$ oraz $E(U|V)$.

## Rozwiązanie

Oczywiście:

$$P(U < 3|V = 4) = \frac{P(U < 3 \land V = 4)}{P(V = 4)} = \frac{\frac{4}{36}}{\frac{7}{36}} = \frac{4}{7} \tag{7}$$

Następnie w celu wyznaczenia przypomnijmy sobie, że jest to zmienna losowa taka że

$$P(E(U|V) = E(U|V = i)) = P(V = i) \tag{8}$$

dla każdego i. Na początku obliczmy wartości $E(U|V = i)$ dla kolejnych i:

$$E(U|V = 1) = \sum_{i=1}^{6} i * P(U = i|V = 1) = 1 * P(U = 1|V = 1) = 1$$

$$E(U|V = 2) = \sum_{i=1}^{6} i * P(U = i|V = 2) = 1 * P(U = 1|V = 2) + 2 * P(U = 2|V = 2) = 1 * \frac{2}{3} + 2 * \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$$

$$E(U|V = 3) = 1 * P(U = 1|V = 3) + 2 * P(U = 2|V = 3) + 3 * P(U = 3|V = 3) = \frac{9}{5}$$

$$E(U|V = 4) = \frac{16}{7}$$

$$E(U|V = 5) = \frac{25}{9}$$

$$E(U|V = 6) = \frac{36}{11}$$

Następnie zauważmy, że $P(V = i) = \frac{2*i-1}{36}$. Zatem zmienna $E(U|V)$ ma rozkład: $\{(1, \frac{1}{36}), (\frac{4}{3}, \frac{3}{36}), (\frac{9}{5}, \frac{5}{36}), (\frac{16}{7}, \frac{7}{36}), (\frac{25}{9}, \frac{9}{36}), (\frac{36}{11}, \frac{11}{36})\}$. Żeby sprawdzić poprawność tego rozkładu można sprawdzić czy $E(E(U|V)) = E(U)$. W tym przypadku, rzeczywiście $E(E(U|V)) = \frac{91}{36} = E(U)$