Rozwiązania zadań 16 i 17 z listy nr.4 z przedmiotu "Rachunek prawdopodobieństwa dla informatyków"

Mateusz Małowiecki

13 grudnia 2021

Zadanie 16

Treść

Oblicz wartość oczekiwaną i wariancję następujących rozkładów:
a) Geometryczny $G(p)$
b) Poissona $P(\lambda)$
c) Wykładniczy $E(\lambda)$
d) Jednostajny $U[a, b]$

Rozwiązanie

Rozkład geometryczny

Ponieważ rozkład geometryczny jest rozkładem dyskretnym, to skorzystamy ze wzoru:

$$E(X) = \sum_{i=0}^{\infty} i * P(X = i) \tag{1}$$

Jak wiemy dla rozkładu geometrycznego:

$$P(X = i) = p * (1 - p)^{i-1} \tag{2}$$

Podstawiając to do wzoru (1), i korzystając z tego, że $P(X = 0) = 0$, otrzymamy:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} i * p * (1-p)^{i-1} = p * \sum_{i=1}^{\infty} i * (1-p)^{i-1} = -p * \sum_{i=1}^{\infty} ((1-p)^i)' =$$
$$-p * (\sum_{i=1}^{\infty} (1-p)^i)' = -p * \Big(\frac{1-p}{p}\Big)' = -p * \Big(-\frac{1}{p^2}\Big) = \frac{1}{p}$$

W celu policzenia wariancji skorzystamy ze wzoru:

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 \tag{3}$$

Znamy już $E(X)$ spróbujmy policzyć $E(X^2)$.

$$E(X^2) = \sum_{i=1}^{\infty} i^2 * p * (1-p)^{i-1} = ... = -p * \Big(\sum_{i=1}^{\infty} i * (1-p)^i\Big)' = -p * \Big[(1-p) * \Big(\sum_{i=1}^{\infty} i * (1-p)^{i-1}\Big)\Big]'$$
$$= p * \Big[(1-p) * \Big(-\frac{1}{p^2}\Big)\Big]' = p * \Big[\frac{1}{p} - \frac{1}{p^2}\Big]' = p * \Big[\frac{2}{p^3} - \frac{1}{p^2}\Big] = \frac{2}{p^2} - \frac{1}{p}$$

Jeśli podstawimy to teraz do wzoru (3) to wyjdzie nam:

$$V(X) = \frac{2}{p^2} - \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} = \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p} = \frac{1-p}{p^2} \tag{4}$$

Rozkład Poissona

W celu obliczenia wartości oczekiwanej znowu skorzystamy ze wzoru (1) i z faktu, że dla rozkładu Poissona:

$$P(X = i) = \frac{e^{-\lambda} * \lambda^i}{i!} \tag{5}$$

Zatem

$$E(X) = \sum_{i=0}^{\infty} i * \frac{e^{-\lambda} * \lambda^i}{i!} = e^{-\lambda} * \lambda \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda^{i-1}}{(i-1)!} = e^{-\lambda} * \lambda * e^{\lambda} = \lambda$$

Podobnie w celu policzenia wariancji skorzystamy ze wzoru (3). Policzmy więc najpierw $E(X^2)$

$$E(X^2) = \sum_{i=0}^{\infty} i^2 * \frac{e^{-\lambda} * \lambda^i}{i!} = ... = e^{-\lambda} * \lambda * \sum_{i=1}^{\infty} i * \frac{\lambda^{i-1}}{(i-1)!} =$$
$$e^{-\lambda} * \lambda * \Big(\sum_{i=1}^{\infty} (i-1) * \frac{\lambda^{i-1}}{(i-1)!} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda^{i-1}}{(i-1)!}\Big) = e^{-\lambda} * \lambda * \Big(\lambda * \sum_{i=2}^{\infty} \frac{\lambda^{i-2}}{(i-2)!} + e^{\lambda}\Big) =$$
$$e^{-\lambda} * \lambda * (\lambda * e^{\lambda} + e^{\lambda}) = \lambda * (\lambda + 1) = \lambda^2 + \lambda$$

Zatem

$$V(X) = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda \tag{6}$$

Rozkład wykładniczy

Ponieważ rozkład wykładniczy jest rozkładem ciągłym, więc w celu policzenia jego wartości oczekiwanej skorzystamy ze wzoru:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x * f(x)\, dx \tag{7}$$

gdzie f(x) jest funkcją gęstości zmiennej losowej X. Funkcja gęstości zmiennej o rozkładzie wykładniczym jest dana wzorem:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda * e^{-\lambda * x}, & x \geqslant 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \tag{8}$$

Zatem

$$E(X) = \int_0^\infty x * \lambda * e^{-\lambda * x}\,dx = \lambda * \int_0^\infty x * e^{-\lambda*x}\,dx = \frac{\lambda}{\lambda} * (\int_0^\infty e^{-\lambda*x} - \Big[x * e^{-\lambda*x}\Big]_0^\infty)$$

$$= \Big[\frac{-e^{-\lambda*x}}{\lambda}\Big]_0^\infty = \frac{1}{\lambda}$$

W celu policzenia wariancji znowu policzymy najpierw $E(X^2)$.

$$E(X^2) = \int_0^\infty x^2 * \lambda * e^{-\lambda*x}\,dx = ... = \frac{2}{\lambda} * \Big[\frac{-e^{-\lambda*x}}{\lambda}\Big]_0^\infty = \frac{2}{\lambda^2}$$

Zatem

$$V(X) = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2} \tag{9}$$

Rozkład jednostajny

W celu policzenia wartości oczekiwanej znowu skorzystamy ze wzoru(7). Funkcja gęstości zmiennej o rozkładzie jednostajnym jest dana wzorem:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a \leqslant x \leqslant b \\ 0, & \text{w p.p.} \end{cases} \tag{10}$$

Zatem

$$E(X) = \int_a^b x * \frac{1}{b-a}\,dx = \frac{1}{b-a} * \Big[\frac{x^2}{2}\Big]_a^b = \frac{b^2 - a^2}{2 * (b-a)} = \frac{a+b}{2}$$

W celu policzenia wariancji znowu policzymy w pierwszej kolejności $E(X^2)$:

$$E(X^2) = \int_a^b x^2 * \frac{1}{b-a}\,dx = \frac{1}{b-a} * \Big[\frac{x^3}{3}\Big]_a^b = \frac{b^3 - a^3}{3 * (b-a)} = \frac{a^2 + a * b + b^2}{3}$$

Zatem

$$V(X) = \frac{a^2 + a * b + b^2}{3} - \frac{a^2 + 2 * a * b + b^2}{4} = \frac{4 * a^2 + 4 * a * b + 4 * b^2 - 3 * a^2 - 6 * a * b - 3 * b^2}{12}$$

$$= \frac{a^2 - 2 * a * b + b^2}{12} = \frac{(a-b)^2}{12}$$

Zadanie 17

Treść

Znaleźć gęstość prawdopodobieństwa zmiennej losowej Y będącej polem koła, którego promień jest zmienną losową o rozkładzie jednostajnym na przedziale $[0, 2]$.

Rozwiązanie

Niech X będzie zmienną losową o rozkładzie jednostajnym na przedziale $[0, 2]$. Wtedy

$$Y = \pi * X^2 \tag{11}$$

Policzmy dystrybuantę zmiennej losowej Y. Jak dobrze wiemy jeśli $t < 0$, to $F_Y(t) = 0$, zaś jeśli $t > 4 * \pi$ to $F_Y(t) = 1$. Rozpatrzmy zatem $t \in [0; 4 * \pi]$. Wtedy

$$F_Y(t) = P(Y \leqslant t) = P(\pi * X^2 \leqslant t) = P(X^2 \leqslant \frac{t}{\pi}) =$$

$$P\Big[-\sqrt{\frac{t}{\pi}} <= X <= \sqrt{\frac{t}{\pi}}\Big] = F_X\Big(\sqrt{\frac{t}{\pi}}\Big) - F_X\Big(-\sqrt{\frac{t}{\pi}}\Big) = F_X\Big(\sqrt{\frac{t}{\pi}}\Big) = \frac{1}{2} * \sqrt{\frac{t}{\pi}}$$

Ponieważ funkcja gęstości jest pochodną dystrybuanty, zatem będzie ona zdefiniowana wzorem:

$$f_Y(t) = \begin{cases} \frac{1}{4*\sqrt{t*\pi}}, & t \in [0; 4 * \pi] \\ 0, & (w\ p.p.) \end{cases} \tag{12}$$