Rozwiązania zadań 2 i 6 z listy nr.4 z przedmiotu "Rachunek prawdopodobieństwa dla informatyków"

Mateusz Małowiecki

13 grudnia 2021

Zadanie 2

Treść

W urnie mamy b kul białych i c czarnych. Po wyciągnięciu kuli z urny wrzucamy ją z powrotem i dokładamy d kul tego samego koloru. Jakie jest prawdopodobieństwo wyciągnięcia k kul czarnych w n losowaniach?

Rozwiązanie

Niech $X_1, X_2, ..., X_n$ będzie ciągiem zmiennych losowych, takim że:

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{jeśli w i-tym losowaniu wylosowano kulę czarną} \\ 0, & \text{w p.p.} \end{cases} \tag{1}$$

dodatkowo niech

$$S_k = \left\{ (x_1, x_2, ..., x_n) \in \{0,1\}^n \middle| \sum_{i=1}^{n} x_i = k \right\} \tag{2}$$

Zauważmy, że $|S_k| = \binom{n}{k}$. Wartość którą chcemy policzyć w tym zadaniu jest

$$\sum_{(x_1,x_2,...,x_n) \in S_k} P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, ..., X_n = x_n) \tag{3}$$

Poczyńmy najpierw następującą obserwację:
Obserwacja 1: Każdy ciąg ze zbioru S_k jest tak samo prawdopodobny, tzn:

$$\forall (x_1, x_2, ..., x_n) \in S_k, (y_1, y_2, ..., y_n) \in S_k : P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, ..., X_n = x_n) = P(X_1 = y_1, X_2 = y_2, ..., X_n = y_n)$$

Rozważmy zatem ciąg niemalejący z $S_k : (0, 0, ..., 0, 1, ..., 1)$. Zauważmy, że wartość (3) możemy zapisać jako:

$$\binom{n}{k} * P(X_1 = 0, ..., X_{n-k} = 0, X_{n-k+1} = 1, ..., X_n = 1) \tag{4}$$

natomiast:

$$P(X_1 = 0, ..., X_{n-k} = 0, X_{n-k+1} = 1, ..., X_n = 1) = \frac{b}{b+c} * \frac{b+d}{b+c+d} * ...$$
$$* \frac{b + (n-k-1) * d}{b + c + (n-k-1) * d} * \frac{c}{b+c+(n-k) * d} * ... \frac{c + (k-1) * d}{b + c + (n-1) * d} =$$
$$\frac{\prod_{i=0}^{n-k+1}(b + i * d) * \prod_{i=0}^{k-1}(c + i * d)}{\prod_{i=0}^{n-1}(b + c + i * d)}$$

Zatem rozwiązanie zadania wynosi:

$$\binom{n}{k} * \frac{\prod_{i=0}^{n-k+1}(b + i * d) * \prod_{i=0}^{k-1}(c + i * d)}{\prod_{i=0}^{n-1}(b + c + i * d)} \tag{5}$$

Zadanie 6

Treść

Przesyłane siecią pliki mogą z prawdopodobieństwem p być poprawnie przesłane, prawdopodobieństwem q być przesłane ale z pewnymi uszkodzeniami albo z prawdopodobieństwem $1 - p - q$ w trakcie przesyłu sieć się może zawiesić. Jakie jest prawdopodobieństwo, że w trakcie wielokrotnego (niezależnego) przesyłania plików poprawne przesłanie nastąpi przed zawieszeniem sieci

Rozwiązanie

Wyobraźmy sobie, że wykonujemy wielokrotne przesyłanie pliku (z uszkodzeniami lub bez) do momentu pierwszego zawieszenia sieci i pytamy się jakie jest prawdopodobieństwo, że w trakcie tych przesyłów, przynajmniej 1 raz uda nam się przesłać plik bez uszkodzeń. Niech dla $0 < i < j$ zmienne losowe $X_{i,j}$ będą zdefiniowane następująco:

$$X_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{jeśli pierwsze poprawne przesłanie było w i-tej} \\ & \text{próbie, a pierwsze zawieszenie sieci w j-tej} \\ 0, & \text{w p.p.} \end{cases} \tag{6}$$

Zauważmy, że $P(X_{i,j} = 1) = q^{i-1} * p * (p+q)^{j-i-1} * (1-p-q)$. Interesuje nas wartość:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=i+1}^{\infty} P(X_{i,j} = 1) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=i+1}^{\infty} q^{i-1} * p * (p+q)^{j-i-1} * (1-p-q) =$$
$$p * (1-p-q) * \sum_{i=1}^{\infty} q^{i-1} * \sum_{j=0}^{\infty} (p+q)^j = p * (1-p-q) * \frac{1}{1-q} * \frac{1}{1-p-q} = \frac{p}{1-q}$$

Zatem odpowiedzią jest $\frac{p}{1-q}$