Grupa 3

Informatyka i Systemy Informacyjne — MiNI PW

Matematyka Dyskretna I

Studenckie rozwiązania zadań z ćwiczeń z Matematyki Dyskretnej I.
Ćwiczenia z *MD I* w gr. 3 prowadzi dr inż. Tomasz Brengos
i też oto pod jego opieką powstaje ten plik.
Ostatnia aktualizacja: 22 kwietnia 2025

Spis treści

Lato 2025

1. Zestaw

Zadanie 1.1 (Krzysztof Wójtowicz, Autor 2). *Na płaszczyźnie poprowadzono n prostych, z których żadne dwie nie są równoległe i żadne trzy nie przechodzą przez ten sam punkt. Wyznacz liczbę:*

1. *obszarów, na które te proste dzielą płaszczyznę;*
2. *obszarów ograniczonych, na które te proste dzielą płaszczyznę.*

1. Zauważymy, że każda kolejna prosta przecina wszystkie poprzednie proste, a co za tym idzie również obszary, które są do nich "przyległe", dzieląc je na dwa. Każda poprzednia prosta ma dwa takie obszary, więc ich ogólna liczba to (odejmujemy obszary wspólne, czyli te "pośrodku" dwóch prostych, by ich nie duplikować):

$$2(n-1)-(n-1-1)=n$$

Zatem każda kolejna prosta dodaje n nowych obszarów:

$$P(n)=P(n-1)+n=P(0)+\sum_{k=1}^{n}k=1+\frac{n(n+1)}{2}$$

gdzie $P(n)$ to liczba obszarów dla n prostych.

2. Liczbę obszarów ograniczonych otrzymamy odejmując liczbę obszarów nieograniczonych z wyniku z podpunku 1. Każda prosta ma dwa "przyległe" obszary nieograniczone, więc liczba wszystkich takich obszarów to $2n$, zatem liczba wszystkich obszarów ograniczonych to:

$$1+\frac{n(n+1)}{2}-2n=\frac{n^2-3n+2}{2}=\frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

1. Rozwiązanie Autora 2 podpunktu 1
2. Rozwiązanie Autora 2 podpunktu 2

Zadanie 1.2 (Autor 1, Autor 2). *Ciąg Fibonacciego $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ zadany jest przez $F_0=0$, $F_1=1$ i $F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$. Udowodnij, że:*

1. $F_0+...+F_n=F_{n+2}-1$;
2. $5|F_{5n}$,
3. $F_n<2_n$.

1. Rozwiązanie Autora 1 podpunktu 1
2. Rozwiązanie Autora 1 podpunktu 2
3. Rozwiązanie Autora 1 podpunktu 3

1. Rozwiązanie Autora 2 podpunktu 1
2. Rozwiązanie Autora 2 podpunktu 2
3. Rozwiązanie Autora 2 podpunktu 3

Zadanie 1.3 (Autor 1, Autor 2). *Turniej n-wierzchołkowy to dowolny graf skierowany $G=(V,E)$, gdzie $|V|=n$ i w którym $(u,v)\in E$ lub $(v,u)\in E$ dla dowolnych $u,v\in V$. Pokaż, że w dowolnym niepustym turnieju istnieje wierzchołek z którego można "przejść" po krawędziach zgodnie z ich skierowaniem do dowolnego innego wierzchołka w co najwyżej dwóch krokach.*

Rozwiązanie Autora 1.

Rozwiązanie Autora 2.

Zadanie 1.4 (Autor 1, Autor 2). *Udowodnij, że każdy turniej ma ścieżkę Hamiltona.*

Rozwiązanie Autora 1.

Rozwiązanie Autora 2.

Zadanie 1.5 (Autor 1, Autor 2). *W każdym polu szachownicy rozmiaru nxn znajduje się jedna osoba. Część osób zarażona jest wirusem grypy. Wirus grypy rozprzestrzenia się w dyskretnych odstępach czasowych w sposób następujący:*

— *osoby zarażone pozostają zarażone,*
— *osoba ulega zarażeniu jeżeli co najmniej dwie sąsiadujące z nią osoby są już zarażone (przez osobę sąsiednią rozumiemy osobę siedzącą z przodu, z tyłu, z lewej lub prawej strony). Wykaż, że jeżeli na początku zarażonych jest istotnie mniej niż n osób, to w każdej chwili przynajmniej jedna osoba pozostaje niezarażona.*

Rozwiązanie Autora 1.

Rozwiązanie Autora 2.

Zadanie 1.6 (Krzysztof Wójtowicz, Autor 2). *Wykaż, że w grupie n osób istnieją dwie, które mają taką samą liczbę znajomych.*

Dowód:
W grupie n osób każda osoba może mieć od 0 do $n-1$ znajomych, ale wtedy:

1. Jeśli ktoś ma 0 znajomych to maksymalna liczba znajomych to $n-2$, bo osoba mająca $n-1$ znajomych musiałaby być znajomym z osobą, która ma ich 0, co jest niemożliwe
2. Jeśli minimalna liczba znajomych to 1 to wtedy maksymalna liczba znajomych to $n-1$

W obydwu przypadkach mamy $n-1$ wartości oraz n osób. Zatem na mocy zasady Dirichleta conajmniej dwie osoby muszą mieć tę samą liczbę znajomych. ■

Rozwiązanie Autora 2.

Zadanie 1.7 (Autor 1, Autor 2). *Przy okrągłym stole jest n miejsc oznaczonych proporczykami różnych państw. Ambasadorowie tych państw usiedli przy tym stole tak, że żaden z nich nie siadł przy właściwym proporczyku. Wykaż, że można tak obrócić stołem, że co najmniej 2 ambasadorów znajdzie się przed proporczykiem swojego państwa.*

Rozwiązanie Autora 1.

Rozwiązanie Autora 2.

Zadanie 1.8 (Autor 1, Autor 2). *Pokaż, że w dowolnym ciągu n liczb całkowitych istnieje (niepusty) podciąg kolejnych elementów taki, że suma wyrazów podciągu jest wielokrotnością n.*

Rozwiązanie Autora 1.

Rozwiązanie Autora 2.

Zadanie 1.9 (Autor 1, Autor 2). *Rozważ dowolną rodzinę podzbiorów zbioru n–elementowego zawierającą więcej niż połowę wszystkich podzbiorów. Wykaż, że w tej rodzinie muszą być dwa zbiory takie, że jeden zawiera się w drugim.*

Rozwiązanie Autora 1.

Rozwiązanie Autora 2.

Zadanie 1.10 (Autor 1, Autor 2)**.** *Dla* n*–elementowego zbioru* X *rozważ pewną rodzinę jego podzbiorów* $\mathcal{F}$*, gdzie* $|F| > n/2$ *dla każdego* $F \in \mathcal{F}$*. Wykaż, że istnieje* $x \in X$ *należący do co najmniej połowy zbiorów z* $\mathcal{F}$*.*

Rozwiązanie Autora 1.

Rozwiązanie Autora 2.

Zadanie 1.11 (Autor 1, Autor 2)**.** *Dana jest kwadratowa szachownica* $n \times n$*. Dla jakich wartosci* $n \geqslant 1$ *możemy pokryć tę szachownicę kostkami wielkości* 2×2 *oraz* 3×3*.*

Rozwiązanie Autora 1.

Rozwiązanie Autora 2.

Zadanie 1.12 (Autor 1, Autor 2)**.** *Dana jest kwadratowa szachownica* $2n \times 2n$ *z wyciętym jednym polem. Wykaż, że dla wszystkich wartości* $n \geqslant 1$ *możemy pokryć tę szachownicę kostkami w kształcie litery L (czyli kwadrat* 2×2 *bez jednego pola).*

Rozwiązanie Autora 1.

Rozwiązanie Autora 2.

2. Zestaw

Zadanie 2.1 (Filip Sajko, Autor 2). *Na ile sposobów można ustawić n wież na szachownicy $n \times n$ tak, by żadne dwie nie znajdowały się w polu wzajemnego rażenia.*

Starczy zauważyć, że dla każdej wieży wybieramy rząd i kolumnę w której się znajduje – i tym samym zmniejsza liczbę dostępnych o jeden. Tak więc odpowiedź wynosi:

$$n \cdot n \cdot (n-1) \cdot (n-1) \cdot ... \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = n! \cdot n!$$

Rozwiązanie Autora 2.

Zadanie 2.2 (Filip Sajko, Autor 2). *Na ile sposobów można ustawić k wież na szachownicy $n \times m$ tak, by żadne dwie nie znajdowały się w polu wzajemnego rażenia.*

Zadanie analogiczne od poprzedniego - z tym, że zmienił nam się rozmiar planszy, a ponadto nie wypełniamy jej całej. Zasada pozostaje jednak ta sama. Na start jednak warto założyć, że $k \leqslant max\{n, m\}$ (choć w sumie jeżeli tak nie jest, to odpowiedź to 0). Mając to już za sobą:

$$n \cdot m \cdot (n-1) \cdot (m-1) \cdot ... \cdot (n-k+1) \cdot (m-k+1)$$

(wykonujemy mnożenie $k+k$ elementów – stąd to $-k+1$).

Rozwiązanie Autora 2.

Zadanie 2.3 (Filip Sajko, Autor 2). *Znaleźć definicje rekurencyjne następujących ciągów:*

1. *$a(n)$ – liczba słów długości n nad alfabetem $\{0, 1\}$, które nie zawierają dwóch jedynek koło siebie.*
2. *$b(n)$ – liczba różnych pokryć prostokąta o wymiarze $2 \times n$ dominami wymiaru 2×1.*

1. Oczywiście $a(1) = 2$, $a(2) = 3$. Rozważmy słowo n elementowe. Zauważamy, że jeżeli ono kończy sie ono zerem to poprzedzające słowo $n-1$ elementowe jest dowolne. Jeżeli natomiast kończy się jedynką, to poprzedzające słowo $n-2$ elementowe jest dowolne (tak jakby cofamy się krok dalej by mieć dowolność). Stąd: $a(n) = a(n-1) + a(n-2)$.
2. Analogicznie do poprzedniego. Jak wiemy $a(1) = 1$, $a(2) = 2$. Zastanówmy się nad $a(n)$: Rozważamy ciąg o długości n. Jeżeli na końcu jest blok poziomy, to wiemy że powstał on z ciągu długości $a(n-2)$. Jeżeli jest pionowy, to wiemy, że musiał on powstać z ciągu długości $n-1$. A stąd $a(n) = a(n-1) + a(n-2)$.

Rozwiązanie Autora 2.

Zadanie 2.4 (Autor 1, Autor 2). *Ile rozwiązań ma równanie $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7$:*

1. *gdzie x_i są liczbami naturalnymi?*
2. *gdzie x_i są dodatnimi liczbami naturalnymi?*

1. Rozwiązanie Autora 1 podpunktu 1
2. Rozwiązanie Autora 1 podpunktu 2

1. Rozwiązanie Autora 2 podpunktu 1
2. Rozwiązanie Autora 2 podpunktu 2

Zadanie 2.5 (Autor 1, Autor 2). *Rozważmy czekoladę złożoną z $m \times n$ kostek. Na ile sposobów można wykroić prostokąt złożony z $k \times k$ sąsiadujących ze sobą kostek czekolady?*

Rozwiązanie Autora 1.

Rozwiązanie Autora 2.

Zadanie 2.6 (Autor 1, Autor 2). *(Reguła sumowania po górnym indeksie). Udowodnij, że dla $n, k \in \mathbb{N}$ zachodzi*

$$\sum_{j=0}^{n} \binom{j}{k} = \binom{n+1}{k+1}$$

Rozwiązanie Autora 1.

Rozwiązanie Autora 2.

Zadanie 2.7 (Autor 1, Autor 2). *(Reguła sumowania równoległego). Udowodnij, że dla $n, k \in \mathbb{N}$ zachodzi*

$$\sum_{j=0}^{n} \binom{n+j}{j} = \binom{n+k+1}{k}$$

Rozwiązanie Autora 1.

Rozwiązanie Autora 2.

Zadanie 2.8 (Autor 1, Autor 2). *Ile jest funkcji $f : \{1, ..., n\} \to \{1, ..., n\}$ monotonicznych takich, że $f(i) \leqslant f(j)$ dla $i < j$?*

Rozwiązanie Autora 1.

Rozwiązanie Autora 2.

Zadanie 2.9 (Autor 1, Autor 2). *Ile jest k–elementowych podzbiorów zbioru n–elementowego, które nie zawierają dwóch sąsiednich liczb?*

Rozwiązanie Autora 1.

Rozwiązanie Autora 2.

Zadanie 2.10 (Autor 1, Autor 2). *Posługując się interpretacją kombinatoryczną udowodnij, że:*

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} \binom{n-i}{k-i} = 2^k \binom{n}{k}$$

Rozwiązanie Autora 1.

Rozwiązanie Autora 2.

Zadanie 2.11 (Autor 1, Autor 2). *Udowodnij poniższe tożsamości na dwa sposoby: posługując się interpretacją kombinatoryczną albo rozwinięciem dwumianu $(1+x)^n$:*

1.

$$\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} = n2^{n-1}$$

2.

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k} = (n+n^2)2^{n-2}$$

3.

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{m}{i}\binom{n}{k-i} = \binom{m+n}{k}$$

1. Rozwiązanie Autora 1 podpunktu 1
2. Rozwiązanie Autora 1 podpunktu 2
3. Rozwiązanie Autora 1 podpunktu 3

1. Rozwiązanie Autora 2 podpunktu 1
2. Rozwiązanie Autora 2 podpunktu 2
3. Rozwiązanie Autora 2 podpunktu 3

3. Zestaw

Zadanie 3.1 (Autor 1, Autor 2). *Wykaż, że dla dowolnego $n \geqslant 1$ istnieje $k \geqslant 1$ takie, że:*

$$S(n,0) < S(n,1) < ... < S(n,k-1) \leqslant S(n,k) > S(n,k+1) > ... > S(n,n)$$

Rozwiązanie Autora 1.

Rozwiązanie Autora 2.

Zadanie 3.2 (Autor 1, Autor 2). *Wykaż, że:*

$$B(n) = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} B(i)$$

Rozwiązanie Autora 1.

Rozwiązanie Autora 2.

Zadanie 3.3 (Autor 1, Autor 2). *Wykaż, że dla $n, k \in \mathbb{N}$ zachodzi:*

$$S(n,k+1) = \frac{1}{(k+1)!} \sum_{0<i_0<...<i_{k-1}<n} \binom{n}{i_{k-1}} \binom{i_{k-1}}{i_{k_2}} ... \binom{i_1}{i_0}$$

Rozwiązanie Autora 1.

Rozwiązanie Autora 2.

Zadanie 3.4 (Autor 1, Autor 2). *Rozważ następującą procedurę generującą pewne liczby naturalne $\{a_{i,j}\}_{1 \geqslant i \geqslant j}$:*

1. $a_{0,0} = 1$,
2. $a_{n+1,0} = a_{n,n}$, *dla* $n \geqslant 0$,
3. $a_{n+1,k+1} = a_{n,k} + a_{n+1,k}$, *dla* $n \geqslant k \geqslant 0$.

Rozwiązanie Autora 1.

Rozwiązanie Autora 2.

Zadanie 3.5 (Autor 1, Autor 2). *Wykaż, że liczba podziałów zbioru $(n-1)$ elementowego jest równa liczbie podziałów zbioru $\{1, ..., n\}$ niezawierających sąsiednich liczb w jednym bloku.*

Rozwiązanie Autora 1.

Rozwiązanie Autora 2.

Zadanie 3.6 (Autor 1, Autor 2). *Udowodnij, że liczba ukorzenionych drzew binarnych na n wierzchołkach to n-ta liczba Catalana.*

Ukorzenione drzewo jest drzewem binarnym, jeśli każdy wierzchołek ma co najwyżej dwójkę dzieci przy czym co najwyżej jedno lewe dziecko i co najwyżej jedno prawe dziecko.

Rozwiązanie Autora 1.

Rozwiązanie Autora 2.

Zadanie 3.7 (Autor 1, Autor 2)**.** *Triangulacją n – wierzchołkowego wielokąta wypukłego nazywamy zbiór $(n-3)$ wzajemnie nieprzecinających się jego przekątnych, które dzielą jego obszar na $(n-2)$ trójkątów.*

1. *ile jest triangulacji n–wierzchołkowego wielokąta wypukłego?*
2. *Ile jest triangulacji n–wierzchołkowego wielokąta wypukłego, w których każdy trójkąt triangulacji ma przynajmniej jeden bok na brzegu wielokąta?*

1. Rozwiązanie Autora 1 podpunktu 1
2. Rozwiązanie Autora 1 podpunktu 2

1. Rozwiązanie Autora 2 podpunktu 1
2. Rozwiązanie Autora 2 podpunktu 2

Zadanie 3.8 (Autor 1, Autor 2)**.** *Wykaż, że liczba drzew etykietowanych na zbiorze $1, ..., n$ wynosi n^{n-2}.*

Rozwiązanie Autora 1.

Rozwiązanie Autora 2.

4. Zestaw

Zadanie 4.1 (Autor 1, Autor 2)**.** *Oblicz* $S(n,2)$*.*

Rozwiązanie Autora 1.

Rozwiązanie Autora 2.

Zadanie 4.2 (Autor 1, Krzysztof Wójtowicz)**.** *Wykaż, że mamy dokładnie*

$$\frac{n!}{1^{\lambda_1}\cdot 2^{\lambda_2}\cdot ...\cdot n^{\lambda_n}\cdot \lambda_1!\cdot ...\cdot \lambda_n!}$$

permutacji zbioru $[n]$ *o typie* $1^{\lambda_1}\cdot 2^{\lambda_2}\cdot ...\cdot n^{\lambda_n}$ *(mających* λ_i *cykli długości i dla* $i \in [n]$*).*

Rozwiązanie Autora 1.

Niech A będzie zbiorem wszystkich permutacji zbioru $[n]$ o typie jak w poleceniu. Niech $a_i \in [n]$, policzymy ilość cykli długości k: $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ w zbiorze n elementowych:

$$\binom{n}{k}\cdot\frac{k!}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\cdot k}$$

Wybieramy k elementów do cyklu i następnie wybieramy ich kolejność (pierwszy element nie ma znaczenia w cyklu), stąd powyższy wynik.

Policzymy ilość wszystkich możliwych cykli długości $1, 2, \ldots, n$:

$$\underbrace{\frac{n!}{(n-1)!\cdot 1}\cdot\frac{(n-1)!}{(n-2)!\cdot 1}\cdot\ldots}_{\lambda_1}\cdot\underbrace{\frac{(n-\lambda_1)!}{(n-\lambda_1-2)!\cdot 2}\cdot\ldots}_{\lambda_2}\cdot\ldots = \frac{n!}{1^{\lambda_1}\cdot 2^{\lambda_2}\cdot\ldots\cdot n^{\lambda_n}}$$

Czyli mnożymy ilość możliwych cykli k elementowych dla λ_k ich ilości.

W celu otrzymania liczby $|A|$ musimy jeszcze uwzględnić brak znaczenia kolejności występowania cykli w permutacji, liczba możliwych ustawień to:

$$\lambda_1!\cdot\lambda_2!\cdot\ldots\cdot\lambda_n!$$

Zatem liczba wszystkich permutacji $a \in A$:

$$|A| = \frac{n!}{1^{\lambda_1}\cdot 2^{\lambda_2}\cdot\ldots\cdot n^{\lambda_n}\cdot\lambda_1!\cdot\lambda_2!\cdot\ldots\cdot\lambda_n!} \quad \blacksquare$$

Zadanie 4.3 (Autor 1, Autor 2)**.** *Posługując się interpretacją kombinatoryczną, wykaż tożsamość:*

$$S(n+1, m+1) = \sum_k \binom{n}{k} S(k,m)$$

Rozwiązanie Autora 1.

Rozwiązanie Autora 2.

Zadanie 4.4 (Autor 1, Autor 2)**.** *Zakładając, że zachodzi równość:*

$$(x_1 + ... + x_k)^n = \sum_{n_1+...+n_k=n}\binom{n}{n_1 n_2 ... n_k} x_1^{n_1}\cdot ...\cdot x_k^{n_k}$$

podaj ile wynosi $\binom{n}{n_1 n_2 ... n_k}$*.*

Rozwiązanie Autora 1.

Rozwiązanie Autora 2.

Zadanie 4.5 (Autor 1, Autor 2)**.** *Wykaż, że*

$$\sum_{i=0}^{n} i \begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix} = n!H_n,$$

gdzie $H_n = 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n}$*.*

Rozwiązanie Autora 1.

Rozwiązanie Autora 2.

Zadanie 4.6 (Autor 1, Autor 2)**.** *Wykaż, że dla dowolnego* $x \in \mathbb{R}$ *zachodzi:*

1. $x^n = \sum_k S(n,k)x^{\underline{k}}$

2. $x^{\bar{n}} = \sum_k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k$*.*

1. Rozwiązanie Autora 1 podpunktu 1
2. Rozwiązanie Autora 1 podpunktu 2

1. Rozwiązanie Autora 2 podpunktu 1
2. Rozwiązanie Autora 2 podpunktu 2

5. Zestaw

Zadanie 5.1 (Autor 1, Autor 2). *Wykaż zasadę włączeń i wyłączeń korzystając z indukcji po liczbie zbiorów.*

Rozwiązanie Autora 1.

Rozwiązanie Autora 2.

Zadanie 5.2 (Autor 1, Autor 2). *Wykaż, że mamy*

$$\sum_{j=0}^{m}(-1)^j\binom{m}{j}(m-j)^n$$

suriekcji ze zbioru $[n]$ *w zbiór* $[m]$.

Rozwiązanie Autora 1.

Rozwiązanie Autora 2.

Zadanie 5.3 (Autor 1, Autor 2). *Ile jest ciągów długości* $2n$ *takich, że każda liczba* $i \in [n]$ *występuje dokładnie dwa razy oraz każde sąsiednie dwa wyrazy są różne.*

Rozwiązanie Autora 1.

Rozwiązanie Autora 2.

Zadanie 5.4 (Autor 1, Autor 2). *Wykaż, że dla* $n \geqslant 3$ *zachodzi tożsamość*

$$D(n) = (n-1)(D(n-1) + D(n-2))$$

gdzie $D(n)$ *jest liczbą permutacji zboru* $[n]$ *bez punktów stałych.*

Rozwiązanie Autora 1.

Rozwiązanie Autora 2.

Zadanie 5.5 (Autor 1, Autor 2). *Wykaż (najlepiej kombinatorycznie), że dla dowolnych* $n, k \in \mathbb{N}$ *zachodzi:*

1. $S(n,k) = \sum_{0 \leqslant m_1 \leqslant m_2 \leqslant \ldots \leqslant m_{n-k} \leqslant k} m_1 m_2 \cdot \ldots \cdot m_{n-k}$
2. $c(n,k) = \sum_{0 < m_1 < m_2 < \ldots < m_{n-k} < k} m_1 m_2 \cdot \ldots \cdot m_{n-k}$

1. Rozwiązanie Autora 1 podpunktu 1
2. Rozwiązanie Autora 1 podpunktu 2

1. Rozwiązanie Autora 2 podpunktu 1
2. Rozwiązanie Autora 2 podpunktu 2

Zadanie 5.6 (Autor 1, Autor 2). *Ciąg podziałów zbioru* $1, \ldots, n$ *tworzymy następująco. Startujemy od podziału zawierającego tylko zbiór* $1, \ldots, n$. *Podział* $(i+1)$*–wszy otrzymujemy z podziału* i*-tego poprzez:*

1. *wybranie jednego, co najmniej* 2*-elementowego zbioru z podziału* i*-tego i podzielenie go na dwa niepuste podzbiory,*
2. *podzielenie każdego, co najmniej* 2*-elementowego zbioru z podziału* i*-tego na dwa niepuste podzbiory.*

W obu przypadkach procedura kończy swoje działanie jeżeli wszystkie zbiory podziału są jednoelementowe. Na ile sposobów można wykonać powyższe procedury? Na ile sposobów możemy wykonać powyższe procedury zakładając, że po każdym kroku zbiory podziałów zawierają kolejne liczby naturalne?

Rozwiązanie Autora 1.

Rozwiązanie Autora 2.