

**Grupa 3**  
Informatyka i Systemy Informacyjne — MiNI PW

# Matematyka Dyskretna I

Studenckie rozwiązania zadań z ćwiczeń z Matematyki Dyskretnej I.  
Ćwiczenia z *MD I* w gr. 3 prowadzi dr inż. Tomasz Brengos  
i też oto pod jego opieką powstaje ten plik.  
Ostatnia aktualizacja: 8 czerwca 2025

## Spis treści

1. Zestaw . . . . .	2
2. Zestaw . . . . .	5
3. Zestaw . . . . .	10
4. Zestaw . . . . .	13
5. Zestaw . . . . .	17
6. Zestaw . . . . .	19
7. Zestaw . . . . .	20
8. Zestaw . . . . .	21

## 1. Zestaw

**Zadanie 1.1** (Krzysztof Wójtowicz, Autor 2). *Na płaszczyźnie poprowadzono  $n$  prostych, z których żadne dwie nie są równoległe i żadne trzy nie przechodzą przez ten sam punkt. Wyznacz liczbę:*

1. obszarów, na które te proste dzielą płaszczyznę;
2. obszarów ograniczonych, na które te proste dzielą płaszczyznę.

1. Zauważymy, że każda kolejna prosta przecina wszystkie poprzednie proste, a co za tym idzie również obszary, które są do nich "przyległe", dzieląc je na dwa. Każda poprzednia prosta ma dwa takie obszary, więc ich ogólna liczba to (odejmujemy obszary wspólne, czyli te "pośrodku" dwóch prostych, by ich nie duplikować):

$$2(n-1) - (n-1-1) = n$$

Zatem każda kolejna prosta dodaje  $n$  nowych obszarów:

$$P(n) = P(n-1) + n = P(0) + \sum_{k=1}^n k = 1 + \frac{n(n+1)}{2}$$

gdzie  $P(n)$  to liczba obszarów dla  $n$  prostych.

2. Liczbę obszarów ograniczonych otrzymamy odejmując liczbę obszarów nieograniczonych z wyniku z podpunktu 1. Każda prosta ma dwa "przyległe" obszary nieograniczone, więc liczba wszystkich takich obszarów to  $2n$ , zatem liczba wszystkich obszarów ograniczonych to:

$$1 + \frac{n(n+1)}{2} - 2n = \frac{n^2 - 3n + 2}{2} = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

1. Rozwiązanie Autora 2 podpunktu 1
2. Rozwiązanie Autora 2 podpunktu 2

**Zadanie 1.2** (Autor 1, Autor 2). *Ciąg Fibonacciego  $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  zadany jest przez  $F_0 = 0$ ,  $F_1 = 1$  i  $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ . Udowodnij, że:*

1.  $F_0 + \dots + F_n = F_{n+2} - 1$ ;
2.  $5 \mid F_{5n}$ ,
3.  $F_n < 2^n$ .

1. Rozwiązanie Autora 1 podpunktu 1
2. Rozwiązanie Autora 1 podpunktu 2
3. Rozwiązanie Autora 1 podpunktu 3

1. Rozwiązanie Autora 2 podpunktu 1
2. Rozwiązanie Autora 2 podpunktu 2
3. Rozwiązanie Autora 2 podpunktu 3

**Zadanie 1.3** (Autor 1, Autor 2). *Turniej  $n$ -wierzchołkowy to dowolny graf skierowany  $G = (V, E)$ , gdzie  $|V| = n$  i w którym  $(u, v) \in E$  lub  $(v, u) \in E$  dla dowolnych  $u, v \in V$ . Pokaż, że w dowolnym niepustym turnieju istnieje wierzchołek z którego można "przejsć" po krawędziach zgodnie z ich skierowaniem do dowolnego innego wierzchołka w co najwyżej dwóch krokach.*

Rozwiązanie Autora 1.

Rozwiązanie Autora 2.

**Zadanie 1.4** (Autor 1, Autor 2). *Udowodnij, że każdy turniej ma ścieżkę Hamiltona.*

Rozwiązanie Autora 1.

Rozwiązanie Autora 2.

**Zadanie 1.5** (Autor 1, Autor 2). *W każdym polu szachownicy rozmiaru  $n \times n$  znajduje się jedna osoba. Część osób zarażona jest wirusem grypy. Wirus grypy rozprzestrzenia się w dyskretnych odstępach czasowych w sposób następujący:*

- osoby zarażone pozostają zarażone,
- osoba ulega zarażeniu jeżeli co najmniej dwie sąsiadujące z nią osoby są już zarażone (przez osobę sąsiadną rozumiemy osobę siedzącą z przodu, z tyłu, z lewej lub prawej strony). Wykaż, że jeżeli na początku zarażonych jest istotnie mniej niż  $n$  osób, to w każdej chwili przynajmniej jedna osoba pozostaje niezarażona.

Rozwiązanie Autora 1.

Rozwiązanie Autora 2.

**Zadanie 1.6** (Krzysztof Wójtowicz, Autor 2). *Wykaż, że w grupie  $n$  osób istnieją dwie, które mają taką samą liczbę znajomych.*

Dowód:

W grupie  $n$  osób każda osoba może mieć od 0 do  $n - 1$  znajomych, ale wtedy:

1. Jeśli ktoś ma 0 znajomych to maksymalna liczba znajomych to  $n - 2$ , bo osoba mająca  $n - 1$  znajomych musiałaby być znajomym z osobą, która ma ich 0, co jest niemożliwe
2. Jeśli minimalna liczba znajomych to 1 to wtedy maksymalna liczba znajomych to  $n - 1$

W obydwu przypadkach mamy  $n - 1$  wartości oraz  $n$  osób. Zatem na mocy zasady Dirichleta co najmniej dwie osoby muszą mieć tę samą liczbę znajomych. ■

Rozwiązanie Autora 2.

**Zadanie 1.7** (Autor 1, Autor 2). *Przy okrągłym stole jest  $n$  miejsc oznaczonych proporczykami różnych państw. Ambasadorowie tych państw usiedli przy tym stole tak, że żaden z nich nie siadł przy właściwym proporczyku. Wykaż, że można tak obrócić stołem, że co najmniej 2 ambasadorów znajdzie się przed proporczykiem swojego państwa.*

Rozwiązanie Autora 1.

Rozwiązanie Autora 2.

**Zadanie 1.8** (Autor 1, Autor 2). *Pokaż, że w dowolnym ciągu  $n$  liczb całkowitych istnieje (niepusty) podciąg kolejnych elementów taki, że suma wyrazów podciągu jest wielokrotnością  $n$ .*

Rozwiązanie Autora 1.

Rozwiązanie Autora 2.

**Zadanie 1.9** (Autor 1, Autor 2). *Rozważ dowolną rodzinę podzbiorów zbioru  $n$ -elementowego zawierającą więcej niż połowę wszystkich podzbiorów. Wykaż, że w tej rodzinie muszą być dwa zbiory takie, że jeden zawiera się w drugim.*

Rozwiązanie Autora 1.

Rozwiązanie Autora 2.

**Zadanie 1.10** (Autor 1, Autor 2). *Dla  $n$ -elementowego zbioru  $X$  rozważ pewną rodzinę jego podzbiorów  $\mathcal{F}$ , gdzie  $|F| > n/2$  dla każdego  $F \in \mathcal{F}$ . Wykaż, że istnieje  $x \in X$  należący do co najmniej połowy zbiorów z  $\mathcal{F}$ .*

Rozwiązanie Autora 1.

Rozwiązanie Autora 2.

**Zadanie 1.11** (Autor 1, Autor 2). *Dana jest kwadratowa szachownica  $n \times n$ . Dla jakich wartości  $n \geq 1$  możemy pokryć tę szachownicę kostkami wielkości  $2 \times 2$  oraz  $3 \times 3$ .*

Rozwiązanie Autora 1.

Rozwiązanie Autora 2.

**Zadanie 1.12** (Autor 1, Autor 2). *Dana jest kwadratowa szachownica  $2n \times 2n$  z wyciętym jednym polem. Wykaż, że dla wszystkich wartości  $n \geq 1$  możemy pokryć tę szachownicę kostkami w kształcie litery L (czyli kwadrat  $2 \times 2$  bez jednego pola).*

Rozwiązanie Autora 1.

Rozwiązanie Autora 2.

## 2. Zestaw

**Zadanie 2.1** (Filip Sajko, Bartłomiej Sokołowski). *Na ile sposobów można ustawić  $n$  wież na szachownicy  $n \times n$  tak, by żadne dwie nie znajdowały się w polu wzajemnego rażenia.*

Starczy zauważyć, że dla każdej wieży wybieramy rząd i kolumnę w której się znajduje – i tym samym zmniejsza liczbę dostępnych o jeden. Tak więc odpowiedź wynosi:

$$n \cdot n \cdot (n-1) \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = n! \cdot n!$$

Musimy wybrać  $n$  pozycji z  $n^2$  dostępnych pól na szachownicy. Wybierając 1 pozycję automatycznie eliminujemy całą kolumnę oraz wiersz, w którym znajduje się wybrane pole.

Pierwszą wieżę wybieramy z  $n \times n = n^2$  dostępnych pozycji.

Następną wieżę wybieramy na  $(n-1) \times (n-1) = (n-1)^2$  sposobów, ponieważ wykluczamy wybraną już kolumnę i wiersz.

Powtarzając proces  $n$  razy dostajemy:

$$n \times n \times (n-1) \times (n-1) \times \dots \times 1 \times 1 = n! \times n! = (n!)^2$$

**Zadanie 2.2** (Filip Sajko, Autor 2). *Na ile sposobów można ustawić  $k$  wież na szachownicy  $n \times m$  tak, by żadne dwie nie znajdowały się w polu wzajemnego rażenia.*

Zadanie analogiczne od poprzedniego - z tym, że zmienił nam się rozmiar planszy, a ponadto nie wypełniamy jej całej. Zasada pozostaje jednak ta sama. Na start jednak warto założyć, że  $k \leq \max\{n, m\}$  (choć w sumie jeżeli tak nie jest, to odpowiedź to 0). Mając to już za sobą:

$$n \cdot m \cdot (n-1) \cdot (m-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1) \cdot (m-k+1)$$

(wykonujemy mnożenie  $k + k$  elementów – stąd to  $-k + 1$ ).

Rozwiązanie Autora 2.

**Zadanie 2.3** (Filip Sajko, Autor 2). *Znaleźć definicje rekurencyjne następujących ciągów:*

1.  $a(n)$  – liczba słów długości  $n$  nad alfabetem  $\{0, 1\}$ , które nie zawierają dwóch jedynek koło siebie.
2.  $b(n)$  – liczba różnych pokryć prostokąta o wymiarze  $2 \times n$  dominami wymiaru  $2 \times 1$ .

1. Oczywiście  $a(1) = 2$ ,  $a(2) = 3$ . Rozważmy słowo  $n$  elementowe. Zauważamy, że jeżeli ono kończy się ono zerem to poprzedzające słowo  $n-1$  elementowe jest dowolne. Jeżeli natomiast kończy się jedyneką, to poprzedzające słowo  $n-2$  elementowe jest dowolne (tak jakby cofamy się krok dalej by mieć dowolność). Stąd:  $a(n) = a(n-1) + a(n-2)$ .
2. Analogicznie do poprzedniego. Jak wiemy  $a(1) = 1$ ,  $a(2) = 2$ . Zastanówmy się nad  $a(n)$ : Rozważamy ciąg o długości  $n$ . Jeżeli na końcu jest blok poziomy, to wiemy że powstał on z ciągu długości  $a(n-2)$ . Jeżeli jest pionowy, to wiemy, że musiał on powstać z ciągu długości  $n-1$ . A stąd  $a(n) = a(n-1) + a(n-2)$ .

Rozwiązanie Autora 2.

**Zadanie 2.4** (Autor 1, Autor 2). *Ile rozwiązań ma równanie  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7$ :*

1. gdzie  $x_i$  są liczbami naturalnymi?
2. gdzie  $x_i$  są dodatnimi liczbami naturalnymi?

1. Rozwiązanie Autora 1 podpunktu 1
2. Rozwiązanie Autora 1 podpunktu 2

1. Rozwiązanie Autora 2 podpunktu 1
2. Rozwiązanie Autora 2 podpunktu 2

**Zadanie 2.5** (Autor 1, Autor 2). *Rozważmy czekoladę złożoną z  $m \times n$  kostek. Na ile sposobów można wykroić prostokąt złożony z  $k \times k$  sąsiadujących ze sobą kostek czekolady?*

Rozwiązanie Autora 1.

Rozwiązanie Autora 2.

**Zadanie 2.6** (Maciej Wępa, Autor 2). *(Reguła sumowania po górnym indeksie). Udowodnij, że dla  $n, k \in \mathbb{N}$  zachodzi*

$$\sum_{j=0}^n \binom{j}{k} = \binom{n+1}{k+1}$$

**Lewa strona:** Niech  $X$  to zbiór wszystkich  $k+1$  elementów  $z$  ze zbioru  $n+1$  elementów,  $|X| = \binom{n+1}{k+1}$ .

**Prawa strona:** Niech  $X_j$  to podzbiory  $|k+1|$  elementowe ze zbioru  $X$ , które zawierają maksymalny element  $j+1$ . np. dla  $k=2$   $X_3 = \{1, 2, 4\}$ ,  $X_4 = \{1, 3, 5\}$  - ostatni element jest największy, pozostałe dwa to wybrane z  $\{1..j\}$ . Rozważamy  $j$  elementów mniejszych od  $j+1$ , spośród nich wybieramy  $k$  elementów - mamy  $\binom{j}{k}$  możliwości. Sumując po  $j$  dodajemy do siebie wszystkie możliwości.

Rozwiązanie Autora 2.

**Zadanie 2.7** (Bartłomiej Sokołowski, Autor 2). *(Reguła sumowania równoległego). Udowodnij, że dla  $n, k \in \mathbb{N}$  zachodzi*

$$\sum_{j=0}^n \binom{n+j}{j} = \binom{n+k+1}{k}$$

Przeprowadzimy dowód indukcyjny.

$k = 0$ :

$$L = \sum_{j=0}^0 \binom{n+j}{j} = \binom{n}{0} = 0$$

$$P = \binom{n+0+1}{0} = \binom{n+1}{0} = 0$$

Zał. indukcyjne :

$$\sum_{j=0}^k \binom{n+j}{j} = \binom{n+k+1}{k}$$

Teza indukcyjna :

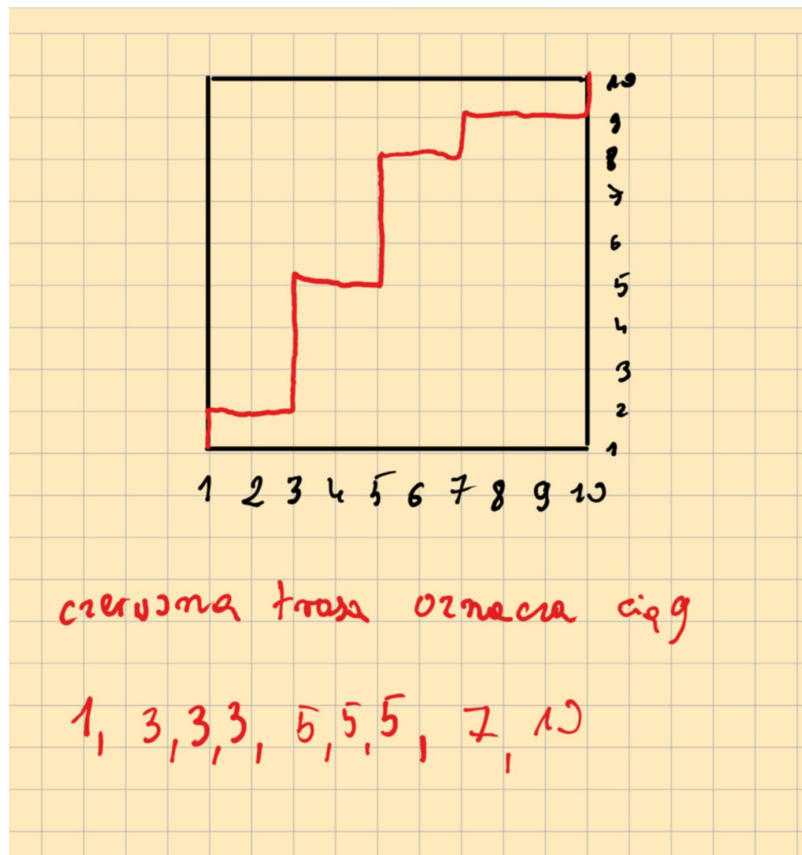
$$\sum_{j=0}^{k+1} \binom{n+j}{j} = \binom{n+k+2}{k+1}$$

$$\sum_{j=0}^{k+1} \binom{n+j}{j} = \sum_{j=0}^k \binom{n+j}{j} + \binom{n+k+1}{k+1} = \binom{n+k+1}{k} + \binom{n+k+1}{k+1} = \binom{n+k+2}{k+1}$$

Rozwiązanie Autora 2.

**Zadanie 2.8** (Krzysztof Wojczakowski, Autor 2). Ile jest funkcji  $f : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$  monotonicznych takich, że  $f(i) \leq f(j)$  dla  $i < j$ ?

Zauważmy, że te funkcje tworzą tak jakby ciąg, który ma być niemalejący. Możemy to zobrazować jako kratę gdzie wartości na dole to liczby od 1 do  $n$ , a idąc do góry możemy tylko iść w prawo lub w górę, gdzie tyle ile kresek w górę przy danej liczbie to tyle ile razy tą liczbę wybieramy.



Końcowo poszliśmy  $n - 1$  razy w prawo i  $n - 1$  razy w górę, czyli mamy  $n - 1 + n - 1 = 2n - 2$  kroków. W rezultacie takich funkcji jest:  $\binom{2n-2}{n-1}$

Rozwiązanie Autora 2.

**Zadanie 2.9** (Krzysztof Wojczakowski, Autor 2). Ile jest  $k$ -elementowych podzbiorów zbioru  $n$ -elementowego, które nie zawierają dwóch sąsiednich liczb?

Zauważmy, że jeżeli mamy do wybrania  $k$  elementów, to równolegle to oznacza, że musimy zrobić  $k - 1$  "przerw" pomiędzy nimi. Wygląda to tak:  $\_0\_0\_0\_ \dots \_0\_0\_$  gdzie zero to oznacza że liczby nie bierzemy, a podłoga oznacza, że bierzemy. Zostaje nam  $n - (k + 1)$  miejsc do wyboru, czyli  $n - k + 1$  miejsc. w takim razie ilość  $k$ -elementowych podzbiorów jest:  $\binom{n-k+1}{k}$

Rozwiązanie Autora 2.

**Zadanie 2.10** (Autor 1, Autor 2). Posługując się interpretacją kombinatoryczną udowodnij, że:

$$\sum_{i=0}^k \binom{n}{i} \binom{n-i}{k-i} = 2^k \binom{n}{k}$$

Rozwiązanie Autora 1.

Rozwiązanie Autora 2.

**Zadanie 2.11** (Katarzyna Szwed, Autor 2). *Udowodnij poniższe tożsamości na dwa sposoby: posługując się interpretacją kombinatoryczną albo rozwinięciem dwumianu  $(1+x)^n$ :*

1.

$$\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} = n2^{n-1}$$

2.

$$\sum_{k=0}^n k^2 \binom{n}{k} = (n + n^2)2^{n-2}$$

3.

$$\sum_{i=0}^k \binom{m}{i} \binom{n}{k-i} = \binom{m+n}{k}$$

1. Podpunkt 1

Rozważmy zbiór  $X$  taki, że:

$$X := \{(A, x) : x \in A \wedge A \subset [n]\}$$

Żeby policzyć jego moc najpierw wybierzemy element  $x \in [n]$  na  $n$  sposobów, a potem resztę elementów zbioru  $A$ , czyli dowolny podzbiór  $[n] - \{x\}$

$$|X| = n \cdot 2^{n-1}$$

Teraz rozważmy rodzinę zbiorów  $\{X_k\}_{k=0}^n$ :

$$X_k := \{(A, x) \in X : |A| = k\}$$

Żeby policzyć moc zbioru  $X_k$  (dla danego  $k$ ) najpierw wybieramy  $k$ -elementowy zbiór  $A$  będący podzbiorem  $[n]$ , a potem należący do niego element  $x$ :

$$|X_k| = \binom{n}{k} \cdot k$$

Rodzina  $X_k$  jest rozłącznym pokryciem zbioru  $X$ , zatem mamy:

$$|X| = \sum_{k=0}^n |X_k|$$

$$n \cdot 2^{n-1} = \sum_{k=0}^n k \cdot \binom{n}{k}$$

2. Podpunkt 2

Rozważmy zbiór  $X$  taki, że:

$$X := \{(A, x_1, x_2) : A \subset [n] \wedge x_1, x_2 \in A\}$$

Żeby policzyć moc zbioru  $X$  osobno policzymy przypadki kiedy  $x_1 = x_2$  i  $x_1 \neq x_2$ .

Dla  $x_1 = x_2$  wybieramy najpierw wyróżniony element na  $n$  sposobów, a potem dobieramy resztę elementów z  $A$ , dostajemy  $n2^{n-1}$ .



Dla  $x_1 \neq x_2$  wybieramy  $x_1$  na  $n$  sposobów,  $x_2$  na  $n - 1$  sposobów, a potem dobieramy resztę elementów z  $A$ , dostajemy  $n(n - 1)2^{n-2}$ . Zatem mamy:

$$|X| = n2^{n-1} + n(n - 1)2^{n-2} = (2n + n^2 - n)2^{n-2} = (n + n^2)2^{n-2}$$

Teraz rozważmy rodzinę zbiorów  $\{X_k\}_{k=0}^n$ :

$$X_k := \{(A, x_1, x_2) \in X : |A| = k\}$$

Żeby policzyć moc zbioru  $X_k$  (dla danego  $k$ ) najpierw wybierzemy  $k$ -elementowy zbiór  $A \subset [n]$ , a potem wybierzemy z niego elementy  $x_1$  i  $x_2$  (przy czym mogą być one sobie równe):

$$|X_k| = \binom{n}{k} \cdot k \cdot k$$

Rodzina  $X_k$  jest rozłącznym pokryciem zbioru  $X$ , więc otrzymujemy:

$$\sum_{k=0}^n |X_k| = |X|$$

$$\sum_{k=0}^n k^2 \binom{n}{k} = n(n + 1)2^{n-2}$$

### 3. Podpunkt 3

Rozważmy zbiór  $X$  taki, że:

$$X := \{A \subset [m + n] : |A| = k\}$$

Zauważmy, że  $|X| = \binom{m+n}{k}$ .

Teraz rozważmy rodzinę zbiorów  $\{X_i\}_{i=0}^n$ :

$$X_i := \{A \in X : |A \cap [m]| = i\}$$

Żeby policzyć moc zbioru  $X_i$  (dla danego  $i$ ) najpierw wybieramy  $i$  elementów z  $[m]$ , a potem  $k - i$  elementów z  $\{m + 1, m + 2, \dots, m + n\}$ , zatem  $|X_i| = \binom{m}{i} \binom{n}{k-i}$ .

Rodzina  $X_i$  jest rozłącznym pokryciem zbioru  $X$ , więc otrzymujemy:

$$|X| = \sum_{i=0}^n |X_i|$$

$$\binom{m+n}{k} = \sum_{i=0}^k \binom{m}{i} \binom{n}{k-i}$$

1. Rozwiązanie Autora 2 podpunktu 1
2. Rozwiązanie Autora 2 podpunktu 2
3. Rozwiązanie Autora 2 podpunktu 3

### 3. Zestaw

**Zadanie 3.1** (Autor 1, Autor 2). Wykaż, że dla dowolnego  $n \geq 1$  istnieje  $k \geq 1$  takie, że:

$$S(n, 0) < S(n, 1) < \dots < S(n, k-1) \leq S(n, k) > S(n, k+1) > \dots > S(n, n)$$

Rozwiązanie Autora 1.

Rozwiązanie Autora 2.

**Zadanie 3.2** (Bartłomiej Sokołowski, Autor 2). Wykaż, że:

$$B(n) = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} B(i)$$

Dowód:

Niech  $X = \pi([n])$ , wtedy  $|X| = B(n)$

Niech  $X_i = \{\pi([n]) : \exists A \in \pi([n]) (n \in A \wedge |A| = i+1)\}$

Jest to zbiór wszystkich podziałów, które zawierają  $n$  oraz mają wielkość  $i+1$

Jest to rozłączne pokrycie zbioru  $X$

$$|X_i| = \binom{n-1}{i} \times B(n-i-1)$$

gdzie  $\binom{n-1}{i}$  reprezentuje wybór  $i$  elementów z bloku z  $n$ , a  $B(n-i-1)$  reprezentuje podzielenie pozostałych elementów na bloki.

$$|X| = \sum_{i=0}^{n-1} |X_i| = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} \times B(n-i-1) = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{n-i-1} \times B(n-i-1) = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} \times B(i)$$

Ostatnie przejście to sumowanie ale od drugiej strony, dlatego można je wykonać.

Rozwiązanie Autora 2.

**Zadanie 3.3** (Autor 1, Autor 2). Wykaż, że dla  $n, k \in \mathbb{N}$  zachodzi:

$$S(n, k+1) = \frac{1}{(k+1)!} \sum_{0 \leq i_0 < \dots < i_{k-1} < n} \binom{n}{i_{k-1}} \binom{i_{k-1}}{i_{k-2}} \dots \binom{i_1}{i_0}$$

Rozwiązanie Autora 1.

Rozwiązanie Autora 2.

**Zadanie 3.4** (Autor 1, Autor 2). Rozważ następującą procedurę generującą pewne liczby naturalne  $\{a_{i,j}\}_{1 \leq i \leq j}$ :

1.  $a_{0,0} = 1$ ,
2.  $a_{n+1,0} = a_{n,n}$ , dla  $n \geq 0$ ,
3.  $a_{n+1,k+1} = a_{n,k} + a_{n+1,k}$ , dla  $n \geq k \geq 0$ .

Rozwiązanie Autora 1.

Rozwiązanie Autora 2.

**Zadanie 3.5** (Autor 1, Autor 2). Wykaż, że liczba podziałów zbioru  $(n - 1)$  elementowego jest równa liczbie podziałów zbioru  $\{1, \dots, n\}$  niezawierających sąsiednich liczb w jednym bloku.

Rozwiązanie Autora 1.

Rozwiązanie Autora 2.

**Zadanie 3.6** (Maciej Wępa, Autor 2). Udowodnij, że liczba ukorzenionych drzew binarnych na  $n$  wierzchołkach to  $n$ -ta liczba Catalana.

Ukorzenione drzewo jest drzewem binarnym, jeśli każdy wierzchołek ma co najwyżej dwójkę dzieci przy czym co najwyżej jedno lewe dziecko i co najwyżej jedno prawe dziecko.

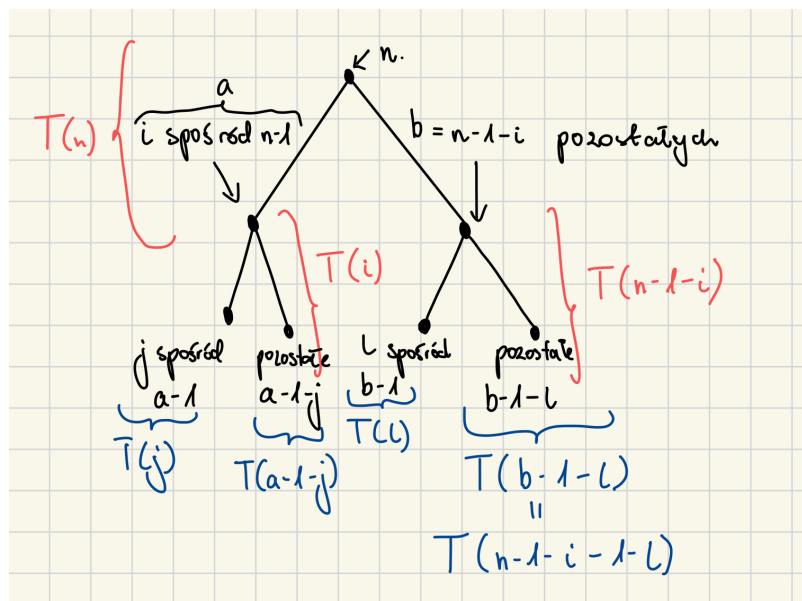
Spośród  $n$  wierzchołków, jeden wykorzystujemy na wierzchołek.

Spośród pozostałych  $n-1$  wybieramy  $i$  na lewe poddrzewo, a pozostałe  $n-1-i$  na prawe. W ten sposób możemy postępować rekurencyjnie

Założmy funkcję  $T(k)$ , która liczy ilość drzew. Jest ona rekurencyjna, bo każdy nowy korzeń może utworzyć nowe drzewo, a ilość korzeni lewo/prawo może się zmieniać, więc aby policzyć wszystkie możliwości skorzystamy z sumy.

$$T(n) = \sum_{i=0}^{n-1} T(i) \cdot T(n-1-i)$$

a to odpowiada rekurencyjnemu wzorowi Catalana.



Rozwiązanie Autora 2.

**Zadanie 3.7** (Autor 1, Autor 2). Triangulacją  $n$  – wierzchołkowego wielokąta wypukłego nazywamy zbiór  $(n - 3)$  wzajemnie nieprzecinających się jego przekątnych, które dzielą jego obszar na  $(n - 2)$  trójkątów.

1. ile jest triangulacji  $n$ –wierzchołkowego wielokąta wypukłego?
2. Ile jest triangulacji  $n$ –wierzchołkowego wielokąta wypukłego, w których każdy trójkąt triangulacji ma przynajmniej jeden bok na brzegu wielokąta?

1. Rozwiązanie Autora 1 podpunktu 1
2. Rozwiązanie Autora 1 podpunktu 2

1. Rozwiązanie Autora 2 podpunktu 1
2. Rozwiązanie Autora 2 podpunktu 2

**Zadanie 3.8** (Autor 1, Autor 2). *Wykaż, że liczba drzew etykietowanych na zbiorze  $1, \dots, n$  wynosi  $n^{n-2}$ .*

Rozwiązanie Autora 1.

Rozwiązanie Autora 2.

#### 4. Zestaw

**Zadanie 4.1** (Julian Sowiński, Autor 2). *Oblicz  $S(n, 2)$ .*

Liczba Stirlinga drugiego rodzaju  $S(n, k)$  dla  $k = 2$  to tak właściwie liczba sposobów na podzielenie zbioru  $n$ -elementowego na 2 niepuste podzbiory.

$$S(n, 2) = \frac{\overbrace{2^n}^{\text{wszystkie podzbiory}} - \overbrace{2}^{\text{bez pustego i całego}}}{\underbrace{2}_{\text{nie bierzemy pod uwagę kolejności}}} = \frac{2^n - 2}{2} = 2^{n-1} - 1$$

Rozwiązanie Autora 2.

**Zadanie 4.2** (Autor 1, Krzysztof Wójtowicz). *Wykaż, że mamy dokładnie*

$$\frac{n!}{1^{\lambda_1} \cdot 2^{\lambda_2} \cdot \dots \cdot n^{\lambda_n} \cdot \lambda_1! \cdot \dots \cdot \lambda_n!}$$

*permutacji zbioru  $[n]$  o typie  $1^{\lambda_1} \cdot 2^{\lambda_2} \cdot \dots \cdot n^{\lambda_n}$  (mających  $\lambda_i$  cykli długości  $i$  dla  $i \in [n]$ ).*

Rozwiązanie Autora 1.

Niech  $A$  będzie zbiorem wszystkich permutacji zbioru  $[n]$  o typie jak w poleceniu. Niech  $a_i \in [n]$ , policzymy ilość cykli długości  $k$ :  $(a_1, a_2, \dots, a_k)$  w zbiorze  $n$  elementowych:

$$\binom{n}{k} \cdot \frac{k!}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k}$$

Wybieramy  $k$  elementów do cyklu i następnie wybieramy ich kolejność (pierwszy element nie ma znaczenia w cyklu), stąd powyższy wynik.

Policzymy ilość wszystkich możliwych cykli długości  $1, 2, \dots, n$ :

$$\underbrace{\frac{n!}{(n-1)! \cdot 1} \cdot \frac{(n-1)!}{(n-2)! \cdot 1} \cdot \dots \cdot \frac{(n-\lambda_1)!}{(n-\lambda_1-2)! \cdot 2} \cdot \dots \cdot \frac{(n-\lambda_{\lambda_1})!}{(n-\lambda_{\lambda_1}-2)! \cdot 2} \cdot \dots \cdot \frac{(n-\lambda_{\lambda_1})!}{(n-\lambda_{\lambda_1}-2)! \cdot 2}}_{\lambda_1} \cdot \dots = \frac{n!}{1^{\lambda_1} \cdot 2^{\lambda_2} \cdot \dots \cdot n^{\lambda_n}}$$

Czyli mnożymy ilość możliwych cykli  $k$  elementowych dla  $\lambda_k$  ich ilości.

W celu otrzymania liczby  $|A|$  musimy jeszcze uwzględnić brak znaczenia kolejności występowania cykli w permutacji, liczba możliwych ustawień to:

$$\lambda_1! \cdot \lambda_2! \cdot \dots \cdot \lambda_n!$$

Zatem liczba wszystkich permutacji  $a \in A$ :

$$|A| = \frac{n!}{1^{\lambda_1} \cdot 2^{\lambda_2} \cdot \dots \cdot n^{\lambda_n} \cdot \lambda_1! \cdot \lambda_2! \cdot \dots \cdot \lambda_n!} \quad \blacksquare$$

**Zadanie 4.3** (Maciej Wępa, Autor 2). *Posługując się interpretacją kombinatoryczną, wykaż tożsamość:*

$$S(n+1, m+1) = \sum_k \binom{n}{k} S(k, m)$$

**Lewa strona:** Podział zbioru  $n+1$ -elementowego na  $m+1$  niepustych podzbiorów

**Prawa strona:** Bierzymy  $n+1$  element i tworzymy z niego nowy zbiór (domyślnie podzbiór nr  $m+1$ ). Z pozostałych  $n$  elementów wybieramy  $n-k$  ( $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ ), które będą w zbiorze nr  $m+1$  z elementem  $n+1$ . Pozostałe  $k$  elementów dzielimy na  $m$  niepustych podzbiorów. Używamy sumy, aby rozważyć wszystkie możliwości podzielenia elementów.

Rozwiązanie Autora 2.

**Zadanie 4.4** (Autor 1, Autor 2). Zakładając, że zachodzi równość:

$$(x_1 + \dots + x_k)^n = \sum_{n_1 + \dots + n_k = n} \binom{n}{n_1 n_2 \dots n_k} x_1^{n_1} \cdot \dots \cdot x_k^{n_k}$$

podaj ile wynosi  $\binom{n}{n_1 n_2 \dots n_k}$ .

Rozwiązanie Autora 1.

Rozwiązanie Autora 2.

**Zadanie 4.5** (Katarzyna Szwed, Autor 2). Wykaż, że

$$\sum_{i=0}^n i \begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix} = n! H_n,$$

gdzie  $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$ .

Rozważmy zbiór  $X := \{(\sigma, c) : \sigma - \text{permutacja zbioru } [n], c - \text{wyróżniony cykl z permutacji } \sigma\}$ .

Rozważmy rodzinę zbiorów  $\{A_i\}_{i=0}^n$  taką, że  $A_i = \{(\sigma, c) \in X : \text{permutacja } \sigma \text{ ma } i \text{ cykli}\}$ . Zauważmy, że  $|A_i| = i \begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix}$  (najpierw liczymy liczbę permutacji  $[n]$  o  $i$  cyklach, a potem wybieramy jeden z  $i$  cykli).

Rodzina  $A_i$  jest rozłącznym pokryciem zbioru  $X$ , zatem:

$$|X| = \sum_{i=0}^n |A_i| = \sum_{i=0}^n i \begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix}$$

Teraz rozważmy rodzinę zbiorów  $\{B_k\}_{k=1}^n$  taką, że  $B_k = \{(\sigma, c) \in X : \text{cykl } c \text{ ma } k \text{ elementów}\}$ . Zauważmy, że  $|B_k| = \binom{n}{k} \frac{k!}{k} (n-k)!$ , ponieważ najpierw wybieramy  $k$  elementów do cyklu  $c$ , potem permutujemy je, ale usuwamy kolejność pierwszego elementu, na koniec permutujemy resztę elementów zbioru  $[n]$ .

Rodzina  $B_k$  jest rozłącznym pokryciem zbioru  $X$ , zatem:

$$|X| = \sum_{k=1}^n |B_k| = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \frac{k!}{k} (n-k)! = \sum_{k=1}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{k!}{k} (n-k)! = \sum_{k=1}^n \frac{n!}{k} = n! \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = n! H_n$$

Otrzymujemy więc:

$$\sum_{i=0}^n i \begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix} = n! H_n$$

Rozwiązanie Autora 2.

**Zadanie 4.6** (Julian Sowiński, Autor 2). Wykaż, że dla dowolnego  $x \in \mathbb{R}$  zachodzi:

1.  $x^n = \sum_k S(n, k) x^k$
2.  $x^n = \sum_k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k$ .

1.

$$x^n = \sum_{k=0}^n S(n, k)x^k$$

Dowód indukcyjny:

1) Dla  $n = 0$ :

$$L = x^0 = 1$$

$$P = S(0, 0) \cdot x^0 = 1 \cdot 1 = 1$$

$$L = P$$

2) Dla  $n > 0$ :

Założenie:

$$x^n = \sum_{k=0}^n S(n, k)x^k$$

Teza:

$$x^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} S(n+1, k)x^k$$

Rozpoczynamy od lewej strony, używając założenia indukcyjnego:

$$L = x \cdot x^n = x \cdot \sum_{k=0}^n S(n, k)x^k = \sum_{k=0}^n S(n, k)(x \cdot x^k) \quad (*)$$

Zauważmy, że:

$$x^k \cdot x = (x - k + k)x^k = (x - k)x^k + kx^k = x^{k+1} + kx^k$$

Kontynuujemy z (\*), podstawiając znalezioną tożsamość:

$$\begin{aligned} (*) &= \sum_{k=0}^n S(n, k)(x^{k+1} + kx^k) \\ &= \sum_{k=0}^n S(n, k)x^{k+1} + \sum_{k=0}^n kS(n, k)x^k \end{aligned}$$

Teraz zmienimy przedziały sumowania:

$$\begin{aligned} \star &= \sum_{k=1}^{n+1} S(n, k-1)x^k + \underbrace{\sum_{k=0}^{n+1} kS(n, k)x^k}_{\text{ponieważ } S(n, n+1)=0} \\ &= \underbrace{\sum_{k=0}^{n+1} S(n, k-1)x^k}_{\text{ponieważ } S(n, -1)=0} + \sum_{k=0}^{n+1} kS(n, k)x^k \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} (S(n, k-1) + kS(n, k))x^k \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} S(n+1, k)x^k = P \end{aligned}$$

Co dowodzi tezy indukcyjnej.

2.

$$x^{\bar{n}} = \sum_k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k$$

Dowód indukcyjny:

1) Dla  $n = 0$ :

$$L = x^{\bar{0}} = 1$$

$$P = \sum_{k=0}^0 \begin{bmatrix} 0 \\ k \end{bmatrix} x^k = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} x^0 = 1 \cdot 1 = 1.$$

$$L = P$$

2) Dla  $n > 0$ :

Założenie:

$$x^{\overline{n-1}} = \sum_{k=0}^{n-1} \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix} x^k$$

Teza:

$$x^{\bar{n}} = \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k$$

Rozpoczynamy od lewej strony:

$$\begin{aligned} L = x^{\bar{n}} &= (x + n - 1)x^{\overline{n-1}} = (x + n - 1) \sum_{k=0}^{n-1} \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix} x^k \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (x + n - 1) \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix} x^k \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix} x^{k+1} + \sum_{k=0}^{n-1} (n-1) \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix} x^k \quad (*) \end{aligned}$$

Teraz zmieniamy przedziały sumowania, aby później zastosować wzór rekurencyjny:

$$\begin{aligned} (*) &= \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix} x^k + \sum_{k=0}^n (n-1) \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix} x^k \\ &= \sum_{k=0}^n \left( \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix} + (n-1) \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix} \right) x^k \end{aligned}$$

Stosujemy wzór rekurencyjny dla liczb Stirlinga I rodzaju:

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = (n-1) \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}$$

Podstawiając to do naszego wyrażenia, otrzymujemy:

$$= \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k = P$$

Co kończy dowód indukcyjny.

1. Rozwiązanie Autora 2 podpunktu 1
2. Rozwiązanie Autora 2 podpunktu 2



## 5. Zestaw

**Zadanie 5.1** (Autor 1, Autor 2). Wykaż zasadę włączeń i wyłączeń korzystając z indukcji po liczbie zbiorów.

Rozwiązanie Autora 1.

Rozwiązanie Autora 2.

**Zadanie 5.2** (Autor 1, Autor 2). Wykaż, że mamy

$$\sum_{j=0}^m (-1)^j \binom{m}{j} (m-j)^n$$

suriekcji ze zbioru  $[n]$  w zbiór  $[m]$ .

Rozwiązanie Autora 1.

Rozwiązanie Autora 2.

**Zadanie 5.3** (Autor 1, Autor 2). Ile jest ciągów długości  $2n$  takich, że każda liczba  $i \in [n]$  występuje dokładnie dwa razy oraz każde sąsiednie dwa wyrazy są różne.

Rozwiązanie Autora 1.

Rozwiązanie Autora 2.

**Zadanie 5.4** (Autor 1, Autor 2). Wykaż, że dla  $n \geq 3$  zachodzi tożsamość

$$D(n) = (n-1)(D(n-1) + D(n-2))$$

gdzie  $D(n)$  jest liczbą permutacji zbioru  $[n]$  bez punktów stałych.

Rozwiązanie Autora 1.

Rozwiązanie Autora 2.

**Zadanie 5.5** (Autor 1, Autor 2). Wykaż (najlepiej kombinatorycznie), że dla dowolnych  $n, k \in \mathbb{N}$  zachodzi:

1.  $S(n, k) = \sum_{0 \leq m_1 \leq m_2 \leq \dots \leq m_{n-k} \leq k} m_1 m_2 \cdot \dots \cdot m_{n-k}$
2.  $c(n, k) = \sum_{0 < m_1 < m_2 < \dots < m_{n-k} < k} m_1 m_2 \cdot \dots \cdot m_{n-k}$

1. Rozwiązanie Autora 1 podpunktu 1
2. Rozwiązanie Autora 1 podpunktu 2

1. Rozwiązanie Autora 2 podpunktu 1
2. Rozwiązanie Autora 2 podpunktu 2

**Zadanie 5.6** (Autor 1, Autor 2). Ciąg podziałów zbioru  $1, \dots, n$  tworzymy następująco. Startujemy od podziału zawierającego tylko zbiór  $1, \dots, n$ . Podział  $(i+1)$ -wszy otrzymujemy z podziału  $i$ -tego poprzez:

1. wybranie jednego, co najmniej 2-elementowego zbioru z podziału  $i$ -tego i podzielenie go na dwa niepuste podzbiory,
2. podzielenie każdego, co najmniej 2-elementowego zbioru z podziału  $i$ -tego na dwa niepuste podzbiory.

*W obu przypadkach procedura kończy swoje działanie jeżeli wszystkie zbiory podziału są jednoelementowe. Na ile sposobów można wykonać powyższe procedury? Na ile sposobów możemy wykonać powyższe procedury zakładając, że po każdym kroku zbiory podziałów zawierają kolejne liczby naturalne?*

Rozwiązanie Autora 1.

Rozwiązanie Autora 2.

## **6. Zestaw**

## **7. Zestaw**

## 8. Zestaw

**Zadanie 8.1** (Krzysztof Wójtowicz, Autor 2). Wykorzystaj funkcje tworzące aby policzyć na ile sposobów można wyciągnąć 70 kul z urny zawierającej 30 kul czerwonych, 40 kul niebieskich i 50 kul białych. Kule tego samego koloru są nierozróżnialne. Kolejność wyciągania jest nieistotna.

Zapiszemy funkcje tworzące  $C(x)$ ,  $N(x)$  oraz  $B(x)$  odpowiednio dla kul czerwonych(1), niebieskich(2) oraz białych(3):

$$C(x) = 1 + x + x^2 + \dots + x^{30} = \frac{1 - x^{31}}{1 - x} \quad (1)$$

$$N(x) = 1 + x + x^2 + \dots + x^{40} = \frac{1 - x^{41}}{1 - x} \quad (2)$$

$$B(x) = 1 + x + x^2 + \dots + x^{50} = \frac{1 - x^{51}}{1 - x} \quad (3)$$

Stworzymy funkcję  $K(x)$ , która będzie generować nam ciąg liczby sposobów wyciągania danej ilości kul, odpowiedzią dla 70 kul będzie współczynnik przy  $x^{70}$ .

$$\begin{aligned} K(x) &= C(x) \cdot N(x) \cdot B(x) = \frac{(1 - x^{31})(1 - x^{41})(1 - x^{51})}{(1 - x)^3} = \\ &= (1 - x^{31} - x^{41} - x^{51} + x^{72} + x^{82} + x^{92} - x^{123}) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+2}{2} x^k \end{aligned}$$

Po wymnożeniu  $x^{70}$  wystąpi cztery razy:

1. dla  $k = 70$ :

$$1 \cdot \binom{72}{2} x^{70} = \binom{72}{2} x^{70}$$

2. dla  $k = 39$ :

$$-x^{31} \cdot \binom{41}{2} x^{39} = -\binom{41}{2} x^{70}$$

3. dla  $k = 29$ :

$$-x^{41} \cdot \binom{31}{2} x^{29} = -\binom{31}{2} x^{70}$$

4. dla  $k = 19$ :

$$-x^{51} \cdot \binom{21}{2} x^{19} = -\binom{21}{2} x^{70}$$

Więc współczynnik przy  $x^{70}$  wynosi:

$$\begin{aligned} \binom{72}{2} - \binom{41}{2} - \binom{31}{2} - \binom{21}{2} &= \frac{72!}{2! \cdot 70!} - \frac{41!}{2! \cdot 39!} - \frac{31!}{2! \cdot 29!} - \frac{21!}{2! \cdot 19!} = \\ &= 2556 - 820 - 465 - 210 = 1061 \end{aligned}$$

Rozwiązanie Autora 2.

**Zadanie 8.2** (Krzysztof Wójtowicz, Autor 2). Jaki jest współczynnik

1. przy  $x^5$  w  $(1 - 2x)^{-2}$ ;
2. przy  $x^4$  w  $\sqrt[3]{1+x}$ ;
3. przy  $x^3$  w  $(2+x)^{3/2}/(1-x)$ ?

**Podpunkt 1.**

Niech:

$$F(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-2x} = \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (2x)^n$$

Wtedy:

$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{1}{(1-2x)^2} = (1-2x)^{-2} = \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} (2^n \cdot n \cdot x^{n-1}) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{(2^n \cdot (n+1))}_{a_n} \cdot x^n \end{aligned}$$

Więc:

$$a_5 = 2^5 \cdot 6 = 192$$

**Podpunkt 2.**

Użyjemy rozwinięcia binomial series:

$$(1+x)^{1/3} = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\binom{\frac{1}{3}}{n}}_{a_n} \cdot x^n$$

Więc:

$$a_4 = \binom{\frac{1}{3}}{4} = \frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3}-1)(\frac{1}{3}-2)(\frac{1}{3}-3)}{4!} = \frac{-10}{243}$$

**Podpunkt 3.**

Rozwiemy osobno mianownik i licznik:

$$\begin{aligned} (2+x)^{3/2} &= 2^{3/2} \left(1 + \frac{x}{2}\right)^{3/2} = 2\sqrt{2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\frac{3}{2}}{n} \left(\frac{x}{2}\right)^n \\ \frac{1}{1-x} &= \sum_{n=0}^{\infty} x^n \end{aligned}$$

Wtedy:

$$\frac{(2+x)^{3/2}}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot x^n$$

Gdzie  $c_n$  jest równe (iloczyn Cauchy'ego):

$$c_n = 2\sqrt{2} \cdot \sum_{k=0}^n \binom{\frac{3}{2}}{k} \cdot \frac{1}{2^k}$$

Stąd otrzymujemy:

$$\begin{aligned} c_3 &= 2\sqrt{2} \cdot \sum_{k=0}^3 \binom{\frac{3}{2}}{k} \frac{1}{2^k} = 2\sqrt{2} \cdot \left(1 \cdot \binom{\frac{3}{2}}{0} + \frac{1}{2} \cdot \binom{\frac{3}{2}}{1} + \frac{1}{4} \cdot \binom{\frac{3}{2}}{2} + \frac{1}{8} \cdot \binom{\frac{3}{2}}{3}\right) = \\ &= 2\sqrt{2} \cdot \left(1 + \frac{3}{4} + \frac{3}{32} - \frac{1}{128}\right) = 2\sqrt{2} \cdot \frac{235}{128} = \frac{235\sqrt{2}}{64} \end{aligned}$$

Rozwiązanie Autora 2.

**Zadanie 8.3** (Filip Sajko, Autor 2). *Polecenie*

Rozwiązanie Autora 1.

Rozwiązanie Autora 2.

**Zadanie 8.4** (Filip Sajko, Autor 2). *Polecenie*

Rozwiązanie Autora 1.

Rozwiązanie Autora 2.

**Zadanie 8.5** (Maciej Welpa, Autor 2). *Niech  $a_n$  będzie liczbą trójek  $(i, j, k)$  liczb całkowitych takich, że  $i \geq 0, j \geq 1, k \geq 1$  oraz  $i + 3j + 3k = n$ . Znajdź funkcję tworzącą ciągu  $(a_0, a_1, \dots)$  i wyznacz wzór na  $a_n$ .*

Równanie:  $i + 3j + 3k = n$ , gdzie  $i \geq 0, j \geq 1, k \geq 1$ .  
Funkcja tworząca dla zmiennej  $i$  (dla  $i \geq 0$ ):

$$I(x) = \sum_{a=0}^{\infty} x^a = 1 + x + x^2 + \dots = \frac{1}{1-x}$$

Funkcja tworząca dla zmiennej  $j$  (dla  $j \geq 1$  i  $3j$  w równaniu):

$$J(x) = \sum_{b=1}^{\infty} x^{3b} = x^3 + x^6 + x^9 + \dots = x^3(1 + x^3 + x^6 + \dots) = x^3 \sum_{c=0}^{\infty} (x^3)^c = \frac{x^3}{1-x^3}$$

Funkcja tworząca dla zmiennej  $k$  (dla  $k \geq 1$  i  $3k$  w równaniu):

$$K(x) = \sum_{d=1}^{\infty} x^{3d} = x^3 + x^6 + x^9 + \dots = \frac{x^3}{1-x^3}$$

Funkcja tworząca  $a(x)$  dla liczby rozwiązań równania  $i + 3j + 3k = n$  jest iloczynem funkcji tworzących dla poszczególnych zmiennych:

$$a(x) = I(x) \cdot J(x) \cdot K(x) = \frac{1}{1-x} \cdot \frac{x^3}{1-x^3} \cdot \frac{x^3}{1-x^3}$$

Zatem:

$$a(x) = \frac{x^6}{(1-x)(1-x^3)^2}$$

Aby znaleźć współczynnik  $a_n$  (liczbę rozwiązań), należy rozłożyć  $a(x)$  na ułamki proste. Mianownik możemy zapisać jako:  $(1-x)(1-x^3)^2 = (1-x)((1-x)(1+x+x^2))^2 = (1-x)(1-x)^2(1+x+x^2)^2 = (1-x)^3(1+x+x^2)^2$  Stąd:

$$a(x) = \frac{x^6}{(1-x)^3(1+x+x^2)^2}$$

Rozkład na ułamki proste dla tego typu wyrażenia będzie zawierał składniki postaci:

$$\frac{A}{1-x} + \frac{B}{(1-x)^2} + \frac{C}{(1-x)^3} + \frac{Dx+E}{1+x+x^2} + \frac{Fx+G}{(1+x+x^2)^2}$$

Wyznaczenie stałych  $A, B, C, D, E, F, G$  jest procesem arytmetycznym i czasochłonnym, wymagającym podstawiania wartości  $x$  lub porównywania współczynników. Po wyznaczeniu tych stałych, każdy z ułamków prostych powinno przekształcić się z powrotem do szeregu potęgowego.

Rozwiązanie Autora 2.

**Zadanie 8.6** (Krzysztof Wójtowicz, Autor 2). Ustal liczbę naturalną  $r \geq 2$  i niech  $a_n$  będzie liczbą  $r$ -tupli  $(i_1, \dots, i_r)$  nieujemnych liczb całkowitych takich, że  $i_1 + \dots + i_r = n$

1. Wyznacz funkcję tworzącą ciąg  $(a_0, a_1, \dots)$
2. Przy pomocy tej funkcji wyznacz wzór na  $a_n$ .

**Podpunkt 1.**

Funkcja tworząca ciąg  $(a_0, a_1, \dots)$ :

$$A(x) = (1 + x + x^2 + \dots)^r = \left(\frac{1}{1-x}\right)^r = \frac{1}{(1-x)^r} = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\binom{n+r-1}{n}}_{a_n} x^n$$

**Podpunkt 2.**

Wzór na  $a_n$ :

$$a_n = \binom{n+r-1}{n}$$

Rozwiązanie Autora 2.

**Zadanie 8.7** (Maciej Wępa (i), Autor 2). Niech  $a(x)$  będzie funkcją tworzącą ciąg  $(a_0, a_1, \dots)$ . Wytłumacz dlaczego  $a(x) \cdot \frac{1}{1-x}$  jest funkcją tworzącą  $(a_0, a_0 + a_1, a_0 + a_1 + a_2, \dots)$ . Korzystając z tej obserwacji wyznacz wzór zwarty na:

1.  $\sum_{k=1}^n k^2$
2.  $\sum_{k=1}^n k^3$

**Wyjaśnienie właściwości funkcji tworzącej:**

Niech  $a(x)$  będzie funkcją tworzącą ciąg  $(a_0, a_1, a_2, \dots)$ , czyli  $a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ . Rozważmy funkcję  $\frac{1}{1-x}$ , która jest funkcją tworzącą ciąg  $(1, 1, 1, \dots)$ , czyli  $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} 1 \cdot x^n$ . Iloczyn dwóch funkcji tworzących odpowiada splutowi ciągów, dla których są one funkcjami tworzącymi. Zatem, współczynniki  $c_n$  w rozwinięciu  $a(x) \cdot \frac{1}{1-x}$  będą wynosić:

Rozważmy iloczyn dwóch szeregów potęgowych:  $\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$  oraz  $\sum_{i=0}^{\infty} x^i$ . Zgodnie z definicją iloczynu Cauchy'ego, ich iloczyn jest nowym szeregiem, którego  $n$ -ty (lub w tym przypadku  $i$ -ty) współczynnik jest sumą:

$$\left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i\right) \cdot \left(\sum_{i=0}^{\infty} x^i\right) = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^i a_j x^j \cdot x^{i-j}\right)$$

Dalsze przekształcenie:

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^i a_j x^i\right)$$

Wyciągając  $x^i$  przed wewnętrzną sumę:

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \left[ x^i \left(\sum_{j=0}^i a_j\right) \right]$$

Widać, że suma ta to ciąg sum częściowych szeregu.

**Podpunkt 1.**

Aby wyznaczyć wzór zwarty na  $\sum_{k=1}^n k^2$ , możemy wykorzystać tę obserwację, że szukamy funkcji tworzącej dla ciągu sum częściowych. Najpierw potrzebujemy funkcji tworzącej dla ciągu  $a_k = k^2$ . Wiemy, że (różniczkowanie szeregów, a następnie mnożenie przez  $x$ ):

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$$



- $\sum_{k=0}^{\infty} kx^k = \frac{x}{(1-x)^2}$
- $\sum_{k=0}^{\infty} k^2 x^k = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}$  (jest to wynik różniczkowania  $\sum kx^k$  i pomnożenia przez  $x$ )

Zatem, funkcja tworząca dla ciągu  $(k^2)_{k \geq 0}$  to  $A(x) = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}$ . Szukamy sumy częściowej  $\sum_{k=1}^n k^2$ . Oznacza to, że potrzebujemy funkcji tworzącej dla ciągu  $S_n = \sum_{k=1}^n k^2$ . Zgodnie z powyższą własnością, funkcja tworząca dla ciągu sum częściowych  $S(x)$  jest równa  $A(x) \cdot \frac{1}{1-x}$ .

$$S(x) = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3} \cdot \frac{1}{1-x} = \frac{x(1+x)}{(1-x)^4}$$

Po przekształceniu metodą ułamków prostych i doprowadzeniu do szeregu potęgowego:

$$S(n) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Rozwiązanie Autora 2.

**Zadanie 8.8** (Konstanty Sobczyński, Autor 2). *Polecenie*

Rozwiązanie Autora 1.

Rozwiązanie Autora 2.

**Zadanie 8.9** (Konstanty Sobczyński (i-iii), Julian Sowiński (iv-vi), Maciej Welpa (vii-ix), Autor 2). *Rozwiąż równania rekurencyjne:*

1.  $a_0 = 4, a_1 = 4, a_{n+2} = a_{n+1} + 6a_n,$
2.  $a_0 = 2, a_1 = 2, a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n,$
3.  $a_0 = 0, a_1 = 1, a_{n+2} = a_{n+1} + a_n + 1,$
4.  $a_0 = 0, a_1 = 1, a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n,$
5.  $a_0 = 0, a_1 = 1, a_{n+2} = a_{n+1} - a_n,$
6.  $a_0 = 1, a_1 = 5, a_2 = 11, a_{n+3} = 3a_{n+2} + 2a_{n+1} - 2a_n,$
7.  $a_0 = 1, a_1 = 1, a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n + (-1)^n,$
8.  $a_0 = 1, a_1 = 1, a_{n+2} = a_{n+1} + 6a_n - n,$
9.  $a_0 = 1, a_1 = 1, a_{n+1} = 2a_n + 4^n.$

### Rozwiązania Rekurencji Liniowych za Pomocą Funkcji Tworzących

Poniżej przedstawiono rozwiązania podanych rekurencji liniowych z wykorzystaniem funkcji tworzących, odwzorowując styl i kolejność kroków z przedstawionych zdjęć.

#### Przykład (vii)

Dana rekurencja:  $a_0 = 1, a_1 = 1, a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n + (-1)^n$  dla  $n \geq 0$ .

Definiujemy funkcję tworzącą  $a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ . Rozpiszmy  $a(x)$  jako sumę początkowych wyrazów i reszty szeregu:

$$a(x) = a_0 x^0 + a_1 x^1 + \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n$$

Podstawiamy warunki początkowe  $a_0 = 1, a_1 = 1$ :

$$a(x) = 1 + x + \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n$$

Teraz, bazując na rekurencji, podstawiamy za  $a_n$  w sumie (dla  $n \geq 2$ ,  $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} + (-1)^{n-2}$ ):

$$= 1 + x + \sum_{n=2}^{\infty} (a_{n-1} + 2a_{n-2} + (-1)^{n-2})x^n$$

Rozbijamy sumę na trzy części i wyciągamy odpowiednie potęgi  $x$  przed sumy, a następnie zmieniamy indeksy:

$$= 1 + x + x \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1}x^{n-1} + 2x^2 \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2}x^{n-2} + x^2 \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-2}x^{n-2}$$

Wprowadzamy nowy indeks  $k$  (lub  $j$  jak na zdjęciu):

$$x \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k = x(a(x) - a_0)$$

$$2x^2 \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = 2x^2 a(x)$$

$$x^2 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k = x^2 \frac{1}{1 - (-x)} = \frac{x^2}{1 + x}$$

Podstawiamy te wyrażenia z powrotem do  $a(x)$  i warunek początkowy  $a_0 = 1$ :

$$a(x) = 1 + x + x(a(x) - 1) + 2x^2 a(x) + \frac{x^2}{1 + x}$$

$$a(x) = 1 + x + xa(x) - x + 2x^2 a(x) + \frac{x^2}{1 + x}$$

Przenosząc wszystkie wyrazy zawierające  $a(x)$  na lewą stronę i pozostałe na prawą:

$$a(x)(1 - x - 2x^2) = 1 + \frac{x^2}{1 + x}$$

Upraszczając prawą stronę i rozkładając mianownik po lewej stronie:

$$a(x)(1 - x - 2x^2) = \frac{1 + x + x^2}{1 + x}$$

Ostateczna postać funkcji tworzącej  $a(x)$ :

$$a(x) = \frac{1 + x + x^2}{(1 + x)(1 - x - 2x^2)} = \frac{1 + x + x^2}{(1 + x)^2(1 - 2x)}$$

Rozkład na ułamki proste (jak na zdjęciu):

$$\frac{1 + x + x^2}{(1 + x)^2(1 - 2x)} = \frac{A}{(1 + x)^2} + \frac{B}{1 + x} + \frac{C}{1 - 2x}$$

Z wartości podanych na zdjęciu, otrzymujemy:  $A = -1/3$   $B = 1/9$   $C = 7/9$  Zatem:

$$a(x) = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{(1 + x)^2} + \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{1 + x} + \frac{7}{9} \cdot \frac{1}{1 - 2x}$$

Przekształcamy każdy człon z powrotem na szereg potęgowy:

$$a(x) = -\frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(-1)^n x^n + \frac{1}{9} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n + \frac{7}{9} \sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n$$

Grupujemy współczynniki przy  $x^n$  (tak jak na zdjęciu):

$$a_n = \left(-\frac{1}{3}(n+1) + \frac{1}{9}\right)(-1)^n + \frac{7}{9}2^n$$

$$a_n = \left(\frac{-3(n+1)+1}{9}\right)(-1)^n + \frac{7}{9}2^n$$

$$a_n = \frac{(-3n-3+1)}{9}(-1)^n + \frac{7}{9}2^n$$

$$a_n = \frac{(-3n-2)(-1)^n + 7 \cdot 2^n}{9}$$

Można to również zapisać jako:

$$a_n = \frac{(3n+2)(-1)^{n+1} + 7 \cdot 2^n}{9}$$

### Przykład (viii)

Dana rekurencja:  $a_0 = 1, a_1 = 1, a_{n+2} = a_{n+1} + 6a_n - n$  dla  $n \geq 0$ .

Definiujemy funkcję tworzącą  $a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ . Rozpiszmy  $a(x)$  jako sumę początkowych wyrazów i reszty szeregu:

$$a(x) = a_0 + a_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n$$

Podstawiamy warunki początkowe  $a_0 = 1, a_1 = 1$ :

$$a(x) = 1 + x + \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n$$

Teraz, bazując na rekurencji, podstawiamy za  $a_n$  w sumie (dla  $n \geq 2, a_n = a_{n-1} + 6a_{n-2} - (n-2)$ ):

$$= 1 + x + \sum_{n=2}^{\infty} (a_{n-1} + 6a_{n-2} - (n-2))x^n$$

Rozbijamy sumę na trzy części i wyciągamy odpowiednie potęgi  $x$  przed sumy, a następnie zmieniamy indeksy:

$$= 1 + x + x \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1} x^{n-1} + 6x^2 \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^{n-2} - x^2 \sum_{n=2}^{\infty} (n-2)x^{n-2}$$

Wprowadzamy nowy indeks  $k$ :

$$x \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k = x(a(x) - a_0)$$

$$6x^2 \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = 6x^2 a(x)$$

Dla członu z  $(n-2)$ :

$$x^2 \sum_{n=2}^{\infty} (n-2)x^{n-2} = x^2 \sum_{k=0}^{\infty} kx^k = x^2 \frac{x}{(1-x)^2} = \frac{x^3}{(1-x)^2}$$

Podstawiamy te wyrażenia z powrotem do  $a(x)$  i warunek początkowy  $a_0 = 1$ :

$$a(x) = 1 + x + x(a(x) - 1) + 6x^2 a(x) - \frac{x^3}{(1-x)^2}$$

$$a(x) = 1 + x + xa(x) - x + 6x^2a(x) - \frac{x^3}{(1-x)^2}$$

Przenosząc wszystkie wyrazy zawierające  $a(x)$  na lewą stronę i pozostałe na prawą:

$$a(x)(1-x-6x^2) = 1 - \frac{x^3}{(1-x)^2}$$

Upraszczając prawą stronę:

$$a(x)(1-x-6x^2) = \frac{(1-x)^2 - x^3}{(1-x)^2} = \frac{1-2x+x^2-x^3}{(1-x)^2}$$

Ostateczna postać funkcji tworzącej  $a(x)$ :

$$a(x) = \frac{1-2x+x^2-x^3}{(1-x-6x^2)(1-x)^2}$$

Rozkładamy mianownik  $1-x-6x^2 = -(6x^2+x-1) = -(3x-1)(2x+1) = (1-3x)(2x+1)$ .

$$a(x) = \frac{1-2x+x^2-x^3}{(1-3x)(2x+1)(1-x)^2}$$

Rozkład na ułamki proste (jak na zdjęciu):

$$a(x) = \frac{11}{20(1-3x)} + \frac{19}{45(1+2x)} - \frac{5}{36(1-x)} - \frac{1}{6(1-x)^2}$$

Przekształcamy każdy człon z powrotem na szereg potęgowy:

$$a(x) = \frac{11}{20} \sum_{n=0}^{\infty} (3x)^n + \frac{19}{45} \sum_{n=0}^{\infty} (-2x)^n - \frac{5}{36} \sum_{n=0}^{\infty} x^n - \frac{1}{6} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n$$

Grupujemy współczynniki przy  $x^n$ :

$$a_n = \frac{11}{20}3^n + \frac{19}{45}(-2)^n - \frac{5}{36} - \frac{1}{6}(n+1)$$

Sprowadzamy do wspólnego mianownika 180:

$$a_n = \frac{9 \cdot 11 \cdot 3^n}{180} + \frac{4 \cdot 19 \cdot (-2)^n}{180} - \frac{5 \cdot 5}{180} - \frac{30(n+1)}{180}$$

$$a_n = \frac{99 \cdot 3^n + 76 \cdot (-2)^n - 25 - 30n - 30}{180}$$

$$a_n = \frac{99 \cdot 3^n + 76 \cdot (-2)^n - 30n - 55}{180}$$

### Przykład (ix)

Dana rekurencja:  $a_0 = 1, a_1 = 1, a_{n+1} = 2a_n + 4^n$  dla  $n \geq 0$ .

Definiujemy funkcję tworzącą  $a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ . Zgodnie z widocznym stylem, zaczynamy od  $a(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ :

$$a(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (2a_{n-1} + 4^{n-1})x^n$$

Podstawiamy  $a_0 = 1$ :

$$a(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} 2a_{n-1}x^n + \sum_{n=1}^{\infty} 4^{n-1}x^n$$

Przekształcamy sumy:

$$= 1 + 2x \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^{n-1} + x \sum_{n=1}^{\infty} 4^{n-1} x^{n-1}$$

Zmieniamy indeksy na  $k = n - 1$ :

$$= 1 + 2x \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k + x \sum_{k=0}^{\infty} (4x)^k$$

Wyrażamy sumy za pomocą  $a(x)$  i szeregu geometrycznego:

$$a(x) = 1 + 2xa(x) + x \frac{1}{1 - 4x}$$

Przenosząc wszystkie wyrazy zawierające  $a(x)$  na lewą stronę i pozostałe na prawą:

$$a(x)(1 - 2x) = 1 + \frac{x}{1 - 4x}$$

Upraszczając prawą stronę:

$$a(x)(1 - 2x) = \frac{1 - 4x + x}{1 - 4x} = \frac{1 - 3x}{1 - 4x}$$

Ostateczna postać funkcji tworzącej  $a(x)$ :

$$a(x) = \frac{1 - 3x}{(1 - 4x)(1 - 2x)}$$

Rozkład na ułamki proste (jak na zdjęciu):

$$a(x) = -\frac{1}{2} \frac{1}{1 - 2x} + \frac{3}{2} \frac{1}{1 - 4x}$$

Kontynuując:

$$a(x) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (2x)^n + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (4x)^n$$

$$a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1}{2} 2^n + \frac{1}{2} 4^n \right) x^n$$

$$a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (2^{n-1} + 2^{2n-1}) x^n$$

Zatem wzór na  $n$ -ty wyraz ciągu to:

$$a_n = 2^{n-1} + 2^{2n-1}$$

Rozwiązanie Autora 2.

**Zadanie 8.10** (Karol Wójcik, Autor 2). *Polecenie*

Rozwiązanie Autora 1.

Rozwiązanie Autora 2.