Grupa 3
Informatyka i Systemy Informacyjne — MiNI PW

Matematyka Dyskretna I

Studenckie rozwiązania zadań z ćwiczeń z Matematyki Dyskretnej I.
Ćwiczenia z *MD I* w gr. 3 prowadzi dr inż. Tomasz Brengos
i też oto pod jego opieką powstaje ten plik.
Ostatnia aktualizacja: 11 czerwca 2025

Spis treści

Lato 2025

1. Zestaw

Zadanie 1.1 (Krzysztof Wójtowicz, Autor 2). *Na płaszczyźnie poprowadzono n prostych, z których żadne dwie nie są równoległe i żadne trzy nie przechodzą przez ten sam punkt. Wyznacz liczbę:*

1. *obszarów, na które te proste dzielą płaszczyznę;*
2. *obszarów ograniczonych, na które te proste dzielą płaszczyznę.*

1. Zauważymy, że każda kolejna prosta przecina wszystkie poprzednie proste, a co za tym idzie również obszary, które są do nich "przyległe", dzieląc je na dwa. Każda poprzednia prosta ma dwa takie obszary, więc ich ogólna liczba to (odejmujemy obszary wspólne, czyli te "pośrodku" dwóch prostych, by ich nie duplikować):

$$2(n-1)-(n-1-1)=n$$

Zatem każda kolejna prosta dodaje n nowych obszarów:

$$P(n)=P(n-1)+n=P(0)+\sum_{k=1}^{n}k=1+\frac{n(n+1)}{2}$$

gdzie $P(n)$ to liczba obszarów dla n prostych.

2. Liczbę obszarów ograniczonych otrzymamy odejmując liczbę obszarów nieograniczonych z wyniku z podpunku 1. Każda prosta ma dwa "przyległe" obszary nieograniczone, więc liczba wszystkich takich obszarów to $2n$, zatem liczba wszystkich obszarów ograniczonych to:

$$1+\frac{n(n+1)}{2}-2n=\frac{n^2-3n+2}{2}=\frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

1. Rozwiązanie Autora 2 podpunktu 1
2. Rozwiązanie Autora 2 podpunktu 2

Zadanie 1.2 (Autor 1, Autor 2). *Ciąg Fibonacciego $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ zadany jest przez $F_0=0$, $F_1=1$ i $F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$. Udowodnij, że:*

1. $F_0+...+F_n=F_{n+2}-1$;
2. $5|F_{5n}$,
3. $F_n<2_n$.

1. Rozwiązanie Autora 1 podpunktu 1
2. Rozwiązanie Autora 1 podpunktu 2
3. Rozwiązanie Autora 1 podpunktu 3

1. Rozwiązanie Autora 2 podpunktu 1
2. Rozwiązanie Autora 2 podpunktu 2
3. Rozwiązanie Autora 2 podpunktu 3

Zadanie 1.3 (Autor 1, Autor 2). *Turniej n-wierzchołkowy to dowolny graf skierowany $G=(V,E)$, gdzie $|V|=n$ i w którym $(u,v)\in E$ lub $(v,u)\in E$ dla dowolnych $u,v\in V$. Pokaż, że w dowolnym niepustym turnieju istnieje wierzchołek z którego można "przejść" po krawędziach zgodnie z ich skierowaniem do dowolnego innego wierzchołka w co najwyżej dwóch krokach.*

Rozwiązanie Autora 1.

Rozwiązanie Autora 2.

Zadanie 1.4 (Autor 1, Autor 2). *Udowodnij, że każdy turniej ma ścieżkę Hamiltona.*

Rozwiązanie Autora 1.

Rozwiązanie Autora 2.

Zadanie 1.5 (Autor 1, Autor 2). *W każdym polu szachownicy rozmiaru nxn znajduje się jedna osoba. Część osób zarażona jest wirusem grypy. Wirus grypy rozprzestrzenia się w dyskretnych odstępach czasowych w sposób następujący:*

— *osoby zarażone pozostają zarażone,*
— *osoba ulega zarażeniu jeżeli co najmniej dwie sąsiadujące z nią osoby są już zarażone (przez osobę sąsiednią rozumiemy osobę siedzącą z przodu, z tyłu, z lewej lub prawej strony). Wykaż, że jeżeli na początku zarażonych jest istotnie mniej niż n osób, to w każdej chwili przynajmniej jedna osoba pozostaje niezarażona.*

Rozwiązanie Autora 1.

Rozwiązanie Autora 2.

Zadanie 1.6 (Krzysztof Wójtowicz, Autor 2). *Wykaż, że w grupie n osób istnieją dwie, które mają taką samą liczbę znajomych.*

<u>Dowód:</u>
W grupie n osób każda osoba może mieć od 0 do $n-1$ znajomych, ale wtedy:

1. Jeśli ktoś ma 0 znajomych to maksymalna liczba znajomych to $n-2$, bo osoba mająca $n-1$ znajomych musiałaby być znajomym z osobą, która ma ich 0, co jest niemożliwe
2. Jeśli minimalna liczba znajomych to 1 to wtedy maksymalna liczba znajomych to $n-1$

W obydwu przypadkach mamy $n-1$ wartości oraz n osób. Zatem na mocy zasady Dirichleta conajmniej dwie osoby muszą mieć tę samą liczbę znajomych. ■

Rozwiązanie Autora 2.

Zadanie 1.7 (Autor 1, Autor 2). *Przy okrągłym stole jest n miejsc oznaczonych proporczykami różnych państw. Ambasadorowie tych państw usiedli przy tym stole tak, że żaden z nich nie siadł przy właściwym proporczyku. Wykaż, że można tak obrócić stołem, że co najmniej 2 ambasadorów znajdzie się przed proporczykiem swojego państwa.*

Rozwiązanie Autora 1.

Rozwiązanie Autora 2.

Zadanie 1.8 (Autor 1, Autor 2). *Pokaż, że w dowolnym ciągu n liczb całkowitych istnieje (niepusty) podciąg kolejnych elementów taki, że suma wyrazów podciągu jest wielokrotnością n.*

Rozwiązanie Autora 1.

Rozwiązanie Autora 2.

Zadanie 1.9 (Autor 1, Autor 2). *Rozważ dowolną rodzinę podzbiorów zbioru n–elementowego zawierającą więcej niż połowę wszystkich podzbiorów. Wykaż, że w tej rodzinie muszą być dwa zbiory takie, że jeden zawiera się w drugim.*

Rozwiązanie Autora 1.

Rozwiązanie Autora 2.

Zadanie 1.10 (Autor 1, Autor 2)**.** *Dla n–elementowego zbioru X rozważ pewną rodzinę jego podzbiorów $\mathcal{F}$, gdzie $|F| > n/2$ dla każdego $F \in \mathcal{F}$. Wykaż, że istnieje $x \in X$ należący do co najmniej połowy zbiorów z $\mathcal{F}$.*

Rozwiązanie Autora 1.

Rozwiązanie Autora 2.

Zadanie 1.11 (Autor 1, Autor 2)**.** *Dana jest kwadratowa szachownica $n \times n$. Dla jakich wartosci $n \geqslant 1$ możemy pokryć tę szachownicę kostkami wielkości 2×2 oraz 3×3.*

Rozwiązanie Autora 1.

Rozwiązanie Autora 2.

Zadanie 1.12 (Autor 1, Autor 2)**.** *Dana jest kwadratowa szachownica $2n \times 2n$ z wyciętym jednym polem. Wykaż, że dla wszystkich wartości $n \geqslant 1$ możemy pokryć tę szachownicę kostkami w kształcie litery L (czyli kwadrat 2×2 bez jednego pola).*

Rozwiązanie Autora 1.

Rozwiązanie Autora 2.

2. Zestaw

Zadanie 2.1 (Filip Sajko, Bartłomiej Sokołowski). *Na ile sposobów można ustawić n wież na szachownicy $n \times n$ tak, by żadne dwie nie znajdowały się w polu wzajemnego rażenia.*

Starczy zauważyć, że dla każdej wieży wybieramy rząd i kolumnę w której się znajduje – i tym samym zmniejsza liczbę dostępnych o jeden. Tak więc odpowiedź wynosi:

$$n \cdot n \cdot (n-1) \cdot (n-1) \cdot ... \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = n! \cdot n!$$

Musimy wybrać n pozycji z n^2 dostępnych pól na szachownicy. Wybierając 1 pozycję automatycznie eliminujemy całą kolumnę oraz wiersz, w którym znajduje się wybrane pole.
Pierwszą wieżę wybieramy z $n \times n = n^2$ dostępnych pozycji.
Następną wieżę wybieramy na $(n-1) \times (n-1) = (n-1)^2$ sposobów, ponieważ wykluczamy wybraną już kolumnę i wiersz.
Powtarzając proces n razy dostajemy:

$$n \times n \times (n-1) \times (n-1) \times ... \times 1 \times 1 = n! \times n! = (n!)^2$$

Zadanie 2.2 (Filip Sajko, Autor 2). *Na ile sposobów można ustawić k wież na szachownicy $n \times m$ tak, by żadne dwie nie znajdowały się w polu wzajemnego rażenia.*

Zadanie analogiczne od poprzedniego - z tym, że zmienił nam się rozmiar planszy, a ponadto nie wypełniamy jej całej. Zasada pozostaje jednak ta sama. Na start jednak warto założyć, że $k \leqslant max\{n, m\}$ (choć w sumie jeżeli tak nie jest, to odpowiedź to 0). Mając to już za sobą:

$$n \cdot m \cdot (n-1) \cdot (m-1) \cdot ... \cdot (n-k+1) \cdot (m-k+1)$$

(wykonujemy mnożenie $k+k$ elementów – stąd to $-k+1$).

Rozwiązanie Autora 2.

Zadanie 2.3 (Filip Sajko, Autor 2). *Znaleźć definicje rekurencyjne następujących ciągów:*

1. *$a(n)$ – liczba słów długości n nad alfabetem $\{0, 1\}$, które nie zawierają dwóch jedynek koło siebie.*
2. *$b(n)$ – liczba różnych pokryć prostokąta o wymiarze $2 \times n$ dominami wymiaru 2×1.*

1. Oczywiście $a(1) = 2$, $a(2) = 3$. Rozważmy słowo n elementowe. Zauważamy, że jeżeli ono kończy sie ono zerem to poprzedzające słowo $n-1$ elementowe jest dowolne. Jeżeli natomiast kończy się jedynką, to poprzedzające słowo $n-2$ elementowe jest dowolne (tak jakby cofamy się krok dalej by mieć dowolność). Stąd: $a(n) = a(n-1) + a(n-2)$.
2. Analogicznie do poprzedniego. Jak wiemy $a(1) = 1$, $a(2) = 2$. Zastanówmy się nad $a(n)$: Rozważamy ciąg o długości n. Jeżeli na końcu jest blok poziomy, to wiemy że powstał on z ciągu długości $a(n-2)$. Jeżeli jest pionowy, to wiemy, że musiał on powstać z ciągu długości $n-1$. A stąd $a(n) = a(n-1) + a(n-2)$.

Rozwiązanie Autora 2.

Zadanie 2.4 (Autor 1, Autor 2). *Ile rozwiązań ma równanie $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7$:*

1. *gdzie x_i są liczbami naturalnymi?*
2. *gdzie x_i są dodatnimi liczbami naturalnymi?*

1. Rozwiązanie Autora 1 podpunktu 1
2. Rozwiązanie Autora 1 podpunktu 2

1. Rozwiązanie Autora 2 podpunktu 1
2. Rozwiązanie Autora 2 podpunktu 2

Zadanie 2.5 (Autor 1, Autor 2)**.** *Rozważmy czekoladę złożoną z $m \times n$ kostek. Na ile sposobów można wykroić prostokąt złożony z $k \times k$ sąsiadujących ze sobą kostek czekolady?*

Rozwiązanie Autora 1.

Rozwiązanie Autora 2.

Zadanie 2.6 (Maciej Wełpa, Autor 2)**.** *(Reguła sumowania po górnym indeksie). Udowodnij, że dla $n, k \in \mathbb{N}$ zachodzi*

$$\sum_{j=0}^{n} \binom{j}{k} = \binom{n+1}{k+1}$$

Lewa strona: Niech X to zbiór wszystkich k + 1 elementów z ze zbioru n + 1 elementów, $|X| = \binom{n+1}{k+1}$.
Prawa strona: Niech X_j to podzbiory $|k+1|$ elementowe ze zbioru X, które zawierają maksymalny element j+1. np. dla k = 2 $X_3 = \{1, 2, 4\}$, $X_4 = \{1, 3, 5\}$ - ostatni element jest największy, pozostałe dwa to wybrane z {1...j}. Rozważamy j elementów mniejszych od j+1, spośród nich wybieramy k elementów - mamy $\binom{j}{k}$ możliwości. Sumując po j dodajemy do siebie wszystkie możliwości.

Rozwiązanie Autora 2.

Zadanie 2.7 (Bartłomiej Sokołowski, Autor 2)**.** *(Reguła sumowania równoległego). Udowodnij, że dla $n, k \in \mathbb{N}$ zachodzi*

$$\sum_{j=0}^{n} \binom{n+j}{j} = \binom{n+k+1}{k}$$

Przeprowadzimy dowód indukcyjny.
k = 0:

$$L = \sum_{j=0}^{0} \binom{n+j}{j} = \binom{n}{0} = 0$$

$$P = \binom{n+0+1}{0} = \binom{n+1}{0} = 0$$

Zał. indukcyjne :

$$\sum_{j=0}^{k} \binom{n+j}{j} = \binom{n+k+1}{k}$$

Teza indukcyjna :

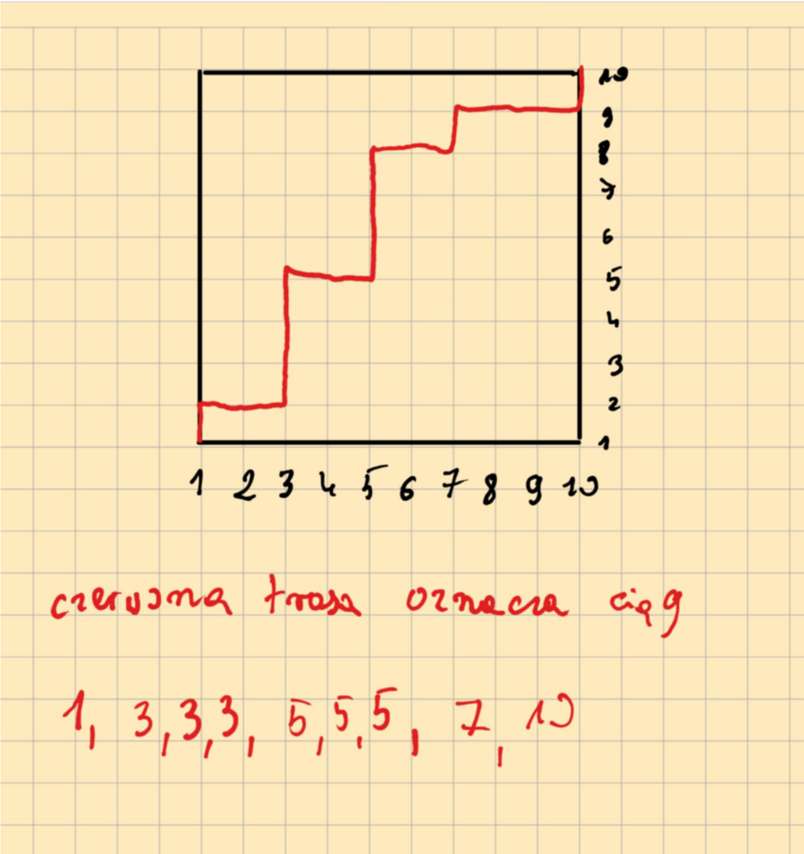
$$\sum_{j=0}^{k+1} \binom{n+j}{j} = \binom{n+k+2}{k+1}$$

$$\sum_{j=0}^{k+1} \binom{n+j}{j} = \sum_{j=0}^{k} \binom{n+j}{j} + \binom{n+k+1}{k+1} = \binom{n+k+1}{k} + \binom{n+k+1}{k+1} = \binom{n+k+2}{k+1}$$

Rozwiązanie Autora 2.

Zadanie 2.8 (Krzysztof Wojczakowski, Autor 2)**.** *Ile jest funkcji* $f : \{1, ..., n\} \to \{1, ..., n\}$ *monotonicznych takich, że* $f(i) \leqslant f(j)$ *dla* $i < j$*?*

Zauważmy, że te funkcje tworza tak jakby jakby ciąg , który ma być niemalejący. Możemy to zobrazować jako kratę gdzie wartości na dole to liczby od 1 do n , a idąc do góry mozemy tylko iść w prawo lub w górę. , gdie tyle ile kresek w górę przy danej liczbie to tyle ile razy tą liczbę wybieramy.



Końcowo poszliśmy $n-1$ razy w prawo i $n-1$ razy w górę, czyli mamy $n-1+n-1 = 2n-2$ kroków W rezultacie takich funkcji jest: $\binom{2n-2}{n-1}$

Rozwiązanie Autora 2.

Zadanie 2.9 (Krzysztof Wojczakowski, Autor 2)**.** *Ile jest* k*–elementowych podzbiorów zbioru* n*–elementowego, które nie zawierają dwóch sąsiednich liczb?*

Zauważmy, że jeżeli mamy mamy do wybrania k elementow , to równolegle to oznacza , że musimy zrobić $k-1$ "przerw" pomiędzy nimi. Wygląda to tak: `_0_0_0_..._0_0_` gdzie zero to oznacza ze liczby nie bierzemy, a podłoga oznacza, że bierzemy. Zostaje nam $n-(k+1)$ miejsc do wyboru, czyli $n-k+1$ miejsc. w takim razie ilość k elementowych podzbiorów jest : $\binom{n-k+1}{k}$

Rozwiązanie Autora 2.

Zadanie 2.10 (Autor 1, Autor 2)**.** *Posługując się interpretacją kombinatoryczną udowodnij, że:*

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i}\binom{n-i}{k-i} = 2^k \binom{n}{k}$$

Rozwiązanie Autora 1.

Rozwiązanie Autora 2.

Zadanie 2.11 (Katarzyna Szwed, Autor 2). *Udowodnij poniższe tożsamości na dwa sposoby: posługując się interpretacją kombinatoryczną albo rozwinięciem dwumianu $(1+x)^n$:*

1.
$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}$$

2.
$$\sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k} = (n+n^2)2^{n-2}$$

3.
$$\sum_{i=0}^{k} \binom{m}{i}\binom{n}{k-i} = \binom{m+n}{k}$$

1. Podpunkt 1
   Rozważmy zbiór X taki, że:
   $$X := \{(A, x) : x \in A \wedge A \subset [n]\}$$
   Żeby policzyć jego moc najpierw wybierzemy element $x \in [n]$ na n sposobów, a potem resztę elementów zbioru A, czyli dowolny podzbiór $[n] - \{x\}$
   $$|X| = n \cdot 2^{n-1}$$
   Teraz rozważmy rodzinę zbiorów $\{X_k\}_{k=0}^{n}$:
   $$X_k := \{(A, x) \in X : |A| = k\}$$
   Żeby policzyć moc zbioru X_k (dla danego k) najpierw wybieramy k-elementowy zbiór A będący podzbiorem $[n]$, a potem należący do niego element x:
   $$|X_k| = \binom{n}{k} \cdot k$$
   Rodzina X_k jest rozłącznym pokryciem zbioru X, zatem mamy:
   $$|X| = \sum_{k=0}^{n} |X_k|$$
   $$n \cdot 2^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} k \cdot \binom{n}{k}$$
2. Podpunkt 2
   Rozważmy zbiór X taki, że:
   $$X := \{(A, x_1, x_2) : A \subset [n] \wedge x_1, x_2 \in A\}$$
   Żeby policzyć moc zbioru X osobno policzymy przypadki kiedy $x_1 = x_2$ i $x_1 \neq x_2$.
   Dla $x_1 = x_2$ wybieramy najpierw wyróżniony element na n sposobów, a potem dobieramy resztę elementów z A, dostajemy $n2^{n-1}$.

Dla $x_1 \neq x_2$ wybieramy x_1 na n sposobów, x_2 na $n-1$ sposobów, a potem dobieramy resztę elementów z A, dostajemy $n(n-1)2^{n-2}$. Zatem mamy:

$$|X| = n2^{n-1} + n(n-1)2^{n-2} = (2n + n^2 - n)2^{n-2} = (n + n^2)2^{n-2}$$

Teraz rozważmy rodzinę zbiorów $\{X_k\}_{k=0}^{n}$:

$$X_k := \{(A, x_1, x_2) \in X : |A| = k\}$$

Żeby policzyć moc zbioru X_k (dla danego k) najpierw wybierzemy k-elementowy zbiór $A \subset [n]$, a potem wybierzemy z niego elementy x_1 i x_2 (przy czym mogą być one sobie równe):

$$|X_k| = \binom{n}{k} \cdot k \cdot k$$

Rodzina X_k jest rozłącznym pokryciem zbioru X, więc otrzymujemy:

$$\sum_{k=0}^{n} |X_k| = |X|$$

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k} = n(n+1)2^{n-2}$$

3. Podpunkt 3
   Rozważmy zbiór X taki, że:
   $$X := \{A \subset [m+n] : |A| = k\}$$
   Zauważmy, że $|X| = \binom{m+n}{k}$.
   Teraz rozważmy rodzinę zbiorów $\{X_i\}_{i=0}^{n}$:
   $$X_i := \{A \in X : |A \cap [m]| = i\}$$
   Żeby policzyć moc zbioru X_i (dla danego i) najpierw wybieramy i elementów z $[m]$, a potem $k-i$ elementów z $\{m+1, m+2, ..., m+n\}$, zatem $|X_i| = \binom{m}{i}\binom{n}{k-i}$.
   Rodzina X_i jest rozłącznym pokryciem zbioru X, więc otrzymujemy:
   $$|X| = \sum_{i=0}^{n} |X_i|$$
   $$\binom{m+n}{k} = \sum_{i=0}^{k} \binom{m}{i}\binom{n}{k-i}$$

1. Rozwiązanie Autora 2 podpunktu 1
2. Rozwiązanie Autora 2 podpunktu 2
3. Rozwiązanie Autora 2 podpunktu 3

3. Zestaw

Zadanie 3.1 (Autor 1, Autor 2). *Wykaż, że dla dowolnego $n \geqslant 1$ istnieje $k \geqslant 1$ takie, że:*

$$S(n,0) < S(n,1) < ... < S(n,k-1) \leqslant S(n,k) > S(n,k+1) > ... > S(n,n)$$

Rozwiązanie Autora 1.

Rozwiązanie Autora 2.

Zadanie 3.2 (Bartłomiej Sokołowski , Autor 2). *Wykaż, że:*

$$B(n) = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} B(i)$$

Dowód:
Niech $X = \pi([n])$, wtedy $|X| = B(n)$
Niech $X_i = \{\pi([n]) : \exists_{A \in \pi([n])}(n \in A \wedge |A| = i+1)\}$
Jest to zbiór wszystkich podziałów, które zawierają n oraz mają wielkość i+1
Jest to rozłączne pokrycie zbioru X

$$|X_i| = \binom{n-1}{i} \times B(n-i-1)$$

gdzie $\binom{n-1}{i}$ reprezentuje wybór i elementów z bloku z n, a $B(n-i-1)$ reprezentuje podzielenie pozostałych elementów na bloki.

$$|X| = \sum_{i=0}^{n-1} |X_i| = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} \times B(n-i-1) = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{n-i-1} \times B(n-i-1) = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} \times B(i)$$

Ostatnie przejście to sumowanie ale od drugiej strony, dlatego można je wykonać.

Z lewej strony mamy liczbę podziałów zbioru n-elementowego na niepuste podzbiory, czyli $B(n)$

Spróbujmy uzyskać tą liczbę w inny sposób, najpierw utworzymy blok $k+1$ elementowy, który będzie zawierał element n, a pozostałe elementy podzielimy na dowolny niepusty podzbiór:

Weźmy zbiór $n-1$ elementowy. Wybieramy z niego k elementów, co można zrobić na $\binom{n-1}{k}$ sposobów. Następnie dołączamy do wybranych elementów element n. Pozostałe $n-k-1$ elementów możemy podzielić na $B(n-k-1)$ sposobów
Sumując po k:

$$B(n) = \sum_{k=0}^{n-1} B(n-k-1)\binom{n-1}{k}$$

Zmieńmy sumowanie na $i = n-k-1$:

$$\sum_{i=0}^{n-1} B(i)\binom{n-1}{n-1-i} = \sum_{i=0}^{n-1} B(i)\binom{n-1}{i}$$

Otrzymaliśmy w ten sposób prawą stronę tezy, więc

$$B(n) = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} B(i)$$

Zadanie 3.3 (Karol Wójcik, Autor 2). *Wykaż, że dla $n, k \in \mathbb{N}$ zachodzi:*

$$S(n, k+1) = \frac{1}{(k+1)!} \sum_{0<i_0<\ldots<i_{k-1}<n} \binom{n}{i_{k-1}} \binom{i_{k-1}}{i_{k_2}} \ldots \binom{i_1}{i_0}$$

Zapiszmy tezę jako:

$$(k+1)! \cdot S(n, k+1) = \sum_{0<i_0<\ldots<i_{k-1}<n} \binom{n}{i_{k-1}} \binom{i_{k-1}}{i_{k_2}} \ldots \binom{i_1}{i_0}$$

Lewa strona tezy przedstawia liczbę sposobów podziału zbioru n-elementowego na $k+1$ niepustych, uporządkowanych podzbiorów. $S(n, k+1)$ zlicza liczbę podziałów na $k+1$ nieuporządkowanych podzbiorów, a mnożenie przez $(k+1)!$ nadaje tym podzbiorom kolejność.

Spróbujmy skonstruować to w inny sposób. Rozważmy ściśle rosnący ciąg liczb całkowitych i_0, i_1 $\ldots$,i_{k-1}, taki, że $0 < i_0$ oraz $i_{k-1} < n$ Teraz wybierzmy i_{k-1} elementów ze zbioru n-elementowego. Można to zrobić na $\binom{n}{i_{k-1}}$ sposobów, następnie z tego wybranego zbioru i_{k-1} elementowego wybieramy i_{k-2} elementów na $\binom{i_{k-1}}{i_{k-2}}$ sposobów. Kontynuujemy ten proces, aż ze zbioru i_1 elementowego wybierzemy i_0 elementów na $\binom{i_1}{i_0}$ sposobów. W ten sposób uzyskujemy łańcuch zagnieżdżonych podzbiorów:

$$[i_0] \subset [i_1] \subset \cdots \subset [i_{k-1}] \subset [n]$$

gdzie $|[i_j]| = i_j$
Taki łańcuch podzbiorów to uporządkowana kolekcja $k+1$ rozłącznych, niepustych podzbiorów zbioru $[n]$. Iloczyn $\binom{n}{i_{k-1}}\binom{i_{k-1}}{i_{k_2}}\ldots\binom{i_1}{i_0}$ zlicza liczbę sposobów przeprowadzania tej sekwencji wyborów. Sumując po wszystich możliwych ciągach i_0, i_1 $\ldots$,i_{k-1} otrzymujemy

$$\sum_{0<i_0<\ldots<i_{k-1}<n} \binom{n}{i_{k-1}} \binom{i_{k-1}}{i_{k_2}} \ldots \binom{i_1}{i_0}$$

co obejmuje wszystkie możliwe sposoby podziały zbioru $[n]$ na $k+1$ niepustych, uporządkowanych podzbiorów.
Zatem prawa strona również zlicza liczbę sposobów podziału zbioru n-elementowego na $k+1$ niepustych, uporządkowanych podzbiorów.
Zatem

$$(k+1)! \cdot S(n, k+1) = \sum_{0<i_0<\ldots<i_{k-1}<n} \binom{n}{i_{k-1}} \binom{i_{k-1}}{i_{k_2}} \ldots \binom{i_1}{i_0}$$

Rozwiązanie Autora 2.

Zadanie 3.4 (Autor 1, Autor 2). *Rozważ następującą procedurę generującą pewne liczby naturalne $\{a_{i,j}\}_{1 \geqslant i \geqslant j}$:*

1. $a_{0,0} = 1$,
2. $a_{n+1,0} = a_{n,n}$, *dla* $n \geqslant 0$,
3. $a_{n+1,k+1} = a_{n,k} + a_{n+1,k}$, *dla* $n \geqslant k \geqslant 0$.

Rozwiązanie Autora 1.

Rozwiązanie Autora 2.

Zadanie 3.5 (Bartosz Wójcik, Autor 2)**.** *Wykaż, że liczba podziałów zbioru $(n-1)$ elementowego jest równa liczbie podziałów zbioru $\{1, ..., n\}$ niezawierających sąsiednich liczb w jednym bloku.*

Niech X będzie zbiorem podziałów zbioru $[n]$, takich że sąsiednie liczby nie znajdują się w jednym bloku. Niech Y będzie zbiorem podziałów zbioru $[n-1]$. Niech $f : X \to Y$ będzie funkcją taką że jeśli $f(x) = y$:

— Dla każdego i, które należy do tego samego bloku co n w zbiorze x w zbiorze y istnieje blok A taki że $i, i+1 \in A$
— Jeśli i należy do bloku B w zbiorze x, który nie zawiera n to istnieje blok $B' \in y$, taki że $B \subseteq B'$

Przykładowo:

$$\{\{2,4\},\{1,3\}\} \mapsto \{\{1,2,3\}\}$$

Funkcja f jest dobrze zdefiniowana, ponieważ dla każdego i jednoznacznie wyznaczony jest blok, w którym się znajdzie - jeśli i należało do bloku z n, to zostanie przerzucone do bloku z $i+1$ ($i+1$ nie może się znajdować w tym samym bloku co n, ponieważ elementy nie sąsiadują). W przeciwnym wypadku i zostaje w tym bloku co było.

Udowodnimy, że f jest bijekcją. Niech $x_1, x_2 \in X$. Niech każdy blok A_i będzie indeksowany najwyższym elementem w danym bloku. Dla danego podziału x indeksowanie bloków się nie zmienia (poza blokiem A_n, który znika), ponieważ bloki po funkcji f tylko zyskują elementy niższe niż najwyższy element. Załóżmy, że $x_1 \neq x_2$. Jeśli x_1 i x_2 różnią sie na bloku A_n (który zawsze należy do podziału) to $f(x_1)$ będzie miało różny zbiór elementów, które ze sobą sąsiadują. W przeciwnym wypadku istnieją i_1 oraz i_2, które w x_1 są w tym samym bloku, a w x_2 nie (lub na odwrót). Funkcja f nie przestawia tych elementów, więc $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Rozważmy $y \in Y$. Znajdziemy $x \in X$, takie że $f(x) = y$. Rozważmy zbiór S wszystkich elementów, które mają swojego sąsiada w tym samym bloku w y. Skonstruujmy podział x w następujący sposób:

— Utwórzmy nowy blok A_n, taki że $n \in A_n$
— Weźmy najmniejszy element z S i dodajmy go do A_n. Proces powtórzmy dla kolejnego najmniejszego elementu w S, takiego że ten element nie ma już swojego sąsiada w A_n. Procedura kończy się, kiedy skoonstruowany podział nie ma już elementów sąsiadujących.

Wtedy $f(x) = y$, więc f jest bijekcją, co kończy dowód.

Rozwiązanie Autora 2.

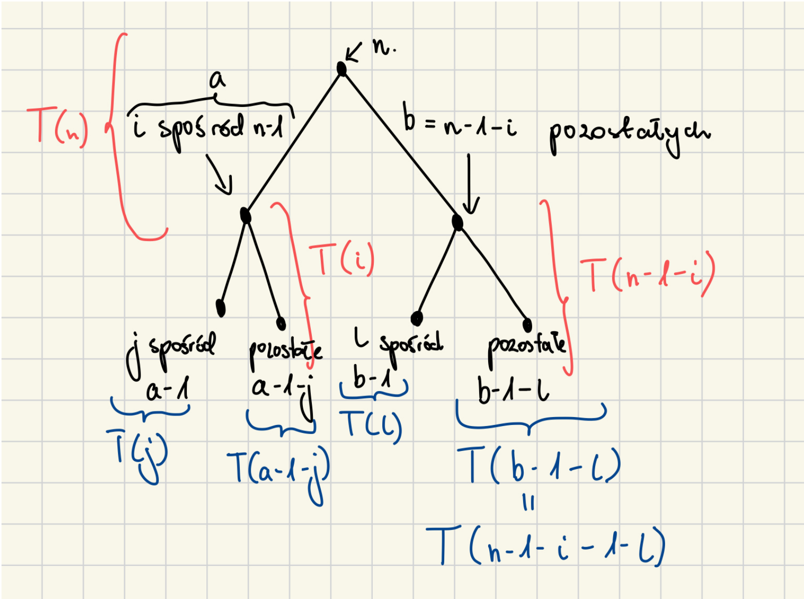
Zadanie 3.6 (Maciej Wełpa, Autor 2)**.** *Udowodnij, że liczba ukorzenionych drzew binarnych na n wierzchołkach to n-ta liczba Catalana.*

Ukorzenione drzewo jest drzewem binarnym, jeśli każdy wierzchołek ma co najwyżej dwójkę dzieci przy czym co najwyżej jedno lewe dziecko i co najwyżej jedno prawe dziecko.

Spośród n wierzchołków, jeden wykorzystujemy na wierzchołek.
Spośród pozostałych n-1 wybieramy i na lewe poddrzewo, a pozostałe n-1-i na prawe. W ten sposób możemy postępować rekurencyjnie
Załóżmy funkcję $T(k)$, która liczy ilość drzew. Jest ona rekurencyjna, bo każdy nowy korzeń może utworzyć nowe drzewo, a ilość korzeni lewo/prawo może się zmieniać, więc aby policzyć wszystkie możliwości skorzystamy z sumy.

$$T(n) = \sum_{i=0}^{n-1} T(i) \cdot T(n-1-i)$$

a to odpowiada rekurencyjnemu wzorowi Catalana.



Rozwiązanie Autora 2.

Zadanie 3.7 (Autor 1, Autor 2). *Triangulacją n – wierzchołkowego wielokąta wypukłego nazywamy zbiór $(n-3)$ wzajemnie nieprzecinających się jego przekątnych, które dzielą jego obszar na $(n-2)$ trójkątów.*

1. *ile jest triangulacji n–wierzchołkowego wielokąta wypukłego?*
2. *Ile jest triangulacji n–wierzchołkowego wielokąta wypukłego, w których każdy trójkąt triangulacji ma przynajmniej jeden bok na brzegu wielokąta?*

1. Rozwiązanie Autora 1 podpunktu 1
2. Rozwiązanie Autora 1 podpunktu 2

1. Rozwiązanie Autora 2 podpunktu 1
2. Rozwiązanie Autora 2 podpunktu 2

Zadanie 3.8 (Autor 1, Autor 2). *Wykaż, że liczba drzew etykietowanych na zbiorze $1, ..., n$ wynosi n^{n-2}.*

Rozwiązanie Autora 1.

Rozwiązanie Autora 2.

4. Zestaw

Zadanie 4.1 (Julian Sowiński, Autor 2). *Oblicz $S(n, 2)$.*

Liczba Stirlinga drugiego rodzaju $S(n, k)$ dla $k = 2$ to tak właściwie liczba sposobów na podzielenie zbioru n-elementowego na 2 niepuste podzbiory.

$$S(n,2) = \frac{\overbrace{2^n}^{\text{wszystkie podzbiory}} - \overbrace{2}^{\text{bez pustego i całego}}}{\underbrace{2}_{\text{nie bierzemy pod uwagę kolejności}}} = \frac{2^n - 2}{2} = 2^{n-1} - 1$$

Rozwiązanie Autora 2.

Zadanie 4.2 (Autor 1, Krzysztof Wójtowicz). *Wykaż, że mamy dokładnie*

$$\frac{n!}{1^{\lambda_1} \cdot 2^{\lambda_2} \cdot \ldots \cdot n^{\lambda_n} \cdot \lambda_1! \cdot \ldots \cdot \lambda_n!}$$

permutacji zbioru $[n]$ o typie $1^{\lambda_1} \cdot 2^{\lambda_2} \cdot \ldots \cdot n^{\lambda_n}$ (mających λ_i cykli długości i dla $i \in [n]$).

Rozwiązanie Autora 1.

Niech A będzie zbiorem wszystkich permutacji zbioru $[n]$ o typie jak w poleceniu. Niech $a_i \in [n]$, policzymy ilość cykli długości k: $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ w zbiorze n elementowych:

$$\binom{n}{k} \cdot \frac{k!}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k}$$

Wybieramy k elementów do cyklu i następnie wybieramy ich kolejność (pierwszy element nie ma znaczenia w cyklu), stąd powyższy wynik.

Policzymy ilość wszystkich możliwych cykli długości $1, 2, \ldots, n$:

$$\underbrace{\frac{n!}{(n-1)! \cdot 1} \cdot \frac{(n-1)!}{(n-2)! \cdot 1} \cdot \ldots}_{\lambda_1} \cdot \underbrace{\frac{(n-\lambda_1)!}{(n-\lambda_1-2)! \cdot 2} \cdot \ldots}_{\lambda_2} \cdot \ldots = \frac{n!}{1^{\lambda_1} \cdot 2^{\lambda_2} \cdot \ldots \cdot n^{\lambda_n}}$$

Czyli mnożymy ilość możliwych cykli k elementowych dla λ_k ich ilości.

W celu otrzymania liczby $|A|$ musimy jeszcze uwzględnić brak znaczenia kolejności występowania cykli w permutacji, liczba możliwych ustawień to:

$$\lambda_1! \cdot \lambda_2! \cdot \ldots \cdot \lambda_n!$$

Zatem liczba wszystkich permutacji $a \in A$:

$$|A| = \frac{n!}{1^{\lambda_1} \cdot 2^{\lambda_2} \cdot \ldots \cdot n^{\lambda_n} \cdot \lambda_1! \cdot \lambda_2! \cdot \ldots \cdot \lambda_n!} \quad \blacksquare$$

Zadanie 4.3 (Maciej Wełpa, Autor 2). *Posługując się interpretacją kombinatoryczną, wykaż tożsamość:*

$$S(n+1, m+1) = \sum_k \binom{n}{k} S(k, m)$$

Lewa strona: Podział zbioru n+1-elementowego na m+1 niepustych podzbiorów
Prawa strona: Bierzemy n+1 element i tworzymy z niego nowy zbiór (domyślnie podzbiór nr m+1). Z pozostałych n elementów wybieramy n-k ($\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$), które będą w zbiorze nr m+1 z elementem n+1. Pozostałe k elementów dzielimy na m niepustych podzbiorów. Używamy sumy, aby rozważyć wszystkie możliwości podzielenia elementów.

Rozwiązanie Autora 2.

Zadanie 4.4 (Autor 1, Autor 2)**.** *Zakładając, że zachodzi równość:*

$$(x_1 + ... + x_k)^n = \sum_{n_1+...+n_k=n} \binom{n}{n_1 n_2 ... n_k} x_1^{n_1} \cdot ... \cdot x_k^{n_k}$$

podaj ile wynosi $\binom{n}{n_1 n_2 ... n_k}$.

Rozwiązanie Autora 1.

Rozwiązanie Autora 2.

Zadanie 4.5 (Katarzyna Szwed, Autor 2)**.** *Wykaż, że*

$$\sum_{i=0}^{n} i \begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix} = n! H_n,$$

gdzie $H_n = 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n}$.

Rozważmy zbiór $X := \{(\sigma, c) : \sigma$ - permutacja zbioru $[n]$, c - wyróżniony cykl z permutacji $\sigma\}$.

Rozważmy rodzinę zbiorów $\{A_i\}_{i=0}^{n}$ taką, że $A_i = \{(\sigma, c) \in X :$ permutacja σ ma i cykli$\}$. Zauważmy, że $|A_i| = i \begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix}$ (najpierw liczymy liczbę permutacji $[n]$ o i cyklach, a potem wybieramy jeden z i cykli).

Rodzina A_i jest rozłącznym pokryciem zbioru X, zatem:

$$|X| = \sum_{i=0}^{n} |A_i| = \sum_{i=0}^{n} i \begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix}$$

.

Teraz rozważmy rodzinę zbiorów $\{B_k\}_{k=1}^{n}$ taką, że $B_k = \{(\sigma, c) \in X :$ cykl c ma k elementów$\}$. Zauważmy, że $|B_k| = \binom{n}{k} \frac{k!}{k} (n-k)!$, ponieważ najpierw wybieramy k elementów do cyklu c, potem permutujemy je, ale usuwamy kolejność pierwszego elementu, na koniec permutujemy resztę elementów zbioru $[n]$.

Rodzina B_k jest rozłącznym pokryciem zbioru X, zatem:

$$|X| = \sum_{k=1}^{n} |B_k| = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \frac{k!}{k} (n-k)! = \sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{k!}{k} (n-k)! = \sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{k} = n! \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = n! H_n$$

Otrzymujemy więc:

$$\sum_{i=0}^{n} i \begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix} = n! H_n$$

Rozwiązanie Autora 2.

Zadanie 4.6 (Julian Sowiński, Autor 2)**.** *Wykaż, że dla dowolnego* $x \in \mathbb{R}$ *zachodzi:*

1. $x^n = \sum_k S(n,k) x^{\underline{k}}$
2. $x^{\bar{n}} = \sum_k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k$.

1.

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} S(n,k)x^{\underline{k}}$$

Dowód indukcyjny:

1) Dla $n = 0$:
L $= x^{\underline{0}} = 1$
P $= S(0,0) \cdot x^{\underline{0}} = 1 \cdot 1 = 1$
L = P
2) Dla $n > 0$:
Założenie:

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} S(n,k)x^{\underline{k}}$$

Teza:

$$x^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} S(n+1,k)x^{\underline{k}}$$

Rozpoczynamy od lewej strony, używając założenia indukcyjnego:

$$L = x \cdot x^n = x \cdot \sum_{k=0}^{n} S(n,k)x^{\underline{k}} = \sum_{k=0}^{n} S(n,k)(x \cdot x^{\underline{k}}) \quad (*)$$

Zauważmy, że:

$$\cdot x^{\underline{k}} * x = (x-k+k)x^{\underline{k}} = (x-k)x^{\underline{k}} + kx^{\underline{k}} = x^{\underline{k+1}} + kx^{\underline{k}}$$

Kontynuujemy z (*), podstawiając znalezioną tożsamość:

$$\begin{aligned}(*) &= \sum_{k=0}^{n} S(n,k)(x^{\underline{k+1}} + kx^{\underline{k}}) \\ &= \sum_{k=0}^{n} S(n,k)x^{\underline{k+1}} + \sum_{k=0}^{n} kS(n,k)x^{\underline{k}}\end{aligned}$$

Teraz zmienimy przedziały sumowania:

$$\begin{aligned}\star &= \sum_{k=1}^{n+1} S(n,k-1)x^{\underline{k}} + \underbrace{\sum_{k=0}^{n+1} kS(n,k)x^{\underline{k}}}_{\text{ponieważ } S(n,n+1)=0} \\ &= \underbrace{\sum_{k=0}^{n+1} S(n,k-1)x^{\underline{k}}}_{\text{ponieważ } S(n,-1)=0} + \sum_{k=0}^{n+1} kS(n,k)x^{\underline{k}} \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} (S(n,k-1) + kS(n,k))x^{\underline{k}} \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} S(n+1,k)x^{\underline{k}} = P\end{aligned}$$

Co dowodzi tezy indukcyjnej.

2.
$$x^{\bar{n}} = \sum_k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k$$

Dowód indukcyjny:
1) Dla $n = 0$:
L $= x^{\overline{0}} = 1$
P $= \sum_{k=0}^{0} \left[{0 \atop k}\right] x^k = \left[{0 \atop 0}\right] x^0 = 1 \cdot 1 = 1.$
L = P

2) Dla $n > 0$:
Założenie:
$$x^{\overline{n-1}} = \sum_{k=0}^{n-1} \left[{n-1 \atop k}\right] x^k$$
Teza:
$$x^{\overline{n}} = \sum_{k=0}^{n} \left[{n \atop k}\right] x^k$$
Rozpoczynamy od lewej strony:
$$\begin{aligned} L = x^{\overline{n}} &= (x+n-1)x^{\overline{n-1}} = (x+n-1)\sum_{k=0}^{n-1} \left[{n-1 \atop k}\right] x^k \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (x+n-1) \left[{n-1 \atop k}\right] x^k \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \left[{n-1 \atop k}\right] x^{k+1} + \sum_{k=0}^{n-1} (n-1) \left[{n-1 \atop k}\right] x^k \quad (*) \end{aligned}$$
Teraz zmieniamy przedziały sumowania, aby później zastosować wzór rekurencyjny:
$$\begin{aligned} (*) &= \sum_{k=0}^{n} \left[{n-1 \atop k-1}\right] x^k + \sum_{k=0}^{n} (n-1) \left[{n-1 \atop k}\right] x^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} \left(\left[{n-1 \atop k-1}\right] + (n-1)\left[{n-1 \atop k}\right] \right) x^k \end{aligned}$$
Stosujemy wzór rekurencyjny dla liczb Stirlinga I rodzaju:
$$\left[{n \atop k}\right] = (n-1)\left[{n-1 \atop k}\right] + \left[{n-1 \atop k-1}\right]$$
Podstawiając to do naszego wyrażenia, otrzymujemy:
$$= \sum_{k=0}^{n} \left[{n \atop k}\right] x^k = P$$
Co kończy dowód indukcyjny.

1. Rozwiązanie Autora 2 podpunktu 1
2. Rozwiązanie Autora 2 podpunktu 2

5. Zestaw

Zadanie 5.1 (Autor 1, Autor 2). *Wykaż zasadę włączeń i wyłączeń korzystając z indukcji po liczbie zbiorów.*

Rozwiązanie Autora 1.

Rozwiązanie Autora 2.

Zadanie 5.2 (Autor 1, Autor 2). *Wykaż, że mamy*

$$\sum_{j=0}^{m}(-1)^j\binom{m}{j}(m-j)^n$$

suriekcji ze zbioru $[n]$ *w zbiór* $[m]$.

Rozwiązanie Autora 1.

Rozwiązanie Autora 2.

Zadanie 5.3 (Bartosz Wójcik, Autor 2). *Ile jest ciągów długości* $2n$ *takich, że każda liczba* $i \in [n]$ *występuje dokładnie dwa razy oraz każde sąsiednie dwa wyrazy są różne.*

Niech Ω będzie zbiorem ciągów długości $2n$, że każda liczba $i \in [n]$ występuje dokładnie dwa razy. Niech $X \subseteq \Omega$ będzie zbiorem ciągów, w których żadne sąsiadujące wyrazy nie są równe (zbiór jak w treści zadania). Niech $A_i \subseteq \Omega$, będzie rodziną zbiorów, takich że:

$$A_i = \{a \in X | \text{ liczba i sąsiaduje ze sobą w ciągu a } \}$$

Zbiór X zawiera wszystkie ciągi, które należą do Ω, ale nie należą do żadnego A_i:

$$X = \Omega \setminus \bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

Obliczmy moc sumy A_i:

$$(*)\ |\bigcup_{i=1}^{n} A_i| = \sum_{\emptyset \neq I \subseteq [n]} (-1)^{|I|+1}\ |\bigcap_{i\in I} A_i|$$

Wybierzmy ciąg $a \in \bigcap_{i\in I} A_i$. Wszystkie $i \in I$ sąsiadują ze sobą, więc można je potraktować jako jeden znak. W ciągu a mamy więc $2n - |I|$ znaków, które można przepermutować na $(2n - |I|)!$ sposobów. Każdą parę $\notin I$ można ustawić na 2 sposoby każdą. Sumarycznie:

$$|\bigcap_{i\in I} A_i| = \frac{(2n-|I|)!}{2^{n-|I|}}$$

Zmieńmy indeksowanie sumy $(*)$ z indeksowania po zbiorach I na indeksowanie po mocy zbioru I. Jest $\binom{n}{i}$ zbiorów $I \subseteq [n], |I| = i$:

$$(*) \sum_{\emptyset \neq I \subseteq [n]} (-1)^{|I|+1}\ |\bigcap_{i\in I} A_i| = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}\binom{n}{i}\frac{(2n-i)!}{2^{n-i}}$$

Dodatkowo $|\Omega| = \frac{(2n)!}{2^n}$. Otrzymujemy:

$$(*)\ |X| = \frac{(2n)!}{2^n} - \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}\binom{n}{i}\frac{(2n-i)!}{2^{n-i}} = \sum_{i=0}^{n}(-1)^{i}\binom{n}{i}\frac{(2n-i)!}{2^{n-i}}$$

co było do policzenia. ■

Rozwiązanie Autora 2.

Zadanie 5.4 (Karol Wójcik, Autor 2). *Wykaż, że dla $n \geqslant 3$ zachodzi tożsamość*

$$D(n) = (n-1)(D(n-1) + D(n-2))$$

gdzie $D(n)$ jest liczbą permutacji zboru $[n]$ bez punktów stałych.

Dla $n \geqslant 3$: $D(n) = (n-1)(D(n-1) + D(n-2))$

D(n) - liczba nieporządków

$D(1) = 0$ $D(2) = 1$

D_n – zbiór nieporządków na n elementach

Weźmy zbiór $D_n = X \cup Y$, $X \cap Y = \emptyset$.
X – zbiór, gdzie n znajduje się w 2-elementowym cyklu,
Y – zbiór, gdzie n znajduje się w $>$ 2-elementowym cyklu

$X = \{(i, n) * \sigma \mid \sigma$ jest permutacją na $[n] \setminus \{i, n\}$ bez punktów stałych, $i \in [n-1]\}$
$|X| = |[n-1]| \cdot |D(n-2)| = (n-1)D(n-2)$

$Y = \{\sigma \mid \sigma(j) = n, \sigma(n) = i, i \neq j\}$
$|Y| = (n-1)D(n-1)$

$D(n) = |X \cup Y| = (n-1)(D(n-1) + D(n-2))$

Rozwiązanie Autora 2.

Zadanie 5.5 (Autor 1, Autor 2). *Wykaż (najlepiej kombinatorycznie), że dla dowolnych $n, k \in \mathbb{N}$ zachodzi:*

1. $S(n,k) = \sum_{0 \leqslant m_1 \leqslant m_2 \leqslant \ldots \leqslant m_{n-k} \leqslant k} m_1 m_2 \cdot \ldots \cdot m_{n-k}$
2. $c(n,k) = \sum_{0 < m_1 < m_2 < \ldots < m_{n-k} < k} m_1 m_2 \cdot \ldots \cdot m_{n-k}$

1. Rozwiązanie Autora 1 podpunktu 1
2. Rozwiązanie Autora 1 podpunktu 2

1. Rozwiązanie Autora 2 podpunktu 1
2. Rozwiązanie Autora 2 podpunktu 2

Zadanie 5.6 (Autor 1, Autor 2). *Ciąg podziałów zbioru $1, \ldots, n$ tworzymy następująco. Startujemy od podziału zawierającego tylko zbiór $1, \ldots, n$. Podział $(i+1)$–wszy otrzymujemy z podziału i-tego poprzez:*

1. *wybranie jednego, co najmniej 2-elementowego zbioru z podziału i-tego i podzielenie go na dwa niepuste podzbiory,*
2. *podzielenie każdego, co najmniej 2-elementowego zbioru z podziału i-tego na dwa niepuste podzbiory.*

W obu przypadkach procedura kończy swoje działanie jeżeli wszystkie zbiory podziału są jednoelementowe. Na ile sposobów można wykonać powyższe procedury? Na ile sposobów możemy wykonać powyższe procedury zakładając, że po każdym kroku zbiory podziałów zawierają kolejne liczby naturalne?

Rozwiązanie Autora 1.

Rozwiązanie Autora 2.

6. Zestaw 6

Zadanie 6.1. *(nie kolos) Wykaż, że spośród dowolnych trzech permutacji zbioru $[n]$ istnieją dwie zawierające wspólny podciąg o długości co najmniej $n^{\frac{1}{3}}$.*

Zadanie 6.2 (Katarzyna Szwed, Autor 2)**.** *Niech I będzie rodziną n przedziałów osi rzeczywistej. Wykaż, że I zawiera co najmniej $\sqrt{n}$ przedziałów parami rozłącznych lub I zawiera co najmniej $\sqrt{n}$ przedziałów takich, że wszystkie posiadają wspólny punkt.*

Rodzina podzbiorów $\mathcal{F}$ jest przecinająca się, jeśli dla dowolnych $A, B \in \mathcal{F}$ mamy $A \cap B \neq \emptyset$

Zdefiniujmy relację
$$X \preceq Y \;\Leftrightarrow\; \forall(x \in X, y \in Y)(x < y) \;\vee\; X = Y$$
gdzie X i Y - przedziały.

Relacja $\preceq$ jest relacją częściowego porządku, ponieważ:

1. jest zwrotna ($X = Y \Rightarrow X \preceq Y$)
2. jest antysymetryczna
$$X \neq Y \wedge X \preceq Y \Rightarrow \forall(x \in X, y \in Y)(x < y) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \neg\exists(x \in X, y \in Y)(x > y) \Rightarrow Y \not\preceq X$$
3. jest przechodnia
$$X \preceq Y \wedge Y \preceq Z \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (\forall(x \in X, y \in Y)(x < y) \;\vee\; X = Y) \wedge (\forall(y \in Y, z \in Z)(y < z) \;\vee\; Y = Z) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (\forall(x \in X, z \in Z)(x < z) \vee X = Z) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow X \preceq Z$$

Zatem $P := (I, \preceq)$ jest posetem. Z lematu udowodnionego na wykładzie wiemy, że:
$$height(P) \cdot width(P) \geqslant |I| = n$$

Zatem:
$$height(P) \geqslant \sqrt{n} \;\vee\; width(P) \geqslant \sqrt{n}$$

Przy czym $height(P)$ to długość najdłuższego łańcucha, w tym przypadku liczność największego podzbioru I takiego, że przedziały do niego należące są parami rozłączne, a $width(P)$ to długość najdłuższego antyłańcucha, tutaj będzie to liczność największego takiego podzbioru I, że każde dwa przedziały do niego należące mają wspólny punkt, czyli przecięcie po wszyskich przedziałach należących do tego podzbioru nie jest zbiorem pustym.

Zadanie 6.3 (Katarzyna Szwed, Autor 2)**.** *Niech $\mathcal{F}$ będzie maksymalną przecinającą się rodziną podzbiorów $[n]$. Wykaż, że:*
$$|\mathcal{F}| = 2^{n-1}$$

Weźmy $A \subset [n]$. Zauważmy, że $A \cap ([n] - A) = \emptyset$. Zatem tylko jeden z tych zbiorów może należeć do $\mathcal{F}$, czyli $|\mathcal{F}| \leqslant 2^{n-1}$.

Zauważmy, że rodzina zbiorów $\{A \subset [n] : n \in A\}$ spełnia warunek zadania, zatem $|\mathcal{F}| \geqslant 2^{n-1}$. Oznacza to, że $|\mathcal{F}| = 2^{n-1}$.

Zadanie 6.4 (Katarzyna Szwed, Autor 2)**.** *Niech $\mathcal{F}$ będzie maksymalną rodziną podzbiorów zbioru $[n]$ taką, że dla dowolnych $A, B \in \mathcal{F}$ mamy $A \cup B \neq [n]$. Wyznacz $|\mathcal{F}|$.*

Weźmy $A \subset [n]$. Zauważmy, że istnieje dokładnie jeden zbiór B taki, że $B \subset [n] \wedge A \cap B = [n]$. Zatem tylko jeden z tych zbiorów może należeć do $\mathcal{F}$, czyli $|\mathcal{F}| \leqslant 2^{n-1}$.

Zauważmy, że rodzina wszystkich podzbiorów $[n-1]$ spełnia warunek z zadania, zatem $|\mathcal{F}| \geqslant 2^{n-1}$. Oznacza to, że $|\mathcal{F}| = 2^{n-1}$.

Zadanie 6.5. *Rodzina podzbiorów $\mathcal{F}$ zbioru $[n]$ jest rozróżniająca jeśli dla dowolnych $x \neq y \in [n]$ istnieje $F \in \mathcal{F}$ taki, że $|F \cap \{x, y\}| = 1$. Rodzina podzbiorów $\mathcal{F}$ zbioru $[n]$ jest silenie rozróżniająca jeśli dla dowolnych $x \neq y \in [n]$ istnieje $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ takie, że $x \in F_1 - F_2$ i $y \in F_2 - F_1$.*

1. *Jaki jest rozmiar najmniejszej rodziny rozróżniającej $[n]$?*
2. *Jaki jest rozmiar najmniejszej rodziny silnie rozróżniającej $[n]$?*

Zadanie 6.6. *Niech $1 \leqslant s < r < n$ i niech $\mathcal{F}$ będzie rodziną podzbiorów r–elementowych zbioru $[n]$ taką, że dla dowolnych $A \neq B \in \mathcal{F}$ mamy $|A \cap B| \leqslant s$. Wykaż, że*

$$|\mathcal{F}| \leqslant \frac{\binom{n}{s+1}}{\binom{r}{s+1}}.$$

7. Zestaw 7

Nie ma XD
Ponoć Profesor coś zakręcił i nie ma tego zestawu.

8. Zestaw

Zadanie 8.1 (Krzysztof Wójtowicz, Autor 2)**.** *Wykorzystaj funkcje tworzące aby policzyć na ile sposobów można wyciągnąć 70 kul z urny zawierającej 30 kul czerwonych, 40 kul niebieskich i 50 kul białych. Kule tego samego koloru są nierozróżnialne. Kolejność wyciągania jest nieistotna.*

Zapiszemy funkcje tworzące $C(x)$, $N(x)$ oraz $B(x)$ odpowiednio dla kul czerwonych(1), niebieskich(2) oraz białych(3):

$$C(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{30} = \frac{1 - x^{31}}{1 - x} \tag{1}$$

$$N(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{40} = \frac{1 - x^{41}}{1 - x} \tag{2}$$

$$B(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{50} = \frac{1 - x^{51}}{1 - x} \tag{3}$$

Stworzymy funkcję $K(x)$, która będzie generować nam ciąg liczby sposobów wyciągania danej ilości kul, odpowiedzią dla 70 kul będzie współczynnik przy x^{70}.

$$K(x) = C(x) \cdot N(x) \cdot B(x) = \frac{(1 - x^{31})(1 - x^{41})(1 - x^{51})}{(1 - x)^3} =$$

$$= (1 - x^{31} - x^{41} - x^{51} + x^{72} + x^{82} + x^{92} - x^{123}) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+2}{2} x^k$$

Po wymnożeniu x^{70} wystąpi cztery razy:

1. dla $k = 70$:
$$1 \cdot \binom{72}{2} x^{70} = \binom{72}{2} x^{70}$$
2. dla $k = 39$:
$$-x^{31} \cdot \binom{41}{2} x^{39} = -\binom{41}{2} x^{70}$$
3. dla $k = 29$:
$$-x^{41} \cdot \binom{31}{2} x^{29} = -\binom{31}{2} x^{70}$$
4. dla $k = 19$:
$$-x^{51} \cdot \binom{21}{2} x^{19} = -\binom{21}{2} x^{70}$$

Więc współczynnik przy x^{70} wynosi:

$$\binom{72}{2} - \binom{41}{2} - \binom{31}{2} - \binom{21}{2} = \frac{72!}{2! \cdot 70!} - \frac{41!}{2! \cdot 39!} - \frac{31!}{2! \cdot 29!} - \frac{21!}{2! \cdot 19!} =$$
$$= 2556 - 820 - 465 - 210 = 1061$$

Rozwiązanie Autora 2.

Zadanie 8.2 (Krzysztof Wójtowicz, Autor 2)**.** *Jaki jest współczynnik*

1. *przy* x^5 *w* $(1 - 2x)^{-2}$*;*
2. *przy* x^4 *w* $\sqrt[3]{1 + x}$*;*
3. *przy* x^3 *w* $(2 + x)^{3/2}/(1 - x)$*?*

Podpunkt 1.
Niech:

$$F(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-2x} = \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (2x)^n$$

Wtedy:

$$F'(x) = \frac{1}{(1-2x)^2} = (1-2x)^{-2} = \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} (2^n \cdot n \cdot x^{n-1}) =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} (\underbrace{2^n \cdot (n+1)}_{a_n} \cdot x^n)$$

Więc:

$$a_5 = 2^5 \cdot 6 = 192$$

Podpunkt 2.
Użyjemy rozwinięcia binomial series:

$$(1+x)^{1/3} = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\binom{\frac{1}{3}}{n}}_{a_n} \cdot x^n$$

Więc:

$$a_4 = \binom{\frac{1}{3}}{4} = \frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3}-1)(\frac{1}{3}-2)(\frac{1}{3}-3)}{4!} = \frac{-10}{243}$$

Podpunkt 3.
Rozwiniemy osobno mianownik i licznik:

$$(2+x)^{3/2} = 2^{3/2}(1+\frac{x}{2})^{3/2} = 2\sqrt{2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\frac{3}{2}}{n} (\frac{x}{2})^n$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

Wtedy:

$$\frac{(2+x)^{3/2}}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot x^n$$

Gdzie c_n jest równe (iloczyn Cauchy'ego):

$$c_n = 2\sqrt{2} \cdot \sum_{k=0}^{n} \binom{\frac{3}{2}}{k} \cdot \frac{1}{2^k}$$

Stąd otrzymujemy:

$$c_3 = 2\sqrt{2} \cdot \sum_{k=0}^{3} \binom{\frac{3}{2}}{k} \frac{1}{2^k} = 2\sqrt{2} \cdot (1 \cdot \binom{\frac{3}{2}}{0} + \frac{1}{2} \cdot \binom{\frac{3}{2}}{1} + \frac{1}{4} \cdot \binom{\frac{3}{2}}{2} + \frac{1}{8} \cdot \binom{\frac{3}{2}}{3}) =$$
$$= 2\sqrt{2} \cdot (1 + \frac{3}{4} + \frac{3}{32} - \frac{1}{128}) = 2\sqrt{2} \cdot \frac{235}{128} = \frac{235\sqrt{2}}{64}$$

Rozwiązanie Autora 2.

Zadanie 8.3 (Filip Sajko)**.** *Wyznacz funkcje tworzące następujących ciągów. (Znajdź zwartą postać tych funkcji, to jest bez nieskończonych sum.)*

1. $(0,0,0,0,-6,6,-6,6...)$
2. $(1,0,1,0...)$
3. $(1,2,1,4,1,8...)$
4. $(\binom{c}{0},\binom{c}{1},\binom{c}{2},...)$
5. $(1,\binom{c}{1},\binom{c+1}{1},\binom{c+2}{2},...)$
6. $(1,c,c^2,...)$
7. $(1,\binom{m+1}{m},\binom{m+2}{m},...)$
8. $(0,1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},...)$
9. $(1,1,\frac{1}{2!},\frac{1}{3!},...)$

1. $(0,0,0,0,-6,6,-6,6...)$

$$-6x^4+6x^5-6x^6+6x^7=$$

$$=-6x^4(1-x+x^2-x^3+...)=\frac{-6x^4+6x^5}{1-x^2}=\frac{-6x^4}{1+x}$$

2. $(1,0,1,0...)$

$$1+x^2+x^4+...=\frac{1}{1-x^2}$$

3. $(1,2,1,4,1,8...)$

$$1+2x+1x^2+4x^3+1x^4+8x^5+...=(1+x^2+x^4+x^6+...)+(2x+4x^3+8x^5+...)=\frac{1}{1-x^2}+\frac{2x}{1-2x^2}$$

4. $(\binom{c}{0},\binom{c}{1},\binom{c}{2},...)$

$$1+\binom{c}{1}+\binom{c+1}{1}x+\binom{c+2}{2}x^2+...=\sum_n\binom{c}{n}x^n=(1+x)^c$$

5. $(1,\binom{c}{1},\binom{c+1}{1},\binom{c+2}{2},...)$

$$a_n=\binom{c+n-1}{n-1}$$

$$1+\sum_{n\geqslant 1}\binom{c+n-1}{n-1}x^n=1+x\sum_{n-1\leqslant 0}\binom{c+n-1}{n-1}x^{n-1}=1+\frac{1}{(1-x)^{c+1}}$$

6. $(1,c,c^2,...)$

$$1+cx+c^2x^2+...=1+(cx)^2+(cx)^3+...=\frac{1}{1-cx}$$

7. $(1,\binom{m+1}{m},\binom{m+2}{m},...)$

$$a_n=\binom{m+n}{m}=\binom{n+m}{n}$$

$$\sum a_nx^n=\sum\binom{m+n}{n}x^n=\frac{1}{(1-x)^{m+1}}$$

8. $(0,1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},...)$

$$0+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...=1+\sum_{n=1}\frac{x^n}{n}=1-\ln(1-x)$$

9. $(1,1,\frac{1}{2!},\frac{1}{3!},...)$

$$1+1x+\frac{1}{2!}x+...=\sum\frac{x^n}{n!}=e^x$$

Rozwiązanie Autora 2.

Zadanie 8.4 (Filip Sajko, Julian Sowiński). *Niech $G(z)$ będzie funkcją tworzącą ciągu $\{g_n\}_{n\geqslant 0}$. Jaki ciąg generuje funkcja $G(z)+G(-z)$, a jaki $G(z)-G(-z)$?*

$$G(z) = g_0 + g_1x + g_2x^2 + g_3x^3 + ...$$
$$G(-z) = g_0 - g_1x + g_2x^2 - g_3x^3 + ...$$

Stąd, po prostu dodając i odejmując stronami otrzymujemy:

$$G(z) + G(-z) = 2(g_0 + g_2x^2 + g_4x^4 + ...)$$
$$G(z) - G(-z) = 2(g_1x + g_3x^3 + g_5x^5 + ...)$$

$$G(z) = g_0 + g_1z + g_2z^2 + g_3z^3 + g_4z^4 + \dots$$

a) Funkcja tworząca $G(z) + G(-z)$

Najpierw zapiszmy postać funkcji $G(-z)$, podstawiając $-z$ w miejsce z:

$$G(-z) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n(-z)^n = g_0 - g_1z + g_2z^2 - g_3z^3 + g_4z^4 - \dots$$

Teraz dodajmy obie funkcje stronami. Zauważmy, że wszystkie wyrazy z nieparzystymi potęgami z się skrócą:

$$G(z) + G(-z) = (g_0 + g_1z + g_2z^2 + \dots) + (g_0 - g_1z + g_2z^2 - \dots)$$
$$G(z) + G(-z) = (g_0 + g_0) + (g_1 - g_1)z + (g_2 + g_2)z^2 + (g_3 - g_3)z^3 + \dots$$
$$G(z) + G(-z) = 2g_0 + 2g_2z^2 + 2g_4z^4 + \dots = 2(g_0 + g_2x^2 + g_4x^4 + ...)$$

b) Funkcja tworząca $G(z) - G(-z)$

Postępujemy analogicznie, tym razem odejmując funkcje. W tym przypadku skrócą się wyrazy z parzystymi potęgami z:

$$G(z) - G(-z) = (g_0 + g_1z + g_2z^2 + \dots) - (g_0 - g_1z + g_2z^2 - \dots)$$
$$G(z) - G(-z) = (g_0 - g_0) + (g_1 - (-g_1))z + (g_2 - g_2)z^2 + (g_3 - (-g_3))z^3 + \dots$$
$$G(z) - G(-z) = 2g_1z + 2g_3z^3 + 2g_5z^5 + \dots = 2(g_1x + g_3x^3 + g_5x^5 + ...)$$

Zadanie 8.5 (Maciej Wełpa, Autor 2). *Niech a_n będzie liczbą trójek (i,j,k) liczb całkowitych takich, że $i \geqslant 0, j \geqslant 1, k \geqslant 1$ oraz $i+3j+3k=n$. Znajdź funkcję tworzącą ciągu $(a_0,a_1,\dots)$ i wyznacz wzór na a_n.*

Równanie: $i + 3j + 3k = n$, gdzie $i \geqslant 0, j \geqslant 1, k \geqslant 1$.
Funkcja tworząca dla zmiennej i (dla $i \geqslant 0$):

$$I(x) = \sum_{a=0}^{\infty} x^a = 1 + x + x^2 + \dots = \frac{1}{1-x}$$

Funkcja tworząca dla zmiennej j (dla $j \geqslant 1$ i $3j$ w równaniu):

$$J(x) = \sum_{b=1}^{\infty} x^{3b} = x^3 + x^6 + x^9 + \dots = x^3(1 + x^3 + x^6 + \dots) = x^3 \sum_{c=0}^{\infty} (x^3)^c = \frac{x^3}{1-x^3}$$

Funkcja tworząca dla zmiennej k (dla $k \geqslant 1$ i $3k$ w równaniu):

$$K(x) = \sum_{d=1}^{\infty} x^{3d} = x^3 + x^6 + x^9 + \dots = \frac{x^3}{1-x^3}$$

Funkcja tworząca $a(x)$ dla liczby rozwiązań równania $i+3j+3k = n$ jest iloczynem funkcji tworzących dla poszczególnych zmiennych:

$$a(x) = I(x) \cdot J(x) \cdot K(x) = \frac{1}{1-x} \cdot \frac{x^3}{1-x^3} \cdot \frac{x^3}{1-x^3}$$

Zatem:

$$a(x) = \frac{x^6}{(1-x)(1-x^3)^2}$$

Aby znaleźć współczynnik a_n (liczbę rozwiązań), należy rozłożyć $a(x)$ na ułamki proste. Mianownik możemy zapisać jako: $(1-x)(1-x^3)^2 = (1-x)((1-x)(1+x+x^2))^2 = (1-x)(1-x)^2(1+x+x^2)^2 = (1-x)^3(1+x+x^2)^2$ Stąd:

$$a(x) = \frac{x^6}{(1-x)^3(1+x+x^2)^2}$$

Rozkład na ułamki proste dla tego typu wyrażenia będzie zawierał składniki postaci:

$$\frac{A}{1-x} + \frac{B}{(1-x)^2} + \frac{C}{(1-x)^3} + \frac{Dx+E}{1+x+x^2} + \frac{Fx+G}{(1+x+x^2)^2}$$

Wyznaczenie stałych A, B, C, D, E, F, G jest procesem arytmetycznym i czasochłonnym, wymagającym podstawiania wartości x lub porównywania współczynników. Po wyznaczeniu tych stałych, każdy z ułamków prostych powinno przekształcić się z powrotem do szeregu potęgowego.

Rozwiązanie Autora 2.

Zadanie 8.6 (Krzysztof Wójtowicz, Autor 2). *Ustal liczbę naturalną $r \geqslant 2$ i niech a_n będzie liczbą r-tupli $(i_1, \dots, i_r)$ nieujemnych liczb całkowitych takich, że $i_1 + \dots + i_r = n$*

1. *Wyznacz funkcję tworzącą ciągu $(a_0, a_1, \dots)$*
2. *Przy pomocy tej funkcji wyznacz wzór na a_n.*

Podpunkt 1.
Funkcja tworzącą ciągu $(a_0, a_1, \dots)$:

$$A(x) = (1 + x + x^2 + \dots)^r = (\frac{1}{1-x})^r = \frac{1}{(1-x)^r} = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\binom{n+r-1}{n}}_{a_n} x^n$$

Podpunkt 2.
Wzór na a_n:

$$a_n = \binom{n+r-1}{n}$$

Rozwiązanie Autora 2.

Zadanie 8.7 (Maciej Wełpa (i), Autor 2). *Niech $a(x)$ będzie funkcją tworzącą ciągu $(a_0, a_1, \dots)$. Wytłumacz dlaczego $a(x) \cdot \frac{1}{1-x}$ jest funkcją tworzącą $(a_0, a_0 + a_1, a_0 + a_1 + a_2, \dots)$. Korzystając z tej obserwacji wyznacz wzór zwarty na:*

1. $\sum_{k=1}^{n} k^2$
2. $\sum_{k=1}^{n} k^3$

Wyjaśnienie właściwości funkcji tworzącej:
Niech $a(x)$ będzie funkcją tworzącą ciągu $(a_0, a_1, a_2, \ldots)$, czyli $a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Rozważmy funkcję $\frac{1}{1-x}$, która jest funkcją tworzącą ciągu $(1, 1, 1, \ldots)$, czyli $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} 1 \cdot x^n$. Iloczyn dwóch funkcji tworzących odpowiada splotowi ciągów, dla których są one funkcjami tworzącymi. Zatem, współczynniki c_n w rozwinięciu $a(x) \cdot \frac{1}{1-x}$ będą wynosić:

Rozważmy iloczyn dwóch szeregów potęgowych: $\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ oraz $\sum_{i=0}^{\infty} x^i$. Zgodnie z definicją iloczynu Cauchy'ego, ich iloczyn jest nowym szeregiem, którego n-ty (lub w tym przypadku i-ty) współczynnik jest sumą:

$$\left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i\right) \cdot \left(\sum_{i=0}^{\infty} x^i\right) = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{i} a_j x^j \cdot x^{i-j}\right)$$

Dalsze przekształcenie:

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{i} a_j x^i\right)$$

Wyciągając x^i przed wewnętrzną sumę:

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \left[x^i \left(\sum_{j=0}^{i} a_j\right)\right]$$

Widać, że suma ta to ciąg sum częściowych szeregu.
Podpunkt 1.
Aby wyznaczyć wzór zwarty na $\sum_{k=1}^{n} k^2$, możemy wykorzystać tę obserwację, że szukamy funkcji tworzącej dla ciągu sum częściowych. Najpierw potrzebujemy funkcji tworzącej dla ciągu $a_k = k^2$. Wiemy, że (różniczkowanie szeregów, a następnie mnożenie przez x):

— $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$
— $\sum_{k=0}^{\infty} kx^k = \frac{x}{(1-x)^2}$
— $\sum_{k=0}^{\infty} k^2 x^k = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}$ (jest to wynik różniczkowania $\sum kx^k$ i pomnożenia przez x)

Zatem, funkcja tworząca dla ciągu $(k^2)_{k \geqslant 0}$ to $A(x) = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}$. Szukamy sumy częściowej $\sum_{k=1}^{n} k^2$. Oznacza to, że potrzebujemy funkcji tworzącej dla ciągu $S_n = \sum_{k=1}^{n} k^2$. Zgodnie z powyższą właściwością, funkcja tworząca dla ciągu sum częściowych $S(x)$ jest równa $A(x) \cdot \frac{1}{1-x}$.

$$S(x) = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3} \cdot \frac{1}{1-x} = \frac{x(1+x)}{(1-x)^4}$$

Po przekształceniu metodą ułamków prostych i doprowadzeniu do szeregu potęgowego:

$$S(n) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Rozwiązanie Autora 2.

Zadanie 8.8 (Konstanty Sobczyński, Autor 2)**.** *Polecenie*

Rozwiązanie Autora 1.

Rozwiązanie Autora 2.

Zadanie 8.9 (Konstanty Sobczyński (i-iii), Julian Sowiński (iv-vi), Maciej Wełpa (vii-ix), Autor 2)**.** *Rozwiąż równania rekurencyjne:*

1. $a_0 = 4, a_1 = 4, a_{n+2} = a_{n+1} + 6a_n$,

2. $a_0 = 2, a_1 = 2, a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n,$
3. $a_0 = 0, a_1 = 1, a_{n+2} = a_{n+1} + a_n + 1,$
4. $a_0 = 0, a_1 = 1, a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n,$
5. $a_0 = 0, a_1 = 1, a_{n+2} = a_{n+1} - a_n,$
6. $a_0 = 1, a_1 = 5, a_2 = 11, a_{n+3} = 3a_{n+2} + 2a_{n+1} - 2a_n,$
7. $a_0 = 1, a_1 = 1, a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n + (-1)^n,$
8. $a_0 = 1, a_1 = 1, a_{n+2} = a_{n+1} + 6a_n - n,$
9. $a_0 = 1, a_1 = 1, a_{n+1} = 2a_n + 4^n.$

Rozwiązania Rekurencji Liniowych za Pomocą Funkcji Tworzących

Poniżej przedstawiono rozwiązania podanych rekurencji liniowych z wykorzystaniem funkcji tworzących, odwzorowując styl i kolejność kroków z przedstawionych zdjęć.

Przykład (iv)

Dana jest rekurencja: $a_0 = 0, a_1 = 1,\ a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n \quad \text{dla } n \geqslant 0.$

Definiujemy funkcję tworzącą $a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Rozpisujemy $a(x)$, podstawiając warunki początkowe i rekurencję:

$$a(x) = a_0 + a_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n = 0 + x + \sum_{n=2}^{\infty} (2a_{n-1} - a_{n-2}) x^n$$

Rozbijamy sumę i wyciągamy odpowiednie potęgi x:

$$a(x) = x + 2\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1} x^n - \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^n$$

$$a(x) = x + 2x\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1} x^{n-1} - x^2 \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^{n-2}$$

Wyrażamy sumy przez $a(x)$ i warunek początkowy $a_0 = 0$:

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1} x^{n-1} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k = a(x) - a_0 = a(x)$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^{n-2} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = a(x)$$

Podstawiamy z powrotem do równania:

$$a(x) = x + 2x \cdot a(x) - x^2 \cdot a(x)$$

Przenosimy wszystkie wyrazy zawierające $a(x)$ na lewą stronę:

$$a(x) - 2xa(x) + x^2 a(x) = x$$

$$a(x)(1 - 2x + x^2) = x$$

Zauważamy, że mianownik to wzór skróconego mnożenia:

$$a(x)(1 - x)^2 = x$$

Ostateczna postać funkcji tworzącej $a(x)$:

$$a(x) = \frac{x}{(1 - x)^2}$$

Nie musimy stosować ułamków prostych. Możemy od razu skorzystać ze znanego rozwinięcia w szereg potęgowy:

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$$

Mnożąc ten szereg przez x, otrzymujemy naszą funkcję tworzącą:

$$a(x) = x \cdot \frac{1}{(1-x)^2} = x\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^{n+1}$$

Aby znaleźć współczynnik przy x^n, musimy zmienić indeks sumowania. Niech $k = n+1$. Gdy $n = 0$, to $k = 1$.

$$a(x) = \sum_{k=1}^{\infty} kx^k$$

Ponieważ dla $k = 0$ wyraz kx^k jest równy 0, możemy bez zmiany wartości sumy zacząć sumowanie od $k = 0$:

$$a(x) = \sum_{k=0}^{\infty} kx^k = \sum_{n=0}^{\infty} nx^n$$

Porównując to z definicją $a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, otrzymujemy bezpośrednio wzór jawny na n-ty wyraz ciągu:

$$a_n = n$$

Przykład (v)
Dana jest rekurencja: $a_0 = 0, a_1 = 1$, $a_{n+2} = a_{n+1} - a_n \quad \text{dla } n \geqslant 0$.

Definiujemy funkcję tworzącą $a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Rozpisujemy $a(x)$, podstawiając warunki początkowe i rekurencję:

$$a(x) = a_0 + a_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n = 0 + x + \sum_{n=2}^{\infty}(a_{n-1} - a_{n-2})x^n$$

Rozbijamy sumę i wyciągamy odpowiednie potęgi x:

$$a(x) = x + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1}x^n - \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2}x^n$$

$$a(x) = x + x\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1}x^{n-1} - x^2\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2}x^{n-2}$$

Wyrażamy sumy przez $a(x)$ i warunek początkowy $a_0 = 0$:

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1}x^{n-1} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k = a(x) - a_0 = a(x)$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2}x^{n-2} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = a(x)$$

Podstawiamy z powrotem do równania:

$$a(x) = x + x \cdot a(x) - x^2 \cdot a(x)$$

Przenosimy wszystkie wyrazy zawierające $a(x)$ na lewą stronę:

$$a(x) - xa(x) + x^2 a(x) = x$$

$$a(x)(1 - x + x^2) = x$$

Ostateczna postać funkcji tworzącej $a(x)$:

$$a(x) = \frac{x}{1 - x + x^2}$$

Aby łatwo rozwinąć tę funkcję w szereg, stosujemy trik polegający na pomnożeniu licznika i mianownika przez $(1 + x)$, aby w mianowniku otrzymać sumę sześcianów:

$$a(x) = \frac{x(1+x)}{(1 - x + x^2)(1 + x)} = \frac{x + x^2}{1 + x^3}$$

Teraz możemy potraktować to jako szereg geometryczny:

$$a(x) = (x + x^2) \cdot \frac{1}{1 - (-x^3)} = (x + x^2) \sum_{k=0}^{\infty} (-x^3)^k = (x + x^2) \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{3k}$$

Rozdzielamy na dwie sumy:

$$a(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{3k+1} + \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{3k+2}$$

Z tej postaci odczytujemy wzór jawny na a_n. Współczynniki a_n są niezerowe tylko wtedy, gdy potęga n jest postaci $3k+1$ lub $3k+2$. Ostateczny wzór na n-ty wyraz ciągu jest więc określony w zależności od reszty z dzielenia n przez 3:

$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{dla } n \equiv 0 \pmod 3 \\ (-1)^{(n-1)/3} & \text{dla } n \equiv 1 \pmod 3 \\ (-1)^{(n-2)/3} & \text{dla } n \equiv 2 \pmod 3 \end{cases}$$

Przykład (vi)
Dana rekurencja: $a_0 = 1, a_1 = 5, a_2 = 11$, $a_{n+3} = 3a_{n+2} + 2a_{n+1} - 2a_n \quad$ dla $n \geqslant 0$.

Definiujemy funkcję tworzącą $a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Wyrażamy $a(x)$ przez jej początkowe wyrazy i sumę opartą na rekurencji:

$$a(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \sum_{n=3}^{\infty} (3a_{n-1} + 2a_{n-2} - 2a_{n-3}) x^n$$

Podstawiamy wartości początkowe i przekształcamy sumy:

$$a(x) = 1 + 5x + 11x^2 + 3x \sum_{n=3}^{\infty} a_{n-1} x^{n-1} + 2x^2 \sum_{n=3}^{\infty} a_{n-2} x^{n-2} - 2x^3 \sum_{n=3}^{\infty} a_{n-3} x^{n-3}$$

Sumy te możemy wyrazić przez funkcję $a(x)$ i jej początkowe wyrazy:

— $\sum_{n=3}^{\infty} a_{n-1} x^{n-1} = \sum_{k=2}^{\infty} a_k x^k = a(x) - a_0 - a_1 x = a(x) - 1 - 5x$
— $\sum_{n=3}^{\infty} a_{n-2} x^{n-2} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k = a(x) - a_0 = a(x) - 1$
— $\sum_{n=3}^{\infty} a_{n-3} x^{n-3} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = a(x)$

Podstawiamy te wyrażenia z powrotem do równania na $a(x)$:

$$a(x) = 1 + 5x + 11x^2 + 3x(a(x) - 1 - 5x) + 2x^2(a(x) - 1) - 2x^3 a(x)$$

Upraszczamy i grupujemy wyrazy z $a(x)$:

$$a(x) = 1 + 5x + 11x^2 + 3xa(x) - 3x - 15x^2 + 2x^2 a(x) - 2x^2 - 2x^3 a(x)$$

$$a(x) = (1 + 2x - 6x^2) + a(x)(3x + 2x^2 - 2x^3)$$

Przenosimy wszystkie wyrazy zawierające $a(x)$ na lewą stronę:

$$a(x)(1 - 3x - 2x^2 + 2x^3) = 1 + 2x - 6x^2$$

Ostateczna postać funkcji tworzącej $a(x)$:

$$a(x) = \frac{1 + 2x - 6x^2}{1 - 3x - 2x^2 + 2x^3}$$

Mianownik faktoryzuje się w oparciu o pierwiastki równania charakterystycznego $r^3 - 3r^2 - 2r + 2 = 0$, którymi są $r_1 = -1$, $r_2 = 2 + \sqrt{2}$, $r_3 = 2 - \sqrt{2}$. Daje to faktoryzację mianownika funkcji tworzącej:

$$1 - 3x - 2x^2 + 2x^3 = (1 + x)(1 - (2 + \sqrt{2})x)(1 - (2 - \sqrt{2})x)$$

Rozkład na ułamki proste ma postać:

$$a(x) = \frac{A}{1 + x} + \frac{B}{1 - (2 + \sqrt{2})x} + \frac{C}{1 - (2 - \sqrt{2})x}$$

Po żmudnych, ale prostych obliczeniach, otrzymujemy wartości stałych:

$$A = -1, \quad B = 1, \quad C = 1$$

Zatem:

$$a(x) = \frac{-1}{1 + x} + \frac{1}{1 - (2 + \sqrt{2})x} + \frac{1}{1 - (2 - \sqrt{2})x}$$

Przekształcamy każdy człon z powrotem na szereg potęgowy, używając wzoru $\frac{1}{1-u} = \sum_{n=0}^{\infty} u^n$:

$$a(x) = -\sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n + \sum_{n=0}^{\infty}((2 + \sqrt{2})x)^n + \sum_{n=0}^{\infty}((2 - \sqrt{2})x)^n$$

Grupując współczynniki przy x^n, otrzymujemy jawny wzór na a_n:

$$a_n = -(-1)^n + (2 + \sqrt{2})^n + (2 - \sqrt{2})^n$$

Co można zapisać jako:

$$a_n = (-1)^{n+1} + (2 + \sqrt{2})^n + (2 - \sqrt{2})^n$$

Przykład (vii)
Dana rekurencja: $a_0 = 1, a_1 = 1$, $a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n + (-1)^n$ dla $n \geqslant 0$.

Definiujemy funkcję tworzącą $a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Rozpiszmy $a(x)$ jako sumę początkowych wyrazów i reszty szeregu:

$$a(x) = a_0 x^0 + a_1 x^1 + \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n$$

Podstawiamy warunki początkowe $a_0 = 1, a_1 = 1$:

$$a(x) = 1 + x + \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n$$

Teraz, bazując na rekurencji, podstawiamy za a_n w sumie (dla $n \geqslant 2$, $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} + (-1)^{n-2}$):

$$= 1 + x + \sum_{n=2}^{\infty}(a_{n-1} + 2a_{n-2} + (-1)^{n-2})x^n$$

Rozbijamy sumę na trzy części i wyciągamy odpowiednie potęgi x przed sumy, a następnie zmieniamy indeksy:

$$= 1 + x + x\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1}x^{n-1} + 2x^2\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2}x^{n-2} + x^2\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-2}x^{n-2}$$

Wprowadzamy nowy indeks k (lub j jak na zdjęciu):

$$x\sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k = x(a(x) - a_0)$$

$$2x^2\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = 2x^2 a(x)$$

$$x^2\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^k = x^2\frac{1}{1-(-x)} = \frac{x^2}{1+x}$$

Podstawiamy te wyrażenia z powrotem do $a(x)$ i warunek początkowy $a_0 = 1$:

$$a(x) = 1 + x + x(a(x) - 1) + 2x^2 a(x) + \frac{x^2}{1+x}$$

$$a(x) = 1 + x + xa(x) - x + 2x^2 a(x) + \frac{x^2}{1+x}$$

Przenosząc wszystkie wyrazy zawierające $a(x)$ na lewą stronę i pozostałe na prawą:

$$a(x)(1 - x - 2x^2) = 1 + \frac{x^2}{1+x}$$

Upraszczając prawą stronę i rozkładając mianownik po lewej stronie:

$$a(x)(1 - x - 2x^2) = \frac{1 + x + x^2}{1+x}$$

Ostateczna postać funkcji tworzącej $a(x)$:

$$a(x) = \frac{1 + x + x^2}{(1+x)(1-x-2x^2)} = \frac{1 + x + x^2}{(1+x)^2(1-2x)}$$

Rozkład na ułamki proste (jak na zdjęciu):

$$\frac{1 + x + x^2}{(1+x)^2(1-2x)} = \frac{A}{(1+x)^2} + \frac{B}{1+x} + \frac{C}{1-2x}$$

Z wartości podanych na zdjęciu, otrzymujemy: $A = -1/3$ $B = 1/9$ $C = 7/9$ Zatem:

$$a(x) = -\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{9}\cdot\frac{1}{1+x} + \frac{7}{9}\cdot\frac{1}{1-2x}$$

Przekształcamy każdy człon z powrotem na szereg potęgowy:

$$a(x) = -\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(-1)^n x^n + \frac{1}{9}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n + \frac{7}{9}\sum_{n=0}^{\infty}2^n x^n$$

Grupujemy współczynniki przy x^n (tak jak na zdjęciu):

$$a_n = \left(-\frac{1}{3}(n+1) + \frac{1}{9}\right)(-1)^n + \frac{7}{9}2^n$$

$$a_n = \left(\frac{-3(n+1)+1}{9}\right)(-1)^n + \frac{7}{9}2^n$$

$$a_n = \frac{(-3n-3+1)}{9}(-1)^n + \frac{7}{9}2^n$$

$$a_n = \frac{(-3n-2)(-1)^n + 7\cdot 2^n}{9}$$

Można to również zapisać jako:

$$a_n = \frac{(3n+2)(-1)^{n+1} + 7\cdot 2^n}{9}$$

Przykład (viii)
Dana rekurencja: $a_0 = 1, a_1 = 1,\ a_{n+2} = a_{n+1} + 6a_n - n \quad \text{dla } n \geqslant 0$.

Definiujemy funkcję tworzącą $a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Rozpiszmy $a(x)$ jako sumę początkowych wyrazów i reszty szeregu:

$$a(x) = a_0 + a_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n$$

Podstawiamy warunki początkowe $a_0 = 1, a_1 = 1$:

$$a(x) = 1 + x + \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n$$

Teraz, bazując na rekurencji, podstawiamy za a_n w sumie (dla $n \geqslant 2$, $a_n = a_{n-1} + 6a_{n-2} - (n-2)$):

$$= 1 + x + \sum_{n=2}^{\infty}(a_{n-1} + 6a_{n-2} - (n-2))x^n$$

Rozbijamy sumę na trzy części i wyciągamy odpowiednie potęgi x przed sumy, a następnie zmieniamy indeksy:

$$= 1 + x + x\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1}x^{n-1} + 6x^2\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2}x^{n-2} - x^2\sum_{n=2}^{\infty}(n-2)x^{n-2}$$

Wprowadzamy nowy indeks k:

$$x\sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k = x(a(x) - a_0)$$

$$6x^2\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = 6x^2 a(x)$$

Dla członu z $(n-2)$:

$$x^2\sum_{n=2}^{\infty}(n-2)x^{n-2} = x^2\sum_{k=0}^{\infty} kx^k = x^2\frac{x}{(1-x)^2} = \frac{x^3}{(1-x)^2}$$

Podstawiamy te wyrażenia z powrotem do $a(x)$ i warunek początkowy $a_0 = 1$:

$$a(x) = 1 + x + x(a(x) - 1) + 6x^2 a(x) - \frac{x^3}{(1-x)^2}$$

$$a(x) = 1 + x + xa(x) - x + 6x^2 a(x) - \frac{x^3}{(1-x)^2}$$

Przenosząc wszystkie wyrazy zawierające $a(x)$ na lewą stronę i pozostałe na prawą:

$$a(x)(1-x-6x^2) = 1 - \frac{x^3}{(1-x)^2}$$

Upraszczając prawą stronę:

$$a(x)(1-x-6x^2) = \frac{(1-x)^2 - x^3}{(1-x)^2} = \frac{1-2x+x^2-x^3}{(1-x)^2}$$

Ostateczna postać funkcji tworzącej $a(x)$:

$$a(x) = \frac{1-2x+x^2-x^3}{(1-x-6x^2)(1-x)^2}$$

Rozkładamy mianownik $1-x-6x^2 = -(6x^2+x-1) = -(3x-1)(2x+1) = (1-3x)(2x+1)$.

$$a(x) = \frac{1-2x+x^2-x^3}{(1-3x)(2x+1)(1-x)^2}$$

Rozkład na ułamki proste (jak na zdjęciu):

$$a(x) = \frac{11}{20(1-3x)} + \frac{19}{45(1+2x)} - \frac{5}{36(1-x)} - \frac{1}{6(1-x)^2}$$

Przekształcamy każdy człon z powrotem na szereg potęgowy:

$$a(x) = \frac{11}{20}\sum_{n=0}^{\infty}(3x)^n + \frac{19}{45}\sum_{n=0}^{\infty}(-2x)^n - \frac{5}{36}\sum_{n=0}^{\infty}x^n - \frac{1}{6}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$$

Grupujemy współczynniki przy x^n:

$$a_n = \frac{11}{20}3^n + \frac{19}{45}(-2)^n - \frac{5}{36} - \frac{1}{6}(n+1)$$

Sprowadzamy do wspólnego mianownika 180:

$$a_n = \frac{9\cdot 11\cdot 3^n}{180} + \frac{4\cdot 19\cdot(-2)^n}{180} - \frac{5\cdot 5}{180} - \frac{30(n+1)}{180}$$

$$a_n = \frac{99\cdot 3^n + 76\cdot(-2)^n - 25 - 30n - 30}{180}$$

$$a_n = \frac{99\cdot 3^n + 76\cdot(-2)^n - 30n - 55}{180}$$

Przykład (ix)

Dana rekurencja: $a_0 = 1, a_1 = 1,\ a_{n+1} = 2a_n + 4^n \quad \text{dla } n \geqslant 0$.

Definiujemy funkcję tworzącą $a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Zgodnie z widocznym stylem, zaczynamy od $a(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$:

$$a(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(2a_{n-1} + 4^{n-1})x^n$$

Podstawiamy $a_0 = 1$:

$$a(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} 2a_{n-1}x^n + \sum_{n=1}^{\infty} 4^{n-1}x^n$$

Przekształcamy sumy:

$$= 1 + 2x\sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}x^{n-1} + x\sum_{n=1}^{\infty} 4^{n-1}x^{n-1}$$

Zmieniamy indeksy na $k = n - 1$:

$$= 1 + 2x\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k + x\sum_{k=0}^{\infty}(4x)^k$$

Wyrażamy sumy za pomocą $a(x)$ i szeregu geometrycznego:

$$a(x) = 1 + 2xa(x) + x\frac{1}{1-4x}$$

Przenosząc wszystkie wyrazy zawierające $a(x)$ na lewą stronę i pozostałe na prawą:

$$a(x)(1-2x) = 1 + \frac{x}{1-4x}$$

Upraszczając prawą stronę:

$$a(x)(1-2x) = \frac{1-4x+x}{1-4x} = \frac{1-3x}{1-4x}$$

Ostateczna postać funkcji tworzącej $a(x)$:

$$a(x) = \frac{1-3x}{(1-4x)(1-2x)}$$

Rozkład na ułamki proste (jak na zdjęciu):

$$a(x) = -\frac{1}{2}\frac{1}{1-2x} + \frac{3}{2}\frac{1}{1-4x}$$

Kontynuując:

$$a(x) = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(2x)^n + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(4x)^n$$

$$a(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}2^n + \frac{1}{2}4^n\right)x^n$$

$$a(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(2^{n-1} + 2^{2n-1})x^n$$

Zatem wzór na n-ty wyraz ciągu to:

$$a_n = 2^{n-1} + 2^{2n-1}$$

Rozwiązanie Autora 2.

Zadanie 8.10 (Karol Wójcik, Autor 2)**.** *Przedstaw w postaci zwartej splot liczb Fibonacciego, czyli:*

$$\sum_{k=0}^{n} F_k \cdot F_{n-k}$$

Rozwiązanie Autora 1.

Rozwiązanie Autora 2.

9. Zestaw 9

Zadanie 9.1. *Udowodnij, że:*

1. *$P(n,k)$ jest równe liczbie podziałów liczby n o największym składniku równym k;*
2. *liczba podziałów liczby n na parami różne składniki jest równa liczbie podziałów liczby n na nieparzyste składniki;*
3. *$P(n+k,k)$ jest równe liczbie podziałów n, w których żaden ze składników nie przekracza k;*
4. *liczba podziałów samosprzężonych (dwa podziały są sprzężone jeśli ich diagramy Ferrersa są symetryczne względem "przekątnej") liczby n jest równa liczbie podziałów liczby n na parami różne składniki nieparzyste.*

1. *Dowód.* Istnieje bijekcja pomiędzy pierwszymi a drugimi, wystarczy wykonać transpozycje diagramu Ferrersa. □
2. *Dowód.* Istnieje bijekcja pomiędzy tymi dwoma zbiorami na diagramie Ferrersa: Aby przejść z lewej do prawej dokonujemy transpozycji i usuwamy pierwszy wiersz. □

Rozwiązanie Autora 2.

Zadanie 9.2 (Konstanty Sobczyński (1-3), Julian Sowiński (4-6), Autor 2)**.** *Znajdź funkcje tworzące dla następujących ciągów:*

1. $p(n|wszystkie\ podziały n)$
2. $p(n|składniki\ podziału\ są\ parami\ różne)$
3. $p(n|każdy\ składnik\ jest\ nieparzysty)$
4. $p(n|każdy\ składnik\ jest\ parzysty)$
5. $p(n|każdy\ składnik\ jest\ ograniczony\ przez m)$
6. $p(n|każdy\ składnik\ może\ występować\ co\ najwyżej m razy)$

4) p(n — każdy składnik jest parzysty)

Chcemy znaleźć funkcję tworzącą dla podziałów liczby n, w których mogą występować **jedynie składniki parzyste**, czyli liczby ze zbioru $\{2, 4, 6, 8, \dots\}$.

Dla każdego składnika parzystego $k = 2j$ (gdzie $j \geqslant 1$), możemy go użyć dowolną liczbę razy. Odpowiadają temu następujące szeregi geometryczne:

— Dla składnika 2: $(1 + x^2 + x^4 + x^6 + \dots) = \frac{1}{1-x^2}$
— Dla składnika 4: $(1 + x^4 + x^8 + x^{12} + \dots) = \frac{1}{1-x^4}$
— Dla składnika 6: $(1 + x^6 + x^{12} + x^{18} + \dots) = \frac{1}{1-x^6}$
— i tak dalej...

Funkcja tworząca jest iloczynem tych szeregów dla wszystkich parzystych liczb naturalnych.

$$P(x) = \left(\frac{1}{1-x^2}\right)\left(\frac{1}{1-x^4}\right)\left(\frac{1}{1-x^6}\right)\cdots$$

Możemy to zapisać zwięźle za pomocą znaku iloczynu, sumując po wszystkich liczbach parzystych $2k$ dla $k \geqslant 1$:

$$P(x) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^{2k}}$$

5) p(n — każdy składnik jest ograniczony przez m)

W tym przypadku składniki podziału mogą być **jedynie liczbami ze zbioru** $\{1, 2, 3, \dots, m\}$. Każdą z tych liczb możemy używać dowolną liczbę razy.

Tworzymy iloczyn szeregów geometrycznych, ale tylko dla składników od 1 do m:

$$P(x) = (1 + x + x^2 + \dots)(1 + x^2 + x^4 + \dots) \cdots (1 + x^m + x^{2m} + \dots)$$

Upraszczając każdy z tych szeregów, otrzymujemy:

$$P(x) = \left(\frac{1}{1-x}\right)\left(\frac{1}{1-x^2}\right) \cdots \left(\frac{1}{1-x^m}\right)$$

Co w notacji iloczynowej zapisujemy jako:

$$P(x) = \prod_{k=1}^{m} \frac{1}{1-x^k}$$

6) p(n — każdy składnik może występować co najwyżej m razy)

Tutaj ograniczenie dotyczy **liczby wystąpień** każdego składnika. Dowolna liczba naturalna k może być składnikiem podziału, ale może pojawić się w sumie co najwyżej m razy.

Dla każdego składnika k tworzymy wielomian, który reprezentuje możliwość użycia go od 0 do m razy:

— Dla składnika 1: $(1 + x^1 + x^2 + \cdots + x^m)$
— Dla składnika 2: $(1 + x^2 + x^4 + \cdots + x^{2m})$
— Dla składnika 3: $(1 + x^3 + x^6 + \cdots + x^{3m})$
— Dla składnika k: $(1 + x^k + x^{2k} + \cdots + x^{km})$

Każdy z tych wielomianów jest skończonym szeregiem geometrycznym, który możemy uprościć za pomocą wzoru $\sum_{i=0}^{m} r^i = \frac{1-r^{m+1}}{1-r}$. Dla składnika k, $r = x^k$:

$$1 + x^k + x^{2k} + \cdots + x^{km} = \frac{1-(x^k)^{m+1}}{1-x^k} = \frac{1-x^{k(m+1)}}{1-x^k}$$

Całkowita funkcja tworząca jest iloczynem takich wyrażeń dla wszystkich możliwych składników $k \geqslant 1$:

$$P(x) = \left(\frac{1-x^{1(m+1)}}{1-x^1}\right)\left(\frac{1-x^{2(m+1)}}{1-x^2}\right)\left(\frac{1-x^{3(m+1)}}{1-x^3}\right)\cdots$$

Zapisując to w zwartej formie iloczynowej, otrzymujemy:

$$P(x) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1-x^{k(m+1)}}{1-x^k}$$

Rozwiązanie Autora 2.

Zadanie 9.3. *Wykaż, że:*

$$(1+x)(1+x^3)(1+x^5) \cdot ... = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k^2}}{(1-x^2)(1-x^4) \cdot ... \cdot (1-x^{2k})}$$

Rozwiązanie Autora 1.

Rozwiązanie Autora 2.

Zadanie 9.4. *Niech $P(x)$ będzie funkcją tworząca ciągu $p(n)$, gdzie $p(n)$ jest ilością wszystkich podziałów n. Wykaż, że:*

$$P(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k^2}}{(1-x)^2(1-x^2)^2 \cdot ... \cdot (1-x^k)^2}$$

Rozwiązanie Autora 1.

Rozwiązanie Autora 2.

Zadanie 9.5. *Nich $f(n)[g(n)]$ oznaczają liczbę podziałów n z parzystą [nieparzystą] liczba składników parzystych. Niech $k(n)$ oznacza liczbę podziałów samosprzeżonych n. Wykaż, że:*

$$f(n) - g(n) = k(n)$$

Rozwiązanie Autora 1.

Rozwiązanie Autora 2.

Zadanie 9.6. *Znajdź funkcję tworzącą dla ciągu:*

$$a_n = \sum_{m>0} \sum_{k_1+k_2+...+k_m=n, k_i>0} k_1 \cdot ... \cdot k_m$$

Rozwiązanie Autora 1.

Rozwiązanie Autora 2.

Zadanie 9.7. *Przy ustalonym $k \in \mathbb{N}$, niech $B_k(x) = \sum_{k=0}^{\infty} S(n,k)x^n$ będzie funkcją tworzącą dla liczb Stirlinga drugiego rodzaju $S(n,k)$. Wykaż, że:*

$$B_k(x) = \frac{x^k}{(1-x)(1-2x) \cdot ... \cdot (1-kx)}$$

Rozwiązanie Autora 1.

Rozwiązanie Autora 2.

10. Zestaw 10

Sytuacja taka sama jak w 7 zestawie.

11. Zestaw 11

Zadanie 11.1. *Wykaż równoważność następujących zdań: dla grafu T*

1. *T jest drzewem;*
2. *dowolne dwa wierzchołki T sa połączone unikalną ścieżką;*
3. *T jest minimalnie spójny, tzn. T jest spójny ale $T - e$ jest niespójny dla dowolnej krawędzi $e \in T$;*
4. *T jest maksymalnie acykliczny, tzn T nie zawiera cyklu ale $T + xy$ zawiera cykl dla dowolnych niepołączonych wierzchołków $x, y \in T$.*

Rozwiązanie Autora 1.

Rozwiązanie Autora 2.

Zadanie 11.2. *Niech T będzie ukorzenionym drzewem. Podział zbioru wierzchołków $V(T)$ na zbiory $P_1, ...P_t$ nazywamy heavy-light decomposition drzewa T, jeżeli spełnione są następujące warunki:*

1. *P_i jest ścieżką w T zawartą w pewnej ścieżce od korzenia do liścia drzewa T,*
2. *jeżeli pewna ścieżka od korzenia do liścia drzewa T przecina się niepusto z n ścieżkami ze zbioru $\{P_1, ..., P_t\}$ to $|V(T)| \geqslant 2^n - 1$.*

Wykaż, że T posiada heavy-light dekompozycję.

Rozwiązanie Autora 1.

Rozwiązanie Autora 2.

Zadanie 11.3. *Udowodnij, że dowolne drzewo T ma przynajmniej $\Delta(T)$ liści.*

Rozwiązanie Autora 1.

Rozwiązanie Autora 2.

Zadanie 11.4. *Niech $\mathcal{T}$ będzie dowolnym podzbiorem poddrzew drzewa T. Pokaż, że*

1. *jeśli każde dwa drzewa w $\mathcal{T}$ mają niepuste przecięcie (wierzchołkowo) to istnieje wierzchołek należący do wszystkich drzew w $\mathcal{T}$.*
2. *dla dowolnego $k \geqslant 1$ zachodzi: $\mathcal{T}$ zawiera k rozłącznych wierzchołkowo drzew albo istnieje zbiór co najwyżej $k - 1$ 1 wierzchołków drzewa $\mathcal{T}$ przecinający niepusto każde drzewo w $\mathcal{T}$.*

Rozwiązanie Autora 1.

Rozwiązanie Autora 2.

Zadanie 11.5. *Niech $d \in \mathbb{N}, V = \{0,1\}^d$ i $G_d = (V, E)$ będzie grafem, w którym krawędzie są pomiędzy ciągami różniącymi się na dokładnie jednej pozycji. Graf G_d nazywamy d-wymiarową kostką. Dla grafu G_d wyznacz:*

1. *liczbę krawędzi*
2. *średnicę (maksymalną długość najkrótszej ścieżki pomiędzy dwoma wierzchołkami)*
3. *talię (najmniejszy rozmiar cyklu)*
4. *obwód (największy rozmiar cyklu)*

Zbadaj, kiedy G_d ma cykl Hamiltona, Eulera?

Rozwiązanie Autora 1.

Rozwiązanie Autora 2.

Zadanie 11.6. *Pokaż, że* $rad(G) \leqslant diam(G) \leqslant 2rad(G)$ *dla dowolnego grafu* G*. Wskaż grafy świadczące równości.*

Rozwiązanie Autora 1.

Rozwiązanie Autora 2.

Zadanie 11.7. *Wykaż, że dla każdego grafu* G *zachodzi:* G *jest spójny lub* $\bar{G}$ *(dopełnienie* G*) jest spójny.*

Rozwiązanie Autora 1.

Rozwiązanie Autora 2.

Zadanie 11.8. *Niech* G *będzie grafem o maksymalnym stopniu* Δ *i niech* $\Delta = \Delta_1 + \Delta_2 + 1$*. Pokaż, że* $V(G)$ *można podzielić na dwie części* X_1 *i* X_2 *takie, że* $\Delta(G[X_1]) \leqslant \Delta_1$ *i* $\Delta(G[X_2]) \leqslant \Delta_2$*. Wskazówka: badaj najpierw przypadek* $\Delta_1 = \Delta_2$*.*

Rozwiązanie Autora 1.

Rozwiązanie Autora 2.