Egzamin z optymalizacji liniowej

Mateusz Zacharecki

27 czerwca 2023

Goofspiel (Game Of Pure Strategy)

Moje rozwiązanie jest rozwiązaniem problemu gry Goofspiel dla N=5 kart, tj. wyznaczenie optymalnej strategii gracza dla gry Goofspiel dla 5 kart przy użyciu technik optymalizacji liniowej.

Metoda rozwiązania

- Zastosowane przeze mnie rozwiązanie wykorzystuje techniki iteracyjne programowania (programowanie dynamiczne), co w tym przypadku daje znaczną przewagę obliczeniową względem podejścia rekurencyjnego.
- Takie rozwiązanie jest szybkie dzięki temu, że nie było konieczne obliczanie wielokrotnie tych samych rzeczy.

Macierze wypłat i wartości gry

W rozwiązaniu wyznaczam macierze wypłat i wartości gry począwszy od małych gier, by ostatecznie dostać oczekiwany wynik dla pełnej gry. Macierze wypłat wyznaczam zgodnie ze wzorem:

$$X_{ij} = P_k sgn(V_i - Y_j) + f(V \setminus \{V_i\}, Y \setminus \{Y_j\}, P \setminus \{P_k\},$$

gdzie V to zbiór kart gracza 1, Y to zbiór kart gracza 2, P to zbiór kart na środku. Z kolei wartości gier wyznaczam jako

$$f(X, Y, P) = \frac{1}{|N|} \sum_{P_k \in P} f_k(X, Y, P).$$

Zakładamy, że $f(\emptyset, \emptyset, \emptyset) = 0$.

Rozwiązanie

Rozwiązanie sprowadza się do rozwiązania problemu gry o sumie zerowej za pomocą technik optymalizacji liniowej. Dla każdej z macierzy wypłat $X = [X_{ij}]$ będziemy rozwiązywać problem liniowy zgodnie z twierdzeniem o minimaksie (dla zmiennych $x_1, \ldots, x_m$):

$$x_0 \longrightarrow max$$

$$X^T \mathbf{x} - \mathbf{1} x_0 \geqslant 0$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_i = 1$$

$$x \geqslant 0, x_0 \in \mathbb{R}$$

Rozwiązanie

Z kolei dla gracza 2 mamy:

$$x_0 \to min$$

$$X\mathbf{x} - \mathbf{1}x_0 \leqslant 0$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_i = 1$$

$$x \geqslant 0, x_0 \in \mathbb{R}$$

Implementacja

W rozwiązaniu korzystam z klasy InteractiveLPProblem. Implementacja została wykonana według przedstawionych wytycznych.

Wynik

Finalnie otrzymujemy 5 macierzy wypłat (bo na początku mamy 5 możliwości na odkrytą kartę na środku). Po rozwiązaniu 5 problemów liniowych, dostajemy 5 rozwiązań optymalnych. Są to rozwiązania optymalne dla pierwszego ruchu dla karty na środku równej odpowiednio "As", "2", "3", "4", "5"(rezultaty są zaokrąglone do czwartego miejsca po przecinku):

$$(0.047, 0.8327, 0.1203, 0, 0)$$

$$(0.1855, 0, 0.7375, 0.077, 0)$$

$$(0.1182, 0.1188, 0, 0.763, 0)$$

$$(0.1226, 0.0735, 0.1915, 0.2043, 0.4081)$$

$$(0.1123, 0.0241, 0, 0, 0.8636)$$

Optymalna strategia w pierwszym ruchu dla gracza 1 – macierz

Przedstawmy uzyskane rezultaty w macierzy (gracz 1):

$$\begin{pmatrix} 0.047 & 0.1855 & 0.1182 & 0.1226 & 0.1123 \\ 0.8327 & 0 & 0.1188 & 0.0735 & 0.0241 \\ 0.1203 & 0.7375 & 0 & 0.1915 & 0 \\ 0 & 0.077 & 0.763 & 0.2043 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.4081 & 0.8636 \end{pmatrix}$$

Optymalna strategia w pierwszym ruchu dla gracza 2 – macierz

Przedstawmy uzyskane rezultaty w macierzy (gracz 2):

$$\begin{pmatrix} 0.047 & 0.8327 & 0.1203 & 0 & 0 \\ 0.1855 & 0 & 0.7375 & 0.077 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2023 & 0.3947 & 0.403 \\ 0.1226 & 0.0735 & 0.1915 & 0.2043 & 0.4081 \\ 0.1123 & 0.0241 & 0 & 0 & 0.8636 \end{pmatrix}$$

Odczytywanie rezultatów

Macierz dla gracza 1 odczytujemy w następujący sposób: wiersze oznaczają kartę wyrzuconą przez gracza, kolumny to karty na środku, wartości macierzy to prawdopodobieństwa z jakimi gracz powinien wyrzucić daną kartę gdy na środku jest dana karta. Przykładowo w drugim wierszu i w trzeciej kolumnie wartość 0.1188 oznacza, że z prawdopodobieństwem 0.1188 gracz powinien wyrzucić kartę 2 gdy na środku jest trójka. Zauważmy, że oczywiście kolumny sumują się do jedynki, a przynajmniej do około 1 ze względu na zaokrąglenia.

Najlepszy ruch

Powyższa macierz informuje, że z największym prawdopodobieństwem gracz powinien wyrzucić dwójkę, gdy na środku jedynka, trójkę, gdy na środku dwójka, czwórkę, gdy na środku trójka, piątkę, gdy na środku czwórka, piątkę, gdy na środku piątka. Ciekawe więc jest to, że poza piątką, gracz powinien grać w przypadku $N = 5$ kartę o 1 większą niż karta na środku. Gracz nigdy nie powinien wyrzucać czwórki i piątki, gdy na środku jedynka, dwójki i piątki, gdy na środku dwójka, trójki i piątki, gdy na środku trójka, trójki i czwórki, gdy na środku piątka.

Eternity II

- Okazuje się, że rozwiązanie tego problemu można sprowadzić do rozwiązania problemu programowania całkowitoliczbowego, co zostało zastosowane w tym projekcie.
- Uwaga techniczna jest taka, że w zadaniu będziemy indeksować od zera.
- Nasza układanka jest wymiarów 6×6, co oznacza, że mamy łącznie 36 kafelków, które będziemy musieli w odpowiedni sposób ułożyć.

Układanka w chwili początkowej

Indeksy zmiennych

Zmienne użyte w rozwiązaniu będą miały indeksy, za pomocą których łatwiej będzie można je identyfikować:

- $t = 0, \ldots, 35$ – kafelki w układance, będą one oznaczane kolejno czytając wierszami,
- $r = 0, \ldots, 5$ – wiersze w układance,
- $c = 0, \ldots, 5$ – kolumny w układance,
- $a = 0, 1, 2, 3$ – ułożenie (rotacje) kafelka t, $a = 0$ będzie oznaczać kafelek, który nie został obrócony, $a = 1$ będzie wskazywał na to, że kafelek jest obrócony o 90°, zgodnie ze wskazówkami zegara, z kolei $a = 2$ i $a = 3$ będzie oznaczać, że kafelek jest obrócony o odpowiednio 180° i 270° według wskazówek zegara.

Współczynniki przy zmiennych

- Współczynnikami przy zmiennych będą $CT_{t,a,l}$, $CB_{t,a,l}$, $CL_{t,a,l}$, $CR_{t,a,l}$ i każdy z tych współczynników będzie przyjmował 1, gdy kafelek t ma kolor l w jego odpowiednio górnym, dolnym, lewem, prawym trójkąciku po obróceniu o a, w przeciwnym przypadku współczynniki będą przyjmować 0.
- Współczynniki będą reprezentowane za pomocą trójwymiarowej tablicy, która dla indeksów t, a, l będzie przyjmować 1 bądź 0, zgodnie z warunkami na współczynniki.

Kolory trójkącików

W naszej układance mamy 7 rodzajów pokolorowanych trójkącików oraz 1 trójkącik niepokolorowany. Przez $l = 0$ będziemy oznaczać trójkącik niepokolorowany. Z kolei $l = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ będą wskazywać na to, że trójkącik jest pokolorowany. Kolory będą rozróżniane według legendy:

- 1 – fioletowy
- 2 – żółty
- 3 – różowy z żółtym wzorkiem
- 4 – pomarańczowy
- 5 – zielony
- 6 – granatowy
- 7 – różowy z niebieskim wzorkiem

Zmienne

Będziemy mieli także 3 rodzaje zmiennych:

- zmienne $x_{t,r,c,a}$ będą przyjmować 1, gdy kafelek t znajduje się w r-tym wierszu i w c-tej kolumnie po obrocie o a oraz 0 w przeciwnym przypadku,
- Zmienne $h_{r,c}$ będą przyjmować 1, gdy prawa krawędź kafelka znajdującego się w r-tym wierszu i w c-tej kolumnie jest dopasowana z lewą krawędzią kafelka znajdującego się w r-tym wierszu i w $c+1$-tej kolumnie oraz 0 w przeciwnym przypadku,
- zmienne $v_{r,c}$ będą przyjmować 1, gdy dolna krawędź kafelka znajdującego się w r-tym wierszu i w c-tej kolumnie jest dopasowana z górną krawędzią kafelka znajdującego się w $r+1$-tym wierszu i w c-tej kolumnie oraz 0 w przeciwnym przypadku.

Nasze zmienne jak widać są binarne, co wskazuje na to, że rozwiązanie będzie się opierać na programowaniu całkowitoliczbowym.

Optymalizowana funkcja

W zadaniu funkcją, którą będziemy minimalizować jest:

$$\sum_{r=0}^{5}\sum_{c=0}^{4} h_{r,c} + \sum_{r=0}^{4}\sum_{c=0}^{5} v_{r,c} \rightarrow min.$$

Będziemy więc chcieli docelowo otrzymać, że $\forall r, c \; h_{r,c}, v_{r,c} = 0$, co będzie oznaczać, że w układance nie ma żadnych niedopasowanych krawędzi, czyli że każde dwa trójkąciki przy tej samej krawędzi są tego samego koloru.

Warunki ograniczające

Mamy następujące ograniczenia:

- Każdy kafelek w układance ma wystąpić w układance dokładnie raz:

$$\sum_{r=0}^{5} \sum_{c=0}^{5} \sum_{a=0}^{3} x_{t,r,c,a} = 1 \; \forall t = 0, \ldots, 35$$

- Na każdej pozycji musi się znaleźć kafelek:

$$\sum_{t=0}^{35} \sum_{a=0}^{3} x_{t,r,c,a} = 1 \; \forall r = 0, \ldots, 5, \;\; c = 0, \ldots, 5$$

Warunki ograniczające

- Gwarancja, że $h_{r,c}$ będzie przyjmować 1, gdy prawy trójkącik w kafelku na pozycji (r, c) jest różny od lewego trójkącika w kafelku na pozycji $(r, c+1)$:

$$\sum_{t=0}^{35}\sum_{a=0}^{3} CR_{t,a,l}x_{t,r,c,a} - \sum_{t=0}^{35}\sum_{a=0}^{3} CL_{t,a,l}x_{t,r,c+1,a} \leqslant h_{r,c}$$

$$\forall r = 0, \ldots, 5,\ \ c = 0, \ldots, 4,\ \ l = 0, \ldots, 7$$

$$-\sum_{t=0}^{35}\sum_{a=0}^{3} CR_{t,a,l}x_{t,r,c,a} + \sum_{t=0}^{35}\sum_{a=0}^{3} CL_{t,a,l}x_{t,r,c+1,a} \leqslant h_{r,c}$$

$$\forall r = 0, \ldots, 5,\ \ c = 0, \ldots, 4,\ \ l = 0, \ldots, 7$$

Warunki ograniczające

- Gwarancja, że $v_{r,c}$ będzie przyjmować 1, gdy dolny trójkącik w kafelku na pozycji (r, c) jest różny od górnego trójkącika w kafelku na pozycji $(r+1, c)$:

$$\sum_{t=0}^{35} \sum_{a=0}^{3} CB_{t,a,l} x_{t,r,c,a} - \sum_{t=0}^{35} \sum_{a=0}^{3} CT_{t,a,l} x_{t,r+1,c,a} \leqslant v_{r,c}$$

$$\forall r = 0, \ldots, 4, \;\; c = 0, \ldots, 5, \;\; l = 0, \ldots, 7$$

$$- \sum_{t=0}^{35} \sum_{a=0}^{3} CB_{t,a,l} x_{t,r,c,a} + \sum_{t=0}^{35} \sum_{a=0}^{3} CT_{t,a,l} x_{t,r+1,c,a} \leqslant v_{r,c}$$

$$\forall r = 0, \ldots, 4, \;\; c = 0, \ldots, 5, \;\; l = 0, \ldots, 7$$

Warunki ograniczające

- Na brzegach układanki będziemy mieć niepokolorowane trójkąciki:

$$\sum_{t=0}^{35}\sum_{a=0}^{3} CT_{t,a,0}\cdot x_{t,0,c,a} = 1 \; \forall c = 0,\dots,5$$

$$\sum_{t=0}^{35}\sum_{a=0}^{3} CB_{t,a,0}\cdot x_{t,5,c,a} = 1 \; \forall c = 0,\dots,5$$

$$\sum_{t=0}^{35}\sum_{a=0}^{3} CL_{t,a,0}\cdot x_{t,r,0,a} = 1 \; \forall r = 0,\dots,5$$

$$\sum_{t=0}^{35}\sum_{a=0}^{3} CR_{t,a,0}\cdot x_{t,r,5,a} = 1 \; \forall r = 0,\dots,5$$

Ograniczenia na zmienne

Warunki na zmienne są naturalne, jako że zmienne są binarne:

$$x_{t,r,c,a} \in \{0,1\} \ \forall t = 0,\dots,35, \ r = 0,\dots,5, \ c = 0\dots,5, \ a = 0,\dots,3$$

$$h_{r,c} \in \{0,1\} \ \forall r = 0,\dots,5, \ c = 0\dots,5$$

$$v_{r,c} \in \{0,1\} \ \forall r = 0,\dots,5, \ c = 0\dots,5$$

Implementacja

W rozwiązaniu skorzystałem z klasy MixedIntegerLinearProgram. Sposób i kroki rozwiązania są dokładnie takie jak w przedstawionym opisie.

Wyniki

W rezultacie tego rozwiązania otrzymałem 36 zmiennych, które w wyniku optymalizacji funkcji celu przyjmują wartość 1, pozostałe zmienne przyjmują 0. Szczęśliwie się okazuje, że wszystkie zmienne, które finalnie przyjmują wartość 1 mają 4 indeksy, co oznacza, że wszystkie zmienne $h_{r,c}$ oraz $v_{r,c}$ osiągają 0. Zatem optymalną wartością funkcji celu jest 0, co w szczególności może oznaczać, że udało się ułożyć poprawnie puzzle – wszystkie krawędzie są dopasowane. Jedynie może się okazać jeszcze, że kafelki się powtarzają, istnieją pola puste bądź pola, na których znajduje się więcej niż jeden kafelek, bądź szare trójkąciki nie znajdują się na zewnątrz układanki.

Wyniki

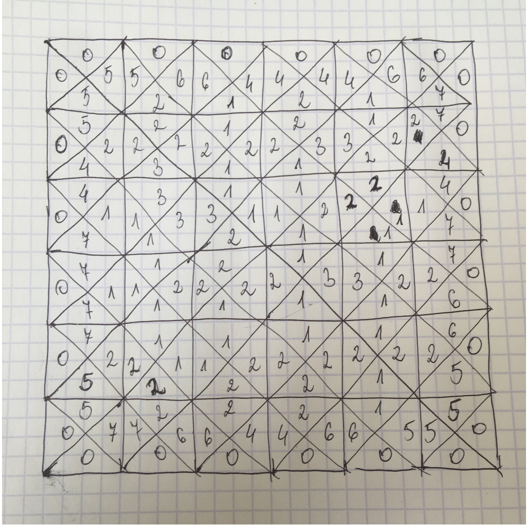
Poniżej przedstawiam indeksy zmiennych, które przyjmują po optymalizacji 1 – są to zmienne $x_{t,r,c,a}$, a więc indeksy wskazują na to, jak kafelki są ułożone w rozwiązanych puzzlach:

(0, 2, 2, 0)	(9, 2, 0, 0)	(18, 5, 2, 0)	(27, 1, 5, 1)
(1, 1, 2, 0)	(10, 2, 1, 1)	(19, 1, 3, 3)	(28, 3, 3, 3)
(2, 1, 0, 3)	(11, 5, 3, 0)	(20, 5, 0, 1)	(29, 1, 4, 0)
(3, 4, 4, 1)	(12, 0, 2, 2)	(21, 0, 5, 1)	(30, 3, 5, 2)
(4, 2, 4, 2)	(13, 3, 0, 0)	(22, 5, 5, 1)	(31, 5, 1, 3)
(5, 4, 2, 2)	(14, 3, 1, 1)	(23, 0, 3, 1)	(32, 1, 1, 2)
(6, 4, 0, 1)	(15, 0, 0, 1)	(24, 4, 3, 2)	(33, 5, 4, 3)
(7, 3, 2, 3)	(16, 2, 3, 1)	(25, 4, 5, 2)	(34, 2, 5, 0)
(8, 3, 4, 1)	(17, 4, 1, 3)	(26, 0, 4, 1)	(35, 0, 1, 2)

Wyniki

- Łatwo zauważyć, że pierwsza współrzędna przyjmuje wszystkie wartości od 0 do 35 oraz są to różne wartości. Czyli tak jak chcieliśmy, dostaliśmy w wyniku 36 kafelków, które są różne.
- Przy odrobinie większym skupieniu zauważamy, że pary złożone z drugiej i trzeciej współrzędnej są parami różne od siebie wartości oraz każda ze współrzędnych przyjmuje wartości od 0 do 5. Te współrzędne to odpowiednio numer wiersza i kolumny w układance, na którym znajduje się t-ty kafelek.
- Ostatnia współrzędna mówi, jak obrócony jest kafelek.

Graficzna postać rozwiązania



Przykładowe inne rozwiązanie