Cesàro zveznost in odvedljivost

Matevž Miščič

2. april 2020

Ponovitev

Funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *je zvezna v točki* $a \in \mathbb{R}$ *natanko tedaj, ko za vsako zaporedje* (a_n), *ki konvergira proti* a, *zaporedje* $(f(a_n))$ *konvergira proti* $f(a)$.

Ponovitev

Funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *je zvezna v točki* $a \in \mathbb{R}$ *natanko tedaj, ko za vsako zaporedje* (a_n)*, ki konvergira proti* a*, zaporedje* $(f(a_n))$ *konvergira proti* $f(a)$*.*

Funkcija f *odvedljiva v* a*, natanko tedaj, ko obstaja število* $L \in \mathbb{R}$*, da za vsako zaporedje* (a_n) *s členi različnimi od* a*, ki konvergira proti* a*, zaporedje* $(\frac{f(x)-f(a_n)}{x-a_n})$ *konvergira proti* L*.*

Vsebina predstavitve

Definicija

Naj bo (a_n) realno zaporedje. Temu zaporedju lahko priredimo novo zaporedje, katerega n-ti člen je enak

$$\overline{a}_n = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}.$$

Temu novemu zaporedju bomo rekli ***zaporedje aritmetičnih sredin*** *zaporedja (a_n) in ga označili z $(\overline{a}_n)$.*

Definicija

Naj bo (a_n) realno zaporedje. Temu zaporedju lahko priredimo novo zaporedje, katerega n-ti člen je enak

$$\overline{a}_n = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}.$$

Temu novemu zaporedju bomo rekli ***zaporedje aritmetičnih sredin*** *zaporedja (a_n) in ga označili z $(\overline{a}_n)$.*

Definicija

Realno zaporedje (a_n) ***Cesàro konvergira****, če konvergira njeno zaporedje aritmetičnih sredin $(\overline{a}_n)$.*

Definicija

Naj bo (a_n) realno zaporedje. Temu zaporedju lahko priredimo novo zaporedje, katerega n-ti člen je enak

$$\bar{a}_n = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}.$$

Temu novemu zaporedju bomo rekli ***zaporedje aritmetičnih sredin*** *zaporedja (a_n) in ga označili z $(\bar{a}_n)$.*

Definicija

Realno zaporedje (a_n) ***Cesàro konvergira****, če konvergira njeno zaporedje aritmetičnih sredin $(\bar{a}_n)$.*

Oznaka

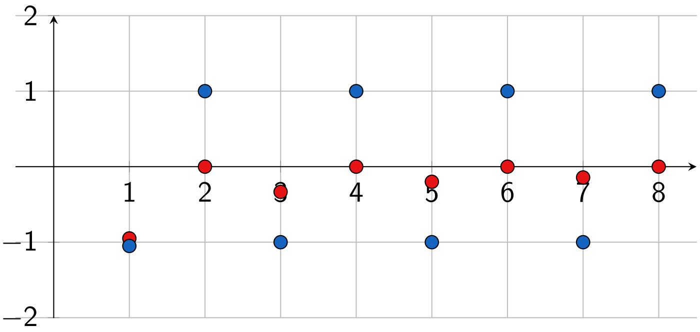
Oznaka $a_n \to a$ naj pomeni, da zaporedje (a_n) konvergira proti a, oznaka $a_n \rightsquigarrow a$ pa, da zaporedje Cesàro konvergira proti a.

Zgled

V prvem letniku smo se pri analizi naučili, da iz $a_n \to a$ *sledi* $a_n \rightsquigarrow a$. *Obratno seveda ne velja, saj zaporedje* $((-1)^n)$ *Cesàro konvergira proti* 0, *ne konvergira pa v običajnem smislu.*

Zgled

V prvem letniku smo se pri analizi naučili, da iz $a_n \to a$ sledi $a_n \rightsquigarrow a$. Obratno seveda ne velja, saj zaporedje $((-1)^n)$ Cesàro konvergira proti 0, ne konvergira pa v običajnem smislu.



Zgled

Naj bo $m \in \mathbb{N}$ *in* $a_1, a_2, \ldots, a_m \in \mathbb{R}$. *Zanima nas, kdaj zaporedje* $a_1, a_2, \ldots, a_m, a_1, a_2, \ldots$ *Cesàro konvergira proti* 0. *Naj bo* $A := a_1 + a_2 + \ldots + a_m$. *Ker za vse* $k \in \mathbb{N}$ *velja* $\overline{a}_{km} = \frac{A}{m}$, *je enakost* $A = 0$ *potreben pogoj za* $a_n \rightsquigarrow 0$. *Naj bo torej* $A = 0$. *Zaporedje delnih vsot zaporedja* (a_n) *je potem periodično, zato je omejeno. Sledi, da zaporedje aritmetičnih sredin konvergira proti* 0. *Torej* (a_n) *Cesàro konvergira proti* 0 *natanko tedaj, ko velja* $A = 0$.

Definicija

Funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je Cesàro zvezna v točki $a \in \mathbb{R}$, če za vsako zaporedje (a_n), ki Cesàro konvergira proti a, zaporedje $(f(a_n))$ Cesàro konvergira proti $f(a)$. Pravimo, da je f zvezna, če je zvezna v vsaki točki $a \in \mathbb{R}$.

Zgled

Pokazati želimo, da je vsaka funkcija oblike $f(x) = Ax + B$, kjer sta $A, B \in \mathbb{R}$, Cesàro zvezna.
Naj bo (a_n) poljubno konvergentno zaporedje in a njegova limita. Zaporedje $(Aa_n + B)$ Cesàro konvergira k $Aa + B = f(a)$, torej je funkcija f res Cesàro zvezna.

Zgled

Pokazati želimo, da je vsaka funkcija oblike $f(x) = Ax + B$*, kjer sta* $A, B \in \mathbb{R}$*, Cesàro zvezna.*
Naj bo (a_n) *poljubno konvergentno zaporedje in* a *njegova limita. Zaporedje* $(Aa_n + B)$ *Cesàro konvergira k* $Aa + B = f(a)$*, torej je funkcija* f *res Cesàro zvezna.*

Zgled

Oglejmo si še primer funkcije, ki ni Cesàro zvezna. Naj bo $f(x) = x^2$ *funkcija. Zaporedje* $((-1)^n)$ *Cesàro konvergira k* 0*, zaporedje* $(f((-1)^n))$ *pa je konstantno enako* 1*, zato Cesàro konvergira k* 1 *in ne k* $f(0) = 0$*. Torej* f *ni Cesàro zvezna v točki* 0*.*

Izrek

Naj bo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcija. Naslednje trditve so ekvivalentne.

1. *Funkcija f je Cesàro zvezna v točki 0.*
2. *Funkcija f je Cesàro zvezna.*
3. *Funkcija f je oblike $f(x) = Ax + B$ za neki realni števili $A, B \in \mathbb{R}$.*

Če je funkcija f Cesàro zvezna v točki 0, je oblike $f(x) = Ax + B$ za neki realni števili $A, B \in \mathbb{R}$.

Dokaz.

$(1) \Rightarrow (3)$: Naj bo funkcija $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definirana s predpisom $g(x) = f(x) - f(0)$. Potem je g Cesàro zvezna v točki 0 in velja $g(0) = 0$. Pokazali bomo, da je g aditivna.
Naj bo $a \in \mathbb{R}$ poljubno realno število. Ker velja

$$a, -a, a, -a, a, \ldots \rightsquigarrow 0$$

in je g Cesaro zvezna v 0 velja

$$g(a), g(-a), g(a), g(-a), \ldots \rightsquigarrow g(0) = 0.$$

Potem mora veljati $g(a) + g(-a) = 0$ oziroma $g(-a) = -g(a)$. $\square$

Če je funkcija f Cesàro zvezna v točki 0, je oblike $f(x) = Ax + B$ za neki realni števili $A, B \in \mathbb{R}$.

Dokaz.

Naj bosta zdaj $b, c \in \mathbb{R}$ poljubni realni števili. Spet vidimo, da velja

$$b, c, -(b+c), b, c, -(b+c), \ldots \rightsquigarrow 0,$$

zato tudi zaporedje

$$g(b), g(c), g(-(b+c)), g(b), \ldots \rightsquigarrow 0.$$

Sledi $g(b) + g(c) + g(-(b+c)) = 0$ oziroma $-(g(b) + g(c)) = g(-(b+c))$. Upoštevamo še, da je velja $g(-a) = -g(a)$ za vsak $a \in \mathbb{R}$ in dobimo $g(b) + g(c) = g(b+c)$. Torej je g aditivna. $\square$

Če je funkcija f Cesàro zvezna v točki 0, je oblike $f(x) = Ax + B$ za neki realni števili $A, B \in \mathbb{R}$.

Dokaz.

Naslednji cilj je pokazati, da velja $g(\lambda x) = \lambda g(x)$ za vse $\lambda \in \mathbb{Q}$ in $x \in \mathbb{R}$. Za primer, ko je $\lambda \in \mathbb{N}$, to sledi neposredno iz aditivnosti. Ker velja tudi $g(0) = 0$ in $g(-a) = -g(a)$, to velja celo za vse $\lambda \in \mathbb{Z}$.

Naj bo zdaj $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ poljubno racionalno število. Velja

$$mg(x) = g(mx) = g(n\frac{m}{n}x) = ng(\frac{m}{n}x)$$

oziroma

$$\frac{m}{n}g(x) = g(\frac{m}{n}x),$$

kar smo želeli dokazati. $\square$

Če je funkcija f Cesàro zvezna v točki 0, je oblike $f(x) = Ax + B$ za neki realni števili $A, B \in \mathbb{R}$.

Dokaz.

Pokažimo zdaj, da je g zvezna. Naj bo (x_n) poljubno zaporedje, da je $x_n \to 0$. Poiščimo zaporedje (y_n), katerega zaporedje aritmetičnih sredin je enako (x_n). Očitno mora biti $y_1 = x_1$. Denimo, da smo že definirali $y_1, \ldots, y_n$ in da velja $x_k = \overline{y}_k$ za vse $k \leq n$. Da bo veljalo tudi $x_{n+1} = \overline{y}_{n+1}$ oziroma

$$x_{n+1} = \frac{y_1 + \ldots + y_{n+1}}{n+1},$$

moramo vzeti $y_{n+1} = (n+1)x_{n+1} - (y_1 + \ldots + y_n)$.
Tako definirano zaporedje (y_n) res zadošča $x_n = \overline{y}_n$ za vse $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Če je funkcija f Cesàro zvezna v točki 0, je oblike $f(x) = Ax + B$ za neki realni števili $A, B \in \mathbb{R}$.

Dokaz.

Tako definirano zaporedje (y_n) res zadošča $x_n = \overline{y}_n$ za vse $n \in \mathbb{N}$. Ker je $x_n \to 0$, je $y_n \rightsquigarrow 0$ po definiciji, zato iz Cesàro zveznosti funkcije g v 0 sledi $g(y_n) \rightsquigarrow g(0) = 0$. Iz tega, kar smo pokazali v prejšnjih odstavkih, potem sledi

$$g(x_n) = g(\overline{y}_n) = g(\frac{y_1 + \ldots + y_n}{n}) = \frac{g(y_1) + \ldots + g(y_n)}{n} \to 0.$$

Torej je g zvezna v 0. Ker je $g(x_0 + x) = g(x_0) + g(x)$, je zvezna tudi v vsaki drugi točki $x_0 \in \mathbb{R}$. $\square$

Če je funkcija f Cesàro zvezna v točki 0, je oblike $f(x) = Ax + B$ za neki realni števili $A, B \in \mathbb{R}$.

Dokaz.

Naj bo $A = g(1)$. Zvezni funkciji g in $x \mapsto Ax$ se ujemata na $\mathbb{Q}$, ki je gosta podmnožica v $\mathbb{R}$, torej sta enaki. Če vzamemo $B = f(0)$, velja $f(x) = Ax + B$ za vse $x \in \mathbb{R}$. S tem je implikacija dokazana.

Če je funkcija f Cesàro zvezna v točki 0, je oblike $f(x) = Ax + B$ za neki realni števili $A, B \in \mathbb{R}$.

Dokaz.

Naj bo $A = g(1)$. Zvezni funkciji g in $x \mapsto Ax$ se ujemata na $\mathbb{Q}$, ki je gosta podmnožica v $\mathbb{R}$, torej sta enaki. Če vzamemo $B = f(0)$, velja $f(x) = Ax + B$ za vse $x \in \mathbb{R}$. S tem je implikacija dokazana.
$(3) \Rightarrow (2)$: To smo pokazali v zgornjem zgledu.

Če je funkcija f Cesàro zvezna v točki 0, je oblike $f(x) = Ax + B$ za neki realni števili $A, B \in \mathbb{R}$.

Dokaz.

Naj bo $A = g(1)$. Zvezni funkciji g in $x \mapsto Ax$ se ujemata na $\mathbb{Q}$, ki je gosta podmnožica v $\mathbb{R}$, torej sta enaki. Če vzamemo $B = f(0)$, velja $f(x) = Ax + B$ za vse $x \in \mathbb{R}$. S tem je implikacija dokazana. $(3) \Rightarrow (2)$: To smo pokazali v zgornjem zgledu. $(2) \Rightarrow (1)$: Če je

f Cesàro zvezna, je po definiciji Cesàro zvezna tudi v točki 0. □

Definicija

Funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *je Cesàro odvedljiva v točki* $a \in \mathbb{R}$*, če obstaja število* $f'(a) \in \mathbb{R}$*, da za vsako zaporedje* (a_n) *s členi različnimi od* a*, ki Cesàro konvergira proti* a*, zaporedje diferenčnih kvocientov*

$$(\frac{f(a_n) - f(a)}{a_n - a})$$

Cesàro konvergira proti $f'(a)$*.*

Definicija

Funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *je Cesàro odvedljiva v točki* $a \in \mathbb{R}$*, če obstaja število* $f'(a) \in \mathbb{R}$*, da za vsako zaporedje* (a_n) *s členi različnimi od* a*, ki Cesàro konvergira proti* a*, zaporedje diferenčnih kvocientov*

$$\left(\frac{f(a_n) - f(a)}{a_n - a}\right)$$

Cesàro konvergira proti $f'(a)$*. Številu* $f'(a)$ *v takem primeru rečemo Cesàro odvod funkcije* f *v točki* a*.*

Definicija

Funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je Cesàro odvedljiva v točki $a \in \mathbb{R}$, če obstaja število $f'(a) \in \mathbb{R}$, da za vsako zaporedje (a_n) s členi različnimi od a, ki Cesàro konvergira proti a, zaporedje diferenčnih kvocientov

$$\left(\frac{f(a_n) - f(a)}{a_n - a}\right)$$

Cesàro konvergira proti $f'(a)$. Številu $f'(a)$ v takem primeru rečemo Cesàro odvod funkcije f v točki a. Pravimo, da je f odvedljiva, če je odvedljiva v vsaki točki $a \in \mathbb{R}$.

Zgled

Naj bo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcija oblike $f(x) = Ax^2 + Bx + C$ za neke $A, B, C \in \mathbb{R}$. Naj bo (a_n) poljubno Cesàro konvergentno zaporedje s Cesàro limito a, ki ima vse člene različne od a. Velja

$$\begin{aligned}\frac{f(a_n) - f(a)}{a_n - a} &= \frac{(Aa_n^2 + Ba_n + C) - (Aa^2 + Ba + C)}{a_n - a} \\ &= \frac{A(a_n - a)(a_n + a) + B(a_n - a)}{a_n - a} \\ &= A(a_n + a) + B \rightsquigarrow 2Aa + B,\end{aligned}$$

torej je f Cesàro odvedljiva in je $2Ax + B$ njen Cesàro odvod.

Zgled

Naj bo zdaj $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcija s predpisom $f(x) = x^3$. Velja

$$(-1)^n \rightsquigarrow 0,$$

ampak

$$\frac{(-1)^3 - 0^3}{(-1) - 0} = 1 \rightsquigarrow 1 \neq 0 = f(0).$$

Torej f ni Cesàro odvedljiva v točki 0.

Lema

Naj bo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *funkcija. Naj za vsako zaporedje* (a_n) *s členi različnimi od* 0*, ki Cesàro konvergira proti* 0*, velja* $f(a_n) \rightsquigarrow f(0)$*. Potem je* f *Cesàro zvezna v točki* 0*.*

Izrek

Naj bo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *funkcija. Naslednje trditve so ekvivalentne.*

1. *Funkcija* f *je Cesàro odvedljiva v točki* 0*.*
2. *Funkcija* f *je Cesàro odvedljiva.*
3. *Funkcija* f *je oblike* $f(x) = Ax^2 + Bx + C$ *za neka realna števila* $A, B, C \in \mathbb{R}$*.*

Literatura

J. A. Hocutt in P. L. Robinson, *Everywhere Differentiable, Nowhere Continuous Functions*, Amer. Math. Monthly **125** (2018) 923–928.

P. R. Halmos, *Problems for Mathematicians, Young and Old*, Dolciani Mathematical Expositions **12**, Mathematical Association of America, Washington, 1991.