Cesaro zveznost in odvedljivost
Seminar

Matevž Miščič

2. april 2020

Uvod

V prvem letniku smo spoznali, kako lahko zveznost funkcije v neki točki karakteriziramo z zaporedji. Funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je zvezna v točki $a \in \mathbb{R}$ natanko tedaj, ko za vsako zaporedje (a_n), ki konvergira proti a, zaporedje $(f(a_n))$ konvergira proti $f(a)$. Podobno lahko z zaporedji karakteriziramo funkcijsko limito: število $L \in \mathbb{R}$ je limita funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ v točki $a \in \mathbb{R}$ natanko tedaj, ko za vsako zaporedje (a_n) s členi različnimi od a, ki konvergira proti a, zaporedje $(f(a_n))$ konvergira proti L. Po definiciji funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ odvedljiva v a, če obstaja limita

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

v tem primeru tej limiti pravimo odvod funkcije f v točki a. Ker funkcijsko limito znamo opisati z zaporedji, lahko rečemo, da je f odvedljiva v a, natanko tedaj, ko obstaja število $L \in \mathbb{R}$, da za vsako zaporedje (a_n) s členi različnimi od a, ki konvergira proti a, zaporedje $(\frac{f(x)-f(a_n)}{x-a_n})$ konvergira proti L. Sedaj smo uspeli pojma zveznosti in odvedljivosti funkcije opisati samo s pojmom konvergence zaporedja. Če bi znali tudi kako drugače definirati, kdaj dano zaporedje konvergira, bi dobili drugačni definiciji zveznosti in odvedljivosti. Točno s tem se bomo ukvarjali v tej predstavitvi. Najprej se bomo naučili, kaj je to Cesaro konvergenca zaporedja, s pomočjo tega bomo dobili novi definiciji zveznosti in odvedljivosti, nato pa bomo ugotovili katere funkcije so zvezne oziroma odvedljive po tej novi definiciji.

1 Cesaro konvergenca

Naj bo (a_n) realno zaporedje. Temu zaporedju lahko priredimo novo zaporedje, katerega n-ti člen je enak $\overline{a}_n = \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}$. Temu novemu zaporedju bomo rekli zaporedje aritmetičnih sredin zaporedja (a_n) in ga označili z $(\overline{a}_n)$.

Definicija 1. Realno zaporedje (a_n) Cesaro konvergira, če konvergira njeno zaporedje aritmetičnih sredin $(\overline{a}_n)$.

Oznaka $a_n \to a$ naj pomeni, da zaporedje (a_n) konvergira proti a, oznaka $a_n \rightsquigarrow a$ pa, da zaporedje Cesaro konvergira proti a.

V prvem letniku smo se pri analizi naučili, da iz $a_n \to a$ sledi $a_n \rightsquigarrow a$. Obratno seveda ne velja, saj zaporedje $((-1)^n)$ Cesaro konvergira proti 0, ne konvergira pa v običajnem smislu. Ker je pojem Cesaro konvergence zelo pomemben za nadaljevanje, si oglejmo še nekaj primerov.

Primeri

1. Poiščimo primer omejenega zaporedja, ki ni Cesaro konvergentno. Prvi člen naj bo enak 2. Naslednjih nekaj členov bo enakih -2. Takih členov mora biti dovolj, da bo aritmetična sredina padla pod -1. Nato spet dodajmo dovolj členov enakih 2, da bo aritmetična sredina narasla nad 1. S ponavljanjem take konstrukcije dobimo omejeno zaporedje, ki ni Cesaro konvergentno, saj zaporedje aritmetičnih sredin nekako oscilira med -1 in 1.

2. Naj bo $m \in \mathbb{N}$ in $a_1, a_2, \ldots, a_m \in \mathbb{R}$. Zanima nas, kdaj zaporedje $a_1, a_2, \ldots, a_m, a_1, a_2, \ldots$ Cesaro konvergira proti 0. Naj bo $A := a_1 + a_2 + \ldots + a_m$. Ker za vse $k \in \mathbb{N}$ velja $\overline{a}_{km} = A$, je enakost $A = 0$ potreben pogoj za $a_n \rightsquigarrow 0$. Naj bo torej $A = 0$. Zaporedje delnih vsot zaporedja (a_n) je potem periodično, zato je omejeno. Sledi, da zaporedje aritmetičnih sredin konvergira proti 0. Torej (a_n) konvergira proti 0 natanko tedaj, ko velja $A = 0$.

2 Cesaro zveznost

Sedaj se lahko končno lotimo Cesaro zveznosti.

Definicija 2. Funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je Cesaro zvezna v točki $a \in \mathbb{R}$, če za vsako zaporedje (a_n), ki Cesaro konvergira proti a, zaporedje $(f(a_n))$ Cesaro konvergira proti $f(a)$. Pravimo, da je f zvezna, če je zvezna v vsaki točki $a \in \mathbb{R}$.

Da si bomo lažje predstavljali, katere funkcije so Cesaro zvezne, si najprej oglejmo kakšen primer.

Primeri

1. Pokazati želimo, da je vsaka funkcija oblike $f(x) = Ax + B$, kjer sta $A, B \in \mathbb{R}$, Cesaro zvezna. Naj bo (a_n) poljubno konvergentno zaporedje in a njegova limita. Zaporedje $(Aa_n + B)$ Cesaro konvergira k $Aa + B = f(a)$, torej je funkcija f res Cesaro zvezna.

2. Oglejmo si še primer funkcije, ki ni Cesaro zvezna. Naj bo $f(x) = x^2$ funkcija. Zaporedje $((-1)^n)$ Cesaro konvergira k 0, zaporedje $(f((-1)^n))$ pa je konstantno enako 1, zato Cesaro konvergira k 1 in ne k $f(0) = 0$. Torej f ni Cesaro zvezna v točki 0.

Kot smo ugotovili, je vsaka funkcija oblike $f(x) = Ax + B$ Cesaro zvezna. Izkaže se, da so to tudi vse Cesaro zvezne funkcije.

Izrek 1. *Naj bo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcija. Naslednje trditve so ekvivalentne.*

1. *Funkcija f je Cesaro zvezna v točki* 0.
2. *Funkcija f je Cesaro zvezna.*
3. *Funkcija f je oblike $f(x) = Ax + B$ za neki realni števili $A, B \in \mathbb{R}$.*

Dokaz. (1) $\Rightarrow$ (3) : Naj bo funkcija $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definirana s predpisom $g(x) = f(x) - f(0)$. Potem je g Cesaro zvezna v točki 0 in velja $g(0) = 0$. Naj bo $a \in \mathbb{R}$ poljubno realno število. Ker zaporedje $a, -a, a, -a, a, \ldots$ Cesaro konvergira proti 0 in je g Cesaro zvezna v 0, zaporedje $g(a), g(-a), g(a), g(-a), \ldots$ Cesaro konvergira proti $g(0) = 0$. Potem mora veljati $g(a) + g(-a) = 0$ oziroma $g(-a) = -g(a)$. Naj bosta zdaj $b, c \in \mathbb{R}$ poljubni realni števili. Spet zaporedje $b, c, -(b+c), b, c, -(b+c), \ldots$ Cesaro konvergira k 0, zato zaporedje $g(b), g(c), g(-(b+c)), g(b), \ldots$ Cesaro konvergira proti $g(0) = 0$. Sledi $g(b) + g(c) + g(-(b + c)) = 0$ oziroma $-(g(b) + g(c)) = g(-(b + c))$. Upoštevamo še, da je velja $g(-a) = -g(a)$ za vsak $a \in \mathbb{R}$ in dobimo $g(b) + g(c) = g(b + c)$. Torej je g aditivna.

Naslednji cilj je pokazati, da velja $g(\lambda x) = \lambda g(x)$ za vse $\lambda \in \mathbb{Q}$ in $x \in \mathbb{R}$. Za primer ko je $\lambda \in \mathbb{N}$ to sledi neposredno iz aditivnosti. Ker velja tudi $g(0) = 0$ in $g(-a) = -g(a)$, to velja celo za vse $\lambda \in \mathbb{Z}$. Naj bo zdaj $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ poljubno racionalno število. Velja $mg(x) = g(mx) = g(n\frac{m}{n}x) = ng(\frac{m}{n}x)$ oziroma $\frac{m}{n}g(x) = g(\frac{m}{n}x)$, kar smo želeli dokazati.

Pokažimo zdaj, da je g zvezna. Naj bo (x_n) poljubno zaporedje, da je $x_n \to 0$. Poiščimo zaporedje (y_n), katerega zaporedje aritmetičnih sredin je enako (x_n). Očitno mora biti $y_1 = x_1$. Denimo, da smo že definirali $y_1, \ldots, y_n$ in da velja $x_k = \overline{y}_k$ za vse $k \leq n$. Da bo veljalo tudi $x_{n+1} = \overline{y}_{n+1}$ oziroma $x_{n+1} = \frac{y_1 + \ldots + y_{n+1}}{n+1}$, moramo vzeti $y_{n+1} = (n + 1)x_{n+1} - (y_1 + \ldots + y_n)$. Tako definirano zaporedje (y_n) res zadošča $x_n = \overline{y}_n$ za vse $n \in \mathbb{N}$. Ker je $x_n \to 0$, je $y_n \rightsquigarrow 0$ po definiciji, zato iz Cesaro zveznosti funkcije g v 0 sledi $g(y_n) \rightsquigarrow g(0) = 0$. Iz tega, kar smo pokazali v prejšnjih odstavkih, sledi

$$g(x_n) = g(\overline{y}_n) = g(\frac{y_1 + \ldots + y_n}{n}) = \frac{g(y_1) + \ldots + g(y_n)}{n} \to 0.$$

Torej je g zvezna v 0. Ker je $g(x_0 + x) = g(x_0) + g(x)$, je zvezna tudi v vsaki drugi točki $x_0 \in \mathbb{R}$.

Naj bo $A = g(1)$. Zvezni funkciji g in $x \mapsto Ax$ se ujemata na $\mathbb{Q}$, ki je gosta podmnožica v $\mathbb{R}$, torej sta enaki. Če vzamemo $B = f(0)$, velja $f(x) = Ax + B$ za vse $x \in \mathbb{R}$. S tem je implikacija dokazana.

(3) $\Rightarrow$ (2) : To smo pokazali v zgornjem zgledu.

(2) $\Rightarrow$ (1) : Če je f Cesaro zvezna, je po definiciji Cesaro zvezna tudi v točki 0. $\square$

3 Cesaro odvedljivost

Definicija 3. Funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je Cesaro odvedljiva v točki $a \in \mathbb{R}$, če obstaja število $f'(a) \in \mathbb{R}$, da za vsako zaporedje (a_n) s členi različnimi od a, ki Cesaro konvergira proti a, zaporedje diferenčnih kvocientov $(\frac{f(a_n)-f(a)}{a_n-a})$ Cesaro konvergira proti $f'(a)$. Številu $f'(a)$ v takem primeru rečemo Cesaro odvod funkcije f v točki a. Pravimo, da je f odvedljiva, če je odvedljiva v vsaki točki $a \in \mathbb{R}$.

Oglejmo si nekaj primerov funkcij in poskusimo ugotoviti, če so Cesaro odvedljive.

Primeri

1. Naj bo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcija oblike $f(x) = Ax^2 + Bx + C$ za neke $A, B, C \in \mathbb{R}$. Naj bo (a_n) poljubno Cesaro konvergentno zaporedje s Cesaro limito a. Velja

$$\begin{aligned} \frac{f(a_n) - f(a)}{a_n - a} &= \frac{(Aa_n^2 + Ba_n + C) - (Aa^2 + Ba + C)}{a_n - a} \\ &= \frac{A(a_n - a)(a_n + a) + B(a_n - a)}{a_n - a} \\ &= A(a_n + a) + B \rightsquigarrow 2Aa + B, \end{aligned}$$

   torej je f Cesaro odvedljiva in je $2Ax + B$ njen Cesaro odvod. Opazimo lahko, da je Cesaro odvod enak odvodu.

2. Naj bo zdaj $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcija s predpisom $f(x) = x^3$. Velja $(-1)^n \rightsquigarrow 0$, ampak

$$\frac{(-1)^3 - 0^3}{(-1) - 0} = 1 \rightsquigarrow 1 \neq 0 = f(0).$$

   Torej f ni Cesaro odvedljiva v točki 0.

Vemo že, da je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zvezna v točki $a \in \mathbb{R}$ natanko tedaj, ko obstaja limita f v točki a in je ta limita enaka $f(a)$. Podobno velja tudi za Cesaro zveznost, kar nam pove naslednja lema.

Lema 1. *Naj bo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcija. Naj za vsako zaporedje (a_n) s členi različnimi od 0, ki Cesaro konvergira proti 0, velja $f(a_n) \rightsquigarrow f(0)$. Potem je f Cesaro zvezna v točki 0.*

Dokaz. Predpostaviti smemo, da velja $f(0) = 0$. Podobno kot pri dokazu izreka lahko dokažemo, da velja $f(a + b) = f(a) + f(b)$ za neničelna $a, b \in \mathbb{R}$. Če je katero od obeh števil enako 0, pa to velja trivialno. Torej je f aditivna.

Naj bo (a_n) poljubno zaporedje, za katero velja $a_n \rightsquigarrow 0$. Pokazati želimo, da velja $f(a_n) \rightsquigarrow f(0) = 0$. To bomo storili tako, da bomo skonstruirali zaporedje (b_n) s členi različnimi od 0, ki se bo malo razlikovalo od zaporedja (a_n), tako da bo veljalo $a_n - b_n \rightsquigarrow 0$ in $f(a_n) - f(b_n) \rightsquigarrow 0$.

Ker je množica $\mathbb{R}$ neštevna, množica $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{-a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ pa števna, lahko izberemo $\delta \in \mathbb{R}$, da za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja $\delta \neq a_n$ in $\delta \neq -a_n$. Definirajmo $b_n = a_n + (-1)^n\delta$. Za vse $n \in \mathbb{N}$ je $b_n \neq 0$, torej je (b_n) zaporedje z neničelnimi členi. Če je n sod, velja $b_1 + \ldots + b_n = a_1 + \ldots a_n$, če je n lih, pa je $b_1 + \ldots + b_n = a_1 + \ldots a_n - \delta$. Od tod sledi

$$\overline{a}_n - \overline{b}_n = \begin{cases} 0; & n \text{ sod} \\ \frac{\delta}{n}; & n \text{ lih}, \end{cases}$$

torej je $\overline{a}_n - \overline{b}_n \to 0$. Ker zaporedje $(\overline{a}_n)$ konvergira k 0, enako velja za zaporedje $(\overline{b}_n)$, to pa lahko drugače zapišemo kot $b_n \rightsquigarrow 0$.

Zaradi aditivnosti f velja $f(b_n) = f(a_n + (-1)^n\delta) = f(a_n) + f((-1)^n\delta) = f(a_n) + (-1)^n f(\delta)$. Za sod n potem velja $f(b_1) + \ldots + f(b_n) = f(a_1) + \ldots f(a_n)$, za lih n pa $f(b_1) + \ldots + f(b_n) = f(a_1) + \ldots f(a_n) - f(\delta)$. Podobno kot prej sledi

$$\overline{f(a_n)} - \overline{f(b_n)} = \begin{cases} 0; & n \text{ sod} \\ \frac{f(\delta)}{n}; & n \text{ lih}, \end{cases}$$

torej je $\overline{f(a_n)} - \overline{f(b_n)} \to 0$ oziroma $f(a_n) - f(b_n) \rightsquigarrow 0$.

Pokazali smo že, da zaporedje (b_n) Cesaro konvergira k 0, ker pa ima le neničelne člene, po predpostavki velja $f(b_n) \rightsquigarrow f(0) = 0$. Ker velja tudi $f(a_n) - f(b_n) \rightsquigarrow 0$, lahko zaključimo, da $(f(a_n))$ cesaro konvergira k 0, torej je f res Cesaro zvezna v točki 0. □

Izrek 2. *Naj bo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcija. Naslednje trditve so ekvivalentne.*

1. *Funkcija f je Cesaro odvedljiva v točki 0.*
2. *Funkcija f je Cesaro odvedljiva.*
3. *Funkcija f je oblike $f(x) = Ax^2 + Bx + C$ za neka realna števila $A, B, C \in \mathbb{R}$.*

Dokaz. (1) $\Rightarrow$ (3) : Definiramo funkcijo : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s predpisom

$$g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(0)}{x}; & x \neq 0 \\ f'(0); & x = 0. \end{cases}$$

Naj bo (a_n) zaporedje s členi različnimi od 0, da velja $a_n \rightsquigarrow 0$. Potem velja

$$g(a_n) = \frac{f(a_n) - f(0)}{a_n - 0} \rightsquigarrow f'(0) = g(0),$$

po definiciji Cesaro odvoda f v točki 0. Po lemi je g Cesaro zvezna v točki 0, zato je po izreku oblike $g(x) = Ax + B$ za neka $A, B \in \mathbb{R}$. Potem pa je $f(x) = xg(x) + f(0) = Ax^2 + Bx + C$ za $C = f(0)$.

(3) $\Rightarrow$ (2) : To smo pokazali v zgornjem zgledu.

(2) $\Rightarrow$ (1) : Če je f Cesaro odvedljiva, je po definiciji Cesaro odvedljiva tudi v točki 0. $\square$

Končno smo klasificirali Cesaro zvezne in Cesaro odvedljive funkcije. Opazimo, da obstajajo funkcije, ki so Cesaro odvedljive, ampak niso Cesaro zvezne. Takšna funkcije je na primer $x \mapsto x^2$. To je presenetljivo, saj vemo, da za funkcije iz odvedljivosti sledi zveznost. Pri Cesaro zveznih in Cesaro odvedljivih funkcijah pa temu ni tako.

Angleško-slovenski slovar strokovnih izrazov

convergence konvergenca
continuity zveznost
differentiability odvedljivost

Literatura

[1] J. A. Hocutt in P. L. Robinson, *Everywhere Differentiable, Nowhere Continuous Functions*, Amer. Math. Monthly **125** (2018) 923–928.

[2] P. R. Halmos, *Problems for Mathematicians, Young and Old*, Dolciani Mathematical Expositions **12**, Mathematical Association of America, Washington, 1991.