Cesàro zveznost in odvedljivost

Matevž Miščič
Fakulteta za matematiko in fiziko
Oddelek za matematiko

2. april 2021

Ponovitev

Funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *je zvezna v točki* $a \in \mathbb{R}$ *natanko tedaj, ko za vsako zaporedje* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, *ki konvergira proti* a, *zaporedje* $(f(a_n))_{n=1}^{\infty}$ *konvergira proti* $f(a)$.

Ponovitev

Funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *je zvezna v točki* $a \in \mathbb{R}$ *natanko tedaj, ko za vsako zaporedje* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$*, ki konvergira proti* a*, zaporedje* $(f(a_n))_{n=1}^{\infty}$ *konvergira proti* $f(a)$*.*

Funkcija f *odvedljiva v* a*, natanko tedaj, ko obstaja število* $L \in \mathbb{R}$*, da za vsako zaporedje* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *s členi različnimi od* a*, ki konvergira proti* a*, zaporedje* $\left(\frac{f(a_n)-f(a)}{a_n-a}\right)_{n=1}^{\infty}$ *konvergira proti* L*.*

Vsebina predstavitve

Definicija

Naj bo $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *realno zaporedje. Temu zaporedju lahko priredimo novo zaporedje, katerega n-ti člen je enak*

$$\overline{a}_n = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}.$$

Temu novemu zaporedju bomo rekli ***zaporedje aritmetičnih sredin*** *zaporedja* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *in ga označili z* $(\overline{a}_n)_{n=1}^{\infty}$.

Definicija

Naj bo $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ realno zaporedje. Temu zaporedju lahko priredimo novo zaporedje, katerega n-ti člen je enak

$$\overline{a}_n = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}.$$

*Temu novemu zaporedju bomo rekli **zaporedje aritmetičnih sredin** zaporedja $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ in ga označili z $(\overline{a}_n)_{n=1}^{\infty}$.*

Definicija

*Realno zaporedje $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ **Cesàro konvergira**, če konvergira njegovo zaporedje aritmetičnih sredin $(\overline{a}_n)_{n=1}^{\infty}$.*

Definicija

Naj bo $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *realno zaporedje. Temu zaporedju lahko priredimo novo zaporedje, katerega n-ti člen je enak*

$$\overline{a}_n = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}.$$

Temu novemu zaporedju bomo rekli ***zaporedje aritmetičnih sredin*** *zaporedja* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *in ga označili z* $(\overline{a}_n)_{n=1}^{\infty}$.

Definicija

Realno zaporedje $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ ***Cesàro konvergira****, če konvergira njegovo zaporedje aritmetičnih sredin* $(\overline{a}_n)_{n=1}^{\infty}$.

Oznaka

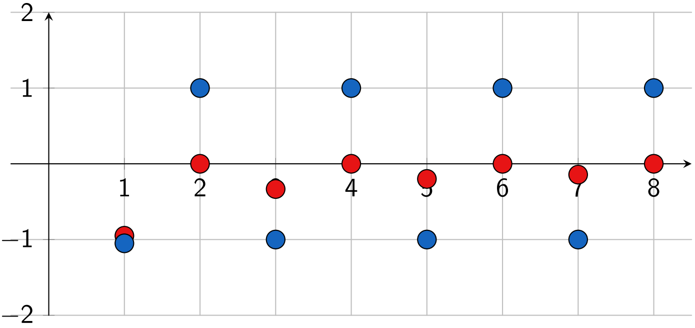
Oznaka $a_n \to a$ *naj pomeni, da zaporedje* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *konvergira proti a, oznaka* $a_n \rightsquigarrow a$ *pa, da zaporedje Cesàro konvergira proti a.*

Zgled

V prvem letniku smo se pri analizi naučili, da iz $a_n \to a$ sledi $a_n \rightsquigarrow a$. Obratno seveda ne velja, saj zaporedje $((-1)^n)_{n=1}^{\infty}$ Cesàro konvergira proti 0, ne konvergira pa v običajnem smislu.

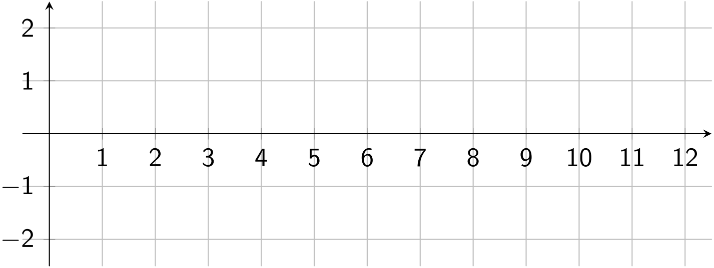
Zgled

V prvem letniku smo se pri analizi naučili, da iz $a_n \to a$ sledi $a_n \rightsquigarrow a$. Obratno seveda ne velja, saj zaporedje $((-1)^n)_{n=1}^{\infty}$ Cesàro konvergira proti 0, ne konvergira pa v običajnem smislu.



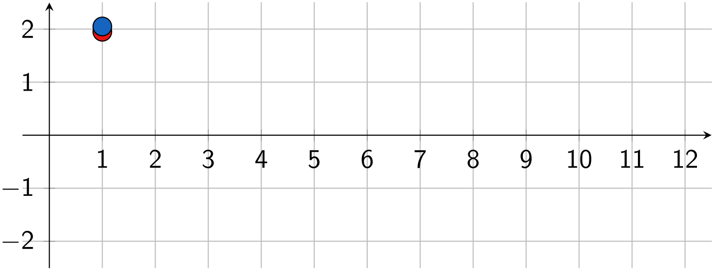
Zgled

Poiščimo primer omejenega zaporedja, ki ni Cesàro konvergentno.



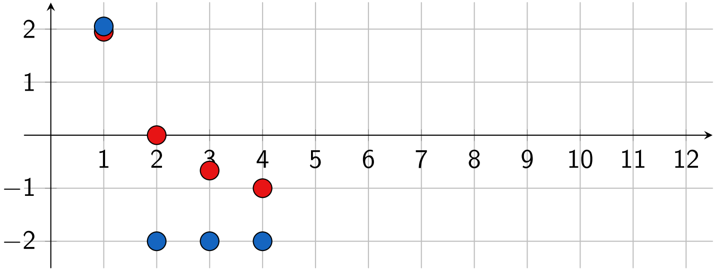
Zgled

Poiščimo primer omejenega zaporedja, ki ni Cesàro konvergentno. Prvi člen naj bo enak 2.



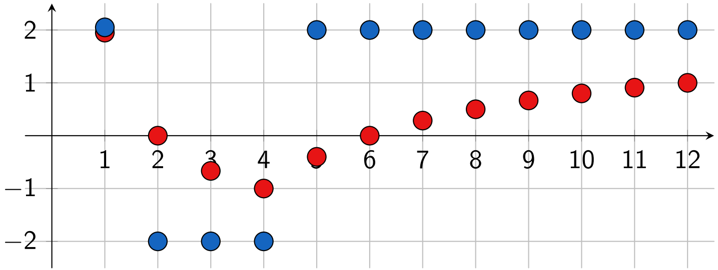
Zgled

Poiščimo primer omejenega zaporedja, ki ni Cesàro konvergentno. Prvi člen naj bo enak 2. Naslednjih nekaj členov bo enakih -2. Takih členov mora biti dovolj, da bo aritmetična sredina padla pod -1.



Zgled

Poiščimo primer omejenega zaporedja, ki ni Cesàro konvergentno. Prvi člen naj bo enak 2*. Naslednjih nekaj členov bo enakih* -2*. Takih členov mora biti dovolj, da bo aritmetična sredina padla pod* -1*. Nato spet dodajmo dovolj členov enakih* 2*, da bo aritmetična sredina narasla nad* 1*.*



Zgled

Naj bo $m \in \mathbb{N}$ *in* $a_1, a_2, \ldots, a_m \in \mathbb{R}$. *Zanima nas, kdaj zaporedje* $a_1, a_2, \ldots, a_m, a_1, a_2, \ldots$ *Cesàro konvergira proti* 0.

Zgled

Naj bo $m \in \mathbb{N}$ *in* $a_1, a_2, \ldots, a_m \in \mathbb{R}$*. Zanima nas, kdaj zaporedje* $a_1, a_2, \ldots, a_m, a_1, a_2, \ldots$ *Cesàro konvergira proti* 0*.*

Naj bo $A := a_1 + a_2 + \ldots + a_m$*. Ker za vse* $k \in \mathbb{N}$ *velja* $\overline{a}_{km} = \frac{A}{m}$*, je enakost* $A = 0$ *potreben pogoj za* $a_n \rightsquigarrow 0$*.*

Zgled

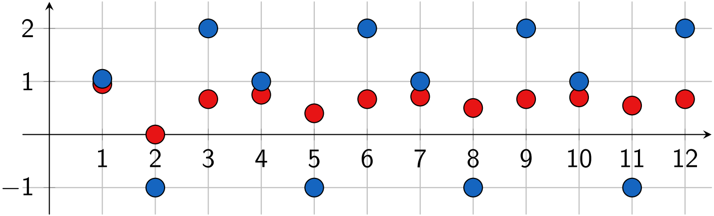
Naj bo $m \in \mathbb{N}$ *in* $a_1, a_2, \ldots, a_m \in \mathbb{R}$*. Zanima nas, kdaj zaporedje* $a_1, a_2, \ldots, a_m, a_1, a_2, \ldots$ *Cesàro konvergira proti* 0*.*

Naj bo $A := a_1 + a_2 + \ldots + a_m$*. Ker za vse* $k \in \mathbb{N}$ *velja* $\overline{a}_{km} = \frac{A}{m}$*, je enakost* $A = 0$ *potreben pogoj za* $a_n \rightsquigarrow 0$*.*
Naj bo torej $A = 0$*. Zaporedje delnih vsot zaporedja* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *je potem periodično, zato je omejeno. Sledi, da zaporedje aritmetičnih sredin konvergira proti* 0*.*

Zgled

Naj bo $m \in \mathbb{N}$ *in* $a_1, a_2, \ldots, a_m \in \mathbb{R}$. *Zanima nas, kdaj zaporedje* $a_1, a_2, \ldots, a_m, a_1, a_2, \ldots$ *Cesàro konvergira proti* 0.

Naj bo $A := a_1 + a_2 + \ldots + a_m$. *Ker za vse* $k \in \mathbb{N}$ *velja* $\overline{a}_{km} = \frac{A}{m}$, *je enakost* $A = 0$ *potreben pogoj za* $a_n \rightsquigarrow 0$.
Naj bo torej $A = 0$. *Zaporedje delnih vsot zaporedja* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *je potem periodično, zato je omejeno. Sledi, da zaporedje aritmetičnih sredin konvergira proti* 0.
Torej $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *Cesàro konvergira proti* 0 *natanko tedaj, ko velja* $A = 0$.



Definicija

Funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je ***Cesàro zvezna v točki*** *$a \in \mathbb{R}$, če za vsako zaporedje $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, ki Cesàro konvergira proti a, zaporedje $(f(a_n))_{n=1}^{\infty}$ Cesàro konvergira proti $f(a)$.*
Pravimo, da je f Cesàro zvezna, če je ***Cesàro zvezna*** *v vsaki točki $a \in \mathbb{R}$.*

Definicija

*Funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je **Cesàro zvezna v točki** $a \in \mathbb{R}$, če za vsako zaporedje $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, ki Cesàro konvergira proti a, zaporedje $(f(a_n))_{n=1}^{\infty}$ Cesàro konvergira proti $f(a)$.*
*Pravimo, da je f Cesàro zvezna, če je **Cesàro zvezna** v vsaki točki $a \in \mathbb{R}$.*

Zgled

Pokazati želimo, da je vsaka funkcija oblike $f(x) = Ax + B$, kjer sta $A, B \in \mathbb{R}$, Cesàro zvezna.

Definicija

Funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je ***Cesàro zvezna v točki*** *$a \in \mathbb{R}$, če za vsako zaporedje $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, ki Cesàro konvergira proti a, zaporedje $(f(a_n))_{n=1}^{\infty}$ Cesàro konvergira proti $f(a)$.*
Pravimo, da je f Cesàro zvezna, če je ***Cesàro zvezna*** *v vsaki točki $a \in \mathbb{R}$.*

Zgled

Pokazati želimo, da je vsaka funkcija oblike $f(x) = Ax + B$, kjer sta $A, B \in \mathbb{R}$, Cesàro zvezna.
Naj bo $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ poljubno Cesàro konvergentno zaporedje in a njegova Cesàro limita. Zaporedje $(Aa_n + B)_{n=1}^{\infty}$ Cesàro konvergira k $Aa + B = f(a)$, torej je funkcija f res Cesàro zvezna.

Izrek

Naj bo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcija. Naslednje trditve so ekvivalentne.

1. *Funkcija f je Cesàro zvezna v točki 0.*
2. *Funkcija f je Cesàro zvezna.*
3. *Funkcija f je oblike $f(x) = Ax + B$ za neki realni števili $A, B \in \mathbb{R}$.*

Če je funkcija f Cesàro zvezna v točki 0, je oblike $f(x) = Ax + B$ za neki realni števili $A, B \in \mathbb{R}$.

Dokaz.

$(1) \Rightarrow (3)$: Naj bo funkcija $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definirana s predpisom $g(x) = f(x) - f(0)$. Potem je g Cesàro zvezna v točki 0 in velja $g(0) = 0$. Pokazali bomo, da je g aditivna.

Če je funkcija f Cesàro zvezna v točki 0, je oblike $f(x) = Ax + B$ za neki realni števili $A, B \in \mathbb{R}$.

Dokaz.

$(1) \Rightarrow (3)$: Naj bo funkcija $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definirana s predpisom $g(x) = f(x) - f(0)$. Potem je g Cesàro zvezna v točki 0 in velja $g(0) = 0$. Pokazali bomo, da je g aditivna. Naj bo $a \in \mathbb{R}$ poljubno realno število. Ker velja

$$a, -a, a, -a, a, \ldots \rightsquigarrow 0$$

in je g Cesaro zvezna v 0 velja

$$g(a), g(-a), g(a), g(-a), \ldots \rightsquigarrow g(0) = 0.$$

Če je funkcija f Cesàro zvezna v točki 0, je oblike $f(x) = Ax + B$ za neki realni števili $A, B \in \mathbb{R}$.

Dokaz.

(1) $\Rightarrow$ (3) : Naj bo funkcija $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definirana s predpisom $g(x) = f(x) - f(0)$. Potem je g Cesàro zvezna v točki 0 in velja $g(0) = 0$. Pokazali bomo, da je g aditivna. Naj bo $a \in \mathbb{R}$ poljubno realno število. Ker velja

$$a, -a, a, -a, a, \ldots \rightsquigarrow 0$$

in je g Cesaro zvezna v 0 velja

$$g(a), g(-a), g(a), g(-a), \ldots \rightsquigarrow g(0) = 0.$$

Potem mora veljati $g(-a) = -g(a)$.

Če je funkcija f Cesàro zvezna v točki 0, je oblike $f(x) = Ax + B$ za neki realni števili $A, B \in \mathbb{R}$.

Dokaz.

Naj bosta zdaj $b, c \in \mathbb{R}$ poljubni realni števili. Spet vidimo, da velja

$$b, c, -(b+c), b, c, -(b+c), \ldots \rightsquigarrow 0,$$

zato tudi zaporedje

$$g(b), g(c), g(-(b+c)), g(b), \ldots \rightsquigarrow 0.$$

Če je funkcija f Cesàro zvezna v točki 0, je oblike $f(x) = Ax + B$ za neki realni števili $A, B \in \mathbb{R}$.

Dokaz.

Naj bosta zdaj $b, c \in \mathbb{R}$ poljubni realni števili. Spet vidimo, da velja

$$b, c, -(b+c), b, c, -(b+c), \ldots \rightsquigarrow 0,$$

zato tudi zaporedje

$$g(b), g(c), g(-(b+c)), g(b), \ldots \rightsquigarrow 0.$$

Sledi $g(b) + g(c) + g(-(b+c)) = 0$ oziroma
$-(g(b) + g(c)) = g(-(b+c))$.

Če je funkcija f Cesàro zvezna v točki 0, je oblike $f(x) = Ax + B$ za neki realni števili $A, B \in \mathbb{R}$.

Dokaz.

Naj bosta zdaj $b, c \in \mathbb{R}$ poljubni realni števili. Spet vidimo, da velja

$$b, c, -(b+c), b, c, -(b+c), \ldots \rightsquigarrow 0,$$

zato tudi zaporedje

$$g(b), g(c), g(-(b+c)), g(b), \ldots \rightsquigarrow 0.$$

Sledi $g(b) + g(c) + g(-(b+c)) = 0$ oziroma $-(g(b) + g(c)) = g(-(b+c))$. Upoštevamo še, da je velja $g(-a) = -g(a)$ za vsak $a \in \mathbb{R}$ in dobimo $g(b) + g(c) = g(b+c)$. Torej je g aditivna.

Če je funkcija f Cesàro zvezna v točki 0, je oblike $f(x) = Ax + B$ za neki realni števili $A, B \in \mathbb{R}$.

Dokaz.

Naslednji cilj je pokazati, da velja $g(\lambda x) = \lambda g(x)$ za vse $\lambda \in \mathbb{Q}$ in $x \in \mathbb{R}$. Za primer, ko je $\lambda \in \mathbb{N}$, to sledi neposredno iz aditivnosti. Ker velja tudi $g(0) = 0$ in $g(-a) = -g(a)$, to velja celo za vse $\lambda \in \mathbb{Z}$.

Če je funkcija f Cesàro zvezna v točki 0, je oblike $f(x) = Ax + B$ za neki realni števili $A, B \in \mathbb{R}$.

Dokaz.

Naslednji cilj je pokazati, da velja $g(\lambda x) = \lambda g(x)$ za vse $\lambda \in \mathbb{Q}$ in $x \in \mathbb{R}$. Za primer, ko je $\lambda \in \mathbb{N}$, to sledi neposredno iz aditivnosti. Ker velja tudi $g(0) = 0$ in $g(-a) = -g(a)$, to velja celo za vse $\lambda \in \mathbb{Z}$.
Naj bo zdaj $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ poljubno racionalno število. Velja

$$mg(x) = g(mx) = g\left(n\frac{m}{n}x\right) = ng\left(\frac{m}{n}x\right)$$

oziroma

$$\frac{m}{n}g(x) = g\left(\frac{m}{n}x\right),$$

kar smo želeli dokazati.

Če je funkcija f Cesàro zvezna v točki 0, je oblike $f(x) = Ax + B$ za neki realni števili $A, B \in \mathbb{R}$.

Dokaz.

Pokažimo zdaj, da je g zvezna. Naj bo $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ poljubno zaporedje, da je $x_n \to 0$. Poiščimo zaporedje $(y_n)_{n=1}^{\infty}$, katerega zaporedje aritmetičnih sredin je enako $(x_n)_{n=1}^{\infty}$.

Če je funkcija f Cesàro zvezna v točki 0, je oblike $f(x) = Ax + B$ za neki realni števili $A, B \in \mathbb{R}$.

Dokaz.

Pokažimo zdaj, da je g zvezna. Naj bo $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ poljubno zaporedje, da je $x_n \to 0$. Poiščimo zaporedje $(y_n)_{n=1}^{\infty}$, katerega zaporedje aritmetičnih sredin je enako $(x_n)_{n=1}^{\infty}$. Očitno mora biti $y_1 = x_1$. Denimo, da smo že definirali $y_1, \dots, y_n$ in da velja $x_k = \overline{y}_k$ za vse $k \leq n$. Da bo veljalo tudi $x_{n+1} = \overline{y}_{n+1}$ oziroma

$$x_{n+1} = \frac{y_1 + \ldots + y_{n+1}}{n+1},$$

moramo vzeti $y_{n+1} = (n+1)x_{n+1} - (y_1 + \ldots + y_n)$.

Če je funkcija f Cesàro zvezna v točki 0, je oblike $f(x) = Ax + B$ za neki realni števili $A, B \in \mathbb{R}$.

Dokaz.

Pokažimo zdaj, da je g zvezna. Naj bo $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ poljubno zaporedje, da je $x_n \to 0$. Poiščimo zaporedje $(y_n)_{n=1}^{\infty}$, katerega zaporedje aritmetičnih sredin je enako $(x_n)_{n=1}^{\infty}$. Očitno mora biti $y_1 = x_1$. Denimo, da smo že definirali $y_1, \ldots, y_n$ in da velja $x_k = \overline{y}_k$ za vse $k \leq n$. Da bo veljalo tudi $x_{n+1} = \overline{y}_{n+1}$ oziroma

$$x_{n+1} = \frac{y_1 + \ldots + y_{n+1}}{n+1},$$

moramo vzeti $y_{n+1} = (n+1)x_{n+1} - (y_1 + \ldots + y_n)$.
Tako definirano zaporedje $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ res zadošča $x_n = \overline{y}_n$ za vse $n \in \mathbb{N}$.

Če je funkcija f Cesàro zvezna v točki 0, je oblike $f(x) = Ax + B$ za neki realni števili $A, B \in \mathbb{R}$.

Dokaz.

Ker je $x_n \to 0$, je $y_n \rightsquigarrow 0$ po definiciji, zato iz Cesàro zveznosti funkcije g v 0 sledi $g(y_n) \rightsquigarrow g(0) = 0$.

Če je funkcija f Cesàro zvezna v točki 0, je oblike $f(x) = Ax + B$ za neki realni števili $A, B \in \mathbb{R}$.

Dokaz.

Ker je $x_n \to 0$, je $y_n \rightsquigarrow 0$ po definiciji, zato iz Cesàro zveznosti funkcije g v 0 sledi $g(y_n) \rightsquigarrow g(0) = 0$. Iz tega, kar smo pokazali v prejšnjih odstavkih, potem sledi

$$g(x_n) = g(\overline{y}_n) = g\left(\frac{y_1 + \ldots + y_n}{n}\right) = \frac{g(y_1) + \ldots + g(y_n)}{n} \to 0.$$

Torej je g zvezna v 0.

Če je funkcija f Cesàro zvezna v točki 0, je oblike $f(x) = Ax + B$ za neki realni števili $A, B \in \mathbb{R}$.

Dokaz.

Ker je $x_n \to 0$, je $y_n \rightsquigarrow 0$ po definiciji, zato iz Cesàro zveznosti funkcije g v 0 sledi $g(y_n) \rightsquigarrow g(0) = 0$. Iz tega, kar smo pokazali v prejšnjih odstavkih, potem sledi

$$g(x_n) = g(\overline{y}_n) = g\left(\frac{y_1 + \ldots + y_n}{n}\right) = \frac{g(y_1) + \ldots + g(y_n)}{n} \to 0.$$

Torej je g zvezna v 0. Ker je $g(x_0 + x) = g(x_0) + g(x)$, je zvezna tudi v vsaki drugi točki $x_0 \in \mathbb{R}$.

Če je funkcija f Cesàro zvezna v točki 0, je oblike $f(x) = Ax + B$ za neki realni števili $A, B \in \mathbb{R}$.

Dokaz.

Naj bo $A = g(1)$. Zvezni funkciji g in $x \mapsto Ax$ se ujemata na $\mathbb{Q}$, ki je gosta podmnožica v $\mathbb{R}$, torej sta enaki. Če vzamemo $B = f(0)$, velja $f(x) = Ax + B$ za vse $x \in \mathbb{R}$. S tem je implikacija dokazana.

Če je funkcija f Cesàro zvezna v točki 0, je oblike $f(x) = Ax + B$ za neki realni števili $A, B \in \mathbb{R}$.

Dokaz.

Naj bo $A = g(1)$. Zvezni funkciji g in $x \mapsto Ax$ se ujemata na $\mathbb{Q}$, ki je gosta podmnožica v $\mathbb{R}$, torej sta enaki. Če vzamemo $B = f(0)$, velja $f(x) = Ax + B$ za vse $x \in \mathbb{R}$. S tem je implikacija dokazana.

$(3) \Rightarrow (2)$: To smo pokazali v zgornjem zgledu.

Če je funkcija f Cesàro zvezna v točki 0, je oblike $f(x) = Ax + B$ za neki realni števili $A, B \in \mathbb{R}$.

Dokaz.

Naj bo $A = g(1)$. Zvezni funkciji g in $x \mapsto Ax$ se ujemata na $\mathbb{Q}$, ki je gosta podmnožica v $\mathbb{R}$, torej sta enaki. Če vzamemo $B = f(0)$, velja $f(x) = Ax + B$ za vse $x \in \mathbb{R}$. S tem je implikacija dokazana.

$(3) \Rightarrow (2)$: To smo pokazali v zgornjem zgledu.

$(2) \Rightarrow (1)$: Če je f Cesàro zvezna, je po definiciji Cesàro zvezna tudi v točki 0. □

Definicija

Funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *je* ***Cesàro odvedljiva v točki*** $a \in \mathbb{R}$, *če obstaja število* $f'(a) \in \mathbb{R}$, *da za vsako zaporedje* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *s členi različnimi od* a, *ki Cesàro konvergira proti* a, *zaporedje diferenčnih kvocientov*

$$\left(\frac{f(a_n) - f(a)}{a_n - a}\right)_{n=1}^{\infty}$$

Cesàro konvergira proti $f'(a)$.

Definicija

Funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *je* ***Cesàro odvedljiva v točki*** $a \in \mathbb{R}$*, če obstaja število* $f'(a) \in \mathbb{R}$*, da za vsako zaporedje* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *s členi različnimi od* a*, ki Cesàro konvergira proti* a*, zaporedje diferenčnih kvocientov*

$$\left(\frac{f(a_n) - f(a)}{a_n - a}\right)_{n=1}^{\infty}$$

Cesàro konvergira proti $f'(a)$*.*

Številu $f'(a)$ *v takem primeru rečemo* ***Cesàro odvod funkcije*** f ***v točki*** a*.*

Definicija

Funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *je* ***Cesàro odvedljiva v točki*** $a \in \mathbb{R}$*, če obstaja število* $f'(a) \in \mathbb{R}$*, da za vsako zaporedje* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *s členi različnimi od* a*, ki Cesàro konvergira proti* a*, zaporedje diferenčnih kvocientov*

$$\left(\frac{f(a_n) - f(a)}{a_n - a}\right)_{n=1}^{\infty}$$

Cesàro konvergira proti $f'(a)$*.*

Številu $f'(a)$ *v takem primeru rečemo* ***Cesàro odvod funkcije*** f ***v točki*** a*.*

Pravimo, da je f ***Cesàro odvedljiva****, če je Cesàro odvedljiva v vsaki točki* $a \in \mathbb{R}$*.*

Zgled

Naj bo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *funkcija oblike* $f(x) = Ax^2 + Bx + C$ *za neke* $A, B, C \in \mathbb{R}$.

Zgled

Naj bo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *funkcija oblike* $f(x) = Ax^2 + Bx + C$ *za neke* $A, B, C \in \mathbb{R}$.
Naj bo $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *poljubno Cesàro konvergentno zaporedje s Cesàro limito* a*, ki ima vse člene različne od* a*.*

Zgled

Naj bo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *funkcija oblike* $f(x) = Ax^2 + Bx + C$ *za neke* $A, B, C \in \mathbb{R}$.
Naj bo $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *poljubno Cesàro konvergentno zaporedje s Cesàro limito* a*, ki ima vse člene različne od* a*. Velja*

$$\begin{aligned}\frac{f(a_n) - f(a)}{a_n - a} &= \frac{(Aa_n^2 + Ba_n + C) - (Aa^2 + Ba + C)}{a_n - a} \\ &= \frac{A(a_n - a)(a_n + a) + B(a_n - a)}{a_n - a} \\ &= A(a_n + a) + B \rightsquigarrow 2Aa + B,\end{aligned}$$

torej je f *Cesàro odvedljiva in je* $2Ax + B$ *njen Cesàro odvod.*

Lema

Naj bo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *funkcija. Naj za vsako zaporedje* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *s členi različnimi od* 0*, ki Cesàro konvergira proti* 0*, velja* $f(a_n) \rightsquigarrow f(0)$*. Potem je* f *Cesàro zvezna v točki* 0*.*

Izrek

Naj bo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *funkcija. Naslednje trditve so ekvivalentne.*

1. *Funkcija* f *je Cesàro odvedljiva v točki* 0.
2. *Funkcija* f *je Cesàro odvedljiva.*
3. *Funkcija* f *je oblike* $f(x) = Ax^2 + Bx + C$ *za neka realna števila* $A, B, C \in \mathbb{R}$.

Dokaz.

(1) $\Rightarrow$ (3) : Definiramo funkcijo $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s predpisom

$$g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(0)}{x}; & x \neq 0 \\ f'(0); & x = 0. \end{cases}$$

Dokaz.

$(1) \Rightarrow (3)$: Definiramo funkcijo $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s predpisom

$$g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(0)}{x}; & x \neq 0 \\ f'(0); & x = 0. \end{cases}$$

Naj bo $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ zaporedje s členi različnimi od 0, da velja $a_n \rightsquigarrow 0$. Potem velja

$$g(a_n) = \frac{f(a_n) - f(0)}{a_n - 0} \rightsquigarrow f'(0) = g(0),$$

po definiciji Cesàro odvoda f v točki 0.

Dokaz.

(1) $\Rightarrow$ (3) : Definiramo funkcijo $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s predpisom

$$g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(0)}{x}; & x \neq 0 \\ f'(0); & x = 0. \end{cases}$$

Naj bo $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ zaporedje s členi različnimi od 0, da velja $a_n \rightsquigarrow 0$. Potem velja

$$g(a_n) = \frac{f(a_n) - f(0)}{a_n - 0} \rightsquigarrow f'(0) = g(0),$$

po definiciji Cesàro odvoda f v točki 0.
Po lemi je g Cesàro zvezna v točki 0, zato je po izreku oblike $g(x) = Ax + B$ za neka $A, B \in \mathbb{R}$. Potem pa je $f(x) = xg(x) + f(0) = Ax^2 + Bx + C$ za $C = f(0)$.

Dokaz.

$(3) \Rightarrow (2)$: To smo pokazali v zgornjem zgledu.

Dokaz.

$(3) \Rightarrow (2)$: To smo pokazali v zgornjem zgledu.

$(2) \Rightarrow (1)$: Če je f Cesàro odvedljiva, je po definiciji Cesàro odvedljiva tudi v točki 0. $\square$

Literatura

- J. A. Hocutt in P. L. Robinson, *Everywhere Differentiable, Nowhere Continuous Functions*, Amer. Math. Monthly **125** (2018) 923–928.
- P. R. Halmos, *Problems for Mathematicians, Young and Old*, Dolciani Mathematical Expositions **12**, Mathematical Association of America, Washington, 1991.