

# Cesàro zveznost in odvedljivost

## Seminar

Matevž Mišič

2. april 2020

### Uvod

V prvem letniku smo spoznali, kako lahko zveznost funkcije v neki točki karakteriziramo z zaporedji. Funkcija  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  je zvezna v točki  $a \in \mathbb{R}$  natanko tedaj, ko za vsako zaporedje  $(a_n)$ , ki konvergira proti  $a$ , zaporedje  $(f(a_n))$  konvergira proti  $f(a)$ . Podobno lahko z zaporedji karakteriziramo funkcijsko limito: število  $L \in \mathbb{R}$  je limita funkcije  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  v točki  $a \in \mathbb{R}$  natanko tedaj, ko za vsako zaporedje  $(a_n)$  s členi različnimi od  $a$ , ki konvergira proti  $a$ , zaporedje  $(f(a_n))$  konvergira proti  $L$ . Po definiciji je funkcija  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  odvedljiva v  $a$ , če obstaja limita

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

v tem primeru tej limiti pravimo odvod funkcije  $f$  v točki  $a$ . Ker funkcijsko limito znamo opisati z zaporedji, lahko rečemo, da je  $f$  odvedljiva v  $a$  natanko tedaj, ko obstaja število  $L \in \mathbb{R}$ , da za vsako zaporedje  $(a_n)$  s členi različnimi od  $a$ , ki konvergira proti  $a$ , zaporedje  $(\frac{f(a_n) - f(a)}{a_n - a})$  konvergira proti  $L$ . Sedaj smo uspeli pojma zveznosti in odvedljivosti funkcije opisati samo s pojmom konvergence zaporedja. Če bi znali tudi kako drugače definirati, kdaj dano zaporedje konvergira in kakšna je limita, bi dobili drugačni definiciji zveznosti in odvedljivosti. Točno s tem se bomo ukvarjali v tej predstavitvi. Najprej se bomo naučili, kaj je to Cesàro konvergenca zaporedja, s pomočjo tega bomo dobili novi definiciji zveznosti in odvedljivosti, nato pa bomo ugotovili katere funkcije so zvezne oziroma odvedljive po tej novi definiciji.

# 1 Cesàro konvergenca

Naj bo  $(a_n)$  realno zaporedje. Temu zaporedju lahko priredimo novo zaporedje, katerega  $n$ -ti člen je enak  $\bar{a}_n = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$ . Temu novemu zaporedju bomo rekli zaporedje aritmetičnih sredin zaporedja  $(a_n)$  in ga označili z  $(\bar{a}_n)$ .

**Definicija 1.** Realno zaporedje  $(a_n)$  Cesàro konvergira, če konvergira njegovo zaporedje aritmetičnih sredin  $(\bar{a}_n)$ . V takem primeru limiti zaporedja  $(\bar{a}_n)$  pravimo Cesàro limita zaporedja  $(a_n)$ .

Oznaka  $a_n \rightarrow a$  naj pomeni, da zaporedje  $(a_n)$  konvergira proti  $a$ , oznaka  $a_n \rightsquigarrow a$  pa, da zaporedje Cesàro konvergira proti  $a$ .

V prvem letniku smo se pri analizi naučili, da iz  $a_n \rightarrow a$  sledi  $a_n \rightsquigarrow a$ . Obratno seveda ne velja, saj zaporedje  $((-1)^n)$  Cesàro konvergira proti 0, ne konvergira pa v običajnem smislu. Ker je pojem Cesàro konvergence zelo pomemben za nadaljevanje, si oglejmo še nekaj primerov.

**Zgled 1.** Poiščimo primer omejenega zaporedja, ki ni Cesàro konvergentno. Prvi člen naj bo enak 2. Naslednjih nekaj členov bo enakih  $-2$ . Takih členov mora biti dovolj, da bo aritmetična sredina padla pod  $-1$ . Nato spet dodajmo dovolj členov enakih 2, da bo aritmetična sredina narasla nad 1. S ponavljanjem take konstrukcije dobimo omejeno zaporedje, ki ni Cesàro konvergentno, saj zaporedje aritmetičnih sredin oscilira med  $-1$  in 1.

**Zgled 2.** Naj bo  $m \in \mathbb{N}$  in  $a_1, a_2, \dots, a_m \in \mathbb{R}$ . Zanima nas, kdaj zaporedje

$$a_1, a_2, \dots, a_m, a_1, a_2, \dots$$

Cesàro konvergira proti 0. Naj bo  $A := a_1 + a_2 + \dots + a_m$ . Ker za vse  $k \in \mathbb{N}$  velja  $\bar{a}_{km} = \frac{A}{m}$ , je enakost  $A = 0$  potreben pogoj za  $a_n \rightsquigarrow 0$ . Naj bo torej  $A = 0$ . Zaporedje delnih vsot zaporedja  $(a_n)$  je potem periodično, zato je omejeno. Sledi, da zaporedje aritmetičnih sredin konvergira proti 0. Torej  $(a_n)$  Cesàro konvergira proti 0 natanko tedaj, ko velja  $A = 0$ .

Naj bo  $V$  vektorski prostor vseh realnih zaporedij. Lahko je preveriti, da je preslikava  $\phi : V \rightarrow V$ , ki zaporedju  $(a_n)$  priredi njegovo zaporedje aritmetičnih sredin  $(\bar{a}_n)$ , endomorfizem vektorskega prostora  $V$ . V nadaljevanju bomo videli, da je  $\phi$  surjektivna preslikava, je pa tudi injektivna, torej je celo avtomorfizem vektorskega prostora  $V$ , ampak to za nas ne bo tako pomembno. Pomembna bo le linearnost  $\phi$ .

Naj bosta  $(a_n)$  in  $(b_n)$  Cesàro konvergentni zaporedji. Zanima nas, če lahko kaj povemo o Cesàro konvergenci vsote teh dveh zaporedij  $(a_n + b_n)$ . Ker je  $\phi$  aditivna, je zaporedje aritmetičnih sredin vsote enako vsoti zaporedij aritmetičnih sredin. Povedano drugače, za vsak  $n \in \mathbb{N}$  velja  $\overline{a_n + b_n} = \bar{a}_n + \bar{b}_n$ . Zaporedji  $(\bar{a}_n)$  in  $(\bar{b}_n)$  konvergirata, zato konvergira tudi njuna vsota  $(\overline{a_n + b_n})$  in velja

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \overline{a_n + b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{a}_n + \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{b}_n.$$

S tem smo pokazali, da je vsota Cesàro konvergentnih zaporedij Cesàro konvergentna in da je Cesàro limita vsote enaka vsoti Cesàro limit obeh zaporedij. S podobnim razmislekom lahko vidimo, da podobno velja za množenje zaporedja s skalarjem. Če je  $(a_n)$  Cesàro konvergentno zaporedje s Cesàro limito  $a$  in je  $\lambda \in \mathbb{R}$ , potem je tudi  $(\lambda a_n)$  Cesàro konvergentno s Cesàro limito  $\lambda a$ .

Produkt dveh Cesàro konvergentnih zaporedij pa ni nujno Cesàro konvergentno zaporedje, kar nam pokaže naslednji zgled.

**Zgled 3.** Naj bo  $a_n = (-1)^n \sqrt{n}$  za vse  $n \in \mathbb{N}$  in  $A_n = \sum_{k=1}^n a_k$ . Ker je zaporedje  $(\sqrt{n})$  naraščajoče, lahko hitro vidimo, da je zaporedje  $(A_n)$  alternirajoče: lihi členi so negativni, sodi pa pozitivni. Torej za lihe člene velja  $-\sqrt{n} = a_n \leq A_{n-1} + a_n = A_n \leq 0$ , za sode pa  $0 \leq A_n = A_{n-1} + a_n \leq a_n = \sqrt{n}$ . Sledi

$$|\bar{a}_n| = \left| \frac{A_n}{n} \right| \leq \frac{\sqrt{n}}{n} \rightarrow 0,$$

zato velja  $a_n \rightarrow 0$  oziroma  $a_n \rightsquigarrow 0$ . Če pa zaporedje  $(a_n)$  pomnožimo s samim seboj, dobimo zaporedje, ki ni Cesàro konvergentno.

## 2 Cesàro zveznost

Sedaj lahko končno začnemo obravnavati Cesàro zveznost.

**Definicija 2.** Funkcija  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  je Cesàro zvezna v točki  $a \in \mathbb{R}$ , če za vsako zaporedje  $(a_n)$ , ki Cesàro konvergira proti  $a$ , zaporedje  $(f(a_n))$  Cesàro konvergira proti  $f(a)$ . Pravimo, da je  $f$  zvezna, če je zvezna v vsaki točki  $a \in \mathbb{R}$ .

Da si bomo lažje predstavljali, katere funkcije so Cesàro zvezne, si najprej ogledimo kakšen primer.

**Zgled 4.** Pokazati želimo, da je vsaka funkcija oblike  $f(x) = Ax + B$ , kjer sta  $A, B \in \mathbb{R}$ , Cesàro zvezna. Naj bo  $(a_n)$  poljubno Cesàro konvergentno zaporedje in  $a$  njegova Cesàro limita. Zaporedje  $(Aa_n + B)$  Cesàro konvergira k  $Aa + B = f(a)$ , torej je funkcija  $f$  res Cesàro zvezna.

**Zgled 5.** Oglejmo si še primer funkcije, ki ni Cesàro zvezna. Naj bo  $f(x) = x^2$  funkcija. Zaporedje  $((-1)^n)$  Cesàro konvergira k 0, zaporedje  $(f((-1)^n))$  pa je konstantno enako 1, zato Cesàro konvergira k 1 in ne k  $f(0) = 0$ . Torej  $f$  ni Cesàro zvezna v točki 0.

Kot smo ugotovili, je vsaka funkcija oblike  $f(x) = Ax + B$  Cesàro zvezna. Izkaže se, da so to tudi vse Cesàro zvezne funkcije. Dokaz temelji na [2, stran 247-248].

**Izrek 1.** *Naj bo  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  funkcija. Naslednje trditve so ekvivalentne.*

1. *Funkcija  $f$  je Cesàro zvezna v točki 0.*
2. *Funkcija  $f$  je Cesàro zvezna.*
3. *Funkcija  $f$  je oblike  $f(x) = Ax + B$  za neki realni števili  $A, B \in \mathbb{R}$ .*

**Dokaz.** (1)  $\Rightarrow$  (3) : Naj bo funkcija  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definirana s predpisom  $g(x) = f(x) - f(0)$ . Potem je  $g$  Cesàro zvezna v točki 0 in velja  $g(0) = 0$ . Naj bo  $a \in \mathbb{R}$  poljubno realno število. Ker zaporedje  $a, -a, a, -a, a, \dots$  Cesàro konvergira proti 0 in je  $g$  Cesàro zvezna v 0, zaporedje  $g(a), g(-a), g(a), g(-a), \dots$  Cesàro konvergira proti  $g(0) = 0$ . Potem mora veljati  $g(a) + g(-a) = 0$  oziroma  $g(-a) = -g(a)$ . Naj bosta zdaj  $b, c \in \mathbb{R}$  poljubni realni števili. Spet zaporedje  $b, c, -(b+c), b, c, -(b+c), \dots$  Cesàro konvergira k 0, zato tudi zaporedje  $g(b), g(c), g(-(b+c)), g(b), \dots$  Cesàro konvergira proti  $g(0) = 0$ . Sledi  $g(b) + g(c) + g(-(b+c)) = 0$  oziroma  $-(g(b) + g(c)) = g(-(b+c))$ . Upoštevamo še, da je velja  $g(-a) = -g(a)$  za vsak  $a \in \mathbb{R}$  in dobimo  $g(b) + g(c) = g(b+c)$ . Torej je  $g$  aditivna.

Naslednji cilj je pokazati, da velja  $g(\lambda x) = \lambda g(x)$  za vse  $\lambda \in \mathbb{Q}$  in  $x \in \mathbb{R}$ . Za primer, ko je  $\lambda \in \mathbb{N}$ , to sledi neposredno iz aditivnosti. Ker velja tudi  $g(0) = 0$  in  $g(-a) = -g(a)$ , to velja celo za vse  $\lambda \in \mathbb{Z}$ . Naj bo zdaj  $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$  poljubno racionalno število. Velja  $mg(x) = g(mx) = g(n\frac{m}{n}x) = ng(\frac{m}{n}x)$  oziroma  $\frac{m}{n}g(x) = g(\frac{m}{n}x)$ , kar smo želeli dokazati.

Pokažimo zdaj, da je  $g$  zvezna. Naj bo  $(x_n)$  poljubno zaporedje, da je  $x_n \rightarrow 0$ . Poiščimo zaporedje  $(y_n)$ , katerega zaporedje aritmetičnih sredin je enako  $(x_n)$ . Očitno mora biti  $y_1 = x_1$ . Denimo, da smo že definirali  $y_1, \dots, y_n$  in da velja  $x_k = \bar{y}_k$  za vse  $k \leq n$ . Da bo veljalo tudi  $x_{n+1} = \bar{y}_{n+1}$  oziroma  $x_{n+1} = \frac{y_1 + \dots + y_{n+1}}{n+1}$ , moramo vzeti  $y_{n+1} = (n+1)x_{n+1} - (y_1 + \dots + y_n)$ . Tako definirano zaporedje  $(y_n)$  res zadošča  $x_n = \bar{y}_n$

za vse  $n \in \mathbb{N}$ . Ker je  $x_n \rightarrow 0$ , je  $y_n \rightsquigarrow 0$  po definiciji, zato iz Cesàro zveznosti funkcije  $g$  v 0 sledi  $g(y_n) \rightsquigarrow g(0) = 0$ . Iz tega, kar smo pokazali v prejšnjih odstavkih, potem sledi

$$g(x_n) = g(\bar{y}_n) = g\left(\frac{y_1 + \dots + y_n}{n}\right) = \frac{g(y_1) + \dots + g(y_n)}{n} \rightarrow 0.$$

Torej je  $g$  zvezna v 0. Ker je  $g(x_0 + x) = g(x_0) + g(x)$ , je zvezna tudi v vsaki drugi točki  $x_0 \in \mathbb{R}$ .

Naj bo  $A = g(1)$ . Zvezni funkciji  $g$  in  $x \mapsto Ax$  se ujemata na  $\mathbb{Q}$ , ki je gosta podmnožica v  $\mathbb{R}$ , torej sta enaki. Če vzamemo  $B = f(0)$ , velja  $f(x) = Ax + B$  za vse  $x \in \mathbb{R}$ . S tem je implikacija dokazana.

(3)  $\Rightarrow$  (2) : To smo pokazali v zgledu 4.

(2)  $\Rightarrow$  (1) : Če je  $f$  Cesàro zvezna, je po definiciji Cesàro zvezna tudi v točki 0.  $\square$

### 3 Cesàro odvedljivost

Sedaj bomo vpeljali še pojem Cesàro odvedljivosti. Kakšna je motivacija za naslednjo definicijo smo obravnavali že v uvodu.

**Definicija 3.** Funkcija  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  je Cesàro odvedljiva v točki  $a \in \mathbb{R}$ , če obstaja število  $f'(a) \in \mathbb{R}$ , da za vsako zaporedje  $(a_n)$  s členi različnimi od  $a$ , ki Cesàro konvergira proti  $a$ , zaporedje diferenčnih kvocientov  $\left(\frac{f(a_n) - f(a)}{a_n - a}\right)$  Cesàro konvergira proti  $f'(a)$ . Številu  $f'(a)$  v takem primeru rečemo Cesàro odvod funkcije  $f$  v točki  $a$ . Pravimo, da je  $f$  odvedljiva, če je odvedljiva v vsaki točki  $a \in \mathbb{R}$ .

Oglejmo si nekaj primerov funkcij in poskusimo ugotoviti, če so Cesàro odvedljive.

**Zgled 6.** Naj bo  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  funkcija oblike  $f(x) = Ax^2 + Bx + C$  za neke  $A, B, C \in \mathbb{R}$ . Naj bo  $(a_n)$  poljubno Cesàro konvergentno zaporedje s Cesàro limito  $a$ , ki ima vse člene različne od  $a$ . Velja

$$\begin{aligned} \frac{f(a_n) - f(a)}{a_n - a} &= \frac{(Aa_n^2 + Ba_n + C) - (Aa^2 + Ba + C)}{a_n - a} \\ &= \frac{A(a_n - a)(a_n + a) + B(a_n - a)}{a_n - a} \\ &= A(a_n + a) + B \rightsquigarrow 2Aa + B, \end{aligned}$$

torej je  $f$  Cesàro odvedljiva in je  $2Ax + B$  njen Cesàro odvod. Opazimo lahko, da je Cesàro odvod enak odvodu.

**Zgled 7.** Naj bo zdaj  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  funkcija s predpisom  $f(x) = x^3$ . Velja  $(-1)^n \rightsquigarrow 0$ , ampak

$$\frac{(-1)^3 - 0^3}{(-1) - 0} = 1 \rightsquigarrow 1 \neq 0 = f(0).$$

Torej  $f$  ni Cesàro odvedljiva v točki 0.

Vemo že, da je  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  zvezna v točki  $a \in \mathbb{R}$  natanko tedaj, ko obstaja limita  $f$  v točki  $a$  in je ta limita enaka  $f(a)$ . Podobno velja tudi za Cesàro zveznost, kar nam pove naslednja lema. V dokazu te leme in naslednjega izreka bomo sledili [1].

**Lema 1.** *Naj bo  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  funkcija. Naj za vsako zaporedje  $(a_n)$  s členi različnimi od 0, ki Cesàro konvergira proti 0, velja  $f(a_n) \rightsquigarrow f(0)$ . Potem je  $f$  Cesàro zvezna v točki 0.*

**Dokaz.** Predpostaviti smemo, da velja  $f(0) = 0$ . Podobno kot pri dokazu izreka 1 lahko dokažemo, da velja  $f(a + b) = f(a) + f(b)$  za neničelna  $a, b \in \mathbb{R}$ . Če je katero od obeh števil enako 0, pa to očitno velja. Torej je  $f$  aditivna. Velja tudi  $f(-a) = -f(a)$  za vse  $a \in \mathbb{R}$ .

Naj bo  $(a_n)$  poljubno zaporedje, za katero velja  $a_n \rightsquigarrow 0$ . Pokazati želimo, da velja  $f(a_n) \rightsquigarrow f(0) = 0$ . To bomo storili tako, da bomo skonstruirali zaporedje  $(b_n)$  s členi različnimi od 0, ki se bo malo razlikovalo od zaporedja  $(a_n)$ , tako da bo veljalo  $a_n - b_n \rightsquigarrow 0$  in  $f(a_n) - f(b_n) \rightsquigarrow 0$ .

Ker je množica  $\mathbb{R}$  neštevna, množica  $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{-a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$  pa števna, lahko izberemo  $\delta \in \mathbb{R}$ , da za vsak  $n \in \mathbb{N}$  velja  $\delta \neq a_n$  in  $\delta \neq -a_n$ . Definirajmo  $b_n = a_n + (-1)^n \delta$ . Za vse  $n \in \mathbb{N}$  je potem  $b_n \neq 0$ , torej je  $(b_n)$  zaporedje z neničelnimi členi. Če je  $n$  sod, velja  $b_1 + \dots + b_n = a_1 + \dots + a_n$ , če je  $n$  lih, pa je  $b_1 + \dots + b_n = a_1 + \dots + a_n - \delta$ . Od tod sledi

$$\bar{a}_n - \bar{b}_n = \begin{cases} 0; & n \text{ sod} \\ \frac{\delta}{n}; & n \text{ lih,} \end{cases}$$

torej je  $\bar{a}_n - \bar{b}_n \rightarrow 0$ . Ker zaporedje  $(\bar{a}_n)$  konvergira k 0, enako velja za zaporedje  $(\bar{b}_n)$ , to pa lahko drugače zapišemo kot  $b_n \rightsquigarrow 0$ .

Zaradi aditivnosti  $f$  velja  $f(b_n) = f(a_n + (-1)^n \delta) = f(a_n) + f((-1)^n \delta) = f(a_n) + (-1)^n f(\delta)$ . Za sod  $n$  potem velja  $f(b_1) + \dots + f(b_n) = f(a_1) + \dots + f(a_n)$ , za lih  $n$  pa  $f(b_1) + \dots + f(b_n) = f(a_1) + \dots + f(a_n) - f(\delta)$ . Podobno kot prej sledi

$$\overline{f(a_n)} - \overline{f(b_n)} = \begin{cases} 0; & n \text{ sod} \\ \frac{f(\delta)}{n}; & n \text{ lih,} \end{cases}$$

torej je  $\overline{f(a_n)} - \overline{f(b_n)} \rightarrow 0$  oziroma  $f(a_n) - f(b_n) \rightsquigarrow 0$ .

Pokazali smo že, da zaporedje  $(b_n)$  Cesàro konvergira k 0, ker pa ima le neničelne člene, po predpostavki velja  $f(b_n) \rightsquigarrow f(0) = 0$ . Ker velja tudi  $f(a_n) - f(b_n) \rightsquigarrow 0$ , lahko zaključimo, da  $(f(a_n))$  Cesàro konvergira k 0, torej je  $f$  res Cesàro zvezna v točki 0.  $\square$

V zgledu 6 smo pokazali, da so vse funkcije oblike  $f(x) = Ax^2 + Bx + C$  Cesàro odvedljive. V naslednjem izreku bomo pokazali, da so to tudi vse Cesàro odvedljive funkcije.

**Izrek 2.** *Naj bo  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  funkcija. Naslednje trditve so ekvivalentne.*

1. *Funkcija  $f$  je Cesàro odvedljiva v točki 0.*
2. *Funkcija  $f$  je Cesàro odvedljiva.*
3. *Funkcija  $f$  je oblike  $f(x) = Ax^2 + Bx + C$  za neka realna števila  $A, B, C \in \mathbb{R}$ .*

**Dokaz.**  $(1) \Rightarrow (3)$  : Definiramo funkcijo  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  s predpisom

$$g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(0)}{x}; & x \neq 0 \\ f'(0); & x = 0. \end{cases}$$

Naj bo  $(a_n)$  zaporedje s členi različnimi od 0, da velja  $a_n \rightsquigarrow 0$ . Potem velja

$$g(a_n) = \frac{f(a_n) - f(0)}{a_n - 0} \rightsquigarrow f'(0) = g(0),$$

po definiciji Cesàro odvoda  $f$  v točki 0. Po lemi 1 je  $g$  Cesàro zvezna v točki 0, zato je po izreku 1 oblike  $g(x) = Ax + B$  za neka  $A, B \in \mathbb{R}$ . Potem pa je  $f(x) = xg(x) + f(0) = Ax^2 + Bx + C$  za  $C = f(0)$ .

$(3) \Rightarrow (2)$  : To smo pokazali v zgledu 6.

$(2) \Rightarrow (1)$  : Če je  $f$  Cesàro odvedljiva, je po definiciji Cesàro odvedljiva tudi v točki 0.  $\square$

Končno smo klasificirali Cesàro zvezne in Cesàro odvedljive funkcije. Opazimo, da obstajajo funkcije, ki so Cesàro odvedljive, ampak niso Cesàro zvezne. Takšna funkcija je na primer  $x \mapsto x^2$ . To je presenetljivo, saj vemo, da je funkcija zvezna v neki točki, če je odvedljiva v tej točki. Za Cesàro zveznost in Cesàro odvedljivost pa se izkaže, da to ne velja.

# Angleško-slovenski slovar strokovnih izrazov

**convergence**    konvergenca

**continuity**    zveznost

**differentiability**    odvedljivost

## Literatura

- [1] J. A. Hocutt in P. L. Robinson, *Everywhere Differentiable, Nowhere Continuous Functions*, Amer. Math. Monthly **125** (2018) 923–928.
- [2] P. R. Halmos, *Problems for Mathematicians, Young and Old*, Dolciani Mathematical Expositions **12**, Mathematical Association of America, Washington, 1991.