矩阵

矩阵定义及基本运算

课前导读

线性方程组的求解是线性代数要研究的重要问题之一，而矩阵是求解线性方程组的核心工具.

课前导读

线性方程组的求解是线性代数要研究的重要问题之一，而矩阵是求解线性方程组的核心工具.

矩阵在自然科学、工程技术、经济管理等领域中有着广泛的应用，本节我们通过线性方程组和矩阵的关系引出矩阵的定义并给出矩阵的运算及运算性质.

在正式学习矩阵之前，我们需要了解线性方程组的基本知识.

在正式学习矩阵之前，我们需要了解线性方程组的基本知识.

定义 (线性方程组)

由m个方程n个未知量$x_1, x_2, \cdots, x_n$构成的线性方程组可以表示为

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

注

(1) 在线性方程组中,未知量用什么字母表示无关紧要

(2) 我们主要关注如下线性方程组的主要内容:

- 个数:方程个数m与未知数个数n;
- 系数:未知量x_j前的系数a_{ij}与等号右侧常数项b_i,$i=1,2,\cdots,m$,$j=1,2,\cdots,n$.

(3) 我们将系数a_{ij}与常数b_i收集起来组成一个数表

$$\tilde{\mathbf{A}}=\left[\begin{array}{cccc:c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

那么线性方程组与数表之间有了一个对应关系.

矩阵的定义

定义 (数域$\mathbb{F}$上的矩阵)

- 我们称$m \times n$个数$a_{ij} \in \mathbb{F}\,(i = 1, 2, \cdots, m; j = 1, 2, \cdots, n)$排成的$m$行$n$列的数表

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

  为一个$m \times n$**矩阵**, 记为$(a_{ij})_{m\times n}$或(a_{ij});
- 数a_{ij}位于矩阵(a_{ij})的**第i行第j列**, 我们称a_{ij}为矩阵(a_{ij})的(i, j)**元素**;
- i称为元素a_{ij}的行指标, j称为元素a_{ij}的列指标.

注

(1) 我们常用英文大写字母或者希腊字母来表示矩阵: $\mathbf{A} = (a_{ij})_{m\times n}$, $\mathbf{B} = (b_{ij})_{m\times n}$, $\boldsymbol{\alpha} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$.

注

(1) 我们常用英文大写字母或者希腊字母来表示矩阵: $\mathbf{A} = (a_{ij})_{m\times n}$, $\mathbf{B} = (b_{ij})_{m\times n}$, $\boldsymbol{\alpha} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$.

(2) 当$a_{ij} \in \mathbb{R}(\mathbb{F} = \mathbb{R})$时, 矩阵$(a_{ij})_{m\times n}$称为**实矩阵**; 当$a_{ij} \in \mathbb{C}(\mathbb{F} = \mathbb{C})$时, 矩阵$(a_{ij})_{m\times n}$称为**复矩阵**; 除特别指明, 我们只讨论实矩阵.

注

(1) 我们常用英文大写字母或者希腊字母来表示矩阵: $\mathbf{A} = (a_{ij})_{m\times n}$, $\mathbf{B} = (b_{ij})_{m\times n}$, $\boldsymbol{\alpha} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$.

(2) 当$a_{ij} \in \mathbb{R}(\mathbb{F} = \mathbb{R})$时, 矩阵$(a_{ij})_{m\times n}$称为**实矩阵**; 当$a_{ij} \in \mathbb{C}(\mathbb{F} = \mathbb{C})$时, 矩阵$(a_{ij})_{m\times n}$称为**复矩阵**; 除特别指明, 我们只讨论实矩阵.

(3) 1×1的矩阵$\mathbf{A} = (a)$记为$\mathbf{A} = a$.

注

(1) 我们常用英文大写字母或者希腊字母来表示矩阵: $\mathbf{A} = (a_{ij})_{m\times n}$, $\mathbf{B} = (b_{ij})_{m\times n}$, $\boldsymbol{\alpha} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$.

(2) 当$a_{ij} \in \mathbb{R}(\mathbb{F} = \mathbb{R})$时, 矩阵$(a_{ij})_{m\times n}$称为**实矩阵**; 当$a_{ij} \in \mathbb{C}(\mathbb{F} = \mathbb{C})$时, 矩阵$(a_{ij})_{m\times n}$称为**复矩阵**; 除特别指明, 我们只讨论实矩阵.

(3) 1×1的矩阵$\mathbf{A} = (a)$记为$\mathbf{A} = a$.

(4) $1 \times n$的矩阵$\boldsymbol{\alpha}$称为**行矩阵**: $\boldsymbol{\alpha} = [a_1, a_2, \cdots, a_n]$. 此时我们也称$\boldsymbol{\alpha}$为$n$**维行向量**.

(5) $n \times 1$的矩阵$\boldsymbol{\alpha}$称为**列矩阵**: $\boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$. 此时我们也称$\boldsymbol{\alpha}$为$n$**维列向量**.

注

(1) 我们常用英文大写字母或者希腊字母来表示矩阵: $\mathbf{A}=(a_{ij})_{m\times n}$, $\mathbf{B}=(b_{ij})_{m\times n}$, $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$.

(2) 当$a_{ij}\in\mathbb{R}(\mathbb{F}=\mathbb{R})$时, 矩阵$(a_{ij})_{m\times n}$称为**实矩阵**; 当$a_{ij}\in\mathbb{C}(\mathbb{F}=\mathbb{C})$时, 矩阵$(a_{ij})_{m\times n}$称为**复矩阵**; 除特别指明, 我们只讨论实矩阵.

(3) 1×1的矩阵$\mathbf{A}=(a)$记为$\mathbf{A}=a$.

(4) $1\times n$的矩阵α称为**行矩阵**: $\boldsymbol{\alpha}=[a_1,a_2,\cdots,a_n]$. 此时我们也称$\alpha$为$n$**维行向量**.

(5) $n\times 1$的矩阵α称为**列矩阵**: $\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{bmatrix}$. 此时我们也称$\alpha$为$n$**维列向量**.

(6) 所有元素都是零的$m\times n$矩阵称为零矩阵记为$\mathbf{O}_{m\times n}$或简记为$\mathbf{O}$.

矩阵的定义

定义 (n阶方阵)

- 我们称$n \times n$矩阵

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

  为n**阶方阵**;

- $a_{ii}(i = 1, 2, \cdots, n)$所在的位置称为$n$阶方阵的**主对角线**.

定义 (上三角矩阵,下三角矩阵)

我们称n阶方阵

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad (a_{ij} = 0,\ i > j).$$

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad (a_{ij} = 0,\ i < j).$$

分别为上三角矩阵和下三角矩阵.

定义 (对角矩阵,数量矩阵)

- 我们称n**阶方阵**

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{bmatrix}$$

为n**阶对角矩阵**, 记为$\mathbf{diag}(a_1, a_2, \cdots, a_n)$;

- 如果n阶对角矩阵$\mathbf{diag}(a_1, a_2, \cdots, a_n)$对角线上的元素全相等:

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_n,$$

那么我们称其为**数量矩阵**;

矩阵的定义

定义 (单位矩阵,同型矩阵,矩阵相等)

- 如果n阶数量矩阵满足 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 1$, 那么我们称其为$n$**阶单位矩阵**, 记为$\mathbf{E}_n$或者$\mathbf{E}, \mathbf{I}$:

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

- 如果两个矩阵的行数相等、列数也相等, 那么称这两个矩阵为同型矩阵;
- 如果两个同型矩阵$\mathbf{A} = (a_{ij})_{m\times n}$, $\mathbf{B} = (b_{ij})_{m\times n}$中所有对应位置的元素都相等, 即

$$a_{ij} = b_{ij}\,(i = 1, 2, \cdots, m, j = 1, 2, \cdots, n),$$

那么我们称矩阵$\mathbf{A}$和$\mathbf{B}$相等, 记为$\mathbf{A} = \mathbf{B}$.

定义 (同型矩阵加法)

两个同型矩阵$\mathbf{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，$\mathbf{B}=(b_{ij})_{m\times n}$的和$\mathbf{A}+\mathbf{B}$定义为

$$\mathbf{A}+\mathbf{B}:=\begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix}$$

即同型矩阵的加法就是两个矩阵对应位置上元素的加法.

同型矩阵加法运算规律

设$\mathbf{A}=(a_{ij})_{m\times n}$, $\mathbf{B}=(b_{ij})_{m\times n}$, $\mathbf{C}=(c_{ij})_{m\times n}$, 那么

(1) 交换律: $\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{B}+\mathbf{A}$;

(2) 结合律: $(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C}=\mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C})$;

(3) 同型零矩阵加法: $\mathbf{A}+\mathbf{O}_{m\times n}=\mathbf{O}_{m\times n}+\mathbf{A}=\mathbf{A}$.

(4) **同型负矩阵**: 存在$\mathbf{A}$的唯一(为什么？)一个同型负矩阵, 记为$-\mathbf{A}$, 使得

$$\mathbf{A}+(-\mathbf{A})=(-\mathbf{A})+\mathbf{A}=\mathbf{O}_{m\times n}.$$

同型矩阵加法运算规律

设$\mathbf{A}=(a_{ij})_{m\times n}$, $\mathbf{B}=(b_{ij})_{m\times n}$, $\mathbf{C}=(c_{ij})_{m\times n}$, 那么

(1) 交换律: $\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{B}+\mathbf{A}$;

(2) 结合律: $(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C}=\mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C})$;

(3) 同型零矩阵加法: $\mathbf{A}+\mathbf{O}_{m\times n}=\mathbf{O}_{m\times n}+\mathbf{A}=\mathbf{A}$.

(4) 同型负矩阵: 存在$\mathbf{A}$的唯一(为什么?)一个同型负矩阵, 记为$-\mathbf{A}$, 使得

$$\mathbf{A}+(-\mathbf{A})=(-\mathbf{A})+\mathbf{A}=\mathbf{O}_{m\times n}.$$

定义 (同型矩阵减法)

两个同型矩阵$\mathbf{A}=(a_{ij})_{m\times n}$, $\mathbf{B}=(b_{ij})_{m\times n}$的减法运算$\mathbf{A}-\mathbf{B}$定义为

$$\mathbf{A}-\mathbf{B}:=\mathbf{A}+(-\mathbf{B})=(a_{ij}-b_{ij})_{m\times n}.$$

定义 (矩阵数量乘法)

矩阵$\mathbf{A} = (a_{ij})_{m\times n}$的数量乘法$k\mathbf{A}$定义为

$$k\mathbf{A} := (ka_{ij})_{m\times n} = \begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn} \end{bmatrix}, \quad k \in \mathbb{F}.$$

定义 (矩阵数量乘法)

矩阵$\mathbf{A} = (a_{ij})_{m\times n}$的数量乘法$k\mathbf{A}$定义为

$$k\mathbf{A} := (ka_{ij})_{m\times n} = \begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn} \end{bmatrix}, \quad k \in \mathbb{F}.$$

定义 (矩阵的线性运算)

同型矩阵加法和矩阵的数量乘法统称为矩阵的线性运算.

矩阵数量乘法运算规律

设$\mathbf{A}=(a_{ij})_{m\times n}$, $\mathbf{B}=(b_{ij})_{m\times n}$, $k,l\in\mathbb{F}$, 那么

(1) 数量关于同型矩阵加法的分配律: $k(\mathbf{A}+\mathbf{B})=k\mathbf{A}+k\mathbf{B}$;

(2) 矩阵关于数域内加法的分配律: $(k+l)\mathbf{A}=k\mathbf{A}+l\mathbf{B}$;

(3) 矩阵关于数域内乘法的结合律与交换律: $(kl)\mathbf{A}=k(l\mathbf{A})=l(k\mathbf{A})$;

(4) 矩阵单位数量乘法: $1\mathbf{A}=\mathbf{A}$;

(5) $(-1)\mathbf{A}=-\mathbf{A}$;

(6) $0\mathbf{A}=\mathbf{O}_{m\times n}$.

矩阵数量乘法运算规律

设$\mathbf{A}=(a_{ij})_{m\times n}$, $\mathbf{B}=(b_{ij})_{m\times n}$, $k,l\in\mathbb{F}$, 那么

(1) 数量关于同型矩阵加法的分配律: $k(\mathbf{A}+\mathbf{B})=k\mathbf{A}+k\mathbf{B}$;

(2) 矩阵关于数域内加法的分配律: $(k+l)\mathbf{A}=k\mathbf{A}+l\mathbf{B}$;

(3) 矩阵关于数域内乘法的结合律与交换律: $(kl)\mathbf{A}=k(l\mathbf{A})=l(k\mathbf{A})$;

(4) 矩阵单位数量乘法: $1\mathbf{A}=\mathbf{A}$;

(5) $(-1)\mathbf{A}=-\mathbf{A}$;

(6) $0\mathbf{A}=\mathbf{O}_{m\times n}$.

例 1

设$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}3&0&2\\1&3&4\end{bmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{bmatrix}-1&2&1\\0&2&3\end{bmatrix}$, 计算$\mathbf{A}+\mathbf{B}$ 和 $2\mathbf{A}-\mathbf{B}$.

定义 (矩阵乘法)

设矩阵$\mathbf{A}=(a_{ij})_{m\times p}$，$\mathbf{B}=(b_{ij})_{p\times n}$，我们定义矩阵$\mathbf{A}$和$\mathbf{B}$的乘法$\mathbf{AB}$为

$$\mathbf{AB}:=\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{bmatrix}=(c_{ij})_{m\times n}, \quad c_{ij}=\sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}.$$

矩阵的乘法

定义 (矩阵乘法)

设矩阵$\mathbf{A} = (a_{ij})_{m\times p}$, $\mathbf{B} = (b_{ij})_{p\times n}$, 我们定义矩阵$\mathbf{A}$和$\mathbf{B}$的乘法$\mathbf{AB}$为

$$\mathbf{AB} := \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{bmatrix} = (c_{ij})_{m\times n}, \quad c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}.$$

注

只有当第一个矩阵(左边的矩阵)的列数与第二个矩阵(右边的矩阵)的行数相等时, 两个矩阵才能相乘.

矩阵的乘法

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ip} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cdots & b_{1j} & \cdots \\ \cdots & b_{2j} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & b_{pj} & \cdots \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{p} a_{1k}b_{k1} & \sum_{k=1}^{p} a_{1k}b_{k2} & \cdots & \sum_{k=1}^{p} a_{1k}b_{kn} \\ \sum_{k=1}^{p} a_{2k}b_{k1} & \sum_{k=1}^{p} a_{2k}b_{k2} & \cdots & \sum_{k=1}^{p} a_{2k}b_{kn} \\ \vdots & \vdots & \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj} & \vdots \\ \sum_{k=1}^{p} a_{mk}b_{k1} & \sum_{k=1}^{p} a_{mk}b_{k2} & \cdots & \sum_{k=1}^{p} a_{mk}b_{kn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & c_{ij} & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mn} \end{bmatrix}$$

例 2

设$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}3 & -1 & 1\\ 2 & 2 & 0\end{bmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1\end{bmatrix}$, 计算$\mathbf{AB}$.

例 2

设$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}3 & -1 & 1\\ 2 & 2 & 0\end{bmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1\end{bmatrix}$, 计算$\mathbf{AB}$.

$$\mathbf{AB}=\begin{bmatrix}3 & -1 & 1\\ 2 & 2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & -3 & -2\\ 4 & 0 & 2\end{bmatrix}.$$

例 2

设$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}3 & -1 & 1\\ 2 & 2 & 0\end{bmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1\end{bmatrix}$, 计算$\mathbf{AB}$.

$$\mathbf{AB}=\begin{bmatrix}3 & -1 & 1\\ 2 & 2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & -3 & -2\\ 4 & 0 & 2\end{bmatrix}.$$

注

- 矩阵$\mathbf{A}$是2×3矩阵, 矩阵$\mathbf{B}$是3×3矩阵, 所以乘积$\mathbf{AB}$有意义;
- 矩阵$\mathbf{B}$与$\mathbf{A}$却不能相乘.

例 3

设$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 2 & -2\end{bmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{bmatrix}2 & 1\\ -6 & -3\end{bmatrix}$, 计算$\mathbf{AB}$与$\mathbf{BA}$.

例 3

设$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 2 & -2\end{bmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{bmatrix}2 & 1\\ -6 & -3\end{bmatrix}$, 计算$\mathbf{AB}$与$\mathbf{BA}$.

$$\mathbf{AB}=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 2 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1\\ -6 & -3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-8 & -4\\ 16 & 8\end{bmatrix};\ \mathbf{BA}=\begin{bmatrix}2 & 1\\ -6 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 2 & -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}.$$

例 3

设$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 2 & -2\end{bmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{bmatrix}2 & 1\\ -6 & -3\end{bmatrix}$, 计算$\mathbf{AB}$与$\mathbf{BA}$.

$$\mathbf{AB}=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 2 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1\\ -6 & -3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-8 & -4\\ 16 & 8\end{bmatrix};\ \mathbf{BA}=\begin{bmatrix}2 & 1\\ -6 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 2 & -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}.$$

注

- 虽然乘积$\mathbf{AB}$与乘积$\mathbf{BA}$都有意义, 但是$\mathbf{AB}\neq\mathbf{BA}$;
- 尽管$\mathbf{A}\neq\mathbf{O},\mathbf{B}\neq\mathbf{O}$, 仍有$\mathbf{BA}=\mathbf{O}$.

矩阵的乘法

矩阵乘法运算规律

设矩阵$\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$之间可做矩阵乘法, $k \in \mathbb{F}$, 那么

(1) 矩阵乘法结合律: $(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$;

(2) 矩阵乘法对矩阵加法的分配律: $\mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \mathbf{AC}+\mathbf{BC}$;

(3) 矩阵乘法关于数域内乘法的结合律和交换律: $(k\mathbf{A})\mathbf{B} = \mathbf{A}(k\mathbf{B}) = k(\mathbf{AB})$;

(4) 单位矩阵可看作是矩阵乘法的(左右)单位元: $\mathbf{E}_m\mathbf{A}_{m\times n} = \mathbf{A}_{m\times n}\mathbf{E}_n = \mathbf{A}_{m\times n}$;

(5) $\mathbf{O}_{m\times s}\mathbf{A}_{s\times n} = \mathbf{O}_{m\times n}$; $\mathbf{A}_{m\times s}\mathbf{O}_{s\times n} = \mathbf{O}_{m\times n}$.

矩阵乘法运算规律

设矩阵$\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$之间可做矩阵乘法, $k \in \mathbb{F}$, 那么

(1) 矩阵乘法结合律: $(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$;

(2) 矩阵乘法对矩阵加法的分配律: $\mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \mathbf{AC}+\mathbf{BC}$;

(3) 矩阵乘法关于数域内乘法的结合律和交换律: $(k\mathbf{A})\mathbf{B} = \mathbf{A}(k\mathbf{B}) = k(\mathbf{AB})$;

(4) 单位矩阵可看作是矩阵乘法的(左右)单位元: $\mathbf{E}_m\mathbf{A}_{m\times n} = \mathbf{A}_{m\times n}\mathbf{E}_n = \mathbf{A}_{m\times n}$;

(5) $\mathbf{O}_{m\times s}\mathbf{A}_{s\times n} = \mathbf{O}_{m\times n}$; $\mathbf{A}_{m\times s}\mathbf{O}_{s\times n} = \mathbf{O}_{m\times n}$.

注

- 矩阵乘法不满足交换律: 即在一般情况下$\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$;
- 尽管$\mathbf{A}$与$\mathbf{B}$可能满足$\mathbf{AB} = \mathbf{O}$, 但是我们得不到$\mathbf{A} = \mathbf{O}$或$\mathbf{B} = \mathbf{O}$的结论.

定义 (方阵的幂)

设矩阵$\mathbf{A}=(a_{ij})$是一个n阶方阵，我们定义

- 矩阵A的幂
$$\mathbf{A}^k := \underbrace{\mathbf{A}\mathbf{A}\cdots\mathbf{A}}_{k\text{个}}.$$
- 对非零方阵A，我们规定：$\mathbf{A}^0=\mathbf{E}_n$.

矩阵的乘法

定义 (方阵的幂)

设矩阵$\mathbf{A}=(a_{ij})$是一个n阶方阵，我们定义

- 矩阵A的幂

$$\mathbf{A}^k := \underbrace{\mathbf{A}\mathbf{A}\cdots\mathbf{A}}_{k\text{个}}.$$

- 对非零方阵$\mathbf{A}$，我们规定：$\mathbf{A}^0=\mathbf{E}_n$.

矩阵幂运算规律

设方阵$\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $k,l\in\mathbb{Z}^+$, 那么

(1) $\mathbf{A}^k\mathbf{A}^l=\mathbf{A}^{k+l}$; $(\mathbf{A}^k)^l=\mathbf{A}^{kl}$.

(2) 当$\mathbf{AB}=\mathbf{BA}$时，
$(\mathbf{AB})^k=\mathbf{A}^k\mathbf{B}^k$, $(\mathbf{A}+\mathbf{B})^2=\mathbf{A}^2+2\mathbf{AB}+\mathbf{B}^2$, $(\mathbf{A}+\mathbf{B})(\mathbf{A}-\mathbf{B})=\mathbf{A}^2-\mathbf{B}^2$.

矩阵的转置

定义 (矩阵转置,对称(反对称)矩阵)

- 设矩阵$\mathbf{A}=(a_{ij})_{m\times n}$, 我们定义$\mathbf{A}$的转置$\mathbf{A}^T$为

$$\mathbf{A}^T := \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

  即$\mathbf{A}^T$是由$\mathbf{A}$的行换成同序数的列所得到的$n\times m$矩阵.
- 如果n阶方阵$\mathbf{A}$满足$\mathbf{A}^T=\mathbf{A}$, 那么我们称$\mathbf{A}$为**对称矩阵**.
- 如果n阶方阵$\mathbf{A}$满足$\mathbf{A}^T=-\mathbf{A}$, 那么我们称$\mathbf{A}$为**反对称矩阵**.

矩阵转置运算规律

设$\mathbf{A}=(a_{ij})$, $\mathbf{B}=(b_{ij})$, $k\in\mathbb{F}$, 那么

(1) $(\mathbf{A}^T)^T=\mathbf{A}$;

(2) 当$\mathbf{A},\mathbf{B}$是同型矩阵时, $(\mathbf{A}+\mathbf{B})^T=\mathbf{A}^T+\mathbf{B}^T$;

(3) 当$\mathbf{A},\mathbf{B}$可做矩阵乘法时, $(\mathbf{A}\mathbf{B})^T=\mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$;

(4) $(k\mathbf{A})^T=k\mathbf{A}^T$;

(5) $\mathbf{A}\mathbf{A}^T$和$\mathbf{A}^T\mathbf{A}$都是对称矩阵.

矩阵转置运算规律

设$\mathbf{A}=(a_{ij})$, $\mathbf{B}=(b_{ij})$, $k\in\mathbb{F}$, 那么

(1) $(\mathbf{A}^T)^T=\mathbf{A}$;

(2) 当$\mathbf{A},\mathbf{B}$是同型矩阵时, $(\mathbf{A}+\mathbf{B})^T=\mathbf{A}^T+\mathbf{B}^T$;

(3) 当$\mathbf{A},\mathbf{B}$可做矩阵乘法时, $(\mathbf{A}\mathbf{B})^T=\mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$;

(4) $(k\mathbf{A})^T=k\mathbf{A}^T$;

(5) $\mathbf{A}\mathbf{A}^T$和$\mathbf{A}^T\mathbf{A}$都是对称矩阵.

例 3

设$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2&-1&3\\1&1&1\end{bmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{bmatrix}1&-1\\0&2\\-1&1\end{bmatrix}$, 计算$(\mathbf{A}\mathbf{B})^T$.

分块矩阵

定义 (分块矩阵)

- 对于行数和列数较高的矩阵$\mathbf{A}$，我们常用一些横线和竖线将矩阵$\mathbf{A}$分划成若干个小矩阵，每一个小矩阵称为$\mathbf{A}$的子块.
- 以子块为元素的形式上的矩阵称为**分块矩阵**.

分块矩阵

定义 (分块矩阵)

- 对于行数和列数较高的矩阵**A**，我们常用一些横线和竖线将矩阵**A**分划成若干个小矩阵，每一个小矩阵称为**A**的子块.
- 以子块为元素的形式上的矩阵称为**分块矩阵**.

一个矩阵的分块方式会有很多种，以下我们将4×5矩阵

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \end{bmatrix}$$

分割成不同的分块模式.

分块矩阵

$$\mathbf{A}=\left[\begin{array}{cc|ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \end{array}\right]=\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix},$$

其中

$$\mathbf{A}_{11}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix},\quad \mathbf{A}_{12}=\begin{bmatrix} a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{23} & a_{24} & a_{25} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A}_{21}=\begin{bmatrix} a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{bmatrix},\quad \mathbf{A}_{22}=\begin{bmatrix} a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{43} & a_{44} & a_{45} \end{bmatrix}.$$

分块矩阵

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{cc|cc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ \hline a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ \hline a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \end{array}\right] = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} & \mathbf{A}_{13} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} & \mathbf{A}_{23} \\ \mathbf{A}_{31} & \mathbf{A}_{32} & \mathbf{A}_{33} \end{bmatrix},$$

其中

$$\mathbf{A}_{11} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_{12} = \begin{bmatrix} a_{13} & a_{14} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_{13} = a_{15},$$

$$\mathbf{A}_{21} = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_{22} = \begin{bmatrix} a_{23} & a_{24} \\ a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_{23} = \begin{bmatrix} a_{25} \\ a_{35} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A}_{31} = \begin{bmatrix} a_{41} & a_{42} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_{32} = \begin{bmatrix} a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_{33} = a_{45},$$

分块矩阵

$$\mathbf{A}=\left[\begin{array}{c|c|c|c|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \end{array}\right]=\begin{bmatrix}\mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} & \mathbf{A}_{13} & \mathbf{A}_{14} & \mathbf{A}_{15}\end{bmatrix},$$

其中

$$\mathbf{A}_{11}=\begin{bmatrix}a_{11}\\a_{21}\\a_{31}\\a_{41}\end{bmatrix},\ \mathbf{A}_{12}=\begin{bmatrix}a_{12}\\a_{22}\\a_{32}\\a_{42}\end{bmatrix},\ \mathbf{A}_{13}=\begin{bmatrix}a_{13}\\a_{23}\\a_{33}\\a_{43}\end{bmatrix},\ \mathbf{A}_{14}=\begin{bmatrix}a_{14}\\a_{24}\\a_{34}\\a_{44}\end{bmatrix},\ \mathbf{A}_{15}=\begin{bmatrix}a_{15}\\a_{25}\\a_{35}\\a_{45}\end{bmatrix}.$$

这种矩阵的分块方式称为**矩阵的按列分块**.

分块矩阵

$$\mathbf{A}=\left[\begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ \hline a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ \hline a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \end{array}\right]=\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} \\ \mathbf{A}_{21} \\ \mathbf{A}_{31} \\ \mathbf{A}_{41} \end{bmatrix}.$$

其中

$$\mathbf{A}_{11}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \end{bmatrix},\ \mathbf{A}_{21}=\begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A}_{31}=\begin{bmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \end{bmatrix},\ \mathbf{A}_{41}=\begin{bmatrix} a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \end{bmatrix}.$$

这种矩阵的分块方式称为**矩阵的按行分块**.

定义 (同型矩阵对应分块矩阵加法)

对两个同型矩阵$\mathbf{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，$\mathbf{B}=(b_{ij})_{m\times n}$，的行和列采用相同的分块方式

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}\mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} & \cdots & \mathbf{A}_{1t}\\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} & \cdots & \mathbf{A}_{2t}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \mathbf{A}_{s1} & \mathbf{A}_{s2} & \cdots & \mathbf{A}_{st}\end{bmatrix},\quad \mathbf{B}=\begin{bmatrix}\mathbf{B}_{11} & \mathbf{B}_{12} & \cdots & \mathbf{B}_{1t}\\ \mathbf{B}_{21} & \mathbf{B}_{22} & \cdots & \mathbf{B}_{2t}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \mathbf{B}_{s1} & \mathbf{B}_{s2} & \cdots & \mathbf{B}_{st}\end{bmatrix}.$$

其中$\mathbf{A}_{ij}$和$\mathbf{B}_{ij}$的行数相同、列数相同, 那么

$$\mathbf{A}\pm\mathbf{B}=\begin{bmatrix}\mathbf{A}_{11}\pm\mathbf{B}_{11} & \mathbf{A}_{12}\pm\mathbf{B}_{12} & \cdots & \mathbf{A}_{1t}\pm\mathbf{B}_{1t}\\ \mathbf{A}_{21}\pm\mathbf{B}_{21} & \mathbf{A}_{22}\pm\mathbf{B}_{22} & \cdots & \mathbf{A}_{2t}\pm\mathbf{B}_{2t}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \mathbf{A}_{s1}\pm\mathbf{B}_{s1} & \mathbf{A}_{s2}\pm\mathbf{B}_{s2} & \cdots & \mathbf{A}_{st}\pm\mathbf{B}_{st}\end{bmatrix}.$$

定义 (矩阵对应分块矩阵数量乘法)

对矩阵$\mathbf{A}=(a_{ij})_{m\times n}$的任意分块方式

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}\mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} & \cdots & \mathbf{A}_{1t}\\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} & \cdots & \mathbf{A}_{2t}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \mathbf{A}_{s1} & \mathbf{A}_{s2} & \cdots & \mathbf{A}_{st}\end{bmatrix},$$

都有

$$k\mathbf{A}=\begin{bmatrix}k\mathbf{A}_{11} & k\mathbf{A}_{12} & \cdots & k\mathbf{A}_{1t}\\ k\mathbf{A}_{21} & k\mathbf{A}_{22} & \cdots & k\mathbf{A}_{2t}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ k\mathbf{A}_{s1} & k\mathbf{A}_{s2} & \cdots & k\mathbf{A}_{st}\end{bmatrix},\ k\in\mathbb{F}.$$

定义 (矩阵对应分块矩阵乘法)

对矩阵$\mathbf{A}=(a_{ij})_{m\times s}$，$\mathbf{B}=(b_{ij})_{s\times n}$，设矩阵$\mathbf{A}$的行分块和$\mathbf{B}$的列分块相同:

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}\mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} & \cdots & \mathbf{A}_{1k}\\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} & \cdots & \mathbf{A}_{2k}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \mathbf{A}_{t1} & \mathbf{A}_{t2} & \cdots & \mathbf{A}_{tk}\end{bmatrix},\quad \mathbf{B}=\begin{bmatrix}\mathbf{B}_{11} & \mathbf{B}_{12} & \cdots & \mathbf{B}_{1u}\\ \mathbf{B}_{21} & \mathbf{B}_{22} & \cdots & \mathbf{B}_{2u}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \mathbf{B}_{k1} & \mathbf{B}_{k2} & \cdots & \mathbf{B}_{ku}\end{bmatrix},$$

那么

$$\mathbf{AB}=\begin{bmatrix}\mathbf{C}_{11} & \mathbf{C}_{12} & \cdots & \mathbf{C}_{1u}\\ \mathbf{C}_{21} & \mathbf{C}_{22} & \cdots & \mathbf{C}_{2u}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \mathbf{C}_{t1} & \mathbf{C}_{t2} & \cdots & \mathbf{C}_{tu}\end{bmatrix}, \text{其中}\, \mathbf{C}_{ij}=\sum_{\ell=1}^{k}\mathbf{A}_{i\ell}\mathbf{B}_{\ell j}.$$

定义 (矩阵对应分块矩阵转置)

设矩阵

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}\mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} & \cdots & \mathbf{A}_{1k}\\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} & \cdots & \mathbf{A}_{2k}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \mathbf{A}_{t1} & \mathbf{A}_{t2} & \cdots & \mathbf{A}_{tk}\end{bmatrix},$$

那么矩阵A对应以上分块矩阵的转置为

$$\mathbf{A}^T=\begin{bmatrix}\mathbf{A}_{11}^T & \mathbf{A}_{12}^T & \cdots & \mathbf{A}_{1k}^T\\ \mathbf{A}_{21}^T & \mathbf{A}_{22}^T & \cdots & \mathbf{A}_{2k}^T\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \mathbf{A}_{t1}^T & \mathbf{A}_{t2}^T & \cdots & \mathbf{A}_{tk}^T\end{bmatrix},$$

分块矩阵的运算

定义 (方阵对应分块对角阵)

设矩阵$\mathbf{A}$是n阶方阵. 如果$\mathbf{A}$的分块矩阵只有在主对角线上有非零子块且这些非零子块都是方阵, 而其余子块都是零矩阵:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{O} & \cdots & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{A}_2 & \cdots & \mathbf{O} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \cdots & \mathbf{A}_t \end{bmatrix},$$

其中$\mathbf{A}_i\ (i = 1, 2, \cdots, t)$都是方阵, 那么这样的分块阵称为**分块对角阵**.

注

- 设列向量

$$\boldsymbol{e}_i = [0, \cdots, 0, \underbrace{1}_{\text{第}i\text{个}}, 0, \cdots, 0]^T,$$

那么n阶单位矩阵$\mathbf{E}_n$可以分块为$\mathbf{E}_n = [\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n]$.

- 将矩阵$\mathbf{A}$按列分块为$\mathbf{A} = [\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \cdots, \mathbf{A}_n]$, 其中$\mathbf{A}_k(k = 1, 2, \cdots, n)$为$\mathbf{A}$的第$k$个列向量, 那么

$$[\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \cdots, \mathbf{A}_n] = \mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{E} = \mathbf{A}[\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n] = [\mathbf{A}\boldsymbol{e}_1, \mathbf{A}\boldsymbol{e}_2, \cdots, \mathbf{A}\boldsymbol{e}_n],$$

即$\mathbf{A}_k = \mathbf{A}\boldsymbol{e}_k\ (k = 1, 2, \cdots, n)$为矩阵$\mathbf{A}$的第$k$列.

- $\boldsymbol{e}_k^T\mathbf{A}\ (k = 1, 2, \cdots, n)$为矩阵$\mathbf{A}$的第$k$行.
- $\boldsymbol{e}_k^T\mathbf{A}\boldsymbol{e}_l = a_{kl}$为矩阵$\mathbf{A}$的第$(k, l)$元素.

命题

设$\mathbf{A}$是$m \times n$矩阵．如果对任意的$n \times 1$矩阵$\boldsymbol{\alpha}$，都有$\mathbf{A}\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{O}$，那么$\mathbf{A} = \mathbf{O}$.

命题

设$\mathbf{A}$是$m \times n$矩阵. 如果对任意的$n \times 1$矩阵$\boldsymbol{\alpha}$, 都有$\mathbf{A}\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{O}$, 那么$\mathbf{A} = \mathbf{O}$.

例 4

设$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -4 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$, 计算$\mathbf{A} + \mathbf{B}$.

命题

设$\mathbf{A}$是$m \times n$矩阵. 如果对任意的$n \times 1$矩阵$\boldsymbol{\alpha}$, 都有$\mathbf{A}\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{O}$，那么$\mathbf{A} = \mathbf{O}$.

例 4

设$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -4 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$, 计算$\mathbf{A} + \mathbf{B}$.

例 5

设$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$, 计算$\mathbf{AB}$.

矩阵初等变换

定义 (线性方程组系数矩阵)

设线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

我们称矩阵$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$为该线性方程组的**系数矩阵**.

线性方程组的矩阵表示

令$\boldsymbol{x}=[x_1,x_2,\cdots,x_n]^T$, $\boldsymbol{\beta}=[b_1,b_2,\cdots,b_m]^T$, 那么

$$\mathbf{A}\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n \\ \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}=\boldsymbol{\beta}.$$

这说明线性方程组可以用矩阵形式来表示: $\mathbf{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}$.

定义 (线性方程组增广矩阵)

设线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

我们称矩阵 $\tilde{\mathbf{A}} = \left[\begin{array}{cccc:c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$ 为该线性方程组的**增广矩阵**.

系数矩阵$\mathbf{A}$也可以按列分块写成$\mathbf{A}=[\boldsymbol{\alpha}_1\ \boldsymbol{\alpha}_2\ \cdots\ \boldsymbol{\alpha}_n]$, $\boldsymbol{\alpha}_j=[a_{1j}\, a_{2j}\ \cdots\ a_{nj}]^T$, $j=1,2,\cdots,n$表示$\mathbf{A}$的第j列.

记$\beta=[b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_m]^T$, 那么该线性方程组的增广矩阵

$$\tilde{\mathbf{A}}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

可以表示为

$$\tilde{\mathbf{A}}=[\mathbf{A}\mid\beta]=[\boldsymbol{\alpha}_1\ \boldsymbol{\alpha}_2\ \cdots\ \boldsymbol{\alpha}_n\ \beta].$$

由于线性方程组与它的增广矩阵有着对应关系, 为了了解在求解过程中线性方程组的增广矩阵的变化, 我们用高斯消元法来解下列线性方程组.

由于线性方程组与它的增广矩阵有着对应关系, 为了了解在求解过程中线性方程组的增广矩矩阵的变化, 我们用高斯消元法来解下列线性方程组.

高斯消元法引例

使用高斯消元法求解下列线性方程组:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \qquad\quad = 3, \\ \ \ x_1 - x_2 + x_3 = 4, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = -1. \end{cases}$$

使用高斯消元法求解线性方程组 | 探索增广矩阵的初等(行)变换

$$\text{线性方程组}\begin{cases} 2x_1 + x_2 \qquad\;\; = 3, \\ \;\; x_1 - x_2 + x_3 = 4, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = -1. \end{cases} \longleftrightarrow \quad \text{增广矩阵}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

交换方程组的第一个方程和第二个方程 $\downarrow$ 交换增广矩阵的第一行和第二行

$$\text{线性方程组}\begin{cases} \;\; {\color{red} x_1 - x_2 + x_3 = 4}, \\ {\color{blue} 2x_1 + x_2 \qquad\;\; = 3}, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = -1. \end{cases} \longleftrightarrow \quad \text{增广矩阵}\begin{bmatrix} {\color{red}1} & {\color{red}-1} & {\color{red}1} & {\color{red}4} \\ {\color{blue}2} & {\color{blue}1} & {\color{blue}0} & {\color{blue}3} \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

高斯消元法与矩阵初等变换

新方程组第一个方程
乘以-2加到
第二个方程和第三个方程上

$\downarrow$

新增广矩阵第一行的每个元素
乘以-2分别加到
第二行和第三行对应的元素上

$$\text{线性方程组}\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 4, \\ 3x_2 - 2x_3 = -5, \\ 3x_2 - 3x_3 = -9. \end{cases} \longleftrightarrow \text{增广矩阵}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & -2 & -5 \\ 0 & 3 & -3 & -9 \end{bmatrix}$$

新方程组第二个方程
乘以-1加到第三个方程上后
第三个方程乘以-1

$\downarrow$

新增广矩阵第二行的每个元素
乘以-1加到第三行对应元素上后
第三行每个元素乘以-1

$$\text{线性方程组}\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 4, \\ 3x_2 - 2x_3 = -5, \\ x_3 = 4. \end{cases} \longleftrightarrow \text{增广矩阵}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

新方程组第三个方程
乘以2加到第二个方程上
第二个方程乘以$1/3$

$\downarrow$

新增广矩阵第三行的每个元素
乘以2加到第二行对应元素上
第三行每个元素乘以$1/3$

$$\text{线性方程组}\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 4, \\ \qquad x_2 \qquad = 1, \\ \qquad\qquad x_3 = 4. \end{cases} \longleftrightarrow \text{增广矩阵}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

新方程组第三个方程
乘以-1加到第一个方程上
第二个方程乘以1加到第一个方程上

$\downarrow$

新增广矩阵第三行的每个元素乘以-1
第二行每个元素乘以-1
都加到第一行对应位置元素上

$$\text{线性方程组}\begin{cases} x_1 \qquad\qquad = 1, \\ \qquad x_2 \qquad = 1, \\ \qquad\qquad x_3 = 4. \end{cases} \longleftrightarrow \text{增广矩阵}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

因此，最后一个方程组有唯一解: $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 4.$

因此，最后一个方程组有唯一解: $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 4.$

注

- 在用消元法解线性方程组的过程中，我们主要用到了下列三种方程之间的变换:

  (1) 交换两个方程的次序;
  (2) 一个方程乘上一个非零数;
  (3) 一个方程乘上一个非零数加到另一个方程上

因此，最后一个方程组有唯一解：$x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 4.$

注

- 在用消元法解线性方程组的过程中，我们主要用到了下列三种方程之间的变换：

  (1) 交换两个方程的次序；
  (2) 一个方程乘上一个非零数；
  (3) 一个方程乘上一个非零数加到另一个方程上

- 上述三种方程之间的变换都是可逆的，因此变换前的方程组与变换后的方程组是同解的，从而最后求得方程组的解就是原方程组的解.

因此，最后一个方程组有唯一解: $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 4.$

注

- 在用消元法解线性方程组的过程中，我们主要用到了下列三种方程之间的变换:

  (1) 交换两个方程的次序;
  (2) 一个方程乘上一个非零数;
  (3) 一个方程乘上一个非零数加到另一个方程上

- 上述三种方程之间的变换都是可逆的，因此变换前的方程组与变换后的方程组是同解的，从而最后求得方程组的解就是原方程组的解.
- 上述三种方程之间的变换同时也对应了增广矩阵之间的行变换.

定义 (矩阵初等行变换)

我们称下面三种变换为矩阵的初等行变换:

(1) 交换矩阵的某两行: 我们用$\boldsymbol{r}_i \leftrightarrow \boldsymbol{r}_j$;表示交换矩阵的第 i, j两行;

(2) 矩阵的某一行乘以非零数: 我们用$k\boldsymbol{r}_i$表示矩阵的第i行元素乘以非零数k;

(3) 将矩阵的某一行的倍数加到另一行: 我们用$\boldsymbol{r}_j + k\boldsymbol{r}_i$表示将矩阵第$i$行的$k$倍加到第$j$行.

矩阵初等变换

定义 (矩阵初等行变换)

我们称下面三种变换为矩阵的初等行变换:

(1) 交换矩阵的某两行: 我们用$\boldsymbol{r}_i \leftrightarrow \boldsymbol{r}_j$;表示交换矩阵的第 i, j两行;

(2) 矩阵的某一行乘以非零数: 我们用$k\boldsymbol{r}_i$表示矩阵的第i行元素乘以非零数k;

(3) 将矩阵的某一行的倍数加到另一行: 我们用$\boldsymbol{r}_j + k\boldsymbol{r}_i$表示将矩阵第$i$行的$k$倍加到第$j$行.

定义 (矩阵初等列变换)

我们称下面三种变换为矩阵的初等列变换:

(1) 交换矩阵的某两列: 我们用$\boldsymbol{c}_i \leftrightarrow \boldsymbol{c}_j$;表示交换矩阵的第 i, j两列;

(2) 矩阵的某一列乘以非零数: 我们用$k\boldsymbol{c}_i$表示矩阵的第i列元素乘以非零数k;

(3) 将矩阵的某一列的倍数加到另一列: 我们用$\boldsymbol{c}_j + k\boldsymbol{c}_i$表示将矩阵第$i$列的$k$倍加到第$j$列.

定义 (矩阵初等变换)

矩阵的初等行变换和初等列变换统称为矩阵的初等变换.

定义 (矩阵初等变换)

矩阵的初等行变换和初等列变换统称为矩阵的初等变换.

注

- 矩阵初等变换都是可逆的, 即该变换可以还原. 我们以初等行变换为例:
  (1) 变换$\boldsymbol{r}_i \leftrightarrow \boldsymbol{r}_j$的逆变换就是其本身;
  (2) 变换$k\boldsymbol{r}_i$的逆变换是$\dfrac{1}{k}\boldsymbol{r}_i$;
  (3) 变换$\boldsymbol{r}_j + k\boldsymbol{r}_i$的逆变换是$\boldsymbol{r}_j + (-k)\boldsymbol{r}_i$.

定义 (矩阵初等变换)

矩阵的初等行变换和初等列变换统称为矩阵的初等变换.

注

- 矩阵初等变换都是可逆的, 即该变换可以还原. 我们以初等行变换为例:
  (1) 变换$\boldsymbol{r}_i \leftrightarrow \boldsymbol{r}_j$的逆变换就是其本身;
  (2) 变换$k\boldsymbol{r}_i$的逆变换是$\frac{1}{k}\boldsymbol{r}_i$;
  (3) 变换$\boldsymbol{r}_j + k\boldsymbol{r}_i$的逆变换是$\boldsymbol{r}_j + (-k)\boldsymbol{r}_i$.
- 我们对线性方程组进行高斯消元操作时, 对应的若干增广矩阵有以下共同特点:
  - 可画一条阶梯线,线的下方全为零;
  - 每个台阶只有一行, 台阶数就是非零行的行数;
  - 每一非零行的第一个非零元位于上一行第一个非零元的右侧.

定义 (行阶梯形矩阵,行最简形矩阵)

- 我们称形如以下形式的矩阵为**行阶梯形矩阵**:

$$\begin{bmatrix} 1 & * & * & * \\ 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & * & 0 \\ 0 & 1 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & * & * & 0 \\ 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 1 & * \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & * \\ 0 & 1 & 0 & * \\ 0 & 0 & 1 & * \end{bmatrix}.$$

- 我们称形如下的行阶梯形矩阵为**行最简形矩阵**: 它的非零行的第一个非零元全为1, 并且这些“1”所在的列的其余元素全为零.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & * \\ 0 & 1 & 0 & * \\ 0 & 0 & 1 & * \end{bmatrix}.$$

行阶梯形矩阵举例

- 矩阵 $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{bmatrix}$ 不是行阶梯形矩阵, 因为第一行第一个非零元2下方有非零元素4;
- 矩阵 $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 7 \end{bmatrix}$ 不是行阶梯形矩阵, 因为第二行第一个非零元3不在上一行第一个非零元1的右侧;
- 矩阵 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 是行阶梯形矩阵, 并且是行最简形矩阵.

例

试用矩阵行的初等变换将下列矩阵化为行阶梯形矩阵:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ -1 & 4 & -3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

行阶梯形矩阵

$$
\begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ -1 & 4 & -3 & 2 & 2 \end{bmatrix}
\xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3}
\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & -3 & 2 & 2 \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{array}{c} \xrightarrow{r_2+(-1)r_3} \\ \xrightarrow{r_3+(-2)r_1} \\ \xrightarrow{r_4+r_1} \end{array}
\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & 5 & -3 & -6 \\ 0 & 5 & -5 & 3 & 6 \end{bmatrix}
\begin{array}{c} \xrightarrow{\frac{1}{2}r_1} \\ \xrightarrow{r_4+r_3} \end{array}
\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 5 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
$$

$$
\xrightarrow{r_3+5r_2}
\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{(行阶梯形矩阵)}
$$

行阶梯形矩阵

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}r_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_1+(-1)r_3]{r_2+(-1)r_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_1+(-1)r_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{(行最简形矩阵)}$$

对于行最简形矩阵再实施初等列变换，我们可将其变成一种形状更简单的矩阵：

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{c_3+c_1} \xrightarrow{c_3+c_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\boldsymbol{c}_5+(-4)\boldsymbol{c}_1} \xrightarrow{\boldsymbol{c}_5+(-3)\boldsymbol{c}_2} \xrightarrow{\boldsymbol{c}_5+3\boldsymbol{c}_4} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\boldsymbol{c}_3\leftrightarrow\boldsymbol{c}_4} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{F}.$$

对于行最简形矩阵再实施初等列变换，我们可将其变成一种形状更简单的矩阵：

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & -1 & 0 & 4\\ 0 & 1 & -1 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \xrightarrow{\boldsymbol{c}_3+\boldsymbol{c}_1} \xrightarrow{\boldsymbol{c}_3+\boldsymbol{c}_2} \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 4\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\boldsymbol{c}_5+(-4)\boldsymbol{c}_1} \xrightarrow{\boldsymbol{c}_5+(-3)\boldsymbol{c}_2} \xrightarrow{\boldsymbol{c}_5+3\boldsymbol{c}_4} \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \xrightarrow{\boldsymbol{c}_3\leftrightarrow\boldsymbol{c}_4} \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix} = \mathbf{F}.$$

最后一个矩阵$\mathbf{F}$称为矩阵$\mathbf{A}$的标准形，我们将$\mathbf{F}$写成分块矩阵的形式：

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix}\mathbf{E}_3 & \mathbf{O}\\ \mathbf{O} & \mathbf{O}\end{bmatrix}.$$

定理

(1) 任意一个$m \times n$矩阵总可以经过若干次初等行变换化为行阶梯形矩阵;

(2) 任意一个$m \times n$矩阵总可以经过若干次初等行变换化为行最简形矩阵;

(3) 任意一个$m \times n$矩阵总可以经过若干次初等变换化为它的标准形:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_r & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} \end{bmatrix}_{m \times n}.$$

其中r为行阶梯形矩阵中非零行的行数.

矩阵初等变换

定义

- 如果矩阵A经过有限次初等行(列)变换化为矩阵B, 那么我们称矩阵A与矩阵B行(列)**等价**;
- 如果矩阵A经过有限次初等变换化为矩阵B, 那么称矩阵A与矩阵B**等价**.

定义

- 如果矩阵$\mathbf{A}$经过有限次初等行(列)变换化为矩阵$\mathbf{B}$, 那么我们称矩阵$\mathbf{A}$与矩阵$\mathbf{B}$行(列)等价;
- 如果矩阵$\mathbf{A}$经过有限次初等变换化为矩阵$\mathbf{B}$, 那么称矩阵$\mathbf{A}$与矩阵$\mathbf{B}$等价.

定理

矩阵间的行(列)等价以及矩阵间的等价是一个等价关系: 即

(1) 自反性: 任意矩阵$\mathbf{A}$与自身等价;

(2) 对称性: 如果矩阵$\mathbf{A}$与矩阵$\mathbf{B}$等价, 那么矩阵$\mathbf{B}$与矩阵$\mathbf{A}$等价;

(3) 传递性: 如果矩阵$\mathbf{A}$与矩阵$\mathbf{B}$等价, 矩阵$\mathbf{B}$与矩阵$\mathbf{C}$等价, 那么矩阵$\mathbf{A}$与矩阵$\mathbf{C}$等价.

定义 (n元非齐次线性方程组)

如果n元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{1}$$

满足$b_i(i = 1, 2, \cdots, m)$不全为零, 那么我们称这个线性方程组为n**元非齐次线性方程组**.

定义 (n元齐次线性方程组)

我们称这个线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases} \tag{2}$$

为n元齐次线性方程组.

定义 (n元齐次线性方程组)

我们称这个线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases} \tag{2}$$

为n元齐次线性方程组.

注释

- 齐次线性方程组一定有解$x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$, 这个解称为齐次线性方程组的零解.

定义 (n元齐次线性方程组)

我们称这个线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases} \tag{2}$$

为n元齐次线性方程组.

注释

- 齐次线性方程组一定有解$x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$, 这个解称为齐次线性方程组的零解.如果齐次线性方程组有唯一解,那么这个唯一解必定是零解.
- 如果齐次线性方程组有无穷多解时,那么我们称齐次线性方程组有非零解.

矩阵的初等变换求解线性方程组

以下我们用矩阵的初等行变换来求解线性方程组.

以下我们用矩阵的初等行变换来求解线性方程组.注意到:

- 消元法解线性方程组的过程就是
  (1) 对线性方程组的增广矩阵做初等行变换;
  (2) 将原方程组的增广矩阵先化为行阶梯形矩阵;
  (3) 化行阶梯形矩阵为行最简形矩阵.
- 增广矩阵的行最简形矩阵所对应的线性方程组与原线性方程组同解.

矩阵的初等变换求解线性方程组

以下我们用矩阵的初等行变换来求解线性方程组.注意到:

- 消元法解线性方程组的过程就是
  (1) 对线性方程组的增广矩阵做初等行变换;
  (2) 将原方程组的增广矩阵先化为行阶梯形矩阵;
  (3) 化行阶梯形矩阵为行最简形矩阵.
- 增广矩阵的行最简形矩阵所对应的线性方程组与原线性方程组同解.

因此, 求解n元非齐次线性方程组的具体步骤如下:

(i) 写出线性方程组(1)的增广矩阵$\tilde{\mathbf{A}}$;

(ii) 对$\tilde{\mathbf{A}}$实施初等行变换,化为行最简形矩阵$\tilde{\mathbf{R}}$;

(iii) 写出以$\tilde{\mathbf{R}}$为增广矩阵的线性方程组;

(iv) 以第一个非零元为系数的未知量作为固定未知量,留在等号的左边,其余的未知量作为自由未知量,移到等号右边,并令自由未知量为任意常数,从而求得线性方程组的解.

例

方程组 $\begin{cases} x_1+x_2-2x_3=1, \\ 3x_1+8x_2+x_3=-2, \\ 7x_1+2x_2-21x_3=13. \end{cases}$ 等价于方程组 $\begin{cases} x_1+x_2-2x_3=1, \\ \quad 5x_2+7x_3=-5, \\ \qquad\quad {\color{red}0=1}. \end{cases}$ 所以原方程组无解.

例

方程组 $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 1, \\ 3x_1 + 8x_2 + x_3 = -2, \\ 7x_1 + 2x_2 - 21x_3 = 13. \end{cases}$ 等价于方程组 $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 1, \\ 5x_2 + 7x_3 = -5, \\ 0 = 1. \end{cases}$ 所以原方程组无解.

命题

(i) 线性方程组(1)有解的充分必要条件是第一个非零元不出现在$\tilde{\mathrm{R}}$的最后一列;

(ii) 线性方程组(1)有唯一解的充分必要条件是第一个非零元不出现在$\tilde{\mathrm{R}}$的最后一列且第一个非零元的个数等于未知量的个数;

(iii) 线性方程组(1)有无穷多解的充分必要条件是第一个非零元不出现在$\tilde{\mathrm{R}}$的最后一列且第一个非零元的个数小于未知量的个数.

(i)、(ii)、(iii)的必要性可分别由(ii)、(iii)，(i)、(iii)和(i)、(ii)的充分性利用反证法得到.

(i)、(ii)、(iii)的必要性可分别由(ii)、(iii)，(i)、(iii)和(i)、(ii)的充分性利用反证法得到.

以下我们只需证明充分性线性方程组(1)的增广矩阵$\tilde{\mathbf{R}}$实施初等行变换化为行最简形矩阵$\tilde{\mathbf{R}}$:

$$\tilde{\mathbf{R}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & c_{11} & \cdots & c_{1,n-r} & d_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & c_{21} & \cdots & c_{2,n-r} & d_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & c_{r1} & \cdots & c_{r,n-r} & d_r \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & d_{r+1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

矩阵的初等变换求解线性方程组

(i) 如果首元出现在最后一列:$d_{r+1}=1$, 于是$\tilde{\mathbf{R}}$的第r行对应矛盾方程$0=1$, 从而线性方程组(1)无解.

矩阵的初等变换求解线性方程组

(i) 如果首元出现在最后一列:$d_{r+1}=1$, 于是$\tilde{\mathbf{R}}$的第r行对应矛盾方程$0=1$, 从而线性方程组(1)无解.

(ii) 当$d_{r+1}=0$(或d_{r+1}不出现), 且首元的个数等于未知量的个数时, $\tilde{\mathbf{R}}$可变为

$$\tilde{\mathbf{R}}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & d_1\\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & d_n\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\end{bmatrix}$$

此时$\tilde{\mathbf{R}}$对应的方程组为$x_1=d_1, x_2=d_2, \ldots, x_n=d_n$, 从而线性方程组(1)有唯一解.

(iii) 当$d_{r+1}=0$(或d_{r+1}不出现), 且第一个非零元的个数小于未知量的个数时, $\tilde{\mathbf{R}}$可变为

$$\tilde{\mathbf{R}}=\begin{bmatrix}1 & 0 & \cdots & 0 & c_{11} & \cdots & c_{1,n-r} & d_1\\ 0 & 1 & \cdots & 0 & c_{21} & \cdots & c_{2,n-r} & d_2\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1 & c_{r1} & \cdots & c_{r,n-r} & d_r\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\end{bmatrix}$$

此时$\tilde{\mathrm{R}}$对应的方程组为

$$\begin{cases} x_1 = -c_{11}x_{r+1} - c_{12}x_{r+2} - c_{1,n-r}x_n + d_1, \\ x_2 = -c_{21}x_{r+1} - c_{22}x_{r+2} - c_{2,n-r}x_n + d_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_r = -c_{r1}x_{r+1} - c_{r2}x_{r+2} - c_{r,n-r}x_n + d_r, \end{cases}$$

令自由未知数$x_{r+1} = k_1, x_{r+2} = k_2, \cdots, x_n = k_{n-r}$即得线性方程组(1)的含有$n-r$个参数的解

$$\begin{cases} x_1 = -c_{11}k_1 - c_{12}k_2 - c_{1,n-r}k_{n-r} + d_1, \\ x_2 = -c_{21}k_1 - c_{22}k_2 - c_{2,n-r}k_{n-r} + d_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_r = -c_{r1}k_1 - c_{r2}k_2 - c_{r,n-r}k_{n-r} + d_r, \end{cases}, \quad \begin{cases} x_{r+1} = k_1, \\ x_{r+2} = k_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n = k_{n-r}, \end{cases}$$

从而线性方程组(1)有无穷多解.

注

对于n元齐次线性方程组(2), 由于等号右端的常数项全为零, 所以我们只需对原方程组的系数矩阵实施初等行变换即可.

注

对于n元齐次线性方程组(2), 由于等号右端的常数项全为零, 所以我们只需对原方程组的系数矩阵实施初等行变换即可.

例 1

解方程组 $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + 6x_3 = 0, \\ 2x_1 \qquad\quad + 5x_3 = 0. \end{cases}$

注

对于n元齐次线性方程组(2), 由于等号右端的常数项全为零, 所以我们只需对原方程组的系数矩阵实施初等行变换即可.

例 1

解方程组 $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + 6x_3 = 0, \\ 2x_1 \qquad\quad + 5x_3 = 0. \end{cases}$

例 2

解方程组: (1) $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ 3x_1 + 6x_2 - 9x_3 + 7x_4 = 0, \\ 4x_1 - 6x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0. \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 1, \\ x_2 + x_3 + 2x_4 = -1, \\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 1, \\ x_1 - x_2 \qquad\quad - 4x_4 = 3. \end{cases}$

初等矩阵与矩阵的逆矩阵

定义 (方阵的逆矩阵)

设$\mathbf{A}$是一个n阶方阵，如果存在n阶方阵$\mathbf{B}$，使得$\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{E}_n$，那么我们称矩阵$\mathbf{A}$是**可逆的**，矩阵$\mathbf{B}$称为$\mathbf{A}$的**逆矩阵**。否则我们称矩阵$\mathbf{A}$是**不可逆的**。

定义 (方阵的逆矩阵)

设$\mathbf{A}$是一个n阶方阵，如果存在n阶方阵$\mathbf{B}$，使得$\mathbf{AB}=\mathbf{BA}=\mathbf{E}_n$，那么我们称矩阵$\mathbf{A}$是**可逆的**，矩阵$\mathbf{B}$称为$\mathbf{A}$的**逆矩阵**. 否则我们称矩阵$\mathbf{A}$是**不可逆的**.

注

- 若矩阵$\mathbf{A}$可逆，则$\mathbf{A}$的逆矩阵是唯一的. 若矩阵$\mathbf{B},\mathbf{C}$都满足

$$\mathbf{AB}=\mathbf{BA}=\mathbf{E}_n,\quad \mathbf{AC}=\mathbf{CA}=\mathbf{E}_n.$$

  由于矩阵乘法满足结合律，于是

$$\mathbf{C}=\mathbf{CE}_n=\mathbf{C}(\mathbf{AB})=(\mathbf{CA})\mathbf{B}=\mathbf{E}_n\mathbf{B}=\mathbf{B}.$$

- 我们通常记矩阵$\mathbf{A}$的逆矩阵为$\mathbf{A}^{-1}$.

逆矩阵的性质

(1) 若$\mathbf{A}$可逆, 则$\mathbf{A}^{-1}$也可逆, 且$(\mathbf{A}^{-1})^{-1}=\mathbf{A}$.

(2) 若$\mathbf{A}_1,\mathbf{A}_2,\cdots,\mathbf{A}_s$可逆, 则$\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2\cdots\mathbf{A}_s$也可逆, 且

$$(\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2\cdots\mathbf{A}_s)^{-1}=\mathbf{A}_s^{-1}\cdots\mathbf{A}_2^{-1}\mathbf{A}_1^{-1}.$$

(3) 若$\mathbf{A}$可逆, 则$\mathbf{A}^T$也可逆, 且$(\mathbf{A}^T)^{-1}=(\mathbf{A}^{-1})^T$.

(4) 若$\mathbf{A}$可逆且$k\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$, 则$k\mathbf{A}$也可逆, 且$(k\mathbf{A})^{-1}=k\mathbf{A}^{-1}$.

逆矩阵的性质

(1) 若$\mathbf{A}$可逆, 则$\mathbf{A}^{-1}$也可逆, 且$(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}$.

(2) 若$\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \cdots, \mathbf{A}_s$可逆, 则$\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2\cdots\mathbf{A}_s$也可逆, 且

$$(\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2\cdots\mathbf{A}_s)^{-1} = \mathbf{A}_s^{-1}\cdots\mathbf{A}_2^{-1}\mathbf{A}_1^{-1}.$$

(3) 若$\mathbf{A}$可逆, 则$\mathbf{A}^T$也可逆, 且$(\mathbf{A}^T)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^T$.

(4) 若$\mathbf{A}$可逆且$k \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, 则$k\mathbf{A}$也可逆, 且$(k\mathbf{A})^{-1} = k\mathbf{A}^{-1}$.

命题1

若矩阵$\mathbf{A}$有全零行(全零列), 那么矩阵$\mathbf{A}$一定不可逆.

逆矩阵的性质

(1) 若$\mathbf{A}$可逆, 则$\mathbf{A}^{-1}$也可逆, 且$(\mathbf{A}^{-1})^{-1}=\mathbf{A}$.

(2) 若$\mathbf{A}_1,\mathbf{A}_2,\cdots,\mathbf{A}_s$可逆, 则$\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2\cdots\mathbf{A}_s$也可逆, 且

$$(\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2\cdots\mathbf{A}_s)^{-1}=\mathbf{A}_s^{-1}\cdots\mathbf{A}_2^{-1}\mathbf{A}_1^{-1}.$$

(3) 若$\mathbf{A}$可逆, 则$\mathbf{A}^T$也可逆, 且$(\mathbf{A}^T)^{-1}=(\mathbf{A}^{-1})^T$.

(4) 若$\mathbf{A}$可逆且$k\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$, 则$k\mathbf{A}$也可逆, 且$(k\mathbf{A})^{-1}=k\mathbf{A}^{-1}$.

命题1

若矩阵$\mathbf{A}$有全零行(全零列), 那么矩阵$\mathbf{A}$一定不可逆.

假设矩阵$\mathbf{A}$的第i行是全零行, 则对任何一个矩阵$\mathbf{B}$矩阵$\mathbf{AB}$的第i行总是全为零, 从而不存在矩阵$\mathbf{B}$使得$\mathbf{AB}=\mathbf{BA}=\mathbf{E}_n$, 所以矩阵$\mathbf{A}$不可逆.

命题2

设矩阵$\mathbf{A}^k=\mathbf{O}_n(k\in\mathbb{Z}^+)$, 那么$(\mathbf{E}_n-\mathbf{A})^{-1}=\mathbf{E}_n+\mathbf{A}+\mathbf{A}^2+\cdots+\mathbf{A}^{k-1}$.

命题2

设矩阵$\mathbf{A}^k=\mathbf{O}_n(k\in\mathbb{Z}^+)$, 那么$(\mathbf{E}_n-\mathbf{A})^{-1}=\mathbf{E}_n+\mathbf{A}+\mathbf{A}^2+\cdots+\mathbf{A}^{k-1}$.

因为$\mathbf{A}^k=\mathbf{O}_n$, 于是

$$
\begin{aligned}
&(\mathbf{E}_n-\mathbf{A})(\mathbf{E}_n+\mathbf{A}+\mathbf{A}^2+\cdots+\mathbf{A}^{k-1})\\
=&\mathbf{E}_n(\mathbf{E}_n+\mathbf{A}+\mathbf{A}^2+\cdots+\mathbf{A}^{k-1})-\mathbf{A}(\mathbf{E}_n+\mathbf{A}+\mathbf{A}^2+\cdots+\mathbf{A}^{k-1})\\
=&\mathbf{E}_n+\mathbf{A}+\mathbf{A}^2+\cdots+\mathbf{A}^{k-1}-\mathbf{A}-\mathbf{A}^2-\cdots-\mathbf{A}^{k-1}-\mathbf{A}^k\\
=&\mathbf{E}_n-\mathbf{A}^k=\mathbf{E}_n.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&(\mathbf{E}_n+\mathbf{A}+\mathbf{A}^2+\cdots+\mathbf{A}^{k-1})(\mathbf{E}_n-\mathbf{A})\\
=&(\mathbf{E}_n+\mathbf{A}+\mathbf{A}^2+\cdots+\mathbf{A}^{k-1})\mathbf{E}_n-(\mathbf{E}_n+\mathbf{A}+\mathbf{A}^2+\cdots+\mathbf{A}^{k-1})\mathbf{A}\\
=&\mathbf{E}_n+\mathbf{A}+\mathbf{A}^2+\cdots+\mathbf{A}^{k-1}-\mathbf{A}-\mathbf{A}^2-\cdots-\mathbf{A}^{k-1}-\mathbf{A}^k\\
=&\mathbf{E}_n-\mathbf{A}^k=\mathbf{E}_n.
\end{aligned}
$$

初等矩阵

定义 (初等矩阵)

对n阶单位矩阵$\mathbf{E}_n$实施一次初等变换得到的矩阵称为n阶初等矩阵.

(1) 交换单位阵$\mathbf{E}_n$的第i行和第j行或交换$\mathbf{E}_n$的第i列和第j列得到的初等矩阵记为$\mathbf{E}_n(i,j)$:

$$\mathbf{E}_n(i,j)=\begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 0 & & 1 & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & 1 & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix}\begin{matrix} \\ \\ \text{第}i\text{行} \\ \\ \text{第}j\text{行} \\ \\ \\ \end{matrix}$$

定义 (初等矩阵)

对n阶单位矩阵$\mathbf{E}_n$实施一次初等变换得到的矩阵称为n阶初等矩阵.

(2) 用非零的数k乘单位阵$\mathbf{E}_n$的第i行或第i列得到的初等矩阵记为$\mathbf{E}_n(i(k))$:

$$\mathbf{E}_n(i(k)) = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & k & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix} & \text{第}i\text{行} \end{array}$$

定义 (初等矩阵)

对n阶单位矩阵$\mathbf{E}_n$实施一次初等变换得到的矩阵称为n阶初等矩阵.

(3) 将单位阵$\mathbf{E}_n$的第i行乘以k加到第j行(将单位阵$\mathbf{E}_n$的第j列乘以k加到第i列)得到的初等矩阵记为$\mathbf{E}_n(i(k),j)$:

$$\mathbf{E}_n(i(k),j) = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & 0 & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & k & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \text{第}i\text{行} \\ \\ \text{第}j\text{行} \\ \\ \\ \end{array}$$

命题3

初等矩阵都是可逆的, 并且初等矩阵的逆矩阵仍为同一类型的初等矩阵.

- $\mathbf{E}_n(i,j)^{-1} = \mathbf{E}_n(i,j)$: $\mathbf{E}_n(i,j)\mathbf{E}_n(i,j) = \mathbf{E}_n$.
- $\mathbf{E}_n(i(k))^{-1} = \mathbf{E}_n\left(i\left(\frac{1}{k}\right)\right)$:

$$\mathbf{E}_n\left(i\left(\frac{1}{k}\right)\right)\mathbf{E}_n(i(k)) = \mathbf{E}_n(i(k))\mathbf{E}_n\left(i\left(\frac{1}{k}\right)\right) = \mathbf{E}_n.$$

- $\mathbf{E}_n(i(k),j)^{-1} = \mathbf{E}_n(i(-k),j)$:

$$\mathbf{E}_n(i(k),j)\mathbf{E}_n(i(-k),j) = \mathbf{E}_n(i(-k),j)\mathbf{E}_n(i(k),j) = \mathbf{E}_n.$$

命题4

设矩阵$\mathbf{A} = (a_{ij})_{m\times n}$.

- 对$\mathbf{A}$施行一次初等行变换，相当于在$\mathbf{A}$的左边乘以相应的m阶初等矩阵;
- 对$\mathbf{A}$施行一次初等列变换，相当于在$\mathbf{A}$的右边乘以相应的n阶初等矩阵;

命题4

设矩阵$\mathbf{A} = (a_{ij})_{m\times n}$.

- 对$\mathbf{A}$施行一次初等行变换，相当于在$\mathbf{A}$的左边乘以相应的m阶初等矩阵;
- 对$\mathbf{A}$施行一次初等列变换，相当于在$\mathbf{A}$的右边乘以相应的n阶初等矩阵;

例 1

设$\mathbf{A}$是一个3阶方阵，试求一个3阶可逆矩阵$\mathbf{P}$，使得

$$\mathbf{PA} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31}+ka_{11} & a_{32}+ka_{12} & a_{33}+ka_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

定理 (方阵可逆的判别条件)

下面命题互相等价:

(1) n阶方阵$\mathbf{A}$可逆;

(2) 方阵$\mathbf{A}$行等价于单位矩阵$\mathbf{E}_n$;

(3) 方阵$\mathbf{A}$可表示为一些初等方阵的乘积.

定理 (方阵可逆的判别条件)

下面命题互相等价:

(1) n阶方阵$\mathbf{A}$可逆;

(2) 方阵$\mathbf{A}$行等价于单位矩阵$\mathbf{E}_n$;

(3) 方阵$\mathbf{A}$可表示为一些初等方阵的乘积.

$(1) \Rightarrow (2)$: 方阵$\mathbf{A}$经过若干次初等行变换可化为行最简形矩阵$\mathbf{R}$, 这相当于存在若干个初等矩阵$\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \cdots, \mathbf{P}_s$, 使得

$$\mathbf{P}_s \cdots \mathbf{P}_2 \mathbf{P}_1 \mathbf{A} = \mathbf{R}.$$

定理 (方阵可逆的判别条件)

下面命题互相等价:

(1) n阶方阵$\mathbf{A}$可逆;

(2) 方阵$\mathbf{A}$行等价于单位矩阵$\mathbf{E}_n$;

(3) 方阵$\mathbf{A}$可表示为一些初等方阵的乘积.

$(1) \Rightarrow (2)$: 方阵$\mathbf{A}$经过若干次初等行变换可化为行最简形矩阵$\mathbf{R}$, 这相当于存在若干个初等矩阵$\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \cdots, \mathbf{P}_s$, 使得

$$\mathbf{P}_s \cdots \mathbf{P}_2 \mathbf{P}_1 \mathbf{A} = \mathbf{R}.$$

由于初等矩阵都可逆,若$\mathbf{A}$可逆, 则$\mathbf{P}_s \cdots \mathbf{P}_2 \mathbf{P}_1 \mathbf{A}$可逆, 从而行最简形矩阵$\mathbf{R}$没有全零行, 即$\mathbf{R} = \mathbf{E}_n$,或者

$$\mathbf{P}_s \cdots \mathbf{P}_2 \mathbf{P}_1 \mathbf{A} = \mathbf{E}_n.$$

$(2) \Rightarrow (3)$：若方阵$\mathbf{A}$行等价于$\mathbf{E}_n$，则存在若干个初等矩阵$\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \cdots, \mathbf{P}_s$，使得$\mathbf{P}_s \cdots \mathbf{P}_2 \mathbf{P}_1 \mathbf{A} = \mathbf{E}_n$.

$(2)\Rightarrow(3)$: 若方阵$\mathbf{A}$行等价于$\mathbf{E}_n$, 则存在若干个初等矩阵$\mathbf{P}_1,\mathbf{P}_2,\cdots,\mathbf{P}_s$, 使得$\mathbf{P}_s\cdots\mathbf{P}_2\mathbf{P}_1\mathbf{A}=\mathbf{E}_n$.由于初等矩阵都可逆且其逆矩阵仍为初等矩阵, 于是

$$\begin{aligned}\mathbf{A}=&[(\mathbf{P}_1^{-1}(\mathbf{P}_2^{-1}\cdots(\mathbf{P}_s^{-1}\mathbf{P}_s)\cdots\mathbf{P}_2)\mathbf{P}_1]\mathbf{A}\\=&\mathbf{P}_1^{-1}\mathbf{P}_2^{-1}\cdots\mathbf{P}_s^{-1}(\mathbf{P}_s\cdots\mathbf{P}_2\mathbf{P}_1\mathbf{A})\\=&\mathbf{P}_1^{-1}\mathbf{P}_2^{-1}\cdots\mathbf{P}_s^{-1}\mathbf{E}_n\\=&\mathbf{P}_1^{-1}\mathbf{P}_2^{-1}\cdots\mathbf{P}_s^{-1}.\end{aligned}$$

也就是说$\mathbf{A}$可表示为初等方阵$\mathbf{P}_1^{-1},\mathbf{P}_2^{-1},\cdots,\mathbf{P}_s^{-1}$的乘积.

$(2) \Rightarrow (3)$: 若方阵$\mathbf{A}$行等价于$\mathbf{E}_n$, 则存在若干个初等矩阵$\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \cdots, \mathbf{P}_s$, 使得$\mathbf{P}_s \cdots \mathbf{P}_2\mathbf{P}_1\mathbf{A} = \mathbf{E}_n$.由于初等矩阵都可逆且其逆矩阵仍为初等矩阵, 于是

$$\begin{aligned}
\mathbf{A} =& [(\mathbf{P}_1^{-1}(\mathbf{P}_2^{-1} \cdots (\mathbf{P}_s^{-1}\mathbf{P}_s) \cdots \mathbf{P}_2)\mathbf{P}_1]\mathbf{A} \\
=& \mathbf{P}_1^{-1}\mathbf{P}_2^{-1} \cdots \mathbf{P}_s^{-1}(\mathbf{P}_s \cdots \mathbf{P}_2\mathbf{P}_1\mathbf{A}) \\
=& \mathbf{P}_1^{-1}\mathbf{P}_2^{-1} \cdots \mathbf{P}_s^{-1}\mathbf{E}_n \\
=& \mathbf{P}_1^{-1}\mathbf{P}_2^{-1} \cdots \mathbf{P}_s^{-1}.
\end{aligned}$$

也就是说$\mathbf{A}$可表示为初等方阵$\mathbf{P}_1^{-1}, \mathbf{P}_2^{-1}, \cdots, \mathbf{P}_s^{-1}$的乘积.

$(3) \Rightarrow (1)$: 设方阵$\mathbf{A} = \mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 \cdots \mathbf{P}_s$其中$\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \cdots, \mathbf{P}_s$均为初等矩阵. 由于初等矩阵均可逆, 于是它们的乘积$\mathbf{A} = \mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 \cdots, \mathbf{P}_s$也可逆.

如果n阶方阵$\mathbf{A}$可逆，那么存在一个可逆矩阵$\mathbf{P}=\mathbf{P}_s\cdots\mathbf{P}_2\mathbf{P}_1$，使得$\mathbf{PA}=\mathbf{E}_n$，于是

$$\mathbf{A}^{-1}=(\mathbf{P}_1^{-1}\mathbf{P}_2^{-1}\cdots\mathbf{P}_s^{-1})^{-1}=\mathbf{P}_s\cdots,\mathbf{P}_2\mathbf{P}_1=\mathbf{P}.$$

现在我们构造一个分块矩阵$(\mathbf{A}\mid\mathbf{E}_n)$，并做分块矩阵的乘法:

$$\mathbf{P}(\mathbf{A}\mid\mathbf{E}_n)=(\mathbf{PA}\mid\mathbf{PE}_n)=(\mathbf{E}_n\mid\mathbf{P})=(\mathbf{E}_n\mid\mathbf{A}^{-1}).$$

上式等价于对分块矩阵$(\mathbf{A}\mid\mathbf{E}_n)$实施了若干次初等行变换: 当$\mathbf{A}$变成$\mathbf{E}_n$时，单位矩阵$\mathbf{E}_n$就变成了$\mathbf{A}^{-1}$. 因此我们给出下列判别矩阵$\mathbf{A}$是否可逆并在可逆时求$\mathbf{A}^{-1}$的一种方法:

(1) 构造分块矩阵$(\mathbf{A}\mid\mathbf{E}_n)$;
(2) 对矩阵$(\mathbf{A}\mid\mathbf{E}_n)$实施初等行变换,将$(\mathbf{A}\mid\mathbf{E}_n)$化为行最简形矩阵;
(3) 如果$\mathbf{A}$不能行等价于$\mathbf{E}_n$,那么矩阵$\mathbf{A}$不可逆;

如果n阶方阵$\mathbf{A}$可逆, 那么存在一个可逆矩阵$\mathbf{P}=\mathbf{P}_s\cdots\mathbf{P}_2\mathbf{P}_1$, 使得$\mathbf{PA}=\mathbf{E}_n$, 于是

$$\mathbf{A}^{-1}=(\mathbf{P}_1^{-1}\mathbf{P}_2^{-1}\cdots\mathbf{P}_s^{-1})^{-1}=\mathbf{P}_s\cdots,\mathbf{P}_2\mathbf{P}_1=\mathbf{P}.$$

现在我们构造一个分块矩阵$(\mathbf{A}\mid\mathbf{E}_n)$, 并做分块矩阵的乘法:

$$\mathbf{P}(\mathbf{A}\mid\mathbf{E}_n)=(\mathbf{PA}\mid\mathbf{PE}_n)=(\mathbf{E}_n\mid\mathbf{P})=(\mathbf{E}_n\mid\mathbf{A}^{-1}).$$

上式等价于对分块矩阵$(\mathbf{A}\mid\mathbf{E}_n)$实施了若干次初等行变换: 当$\mathbf{A}$变成$\mathbf{E}_n$时, 单位矩阵$\mathbf{E}_n$就变成了$\mathbf{A}^{-1}$. 因此我们给出下列判别矩阵$\mathbf{A}$是否可逆并在可逆时求$\mathbf{A}^{-1}$的一种方法:

(1) 构造分块矩阵$(\mathbf{A}\mid\mathbf{E}_n)$;
(2) 对矩阵$(\mathbf{A}\mid\mathbf{E}_n)$实施初等行变换,将$(\mathbf{A}\mid\mathbf{E}_n)$化为行最简形矩阵;
(3) 如果$\mathbf{A}$不能行等价于$\mathbf{E}_n$,那么矩阵$\mathbf{A}$不可逆;
如果$\mathbf{A}$能够行等价于$\mathbf{E}_n$,那么$\mathbf{A}$可逆且$\mathbf{E}_n$就行等价于$\mathbf{A}^{-1}$.

利用逆矩阵还可以求解矩阵方程 $\mathbf{AX}=\mathbf{B}$, $\mathbf{XA}=\mathbf{B}$, $\mathbf{AXB}=\mathbf{C}$..

利用逆矩阵还可以求解矩阵方程 $\mathbf{AX}=\mathbf{B}$, $\mathbf{XA}=\mathbf{B}$, $\mathbf{AXB}=\mathbf{C}$..

- 如果矩阵$\mathbf{A}$可逆,那么

$$\begin{aligned}
&\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{AX})=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} \quad\Rightarrow\quad (\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A})\mathbf{X}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} \quad\Rightarrow\quad \mathbf{X}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B},\\
&(\mathbf{XA})\mathbf{A}^{-1}=\mathbf{BA}^{-1} \quad\Rightarrow\quad \mathbf{X}(\mathbf{AA}^{-1})=\mathbf{BA}^{-1} \quad\Rightarrow\quad \mathbf{X}=\mathbf{BA}^{-1}.
\end{aligned}$$

- 如果矩阵$\mathbf{A},\mathbf{B}$均可逆,那么

$$\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{AXB})\mathbf{B}^{-1}=(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A})\mathbf{X}(\mathbf{BB}^{-1})=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{CB}^{-1}\Rightarrow\mathbf{X}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{CB}^{-1}.$$

利用逆矩阵还可以求解矩阵方程 $\mathbf{AX}=\mathbf{B}$, $\mathbf{XA}=\mathbf{B}$, $\mathbf{AXB}=\mathbf{C}$..

- 如果矩阵$\mathbf{A}$可逆,那么

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{AX})=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} \quad &\Rightarrow \quad (\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A})\mathbf{X}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{X}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B},\\
(\mathbf{XA})\mathbf{A}^{-1}=\mathbf{BA}^{-1} \quad &\Rightarrow \quad \mathbf{X}(\mathbf{AA}^{-1})=\mathbf{BA}^{-1} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{X}=\mathbf{BA}^{-1}.
\end{aligned}$$

- 如果矩阵$\mathbf{A},\mathbf{B}$均可逆,那么

$$\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{AXB})\mathbf{B}^{-1}=(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A})\mathbf{X}(\mathbf{BB}^{-1})=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{CB}^{-1}\Rightarrow\mathbf{X}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{CB}^{-1}.$$

注

由于矩阵乘法不满足交换律,在解矩阵方程时我们必须分清楚逆矩阵是“左乘”还是“右乘”.

例 1

判断下列矩阵是否可逆,若可逆则求其逆矩阵:

$$(1)\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix};\quad (2)\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}.$$

例 1

判断下列矩阵是否可逆,若可逆则求其逆矩阵:

$$(1)\begin{bmatrix}1 & 1 & -2\\ 2 & -1 & -1\\ 3 & 6 & 9\end{bmatrix};\quad(2)\begin{bmatrix}1 & 1 & -2\\ 2 & -1 & -1\\ 3 & 6 & 9\end{bmatrix}.$$

例 2

解下列矩阵方程:

$$(1)\begin{bmatrix}-1 & 4\\ -2 & 7\end{bmatrix}\mathbf{X}=\begin{bmatrix}2 & -1 & 3\\ 1 & 0 & -2\end{bmatrix};(2)\,\mathbf{X}\begin{bmatrix}1 & 0 & -2\\ 0 & -2 & 1\\ -2 & -1 & 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0\\ 1 & 2 & -1\end{bmatrix}.$$

注

解矩阵方程也可以用初等行变换的方法. 例如, 对方程$\mathbf{AX} = \mathbf{B}$,

- 我们构造分块矩阵$(\mathbf{A} \mid \mathbf{B})$并对$(\mathbf{A} \mid \mathbf{B})$实施初等行变换化为行最简形矩阵.

注

解矩阵方程也可以用初等行变换的方法. 例如, 对方程$\mathbf{AX} = \mathbf{B}$,

- 我们构造分块矩阵$(\mathbf{A} \mid \mathbf{B})$并对$(\mathbf{A} \mid \mathbf{B})$实施初等行变换化为行最简形矩阵.
- 如果$\mathbf{A}$变为$\mathbf{E}_n$, 那么$\mathbf{A}$可逆, 此时$(\mathbf{A} \mid \mathbf{B})$中$\mathbf{B}$变成$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$.

初等矩阵与逆矩阵的应用

注

解矩阵方程也可以用初等行变换的方法. 例如, 对方程$\mathbf{AX}=\mathbf{B}$,

- 我们构造分块矩阵$(\mathbf{A}\mid\mathbf{B})$并对$(\mathbf{A}\mid\mathbf{B})$实施初等行变换化为行最简形矩阵.
- 如果$\mathbf{A}$变为$\mathbf{E}_n$, 那么$\mathbf{A}$可逆, 此时$(\mathbf{A}\mid\mathbf{B})$中$\mathbf{B}$变成$\mathbf{X}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$.

例 3

解下列矩阵方程:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{X} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

The End