

习题 1 请证明如果 $f \in C([a, b])$, 那么 $|f| \in C([a, b])$, 并且请你举例说明这个命题的逆命题不成立.

习题 2* 设 $f(x) = [x^2] \sin \pi x$, $x \in \mathbb{R}$, 请讨论函数 f 的连续性.

习题 3* 设 $f(x) = [x] + (x - [x])^{[x]}$, $x \in \mathbb{R}$, 证明函数 f 连续且 f 在 $[1, +\infty)$ 上单调递增.

习题 4 奥伦下列函数的连续性:

$$\begin{array}{ll} (1) f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^x - n^{-x}}{n^x + n^{-x}}, x \in \mathbb{R}; & (2) f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^2 e^{nx} + x}{e^{nx} + 1}, x \in \mathbb{R}; \\ (3) f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(e^n + x^n)}{n}, x \geq 0; & (4) f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{4^n + x^{2n} + \frac{1}{x^{2n}}}, x \neq 0; \\ (5) f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[2n]{\cos^{2n} x + \sin^{2n} x}, x \in \mathbb{R}. \end{array}$$

习题 5 设周期函数 $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 连续, 证明函数 f 在 \mathbb{R} 上可以取得到最大值和最小值.

习题 6 证明方程 $(1 - x) \cos x = \sin x$ 在 $(0, 1)$ 内至少有一个解.

习题 7 设 $f \in C([0, 2])$, 请证明存在 $x_1, x_2 \in [0, 2]$ 使得 $x_2 - x_1 = 1$ 且

$$f(x_2) - f(x_1) = \frac{1}{2}(f(2) - f(0)).$$

习题 8* 请你给出定义在区间 I 上满足介值性质但是不连续的函数 f 的例子.

姓名:

学号:

专业:

高等数学 函数的连续性
