习题 1 请判断下列幂级数的收敛半径:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n x^n$.　(2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{x^n}{\sqrt[3]{n}}$.　(3) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{x^n}{n^2}$.　(4) $\sum_{n=1}^{\infty} n^n x^n$.

(5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{n\sqrt{n}} x^n$.　(6) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{x^n}{4^n \ln n}$.　(7) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{(x-3)^n}{2n+1}$.(8) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

(9) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n (x+4)^n}{\sqrt{n}}$.　(10) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x-1)}{5^n \sqrt{n}}$.　(11) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n^n}$.　(12) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n^2+1}$.

习题 2 请判断下列幂级数的收敛半径:

(1) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{b^n}{\ln n}(x-a)^n$, $b > 0$.　(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 x^n}{(2n)!!}$.　(3) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n(\ln n)^2}$.

(4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(2n-1)!!}$.　(5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! x^n}{(2n-1)!!}$.

习题 3 寻找以下函数的幂级数表示并确定收敛区间:

(1) $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$.　(2) $f(x)=\dfrac{5}{1-4x^2}$.　(3) $f(x)=\dfrac{x}{9+x^2}$.　(4) $f(x)=\dfrac{1+x}{1-x}$.

(5) $f(x)=\dfrac{x}{2x^2+1}$.　(6) $f(x)=\dfrac{x^2}{a^3-x^3}$.

习题 4 请按要求回答下列问题:

(1) 找出$f(x)=\dfrac{1}{(1+x)^2}$的幂级数表示并计算其收敛半径.

(2) 使用(1)中的结论直接找出$f(x)=\dfrac{1}{(1+x)^3}$的幂级数表示.

(3) 使用(2)中的结论直接找出$f(x)=\dfrac{x^2}{(1+x)^3}$的幂级数表示.

习题 5 寻找以下函数的幂级数表示并确定收敛区间:

(1) $f(x)=\ln(5-x)$.　(2) $f(x)=x^2\arctan x^3$.　(3) $f(x)=\dfrac{x}{(1+4x)^2}$.

(4) $f(x)=\left(\dfrac{x}{2-x}\right)^3$.　(5) $f(x)=\dfrac{1+x}{(1-x)^2}$.　(6) $f(x)=\dfrac{x^2+x}{(1-x)^3}$.

习题 6 将下列不定积分转化为幂级数并确定收敛区间:

(1) $\displaystyle\int\frac{x}{1-x^8}\mathrm{d}x$.　(2) $\displaystyle\int\frac{x}{1+x^3}\mathrm{d}x$.

(3) $\displaystyle\int x^2\ln(1+x)\mathrm{d}x$.　(4) $\displaystyle\int\frac{\arctan x}{x}\mathrm{d}x$.

习题 7 请回答下列问题:

(1) 验证$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$是微分方程$f'(x)=f(x)$的一个解.

(2) 验证$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{2n}x^{2n}}{(2n)!}$是微分方程$f''(x)=f(x)$的一个解.

习题 8 请回答下列问题:

(1) 从级数$\sum_{n=0}^{\infty}x^n$出发, 计算$\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$, $|x|<1$.

(2) 寻找以下级数的和: $(i)\ \sum_{n=1}^{\infty}nx^n,\ |x|<1.\quad (ii)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}.$

(3) 寻找以下级数的和: $(i)\ \sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)x^n,\ |x|<1.\quad (ii)\ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{n^2-n}{2^n}.\quad (iii)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}$

习题 9 使用$\arctan(x)$的幂级数我们可以得到如下等式:

$$\pi=2\sqrt{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)3^n}.$$

(1) 请你使用上述类似的想法计算积分 $\int_0^{1/2}\frac{dx}{x^2-x+1}=\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$.

(2) 将$\frac{1}{(x^3+1)}$表示为幂级数并验证如下等式成立:

$$\pi=\frac{3\sqrt{3}}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{8^n}\left(\frac{2}{3n+1}+\frac{1}{3n+2}\right).$$

你可能需要以下函数对应其收敛半径的幂级数的Maclaurin展开式:

(1) $\frac{1}{1-x}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n=1+x+x^2+x^3+\cdots,\qquad R=1.$

(2) $e^x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots,\qquad R=\infty.$

(3) $\sin x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots,\qquad R=\infty.$

(4) $\cos x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{(2n)!}=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots,\qquad R=\infty.$

(5) $\arctan x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\cdots,\qquad R=1.$

(6) $\ln(1+x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots,\qquad R=1.$

(7) $(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3+\cdots,(\alpha\in R)\qquad R=1.$

习题 9 计算极限:

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}.$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{1+x-e^x}.$

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-x+\frac{1}{6}x^3}{x^5}.$

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x^2}.$

习题 10 将下列不定积分在合适的区间内转化为级数:

(1) $\displaystyle\int x\cos(x^3)\mathrm{d}x.$ (2) $\displaystyle\int \frac{e^x-1}{x}\mathrm{d}x.$

(3) $\displaystyle\int \frac{\cos x-1}{x}\mathrm{d}x.$ (4) $\displaystyle\int \arctan(x^3)\mathrm{d}x.$

习题 11 计算下列级数的和:

(1) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{4n}}{n!}.$ (2) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\pi^{2n}}{6^{2n}(2n)!}.$ (3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{3^n}{n5^n}.$ (4) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{5^n n!}.$

习题 12 计算下列级数的和:

(1) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\pi^{2n+1}}{4^{2n+1}(2n+1)!}.$ (2) $\displaystyle 1-\ln 2+\frac{(\ln 2)^2}{2!}-\frac{(\ln 2)^2}{3!}+\cdots.$

(3) $\displaystyle 3+\frac{9}{2!}+\frac{27}{3!}+\frac{81}{4!}\cdots.$ (4) $\displaystyle \frac{1}{1\cdot 2}-\frac{1}{3\cdot 2^3}+\frac{1}{5\cdot 2^5}-\frac{1}{7\cdot 2^7}+\cdots.$

习题 13 使用已知函数的Maclaurin展开式计算以下函数的幂级数及Maclaurin展开式:

(1) $f(x) = \sin \pi x$.

(2) $f(x) = e^x + 2e^{-x}$.

(3) $f(x) = x \cos\left(\dfrac{x^2}{2}\right)$.

(4) $f(x) = x^2 \ln(1 + x^3)$.

(5) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{4 + x^2}}$.

(6) $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{2 + x}}$.

(7) $f(x) = \sin^2 x$.

(8) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x - \sin x}{x^3}, & x \neq 0, \\ \dfrac{1}{6}, & x = 0. \end{cases}$.

习题 14 给出以下函数$f(x)$在指定点$x = a$处的Taylor级数展开式:

(1) $f(x) = x^4 - 3x^2 + 1, \quad a = 1$.

(2) $f(x) = x - x^3, \quad a = -2$.

(3) $f(x) = \ln x, \quad a = 2$.

(4) $f(x) = \dfrac{1}{x}, \quad a = -3$.

(5) $f(x) = e^{2x}, \quad a = 3$.

(6) $f(x) = \sin x, \quad a = \pi/2$.

(7) $f(x) = \cos x, \quad a = \pi$.

(8) $f(x) = \sqrt{x}, \quad a = 16$.