AMS

一元函数积分学

不定积分的概念与性质

课前导读

当一个函数符合适当的条件时，我们可以对f求导函数。

课前导读

当一个函数符合适当的条件时，我们可以对f求导函数。例如指数函数$f(x)=e^x$，

$$f'(x)=(e^x)'=e^x.$$

课前导读

当一个函数符合适当的条件时，我们可以对f求导函数。例如指数函数$f(x) = e^x$，

$$f'(x) = (e^x)' = e^x.$$

现在我们考虑一个相反的问题：已知某个函数的导函数是e^x，这个函数本身是什么么呢？

课前导读

当一个函数符合适当的条件时，我们可以对f求导函数。例如指数函数$f(x)=e^x$，

$$f'(x)=(e^x)'=e^x.$$

现在我们考虑一个相反的问题：已知某个函数的导函数是e^x，这个函数本身是什么么呢？

注意到常值函数的导函数是零，因此我们可以结合上述例子，找到不唯一的答案：$f(x)=e^x$或者$f(x)=e^x+1$。

课前导读

当一个函数符合适当的条件时，我们可以对f求导函数。例如指数函数$f(x)=e^x$，

$$f'(x)=(e^x)'=e^x.$$

现在我们考虑一个相反的问题：已知某个函数的导函数是e^x，这个函数本身是什么么呢？

注意到常值函数的导函数是零，因此我们可以结合上述例子，找到不唯一的答案：$f(x)=e^x$或者$f(x)=e^x+1$。

本节我们将介绍这种计算形式的概念和计算方法。

定义

如果对定义在I内的函数$f(x)$，存在函数$F(x)$，使得

$$F'(x) = f(x), \quad x \in I.$$

那么称F为f的一个原函数。

原函数

定义

如果对定义在I内的函数$f(x)$，存在函数$F(x)$，使得

$$F'(x) = f(x), \quad x \in I.$$

那么称F为f的一个原函数。

注

- 连续函数一定有原函数；
- 由于
$$[F(x) + C]' = f(x), \quad \forall C \in \mathbb{R},$$
因此$f(x)$具有无穷个原函数；
- 如果F和G都是f的原函数，那么F和G之间只相差一个常数；
- f的所有原函数全体可以表示成$F(x) + C$，其中C为任意一个实数。

不定积分

定义

对定义在I内的函数$f(x)$，其带有任意常数项的原函数称为F在I上的**不定积分**，记作

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

我们称

- $\int$为积分号；
- f为被积函数；
- $f(x)dx$为积分表达式；
- x为积分变量。

定义

对定义在I内的函数$f(x)$，其带有任意常数项的原函数称为F在I上的**不定积分**，记作

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

我们称

- $\int$为积分号；
- f为被积函数；
- $f(x)dx$为积分表达式；
- x为积分变量。

引例

除特殊说明，我们总认为一个函数的原函数或不定积分都有相应的定义区间。

引例

除特殊说明，我们总认为一个函数的原函数或不定积分都有相应的定义区间。

例 1

设$f(x)$和$f'(x)$均连续，那么 $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int f(x)dx$与$\displaystyle\int f'(x)dx$是否相等？

引例

除特殊说明，我们总认为一个函数的原函数或不定积分都有相应的定义区间。

例 1

设$f(x)$和$f'(x)$均连续，那么 $\frac{d}{dx}\int f(x)dx$与$\int f'(x)dx$是否相等？

例 2

求

$$\int x^\alpha dx \, (\alpha \neq -1).$$

引例

除特殊说明，我们总认为一个函数的原函数或不定积分都有相应的定义区间。

例 1

设$f(x)$和$f'(x)$均连续，那么 $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int f(x)dx$与$\displaystyle\int f'(x)dx$是否相等?

例 2

求

$$\int x^{\alpha}dx\,(\alpha \neq -1).$$

例 3

求

$$\int x^{-1}dx.$$

引例

例 4

求

$$\int a^x dx \,(a > 0,\ a \neq 1).$$

例 4

求
$$\int a^x dx \,(a > 0,\; a \neq 1).$$

例 5

设曲线通过点$(1,1)$且其上任意一点处的切线斜率等于这点横坐标的平方。求此曲线的方程。

基本积分公式

由于积分运算是微分运算的逆运算，我们可以直接得到下列基本积分公式：

基本积分公式

由于积分运算是微分运算的逆运算，我们可以直接得到下列基本积分公式：

基本积分公式

(1) $\int 0dx = C$;　　(2) $\int kdx = kx + C$;

(3) $\int x^\alpha dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C\,(\alpha \neq -1)$;　　(4) $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$;

(5) $\int \cos x dx = \sin x + C$;　　(6) $\int \sin x dx = -\cos x + C$;

(7) $\int \sec^2 x dx = \tan x + C$;　　(8) $\int \csc x dx = \sin x + C$;

(9) $\int e^x dx = e^x + C$;　　(10) $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$;

(11) $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C$;　　(12) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$.

性质 (不定积分与导函数的关系)

设函数f及f'的原函数存在，则

(1) $$\frac{d}{dx}\int f(x)dx = f(x);$$

(2) $$\int f'(x)dx = f(x) + C.$$

不定积分的性质

性质 (不定积分与导函数的关系)

设函数f及f'的原函数存在，则

(1) $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int f(x)dx = f(x)$;

(2) $\displaystyle\int f'(x)dx = f(x) + C$.

性质 (线性性质)

设函数f及g的原函数存在，则

$$\int [\alpha f(x) \pm \beta g(x)]dx = \alpha \int f(x)dx \pm \beta \int g(x)dx, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

例 6

$$(1) \int \left(x^4 + 3^x + \frac{2}{x} + 2\sin x - 3\cos x\right) dx; \quad (2) \int (1+\sqrt{x})^2 dx;$$

$$(3) \int \frac{(x-1)^3}{x^2} dx; \quad (4) \int \frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1-x^4}} dx;$$

$$(5) \int \frac{1+x+x^2}{x(1+x^2)} dx; \quad (6) \int \frac{x^4}{1+x^2} dx;$$

$$(7) \int 2^x e^x dx; \quad (8) \int \frac{2^x - 3^x}{5^x} dx;$$

$$(9) \int \tan^2 x dx; \quad (10) \int \sin^2 \frac{x}{2} dx;$$

$$(11) \int \frac{1}{\sin^2 \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2}} dx; \quad (12) \int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \sin^2 x} dx.$$

不定积分的换元法与分部法

课前导读

本节我们来讨论复合函数和乘积函数的不定积分。

课前导读

本节我们来讨论复合函数和乘积函数的不定积分。

在本节开始前我们来回顾一下部分微分公式和三角函数的积化和差公式:

课前导读

本节我们来讨论复合函数和乘积函数的不定积分。

在本节开始前我们来回顾一下部分微分公式和三角函数的积化和差公式：

$$
\begin{aligned}
&kdx = d(kx);\quad xdx = d\left(\frac{x^2}{2}\right); \frac{1}{x}dx = d(\ln|x|);\quad e^x dx = d(e^x);\\
&\frac{1}{2\sqrt{x}}dx = d(\sqrt{x});\quad \frac{1}{1+x^2} = d(\arctan x);\\
&\sin x dx = d(-\cos x);\quad \cos x dx = d(\sin x).\\
&\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)];\\
&\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)];\\
&\sin\alpha\sin\beta = -\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)].
\end{aligned}
$$

定理

设f具有原函数F， $u=\varphi(x)$可求导函数，那么

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx = \left[\int f(u)du\right]\Big|_{u=\varphi(x)}.$$

使用第一类换元法计算不定积分$\int g(x)dx$时，如何将被积函数$g(x)$转化为$g(x) = f[\varphi(x)]\varphi'(x)$的形式，我们可按如下步骤进行：

使用第一类换元法计算不定积分$\int g(x)dx$时，如何将被积函数$g(x)$转化为$g(x)=f[\varphi(x)]\varphi'(x)$的形式，我们可按如下步骤进行：

(1) 变换积分形式(或称凑微分),即$\int g(x)dx=\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx$；

(2) 作变量替换$u=\varphi(x)$，有$\int g(x)dx=\int f(u)du$；

(3) 利用常用的积分公式求出$f(u)$的原函数$F(u)$，得到$\int f(u)du=F(u)+C$，因此$\int g(x)dx=F(u)+C$；

(4) 回到原来的变量，将$u=\varphi(x)$代入即得$\int g(x)dx=F[\varphi(x)]+C$。

引例

例 1

计算 $\int (3x+2)^5 dx$。

引例

例 1

计算 $\int (3x+2)^5 dx$。

例 2

计算 $\int \frac{1}{1+2x} dx$。

引例

例 1

计算 $\int (3x+2)^5 dx$。

例 2

计算 $\int \frac{1}{1+2x} dx$。

例 3

计算 (1) $\int \frac{\ln x}{x} dx$； (2) $\int \frac{1}{x \ln x \ln(\ln x)} dx$。

例 4

计算 (1) $\int 2x \sin x^2 dx$； (2) $\int x\sqrt{x^2+3} dx$。

例 5

计算 (1) $\displaystyle\int \frac{1}{1+e^x}dx$； (2) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}dx$。

例 5

计算 (1) $\displaystyle\int \frac{1}{1+e^x}dx$；(2) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}dx$。

例 6

计算 (1) $\displaystyle\int \frac{1}{a^2+x^2}dx\ (a>0)$；(2) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx\ (a>0)$。

引例

例 5

计算 (1) $\displaystyle\int \frac{1}{1+e^x}dx$；(2) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}dx$。

例 6

计算 (1) $\displaystyle\int \frac{1}{a^2+x^2}dx\,(a>0)$；(2) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx\,(a>0)$。

例 7

计算 $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-a^2}dx\,(a>0)$。

例 5

计算 (1) $\displaystyle\int \frac{1}{1+e^x}dx$； (2) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}dx$。

例 6

计算 (1) $\displaystyle\int \frac{1}{a^2+x^2}dx\,(a>0)$； (2) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx\,(a>0)$。

例 7

计算 $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-a^2}dx\,(a>0)$。

例 8

计算 $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{2x+3}+\sqrt{2x-1}}dx$。

例 9

计算 (1) $\displaystyle\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$； (2) $\displaystyle\int \frac{\tan\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$。

引例

例 9

计算 (1) $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$； (2) $\int \frac{\tan\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$。

例 10

计算 $\int \frac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)}dx$。

例 9

计算 (1) $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$； (2) $\int \frac{\tan\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$。

例 10

计算 $\int \frac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)}dx$。

例 11

计算 $\int \sin 2x dx$。

例 9

计算 (1) $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$；(2) $\int \frac{\tan\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$。

例 10

计算 $\int \frac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)}dx$。

例 11

计算 $\int \sin 2x dx$。

例 12

计算 (1) $\int \tan x dx$；(2) $\int \cot x dx$。

引例

例 13

计算 (1) $\int \sin^3 x dx$； (2) $\int \sin^2 x \cos^3 x dx$； (3) $\int \cos^2 x dx$； (4) $\int \sec^4 x dx$。

引例

例 13

计算 (1) $\int \sin^3 x dx$； (2) $\int \sin^2 x \cos^3 x dx$； (3) $\int \cos^2 x dx$； (4) $\int \sec^4 x dx$。

例 14

计算 (1) $\int \csc x dx$； (2) $\int \sec x dx$。

引例

例 13

计算 (1) $\int \sin^3 x dx$； (2) $\int \sin^2 x \cos^3 x dx$； (3) $\int \cos^2 x dx$； (4) $\int \sec^4 x dx$。

例 14

计算 (1) $\int \csc x dx$； (2) $\int \sec x dx$。

例 15

计算 (1) $\int \cos 3x \cos x dx$； (2) $\int \sin 3x \cos x dx$。

第二类换元法

如果在积分$\int f(x)dx$中，令$x=\varphi(t)$且$\varphi(t)$满足可求导函数、$\varphi'(t)\neq 0$，则$\int f(x)dx=\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$。

第二类换元法

如果在积分$\int f(x)dx$中，令$x=\varphi(t)$且$\varphi(t)$满足可求导函数、$\varphi'(t)\neq 0$，则$\int f(x)dx=\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$。若上式右端易求出原函数$\Phi(t)$，则得到

$$\int f(x)dx=\Phi[\varphi^{-1}(x)]+C,$$

其中$\varphi^{-1}(x)$为$x=\varphi(t)$的反函数，即$t=\varphi^{-1}(x)$。

第二类换元法可按如下步骤进行:

第二类换元法可按如下步骤进行：

(1) 变换积分形式,即令$x = \varphi(t)$，保证$\varphi(t)$满足可求导函数及$\varphi'(t) \neq 0$，于是有

$$\int f(x)dx = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt;$$

(2) 求原函数$\Phi(t)$，从而

$$\int f(x)dx = \Phi(t) + C;$$

(3) 回到原来的变量，从而

$$\int f(x)dx = \Phi[\varphi^{-1}(x)] + C,$$

其中$t = \varphi^{-1}(x)$由$x = \varphi(t)$解除。

第二类换元法

定理

设$x=\varphi(t)$可求导函数且 $\varphi'(t)\neq 0$，又$f[\varphi(t)]\varphi'(t)$具有原函数$\Phi(t)$，那么

$$\int f(x)dx=\Phi[\varphi^{-1}(x)]+C=\left\{\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt\right\}\bigg|_{t=\varphi^{-1}(x)}.$$

例 16

计算 $\int \frac{\sqrt{x-1}}{x} dx$。

引例

例 16

计算 $\int \frac{\sqrt{x-1}}{x} dx$。

例 17

计算 $\int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+2}}$。

引例

例 16

计算 $\int \frac{\sqrt{x-1}}{x} dx$。

例 17

计算 $\int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+2}}$。

例 18

计算 $\int \frac{dx}{(1+\sqrt[3]{x})\sqrt{x}}$。

例 19

计算 $\int \sqrt{4-x^2} dx$。

例 20

计算 (1) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+9}}$； (2) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$； (3) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^8+x}$。

引例

例 20

计算 (1) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+9}}$； (2) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$； (3) $\int \frac{dx}{x^8+x}$。

注 (部分初等函数不定积分公式)

(1) $\int \tan x dx = -\ln|\cos x| + C;$ (2) $\int \cot x dx = \ln|\sin x| + C;$

(3) $\int \sec x dx = -\ln|\sec x + \tan x| + C;$ (4) $\int \csc x dx = -\ln|\csc x - \cot x| + C;$

(5) $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C;$ (6) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C;$

(7) $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C;$ (8) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C.$

分部积分法

分部积分法是针对两类不同函数乘积的不定积分。

分部积分法

分部积分法是针对两类不同函数乘积的不定积分。如果u, v具有连续导函数，那么

$$(uv)' = u'v + uv', \quad \text{或}\ uv' = (uv)' - u'v.$$

两边积分，得到

$$\int uv'dx = \int (uv)'dx - \int u'vdx = uv - \int u'vdx + C.$$

引例

例 21

计算 (1) $\int x\cos x dx$； (2) $\int x^2 e^x dx$。

例 21

计算 (1) $\int x \cos x dx$； (2) $\int x^2 e^x dx$。

例 22

计算 (1) $\int \ln x dx$； (2) $\int x^3 \ln x dx$。

例 21

计算 (1) $\int x\cos x dx$； (2) $\int x^2 e^x dx$。

例 22

计算 (1) $\int \ln x dx$； (2) $\int x^3 \ln x dx$。

例 23

计算 (1) $\int \arcsin x dx$； (2) $\int x \arctan x dx$。

引例

例 21

计算 (1) $\int x\cos x dx$； (2) $\int x^2 e^x dx$。

例 22

计算 (1) $\int \ln x dx$； (2) $\int x^3 \ln x dx$。

例 23

计算 (1) $\int \arcsin x dx$； (2) $\int x\arctan x dx$。

例 24

计算 $\int e^x \sin x dx$。

例 25

计算 (1) $\int \sec^3 x dx$；(2) $\int \cos(\ln x) dx$。

例 25

计算 (1) $\int \sec^3 x dx$； (2) $\int \cos(\ln x) dx$。

例 26

计算 $\int e^{\sqrt{x}} dx$。

引例

例 25

计算 (1) $\int \sec^3 x dx$; (2) $\int \cos(\ln x) dx$。

例 26

计算 $\int e^{\sqrt{x}} dx$。

例 27

计算 $\int \ln(1+\sqrt{x}) dx$。

有理函数的不定积分*

本节讨论有理函数（可化为有理函数）的积分。

课前导读

本节讨论有理函数（可化为有理函数）的积分。有理函数是指由两个多项式的商所表示的函数：

$$\frac{x-1}{1+x^2}, \quad \frac{x^3}{1-x}, \quad \frac{x^2}{x^3-x^2+x-1}.$$

课前导读

本节讨论有理函数（可化为有理函数）的积分。有理函数是指由两个多项式的商所表示的函数：

$$\frac{x-1}{1+x^2}, \quad \frac{x^3}{1-x}, \quad \frac{x^2}{x^3-x^2+x-1}.$$

下列四类分式称为最简分式，其中$n \geq 2$为正整数， A, M, N, a, p, q均为常数，x^2+px+q为二次质因式：

$$\frac{A}{x-a}, \quad \frac{A}{(x-a)^n}, \quad \frac{Mx+N}{x^2+px+q}, \quad \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}.$$

真分式的分解

如果一个真分式的分母不是质因式，我们总可以通过因式分解把它写成一次因式或二次质因式的乘积，进而把真分式表示成最简分式的和。

真分式的分解

如果一个真分式的分母不是质因式，我们总可以通过因式分解把它写成一次因式或二次质因式的乘积，进而把真分式表示成最简分式的和。

例 1

把分式$\dfrac{x+3}{x^2-5x+6}$分解为最简分式之和。

真分式的分解

如果一个真分式的分母不是质因式，我们总可以通过因式分解把它写成一次因式或二次质因式的乘积，进而把真分式表示成最简分式的和。

例 1

把分式$\dfrac{x+3}{x^2-5x+6}$分解为最简分式之和。

例 2

把分式$\dfrac{1}{x(x-1)^2}$分解为最简分式之和。

如果一个真分式的分母不是质因式，我们总可以通过因式分解把它写成一次因式或二次质因式的乘积，进而把真分式表示成最简分式的和。

例 1

把分式$\dfrac{x+3}{x^2-5x+6}$分解为最简分式之和。

例 2

把分式$\dfrac{1}{x(x-1)^2}$分解为最简分式之和。

例 3

分解有理分式$\dfrac{1}{(1+2x)(1+x^2)}$。

例 4

计算$\displaystyle\int \frac{x+3}{x^2-5x+6}dx$。

例 4

计算$\int \frac{x+3}{x^2-5x+6}dx$。

例 5

计算$\int \frac{x-2}{x^2+2x+3}dx$。

例 4

计算 $\int \frac{x+3}{x^2-5x+6} dx$。

例 5

计算 $\int \frac{x-2}{x^2+2x+3} dx$。

例 6

计算 $\int \frac{1}{x(x-1)^2} dx$。

例 4

计算$\displaystyle\int \frac{x+3}{x^2-5x+6}dx$。

例 5

计算$\displaystyle\int \frac{x-2}{x^2+2x+3}dx$。

例 6

计算$\displaystyle\int \frac{1}{x(x-1)^2}dx$。

例 7

计算$\displaystyle\int \frac{1}{(1+2x)(1+x^2)}dx$。

例 8

计算 $\displaystyle\int \frac{dx}{3\sin x + 4\cos x}$。

例 8

计算 $\int \frac{dx}{3\sin x + 4\cos x}$。

例 9

计算 $\int \frac{dx}{\sin^4 x}$。

例 8

计算 $\displaystyle\int \frac{dx}{3\sin x + 4\cos x}$。

例 9

计算 $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^4 x}$。

可化为有理函数的简单无理根式的不定积分

考虑下列形式的无理根式的不定积分:

$$\int f\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx.$$

令 $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}} = t$，上述无理根式的不定积分可化为有理函数的不定积分。

考虑下列形式的无理根式的不定积分:

$$\int f\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx.$$

令 $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}} = t$，上述无理根式的不定积分可化为有理函数的不定积分。

例 10

计算 $\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{1+x}{x}}dx$。

考虑下列形式的无理根式的不定积分:

$$\int f\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx.$$

令 $\sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}} = t$，上述无理根式的不定积分可化为有理函数的不定积分。

例 10

计算 $\displaystyle\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{1+x}{x}}dx$。

例 11

计算 $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{e^x+1}}$。

定积分的概念与性质

课前导读

在平面几何中，我们能计算三角形、矩形、梯形等由直线围成的图形和圆、椭圆、扇形等特殊曲线所围成图形的面积。

课前导读

在平面几何中，我们能计算三角形、矩形、梯形等由直线围成的图形和圆、椭圆、扇形等特殊曲线所围成图形的面积。

问题：如何计算一般曲线与平面直角坐标系坐标轴所围成的面积？

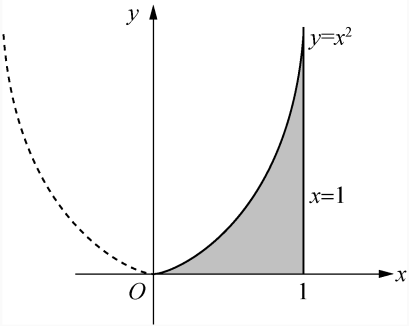
课前导读

在平面几何中，我们能计算三角形、矩形、梯形等由直线围成的图形和圆、椭圆、扇形等特殊曲线所围成图形的面积。

问题：如何计算一般曲线与平面直角坐标系坐标轴所围成的面积？

例

计算由曲线$y = x^2$、x轴和直线$x = 1$所围平面图形的面积。



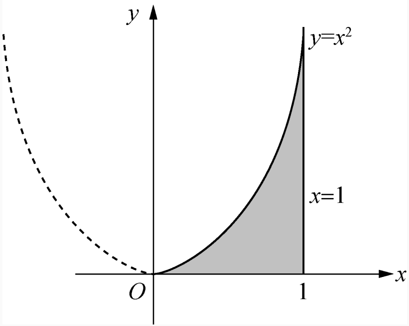
课前导读

在平面几何中，我们能计算三角形、矩形、梯形等由直线围成的图形和圆、椭圆、扇形等特殊曲线所围成图形的面积。

问题：如何计算一般曲线与平面直角坐标系坐标轴所围成的面积？

例

计算由曲线$y = x^2$、x轴和直线$x = 1$所围平面图形的面积。



课前导读

将区间$[0,1]$，作n等分:

$$\frac{1}{n},\quad \frac{2}{n},\quad \cdots,\quad \frac{n-1}{n},$$

将区间$[0,1]$，作n等分:

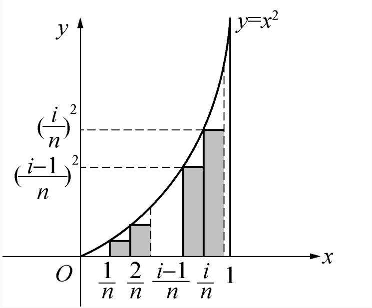
$$\frac{1}{n}, \quad \frac{2}{n}, \quad \cdots, \quad \frac{n-1}{n},$$

过这些分点作平行于y轴的直线，把平面图形分割成n个小的曲边梯形。

将区间$[0,1]$，作n等分:

$$\frac{1}{n}, \quad \frac{2}{n}, \quad \cdots, \quad \frac{n-1}{n},$$

过这些分点作平行于y轴的直线，把平面图形分割成n个小的曲边梯形。



我们无法用初等数学的方法求得若干曲边梯形的面积，但是我们可以使用矩形的面积对它们近似逼近。我们分别取值

$$0,\quad \left(\frac{1}{n}\right)^2,\quad \left(\frac{2}{n}\right)^2,\quad \cdots, \left(\frac{i}{n}\right)^2,\quad \cdots,\quad \left(\frac{n-1}{n}\right)^2$$

课前导读

我们无法用初等数学的方法求得若干曲边梯形的面积，但是我们可以使用矩形的面积对它们近似逼近。我们分别取值

$$0,\ \left(\frac{1}{n}\right)^2,\ \left(\frac{2}{n}\right)^2,\ \cdots,\left(\frac{i}{n}\right)^2,\ \cdots,\ \left(\frac{n-1}{n}\right)^2$$

以$\frac{1}{n}$为底，上述函数值为高，作n个小矩形来近似逼近对应窄边梯形的面积ΔA_i：

$$\Delta A_i \approx \frac{1}{n}\cdot\left(\frac{i-1}{n}\right)^2,\quad i=1,2,\cdots,n-1.$$

我们无法用初等数学的方法求得若干曲边梯形的面积，但是我们可以使用矩形的面积对它们近似逼近。我们分别取值

$$0,\ \left(\frac{1}{n}\right)^2,\ \left(\frac{2}{n}\right)^2,\ \cdots,\left(\frac{i}{n}\right)^2,\ \cdots,\ \left(\frac{n-1}{n}\right)^2$$

以$\frac{1}{n}$为底，上述函数值为高，作n个小矩形来近似逼近对应窄边梯形的面积ΔA_i：

$$\Delta A_i \approx \frac{1}{n}\cdot\left(\frac{i-1}{n}\right)^2,\quad i=1,2,\cdots,n-1.$$

因此，原曲边梯形的面积A的近似值为

$$A=\sum_{i=1}^{n}\Delta A_i \approx \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{i-1}{n}\right)^2=\frac{1}{n^3}\cdot\sum_{i=1}^{n}(i-1)^2=\frac{n(n-1)(2n-1)}{6n^3}.$$

课前导读

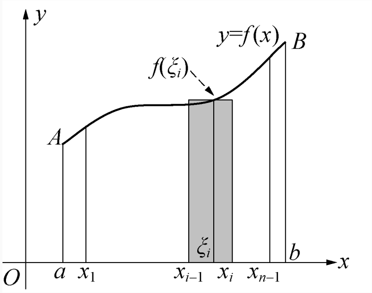
当这些分点无限增加，即$n \to \infty$时，这个近似值的极限就是曲边梯形面积的精确值：

$$A = \lim_{n \to \infty} \frac{n(n-1)(2n-1)}{6n^3} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

当这些分点无限增加，即$n \to \infty$时，这个近似值的极限就是曲边梯形面积的精确值：

$$A = \lim_{n \to \infty} \frac{n(n-1)(2n-1)}{6n^3} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

计算由非负且连续函数$y = f(x)$在区间$[a, b]$上的曲线及直线$x = a, x = b$和$y = 0$四条线围成的**曲边梯形**的面积可采取以下步骤：



定积分的定义

- 分割：对区间$[a, b]$进行分割

$$\mathcal{P} = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b\}.$$

该分割得到n个小区间$[x_{i-1}, x_i]$且每个小区间的长度Δx_i为

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} \; i = 0, 1, 2, \cdots, n.$$

定积分的定义

- 分割：对区间$[a,b]$进行分割

$$\mathcal{P}=\{a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b\}.$$

该分割得到n个小区间$[x_{i-1},x_i]$且每个小区间的长度Δx_i为

$$\Delta x_i=x_i-x_{i-1}\ i=0,1,2,\cdots,n.$$

- 取点：对分割$\mathcal{P}$及$i=1,2,\cdots,n$，在每个小区间$[x_{i-1},x_i]$内任取一点ξ_i，并以Δx_i为底边，以$f(\xi_i)$为高计算小矩形面积：

$$\Delta S_i=f(\xi_i)\Delta x_i,\quad i=1,2,\cdots,n.$$

定积分的定义

- 求和：计算所有小矩形面积总和S_n：

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta S_i = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i,$$

此为曲边梯形面积的近似值。

定积分的定义

- 求和：计算所有小矩形面积总和S_n：

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta S_i = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i,$$

  此为曲边梯形面积的近似值。

- 取极限：对任意区间$[a, b]$分割$\mathcal{P}$和其上任意分点ξ_i, $i = 1, 2, \cdots, n$，记$\lambda_{\mathcal{P}} = \max\limits_{1\le i\le n} \Delta x_i$为所有小区间中的最大区间长度。当分点数$n$无限增大且$\lambda_{\mathcal{P}}$趋于零时，$S_n$便趋近于曲边梯形的面积$S$：

$$S = \lim_{\lambda_{\mathcal{P}}\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

定积分的定义

- 求和：计算所有小矩形面积总和S_n：

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta S_i = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i,$$

  此为曲边梯形面积的近似值。

- 取极限：对任意区间$[a,b]$分割$\mathcal{P}$和其上任意分点ξ_i, $i = 1, 2, \cdots, n$，记$\lambda_{\mathcal{P}} = \max\limits_{1 \le i \le n} \Delta x_i$为所有小区间中的最大区间长度。当分点数$n$无限增大且$\lambda_{\mathcal{P}}$趋于零时， S_n便趋近于曲边梯形的面积S：

$$S = \lim_{\lambda_{\mathcal{P}} \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

由上述曲边梯形的求解过程，我们可以给出定积分的定义。

定积分的定义

定义

设函数$f(x)$在$[a,b]$上有界。在$[a,b]$上做分割

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b,$$

得到小区间$[x_{i-1}, x_i]$，$i = 1, 2, \cdots, n$，并记$\lambda = \max\limits_{1 \le i \le n} \Delta x_i$。在每个小区间$[x_{i-1}, x_i]$内任取一点$\xi_i$，作和$\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$。如果对任意分割和任意取点$\xi_i$，总有

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = I, \quad \exists I \in \mathbb{R},$$

则称I为$f(x)$在$[a,b]$上的**定积分**。

定积分的定义

我们记

$$\int_a^b f(x)dx := I = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i,$$

定积分的定义

我们记

$$\int_a^b f(x)dx := I = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i,$$

其中

- x**为积分变量；**
- $[a, b]$**为积分区间；**
- a, b**为积分上、下限；**
- f**为被积函数；**
- $f(x)dx$**为积分表达式。**

定积分的定义

对于定积分的定义，我们还应注意以下几点:

对于定积分的定义，我们还应注意以下几点:

(1) 定积分定义中，区间分割是任意的且分点ξ_i的选取是任意的；

对于定积分的定义，我们还应注意以下几点:

(1) 定积分定义中，区间分割是任意的且分点ξ_i的选取是任意的；

(2) 定积分是一种和式的极限，其值的大小仅与被积函数f和积分区间$[a,b]$有关，而与积分变量的记法无关：

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(y)dy = \int_a^b f(z)dz.$$

我们有时也称定积分中的积分变量x为**哑变量**。

如果函数$f(x)$在$[a,b]$上的定积分存在，那么我们称$f(x)$在$[a,b]$上Riemann可积（除非特殊说明，以下我们总是称Riemann可积为"可积"）。

可积函数类和函数可积的必要条件

如果函数$f(x)$在$[a,b]$上的定积分存在，那么我们称$f(x)$在$[a,b]$上Riemann可积（除非特殊说明，以下我们总是称Riemann可积为“可积”）。我们自然要问在什么条件下$f(x)$在$[a,b]$上可积呢?

可积函数类和函数可积的必要条件

如果函数$f(x)$在$[a,b]$上的定积分存在，那么我们称$f(x)$在$[a,b]$上Riemann可积（除非特殊说明，以下我们总是称Riemann可积为“可积”）。我们自然要问在什么条件下$f(x)$在$[a,b]$上可积呢?

定理

若函数$f(x)$在$[a,b]$上连续，则$f(x)$在$[a,b]$上可积。

定理

若有界函数$f(x)$在$[a,b]$上有有限个间断点，则$f(x)$在$[a,b]$上可积。

例 1

利用定积分的定义，计算定积分$\int_0^1 e^x dx$。

可积函数类和函数可积的必要条件

如果函数$f(x)$在$[a,b]$上的定积分存在，那么我们称$f(x)$在$[a,b]$上Riemann可积（除非特殊说明，以下我们总是称Riemann可积为“可积”）。我们自然要问在什么条件下$f(x)$在$[a,b]$上可积呢?

定理

若函数$f(x)$在$[a,b]$上连续，则$f(x)$在$[a,b]$上可积。

定理

若有界函数$f(x)$在$[a,b]$上有有限个间断点，则$f(x)$在$[a,b]$上可积。

例 1

利用定积分的定义，计算定积分$\displaystyle\int_0^1 e^x dx$。

用定义计算定积分，将积分区间采用等距离划分较为简便。但其计算过程仍很烦琐，所以我们应寻求其他计算定积分的简便方法。

定积分的几何意义

设函数$f(x)$在$[a, b]$上连续。

定积分的几何意义

设函数$f(x)$在$[a,b]$上连续。

- 若函数$f(x)$在$[a,b]$上非负，则$\int_a^b f(x)dx$表示函数$y=f(x)$在区间$[a,b]$上的曲线及直线$x=a,x=b$和$y=0$四条线围成的曲边梯形的面积；

定积分的几何意义

设函数$f(x)$在$[a,b]$上连续。

- 若函数$f(x)$在$[a,b]$上非负，则$\int_a^b f(x)dx$表示函数$y=f(x)$在区间$[a,b]$上的曲线及直线$x=a,x=b$和$y=0$四条线围成的曲边梯形的面积；
- 若函数$f(x)$在$[a,b]$上非正，则$\int_a^b f(x)dx$为负值，该值的绝对值表示函数$y=f(x)$在区间$[a,b]$上的曲线及直线$x=a,x=b$和$y=0$四条线围成的曲边梯形的面积；

定积分的几何意义

设函数$f(x)$在$[a,b]$上连续。

- 若函数$f(x)$在$[a,b]$上非负，则$\int_a^b f(x)dx$表示函数$y=f(x)$在区间$[a,b]$上的曲线及直线$x=a, x=b$和$y=0$四条线围成的曲边梯形的面积；
- 若函数$f(x)$在$[a,b]$上非正，则$\int_a^b f(x)dx$为负值，该值的绝对值表示函数$y=f(x)$在区间$[a,b]$上的曲线及直线$x=a, x=b$和$y=0$四条线围成的曲边梯形的面积；
- 若函数$f(x)$在$[a,b]$上有正有负，则$\int_a^b f(x)dx$为函数$y=f(x)$在区间$[a,b]$上的曲线及直线$x=a, x=b$和$y=0$四条线围成的图形在x轴上方面积减去在x轴下方面积。

引例

例 2

由定积分的几何意义，计算定积分$\int_1^2 (x-3)dx$。

例 2

由定积分的几何意义，计算定积分 $\int_1^2 (x-3)dx$。

例 3

利用定积分表示极限

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{n}\left(\frac{1}{n}\cos\frac{1}{n} + \frac{2}{n}\cos\frac{2}{n} + \cdots + \frac{n-1}{n}\cos\frac{n-1}{n} + \cos 1\right).$$

定积分的性质

设函数$f(x)$在$[a,b]$上可积，我们规定：

- $\displaystyle\int_a^a f(x)dx = 0$；
- $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx\,(a>b)$。

性质 (被积函数性质)

(1) 若$f(x)$在$[a,b]$上可积，则$|f(x)|$在$[a,b]$上可积；

(2) 若$f(x)$在$[a,b]$上可积，则$f(x)$在$[a,b]$任意子区间$[\alpha,\beta]$上可积；

(3) $\displaystyle\int_a^b 1dx = b-a$。

性质 (线性性质)

若f, g在$[a, b]$上可积，则

$$\int_a^b [\alpha f(x) \pm \beta g(x)]dx = \alpha \int_a^b f(x)dx \pm \beta \int_a^b g(x)dx, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

定积分的性质

性质 (线性性质)

若f, g在$[a,b]$上可积，则

$$\int_a^b [\alpha f(x) \pm \beta g(x)]dx = \alpha \int_a^b f(x)dx \pm \beta \int_a^b g(x)dx, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

性质 (区间的有限可加性)

若$\int_a^b f(x)dx$，$\int_a^c f(x)dx$和$\int_b^c f(x)dx$均存在，则不区分a, b, c的序关系及位置，以下等式恒成立：

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

定积分的性质

性质 (保序性)

若$f(x) \leq g(x)$在$x \in [a,b]$上成立，且$\int_a^b f(x)dx$，$\int_a^b g(x)dx$都存在，则

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$

性质 (保序性)

若$f(x) \leq g(x)$在$x \in [a,b]$上成立，且$\int_a^b f(x)dx$，$\int_a^b g(x)dx$都存在，则

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$

推论

(1) 如果$f(x) \geq 0$，$x \in [a,b]$且$\int_a^b f(x)dx$存在，那么$\int_a^b f(x)dx \geq 0$;

(2) $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$。

定积分的性质

性质 (介值性质)

若$M = \max\limits_{[a,b]} f(x)$，$m = \min\limits_{[a,b]} f(x)$，则

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a).$$

定积分的性质

性质 (介值性质)

若$M=\max\limits_{[a,b]} f(x)$，$m=\min\limits_{[a,b]} f(x)$，则

$$m(b-a)\le\int_a^b f(x)dx\le M(b-a).$$

性质 (积分第一中值定理)

设$f(x)$在$[a,b]$上连续，则至少存在一个$\xi\in[a,b]$，使得

$$\int_a^b f(x)dx=f(\xi)(b-a).$$

引例

例 4

试比较下列积分值的大小：$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x dx$与$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$。

例 4

试比较下列积分值的大小：$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x dx$与$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$。

例 5

试比较下列积分值的大小：$\int_0^{-2} e^x dx$与$\int_0^{-2} x dx$。

引例

例 4

试比较下列积分值的大小：$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x dx$与$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$。

例 5

试比较下列积分值的大小：$\int_0^{-2} e^x dx$与$\int_0^{-2} x dx$。

例 6

估计积分值$\int_0^{\pi} \frac{dx}{3+\sin^3 x}$。

引例

例 4

试比较下列积分值的大小：$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x dx$与$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$。

例 5

试比较下列积分值的大小：$\int_0^{-2} e^x dx$与$\int_0^{-2} x dx$。

例 6

估计积分值$\int_0^{\pi} \frac{dx}{3+\sin^3 x}$。

例 7

试求$y = x^2$在区间$[0,1]$上满足积分中值定理的ξ的值。

微积分基本定理

课前导读

积分学中要解决两个问题：

- 如何计算一个函数的原函数；
- 如何计算一个函数的定积分（如果定积分存在）。

课前导读

积分学中要解决两个问题：

- 如何计算一个函数的原函数；
- 如何计算一个函数的定积分（如果定积分存在）。

原函数和定积分两者本身是不同的概念，但是牛顿和莱布尼茨找到了这两者之间的内在联系，从而使微分学和积分学联系在了一起。

课前导读

积分学中要解决两个问题：

- 如何计算一个函数的原函数；
- 如何计算一个函数的定积分（如果定积分存在）。

原函数和定积分两者本身是不同的概念，但是牛顿和莱布尼茨找到了这两者之间的内在联系，从而使微分学和积分学联系在了一起。

本节我们来讨论微积分学基本定理，即牛顿-莱布尼茨公式。

积分上限函数

设$f(x)$在$[a,b]$上连续，则对任意的$x \in [a,b]$，积分值$\int_a^x f(t)dt$存在。

积分上限函数

设$f(x)$在$[a,b]$上连续，则对任意的$x \in [a,b]$，积分值$\int_a^x f(t)dt$存在。

注意到当x在$[a,b]$上变化时，$\int_a^x f(t)dt$随之变化，则$\int_a^x f(t)dt$可以看成是$[a,b]$上的一个函数。

设$f(x)$在$[a,b]$上连续，则对任意的$x\in[a,b]$，积分值$\displaystyle\int_a^x f(t)dt$存在。

注意到当x在$[a,b]$上变化时，$\displaystyle\int_a^x f(t)dt$随之变化，则$\displaystyle\int_a^x f(t)dt$可以看成是$[a,b]$上的一个函数。

定义

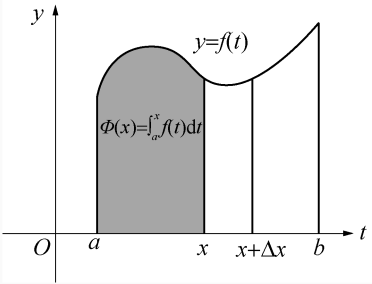
设$f(x)$在$[a,b]$上连续，

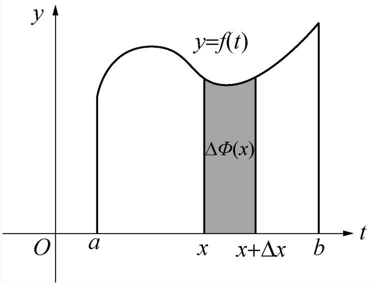
- 称$\Phi(x):=\displaystyle\int_a^x f(t)dt\,(a\le x\le b)$是$f$**的积分变上限函数**；
- 称$\Psi(x):=\displaystyle\int_x^b f(t)dt\,(a\le x\le b)$是$f$**的积分变下限函数**。

积分上限函数

由定积分的几何意义可知：

- $\int_a^b f(x)dx$表示区间$[a,b]$上整块曲边梯形的面积；
- $\int_a^x f(t)dt$表示区间$[a,x]$上对应的曲边梯形的面积。





积分上限函数的分析性质

性质 (可求导函数)

若$f(x)$在$[a,b]$上连续，则$\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt$在$[a,x]$上可求导函数，且

$$\Phi'(x)=\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt=f(x).$$

推论

若$f(x)$在$[a,b]$上连续，则

(1) $\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt$是$f(x)$的一个原函数，且$\Phi'(x)=f(x)$；

(2) 当$a\le a(x)<b(x)\le b$可求导函数时，复合函数$\Phi(x)=\int_{a(x)}^{b(x)} f(t)dt$也可求导函数，且

$$\Phi'(x)=\frac{d}{dx}\int_{a(x)}^{b(x)} f(t)dt=f[b(x)]b'(x)-f[a(x)]a'(x).$$

推论

若$f(x)$在$[a,b]$上连续，则

(1) $\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt$是$f(x)$的一个原函数，且$\Phi'(x)=f(x)$；

(2) 当$a\le a(x)<b(x)\le b$可求导函数时，复合函数$\Phi(x)=\int_{a(x)}^{b(x)} f(t)dt$也可求导函数，且

$$\Phi'(x)=\frac{d}{dx}\int_{a(x)}^{b(x)} f(t)dt=f[b(x)]b'(x)-f[a(x)]a'(x).$$

上述推论说明了：

(1) 连续函数的原函数是存在的；

(2) 积分变上限函数还指出了获得连续函数的原函数的具体方法。

例 1

计算$\dfrac{d}{dx}\left(\displaystyle\int_0^x \cos^2 t dt\right)$。

引例

例 1

计算$\frac{d}{dx}\left(\int_0^x \cos^2 t dt\right)$。

例 2

计算$\frac{d}{dx}\left(\int_1^{x^2} e^{t^2} dt\right)$。

引例

例 1

计算$\frac{d}{dx}\left(\int_0^x \cos^2 t dt\right)$。

例 2

计算$\frac{d}{dx}\left(\int_1^{x^2} e^{t^2} dt\right)$。

例 3

计算 $(1)\ \int_0^{x^2} \sin(t+1)dt$; $\quad (2)\ \int_{x^3}^{2} \frac{e^t}{t} dt\,(x>0)$。

例 4

设$f(x)$是连续函数，计算下列函数的导函数：

(1) $F(x)=\int_{\cos x}^{\sin x} e^{f(t)}dt$； (2) $F(x)=\int_0^x xf(t)dt\,(x>0)$。

例 4

设$f(x)$是连续函数，计算下列函数的导函数：

(1) $F(x)=\int_{\cos x}^{\sin x} e^{f(t)}dt$； (2) $F(x)=\int_0^x xf(t)dt\ (x>0)$。

例 5

设函数$y=f(x)$由方程$\int_0^{y^2} e^{t^2}dt+\int_x^0 \sin t dt=0$所确定，求$\frac{dy}{dx}$。

例 4

设$f(x)$是连续函数，计算下列函数的导函数：

(1) $F(x)=\int_{\cos x}^{\sin x} e^{f(t)}dt$； (2) $F(x)=\int_0^x xf(t)dt\,(x>0)$。

例 5

设函数$y=f(x)$由方程$\int_0^{y^2} e^{t^2}dt+\int_x^0 \sin t dt=0$所确定，求$\dfrac{dy}{dx}$。

例 6

计算 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_{\cos x}^{1} e^{-t^2}dt}{x^2}$。

定理 (牛顿-莱布尼茨公式)

若函数$F(x)$是连续函数$f(x)$在$[a,b]$上的一个原函数，则

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(x)|_a^b.$$

这个公式揭示了不定积分与定积分之间的关系，结合不定积分的计算方法，牛顿-莱布尼茨公式计算定积分将会大大降低计算定积分的难度。我们也称该定理为**微积分基本定理**。

引例

例 7

计算定积分 $\displaystyle\int_0^1 e^x dx$。

例 7

计算定积分 $\int_0^1 e^x dx$。

例 8

计算定积分 $\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{x}$。

例 7

计算定积分 $\int_0^1 e^x dx$。

例 8

计算定积分 $\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{x}$。

例 9

计算定积分 $\int_0^1 |2x-1|dx$。

例 10

计算定积分 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{1-\cos^2 x}dx$。

例 11

计算定积分 $\displaystyle\int_{-2}^{2} \max\{x, x^2\} dx$。

例 11

计算定积分 $\int_{-2}^{2} \max\{x, x^2\} dx$。

例 12

计算由曲线$y = x^3$在$x = -1$、$x = 1$之间及x轴所围成的图形的面积。

例 11

计算定积分 $\int_{-2}^{2} \max\{x, x^2\}dx$。

例 12

计算由曲线$y = x^3$在$x = -1$、$x = 1$之间及x轴所围成的图形的面积。

例 13*

求极限 $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n}\right)$。

定积分的换元法和分部法

课前导读

牛顿-莱布尼茨公式告诉我们，计算连续函数f的定积分$\int_a^b f(x)dx$的简单有效方法是计算f的原函数F的增量$F(b)-F(a)$，即

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = \left[\int f(x)dx\right]\Big|_a^b.$$

牛顿-莱布尼茨公式告诉我们，计算连续函数f的定积分$\int_a^b f(x)dx$的简单有效方法是计算f的原函数F的增量$F(b)-F(a)$，即

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = \left[\int f(x)dx\right]\Big|_a^b.$$

本节我们来讨论在定积分的计算中使用换元法和分部积分法。

定积分的换元法

我们来计算定积分

$$\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}dx \, (a > 0).$$

我们来计算定积分

$$\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}dx \, (a > 0).$$

令$x = a\sin t$，其中$t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$，那么

$$t = \arcsin\frac{x}{a}, \quad \sin t = \frac{x}{a}, \quad \cos t = \sqrt{1 - \sin^2 t} = \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a}.$$

定积分的换元法

我们来计算定积分

$$\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}dx \, (a > 0).$$

令$x = a\sin t$，其中$t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$，那么

$$t = \arcsin\frac{x}{a}, \quad \sin t = \frac{x}{a}, \quad \cos t = \sqrt{1 - \sin^2 t} = \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a}.$$

因此

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}dx = a^2 \int \cos^2 t dt = \frac{a^2}{2}\left(\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{a} \cdot \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a}\right) + C.$$

定积分的换元法

我们来计算定积分

$$\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx \, (a > 0).$$

令$x = a\sin t$，其中$t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$，那么

$$t = \arcsin\frac{x}{a}, \quad \sin t = \frac{x}{a}, \quad \cos t = \sqrt{1 - \sin^2 t} = \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a}.$$

因此

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = a^2 \int \cos^2 t dt = \frac{a^2}{2}\left(\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{a} \cdot \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a}\right) + C.$$

于是

$$\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{a^2}{2}\left(\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{a} \cdot \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a}\right)\Bigg|_0^a = \frac{a^2}{2}\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = \frac{\pi a^2}{4}.$$

上诉过程说明了，我们虽然可以使用不定积分的换元法来计算定积分的值，但计算过程比较复杂。有没有比较简单的方法呢？以下我们来进一步讨论积分的换元法。

定理

设置

(1) 函数f在$[a, b]$上连续；

(2) $x = \varphi(t)$在$[\alpha, \beta]$或者$[\beta, \alpha]$上单调且具有连续函数，且$R_\varphi = [a, b]$；

(3) t在$[\alpha, \beta]$或者$[\beta, \alpha]$上变化时，x在$[a, b]$上变化，且$\varphi(\alpha) = a$，$\varphi(\beta) = b$。

那么

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt.$$

注

(1) 做变量替换$x = \varphi(t)$，那么相应的积分上下限也应变作新变量的上下限；

(2) 求出新变量的原函数后，我们只需把新变量的上下限直接代入计算即可。

注

(1) 做变量替换$x = \varphi(t)$，那么相应的积分上下限也应变作新变量的上下限；

(2) 求出新变量的原函数后，我们只需把新变量的上下限直接代入计算即可。

我们重新计算定积分

$$\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}dx \, (a > 0).$$

注

(1) 做变量替换$x = \varphi(t)$，那么相应的积分上下限也应变作新变量的上下限；

(2) 求出新变量的原函数后，我们只需把新变量的上下限直接代入计算即可。

我们重新计算定积分

$$\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx \, (a > 0).$$

取变量替换

$$x = a\sin t,\quad \text{则}\, dx = d(a\sin t) = a\cos t,\quad x = 0 \Rightarrow t = 0;\quad x = a \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}.$$

那么

$$\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx = a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \frac{a^2}{2}\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi a^2}{4}.$$

引例

例 1

计算定积分 $\int_0^1 (2x-1)^{2016} dx$。

例 1

计算定积分 $\int_0^1 (2x-1)^{2016} dx$。

例 2

计算定积分 $\int_1^3 \frac{\ln^2 x}{x} dx$。

引例

例 1

计算定积分 $\int_0^1 (2x-1)^{2016} dx$。

例 2

计算定积分 $\int_1^3 \frac{\ln^2 x}{x} dx$。

例 3

计算定积分 $\int_{-1}^1 \frac{x}{\sqrt{5-4x}} dx$。

引例

例 4

计算定积分$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x - \cos^3 x} dx$。

例 4

计算定积分 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x - \cos^3 x} dx$。

例 5

计算定积分 $\int_{0}^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1} dx$。

引例

例 4

计算定积分 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x - \cos^3 x} dx$。

例 5

计算定积分 $\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1} dx$。

例 6

计算定积分 $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{dx}{x^2\sqrt{1-x^2}}$。

注

设f在$[-a, a]\ (a > 0)$上连续。我们可以使用变量替换证明如下结论：

引例

注

设f在$[-a,a]\ (a>0)$上连续。我们可以使用变量替换证明如下结论：

(1) 若f为奇函数，则$\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$；

(2) 若f为偶函数，则$\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$；

(3) 若f是以$T>0$为周期的函数，则$\displaystyle\int_{a}^{a+T} f(x)dx = \int_{0}^{T} f(x)dx$；

(4) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx$；

(5) $\displaystyle\int_{0}^{\pi} f(\sin x)dx = 2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx$；

(6) $\displaystyle\int_{0}^{\pi} xf(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int_{0}^{\pi} f(\sin x)dx$。

例 7

计算定积分 $\int_{-1}^{1}(|x|+\sin x)x^2dx$。

例 7

计算定积分$\int_{-1}^{1}(|x|+\sin x)x^2dx$。

例 8

计算定积分$\int_{-1}^{1}\frac{2x^2+x\cos x}{1+\sqrt{1-x^2}}dx$。

例 7

计算定积分 $\int_{-1}^{1}(|x|+\sin x)x^2dx$。

例 8

计算定积分 $\int_{-1}^{1}\frac{2x^2+x\cos x}{1+\sqrt{1-x^2}}dx$。

例 9

计算定积分 $\int_{0}^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$。

定积分的分部积分法

设函数u, v在区间$[a, b]$上具有连续导函数u', v'，由于

$$(uv)' = u'v + uv', \quad \text{即}\ uv' = (uv)' - u'v.$$

定积分的分部积分法

设函数u, v在区间$[a, b]$上具有连续导函数u', v'，由于

$$(uv)' = u'v + uv', \quad \text{即 } uv' = (uv)' - u'v.$$

因此

$$\int_a^b uv'dx = \int_a^b (uv)'dx - \int_a^b u'vdx,$$

即

$$\int_a^b uv'dx = uv\Big|_a^b - \int_a^b u'vdx = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu.$$

定积分的分部积分法

设函数u, v在区间$[a, b]$上具有连续导函数u', v'，由于

$$(uv)' = u'v + uv', \quad \text{即}\ uv' = (uv)' - u'v.$$

因此

$$\int_a^b uv'dx = \int_a^b (uv)'dx - \int_a^b u'vdx,$$

即

$$\int_a^b uv'dx = uv\Big|_a^b - \int_a^b u'vdx = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu.$$

我们称上式为定积分的**分部积分公式**。

引例

例 10

计算定积分 $\displaystyle\int_0^1 x\ln(1+x)dx$。

例 10

计算定积分 $\int_0^1 x\ln(1+x)dx$。

例 11

计算定积分 $\int_0^1 \arctan x dx$。

引例

例 10

计算定积分 $\int_0^1 x\ln(1+x)dx$。

例 11

计算定积分 $\int_0^1 \arctan x dx$。

例 12

计算定积分 $\int_{\frac{1}{e}}^{e} |\ln x| dx$。

例 13

计算定积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x dx$。

例 13

计算定积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x dx$。

例 14

计算定积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x dx$。

引例

例 13

计算定积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x dx$。

例 14

计算定积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x dx$。

例 15

计算定积分 $\int_{\frac{1}{2}}^{1} e^{-\sqrt{2x-1}} dx$。

引例

例 16*

试推导定积分$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$的递推公式，并计算$\int_0^{\pi} \sin^5 \frac{x}{2}$。

引例

例 16*

试推导定积分$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$的递推公式，并计算$\int_0^{\pi} \sin^5 \frac{x}{2}$。

反复使用该引例中的递推公式，直到下标为0或1，我们得到以下结果：

$$I_n = \begin{cases} \dfrac{2m-1}{2m} \cdot \dfrac{2m-3}{2m-2} \cdot \cdots \cdot \dfrac{5}{6} \cdot \dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\pi}{2}, & n = 2m, \\ \dfrac{2m}{2m+1} \cdot \dfrac{2m-2}{2m-1} \cdot \cdots \cdot \dfrac{6}{7} \cdot \dfrac{4}{5} \cdot \dfrac{2}{3}, & n = 2m+1, \end{cases}$$

定积分的几何应用(物理应用*)

课前导读

求曲边梯形经历了分割、取点、求和、取极限四个步骤，得到了定积分的定义：

$$\int_a^b f(x)dx := \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

求曲边梯形经历了分割、取点、求和、取极限四个步骤，得到了定积分的定义：

$$\int_a^b f(x)dx := \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

根据这个定义过程的后两个步骤，针对积分表达式$f(x)dx$，该定义可以简化为：

(1) 写出积分表达式$f(x)dx$；

(2) 计算定积分$\int_a^b f(x)dx$。

课前导读

求曲边梯形经历了分割、取点、求和、取极限四个步骤，得到了定积分的定义：

$$\int_a^b f(x)dx := \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

根据这个定义过程的后两个步骤，针对积分表达式$f(x)dx$，该定义可以简化为：

(1) 写出积分表达式$f(x)dx$；

(2) 计算定积分$\displaystyle\int_a^b f(x)dx$。

本节我们根据上述简化的两个步骤来讨论涉及定积分的一些几何和物理问题。

根据定积分的几何意义，可以求出下面几种类型的平面图形的面积：

根据定积分的几何意义，可以求出下面几种类型的平面图形的面积：

(1) 曲线$y=f(x)$、直线$x=a, x=b$和x轴四条线围成图形的面积:

根据定积分的几何意义，可以求出下面几种类型的平面图形的面积：

(1) 曲线$y = f(x)$、直线$x = a, x = b$和x轴四条线围成图形的面积:

(i) 若$f(x) \geq 0$，面积$S = \int_a^b f(x)dx$；

平面图形的面积

根据定积分的几何意义，可以求出下面几种类型的平面图形的面积：

(1) 曲线$y = f(x)$、直线$x = a, x = b$和x轴四条线围成图形的面积:

(i) 若$f(x) \geq 0$，面积$S = \int_a^b f(x)dx$；

(ii) 若$f(x) \geq 0$，面积$S = -\int_a^b f(x)dx$；

平面图形的面积

根据定积分的几何意义，可以求出下面几种类型的平面图形的面积：

(1) 曲线$y=f(x)$、直线$x=a,x=b$和x轴四条线围成图形的面积:

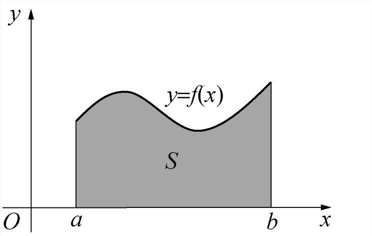
(i) 若$f(x)\geq 0$，面积$S=\int_a^b f(x)dx$；

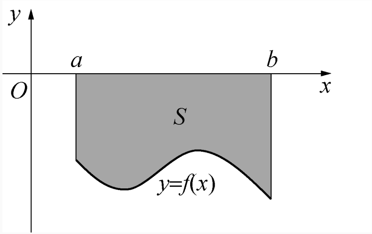
(ii) 若$f(x)\geq 0$，面积$S=-\int_a^b f(x)dx$；

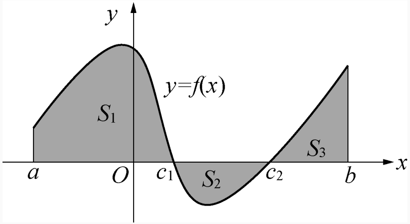
(iii) 若$f(x)$在$[a,b]$上既有正值又有负值，那么如图所示，面积

$$S=\int_a^{c_1} f(x)dx-\int_{c_1}^{c_2} f(x)dx+\int_{c_2}^{b} f(x)dx.$$

平面图形的面积







平面图形的面积

因此，曲线$y = f(x)$、直线$x = a, x = b$和x轴四条线围成图形的面积为

$$S = \int_a^b |f(x)| dx.$$

因此，曲线$y = f(x)$、直线$x = a, x = b$和x轴四条线围成图形的面积为

$$S = \int_a^b |f(x)| dx.$$

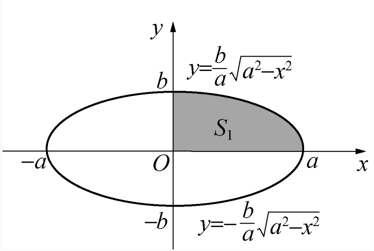
例 1

计算椭圆$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$的面积。

因此，曲线$y=f(x)$、直线$x=a,x=b$和x轴四条线围成图形的面积为
$$S=\int_a^b |f(x)|dx.$$

例 1

计算椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$的面积。

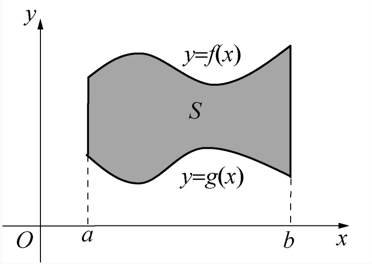


(2) 曲线$y = f(x)$，$y = g(x)$及直线$x = a, x = b$四条线围成图形的面积:

(2) 曲线$y = f(x)$，$y = g(x)$及直线$x = a, x = b$四条线围成图形的面积:

不妨设曲线$y = f(x)$位于曲线$y = g(x)$的上方，那么其面积为

$$S = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx.$$

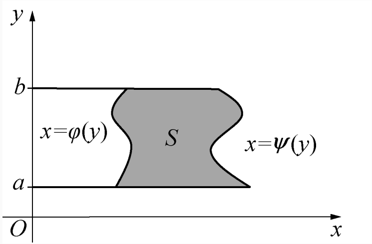


(3) 曲线$x = \varphi(y)$，$x = \psi(y)$及直线$y = a, y = b$四条线围成图形的面积:

(3) 曲线$x=\varphi(y)$，$x=\psi(y)$及直线$y=a, y=b$四条线围成图形的面积:

不妨设曲线$x=\varphi(y)$位于曲线$x=\psi(y)$的左侧，那么其面积为

$$S=\int_a^b[\psi(y)-\varphi(y)]dy.$$



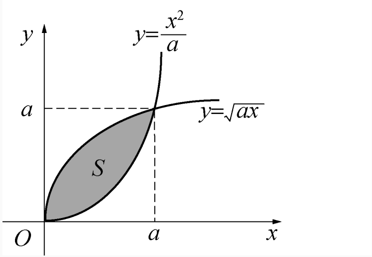
例 2

计算由两条曲线$y^2 = ax$和$ay = x^2\ (a > 0)$围成的平面图形的面积。

引例

例 2

计算由两条曲线$y^2 = ax$和$ay = x^2\ (a > 0)$围成的平面图形的面积。

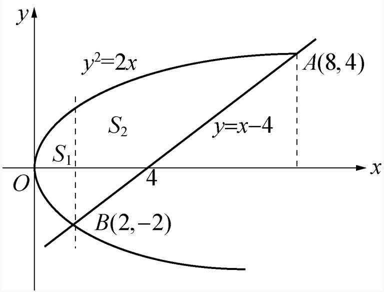


例 3

计算由抛物线$y^2 = 2x$和直线$y = x - 4$围成的平面图形的面积。

例 3

计算由抛物线$y^2 = 2x$和直线$y = x - 4$围成的平面图形的面积。



如果某一实际问题中所求量U符合下列条件:

(1) U与某个变化量x有关;

如果某一实际问题中所求量U符合下列条件:

(1) U与某个变化量x有关；

(2) U对于区间$[a,b]$具有可加性：即若将$[a,b]$分成若干部分区间，则U相应地分成若干个部分量ΔU，于是$U=\sum \Delta U$；

微元法

如果某一实际问题中所求量U符合下列条件:

(1) U与某个变化量x有关;

(2) U对于区间$[a,b]$具有可加性：即若将$[a,b]$分成若干部分区间，则U相应地分成若干个部分量ΔU，于是$U=\sum \Delta U$;

(3) 部分量ΔU的近似值可表示为$f(x)dx$。

如果某一实际问题中所求量U符合下列条件:

(1) U与某个变化量x有关；

(2) U对于区间$[a, b]$具有可加性：即若将$[a, b]$分成若干部分区间，则U相应地分成若干个部分量ΔU，于是$U = \sum \Delta U$；

(3) 部分量ΔU的近似值可表示为$f(x)dx$。

那么我们可以考虑用定积分来表示这个量U。

如果某一实际问题中所求量U符合下列条件:

(1) U与某个变化量x有关；

(2) U对于区间$[a, b]$具有可加性：即若将$[a, b]$分成若干部分区间，则U相应地分成若干个部分量ΔU，于是$U = \sum \Delta U$；

(3) 部分量ΔU的近似值可表示为$f(x)dx$。

那么我们可以考虑用定积分来表示这个量U。通常写出这个量U的积分表达式的步骤为:

(1) 根据实际问题，确定变化量x的有关变化范围；

微元法

如果某一实际问题中所求量U符合下列条件:

(1) U与某个变化量x有关；

(2) U对于区间$[a, b]$具有可加性：即若将$[a, b]$分成若干部分区间，则U相应地分成若干个部分量ΔU，于是$U = \sum \Delta U$；

(3) 部分量ΔU的近似值可表示为$f(x)dx$。

那么我们可以考虑用定积分来表示这个量U。通常写出这个量U的积分表达式的步骤为:

(1) 根据实际问题，确定变化量x的有关变化范围；

(2) 如果ΔU能近似地表示为区间$[a, b]$上的一个连续函数在x处的值$f(x)$与dx的乘积，称$f(x)dx$为U的元素，记作$DU := f(x)dx$；

微元法

如果某一实际问题中所求量U符合下列条件:

(1) U与某个变化量x有关；
(2) U对于区间$[a,b]$具有可加性：即若将$[a,b]$分成若干部分区间，则U相应地分成若干个部分量ΔU，于是$U=\sum \Delta U$；
(3) 部分量ΔU的近似值可表示为$f(x)dx$。

那么我们可以考虑用定积分来表示这个量U。通常写出这个量U的积分表达式的步骤为:

(1) 根据实际问题，确定变化量x的有关变化范围；
(2) 如果ΔU能近似地表示为区间$[a,b]$上的一个连续函数在x处的值$f(x)$与dx的乘积，称$f(x)dx$为U的元素，记作$DU := f(x)dx$；
(3) 在区间$[a,b]$上对$f(x)dx$积分得到$S=\int_a^b f(x)dx$。

我们称上述步骤为定积分的**微元分析**。

极坐标系下平面图形的面积

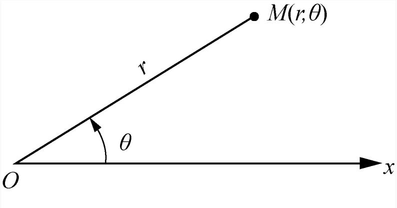
在平面内取一个定点O，叫作**极点**。引一条射线Ox，叫作**极轴**。我们选择一个长度单位和角度的正方向(通常取逆时针方向)。

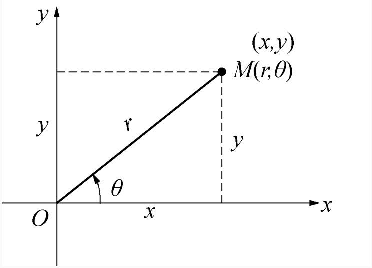
极坐标系下平面图形的面积

在平面内取一个定点O，叫作**极点**。引一条射线Ox，叫作**极轴**。我们选择一个长度单位和角度的正方向(通常取逆时针方向)。对于平面内的任意一点M，用r表示线段OM的长度， θ表示从Ox到OM的角， r叫作点M的**极径**， θ叫作点M的**极角**。

在平面内取一个定点O，叫作**极点**。引一条射线Ox，叫作**极轴**。我们选择一个长度单位和角度的正方向(通常取逆时针方向)。对于平面内的任意一点M，用r表示线段OM的长度，θ表示从Ox到OM的角，r叫作点M的**极径**，θ叫作点M的**极角**。有序实数对(r,θ)就叫作点M的**极坐标**，这样建立的坐标系叫作**极坐标系**。

在平面内取一个定点O，叫作**极点**。引一条射线Ox，叫作**极轴**。我们选择一个长度单位和角度的正方向(通常取逆时针方向)。对于平面内的任意一点M，用r表示线段OM的长度， θ表示从Ox到OM的角， r叫作点M的**极径**， θ叫作点M的**极角**。有序实数对(r, θ)就叫作点M的**极坐标**，这样建立的坐标系叫作**极坐标系**。





如果让直角坐标系的原点和极坐标的极点重合，极轴和直角坐标系的x轴正半轴重合，那么直角坐标和极坐标之间的变量有如下互化关系式:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = r\sin\theta. \end{cases} \quad \text{或者} \quad \begin{cases} x^2 + y^2 = r^2, \\ \dfrac{y}{x} = \tan\theta. \end{cases}$$

如果让直角坐标系的原点和极坐标的极点重合，极轴和直角坐标系的x轴正半轴重合，那么直角坐标和极坐标之间的变量有如下互化关系式：

$$\begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = r\sin\theta. \end{cases} \quad \text{或者} \quad \begin{cases} x^2 + y^2 = r^2, \\ \dfrac{y}{x} = \tan\theta. \end{cases}$$

由连续曲线$r = r(\theta)$及$\theta = \alpha$，$\theta = \beta$可以围成曲边扇形。 θ在$[\alpha, \beta]$上变动时，r随着θ也在变动。我们可以用微元法求曲边扇形的面积：

极坐标系下平面图形的面积

(1) 取$\theta \in [\alpha, \beta]$为积分变量;

(2) 相应于$[\theta, \theta + d\theta]$的窄曲边扇形面积可用以$r(\theta)$为半径、 $d\theta$为圆心角的扇形面积近似代替：$dS = \frac{1}{2}[r(\theta)]^2 d\theta$；

(3) 曲边扇形的面积为以面积微元dS作为被积表达式，在区间$[\alpha, \beta]$上的定积分：

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}[r(\theta)]^2 d\theta.$$

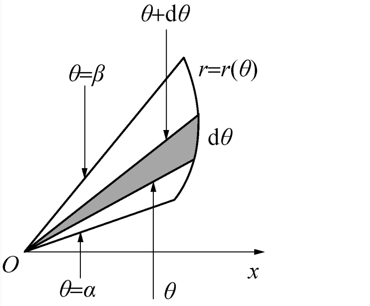
极坐标系下平面图形的面积

(1) 取$\theta \in [\alpha, \beta]$为积分变量;

(2) 相应于$[\theta, \theta + d\theta]$的窄曲边扇形面积可用以$r(\theta)$为半径、 $d\theta$为圆心角的扇形面积近似代替：$dS = \frac{1}{2}[r(\theta)]^2 d\theta$;

(3) 曲边扇形的面积为以面积微元dS作为被积表达式，在区间$[\alpha, \beta]$上的定积分：

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}[r(\theta)]^2 d\theta.$$



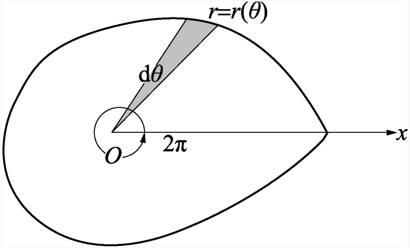
如果图形由内含极点的封闭曲线$r = r(\theta)$所围成，那么

$$S = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} [r(\theta)]^2 d\theta.$$

极坐标系下平面图形的面积

如果图形由内含极点的封闭曲线$r = r(\theta)$所围成，那么

$$S = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}[r(\theta)]^2 d\theta.$$



极坐标系下平面图形的面积

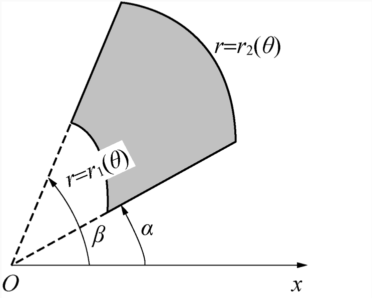
如果图形由曲线$r_1 = r_1(\theta)$，$r_2 = r_2(\theta)$及$\theta = \alpha$，$\theta = \beta$所围成 $(\alpha < \beta)$，那么

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} [r_2(\theta)]^2 - [r_1(\theta)]^2 d\theta.$$

极坐标系下平面图形的面积

如果图形由曲线$r_1 = r_1(\theta)$，$r_2 = r_2(\theta)$及$\theta = \alpha$，$\theta = \beta$所围成 $(\alpha < \beta)$，那么

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} [r_2(\theta)]^2 - [r_1(\theta)]^2 d\theta.$$

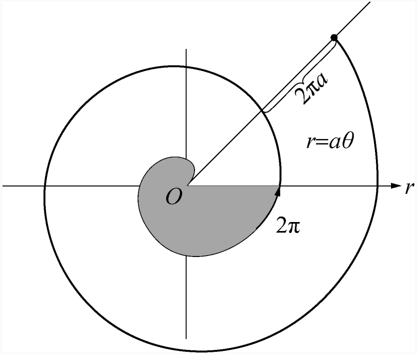


例 4

计算由计算阿基米德螺线$r = a\theta\,(a > 0)$上相应于θ从0到2π的一段弧与极轴所围成的图形的面积。

例 4

计算由计算阿基米德螺线$r = a\theta\ (a > 0)$上相应于θ从0到2π的一段弧与极轴所围成的图形的面积。

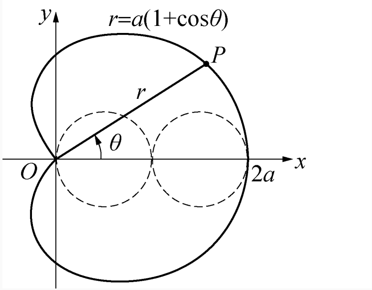


例 5

计算由心形线$r = a(1 + \cos\theta)$ $(a > 0)$所围成的图形的面积。

例 5

计算由心形线$r = a(1 + \cos\theta)$ $(a > 0)$所围成的图形的面积。

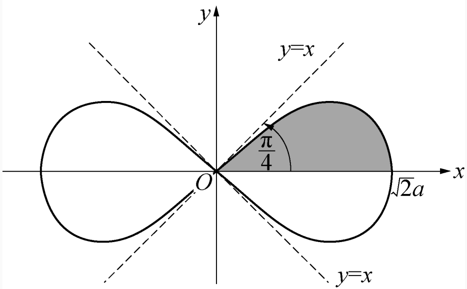


例 6

计算由双纽线$r^2 = 2a^2\cos 2\theta$所围成的图形的面积。

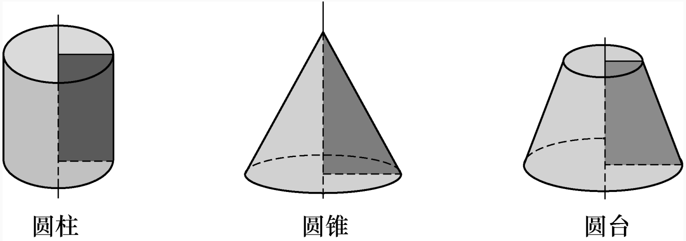
例 6

计算由双纽线$r^2 = 2a^2 \cos 2\theta$所围成的图形的面积。



由一个平面图形绕该平面内一条直线旋转一周而成的立体称为**旋转体**，其中该条直线就称为**旋转轴**：

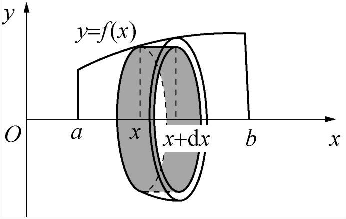
由一个平面图形绕该平面内一条直线旋转一周而成的立体称为**旋转体**，其中该条直线就称为**旋转轴**：



直角坐标系中，由曲线$y = f(x)\,(f(x) > 0)$、直线$x = 1, x = b\,(a < b)$及x轴所围成图形A， A绕x轴旋转一周得到立体图形Ω。

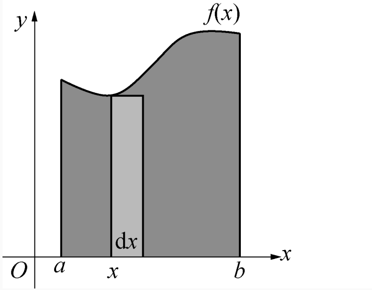
我们使用微元法，选$x \in [a, b]$为积分变量，任取$[x.x + dx]$，则在$[x.x + dx]$上的体积元素为底面积为$\pi f^2(x)$、以dx为高的薄柱体体积:$dV_x = \pi f^2(x)dx$，那么旋转体Ω的体积为

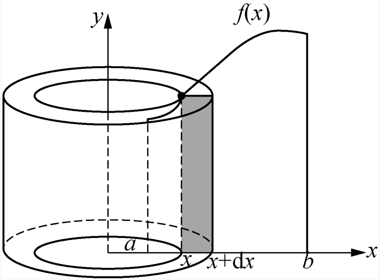
$$V_x = \pi \int_a^b f^2(x)dx.$$



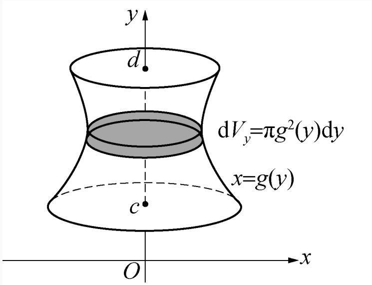
若Ω'为A绕y轴旋转一周而成的立体，则选$x \in [a, b]$为积分变量，任取$[x.x + dx]$则在$[x.x + dx]$上的小旋转体体积元素为内表面积为$2\pi x f(x)$、厚为dx的薄柱壳体积:$dV_y = 2\pi x f(x) dx$，那么旋转体Ω'的体积为

$$V_y = 2\pi \int_a^b x f(x) dx.$$





类似地，若平面图形A由曲线$x = g(y)\,(g(y) > 0)$、直线$y = c, y = d\,(c < d)$及y轴所围成， Ω为A绕y轴旋转一周而成的立体，其体积为 $V_y = \pi \int_c^d g^2(y)dy$；绕$x$轴旋转一周而成的立体体积为 $V_x = 2\pi \int_c^d yg(y)dy$。

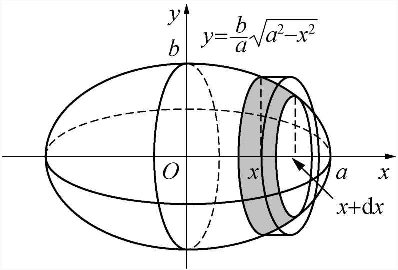


例 7

计算由椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$分别绕$x$轴与$y$轴旋转而得的旋转体的体积。

例 7

计算由椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$分别绕$x$轴与$y$轴旋转而得的旋转体的体积。

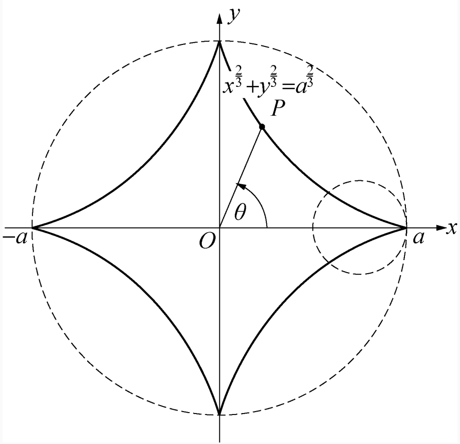


例 8

计算由星形线$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}\ (a>0)$绕$x$轴旋转构成的旋转体的体积。

例 8

计算由星形线$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ $(a > 0)$绕x轴旋转构成的旋转体的体积。

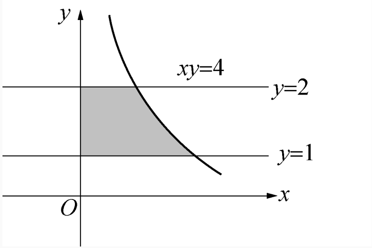


例 9

计算由曲线$xy = 4$，直线$y = 1, y = 2$所围成的图形绕y轴旋转构成的旋转体的体积。

例 9

计算由曲线$xy=4$，直线$y=1,y=2$所围成的图形绕y轴旋转构成的旋转体的体积。

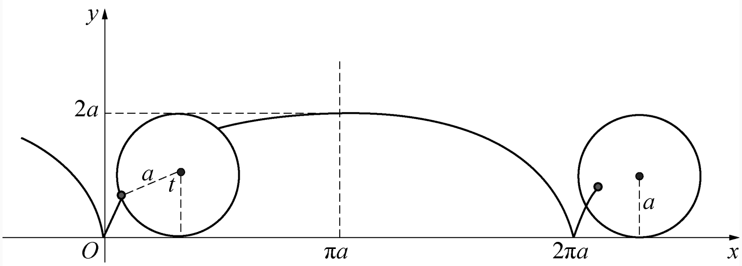


例 10

计算由摆线$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$的一拱，$x$轴所围成的图形分别绕$x$轴与$y$轴旋转一周构成的旋转体的体积。

例 10

计算由摆线$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$的一拱，$x$轴所围成的图形分别绕$x$轴与$y$轴旋转一周构成的旋转体的体积。

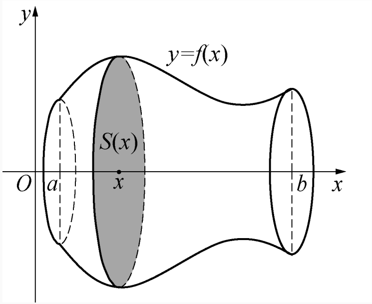


平行截面面积已知的立体的体积

直角坐标系中，由曲线$y = f(x)\,(f(x) > 0)$、直线$x = 1, x = b\,(a < b)$及x轴所围成图形旋转一周而成的立体体积为

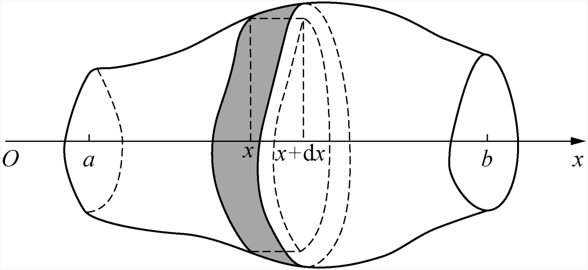
$$V_x = \pi \int_a^b f^2(x)dx,$$

其中被积函数$S(x) := \pi f^2(x)$即为立体过点x且垂直于x轴的截面面积:



平行截面面积已知的立体的体积

设有一个立体，它在平面$x = a$与$x = b$之间它被垂直于某条直线(如 x轴)的平面所截的截面面积$S(x)$为x的连续函数：



平行截面面积已知的立体的体积

我们取定轴为x轴，设$S(x)$ $(a \le x \le b)$为过点x且垂直于x轴的截面面积，选$x \in [a, b]$为积分变量，立体中相应于$[a, b]$的任意小区间$[x.x + dx]$的薄片体积元素为

$$dV = S(x)dx,$$

那么旋转体体积为

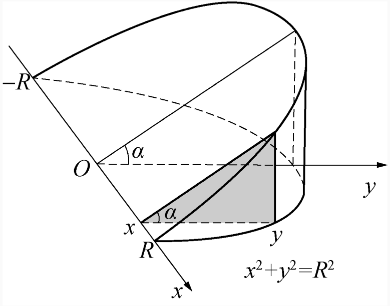
$$V = \int_a^b S(x)dx.$$

例 11

一平面经过半径为R的圆柱体的底圆中心并与底面交成角α，计算该平面截圆柱体所得的立体的体积。

例 11

一平面经过半径为R的圆柱体的底圆中心并与底面交成角α，计算该平面截圆柱体所得的立体的体积。

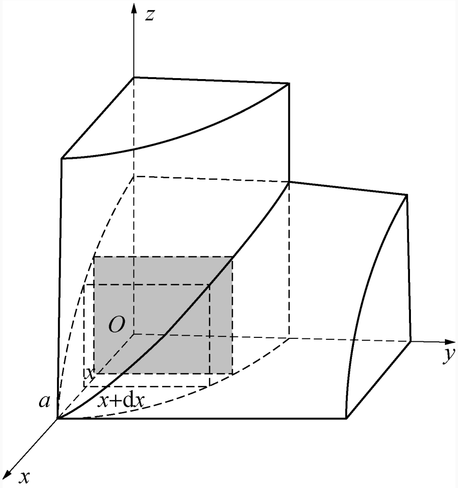


例 12

计算$x^2+y^2=a^2, y^2+z^2=a^2$两柱面所围立体的体积。

例 12

计算$x^2+y^2=a^2, y^2+z^2=a^2$两柱面所围立体的体积。



曲线的弧长

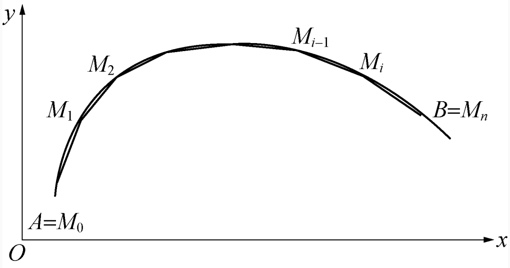
下面我们讨论如何计算一般曲线的长度。

曲线的弧长

下面我们讨论如何计算一般曲线的长度。设AB为曲线弧$\overset{\frown}{AB}$上的两个端点，任取分点 $A = M_0, M_1, \cdots, M_n = B \in \overset{\frown}{AB}$，并依次连接相邻分点得内接折线，其长度为 $\sum\limits_{i=1}^{n} |M_{i-1}M_i|$。

曲线的弧长

下面我们讨论如何计算一般曲线的长度。设AB为曲线弧$\overset{\frown}{AB}$上的两个端点，任取分点 $A = M_0, M_1, \cdots, M_n = B \in \overset{\frown}{AB}$，并依次连接相邻分点得内接折线，其长度为 $\sum\limits_{i=1}^{n} |M_{i-1}M_i|$。 当分点无限增多时，如果和式$\sum\limits_{i=1}^{n} |M_{i-1}M_i|$的极限存在，我们称此极限为曲线弧$\overset{\frown}{AB}$的弧长。



直角坐标系中的弧长公式

设函数$f(x)$具有一阶连续导函数，曲线弧由$y = f(x)\ (a \le x \le b)$给出。

直角坐标系中的弧长公式

设函数$f(x)$具有一阶连续导函数，曲线弧由$y = f(x)\ (a \leq x \leq b)$给出。

- 任取$x \in [a, b]$，过x作曲线的切线；

直角坐标系中的弧长公式

设函数$f(x)$具有一阶连续导函数，曲线弧由$y = f(x)\ (a \leq x \leq b)$给出。

- 任取$x \in [a, b]$，过x作曲线的切线；
- 设x对应曲线上的点$M(x, y), x + \Delta x(x + dx)$对应曲线上的点$N(x + \Delta x, y + \Delta y)$，对应切线上的点$P(x + dx, y + dy)$；

直角坐标系中的弧长公式

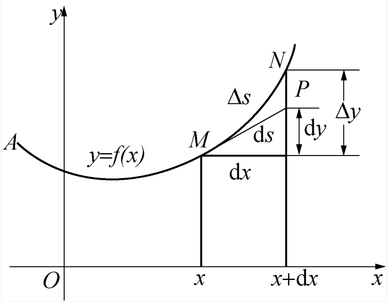
设函数$f(x)$具有一阶连续导函数，曲线弧由$y = f(x)\ (a \le x \le b)$给出。

- 任取$x \in [a, b]$，过x作曲线的切线；
- 设x对应曲线上的点$M(x, y), x + \Delta x(x + dx)$对应曲线上的点$N(x + \Delta x, y + \Delta y)$，对应切线上的点$P(x + dx, y + dy)$；
- 区间$[x, x + \Delta x]$对应小弧段$\widehat{MN}$，记小弧段$\widehat{MN}$长度为Δs，记切线MP的长度为ds。

直角坐标系中的弧长公式

设函数$f(x)$具有一阶连续导函数，曲线弧由$y = f(x)\ (a \le x \le b)$给出。

- 任取$x \in [a, b]$，过x作曲线的切线；
- 设x对应曲线上的点$M(x, y), x + \Delta x(x + dx)$对应曲线上的点$N(x + \Delta x, y + \Delta y)$，对应切线上的点$P(x + dx, y + dy)$；
- 区间$[x, x + \Delta x]$对应小弧段$\widehat{MN}$，记小弧段$\widehat{MN}$长度为Δs，记切线MP的长度为ds。



直角坐标系中的弧长公式

由微分的几何意义可知，当Δx足够小时，可以用切线段MP近似替代弧段$\overset{\frown}{MN}$，所以

$$\Delta s \approx ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{1 + (f')^2(x)}dx.$$

直角坐标系中的弧长公式

由微分的几何意义可知，当Δx足够小时，可以用切线段MP近似替代弧段$\widehat{MN}$，所以

$$\Delta s \approx ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{1 + (f')^2(x)}dx.$$

因此所求弧长为

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + (f')^2(x)}dx.$$

由于$s \geq 0$，因此需要$a < b$。

直角坐标系中的弧长公式

由微分的几何意义可知，当Δx足够小时，可以用切线段MP近似替代弧段$\overset{\frown}{MN}$，所以

$$\Delta s \approx ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{1 + (f')^2(x)}dx.$$

因此所求弧长为

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + (f')^2(x)}dx.$$

由于$s \geq 0$，因此需要$a < b$。

例 13

求曲线$y = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$相应于$x$从1到2的一段弧的长度。

由参数方程表示的弧长公式

设曲线弧的参数方程为 $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$ $(\alpha \le t \le \beta)$，其中$\varphi(t), \psi(t)$在$[\alpha.\beta]$上具有连续导数。

由参数方程表示的弧长公式

设曲线弧的参数方程为 $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$ $(\alpha \leq t \leq \beta)$，其中$\varphi(t), \psi(t)$在$[\alpha.\beta]$上具有连续导数。由弧微分可知

$$ds = \sqrt{(\varphi')^2(t) + (\psi')^2(t)}dt,$$

因此

$$s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(\varphi')^2(t) + (\psi')^2(t)}dt.$$

由于$s \geq 0$，因此需要$\alpha < \beta$。

引例

例 14

计算圆$x^2 + y^2 = R^2$的周长。

例 14

计算圆$x^2 + y^2 = R^2$的周长。

例 15

计算星形线$\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}$的全长。

例 14

计算圆$x^2+y^2=R^2$的周长。

例 15

计算星形线$\begin{cases} x=a\cos^3 t \\ y=a\sin^3 t \end{cases}$的全长。

例 16

计算由摆线$\begin{cases} x=a(t-\sin t) \\ y=a(1-\cos t) \end{cases}$ $(a>0,\ 0\leq t\leq 2\pi)$一拱的弧长。

极坐标系下的弧长公式

设曲线弧由极坐标方程$r=r(\theta)\ (\alpha \leq \theta \leq \beta)$给出，其中$r=r(\theta)$在$[\alpha,\beta]$上连续。由弧微分可知

$$ds=\sqrt{r^2(t)+(r')^2(t)}dt,$$

因此

$$s=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{r^2(t)+(r')^2(t)}dt.$$

由于$s\geq 0$，因此需要$\alpha<\beta$。

例 17

计算由计算阿基米德螺线$r = a\theta\,(a > 0)$上相应于θ从0到2π的一段弧长。

引例

例 17

计算由计算阿基米德螺线$r = a\theta\,(a > 0)$上相应于θ从0到2π的一段弧长。

例 18

计算心形线$r = a(1 + \cos\theta)$的全长。

反常积分

定积分$\int_a^b f(x)dx$对被积函数和积分区间都有要求：

(1) 积分区间$[a,b]$为有限区间；

(2) 被积函数f在$[a,b]$上有界。

定积分$\int_a^b f(x)dx$对被积函数和积分区间都有要求：

(1) 积分区间$[a,b]$为有限区间；

(2) 被积函数f在$[a,b]$上有界。

但是实际问题有时会超出这个设定范围。此时需要我们考虑将定积分的概念推广到无穷区间或无界函数中，从而形成“反常积分”或“广义积分”的概念。

课前导读

定积分$\int_a^b f(x)dx$对被积函数和积分区间都有要求：

(1) 积分区间$[a,b]$为有限区间；

(2) 被积函数f在$[a,b]$上有界。

但是实际问题有时会超出这个设定范围。此时需要我们考虑将定积分的概念推广到无穷区间或无界函数中，从而形成“反常积分”或“广义积分”的概念。

本节我们简单讨论主要两类反常积分。

无限区间上的反常积分

我们先观察几个定积分的例子：

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}; \quad \int_0^b \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x\Big|_0^b = \arctan b.$$

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} = \ln x\Big|_1^2 = \ln 2; \quad \int_1^b \frac{dx}{x} = \ln x\Big|_1^2 = \ln b.$$

我们先观察几个定积分的例子：

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x|_0^1 = \frac{\pi}{4}; \quad \int_0^b \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x|_0^b = \arctan b.$$

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} = \ln x|_1^2 = \ln 2; \quad \int_1^b \frac{dx}{x} = \ln x|_1^2 = \ln b.$$

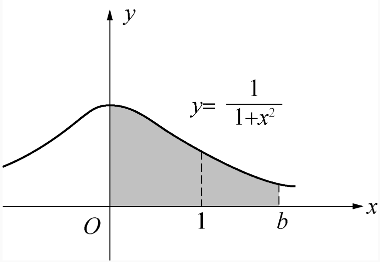
定积分的几何意义是在对应区间上曲边梯形面积的代数和，令$b \to \infty$，取定积分的极限：

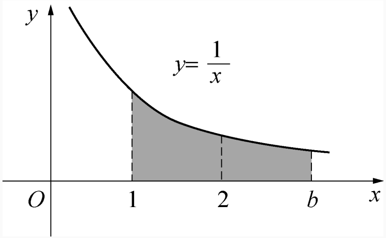
$$\lim_{b\to\infty} \int_0^b \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to\infty} \arctan x|_0^b = \lim_{b\to\infty} \arctan b = \frac{\pi}{2},$$

$$\lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{dx}{x} = \lim_{b\to\infty} \ln x|_1^2 = \lim_{b\to\infty} \ln b = +\infty.$$

曲线$y=\dfrac{1}{1+x^2}$与坐标轴正半轴所围的图形可以向x轴正方向无限延伸，且有"有限"面积$\dfrac{\pi}{2}$，对应的积分极限存在。

曲线$y=\dfrac{1}{x}$与坐标轴正半轴所围的图形同样可以向x轴正方向无限延伸，同时"面积"也无限增大，故对应的极限不存在。





无限区间上的反常积分

定义

设函数$f(x)$在区间$(-\infty, b]$上连续，取$a < b$。

- 如果极限$\lim\limits_{a \to -\infty} \int_a^b f(x)dx$存在，称该极限为$f(x)$在区间$(-\infty, b]$上的反常积分，也称积分$\int_{-\infty}^b f(x)dx$收敛，记作

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a \to -\infty} \int_a^b f(x)dx.$$

- 如果上述极限不存在，则称积分$\int_{-\infty}^b f(x)dx$发散。

定义

设函数$f(x)$在区间$[a,+\infty)$上连续，取$a<b$。

- 如果极限$\lim\limits_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$存在，称该极限为$f(x)$在区间$[a,+\infty)$上的反常积分，也称积分$\int_a^{+\infty} f(x)dx$收敛，记作
$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx.$$
- 如果上述极限不存在，则称积分$\int_a^{+\infty} f(x)dx$发散。

定义

设函数$f(x)$在区间$(-\infty,+\infty)$上连续。

- 如果积分$\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)dx$收敛和积分$\displaystyle\int_{-\infty}^{a} f(x)dx$均收敛，那么称积分$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$收敛，记

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int_a^{+\infty} f(x)dx.$$

- 如果上述极限不存在，则称积分$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$发散。

- 由a的任意性，$\lim\limits_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx$必须对任意一种趋近方式都成立；
- 积分$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$收敛时表示一个数；当积分$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$发散时，它仅仅是一个符号；
- 设$F'(x)=f(x)$，记$F(+\infty)=\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)$，$F(-\infty)=\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)$，则反常积分可以表示为

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = F(+\infty)-F(a),\quad \int_{-\infty}^{b} f(x)dx = F(b)-F(-\infty).$$

- 如果$F(+\infty),F(-\infty)$都存在，那么

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = F(+\infty)-F(-\infty).$$

引例

例 1

计算反常积分$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$。

例 1

计算反常积分$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx$。

例 2

讨论反常积分$\int_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x^p}$的敛散性。

引例

例 1

计算反常积分$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx$。

例 2

讨论反常积分$\displaystyle\int_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x^p}$的敛散性。

例 3

讨论反常积分$\displaystyle\int_{1}^{+\infty}\cos x dx$的敛散性。

引例

例 1

计算反常积分$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx$。

例 2

讨论反常积分$\displaystyle\int_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x^p}$的敛散性。

例 3

讨论反常积分$\displaystyle\int_{1}^{+\infty}\cos x dx$的敛散性。

例 4

计算反常积分$\displaystyle\int_{0}^{+\infty}\frac{\ln(x+1)}{(1+x)^2}dx$。

无界函数的反常积分(瑕积分)

如果函数f在点$x=a$的任一邻域内都无界，则称点a为函数f的瑕点(也称为无界间断点)。无界函数的反常积分也称**瑕积分**。

定义

设函数$f(x)$在区间$(a,b]$上连续，点a为函数f的瑕点，任取$\varepsilon>0$。

- 如果极限$\displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx$存在，称该极限为$f(x)$在区间$(a,b]$上的反常积分，也称积分$\displaystyle\int_a^b f(x)dx$收敛，记作

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx.$$

- 如果上述极限不存在，则称积分$\displaystyle\int_a^b f(x)dx$发散。

定义

设函数$f(x)$在区间$[a,b)$上连续，点b为函数f的瑕点，任取$\varepsilon > 0$。

- 如果极限 $\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$存在，称该极限为$f(x)$在区间$[a,b)$上的反常积分，也称积分$\int_a^b f(x)dx$收敛，记作

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx.$$

- 如果上述极限不存在，则称积分$\int_a^b f(x)dx$发散。

无界函数的反常积分(瑕积分)

定义

设函数$f(x)$在区间$[a, c)$，$(c, b]$上连续，点c为函数f的瑕点。

- 如果积分$\int_a^c f(x)dx$收敛和积分$\int_c^b f(x)dx$均收敛，那么称积分$\int_a^b f(x)dx$收敛，记

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

- 如果上述极限不存在，则称积分$\int_a^b f(x)dx$发散。

无界函数的反常积分(瑕积分)

- 无界函数的反常积分在形式上与定积分没有区别，故需要注意对它的识别；
- 设$F'(x) = f(x)$，当a为函数$f(x)$的瑕点且$F'(a) = f(a)$时，$F(a) = \lim_{x \to a^+} F(x)$；
- 设$F'(x) = f(x)$，当b为函数$f(x)$的瑕点且$F'(b) = f(b)$时，$F(b) = \lim_{x \to b^-} F(x)$；
- 上述的反常积分都可以表示为

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

例 5

计算反常积分 $\int_0^1 \ln x dx$。

例 5

计算反常积分 $\int_0^1 \ln x dx$。

例 6

讨论反常积分 $\int_0^1 \frac{dx}{x^q}$ 的敛散性。

引例

例 5

计算反常积分 $\int_0^1 \ln x dx$。

例 6

讨论反常积分 $\int_0^1 \frac{dx}{x^q}$ 的敛散性。

例 7

计算反常积分 $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-\sqrt{x}} dx$。

例 8

讨论下列反常积分的敛散性：(1) $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2}$，(2) $\int_0^2 \frac{dx}{x^2-4x+3}$。

反常积分的收敛性可以通过计算被积函数的原函数，按照反常积分的定义取极限来判断收敛性。

无限区间上反常积分的审敛法

反常积分的收敛性可以通过计算被积函数的原函数，按照反常积分的定义取极限来判断收敛性。以下我们来给出不通过计算被积函数原函数去判断反常积分收敛的方法。

反常积分的收敛性可以通过计算被积函数的原函数，按照反常积分的定义取极限来判断收敛性。以下我们来给出不通过计算被积函数原函数去判断反常积分收敛的方法。

定理 (无限区间上的反常积分)

设函数$f(x)$在区间$[a,+\infty)$上连续且$f(x)\geq 0$。如果函数

$$F(x):=\int_a^x f(t)dt$$

在$[a,+\infty)$上有界，那么反常积分$\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)dx$收敛。

定理 (比较审敛法(1.0))

设函数$f(x), g(x)$在区间$[a, +\infty)$上连续。如果$0 \leq f(x) \leq g(x)\ (a \leq x \leq +\infty)$，那么

- 若$\displaystyle\int_a^{+\infty} g(x)dx$收敛，则$\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)dx$收敛；
- 若$\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)dx$发散，则$\displaystyle\int_a^{+\infty} g(x)dx$发散。

定理 (比较审敛法(1.0))

设函数$f(x), g(x)$在区间$[a, +\infty)$上连续。如果$0 \le f(x) \le g(x)\,(a \le x \le +\infty)$，那么

- 若$\displaystyle\int_a^{+\infty} g(x)dx$收敛，则$\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)dx$收敛；
- 若$\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)dx$发散，则$\displaystyle\int_a^{+\infty} g(x)dx$发散。

注

回顾反常积分$\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$的敛散性。

定理 (比较审敛法(2.0))

设函数$f(x)$在区间$[a,+\infty)$上连续$(a>0)$且$f(x)\geq 0$。

- 如果存在$M>0$及$p>1$使得$f(x)\leq \dfrac{M}{x^p}$，那么$\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)dx$收敛；
- 如果存在$N>0$使得$f(x)\geq \dfrac{N}{x}$，那么$\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)dx$发散。

定理 (比较审敛法(2.0))

设函数$f(x)$在区间$[a,+\infty)$上连续$(a>0)$且$f(x)\geq 0$。

- 如果存在$M>0$及$p>1$使得$f(x)\leq \frac{M}{x^p}$，那么$\int_a^{+\infty} f(x)dx$收敛；
- 如果存在$N>0$使得$f(x)\geq \frac{N}{x}$，那么$\int_a^{+\infty} f(x)dx$发散。

定理 (无限区间上反常积分极限审敛法)

设函数$f(x)$在区间$[a,+\infty)$上连续且$f(x)\geq 0$。

- 如果存在$p>1$使得$\lim\limits_{x\to+\infty} x^p f(x)=c<+\infty$，那么$\int_a^{+\infty} f(x)dx$收敛；
- 如果$\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x)=d>0$(或等于$+\infty$)，那么$\int_a^{+\infty} f(x)dx$发散。

例 9

判断反常积分 $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^4+1}}$ 的敛散性。

例 9

判断反常积分 $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^4+1}}$ 的敛散性。

例 10

判断反常积分 $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$ 的敛散性。

例 9

判断反常积分$\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt[3]{x^4+1}}$的敛散性。

例 10

判断反常积分$\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$的敛散性。

例 11

判断反常积分$\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{x^{\frac{3}{2}}}{1+x^2}dx$的敛散性。

例 12

判断反常积分$\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\arctan x}{x}dx$的敛散性。

无界函数反常积分的审敛法

定理 (比较审敛法(3.0))

设函数$f(x)$在区间$(a,b]$上连续且$f(x)\geq 0$，$x=a$为函数$f(x)$的瑕点。

- 如果存在$M>0$及$q<1$使得$f(x)\leq \dfrac{M}{(x-a)^q}(a<x\leq b)$，那么$\displaystyle\int_a^b f(x)dx$收敛；
- 如果存在$N>0$使得$f(x)\geq \dfrac{N}{x-a}(a<x\leq b)$，那么$\displaystyle\int_a^b f(x)dx$发散。

定理 (比较审敛法(3.0))

设函数$f(x)$在区间$(a,b]$上连续且$f(x) \geq 0$，$x = a$为函数$f(x)$的瑕点。

- 如果存在$M > 0$及$q < 1$使得$f(x) \leq \dfrac{M}{(x-a)^q}(a < x \leq b)$，那么$\int_a^b f(x)dx$收敛；
- 如果存在$N > 0$使得$f(x) \geq \dfrac{N}{x-a}(a < x \leq b)$，那么$\int_a^b f(x)dx$发散。

定理 (无界函数反常积分极限审敛法)

设函数$f(x)$在区间$(a,b]$上连续且$f(x) \geq 0$，$x = a$为函数$f(x)$的瑕点。

- 如果存在$0 < q < 1$使得$\lim\limits_{x\to a^+}(x-a)^q f(x)$存在，那么$\int_a^b f(x)dx$收敛；
- 如果$\lim\limits_{x\to a^+}(x-a)f(x) = d > 0$(或等于$+\infty$)，那么$\int_a^b f(x)dx$发散。

引例

注

回顾反常积分 $\int_0^1 \frac{dx}{x^q}$ 的敛散性。

引例

注

回顾反常积分$\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^q}$的敛散性。

例 13

判断反常积分$\displaystyle\int_1^3 \frac{dx}{\ln x}$的敛散性。

注

回顾反常积分$\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^q}$的敛散性。

例 13

判断反常积分$\displaystyle\int_1^3 \frac{dx}{\ln x}$的敛散性。

例 14

判断反常积分$\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$ $(k^2 < 1)$的敛散性。

引例

注

回顾反常积分$\int_0^1 \frac{dx}{x^q}$的敛散性。

例 13

判断反常积分$\int_1^3 \frac{dx}{\ln x}$的敛散性。

例 14

判断反常积分$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$ $(k^2 < 1)$的敛散性。

例 15

判断反常积分$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \sin \frac{1}{x} dx$的敛散性。

定义 (函数在区间上可积)

我们称函数f在$[a, b]$上可积，如果

- 当$[a, b]$为有限区间，那么函数f在$[a, b]$上黎曼可积；
- 当$[a, b]$为无限区间或f在$[a, b]$上有瑕点，那么函数f在$[a, b]$上反常积分存在。

函数可积及反常积分绝对收敛和条件收敛

定义 (函数在区间上可积)

我们称函数f在$[a,b]$上可积，如果

- 当$[a,b]$为有限区间，那么函数f在$[a,b]$上黎曼可积；
- 当$[a,b]$为无限区间或f在$[a,b]$上有瑕点，那么函数f在$[a,b]$上反常积分存在。

定义 (绝对收敛和条件收敛)

设函数$f(x)$在区间$[a,+\infty)$上可积。

- 如果$\displaystyle\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$收敛，那么称$\displaystyle\int_a^{+\infty}f(x)dx$**绝对收敛**，$f$在区间$[a,+\infty)$上**绝对可积**；
- 如果$\displaystyle\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$发散但$\displaystyle\int_a^{+\infty}f(x)dx$收敛，那么称$\displaystyle\int_a^{+\infty}f(x)dx$**条件收敛**。

函数可积的性质

反常积分的性质

- 设函数f在$[a,b]$上可积，那么

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

- 设函数f在$[a,b],[a,c],[c,b]$中最大区间上可积，那么

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

- 设函数f,g在$[a,b]$上可积，那么对常数$\alpha,\beta\in\mathbb{R}$，

$$\int_a^b [\alpha f(x) \pm \beta g(x)]dx = \alpha\int_a^b f(x)dx \pm \beta\int_a^b g(x)dx.$$

反常积分的性质

- 设函数f, g在$[a, b]$上可积且满足$f(x) \leq g(x) (x \in [a, b])$，那么当$a < b$时，

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_b^a g(x)dx.$$

- 设函数f在$[a, b]$上绝对可积，那么

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$

- 设函数f在$[a, b]$上可积，那么对任意$x \in [a, b]$，积分

$$\Phi(x) := \int_a^x f(t)dt.$$

存在；Φ是x的一个连续函数且有导函数$\Phi'(x) = f(x)$。

定理 (积分第一中值定理)

设函数f, g在$[a, b]$上可积。如果f在$[a, b]$上有界：$m \le f \le M$而g不改变正负号，那么$f(x) \cdot g(x)$也在$[a, b]$上可积且

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \mu \int_a^b g(x)dx, \quad m \le \mu \le M.$$

函数可积的性质

定理 (积分第一中值定理)

设函数f, g在$[a, b]$上可积。如果f在$[a, b]$上有界：$m \le f \le M$而g不改变正负号，那么$f(x) \cdot g(x)$也在$[a, b]$上可积且

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \mu \int_a^b g(x)dx, \quad m \le \mu \le M.$$

定理 (反常积分的分部积分法)

设函数u, v在$[a, b]$上除掉b点以外的全部点上皆有定义且连续，那么

$$\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu, \quad b \in \overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}.$$

定义 (Γ函数)

定义Γ函数

$$\Gamma(s) := \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{s-1} dx, \quad (s > 0).$$

定义 (Γ函数)

定义Γ函数

$$\Gamma(s) := \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{s-1} dx, \quad (s > 0).$$

该积分区间为无穷区间且当$s < 1$时$x = 0$为被积函数的瑕点，因此对Γ函数做如下分解：

$$\Gamma(s) = I_1 + I_2, \quad I_1 = \int_0^1 e^{-x} x^{s-1} dx, \quad I_2 = \int_1^{+\infty} e^{-x} x^{s-1} dx.$$

定义 (Γ函数)

定义Γ函数

$$\Gamma(s) := \int_0^{+\infty} e^{-x}x^{s-1}dx, \quad (s > 0).$$

该积分区间为无穷区间且当$s < 1$时$x = 0$为被积函数的瑕点，因此对Γ函数做如下分解：

$$\Gamma(s) = I_1 + I_2, \quad I_1 = \int_0^1 e^{-x}x^{s-1}dx, \quad I_2 = \int_1^{+\infty} e^{-x}x^{s-1}dx.$$

- 当$0 < s < 1$时，$e^{-x}x^{s-1} < \dfrac{1}{x^{1-s}}$，根据比较审敛法，反常积分$I_1$收敛；
- $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 \cdot (e^{-x}x^{s-1}) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^{s+1}}{e^x} = 0$，根据极限审敛法，反常积分$I_2$收敛。

由上述讨论，Γ函数对$s>0$均收敛。

Γ函数的性质

(1) 递推公式：$\Gamma(s+1)=s\Gamma(s)\,(s>0)$，$\Gamma(1)=1$；

(2) $\Gamma(s)\to+\infty\,(s\to 0^+)$；

(3) 余元公式：$\Gamma(s)\Gamma(1-s)=\dfrac{\pi}{\sin\pi s}\,(0<s<1)\ \Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$；

(4) 做代换$x=u^2$，有

$$\Gamma(s):=2\int_0^{+\infty}e^{-u^2}u^{2s-1}du,\quad (s>0).$$

再做代换$t=2s-1$，有

$$\int_0^{+\infty}e^{-u^2}u^t du=\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1+t}{2}\right)\,(t>-1)\xRightarrow{t=0}\int_0^{+\infty}e^{-u^2}du=\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

The End