习题 1 请使用数学归纳法证明**伯努利不等式**$(1+x)^n \geq 1+nx\,(x \geq -1, n > 1)$, 当且仅当$x=0$时等号成立.

习题 2 请使用数学归纳法证明不等式$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}(n \geq 2)$.

习题 3 请使用数学归纳法证明不等式

$$\left|\sin\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)\right| \leq \sum_{k=1}^{n} \sin x_k \ (0 \leq x_k \leq \pi, k=1,2,\cdots,n).$$

习题 4 请使用数学归纳法证明不等式$(2n)! \leq 2^{2n}(n!)^2$.

习题 5 证明对任意$x \in \mathbb{R}$和$n \in \mathbb{N}^+$,

$$[x] + \left[x + \frac{1}{n}\right] + \cdots + \left[x + \frac{n-1}{n}\right] = [nx].$$

习题 6 证明对任意正整数n,

$$(\sqrt{n})^n \leq n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n.$$

习题 7 证明对任意的实数a和b,

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|} \leq \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|}.$$