**定义** 我们称函数$f$是区间$I \subset \mathbb{R}$上的一个**凸函数**, 如果

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2), \quad x_1, x_2 \in I,\, \lambda \in (0,1).$$

如果上述不等式对$x_1 \neq x_2$严格成立(不包括等号), 那么称$f$为一个**严格凸函数**;

我们称函数$f$是区间$I \subset \mathbb{R}$上的一个**凹函数**, 如果$-f$是凸函数.

**定理** $f$是开区间$I \subset \mathbb{R}$上的一个凸函数$\Leftrightarrow$ $f'$在$I$上递增$\Leftrightarrow$ $f''(x) \geq 0,\, x \in I$.

**习题 1** 如果$f$是区间$I$上的一个凸函数, 那么请验证以下**Jensen不等式**成立:

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n) \leq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \cdots + \lambda_n f(x_n), \forall\, x_1, x_2, \ldots, x_n \in I,$$

其中非负实数$\lambda_i, i = 1, 2, \ldots, n$满足$\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = 1$.

**习题 2** 设$x, y > 0$及$p, q > 0$满足$1/p + 1/q = 1$, 请建立**Young不等式**$xy \leq \dfrac{x^p}{p} + \dfrac{y^q}{q}$.

(提示: 请先验证函数$x \mapsto \ln x$是其定义域上的凹凸性. )

**习题 3*** 请使用Young不等式验证**Hölder**不等式

$$\sum_{k=1}^{n} |x_k y_k| \leq \left( \sum_{k=1}^{n} |x_k|^p \right)^{1/p} \left( \sum_{k=1}^{n} |y_k|^q \right)^{1/q}, \quad 1 < p, q < \infty, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

**习题 4*** 请使用Hölder不等式验证**Minkowski**不等式

$$\left( \sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k|^p \right)^{1/p} \leq \left( \sum_{k=1}^{n} |x_k|^p \right)^{1/p} + \left( \sum_{k=1}^{n} |y_k|^p \right)^{1/p}, \quad p \geq 1.$$

**习题 5** 请使用函数的凹凸性验证均值不等式

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k \geq \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} x_k}, \quad x_1, x_2, \ldots, x_n > 0.$$

(提示: 请你使用函数$x \mapsto \ln x$是其定义域上的凹凸性. )

**习题 6** 对参数$\alpha > 1$及正数$x_1, x_2, \ldots, x_n$, 请验证以下不等式$\left( \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k \right)^{\alpha} \leq \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k^{\alpha}$.

(提示: 请你使用函数$x \mapsto x^{\alpha}$在$(0, \infty)$上的凹凸性. )

**习题 7*** 验证不等式$\sqrt[n]{\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \sin x_k} \leq \sin \left( \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k \right)$, 其中$x_1, x_2, \ldots, x_n \in (0, \pi)$.

(提示: 请你使用函数$x \mapsto \ln(\sin x)$在$(0, \pi)$上的凹凸性及Jensen不等式. )