

姓名:

学号:

专业:

高等数学 函数极限

习题 1 请计算以下极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos x\right)}{\sin(\sin x)}; \quad (2) \lim_{x \rightarrow 0} \left(x^2 \left(1 + 2 + 3 + \cdots + \left\lceil \frac{1}{|x|} \right\rceil \right) \right).$$

习题 2 设 $a > 1$ 及 $\alpha \in \mathbb{R}$, 请证明 (1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a^x}{x} = +\infty$; (2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a^x}{x^\alpha} = +\infty$.

习题 3 请证明 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0$, 其中 $\alpha > 0$.

习题 4 计算下列极限:

$$\begin{aligned} (1) \lim_{x \rightarrow \infty} (\ln x)^{1/x}; & \quad (2) \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\sin x}; & \quad (3) \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{1/\sin^2 x}; \\ (4) \lim_{x \rightarrow \infty} (e^x - 1)^{1/x}; & \quad (5) \lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin x)^{1/\ln x}. \end{aligned}$$

习题 5 计算下列极限:

$$\begin{aligned} (1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x + 2 \arctan 3x + 3x^2}{\ln(1 + 3x + \sin^2 x) + xe^x}; & \quad (2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x}{\tan x^2}; \\ (3) \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x^2)^{\cot x}; & \quad (4) \lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\ln \left(1 + \frac{x}{2} \right) - \ln \frac{x}{2} \right). \end{aligned}$$

习题 6* 设函数 f 在 $x = 0$ 处的某个邻域内满足 $f(x) \geq |x|^\alpha$, $\frac{1}{2} < \alpha < 1$ 且 $f(x)f(2x) \leq |x|$, 请验证 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$.

习题 7* 设单调函数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 满足 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(2x)}{f(x)} = 1$. 证明对任意 $c > 0$, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(cx)}{f(x)} = 1$.

姓名:

学号:

专业:

高等数学 函数极限
