

姓名:

学号:

专业:

高等数学 函数的连续性

---

**习题 1** 请证明如果  $f \in C([a, b])$ , 那么  $|f| \in C([a, b])$ , 并且请你举例说明这个命题的逆命题不成立.

**习题 2\*** 设  $f(x) = [x^2] \sin \pi x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , 请讨论函数  $f$  的连续性.

**习题 3\*** 设  $f(x) = [x] + (x - [x])^{[x]}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , 证明函数  $f$  连续且  $f$  在  $[1, +\infty)$  上单调递增.

**习题 4** 讨论下列函数的连续性:

(1)  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^x - n^{-x}}{n^x + n^{-x}}, x \in \mathbb{R};$

(2)  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^2 e^{nx} + x}{e^{nx} + 1}, x \in \mathbb{R};$

(3)  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(e^n + x^n)}{n}, x \geq 0;$

(4)  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{4^n + x^{2n} + \frac{1}{x^{2n}}}, x \neq 0;$

(5)  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[2n]{\cos^{2n} x + \sin^{2n} x}, x \in \mathbb{R}.$

**习题 5** 设周期函数  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  连续, 证明函数  $f$  在  $\mathbb{R}$  上可以取得到最大值和最小值.

**习题 6** 证明方程  $(1 - x) \cos x = \sin x$  在  $(0, 1)$  内至少有一个解.

**习题 7** 设  $f \in C([0, 2])$ , 请证明存在  $x_1, x_2 \in [0, 2]$  使得  $x_2 - x_1 = 1$  且

$$f(x_2) - f(x_1) = \frac{1}{2}(f(2) - f(0)).$$

**习题 8\*** 请你给出定义在区间  $I$  上满足介值性质但是不连续的函数  $f$  的例子.

姓名:

学号:

专业:

高等数学 函数的连续性

---