AMS

微分方程

本章目录

微分方程的概念

课前导读

实际问题中，我们可能建立起变量与未知函数关系的导函数或者微分之间的关系，从而得到关于未知函数的导函数或微分的方程形式。

课前导读

实际问题中，我们可能建立起变量与未知函数关系的导函数或者微分之间的关系，从而得到关于未知函数的导函数或微分的方程形式。

通过求解这些方程，同样可以找到变量与未知函数之间的关系，例如我们已经掌握的不定积分的计算方法。

课前导读

实际问题中，我们可能建立起变量与未知函数关系的导函数或者微分之间的关系，从而得到关于未知函数的导函数或微分的方程形式。

通过求解这些方程，同样可以找到变量与未知函数之间的关系，例如我们已经掌握的不定积分的计算方法。

本节我们来引入微分方程的概念来描述我们的主要研究对象。

微分方程引例

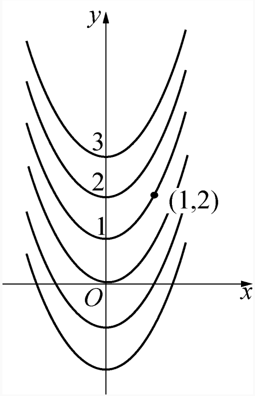
例

一曲线通过点$(1,2)$，且在该曲线上任意一点$M(x,y)$处的切线的斜率为$2x$，求该曲线的方程。

微分方程引例

例

一曲线通过点$(1,2)$，且在该曲线上任意一点$M(x,y)$处的切线的斜率为$2x$，求该曲线的方程。



微分方程引例

例

列车在公路上以$20m/s$（相当于$72km/h$）的速度行驶，当制动时列车获得加速度$-0.4m/s^2$，开始制动后多长时间列车才能停住？列车在这段时间里行驶了多少路程？

微分方程引例

例

列车在公路上以$20m/s$（相当于$72km/h$）的速度行驶，当制动时列车获得加速度$-0.4m/s^2$，开始制动后多长时间列车才能停住？列车在这段时间里行驶了多少路程？

$$\frac{d^2s}{dt^2}=-0.4,\quad s\mid_{t=0}=0,\quad s'\mid_{t=0}=20.\left(v=\frac{ds}{dt}\right).$$

微分方程引例

例

列车在公路上以$20m/s$（相当于$72km/h$）的速度行驶，当制动时列车获得加速度$-0.4m/s^2$，开始制动后多长时间列车才能停住？列车在这段时间里行驶了多少路程？

$$\frac{d^2s}{dt^2}=-0.4,\quad s\mid_{t=0}=0,\quad s'\mid_{t=0}=20.\left(v=\frac{ds}{dt}\right).$$

例

已知放射性物质镭的裂变规律是裂变速度与余存量成比例。记在某一时刻$t=t_0$，镭的余存量为R_0克，试确定镭在任意时刻t的余存量$R(t)$。

例

列车在公路上以$20m/s$（相当于$72km/h$）的速度行驶，当制动时列车获得加速度$-0.4m/s^2$，开始制动后多长时间列车才能停住？列车在这段时间里行驶了多少路程？

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = -0.4, \quad s\mid_{t=0} = 0, \quad s' \mid_{t=0} = 20. \left(v = \frac{ds}{dt} \right).$$

例

已知放射性物质镭的裂变规律是裂变速度与余存量成比例。记在某一时刻$t = t_0$，镭的余存量为R_0克，试确定镭在任意时刻t的余存量$R(t)$。

$$-\frac{dR(t)}{dt} = kR(t), \quad R(t_0) = R_0.$$

定义 (微分方程)

- 含有未知函数及其导函数与自变量的等式称为**微分方程**（其中自变量、未知函数可以在方程中不出现，但未知函数的导数必须出现）。
- 微分方程中出现的未知函数的导函数的最高阶数称为微分方程的**阶**。

定义 (微分方程)

- 含有未知函数及其导函数与自变量的等式称为**微分方程**（其中自变量、未知函数可以在方程中不出现，但未知函数的导数必须出现）。
- 微分方程中出现的未知函数的导函数的最高阶数称为微分方程的**阶**。

设x为自变量，$y = y(x)$是未知函数：

- 一阶微分方程的一般形式为$F(x, y, y') = 0$；
- 二阶微分方程的一般形式为$F(x, y, y', y'') = 0$；
- n阶微分方程的一般形式是

$$F(x, y, y', y'', \cdots, y^{(n)}) = 0,$$

其中$y^{(n)}$必须出现，其他变量可以不出现。

注

(1) 如果可以从上述微分方程中解出最高阶导函数，例如$y^{(n)}$，那么我们得到：

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \cdots, y^{(n-1)}),$$

这个形式的微分方程将是我们本章主要讨论的方程形式；

注

(1) 如果可以从上述微分方程中解出最高阶导函数，例如$y^{(n)}$，那么我们得到：

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \cdots, y^{(n-1)}),$$

这个形式的微分方程将是我们本章主要讨论的方程形式；

(2) 如果（1）中的方程可以表示为

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = g(x),$$

则称该方程为n**阶线性微分方程**，其中$a_i(x), g(x)$均为已知函数，$1 \leq i \leq n$；

注

(1) 如果可以从上述微分方程中解出最高阶导函数，例如$y^{(n)}$，那么我们得到：

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \cdots, y^{(n-1)}),$$

这个形式的微分方程将是我们本章主要讨论的方程形式；

(2) 如果（1）中的方程可以表示为

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = g(x),$$

则称该方程为n**阶线性微分方程**，其中$a_i(x), g(x)$均为已知函数，$1 \le i \le n$；

(3) 不能表示成（2）中形式的微分方程，统称为**非线性微分方程**。

微分方程的解

定义

设函数$y=\varphi(x)$在区间上有n阶连续导函数。如果在I上满足

$$F(x,\varphi(x),\varphi'(x),\varphi''(x),\cdots,\varphi^{(n)}(x))\equiv 0,$$

那么称$y=\varphi(x)$是该微分方程的解；

定义

设函数$y=\varphi(x)$在区间上有n阶连续导函数。如果在I上满足

$$F(x,\varphi(x),\varphi'(x),\varphi''(x),\cdots,\varphi^{(n)}(x))\equiv 0,$$

那么称$y=\varphi(x)$是该微分方程的解；微分方程的解可能含有也可能不含有任意常数。

- 含有相互独立的任意常数且任意常数的个数与微分方程的阶数相等的解称为微分方程的**通解(一般解)**；
- 微分方程中不含有任意常数的解称为微分方程的**特解**。

微分方程的解

定义

设函数$y=\varphi(x)$在区间上有n阶连续导函数。如果在I上满足

$$F(x,\varphi(x),\varphi'(x),\varphi''(x),\cdots,\varphi^{(n)}(x))\equiv 0,$$

那么称$y=\varphi(x)$是该微分方程的解；微分方程的解可能含有也可能不含有任意常数。

- 含有相互独立的任意常数且任意常数的个数与微分方程的阶数相等的解称为微分方程的**通解(一般解)**；
- 微分方程中不含有任意常数的解称为微分方程的**特解**。

需要指出，这里所说的相互独立的任意常数是指它们不能通过合并而使得通解中的任意常数的个数减少。

定义

(1) 许多实际问题都要求寻找满足某些附加条件的解，此时这类附加条件就可以用来确定通解中的任意常数，我们称这类附加条件称为**初始条件**；

定义

(1) 许多实际问题都要求寻找满足某些附加条件的解，此时这类附加条件就可以用来确定通解中的任意常数，我们称这类附加条件称为**初始条件**；

(2) 带有初始条件的微分方程称为微分方程的**初值问题**；

定义

(1) 许多实际问题都要求寻找满足某些附加条件的解，此时这类附加条件就可以用来确定通解中的任意常数，我们称这类附加条件称为**初始条件**；

(2) 带有初始条件的微分方程称为微分方程的**初值问题**；

(3) 微分方程的解的图形是一条曲线，称为微分方程的**积分曲线**：

定义

(1) 许多实际问题都要求寻找满足某些附加条件的解，此时这类附加条件就可以用来确定通解中的任意常数，我们称这类附加条件称为**初始条件**;

(2) 带有初始条件的微分方程称为微分方程的**初值问题**;

(3) 微分方程的解的图形是一条曲线，称为微分方程的**积分曲线**:

- 通解中含有任意常数，所以它的图形是具有某种共同性质的积分曲线族;

定义

(1) 许多实际问题都要求寻找满足某些附加条件的解，此时这类附加条件就可以用来确定通解中的任意常数，我们称这类附加条件称为**初始条件**;

(2) 带有初始条件的微分方程称为微分方程的**初值问题**;

(3) 微分方程的解的图形是一条曲线，称为微分方程的**积分曲线**:

- 通解中含有任意常数，所以它的图形是具有某种共同性质的积分曲线族;
- 特解是积分曲线中满足初始条件的某一条特定的积分曲线。

例

设一物体的温度为$100°\mathrm{C}$将其放置在空气温度为$20°\mathrm{C}$的环境中冷却。根据冷却定律: 物体温度的变化率与物体和当时空气温度之差成正比。设物体的温度T与时间t的函数关系为$T = T(t)$，则可建立起函数$T(t)$满足的微分方程：

例

设一物体的温度为100°C将其放置在空气温度为20°C的环境中冷却。根据冷却定律: 物体温度的变化率与物体和当时空气温度之差成正比。设物体的温度T与时间t的函数关系为$T=T(t)$，则可建立起函数$T(t)$满足的微分方程：

$$\frac{dT}{dt}=-k(T-20),\quad k>0.$$

我们称这就是**物体冷却的数学模型**。

例

设一物体的温度为100°C将其放置在空气温度为20°C的环境中冷却。根据冷却定律: 物体温度的变化率与物体和当时空气温度之差成正比。设物体的温度T与时间t的函数关系为$T = T(t)$，则可建立起函数$T(t)$满足的微分方程:

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - 20), \quad k > 0.$$

我们称这就是**物体冷却的数学模型**。根据题意$T = T(t)$还需满足初值条件:

$$T|_{t=0} = 100.$$

引例

例 1

试指出下列方程是什么方程，并指出微分方程的阶数：

(1) $\dfrac{dy}{dx} = x^2 + y;$

(2) $x\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 - 2\dfrac{dy}{dx} + 4x = 0;$

(3) $x\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 - 2\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^3 + 5xy = 0;$

(4) $\cos(y'') + \ln y = x + 1.$

例 1

试指出下列方程是什么方程，并指出微分方程的阶数：

(1) $\frac{dy}{dx} = x^2 + y$;

(2) $x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2\frac{dy}{dx} + 4x = 0$;

(3) $x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + 5xy = 0$;

(4) $\cos(y'') + \ln y = x + 1$.

例 2

验证函数$y = (x^2 + C)\sin x$（C为任意常数）是方程

$$\frac{dy}{dx} - y\cot x - 2x\sin x = 0$$

的通解，并求满足初始条件$y|_{x=\frac{\pi}{2}}$的特解。

一阶微分方程

定义

设有一阶微分方程$\frac{dy}{dx} = F(x, y)$。如果$F(x, y)$可以分解为$F(x, y) = f(x)g(y)$，即原来的微分方程可以写成

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx,$$

那么称这样的微分方程为**可分离变量的微分方程**。

定义

设有一阶微分方程$\frac{dy}{dx} = F(x, y)$。如果$F(x, y)$可以分解为$F(x, y) = f(x)g(y)$，即原来的微分方程可以写成

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx,$$

那么称这样的微分方程为**可分离变量的微分方程**。

设函数$g(y), f(x)$是连续的，两边同时积分：

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx,$$

方程两边同时求原函数便得到关于x, y的方程，它便是微分方程$\frac{dy}{dx} = F(x, y)$的通解。

例

求微分方程$\frac{dy}{dx} = 2xy$的通解。

例

求微分方程$\dfrac{dy}{dx} = 2xy$的通解。

分离变量并两边积分，得到

$$\int \frac{dy}{y} = \int 2x dx \Rightarrow \ln|y| = x^2 + C_1.$$

两边取指数函数，则$y = \pm e^{x^2+C_1} = \pm e^{C_1} \cdot e^{x^2}$。

例

求微分方程$\frac{dy}{dx} = 2xy$的通解。

分离变量并两边积分，得到

$$\int \frac{dy}{y} = \int 2x dx \Rightarrow \ln|y| = x^2 + C_1.$$

两边取指数函数，则$y = \pm e^{x^2+C_1} = \pm e^{C_1} \cdot e^{x^2}$。

注

方程$\int \frac{dy}{y} = \int 2x dx$的解可以重塑为$\ln y = x^2 + \ln C$（去掉绝对值，常数$C$可以取到负值），即可得到

$$y = Ce^{x^2}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

例

求微分方程$dx + xydy = y^2dx + ydy$的通解。

例

求微分方程$dx + xydy = y^2dx + ydy$的通解。

合并dx, dy各项、分离变量并两边积分，得到

$$y(x-1)dy = (y^2-1)dx \Rightarrow \int \frac{ydy}{y^2-1} = \int \frac{dx}{x-1} \Rightarrow \frac{1}{2}\ln(y^2-1) = \ln(x-1) + \ln C.$$

两边取指数函数，得到题设方程通解$y^2 - 1 = C(x-1)^2$。

例

求微分方程$dx + xydy = y^2dx + ydy$的通解。

合并dx, dy各项、分离变量并两边积分，得到

$$y(x-1)dy = (y^2-1)dx \Rightarrow \int \frac{ydy}{y^2-1} = \int \frac{dx}{x-1} \Rightarrow \frac{1}{2}\ln(y^2-1) = \ln(x-1) + \ln C.$$

两边取指数函数，得到题设方程通解$y^2 - 1 = C(x-1)^2$。

注

在用分离变量法的过程中，我们需要假定$g(y) \neq 0$，这样得到的通解不包含满足条件$g(y) = 0$的特解。如果扩大任意常数C的取值范围，则其失去的解仍包含在通解中。

例

求微分方程$dx + xydy = y^2dx + ydy$的通解。

合并dx, dy各项、分离变量并两边积分，得到

$$y(x-1)dy = (y^2-1)dx \Rightarrow \int \frac{ydy}{y^2-1} = \int \frac{dx}{x-1} \Rightarrow \frac{1}{2}\ln(y^2-1) = \ln(x-1) + \ln C.$$

两边取指数函数，得到题设方程通解$y^2 - 1 = C(x-1)^2$。

注

在用分离变量法的过程中，我们需要假定$g(y) \neq 0$，这样得到的通解不包含满足条件$g(y) = 0$的特解。如果扩大任意常数C的取值范围，则其失去的解仍包含在通解中。本例中如果允许$C = 0$，则$y = \pm 1$仍然包含在已求解的通解中。

引例

例 1

求微分方程$(1+e^x)yy' = e^x$满足$y|_{x=0} = 0$的特解。

例 1

求微分方程$(1+e^x)yy' = e^x$满足$y|_{x=0} = 0$的特解。

例 2

已知$f'(\sin^2 x) = \cos 2x + \tan^2 x$，当$0 < x < 1$时，求$f(x)$。

齐次方程

有的微分方程通过适当的变量代换后也可以转化为可分离变量的方程。

齐次方程

有的微分方程通过适当的变量代换后也可以转化为可分离变量的方程。如果一阶微分方程$\frac{dy}{dx} = f(x,y)$中$f(x,y)$可化为$\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$，那么通过变量替换$u = \frac{y}{x}$转化为可分离变量方程求解：令$u = \frac{y}{x}$，则$y = ux$，于是

$$u + x\frac{du}{dx} = \varphi(u) \Rightarrow \frac{du}{\varphi(u) - u} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \int \frac{du}{\varphi(u) - u} = \int \frac{dx}{x}.$$

齐次方程

有的微分方程通过适当的变量代换后也可以转化为可分离变量的方程。如果一阶微分方程$\frac{dy}{dx}=f(x,y)$中$f(x,y)$可化为$\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$，那么通过变量替换$u=\frac{y}{x}$转化为可分离变量方程求解：令$u=\frac{y}{x}$，则$y=ux$，于是

$$u+x\frac{du}{dx}=\varphi(u)\Rightarrow\frac{du}{\varphi(u)-u}=\frac{dx}{x}\Rightarrow\int\frac{du}{\varphi(u)-u}=\int\frac{dx}{x}.$$

定义

我们称形如$\frac{dy}{dx}=\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$的微分方程称为**齐次方程**。

齐次方程

有的微分方程通过适当的变量代换后也可以转化为可分离变量的方程。如果一阶微分方程$\frac{dy}{dx} = f(x,y)$中$f(x,y)$可化为$\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$，那么通过变量替换$u = \frac{y}{x}$转化为可分离变量方程求解：令$u = \frac{y}{x}$，则$y = ux$，于是

$$u + x\frac{du}{dx} = \varphi(u) \Rightarrow \frac{du}{\varphi(u) - u} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \int \frac{du}{\varphi(u) - u} = \int \frac{dx}{x}.$$

定义

我们称形如$\frac{dy}{dx} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$的微分方程称为**齐次方程**。

针对一阶常微分方程$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$，当$M(x,y)$和$N(x,y)$是具有同阶n的齐次函数，即$M(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n M(x,y)$, $N(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n N(x,y)$，那么

$$\frac{M(\lambda x, \lambda y)}{N(\lambda x, \lambda y)} = \frac{M(x,y)}{N(x,y)} \xRightarrow{\text{令}\lambda=\frac{1}{x}} -\frac{dy}{dx} = \frac{M(x,y)}{N(x,y)} = \frac{M(\lambda x, \lambda y)}{N(\lambda x, \lambda y)} = \frac{M(1, y/x)}{N(1, y/x)} = f(y/x).$$

例 3

求微分方程$x(\ln x - \ln y)dy - ydx = 0$的通解。

例 3

求微分方程$x(\ln x - \ln y)dy - ydx = 0$的通解。

例 4

求微分方程$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \tan\frac{y}{x}$满足初始条件$y|_{x=1} = \frac{\pi}{6}$的特解。

引例

例 3

求微分方程$x(\ln x-\ln y)dy-ydx=0$的通解。

例 4

求微分方程$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}+\tan\frac{y}{x}$满足初始条件$y|_{x=1}=\frac{\pi}{6}$的特解。

例 5

求解微分方程$\frac{dx}{x^2-xy+y^2}=\frac{dy}{2y^2-xy}$。

例 3

求微分方程$x(\ln x - \ln y)dy - ydx = 0$的通解。

例 4

求微分方程$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \tan\frac{y}{x}$满足初始条件$y|_{x=1} = \frac{\pi}{6}$的特解。

例 5

求解微分方程$\frac{dx}{x^2 - xy + y^2} = \frac{dy}{2y^2 - xy}$。

例 6

利用变量代换法求方程$\frac{dy}{dx} = (x+y)^2$的通解。

一阶线性微分方程

定义

设函数$P(x), Q(x)$是某一区间I上的连续函数。形如

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x) \tag{1}$$

的方程称为**一阶线性微分方程**。

定义

设函数$P(x), Q(x)$是某一区间I上的连续函数。形如

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x) \tag{1}$$

的方程称为**一阶线性微分方程**。

- 当$Q(x) \neq 0$时，我们称方程(1)为**一阶非齐次线性微分方程**；

定义

设函数$P(x), Q(x)$是某一区间I上的连续函数。形如

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x) \tag{1}$$

的方程称为**一阶线性微分方程**。

- 当$Q(x) \neq 0$时，我们称方程(1)为**一阶非齐次线性微分方程**；
- 当$Q(x) \equiv 0$时，我们称方程$\frac{dy}{dx} + P(x)y = 0$为**一阶齐次线性微分方程**。
- 我们总是称一个线性微分方程是**齐次的**，如果该方程针对未知函数y与其对应的若干导函数$y^{(k)}$是齐次的，即如果$\phi(x)$是原微分方程的一个解时, 那么对任意一个非零常数c，$c\phi(x)$也是原方程的一个解。

一阶齐次线性微分方程通解

方程（2）是一个可分离变量的方程，因此其通解为

$$\frac{dy}{y} = -P(x)dx \Rightarrow \ln y = -\int P(x)dx + \ln C \Rightarrow y = Ce^{-\int P(x)dx}.$$

一阶齐次线性微分方程通解

方程（2）是一个可分离变量的方程，因此其通解为

$$\frac{dy}{y} = -P(x)dx \Rightarrow \ln y = -\int P(x)dx + \ln C \Rightarrow y = Ce^{-\int P(x)dx}.$$

- 不论C取什么值，$y = Ce^{-\int P(x)dx}$只能是齐次线性方程（2）的解。

一阶齐次线性微分方程通解

方程（2）是一个可分离变量的方程，因此其通解为

$$\frac{dy}{y} = -P(x)dx \Rightarrow \ln y = -\int P(x)dx + \ln C \Rightarrow y = Ce^{-\int P(x)dx}.$$

- 不论C取什么值，$y = Ce^{-\int P(x)dx}$只能是齐次线性方程（2）的解。
- 若希望方程（1）具有类似$y = Ce^{-\int P(x)dx}$结构的解，则C不应该是常数而是关于变量x的函数。

方程（2）是一个可分离变量的方程，因此其通解为

$$\frac{dy}{y} = -P(x)dx \Rightarrow \ln y = -\int P(x)dx + \ln C \Rightarrow y = Ce^{-\int P(x)dx}.$$

- 不论C取什么值，$y = Ce^{-\int P(x)dx}$只能是齐次线性方程（2）的解。
- 若希望方程（1）具有类似$y = Ce^{-\int P(x)dx}$结构的解，则C不应该是常数而是关于变量x的函数。

设方程（1）的通解为

$$y = u(x)e^{-\int P(x)dx},$$

一阶齐次线性微分方程通解

方程（2）是一个可分离变量的方程，因此其通解为

$$\frac{dy}{y} = -P(x)dx \Rightarrow \ln y = -\int P(x)dx + \ln C \Rightarrow y = Ce^{-\int P(x)dx}.$$

- 不论C取什么值，$y = Ce^{-\int P(x)dx}$只能是齐次线性方程（2）的解。
- 若希望方程（1）具有类似$y = Ce^{-\int P(x)dx}$结构的解，则C不应该是常数而是关于变量x的函数。

设方程（1）的通解为

$$y = u(x)e^{-\int P(x)dx},$$

于是

$$y' = u'(x)e^{-\int P(x)dx} + u(x)e^{-\int P(x)dx}[-P(x)].$$

因此

$$u'(x)e^{-\int P(x)dx} + \left(u(x)e^{-\int P(x)dx}[-P(x)] + P(x)u(x)e^{-\int P(x)dx}\right) = Q(x),$$

即

$$u'(x) = Q(x)e^{\int P(x)dx} \Rightarrow u(x) = \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C.$$

因此

$$u'(x)e^{-\int P(x)dx} + \left(u(x)e^{-\int P(x)dx}[-P(x)] + P(x)u(x)e^{-\int P(x)dx}\right) = Q(x),$$

即

$$u'(x) = Q(x)e^{\int P(x)dx} \Rightarrow u(x) = \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C.$$

将$u(x)$表达式带入到方程（1）预设置的通解中，得到：

$$y = \left[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C\right]e^{-\int P(x)dx}.$$

一阶非齐次线性微分方程通解

因此

$$u'(x)e^{-\int P(x)dx} + \left(u(x)e^{-\int P(x)dx}[-P(x)] + P(x)u(x)e^{-\int P(x)dx} \right) = Q(x),$$

即

$$u'(x) = Q(x)e^{\int P(x)dx} \Rightarrow u(x) = \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C.$$

将$u(x)$表达式带入到方程（1）预设置的通解中，得到：

$$y = \left[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C \right] e^{-\int P(x)dx}.$$

上述求解一阶非齐次线性微分方程通解的方法称为**常数变易法**：即在求出对应齐次方程的通解后，将通解中的常数C变易为待定函数$u(x)$，然后求出非齐次线性方程的通解的方法。

将方程（1）的通解表达式展开重塑：

$$y = \underbrace{Ce^{-\int P(x)dx}}_{\text{方程（2）的通解}} + \underbrace{e^{-\int P(x)dx} \int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx}_{\text{方程（1）在}C=0\text{时的特解}}.$$

将方程（1）的通解表达式展开重塑：

$$y = \underbrace{Ce^{-\int P(x)dx}}_{\text{方程（2）的通解}} + \underbrace{e^{-\int P(x)dx}\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx}_{\text{方程（1）在}C=0\text{时的特解}}.$$

定理 (一阶非齐次线性方程的解的结构)

一阶非齐次线性方程(1)的通解等于对应其一阶齐次线性方程(2)的通解与一阶非齐次线性方程(1)的一个特解之和。

例 7

求微分方程$\frac{dy}{dx} - \frac{2y}{x+1} = (x+1)^{\frac{5}{2}}$的通解。

引例

例 7

求微分方程$\dfrac{dy}{dx}-\dfrac{2y}{x+1}=(x+1)^{\frac{5}{2}}$的通解。

例 8

求下列微分方程满足所给初始条件的特解：

$$x\ln x dy+(y-\ln x)dx=0,\quad y|_{x=e}=1.$$

引例

例 7

求微分方程$\frac{dy}{dx} - \frac{2y}{x+1} = (x+1)^{\frac{5}{2}}$的通解。

例 8

求下列微分方程满足所给初始条件的特解：

$$x \ln x dy + (y - \ln x)dx = 0, \quad y|_{x=e} = 1.$$

例 9

求微分方程$y^3 dx + (2xy^2 - 1)dy = 0$的通解。

二阶微分方程

课前导读

二阶及二阶以上的微分方程统称为**高阶微分方程**。对于一般的二阶微分方程，我们没有普遍的解法，因此本节我们主要讨论几种特殊形式的二阶微分方程：

课前导读

二阶及二阶以上的微分方程统称为**高阶微分方程**。对于一般的二阶微分方程，我们没有普遍的解法，因此本节我们主要讨论几种特殊形式的二阶微分方程：

- 可降阶的二阶微分方程；
- 二阶常系数线性微分方程。

课前导读

二阶及二阶以上的微分方程统称为**高阶微分方程**。对于一般的二阶微分方程，我们没有普遍的解法，因此本节我们主要讨论几种特殊形式的二阶微分方程：

- 可降阶的二阶微分方程；
- 二阶常系数线性微分方程。

本节的讨论过程中，我们还会用到下列**欧拉公式**：

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x.$$

$y'' = f(x)$型

对方程$y'' = f(x)$两端两次积分，得到

$$y' = \int f(x)dx + C_1 \Rightarrow y = \int \left[\int f(x)dx + C_1 \right] dx + C_2.$$

对方程$y'' = f(x)$两端两次积分，得到

$$y' = \int f(x)dx + C_1 \Rightarrow y = \int \left[\int f(x)dx + C_1\right] dx + C_2.$$

这种类型的方程的解法，可推广到相似类型的n阶微分方程中。

对方程$y'' = f(x)$两端两次积分，得到

$$y' = \int f(x)dx + C_1 \Rightarrow y = \int \left[\int f(x)dx + C_1\right] dx + C_2.$$

这种类型的方程的解法，可推广到相似类型的n阶微分方程中。

例 1

求微分方程$y'' = e^{2x} - \cos x$满足初始条件$y(0) = 0, y'(0) = 1$的特解。

$y'' = f(x, y')$型

观察到方程$y'' = f(x, y')$不含未知函数y。令$y' = p$，原方程变化为

$$\frac{dp}{dx} = f(x, p),$$

这是关于x, p的一阶微分方程。

$y'' = f(x, y')$型

观察到方程$y'' = f(x, y')$不含未知函数y。令$y' = p$，原方程变化为

$$\frac{dp}{dx} = f(x, p),$$

这是关于x, p的一阶微分方程。如果该方程可求得通解$p = \varphi(x, C_1)$ 那么原微分方程的通解为

$$y = \int \varphi(x, C_1) dx + C_2.$$

观察到方程$y'' = f(x, y')$不含未知函数y。令$y' = p$，原方程变化为

$$\frac{dp}{dx} = f(x, p),$$

这是关于x, p的一阶微分方程。如果该方程可求得通解$p = \varphi(x, C_1)$ 那么原微分方程的通解为

$$y = \int \varphi(x, C_1)dx + C_2.$$

例 2

求微分方程$y'' = 1 + (y')^2$的通解。

观察到方程$y'' = f(x, y')$不含未知函数y。令$y' = p$，原方程变化为

$$\frac{dp}{dx} = f(x, p),$$

这是关于x, p的一阶微分方程。如果该方程可求得通解$p = \varphi(x, C_1)$ 那么原微分方程的通解为

$$y = \int \varphi(x, C_1)dx + C_2.$$

例 2

求微分方程$y'' = 1 + (y')^2$的通解。

例 3

求微分方程$(1 + x^2)y'' = 2xy'$满足初始条件$y(0) = 1, y'(0) = 3$的特解。

观察到方程$y''=f(y,y')$不含自变量x。令$y'=p$，原方程变化为

$$y''=\frac{dp}{dx}=\frac{dp}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=p\frac{dp}{dx}\Rightarrow p\frac{dp}{dx}=f(y,p),$$

这是关于y,p的一阶微分方程。

观察到方程$y'' = f(y, y')$不含自变量x。令$y' = p$，原方程变化为

$$y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dx} \Rightarrow p\frac{dp}{dx} = f(y, p),$$

这是关于y, p的一阶微分方程。如果该方程可求得通解$p = \varphi(y, C_1)$ 那么原微分方程的通解为

$$\int \frac{dy}{\varphi(y, C_1)} = x + C_2.$$

观察到方程$y'' = f(y, y')$不含自变量x。令$y' = p$，原方程变化为

$$y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dx} \Rightarrow p\frac{dp}{dx} = f(y, p),$$

这是关于y, p的一阶微分方程。如果该方程可求得通解$p = \varphi(y, C_1)$ 那么原微分方程的通解为

$$\int \frac{dy}{\varphi(y, C_1)} = x + C_2.$$

例 4

求微分方程$y'' = \dfrac{2y - 1}{y^2 + 1}(y')^2$的通解。

观察到方程$y''=f(y,y')$不含自变量x。令$y'=p$，原方程变化为

$$y''=\frac{dp}{dx}=\frac{dp}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=p\frac{dp}{dx}\Rightarrow p\frac{dp}{dx}=f(y,p),$$

这是关于y,p的一阶微分方程。如果该方程可求得通解$p=\varphi(y,C_1)$ 那么原微分方程的通解为

$$\int\frac{dy}{\varphi(y,C_1)}=x+C_2.$$

例 4

求微分方程$y''=\dfrac{2y-1}{y^2+1}(y')^2$的通解。

例 5

求微分方程$yy''=2((y')^2-y')$满足初始条件$y(0)=1,y'(0)=2$的特解。

定义 (函数组的线性相关与线性无关)

设$y_i(x)\,(i=1,2,\cdots,n)$为定义在区间I上的n个函数。

- 如果存在n个不全为零的常数$k_i\,(i=1,2,\cdots,n)$，使得

$$k_1y_1+k_2y_2+\cdots+k_ny_n=0$$

在区间I上恒成立，那么称n个函数$y_i(x)\,(i=1,2,\cdots,n)$在I上**线性相关**。

- 如果

$$k_1y_1+k_2y_2+\cdots+k_ny_n=0$$

在区间I上成立时必有$k_i=0\,(i=1,2,\cdots,n)$，那么称n个函数$y_i(x)\,(i=1,2,\cdots,n)$在I上**线性无关**。

定义 (函数组的线性相关与线性无关)

设$y_i(x)\ (i=1,2,\cdots,n)$为定义在区间I上的n个函数。

- 如果存在n个不全为零的常数$k_i\ (i=1,2,\cdots,n)$，使得
$$k_1y_1+k_2y_2+\cdots+k_ny_n=0$$
在区间I上恒成立，那么称n个函数$y_i(x)\ (i=1,2,\cdots,n)$在I上**线性相关**。
- 如果
$$k_1y_1+k_2y_2+\cdots+k_ny_n=0$$
在区间I上成立时必有$k_i=0\ (i=1,2,\cdots,n)$，那么称n个函数$y_i(x)\ (i=1,2,\cdots,n)$在I上**线性无关**。

例 6

证明$1,\sin x,\cos x$在$(-\infty,\infty)$内线性相关。

定理

如果y_1, y_2是方程$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$的两个解，那么

$$y^* = C_1 y_1 + C_2 y_2, \quad \forall\, C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

也是方程$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$的解。

定理

如果y_1, y_2是方程$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$的两个解，那么

$$y^* = C_1 y_1 + C_2 y_2, \quad \forall C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

也是方程$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$的解。

由于 $y_i'' + P(x)y_i' + Q(x)y_i = 0, \quad i = 1, 2$，因此

$$\begin{aligned}
\text{左端} &= (C_1 y_1'' + C_2 y_2'') + P(x)(C_1 y_1' + C_2 y_2') + Q(x)(C_1 y_1 + C_2 y_2) \\
&= C_1(y_1'' + P(x)y_1' + Q(x)y_1) + C_2(y_2'' + P(x)y_2' + Q(x)y_2) \\
&= 0 = \text{右端}.
\end{aligned}$$

二阶齐次线性微分方程解的结构

定理

如果y_1, y_2是方程$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$的两个线性无关的特解，那么

$$y = C_1y_1 + C_2y_2, \quad \forall C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

是方程$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$的通解。

定理

如果y_1, y_2是方程$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$的两个线性无关的特解，那么

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2, \quad \forall C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

是方程$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$的通解。

推论

如果$y_1, y_2, \cdots, y_n$是方程$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0$的$n$个线性无关的特解，那么

$$y = \sum_{i=1}^{n} C_i y_i, \quad \forall C_i \in \mathbb{R}, \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

是方程$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0$的通解。

定理

如果y^*是非齐次方程$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x)$的一个特解，而$Y$是其对应齐次方程$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$的一个通解，那么

$$y = Y + y^*$$

就是二阶非齐次线性微分方程$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x)$的通解。

二阶非齐次线性微分方程解的结构

定理

如果y^*是非齐次方程$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x)$的一个特解，而$Y$是其对应齐次方程$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$的一个通解，那么

$$y = Y + y^*$$

就是二阶非齐次线性微分方程$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x)$的通解。

定理

如果y_1^*, y_2^*分别是方程

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f_1(x), \quad 与 \quad y'' + P(x)y' + Q(x)y = f_2(x)$$

的特解，那么$y_1^* + y_2^*$就是 $y'' + P(x)y' + Q(x)y = f_1(x) + f_2(x)$ 的特解。

定义 (二阶线性常系数微分方程)

形如

$$\frac{d^2y}{dx^2}+p\frac{dy}{dx}+qy=f(x) \tag{2}$$

为二阶线性常系数微分方程，其中p,q是常数，函数$f(x)$称为方程（3）的自由项。

- 当$f(x)\neq 0$时，方程（3）称为称为二阶非齐次线性微分方程；
- 当$f(x)\equiv 0$时，方程

$$\frac{d^2y}{dx^2}+p\frac{dy}{dx}+qy=0 \tag{3}$$

方程（3）的二阶齐次线性微分方程。

二阶线性常系数微分方程解的结构

定理

如果y_1, y_2是方程(4)的两个解，那么

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2, \quad \forall C_1, C_2 \in \mathbb{R} \tag{4}$$

也是方程(4)的解。

定理

如果y_1, y_2是方程(4)的两个解，那么

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2, \quad \forall C_1, C_2 \in \mathbb{R} \tag{4}$$

也是方程(4)的解。

由于 $y_i'' + p y_i' + q y_i = 0, \quad i = 1, 2$，将（5）带入方程（4），得到

$$\begin{aligned} \text{左端} &= (C_1 y_1'' + C_2 y_2'') + p(C_1 y_1' + C_2 y_2') + (C_1 y_1 + C_2 y_2) \\ &= C_1 (y_1'' + p y_1' + q y_1) + C_2 (y_2'' + p y_2' + q y_2) \\ &= 0 = \text{右端}. \end{aligned}$$

例 7

对于二阶线性微分方程$y''-3y'+2y=0$，验证：

(1) $y_1=e^x, y_2=e^{2x}, y_3=e^{2+x}$是该方程的解；

(2) $C_1y_1+C_2y_2$是原方程的通解；

(3) $C_1y_1+C_3y_3$是原方程的解但不是通解。

二阶线性常系数微分方程解的结构

定理

如果y_1, y_2是方程(4)的两个线性无关的特解，那么

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2, \quad \forall C_1, C_2 \in \mathbb{R} \tag{5}$$

也是方程(4)的通解。

二阶线性常系数微分方程解的结构

定理

如果y_1, y_2是方程(4)的两个线性无关的特解，那么

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2, \quad \forall C_1, C_2 \in \mathbb{R} \tag{5}$$

也是方程(4)的通解。

例 8

已知$y_1 = e^{2x} + e^{-x}, y_2 = 2e^{2x} + e^{-x}, y_3 = 2e^{2x}$是某二阶齐次线性微分方程的三个特解，

(1) 求此方程的通解；

(2) 求此微分方程满足$y(0) = 7, y'(0) = 5$的特解。

定理

如果y^*是方程(3)的一个特解，而Y是其对应齐次方程(4)的一个通解，那么

$$y = Y + y^* \tag{6}$$

就是二阶非齐次线性微分方程(3)的通解。

二阶常系数非齐次线性微分方程解的结构

定理

如果y^*是方程(3)的一个特解，而Y是其对应齐次方程(4)的一个通解，那么

$$y = Y + y^* \tag{6}$$

就是二阶非齐次线性微分方程(3)的通解。

定理

如果y_1^*, y_2^*分别是方程 $y'' + py' + qy = f_1(x)$与$y'' + py' + qy = f_2(x)$的特解，那么$y_1^* + y_2^*$就是 $y'' + py' + qy = f_1(x) + f_2(x)$ 的特解。

定理

如果y^*是方程(3)的一个特解，而Y是其对应齐次方程(4)的一个通解，那么

$$y = Y + y^* \tag{6}$$

就是二阶非齐次线性微分方程(3)的通解。

定理

如果y_1^*, y_2^*分别是方程 $y'' + py' + qy = f_1(x)$与$y'' + py' + qy = f_2(x)$的特解，那么$y_1^* + y_2^*$就是 $y'' + py' + qy = f_1(x) + f_2(x)$ 的特解。

例 9

已知y_1, y_2, y_3是二阶变系数非齐次线性微分方程$y'' + py' + qy = f(x)$的线性无关的三个特解，试写出该方程的通解。

指数函数$y = e^{rx}$（r为常数）的各阶导数仍为指数函数e^{rx}乘一个常数。因此我们可以设想方程（3）的一个特解为$y = e^{rx}$，其中r为待定常数。

指数函数$y=e^{rx}$（r为常数）的各阶导数仍为指数函数e^{rx}乘一个常数。因此我们可以设想方程（3）的一个特解为$y=e^{rx}$，其中r为待定常数。

将$y=e^{rx}$代入方程（3），得到

$$(e^{rx})''+p(e^{rx})'+qe^{rx}=0\Rightarrow e^{rx}(r^2+pr+q)=0\xRightarrow{e^{rx}\neq 0}r^2+pr+q=0.$$

二阶常系数齐次线性微分方程的解法

指数函数$y=e^{rx}$（r为常数）的各阶导数仍为指数函数e^{rx}乘一个常数。因此我们可以设想方程（3）的一个特解为$y=e^{rx}$，其中r为待定常数。

将$y=e^{rx}$代入方程（3），得到

$$(e^{rx})''+p(e^{rx})'+qe^{rx}=0\Rightarrow e^{rx}(r^2+pr+q)=0\xRightarrow{e^{rx}\neq 0}r^2+pr+q=0.$$

于是待定系数r满足一元二次方程$r^2+pr+q=0$，我们称其为微分方程的**特征方程**，方程的根称为微分方程的**特征根**：

$$r_1=\frac{-p+\sqrt{p^2-4q}}{2},\quad r_2=\frac{-p-\sqrt{p^2-4q}}{2}.$$

二阶常系数齐次线性微分方程的解法

指数函数$y=e^{rx}$（r为常数）的各阶导数仍为指数函数e^{rx}乘一个常数。因此我们可以设想方程（3）的一个特解为$y=e^{rx}$，其中r为待定常数。

将$y=e^{rx}$代入方程（3），得到

$$(e^{rx})''+p(e^{rx})'+qe^{rx}=0\Rightarrow e^{rx}(r^2+pr+q)=0\xRightarrow{e^{rx}\neq 0}r^2+pr+q=0.$$

于是待定系数r满足一元二次方程$r^2+pr+q=0$，我们称其为微分方程的**特征方程**，方程的根称为微分方程的**特征根**：

$$r_1=\frac{-p+\sqrt{p^2-4q}}{2},\quad r_2=\frac{-p-\sqrt{p^2-4q}}{2}.$$

特征根r_1,r_2有三种不同的情形，我们需要进行分类讨论：

当$p^2 - 4q > 0$**时：**特征根满足$r_1 \neq r_2$，此时方程有两个特解

$$y_1 = e^{r_1 x}, y_2 = e^{r_2 x},$$

由于$\frac{y_1}{y_2}$不恒为常数，因此方程（4）的通解为

$$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}.$$

当$p^2-4q>0$时：特征根满足$r_1\neq r_2$，此时方程有两个特解

$$y_1=e^{r_1x}, y_2=e^{r_2x},$$

由于$\frac{y_1}{y_2}$不恒为常数，因此方程（4）的通解为

$$y=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}.$$

例 10

求微分方程$y''-2y'-3y=0$的通解。

当$p^2-4q=0$时：特征根满足$r_1=r_2=-\frac{p}{2}$，此时只能得到方程（4）的一个特解$y_1=e^{r_1x}$，我们还需要找出与y_1线性无关的另一个特解y_2，满足$\frac{y_1}{y_2}$不恒为常数。

当$p^2-4q=0$时：特征根满足$r_1=r_2=-\dfrac{p}{2}$，此时只能得到方程（4）的一个特解$y_1=e^{r_1x}$，我们还需要找出与y_1线性无关的另一个特解y_2，满足$\dfrac{y_1}{y_2}$不恒为常数。

设$y_2=u(x)e^{r_1x}$，其中$u(x)$不恒为常数是方程（4）的另一个解，于是

$$y_2'=e^{r_1x}(u'+r_1u)\Rightarrow y_2''=e^{r_1x}(u''+2r_1u'+r_1^2u).$$

将y_2,y_2',y_2''代入方程（4）：

$$e^{r_1x}[(u''+2r_1u'+r_1^2u)+p(u'+r_1u)+qu]=0,$$

即

$$u''+(2r_1+p)u'+(r_1^2+pr_1+q)u=0.$$

因为r_1是特征方程的重根，所以

$$r_1^2 + pr_1 + q = 0,\ 2r_1 + p = 0 \Rightarrow u'' = 0 \xrightarrow{\text{积分两次}} u(x) = c_1 x + c_2,\ \forall\, c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

因为r_1是特征方程的重根，所以

$$r_1^2 + pr_1 + q = 0,\ 2r_1 + p = 0 \Rightarrow u'' = 0 \xrightarrow{\text{积分两次}} u(x) = c_1x + c_2,\ \forall\, c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

由于只需找出一个与y_1线性无关的特解，取$u = x$不为常数即可（$c_1 = 1, c_2 = 0$），由此得到方程的另一个特解$y_2 = xe^{r_1x}$。因此方程（4）的通解为

$$y = C_1e^{r_1x} + C_2xe^{r_1x} = (C_1 + C_2x)e^{r_1x},\ \forall\, C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

因为r_1是特征方程的重根，所以

$$r_1^2 + pr_1 + q = 0,\ 2r_1 + p = 0 \Rightarrow u'' = 0 \xrightarrow{\text{积分两次}} u(x) = c_1 x + c_2,\ \forall\, c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

由于只需找出一个与y_1线性无关的特解，取$u = x$不为常数即可（$c_1 = 1, c_2 = 0$），由此得到方程的另一个特解$y_2 = xe^{r_1 x}$。因此方程（4）的通解为

$$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 x e^{r_1 x} = (C_1 + C_2 x) e^{r_1 x},\ \forall\, C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

例 11

求微分方程$y'' + 4y' + 4y = 0$的通解。

当$p^2-4q<0$时：特征方程有一对共轭复特征根：$r_1=\alpha+i\beta,r_2=\alpha-i\beta$，此时方程（4）有两个复值函数特解：

$$y_1=e^{(\alpha+i\beta)x},y_2=e^{(\alpha-i\beta)x},$$

当$p^2-4q<0$时：特征方程有一对共轭复特征根：$r_1=\alpha+i\beta, r_2=\alpha-i\beta$，此时方程（4）有两个复值函数特解：

$$y_1=e^{(\alpha+i\beta)x}, y_2=e^{(\alpha-i\beta)x},$$

为了得到实值函数的特解，考虑欧拉公式$e^{i\beta}=\cos\beta+i\sin\beta$，重塑$y_1,y_2$为

$$y_1=e^{(\alpha+i\beta)x}=e^{\alpha x}(\cos\beta x+i\sin\beta x),\quad y_2=e^{(\alpha+i\beta)x}=e^{\alpha x}(\cos\beta x-i\sin\beta x).$$

当$p^2-4q<0$时：特征方程有一对共轭复特征根：$r_1=\alpha+i\beta, r_2=\alpha-i\beta$，此时方程（4）有两个复值函数特解：

$$y_1=e^{(\alpha+i\beta)x}, y_2=e^{(\alpha-i\beta)x},$$

为了得到实值函数的特解，考虑欧拉公式$e^{i\beta}=\cos\beta+i\sin\beta$，重塑$y_1,y_2$为

$$y_1=e^{(\alpha+i\beta)x}=e^{\alpha x}(\cos\beta x+i\sin\beta x),\quad y_2=e^{(\alpha+i\beta)x}=e^{\alpha x}(\cos\beta x-i\sin\beta x).$$

取方程（4）的另两个特解：

$$\overline{y_1}=\frac{1}{2}(y_1+y_2)=e^{\alpha x}\cos\beta x,\quad \overline{y_2}=\frac{1}{2i}(y_1-y_2)=e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

且注意到$\frac{\overline{y_1}}{\overline{y_2}}=\tan\beta x$不恒为常数，所以$\overline{y_1},\overline{y_2}$线性无关。因此方程（4）的通解为

$$y=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x), \forall C_1,C_2\in\mathbb{R}.$$

例 12

求微分方程$y'' + 2y' + 5y = 0$的通解。

例 12

求微分方程$y'' + 2y' + 5y = 0$的通解。

求解二阶常系数齐次线性方程$y'' + py' + qy = 0$的通解的步骤如下：

例 12

求微分方程$y'' + 2y' + 5y = 0$的通解。

求解二阶常系数齐次线性方程$y'' + py' + qy = 0$的通解的步骤如下：

(1) 写出特征方程$r^2 + pr + q = 0$；

(2) 求出特征根r_1, r_2；

(3) 按照特征根的不同情形，我们构造出方程的通解：

特征方程$r^2 + pr + q = 0$的根	齐次线性微分方程$y'' + py' + qy = 0$通解结构
$r_1 \neq r_2$	$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$
$r_1 = r_2$	$y = (C_1 + C_2 x) e^{r_1 x}$
$r_{1,2} = \alpha \pm i\beta$	$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$

定义 (高阶线性常系数微分方程,微分算子)

- 我们称 $y^{(n)}+p_1y^{(n-1)}+p_2y^{(n-2)}+\cdots+p_{n-1}y^{(1)}+p_ny=0$, $\quad p_1,\cdots,p_n\in\mathbb{F}$ 为n阶齐次线性常系数微分方程。

定义 (高阶线性常系数微分方程,微分算子)

- 我们称 $y^{(n)}+p_1y^{(n-1)}+p_2y^{(n-2)}+\cdots+p_{n-1}y^{(1)}+p_ny=0$， $p_1,\cdots,p_n\in\mathbb{F}$ 为n阶齐次线性常系数微分方程。
- 我们记微分算子$D:=\frac{d}{dx}$，那么

$$Dy=\frac{dy}{dx},D^2y=\frac{d^2y}{dx^2},\cdots,D^ny=\frac{d^ny}{dx^n},$$

于是上述微分方程可重塑为 $(D^n+p_1D^{n-1}+\cdots+p_{n-1}D+p_n)y=0$。

定义 (高阶线性常系数微分方程,微分算子)

- 我们称 $y^{(n)}+p_1y^{(n-1)}+p_2y^{(n-2)}+\cdots+p_{n-1}y^{(1)}+p_ny=0$， $p_1,\cdots,p_n\in\mathbb{F}$ 为n**阶齐次线性常系数微分方程**。
- 我们记微分算子$D:=\dfrac{d}{dx}$，那么

$$Dy=\frac{dy}{dx},D^2y=\frac{d^2y}{dx^2},\cdots,D^ny=\frac{d^ny}{dx^n},$$

于是上述微分方程可重塑为 $(D^n+p_1D^{n-1}+\cdots+p_{n-1}D+p_n)y=0$。

- 我们称$L(D):=D^n+p_1D^{n-1}+\cdots+p_{n-1}D+p_n$**为微分算子**$D$**的**$n$**次多项式**，那么原$n$阶齐次线性常系数微分方程还可简写为$L(D)y=0$。

高阶常系数齐次线性微分方程的通解结构

定义 (高阶线性常系数微分方程,微分算子)

- 我们称 $y^{(n)}+p_1y^{(n-1)}+p_2y^{(n-2)}+\cdots+p_{n-1}y^{(1)}+p_ny=0$， $p_1,\cdots,p_n\in\mathbb{F}$ 为n阶齐次线性常系数微分方程。
- 我们记微分算子$D:=\dfrac{d}{dx}$，那么

$$Dy=\frac{dy}{dx},D^2y=\frac{d^2y}{dx^2},\cdots,D^ny=\frac{d^ny}{dx^n},$$

  于是上述微分方程可重塑为 $(D^n+p_1D^{n-1}+\cdots+p_{n-1}D+p_n)y=0$。
- 我们称$L(D):=D^n+p_1D^{n-1}+\cdots+p_{n-1}D+p_n$为微分算子$D$的$n$次多项式，那么原$n$阶齐次线性常系数微分方程还可简写为$L(D)y=0$。
- 我们称方程 $r^n+p_1r^{n-1}+\cdots+p_{n-1}r+p_n=0$ 为微分方程$L(D)y=0$的特征方程。

定理 (代数基本定理)

一元n次多项式方程

$$z^n + c_1 z^{n-1} + \cdots + c_{n-1} z + c_n = 0, \quad c_j \in \mathbb{C}, \quad j = 1, 2, \cdots, n$$

在复数域上至少有一根$(n \geq 1)$。

定理 (代数基本定理)

一元n次多项式方程

$$z^n + c_1 z^{n-1} + \cdots + c_{n-1} z + c_n = 0, \quad c_j \in \mathbb{C}, \quad j = 1, 2, \cdots, n$$

在复数域上至少有一根$(n \geq 1)$。

由代数基本定理可知:

- n次复系数多项式方程在复数域内有且只有n个根(重根按重数计算);
- $L(D)y = 0$对应特征方程的每一个根都对应通解的一项且每一项都包含一个任意常数。

因此n阶常系数齐次线性微分方程的通解为

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \cdots + C_n y_n, \quad C_j \in \mathbb{F}, \quad j = 1, 2, \cdots, n.$$

按照特征根的不同情形，我们给出n阶常系数齐次线性微分方程的通解：

按照特征根的不同情形，我们给出n阶常系数齐次线性微分方程的通解：

特征方程的根	齐次线性微分方程$L(D)y=0=0$通解结构
单实根r	一项：$y=Ce^{rx}$
一对单复根 $r_{1,2}=\alpha\pm\beta i$	一个组合项： $y=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$
k重实根r	k项组合：$y=e^{rx}(C_1+C_2x+\cdots+C_kx^{k-1})$
一对k重复根 $r_{1,2}=\alpha\pm i\beta$	k个组合项按照三角函数整理： $y=e^{\alpha x}\left[\left(\sum_{i=1}^{k}C_ix^{i-1}\right)\cos\beta x+\left(\sum_{i=1}^{k}D_ix^{i-1}\right)\sin\beta x)\right]$

按照特征根的不同情形，我们给出n阶常系数齐次线性微分方程的通解：

特征方程的根	齐次线性微分方程$L(D)y=0=0$通解结构
单实根r	一项：$y=Ce^{rx}$
一对单复根 $r_{1,2}=\alpha\pm\beta i$	一个组合项： $y=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$
k重实根r	k项组合：$y=e^{rx}(C_1+C_2x+\cdots+C_kx^{k-1})$
一对k重复根 $r_{1,2}=\alpha\pm i\beta$	k个组合项按照三角函数整理： $y=e^{\alpha x}\left[\left(\sum_{i=1}^{k}C_ix^{i-1}\right)\cos\beta x+\left(\sum_{i=1}^{k}D_ix^{i-1}\right)\sin\beta x)\right]$

例

求微分方程$y^{(4)}-2y^{(3)}+5y''=0$的通解。

根据上述讨论，方程

$$y'' + py' + qy = f(x)$$

的解具有结构

$$y = Y + y^*,$$

其中Y为对应齐次方程的通解，y^*为该非齐次方程的一个特解。

根据上述讨论，方程

$$y'' + py' + qy = f(x)$$

的解具有结构

$$y = Y + y^*,$$

其中Y为对应齐次方程的通解，y^*为该非齐次方程的一个特解。对以下两类主要的自由项(输入项)$f(x)$，我们使用待定系数法来求解不同的y^*：

(1) $f(x) = e^{\lambda x} P_n(x)$，其中$P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n$为$n$次多项式，$\lambda \in \mathbb{R}$；

(2) $f(x) = e^{\lambda x} [P_n(x) \cos \omega x + P_\ell(x) \sin \omega x]$，其中$P_n(x), P_\ell(x)$分别为$n, \ell$次多项式（可以出现其中一个多项式为零），$\lambda, \omega \in \mathbb{R}$。

(1) $f(x) = e^{\lambda x} P_n(x)$

由于多项式与指数函数的乘积的导函数仍然是这种形式，因此我们推测

$$y^* = e^{\lambda x} Q(x)$$

可能是方程（3）的特解，其中$Q(x)$为待定系数的多项式。

(1) $f(x) = e^{\lambda x} P_n(x)$

由于多项式与指数函数的乘积的导函数仍然是这种形式，因此我们推测

$$y^* = e^{\lambda x} Q(x)$$

可能是方程（3）的特解，其中$Q(x)$为待定系数的多项式。于是

$$y^* = e^{\lambda x} Q(x) \Rightarrow (y^*)' = e^{\lambda x}[\lambda Q(x) + Q'(x)] \Rightarrow (y^*)'' = e^{\lambda x}[\lambda^2 Q(x) + 2\lambda Q'(x) + Q''(x)].$$

带入方程（3）整理得到：

$$Q''(x) + (2\lambda + p)Q'(x) + (\lambda^2 + p\lambda + q)Q(x) = P_n(x).$$

(1) $f(x) = e^{\lambda x} P_n(x)$

(1) 若λ不是对应齐次方程的特征方程的特征根：$\lambda^2 + p\lambda + q \neq 0$, $2\lambda + p \neq 0$，由于$P_n(x)$是n次多项式，则$Q(x)$也应是n次多项式：

$$Q(x) := Q_n(x) = b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \cdots + b_{n-1} x + b_n.$$

将$Q(x)$带入特征方程中，待定系数方法比较等式两端x的同次幂的系数来确定$Q(x)$，从而得到$y^* = e^{\lambda x} Q(x)$；

(1) $f(x) = e^{\lambda x} P_n(x)$

(1) 若λ不是对应齐次方程的特征方程的特征根：$\lambda^2 + p\lambda + q \neq 0,\ 2\lambda + p \neq 0$，由于$P_n(x)$是$n$次多项式，则$Q(x)$也应是$n$次多项式：

$$Q(x) := Q_n(x) = b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \cdots + b_{n-1} x + b_n.$$

将$Q(x)$带入特征方程中，待定系数方法比较等式两端x的同次幂的系数来确定$Q(x)$，从而得到$y^* = e^{\lambda x} Q(x)$；

(2) 若λ是对应齐次方程的特征方程的单特征根：$\lambda^2 + p\lambda + q = 0,\ 2\lambda + p \neq 0$，此时可知$Q'(x)$应是$n$次多项式，则可取$Q(x) = xQ_n(x)$；

(1) 若λ不是对应齐次方程的特征方程的特征根：$\lambda^2 + p\lambda + q \neq 0,\ 2\lambda + p \neq 0$，由于$P_n(x)$是$n$次多项式，则$Q(x)$也应是$n$次多项式：

$$Q(x) := Q_n(x) = b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \cdots + b_{n-1} x + b_n.$$

将$Q(x)$带入特征方程中，待定系数方法比较等式两端x的同次幂的系数来确定$Q(x)$，从而得到$y^* = e^{\lambda x} Q(x)$；

(2) 若λ是对应齐次方程的特征方程的单特征根：$\lambda^2 + p\lambda + q = 0,\ 2\lambda + p \neq 0$，此时可知$Q'(x)$应是$n$次多项式，则可取$Q(x) = xQ_n(x)$；

(3) 若λ是对应齐次方程的特征方程的重特征根：$\lambda^2 + p\lambda + q = 0,\ 2\lambda + p = 0$，此时可知$Q''(x)$应是$n$次多项式，则可取$Q(x) = x^2 Q_n(x)$。

(1) $f(x) = e^{\lambda x} P_n(x)$

最终，取指标$k = 0, 1, 2$分别代表λ不是特征根、是单特征根、是重特征根，我们可以给出解$y^* = x^k e^{\lambda x} Q_n(x)$，其中

$$Q_n(x) = b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \cdots + b_{n-1} x + b_n.$$

(1) $f(x)=e^{\lambda x}P_n(x)$

最终，取指标$k=0,1,2$分别代表λ不是特征根、是单特征根、是重特征根，我们可以给出解$y^*=x^ke^{\lambda x}Q_n(x)$，其中

$$Q_n(x)=b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_{n-1}x+b_n.$$

对应求解二阶常系数非齐次线性微分方程通解的步骤如下：

(1) 写出特征方程，并求出特征根；
(2) 求出对应齐次方程的通解Y；
(3) 根据λ与特征根的关系确定特解形式，并代入原方程后确定其中的系数得到特解y^*；
(4) 构造解的结构$y=Y+y^*$。

例 13

下列方程具有什么形式的特解？

(1) $y'' + 5y' + 6y = e^{3x}$；

(2) $y'' + 5y' + 6y = 3xe^{-2x}$；

(3) $y'' + 2y' + y = -(3x^2 + 1)e^{-x}$。

例 13

下列方程具有什么形式的特解？

(1) $y'' + 5y' + 6y = e^{3x}$;

(2) $y'' + 5y' + 6y = 3xe^{-2x}$;

(3) $y'' + 2y' + y = -(3x^2 + 1)e^{-x}$。

例 14

求微分方程$y'' - 2y' - 3y = 3x + 1$的一个特解。

例 13

下列方程具有什么形式的特解？

(1) $y'' + 5y' + 6y = e^{3x}$；

(2) $y'' + 5y' + 6y = 3xe^{-2x}$；

(3) $y'' + 2y' + y = -(3x^2 + 1)e^{-x}$。

例 14

求微分方程$y'' - 2y' - 3y = 3x + 1$的一个特解。

例 15

求微分方程$y'' - 3y' + 2y = xe^{2x}$的通解。

(2) $f(x) = e^{\lambda x}[P_n(x)\cos\omega x + P_\ell(x)\sin\omega x]$

由欧拉公式$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$，我们得到

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{\lambda x}[P_n(x)\cos\omega x + P_\ell(x)\sin\omega x] \\ &= e^{\lambda x}\left[P_n(x)\frac{e^{i\omega x}+e^{-i\omega x}}{2} + P_\ell(x)\frac{e^{i\omega x}-e^{-i\omega x}}{2i}\right] \\ &= P(x)e^{(\lambda+i\omega)x} + \overline{P}(x)e^{(\lambda-i\omega)x}, \quad P(x) := \frac{P_n(x)}{2} - \frac{P_\ell(x)}{2}i. \end{aligned}$$

(2) $f(x) = e^{\lambda x}[P_n(x)\cos\omega x + P_\ell(x)\sin\omega x]$

由欧拉公式$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$，我们得到

$$
\begin{aligned}
f(x) &= e^{\lambda x}[P_n(x)\cos\omega x + P_\ell(x)\sin\omega x] \\
&= e^{\lambda x}\left[P_n(x)\frac{e^{i\omega x}+e^{-i\omega x}}{2} + P_\ell(x)\frac{e^{i\omega x}-e^{-i\omega x}}{2i}\right] \\
&= P(x)e^{(\lambda+i\omega)x} + \overline{P}(x)e^{(\lambda-i\omega)x}, \quad P(x) := \frac{P_n(x)}{2} - \frac{P_\ell(x)}{2}i.
\end{aligned}
$$

设置$k = 0, 1$是按照$\lambda \pm i\omega$是否为特征根来选取，我们有：

- 对$P(x)e^{(\lambda+i\omega)x}$，可以求出一个$m$次多项式$R_m$，使得$y_1^* = x^k R_m e^{(\lambda+i\omega)x}$为方程$y'' + py' + qy = P(x)e^{(\lambda+i\omega)x}$的一个特解，其中$m = \max(n, \ell)$；
- $\overline{P}(x)e^{(\lambda-i\omega)x} = \overline{P(x)e^{(\lambda+i\omega)x}}$，对$m = \max(n, \ell)$，$y_2^* = x^k\overline{R}_m e^{(\lambda-i\omega)x}$为方程$y'' + py' + qy = \overline{P}(x)e^{(\lambda-i\omega)x}$的一个特解；
- $y^* = y_1^* + y_2^*$为最终方程的一个特解；而该和式中两部分互成共轭，相加之后没有虚部，因此 $y^* = x^k e^{\lambda x}[R_m(x)\cos\omega x + \overline{R}_m(x)\sin\omega x]$。

综上，对于自由项

$$f(x) = e^{\lambda x}[P_n(x)\cos\omega x + P_\ell(x)\sin\omega x],$$

其中$P_n(x), P_\ell(x)$分别为n, ℓ次多项式（可以出现其中一个多项式为零），$\lambda, \omega \in \mathbb{R}$, 其对应的非齐次方程特解为

$$y^* = x^k e^{\lambda x}[R_m^{(1)}(x)\cos\omega x + R_m^{(2)}(x)\sin\omega x],$$

其中$R_m^{(1)}(x), R_m^{(2)}(x)$均为$m$次待定系数多项式， $m = \max(n, \ell)$，而$k = 0, 1$是按照$\lambda \pm i\omega$是否为特征根来选取。

(2) $f(x) = e^{\lambda x}[P_n(x)\cos\omega x + P_\ell(x)\sin\omega x]$

综上，对于自由项

$$f(x) = e^{\lambda x}[P_n(x)\cos\omega x + P_\ell(x)\sin\omega x],$$

其中$P_n(x), P_\ell(x)$分别为n, ℓ次多项式（可以出现其中一个多项式为零），$\lambda, \omega \in \mathbb{R}$，其对应的非齐次方程特解为

$$y^* = x^k e^{\lambda x}[R_m^{(1)}(x)\cos\omega x + R_m^{(2)}(x)\sin\omega x],$$

其中$R_m^{(1)}(x), R_m^{(2)}(x)$均为$m$次待定系数多项式， $m = \max(n, \ell)$，而$k = 0, 1$是按照$\lambda \pm i\omega$是否为特征根来选取。

例 16

求微分方程$y'' + 4y = 2\cos 2x$满足初始条件$y(0) = 0, y'(0) = 2$的特解。

The End