AMS

方阵的行列式

行列式的定义

行列式的性质

行列式按行(列)展开

克拉默法则

行列式的定义

课前导读

对于二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2, \end{cases}$$

当$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$时，有唯一解:

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \quad x_2 = \frac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}.$$

课前导读

对于二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2, \end{cases}$$

当$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$时，有唯一解:

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \quad x_2 = \frac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}.$$

本节我们来介绍方阵行列式的定义并使用该定义得到一些特殊行列式的值.

排列及逆序数

定义 (排列)

从$1, 2, \cdots, n$中任意选取r个不同的数排成一列, 称为**排列**.

排列及逆序数

定义 (排列)

从$1, 2, \cdots, n$中任意选取r个不同的数排成一列, 称为**排列**.

定义 (全排列)

将$1, 2, \cdots, n$这n个不同的数排成一列, 称为n**阶全排列**, 我们简称为**全排列**.

定义 (排列)

从$1, 2, \cdots, n$中任意选取r个不同的数排成一列, 称为**排列**.

定义 (全排列)

将$1, 2, \cdots, n$这n个不同的数排成一列, 称为n**阶全排列**, 我们简称为**全排列**.

例

设有$1, 2, 3, 4, 5$五个元素, 则

- 31是五个元素的一个排列,
- 312是五个元素的一个排列,
- 4215是五个元素的一个排列,
- 42153是五个元素的一个全排列.

注

- n阶全排列的总数为$n! = n \cdot (n-1) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1.$
- $12 \cdots n$也是n个数的全排列且其元素是按从小到大的自然顺序排列,我们称这样的排列称为**标准排列**.

注

- n阶全排列的总数为$n! = n \cdot (n-1) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1.$
- $12 \cdots n$也是n个数的全排列且其元素是按从小到大的自然顺序排列,我们称这样的排列称为**标准排列**.

定义 (逆序数)

- 在一个排列中，如果一对数的排列顺序与自然顺序相反，即排在左边的数比排在它右边的数大，那么我们称其为一个**逆序**.
- 一个排列中逆序的总数就称为这个排列的**逆序数**,我们记排列$i_1 i_2 \cdots i_n$的逆序数为 $\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)$.

注

- n阶全排列的总数为$n! = n\cdot(n-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1$.
- $12\cdots n$也是n个数的全排列且其元素是按从小到大的自然顺序排列,我们称这样的排列称为**标准排列**.

定义 (逆序数)

- 在一个排列中, 如果一对数的排列顺序与自然顺序相反, 即排在左边的数比排在它右边的数大, 那么我们称其为一个**逆序**.
- 一个排列中逆序的总数就称为这个排列的**逆序数**,我们记排列$i_1i_2\cdots i_n$的逆序数为 $\tau(i_1i_2\cdots i_n)$.

定义 (奇排列与偶排列)

逆序数为偶数的排列为**偶排列**; 逆序数为奇数的排列为**奇排列**.

例

- 全排列42153中，42，41，43，21，53都是逆序，即42153的逆序数为$\tau(42153) = 5$.
- 标准排列的逆序数为0:$\tau(12345) = 0$.

例

- 全排列42153中，42，41，43，21，53都是逆序，即42153的逆序数为$\tau(42153)=5$.
- 标准排列的逆序数为0:$\tau(12345)=0$.

定义 (对换)

- 我们称只交换排列中某两个数的位置，其他的数保持不动而得到一个新排列的变换为一个**对换**.
- 如果交换的是相邻位置的两个元素，那么我们称该对换为**相邻对换**.

例

- 全排列42153中，42，41，43，21，53都是逆序，即42153的逆序数为$\tau(42153)=5$.
- 标准排列的逆序数为0:$\tau(12345)=0$.

定义 (对换)

- 我们称只交换排列中某两个数的位置，其他的数保持不动而得到一个新排列的变换为一个**对换**.
- 如果交换的是相邻位置的两个元素，那么我们称该对换为**相邻对换**.

例

- 经过$2,1$对换，排列42153就变成了排列41253，而且这个对换是相邻对换;
- 经过$2,5$对换，排列42153就变成了排列45123，但这个对换不是相邻对换.

奇排列 偶排列 对换

定理

排列的对换改变排列的奇偶性.

定理

排列的对换改变排列的奇偶性.

(1) 我们先考虑相邻对换的情况:排列

$$i_1 \cdots i_k ab \cdots j_1 \cdots j_s \tag{A_1}$$

经过a与b相邻对换变成排列

$$i_1 \cdots i_k ba \cdots j_1 \cdots j_s \tag{A_2}$$

奇排列 偶排列 对换

定理

排列的对换改变排列的奇偶性.

(1) 我们先考虑相邻对换的情况:排列

$$i_1 \cdots i_k ab \cdots j_1 \cdots j_s \tag{A_1}$$

经过a与b相邻对换变成排列

$$i_1 \cdots i_k ba \cdots j_1 \cdots j_s \tag{A_2}$$

注意到a, b与其他数构成的逆序在排列(A_1)和排列(A_2)中是一样的,不同的只是a, b的次序:

- 当$a < b$时,ab原来是标准序,对换后ba构成一个逆序,于是排列(A_2)的逆序数是排列(A_1)的逆序数增加1.
- 当$a > b$时,ab原来是逆序,对换后ba是标准序,于是排列(A_2)的逆序数是排列(A_1)的逆序数减少1.

无论增加还是减少1, 相邻对换都会改变排列的奇偶性.

(2) 我们再考虑不相邻的对换:不妨假设原排列为

$$\cdots a i_1 \cdots i_s b \cdots$$

经过a与b对换变成排列

$$\cdots b i_1 \cdots i_s a \cdots .$$

奇排列 偶排列 对换

(2) 我们再考虑不相邻的对换:不妨假设原排列为

$$\cdots a i_1 \cdots i_s b \cdots$$

经过a与b对换变成排列

$$\cdots b i_1 \cdots i_s a \cdots .$$

注意到这个过程实际上做到了

- 先将a依次与其后面相邻的元素作$s+1$次相邻对换变为

$$\cdots i_1 \cdots i_s b a \cdots ,$$

- 再通过将b依次与前面相邻的元素作s次相邻对换而得到.

该对换一共进行了$2s+1$次相邻对换, 所以做一次一般对换一样改变了排列的奇偶性.

定理

在n阶排列中，偶排列和奇排列各占一半，它们的个数各有$\dfrac{n!}{2}$个.

奇排列 偶排列 对换

定理

在n阶排列中，偶排列和奇排列各占一半，它们的个数各有$\dfrac{n!}{2}$个.

- 记$P_n(S_n, T_n)$为所有n阶(奇、偶)排列构成的集合,那么
  (1) $P_n = S_n \cup T_n$.
  (2) $S_n \cap T_n = \varnothing$.
  于是$\mathrm{card}(P_n) = \mathrm{card}(S_n) + \mathrm{card}(T_n)$.
- 任意取定一个对换$\sigma : P_n \to P_n$，那么
  (1) 映射σ是单射;
  (2) $\sigma(S_n) \subseteq T_n,\ \sigma(T_n) \subseteq S_n$.
  于是$\mathrm{card}(S_n) \leqslant \mathrm{card}(T_n)$且$\mathrm{card}(T_n) \leqslant \mathrm{card}(S_n)$.
- 因此,我们有$\mathrm{card}(S_n) = \mathrm{card}(T_n) = \dfrac{1}{2}\mathrm{card}(\mathrm{P_n}) = \dfrac{n!}{2}$.

定义 (n阶行列式)

由n^2个元素$a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$可以排成n行n列的正方形的数表:

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{matrix},$$

我们称这个数表所决定的数

$$\sum_{p_1p_2\cdots p_n} (-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)} a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$$

为由n^2个元素$a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$构成的n**阶行列式**.

定义 (n阶行列式)

我们记

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{p_1p_2\cdots p_n} (-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)} a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}.$$

其中

- $\sum\limits_{p_1p_2\cdots p_n}$ 表示对所有的n**阶全排列**$p_1p_2\cdots p_n$**求和**.
- 数$a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$称为行列式的第(i,j)**个元素**.
- 下标i称为元素a_{ij}的**行标**.
- 下标j称为元素a_{ij}的**列标**.

定义 (n阶行列式)

我们记矩阵

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

那么n阶行列式通常也称为**A的行列式**, 记为$|\mathbf{A}|$.

注

- 我们有时简记为行列式为$|\mathbf{A}|=\det(\mathbf{A})$, $\det(a_{ij})$, $|a_{ij}|_{n\times n}$或$|a_{ij}|_n$.
- 1阶行列式就是这个数本身, 即$|a|=a$. 为了避免与绝对值符号混淆, 我们很少提及1阶行列式.

注

- n阶行列式具有以下特点:
  (1) $\sum\limits_{p_1p_2\cdots p_n}$ 是对所有的n阶全排列$p_1p_2\cdots p_n$求和，所以展开式中共有$n!$项;
  (2) 每一项$a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$是取自不同行不同列的$n$个元素的乘积;
  (3) 每一项$a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$的行标排成一个标准排列，列标排列$p_1p_2\cdots p_n$的奇偶性决定了乘积$a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$前的符号.
- 当$n=2$时，由方阵 $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ 所确定的2阶行列式为

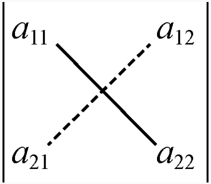
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \sum_{p_1p_2}(-1)^{\tau(p_1p_2)}a_{1p_1}a_{2p_2} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

2阶行列式

注

2阶行列式可借助于对角线法则来记忆, 如图所示:

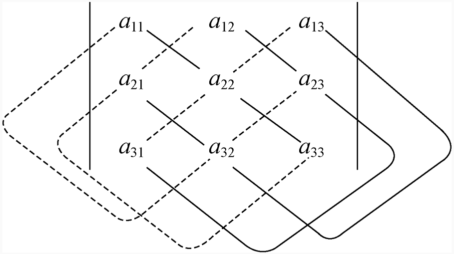
- 元素a_{11}和a_{22}所在的位置称为**行列式的主对角线**;
- 元素a_{12}和a_{21}所在的位置称为**行列式的副对角线**;
- 2阶行列式就是主对角线上元素之积减去副对角线上元素之积.



3阶行列式

注

- 对于3阶行列式，我们也可以按对角线法则展开，其展开式等于6项的代数和,展开的规律如图所示:
  - 实线位置上三元素乘积前冠以正号;
  - 虚线位置上三元素乘积冠以负号.
- 4阶及更高阶的行列式不再适用对角线法则.



例 1

设$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 2 & -2\\ -3 & 3 & 1\\ 1 & 2 & -1\end{bmatrix}$, 求$|\mathbf{A}|$.

例 1

设$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -3 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$, 求$|\mathbf{A}|$.

例 2

证明$a_{52}a_{16}a_{41}a_{64}a_{23}a_{35}$是6阶行列式$D_6=|a_{ij}|_{6\times 6}$的一项，并求这项应带的符号.

例 1

设$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -3 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$，求$|\mathbf{A}|$.

例 2

证明$a_{52}a_{16}a_{41}a_{64}a_{23}a_{35}$是6阶行列式$D_6=|a_{ij}|_{6\times 6}$的一项，并求这项应带的符号.

例 3

计算下三角方阵$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$的行列式$|\mathbf{A}|$.

例 4

计算上三角方阵$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$的行列式$|\mathbf{A}|$.

例 4

计算上三角方阵$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$的行列式$|\mathbf{A}|$.

例 5

设方阵$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{bmatrix}$，证明$|\mathbf{A}|=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$.

行列式的性质

课前导读

从n阶行列式的定义可知:

- 当$n \geqslant 4$时, 利用定义来计算一般的行列式是一件非常辛苦的事情;
- 计算上(下)三角行列式的计算却非常简单.

课前导读

从n阶行列式的定义可知:

- 当$n \geqslant 4$时, 利用定义来计算一般的行列式是一件非常辛苦的事情;
- 计算上(下)三角行列式的计算却非常简单.

本节我们介绍

- n阶行列式的性质,
- 使用n阶行列式性质将一般的行列式化为上(下)三角行列式进行计算,
- 给出一个利用方阵的行列式来判断方阵可逆的充分必要条件.

定义 (转置行列式)

我们称将行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

的各行元素换为同序号的列元素，所得到的行列式

$$D_n^T = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

为行列式D_n的**转置行列式**.

行列式的性质

(1) 行列式D_n与它的转置行列式D_n^T相等.

(2) 互换行列式的两行(两列),行列式变号.

(3) 若行列式的某一行(或列)有公因子k, 则公因子k可以提到行列式记呈外面; 或者说, 用k乘行列式的某一行(或列), 等于用k乘以该行列式.

行列式的性质

(1) 行列式D_n与它的转置行列式D_n^T相等.

(2) 互换行列式的两行(两列),行列式变号.

(3) 若行列式的某一行(或列)有公因子k, 则公因子k可以提到行列式记号外面; 或者说, 用k乘行列式的某一行(或列), 等于用k乘以该行列式.

注

上述性质告诉我们行列式中的行和列具有同等的地位:行列式中的有关性质凡是对行成立的,对列也成立.

行列式的性质

(1) 行列式D_n与它的转置行列式D_n^T相等.

(2) 互换行列式的两行(两列),行列式变号.

(3) 若行列式的某一行(或列)有公因子k, 则公因子k可以提到行列式记呈外面; 或者说, 用k乘行列式的某一行(或列), 等于用k乘以该行列式.

注

上述性质告诉我们行列式中的行和列具有同等的地位:行列式中的有关性质凡是对行成立的,对列也成立.

推论

若行列式中有两行(两列)对应元素相等, 则行列式等于零.

行列式的性质

(1) 利用行列式的定义即可验证(1).

(2) 以交换两行的情形来证明, 根据行列式定义:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{p_1 \cdots p_i \cdots p_j \cdots p_n} (-1)^{\tau(p_1 \cdots p_i \cdots p_j \cdots p_n)} a_{1p_1} \cdots a_{ip_i} \cdots a_{jp_j} \cdots a_{np_n}$$

两行交换可以看成是原排列经过一次对换,因此

$$= -\sum_{p_1\cdots p_j\cdots p_i\cdots p_n}(-1)^{\tau(p_1\cdots p_j\cdots p_i\cdots p_n)}a_{1p_1}\cdots a_{jp_j}\cdots a_{ip_i}\cdots a_{np_n}$$

$$= -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

(3) 根据行列式定义，

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{p_1 \cdots p_i \cdots p_n} (-1)^{\tau(p_1 \cdots p_i \cdots p_n)} a_{1p_1} \cdots (ka_{ip_i}) \cdots a_{np_n}$$

$$= k \sum_{p_1 \cdots p_i \cdots p_n} (-1)^{\tau(p_1 \cdots p_i \cdots p_n)} a_{1p_1} \cdots (a_{ip_i}) \cdots a_{np_n} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

行列式的性质

例 1

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \\ 6 & 9 & 12 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 \times \underline{2} & 2 \times \underline{2} & 3 \times \underline{2} \\ 2 \times \underline{3} & 3 \times \underline{3} & 4 \times \underline{3} \end{vmatrix} = 2 \times 3 \times \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 6 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}.$$

例 1

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \\ 6 & 9 & 12 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1\times\underline{2} & 2\times\underline{2} & 3\times\underline{2} \\ 2\times\underline{3} & 3\times\underline{3} & 4\times\underline{3} \end{vmatrix} = 2\times 3\times \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 6\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}.$$

定理

设$\mathbf{A}$是n阶方阵，则等式$|k\mathbf{A}| = k^n|\mathbf{A}|$成立.

例 1

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \\ 6 & 9 & 12 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1\times\underline{2} & 2\times\underline{2} & 3\times\underline{2} \\ 2\times\underline{3} & 3\times\underline{3} & 4\times\underline{3} \end{vmatrix} = 2\times 3\times \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 6 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}.$$

定理

设$\mathbf{A}$是n阶方阵，则等式$|k\mathbf{A}| = k^n|\mathbf{A}|$成立.

推论

若行列式的某一行(或列)元素全为零，则行列式的值为零.

例 1

$$\begin{vmatrix}1&2&1\\2&4&6\\6&9&12\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2&1\\1\times\underline{2}&2\times\underline{2}&3\times\underline{2}\\2\times\underline{3}&3\times\underline{3}&4\times\underline{3}\end{vmatrix}=2\times3\times\begin{vmatrix}1&2&1\\1&2&3\\2&3&4\end{vmatrix}=6\begin{vmatrix}1&2&1\\1&2&3\\2&3&4\end{vmatrix}.$$

定理

设$\mathbf{A}$是n阶方阵, 则等式$|k\mathbf{A}|=k^n|\mathbf{A}|$成立.

推论

若行列式的某一行(或列)元素全为零, 则行列式的值为零.

推论

若行列式某两行(或列)元素对应成比例, 则行列式为零.

行列式的拆分定理

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{k1}+c_{k1} & b_{k2}+c_{k2} & \cdots & b_{kn}+c_{kn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{k1} & b_{k2} & \cdots & b_{kn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{k1} & c_{k2} & \cdots & c_{kn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

例 2

$$\begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_2+b_2 & a_3+b_3 \\ a_2+b_2 & a_3+b_3 & a_1+b_1 \\ a_3+b_3 & a_1+b_1 & a_2+b_2 \end{vmatrix}$$

例 2

$$\begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_2+b_2 & a_3+b_3 \\ a_2+b_2 & a_3+b_3 & a_1+b_1 \\ a_3+b_3 & a_1+b_1 & a_2+b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2+b_2 & a_3+b_3 \\ a_2 & a_3+b_3 & a_1+b_1 \\ a_3 & a_1+b_1 & a_2+b_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & a_2+b_2 & a_3+b_3 \\ b_2 & a_3+b_3 & a_1+b_1 \\ b_3 & a_1+b_1 & a_2+b_2 \end{vmatrix}$$

例 2

$$\begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_2+b_2 & a_3+b_3 \\ a_2+b_2 & a_3+b_3 & a_1+b_1 \\ a_3+b_3 & a_1+b_1 & a_2+b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2+b_2 & a_3+b_3 \\ a_2 & a_3+b_3 & a_1+b_1 \\ a_3 & a_1+b_1 & a_2+b_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & a_2+b_2 & a_3+b_3 \\ b_2 & a_3+b_3 & a_1+b_1 \\ b_3 & a_1+b_1 & a_2+b_2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3+b_3 \\ a_2 & a_3 & a_1+b_1 \\ a_3 & a_1 & a_2+b_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & b_2 & a_3+b_3 \\ a_2 & b_3 & a_1+b_1 \\ a_3 & b_1 & a_2+b_2 \end{vmatrix}$$

例 2

$$
\begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_2+b_2 & a_3+b_3 \\ a_2+b_2 & a_3+b_3 & a_1+b_1 \\ a_3+b_3 & a_1+b_1 & a_2+b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2+b_2 & a_3+b_3 \\ a_2 & a_3+b_3 & a_1+b_1 \\ a_3 & a_1+b_1 & a_2+b_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & a_2+b_2 & a_3+b_3 \\ b_2 & a_3+b_3 & a_1+b_1 \\ b_3 & a_1+b_1 & a_2+b_2 \end{vmatrix}
$$

$$
= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3+b_3 \\ a_2 & a_3 & a_1+b_1 \\ a_3 & a_1 & a_2+b_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & b_2 & a_3+b_3 \\ a_2 & b_3 & a_1+b_1 \\ a_3 & b_1 & a_2+b_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & a_2 & a_3+b_3 \\ b_2 & a_3 & a_1+b_1 \\ b_3 & a_1 & a_2+b_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & a_3+b_3 \\ b_2 & b_3 & a_1+b_1 \\ b_3 & b_1 & a_2+b_2 \end{vmatrix}
$$

例 2

$$\begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_2+b_2 & a_3+b_3 \\ a_2+b_2 & a_3+b_3 & a_1+b_1 \\ a_3+b_3 & a_1+b_1 & a_2+b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2+b_2 & a_3+b_3 \\ a_2 & a_3+b_3 & a_1+b_1 \\ a_3 & a_1+b_1 & a_2+b_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & a_2+b_2 & a_3+b_3 \\ b_2 & a_3+b_3 & a_1+b_1 \\ b_3 & a_1+b_1 & a_2+b_2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3+b_3 \\ a_2 & a_3 & a_1+b_1 \\ a_3 & a_1 & a_2+b_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & b_2 & a_3+b_3 \\ a_2 & b_3 & a_1+b_1 \\ a_3 & b_1 & a_2+b_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & a_2 & a_3+b_3 \\ b_2 & a_3 & a_1+b_1 \\ b_3 & a_1 & a_2+b_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & a_3+b_3 \\ b_2 & b_3 & a_1+b_1 \\ b_3 & b_1 & a_2+b_2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_3 & a_1 \\ a_3 & a_1 & a_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & b_3 \\ a_2 & a_3 & b_1 \\ a_3 & a_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

行列式的性质

例 2

$$\begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_2+b_2 & a_3+b_3 \\ a_2+b_2 & a_3+b_3 & a_1+b_1 \\ a_3+b_3 & a_1+b_1 & a_2+b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2+b_2 & a_3+b_3 \\ a_2 & a_3+b_3 & a_1+b_1 \\ a_3 & a_1+b_1 & a_2+b_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & a_2+b_2 & a_3+b_3 \\ b_2 & a_3+b_3 & a_1+b_1 \\ b_3 & a_1+b_1 & a_2+b_2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3+b_3 \\ a_2 & a_3 & a_1+b_1 \\ a_3 & a_1 & a_2+b_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & b_2 & a_3+b_3 \\ a_2 & b_3 & a_1+b_1 \\ a_3 & b_1 & a_2+b_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & a_2 & a_3+b_3 \\ b_2 & a_3 & a_1+b_1 \\ b_3 & a_1 & a_2+b_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & a_3+b_3 \\ b_2 & b_3 & a_1+b_1 \\ b_3 & b_1 & a_2+b_2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_3 & a_1 \\ a_3 & a_1 & a_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & b_3 \\ a_2 & a_3 & b_1 \\ a_3 & a_1 & b_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & b_2 & a_3 \\ a_2 & b_3 & a_1 \\ a_3 & b_1 & a_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & b_2 & b_3 \\ a_2 & b_3 & b_1 \\ a_3 & b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

例 2

$$\begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_2+b_2 & a_3+b_3 \\ a_2+b_2 & a_3+b_3 & a_1+b_1 \\ a_3+b_3 & a_1+b_1 & a_2+b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2+b_2 & a_3+b_3 \\ a_2 & a_3+b_3 & a_1+b_1 \\ a_3 & a_1+b_1 & a_2+b_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & a_2+b_2 & a_3+b_3 \\ b_2 & a_3+b_3 & a_1+b_1 \\ b_3 & a_1+b_1 & a_2+b_2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3+b_3 \\ a_2 & a_3 & a_1+b_1 \\ a_3 & a_1 & a_2+b_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & b_2 & a_3+b_3 \\ a_2 & b_3 & a_1+b_1 \\ a_3 & b_1 & a_2+b_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & a_2 & a_3+b_3 \\ b_2 & a_3 & a_1+b_1 \\ b_3 & a_1 & a_2+b_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & a_3+b_3 \\ b_2 & b_3 & a_1+b_1 \\ b_3 & b_1 & a_2+b_2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_3 & a_1 \\ a_3 & a_1 & a_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & b_3 \\ a_2 & a_3 & b_1 \\ a_3 & a_1 & b_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & b_2 & a_3 \\ a_2 & b_3 & a_1 \\ a_3 & b_1 & a_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & b_2 & b_3 \\ a_2 & b_3 & b_1 \\ a_3 & b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} b_1 & a_2 & a_3 \\ b_2 & a_3 & a_1 \\ b_3 & a_1 & a_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & a_2 & b_3 \\ b_2 & a_3 & b_1 \\ b_3 & a_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

例 2

$$\begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_2+b_2 & a_3+b_3 \\ a_2+b_2 & a_3+b_3 & a_1+b_1 \\ a_3+b_3 & a_1+b_1 & a_2+b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2+b_2 & a_3+b_3 \\ a_2 & a_3+b_3 & a_1+b_1 \\ a_3 & a_1+b_1 & a_2+b_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & a_2+b_2 & a_3+b_3 \\ b_2 & a_3+b_3 & a_1+b_1 \\ b_3 & a_1+b_1 & a_2+b_2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3+b_3 \\ a_2 & a_3 & a_1+b_1 \\ a_3 & a_1 & a_2+b_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & b_2 & a_3+b_3 \\ a_2 & b_3 & a_1+b_1 \\ a_3 & b_1 & a_2+b_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & a_2 & a_3+b_3 \\ b_2 & a_3 & a_1+b_1 \\ b_3 & a_1 & a_2+b_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & a_3+b_3 \\ b_2 & b_3 & a_1+b_1 \\ b_3 & b_1 & a_2+b_2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_3 & a_1 \\ a_3 & a_1 & a_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & b_3 \\ a_2 & a_3 & b_1 \\ a_3 & a_1 & b_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & b_2 & a_3 \\ a_2 & b_3 & a_1 \\ a_3 & b_1 & a_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & b_2 & b_3 \\ a_2 & b_3 & b_1 \\ a_3 & b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} b_1 & a_2 & a_3 \\ b_2 & a_3 & a_1 \\ b_3 & a_1 & a_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & a_2 & b_3 \\ b_2 & a_3 & b_1 \\ b_3 & a_1 & b_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 & a_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ b_2 & b_3 & b_1 \\ b_3 & b_1 & b_2 \end{vmatrix}.$$

行列式的性质

性质

行列式某一行(或列)的k倍加到别一行(或列)的对应元素上去，行列式的值不变，即第i行(或第i列)乘以数k加到第j行(或第j列)上记作$r_j + kr_i$(或$c_j + kc_i$):

$$\begin{array}{c} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1}+ka_{i1} & a_{j2}+ka_{i2} & \cdots & a_{jn}+ka_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \text{第}i\text{行} \\ \\ \text{第}j\text{行} \\ \\ \\ \end{array} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \text{第}i\text{行} \\ \\ \text{第}j\text{行} \\ \\ \\ \end{array}.$$

行列式的“化三角法”

- 对于给定的n阶方阵$\mathbf{A}$，我们已经讨论了如何利用矩阵的初等行变换将方阵$\mathbf{A}$化为阶梯形矩阵$\mathbf{R}$.
- 由于方阵的阶梯形矩阵一定是上三角矩阵，从而$|\mathbf{R}|$就等于其主对角线上元素之积.
- 设$\mathbf{M}, \mathbf{N}$都是n阶方阵,由行列式的性质2，性质3和性质5可知，方阵的三类初等变换刚好对应行列式的如下三个基本性质:

  (1) 如果$\mathbf{M} \xrightarrow{r_i \leftrightarrow r_j} \mathbf{N}$，或$\mathbf{M} \xrightarrow{c_i \leftrightarrow c_j} \mathbf{N}$，则有$|\mathbf{M}| \xrightarrow{r_i \leftrightarrow r_j} |\mathbf{N}|$，或$|\mathbf{M}| \xrightarrow{r_i \leftrightarrow r_j} |\mathbf{N}|$，从而$|\mathbf{N}| = -|\mathbf{M}|$或$|\mathbf{M}| = -|\mathbf{N}|$;

  (2) 如果$\mathbf{M} \xrightarrow{kr_i} \mathbf{N}$，或$\mathbf{M} \xrightarrow{kc_i} \mathbf{N}$，则有$|\mathbf{M}| \xrightarrow{kr_i} |\mathbf{N}|$，或$|\mathbf{M}| \xrightarrow{kc_i} |\mathbf{N}|$，从而$|\mathbf{N}| = k|\mathbf{M}|$或$|\mathbf{M}| = \dfrac{1}{k}|\mathbf{N}|$;

  (3) 如果$\mathbf{M} \xrightarrow{r_j + kr_i} \mathbf{N}$，或$\mathbf{M} \xrightarrow{c_j + kc_i} \mathbf{N}$，则有$|\mathbf{M}| \xrightarrow{r_j + kr_i} |\mathbf{N}|$，或$|\mathbf{M}| \xrightarrow{c_j + kc_i} |\mathbf{N}|$，从而$|\mathbf{N}| = |\mathbf{M}|$.

因此，行列式$|\mathbf{A}|$与$|\mathbf{R}|$之间一定满足关系式$|\mathbf{A}| = \lambda|\mathbf{R}|$，其中$\lambda$是反复利用行列式性质2，性质3，性质5进行计算的过程中产生的某个非零常数,即所谓“化三角形法”.

行列式的计算举例

例 3

计算行列式 $\begin{vmatrix} 0 & 2 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & 0 & 4 \\ -2 & -11 & 3 & -16 \\ 0 & -7 & 3 & 1 \end{vmatrix}$.

例 3

计算行列式$\begin{vmatrix} 0 & 2 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & 0 & 4 \\ -2 & -11 & 3 & -16 \\ 0 & -7 & 3 & 1 \end{vmatrix}$.

例 4

计算行列式$\mathbf{D} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$.

例 5

计算行列式$D = \begin{vmatrix} 7 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -5 \end{vmatrix}$.

行列式的计算举例

例 5

计算行列式$D = \begin{vmatrix} 7 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -5 \end{vmatrix}$.

例 6

设矩阵$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1t} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{t1} & \cdots & a_{tt} \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1t} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{k1} & \cdots & a_{kt} \end{bmatrix},$

若矩阵$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{C} \\ \mathbf{O} & \mathbf{B} \end{bmatrix}$, 证明: $|\mathbf{D}| = |\mathbf{A}| \cdot |\mathbf{B}|$.

行列式的计算举例

例 7

设矩阵$\mathbf{D}_{2n} = \begin{vmatrix} a & & & & & b \\ & \ddots & & & \iddots & \\ & & a & b & & \\ & & c & d & & \\ & \iddots & & & \ddots & \\ c & & & & & d \end{vmatrix}$，其中未写出的元素为0.

方阵可逆的充要条件

定理

n阶方阵$\mathbf{A}$可逆的充分必要条件是$|\mathbf{A}| \neq 0$.

方阵可逆的充要条件

定理

n阶方阵$\mathbf{A}$可逆的充分必要条件是$|\mathbf{A}| \neq 0$.

例 8

判断下列矩阵是否可逆:

$$(1)\ \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}; \qquad (2)\ \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

定理

n阶方阵$\mathbf{A}$可逆的充分必要条件是$|\mathbf{A}| \neq 0$.

例 8

判断下列矩阵是否可逆:

$$(1)\ \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}; \qquad (2)\ \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

注

我们可以看到, 分块矩阵 $\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{C} \\ \mathbf{O} & \mathbf{B} \end{bmatrix}$ 可逆$\Leftrightarrow \mathbf{A}, \mathbf{B}$均可逆.

方阵可逆的充要条件

注

设$\mathbf{A_1},\mathbf{A_2},\cdots,\mathbf{A_s}$分别是$n_i(i=1,2,\cdots,s)$阶方阵, 则分块对角阵

$$\mathbf{D}=\begin{bmatrix}\mathbf{A}_1 & \mathbf{O} & \cdots & \mathbf{O}\\ \mathbf{O} & \mathbf{A}_2 & \cdots & \mathbf{0}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{A}_s\end{bmatrix}$$

可逆$\Leftrightarrow \mathbf{A}_i(i=1,2,\cdots,s)$均可逆, 且在$\mathbf{A}_i(i=1,2,\cdots,s)$均可逆的条件下,

$$\begin{bmatrix}\mathbf{A}_1 & \mathbf{O} & \cdots & \mathbf{O}\\ \mathbf{O} & \mathbf{A}_2 & \cdots & \mathbf{0}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{A}_s\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{A}_1^{-1} & \mathbf{O} & \cdots & \mathbf{O}\\ \mathbf{O} & \mathbf{A}_2^{-1} & \cdots & \mathbf{0}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{A}_s^{-1}\end{bmatrix}=$$

注

$$
= \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1^{-1} & \mathbf{O} & \cdots & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{A}_2^{-1} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{A}_s^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{O} & \cdots & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{A}_2 & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{A}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_1 & & & \\ & \mathbf{E}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathbf{E}_s \end{bmatrix},
$$

其中$\mathbf{E}_i (i = 1, 2, \cdots, s)$是$n_i (i = 1, 2, \cdots, s)$阶单位矩阵, 可知

$$
\mathbf{D}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1^{-1} & \mathbf{O} & \cdots & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{A}_2^{-1} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{A}_s^{-1} \end{bmatrix}.
$$

定理

设$\mathbf{A},\mathbf{B}$是两个n阶方阵, 则$|\mathbf{AB}|=|\mathbf{A}|\cdot|\mathbf{B}|$.

方阵可逆的充要条件

定理

设$\mathbf{A}, \mathbf{B}$是两个n阶方阵, 则$|\mathbf{AB}| = |\mathbf{A}| \cdot |\mathbf{B}|$.

(1) • 若$\mathbf{A} = \mathbf{P}(i, j)$, 由于$|\mathbf{P}(i, j)| = -|\mathbf{E}| = -1$, 于是

$$|\mathbf{AB}| = |\mathbf{P}(i, j)\mathbf{B}| = -|\mathbf{B}| = |\mathbf{P}(i, j)| \cdot |\mathbf{B}| = |\mathbf{A}| \cdot |\mathbf{B}|;$$

• 若$\mathbf{A} = \mathbf{P}(i(k))$, 由于$|\mathbf{P}(i(k))| = k|\mathbf{E}| = k$, 于是

$$|\mathbf{AB}| = |\mathbf{P}(i(k))\mathbf{B}| = k|\mathbf{B}| = |\mathbf{P}(i(k))| \cdot |\mathbf{B}| = |\mathbf{A}| \cdot |\mathbf{B}|;$$

• 若$\mathbf{A} = \mathbf{P}(i(k), j)$, 由于$|\mathbf{P}(i(k), j)| = |\mathbf{E}| = 1$, 于是

$$|\mathbf{AB}| = |\mathbf{P}(i(k), j)\mathbf{B}| = |\mathbf{B}| = |\mathbf{P}(i(k), j)| \cdot |\mathbf{B}| = |\mathbf{A}| \cdot |\mathbf{B}|.$$

(2) 若$\mathbf{A}$是一般的可逆方阵, 则存在若干个初等矩阵$\mathbf{P_1}, \mathbf{P_2}, \cdots, \mathbf{P_s}$, 使得

$$\mathbf{A} = \mathbf{P_1} \cdot \mathbf{P_2} \cdots \mathbf{P_s},$$

(2) 于是由(1)有

$$\begin{aligned}|\mathbf{AB}| =&|\mathbf{P_1} \cdot \mathbf{P_2} \cdots \mathbf{P_s} \cdot \mathbf{B}| = |\mathbf{P_1}| \cdot |\mathbf{P_2}| \cdots |\mathbf{P_s}| \cdot |\mathbf{B}| \\ =&|\mathbf{P_1} \cdot \mathbf{P_2} \cdots \mathbf{P_s}| \cdot |\mathbf{B}| = |\mathbf{A}| \cdot |\mathbf{B}|.\end{aligned}$$

(2) 于是由(1)有

$$\begin{aligned} |\mathbf{AB}| =& |\mathbf{P_1} \cdot \mathbf{P_2} \cdots \mathbf{P_s} \cdot \mathbf{B}| = |\mathbf{P_1}| \cdot |\mathbf{P_2}| \cdots |\mathbf{P_s}| \cdot |\mathbf{B}| \\ =& |\mathbf{P_1} \cdot \mathbf{P_2} \cdots \mathbf{P_s}| \cdot |\mathbf{B}| = |\mathbf{A}| \cdot |\mathbf{B}|. \end{aligned}$$

(3) 若$\mathbf{A}$不是可逆方阵, 则存在初等矩阵$\mathbf{P_1}, \mathbf{P_2}, \cdots, \mathbf{P_s}$, 使得 $\mathbf{P_s} \cdots \mathbf{P_2} \cdot \mathbf{P_1} \mathbf{A} = \mathbf{R}$, 其中$\mathbf{R}$是$\mathbf{A}$的行最简形矩阵, 且$\mathbf{R}$的最后一行是全零行. 由于初等矩阵的逆矩阵仍旧是初等矩阵, 于是

$$|\mathbf{AB}| = |\mathbf{P_1}^{-1} \cdot \mathbf{P_2}^{-1} \cdots \mathbf{P_s}^{-1} \mathbf{RB}| = |\mathbf{P_1}^{-1}| \cdot |\mathbf{P_2}^{-1}| \cdots |\mathbf{P_s}^{-1}| \cdot |\mathbf{RB}|.$$

而矩阵$\mathbf{RB}$的最后一行也是全零行, 从而$|\mathbf{RB}| = 0$, 因此$|\mathbf{AB}| = 0$.
另一方面, 由于$\mathbf{A}$不是可逆方阵, 由定理1可知$|\mathbf{A}| = 0$, 于是$|\mathbf{A}| \cdot |\mathbf{B}| = 0$.
因此, 当$\mathbf{A}$不是可逆方阵时, $|\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}| = |\mathbf{A}| \cdot |\mathbf{B}|$也成立.

推论

设$\mathbf{A}$是n阶方阵. 如果存在n阶方阵$\mathbf{B}$满足$\mathbf{AB}=\mathbf{E}(\mathbf{BA}=\mathbf{E})$, 那么$n$阶方阵$\mathbf{A}$可逆, 且$\mathbf{A}^{-1}=\mathbf{B}$.

推论

设$\mathbf{A}$是n阶方阵. 如果存在n阶方阵$\mathbf{B}$满足$\mathbf{AB}=\mathbf{E}(\mathbf{BA}=\mathbf{E})$, 那么$n$阶方阵$\mathbf{A}$可逆, 且$\mathbf{A}^{-1}=\mathbf{B}$.

例 9

设矩阵$\mathbf{D}=\begin{bmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{C}\\ \mathbf{O} & \mathbf{B}\end{bmatrix}$, 其中$\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$分别为m阶, n阶可逆阵, 求$\mathbf{D}^{-1}$.

方阵可逆的充要条件

推论

设$\mathbf{A}$是n阶方阵. 如果存在n阶方阵$\mathbf{B}$满足$\mathbf{AB}=\mathbf{E}(\mathbf{BA}=\mathbf{E})$, 那么$n$阶方阵$\mathbf{A}$可逆, 且$\mathbf{A}^{-1}=\mathbf{B}$.

例 9

设矩阵$\mathbf{D}=\begin{bmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{C}\\ \mathbf{O} & \mathbf{B}\end{bmatrix}$, 其中$\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$分别为m阶, n阶可逆阵, 求$\mathbf{D}^{-1}$.

例 10

设n阶方阵$\mathbf{A}$满足$\mathbf{A}^2=2\mathbf{E}$, 证明矩阵$\mathbf{A}+\mathbf{E}$可逆, 并求$(\mathbf{A}+\mathbf{E})^{-1}$.

行列式按行(列)展开

将3阶行列式的结果进行改写,我们有

$$
\begin{aligned}
\det(\mathbf{A}) = &\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\
= &a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} \\
= &a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) \\
= &a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.
\end{aligned}
$$

这说明3阶行列式可由2阶行列式的代数和表示.

将3阶行列式的结果进行改写,我们有

$$\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} \\ &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) \\ &= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

这说明3阶行列式可由2阶行列式的代数和表示.

本节我们讨论n阶行列式与$n-1$阶行列式之间这样类似的关系.

定义 (余子式与代数余子式)

- 设$|\mathbf{A}|$是n阶方阵$\mathbf{A}=(a_{ij})_{n\times n}$的行列式. 对任意的$1\leqslant i,j\leqslant n$, 我们称在$|\mathbf{A}|$中划去第$i$行和第$j$列后剩下的$n-1$阶行列式称为$(i,j)$元素$a_{ij}$的**余子式**, 记为$\mathrm{M}_{ij}$;
- 我们称$\mathbf{A}_{ij}:=(-1)^{i+j}\mathrm{M}_{ij}$为第$(i,j)$个元素$a_{ij}$的**代数余子式**.

定义 (余子式与代数余子式)

- 设$|\mathbf{A}|$是n阶方阵$\mathbf{A}=(a_{ij})_{n\times n}$的行列式. 对任意的$1\leqslant i,j\leqslant n$, 我们称在$|\mathbf{A}|$中划去第$i$行和第$j$列后剩下的$n-1$阶行列式称为$(i,j)$元素$a_{ij}$的**余子式**, 记为$\mathbf{M}_{ij}$;
- 我们称$\mathbf{A}_{ij}:=(-1)^{i+j}\mathbf{M}_{ij}$为第$(i,j)$个元素$a_{ij}$的**代数余子式**.

例

设矩阵

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 0 \\ -2 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -3 \end{bmatrix},$$

例

- $|\mathbf{A}|$的$(3,2)$元素的余子式和代数余子式分别为

$$\mathbf{M}_{32}=\begin{vmatrix}4 & 1 & 3\\ 2 & 3 & 0\\ 1 & 0 & -3\end{vmatrix},\ \mathbf{A}_{32}=(-1)^{3+2}\mathbf{M}_{32}=-\mathbf{M}_{32};$$

- $|\mathbf{A}|$的$(1,3)$元素的余子式和代数余子式分别为

$$\mathbf{M}_{13}=\begin{vmatrix}2 & -1 & 0\\ -2 & 3 & 1\\ 1 & 1 & -3\end{vmatrix},\ \mathbf{A}_{13}=(-1)^{1+3}\mathbf{M}_{13}=\mathbf{M}_{13};$$

定理

设行列式

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

则有

$$|\mathbf{A}| = a_{i1}\mathbf{A}_{i1} + a_{i2}\mathbf{A}_{i2} + \cdots + a_{in}\mathbf{A}_{in} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\mathbf{A}_{ik}\,(i = 1, 2, \cdots, n),$$

$$|\mathbf{A}| = a_{1j}\mathbf{A}_{1j} + a_{2j}\mathbf{A}_{2j} + \cdots + a_{nj}\mathbf{A}_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}\mathbf{A}_{kj}\,(j = 1, 2, \cdots, n).$$

我们称上式分别为$|\mathbf{A}|$按第i行和第j列展开的展开式.

例 1

计算行列式 $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$.

例 1

计算行列式 $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$.

例 2

计算行列式 $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -5 & 3 & 3 \\ -5 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$.

例

范德蒙德(Vandermonde)行列式有如下展开式

$$|\mathbf{V}_n| := \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n} (x_j - x_i).$$

例

范德蒙德(Vandermonde)行列式有如下展开式

$$|\mathbf{V}_n| := \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (x_j - x_i).$$

推论

设$\mathbf{A}_{ij}(i, j = 1, 2, \cdots, n)$是行列式$|\mathbf{A}|$中元素$a_{ij}$的代数余子式, 那么

$$a_{i1}\mathbf{A}_{j1} + a_{i2}\mathbf{A}_{j2} + \cdots + a_{in}\mathbf{A}_{jn} = 0, \ (i \neq j)$$

$$a_{1i}\mathbf{A}_{1j} + a_{2i}\mathbf{A}_{2j} + \cdots + a_{ni}\mathbf{A}_{nj} = 0. \ (i \neq j)$$

克拉默法则

回顾一下，一个n阶方阵$\mathbf{A}$可逆$\Leftrightarrow |\mathbf{A}| \neq 0.$

课前导读

回顾一下，一个n阶方阵$\mathbf{A}$可逆$\Leftrightarrow |\mathbf{A}| \neq 0$.

本节我们主要介绍:

- 矩阵的伴随矩阵;
- 使用伴随矩阵给出矩阵可逆时求逆矩阵的公式;
- 使用行列式求解线性方程组时的克拉默法则.

伴随矩阵

定义

设$\mathbf{A}=(a_{ij})$是n阶方阵，$\mathbf{A}_{ij}$是$|\mathbf{A}|$的(i,j)元素a_{ij}的代数余子式，那么我们称矩阵

$$\mathbf{A}^*=\begin{bmatrix}\mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{21} & \cdots & \mathbf{A}_{n1}\\ \mathbf{A}_{12} & \mathbf{A}_{22} & \cdots & \mathbf{A}_{n2}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \mathbf{A}_{1n} & \mathbf{A}_{2n} & \cdots & \mathbf{A}_{nn}\end{bmatrix}$$

为矩阵$\mathbf{A}$的**伴随矩阵**.

引理

设方阵$\mathbf{A}^*$是n阶方阵$\mathbf{A}$的伴随矩阵，则必有

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^* = \mathbf{A}^*\mathbf{A} = \begin{bmatrix} |\mathbf{A}| & & & \\ & |\mathbf{A}| & & \\ & & \ddots & \\ & & & |\mathbf{A}| \end{bmatrix} = |\mathbf{A}|\mathbf{E}.$$

引理

设方阵$\mathbf{A}^*$是n阶方阵$\mathbf{A}$的伴随矩阵, 则必有

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^* = \mathbf{A}^*\mathbf{A} = \begin{bmatrix} |\mathbf{A}| & & & \\ & |\mathbf{A}| & & \\ & & \ddots & \\ & & & |\mathbf{A}| \end{bmatrix} = |\mathbf{A}|\mathbf{E}.$$

由矩阵乘法及行列式按行(列)展开定理可知, 乘积矩阵$\mathbf{A}\mathbf{A}^*$的第i行第j列元素为

$$a_{i1}\mathbf{A}_{j1} + a_{i1}\mathbf{A}_{j1} + \cdots + a_{i1}\mathbf{A}_{j1} = \delta_{ij}|\mathbf{A}|,$$

即$\mathbf{A}\mathbf{A}^* = |\mathbf{A}|\mathbf{E}$. 类似地,$\mathbf{A}^*\mathbf{A} = |\mathbf{A}|\mathbf{E}$.

矩阵的求逆公式

定理

如果n阶方阵$\mathbf{A}$可逆，则有求逆公式$\mathbf{A}^{-1} = \dfrac{1}{|\mathbf{A}|}\mathbf{A}^*$.

定理

如果n阶方阵$\mathbf{A}$可逆，则有求逆公式$\mathbf{A}^{-1} = \dfrac{1}{|\mathbf{A}|}\mathbf{A}^*$.

一个n阶方阵$\mathbf{A} \Rightarrow |\mathbf{A}| \neq 0$. 在公式$\mathbf{A}\mathbf{A}^* = \mathbf{A}^*\mathbf{A} = |\mathbf{A}|\mathbf{E}$两端同除以$|\mathbf{A}|$，我们得到

$$\mathbf{A}\left(\frac{1}{|\mathbf{A}|}\mathbf{A}^*\right) = \left(\frac{1}{|\mathbf{A}|}\mathbf{A}^*\right)\mathbf{A} = \mathbf{E},$$

即

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|}\mathbf{A}^*.$$

例 1

设2阶矩阵$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, 若$ad-bc\neq 0$, 求矩阵$\mathbf{A}^{-1}$.

例 1

设2阶矩阵$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, 若$ad-bc\neq 0$, 求矩阵$\mathbf{A}^{-1}$.

例 2

判断矩阵$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$是否可逆? 如果可逆, 请使用求逆公式计算逆矩阵.

矩阵的求逆公式

例 1

设2阶矩阵$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, 若$ad-bc\neq 0$, 求矩阵$\mathbf{A}^{-1}$.

例 2

判断矩阵$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$是否可逆? 如果可逆, 请使用求逆公式计算逆矩阵.

注

- 当方阵的阶数$n\geqslant 3$时,用公式法求逆矩阵比较烦琐.
- 当方阵的阶数$n\geqslant 3$时,我们一般是用矩阵的初等行变换来求矩阵的逆矩阵.
- 借助求逆公式,我们可以得到解线性方程组的克拉默法则.

克拉默法则

设有一个含有n个未知数$x_1, x_2, \cdots, x_n$及n个方程的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n, \end{cases}$$

该线性方程组有矩阵乘积表示$\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\beta}$, 其中

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

定理 (克拉默Crammer法则)

如果线性方程组$\mathbf{A}x=\beta$的系数行列式不等于零，即$|\mathbf{A}|\neq 0$，那么该线性方程组有唯一解

$$x_1=\frac{D_1}{|\mathbf{A}|},\ x_2=\frac{D_2}{|\mathbf{A}|},\ \cdots,\ x_n=\frac{D_n}{|\mathbf{A}|},$$

其中$D_j(j=1,2,\cdots,n)$是把系数行列式的第j列元素用β的元素代替后得到的行列式.

克拉默法则

定理 (克拉默Crammer法则)

如果线性方程组$\mathbf{A}x=\beta$的系数行列式不等于零，即$|\mathbf{A}|\neq 0$，那么该线性方程组有唯一解

$$x_1=\frac{D_1}{|\mathbf{A}|},\ x_2=\frac{D_2}{|\mathbf{A}|},\ \cdots,\ x_n=\frac{D_n}{|\mathbf{A}|},$$

其中$D_j(j=1,2,\cdots,n)$是把系数行列式的第j列元素用β的元素代替后得到的行列式.

说明

虽然在线性方程组有唯一解时，克拉默法则给出了具体的求解公式，但是由于较大的计算量，我们在真正求解线性方程组的时候很少用克拉默法则，而是采取对线性方程增广矩阵施行初等行变换的方法解线性方程组.

克拉默法则

- $|\mathbf{A}| \neq 0 \Rightarrow \mathbf{A}^{-1}$存在.

克拉默法则

- $|\mathbf{A}| \neq 0 \Rightarrow \mathbf{A}^{-1}$存在.
- 令$x = \mathbf{A}^{-1}\beta$,可以验证x是线性方程组$\mathbf{A}x = \beta$的解.

克拉默法则

- $|\mathbf{A}| \neq 0 \Rightarrow \mathbf{A}^{-1}$存在.
- 令$\boldsymbol{x} = \mathbf{A}^{-1}\boldsymbol{\beta}$,可以验证$\boldsymbol{x}$是线性方程组$\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\beta}$的解.
- 由$\mathbf{A}^{-1}$的唯一性可知,线性方程组的解是唯一的, 且$\boldsymbol{x}$可以表示为$\boldsymbol{x} = \dfrac{1}{|\mathbf{A}|}\mathbf{A}^*\boldsymbol{\beta}$,即

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \frac{1}{|\mathbf{A}|}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \frac{1}{|\mathbf{A}|}\begin{bmatrix} \sum\limits_{k=1}^{n} b_k\mathbf{A}_{k1} \\ \sum\limits_{k=1}^{n} b_k\mathbf{A}_{k2} \\ \vdots \\ \sum\limits_{k=1}^{n} b_k\mathbf{A}_{kn} \end{bmatrix}.$$

- 于是

$$x_j = \frac{1}{|\mathbf{A}|}\sum_{k=1}^{n} b_k \mathbf{A}_{kj} = b_1\mathbf{A}_{1j} + b_2\mathbf{A}_{2j} + \cdots + b_n\mathbf{A}_{nj}, \quad j = 1, 2, \cdots, n.$$

- 将D_j按第j列展开

$$\begin{aligned} D_j = & \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\ = & b_1\mathbf{A}_{1j} + b_2\mathbf{A}_{2j} + \cdots + b_n\mathbf{A}_{nj}, \quad j = 1, 2, \cdots, n. \end{aligned}$$

所以

$$x_j = \frac{D_j}{|\mathbf{A}|}, \quad j = 1, 2, \cdots, n.$$

克拉默法则对应相关结论

定理

如果线性方程组$\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\beta}$的系数行列式满足$|\mathbf{A}| \neq 0$, 那么方程组一定有解且解是唯一的.

克拉默法则对应相关结论

定理

如果线性方程组$\mathbf{A}x = \beta$的系数行列式满足$|\mathbf{A}| \neq 0$, 那么方程组一定有解且解是唯一的.

定理

如果线性方程组$\mathbf{A}x = \beta$无解或有无穷多解, 那么$|\mathbf{A}| = 0$.

克拉默法则对应相关结论

定理

如果线性方程组$\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\beta}$的系数行列式满足$|\mathbf{A}| \neq 0$, 那么方程组一定有解且解是唯一的.

定理

如果线性方程组$\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\beta}$无解或有无穷多解, 那么$|\mathbf{A}| = 0$.

定理

如果齐次线性方程组$\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$的系数行列式不等于零, 即$|\mathbf{A}| \neq 0$, 那么它只有零解

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0.$$

克拉默法则对应相关结论

定理

如果线性方程组$\mathbf{A}x = \beta$的系数行列式满足$|\mathbf{A}| \neq 0$, 那么方程组一定有解且解是唯一的.

定理

如果线性方程组$\mathbf{A}x = \beta$无解或有无穷多解, 那么$|\mathbf{A}| = 0$.

定理

如果齐次线性方程组$\mathbf{A}x = \mathbf{0}$的系数行列式不等于零, 即$|\mathbf{A}| \neq 0$, 那么它只有零解

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0.$$

定理

如果齐次线性方程组$\mathbf{A}x = \mathbf{0}$有非零解, 那么$|\mathbf{A}| = 0$.

例 3

用克拉默法则求解线性方程组 $\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = -1, \\ -2x_1 + 2x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 1. \end{cases}$

引例

例 3

用克拉默法则求解线性方程组$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = -1, \\ -2x_1 + 2x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 1. \end{cases}$

例 4

λ取何值时，下面的齐次线性方程组有非零解?

$$\begin{cases} \lambda x_1 + \quad x_2 + \quad 3x_3 = 0, \\ x_1 + (\lambda - 1)x_2 + \quad x_3 = 0, \\ x_1 + \quad x_2 + (\lambda - 1)x_3 = 0. \end{cases}$$

The End