

**习题 1** 如果函数  $f(x)$  在其定义域内可计算导函数且  $n \in \mathbb{Z}^+$ , 请证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left[ f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x) \right] = f'(x)$$

并举例说明该命题的逆命题不成立.

**习题 2** 计算函数  $f(x) = \arcsin(\sin x)$  的导函数.

**习题 3\*** 证明以下  $n$  阶行列式的求导函数法则:

$$\frac{d}{dx} \begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \cdots & f_{1n}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{k1}(x) & f_{k2}(x) & \cdots & f_{kn}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \cdots & f_{nn}(x) \end{vmatrix} = \sum_{k=1}^n \begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \cdots & f_{1n}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f'_{k1}(x) & f'_{k2}(x) & \cdots & f'_{kn}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \cdots & f_{nn}(x) \end{vmatrix}.$$

**习题 4** 请证明以下的表达式:

$$(1) (e^x \sin x)^{(n)} = 2^{\frac{n}{2}} e^x \sin\left(x + \frac{n\pi}{4}\right), x \in \mathbb{R}, n \geq 1;$$

$$(2) (x^n \ln x)^{(n)} = n! \left( \ln x + 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \right), x > 0, n \geq 1.$$

**习题 5** 验证以下函数属于  $C^\infty(\mathbb{R})$  空间:

$$(1) f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}; \quad (2) f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

**习题 6\*** 证明函数  $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$  有不连续的导函数.

**习题 7\*** 证明函数  $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$  虽然在  $x = 0$  处连续但是它在该点处既没有左导数值也没有右导数值.

姓名: 学号: 专业: 高等数学 导数值与导函数(二)

---