习题 1 设函数$f(x)$在$[a,b]$上连续, 在(a,b)上可微且$f(a)=f(b)=0$, 那么对$\alpha\in\mathbb{R}$, 请证明存在一个$\xi\in(a,b)$使得$\alpha f(\xi)+f'(\xi)=0$.

习题 2 设函数$f(x),g(x)$在$[a,b]$上连续, 在(a,b)上可微且函数f满足$f(a)=f(b)=0$, 那么对$\alpha\in\mathbb{R}$, 请证明存在一个$\xi\in(a,b)$使得$g'(\xi)f(\xi)+f'(\xi)=0$.

习题 3 设$a>0$, 函数$f(x)$在$[a,b]$上连续, 在(a,b)上可微且$\dfrac{f(a)}{a}=\dfrac{f(b)}{b}$, 那么对$\alpha\in\mathbb{R}$, 请证明存在一个$\xi\in(a,b)$使得$\xi f'(\xi)=f(\xi)$.

习题 4 设函数$f(x)$在$[a,b]$上连续, 在(a,b)上可微且$f^2(b)-f^2(a)=b^2-a^2$, 请证明方程$f'(x)f(x)=x$在(a,b)内至少有一个解.

习题 5 设函数$f(x),g(x)$在$[a,b]$上连续, 在(a,b)上可微且在$[a,b]$上不为零, 如果$f(a)g(b)=f(b)g(a)$, 请证明存在一个$\xi\in(a,b)$使得$\dfrac{f'(\xi)}{f(\xi)}=\dfrac{g'(\xi)}{g(\xi)}$.

习题 6 设实数$a_0,a_1,\ldots,a_n$满足$\dfrac{a_0}{n+1}+\dfrac{a_1}{n}+\cdots+\dfrac{a_{n-1}}{2}+a_n=0$. 验证多项式$P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$在$(0,1)$中至少有一个解.

习题 7 设实数$a_0,a_1,\ldots,a_n$满足$\dfrac{a_0}{1}+\dfrac{2a_1}{2}+\dfrac{2^2a_2}{3}+\cdots+\dfrac{2^{n-1}a_{n-1}}{n}+\dfrac{2^na_n}{n+1}=0$. 验证函数$P(x)=a_n\ln^n x+\cdots+a_2\ln^2 x+a_1\ln x+a_0$在$(1,e^2)$中至少有一个解.

习题 8 设函数$f(x)$在$[a,b]$上连续, 在(a,b)上二次可微且$f(a)=f'(a)=f(b)=0$, 请证明存在一个$\xi\in(a,b)$使得$f''(\xi)=0$.

习题 9 设函数$f(x)$在$[a,b]$上连续, 在(a,b)上二次可微且$f(a)=f(b)$, $f'(a)=f'(b)=0$. 请证明存在$\xi_1,\xi_2\in(a,b)$, $\xi_1\neq\xi_2$, 使得$f''(\xi_1)=f''(\xi_2)$.

习题 10 设函数$f(x)$在$[0,2]$上连续, 在$(0,2)$上二次可微且$f(0)=0$, $f(1)=1$, $f(2)=2$. 请证明存在$\xi\in(0,2)$使得$f''(\xi_1)=0$.

习题 11 验证方程$3^x+4^x=5^x$仅有一个实数解.

习题 12 设函数$f(x),g(x),h(x)$在$[a,b]$上连续, 在(a,b)上可微. 定义

$$F(x)=\det\begin{vmatrix} f(x) & g(x) & h(x)\\ f(a) & g(a) & h(a)\\ f(b) & g(b) & h(b)\end{vmatrix}.$$

请证明存在一个$\xi\in(a,b)$使得$F'(\xi)=0$并利用该结论证明Lagrange中值定理和Cauchy中值定理.