AMS

线性空间与线性变换

线性空间的定义与性质

课前导读

引入了空间直角坐标系后,

- 空间中的任一点P可用一个三元数组(x, y, z)来表示.
- 同时空间中的向量$\overrightarrow{OP}$也可写成$\overrightarrow{OP} = (x, y, z)$.

课前导读

引入了空间直角坐标系后,

- 空间中的任一点P可用一个三元数组(x, y, z)来表示.
- 同时空间中的向量$\overrightarrow{OP}$也可写成$\overrightarrow{OP} = (x, y, z)$.

我们对空间几何图形的性质的研究就可以转化为对三元数组(x, y, z)的研究, 而三元数组(x, y, z)可以推广至n元数组,即我们已经熟悉的n维向量.

引入了空间直角坐标系后,

- 空间中的任一点P可用一个三元数组(x, y, z)来表示.
- 同时空间中的向量$\overrightarrow{OP}$也可写成$\overrightarrow{OP} = (x, y, z)$.

我们对空间几何图形的性质的研究就可以转化为对三元数组(x, y, z)的研究, 而三元数组(x, y, z)可以推广至n元数组,即我们已经熟悉的n维向量.

本节我们将n维向量及向量空间推广至更一般的线性空间并探究与其相关的性质和推广结论.

定义 (线性空间)

设集合$V \neq \varnothing$,$\mathbb{F}$为一个数域($\mathbb{R}$或$\mathbb{C}$).

定义 (线性空间)

设集合$V \neq \varnothing$,$\mathbb{F}$为一个数域($\mathbb{R}$或$\mathbb{C}$).

- 在V中我们定义二元运算$+ : V \times V \to V$:

$$+ : (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) \mapsto \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} := \boldsymbol{\gamma} \in V, \quad \forall \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in V.$$

  我们称该二元运算$+$为V**中的加法**.

定义 (线性空间)

设集合$V\neq\varnothing$,$\mathbb{F}$为一个数域($\mathbb{R}$或$\mathbb{C}$).

- 在V中我们定义二元运算$+:V\times V\to V$:

$$+:(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})\mapsto\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}:=\boldsymbol{\gamma}\in V,\quad\forall\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in V.$$

  我们称该二元运算$+$为V**中的加法**.

- 在V中我们定义二元运算$\cdot:\mathbb{F}\times V\to V$:

$$\cdot:(k,\boldsymbol{\beta})\mapsto k\cdot\boldsymbol{\alpha}\triangleq k\boldsymbol{\alpha}:=\boldsymbol{\zeta}\in V,\quad\forall\boldsymbol{\alpha}\in V,\forall k\in\mathbb{F}.$$

  我们称该二元运算$\cdot$为V**中的数量乘法**.

定义 (线性空间)

设集合$V \neq \varnothing$,$\mathbb{F}$为一个数域($\mathbb{R}$或$\mathbb{C}$).

- 在V中我们定义二元运算$+ : V \times V \to V$:

$$+ : (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) \mapsto \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} := \boldsymbol{\gamma} \in V, \quad \forall \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in V.$$

  我们称该二元运算$+$为V**中的加法**.

- 在V中我们定义二元运算$\cdot : \mathbb{F} \times V \to V$:

$$\cdot : (k, \boldsymbol{\beta}) \mapsto k \cdot \boldsymbol{\alpha} \triangleq k\boldsymbol{\alpha} := \boldsymbol{\zeta} \in V, \quad \forall \boldsymbol{\alpha} \in V, \forall k \in \mathbb{F}.$$

  我们称该二元运算$\cdot$为V**中的数量乘法**.

定义 (线性空间)

- 如果上述集合和两个运算构成的三元组$(V, +, \cdot)$中满足如下性质:

定义 (线性空间)

- 如果上述集合和两个运算构成的三元组$(V, +, \cdot)$中满足如下性质:对任意$\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma} \in V$及任意$k, l \in \mathbb{F}$,

定义 (线性空间)

- 如果上述集合和两个运算构成的三元组$(V,+,\cdot)$中满足如下性质:对任意$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}\in V$及任意$k,l\in\mathbb{F}$,
  (1) 关于V中加法+满足交换律:$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}$.
  (2) 关于V中加法+满足结合律:$\boldsymbol{\alpha}+(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma})=(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})+\boldsymbol{\gamma}$.
  (3) V中存在**零元素**:$\exists\mathbf{0}\in V$,使得$\boldsymbol{\alpha}+\mathbf{0}=\boldsymbol{\alpha},\ \forall\boldsymbol{\alpha}\in V$.
  (4) V中每个元素对应有**负元素**:$\forall\boldsymbol{\alpha}\in V$,$\exists\boldsymbol{\beta}\in V$,使得$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\mathbf{0}$.
  (5) $1\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}$.

定义 (线性空间)

- 如果上述集合和两个运算构成的三元组$(V,+,\cdot)$中满足如下性质:对任意$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}\in V$及任意$k,l\in\mathbb{F}$,
  (1) 关于V中加法$+$满足交换律:$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}$.
  (2) 关于V中加法$+$满足结合律:$\boldsymbol{\alpha}+(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma})=(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})+\boldsymbol{\gamma}$.
  (3) V中存在**零元素**:$\exists\,\mathbf{0}\in V$,使得$\boldsymbol{\alpha}+\mathbf{0}=\boldsymbol{\alpha},\ \forall\,\boldsymbol{\alpha}\in V$.
  (4) V中每个元素对应有**负元素**:$\forall\,\boldsymbol{\alpha}\in V$,$\exists\,\boldsymbol{\beta}\in V$,使得$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\mathbf{0}$.
  (5) $1\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}$.
  (6) V中关于数量乘法$\cdot$满足结合律:$k(l\boldsymbol{\alpha})=(kl)\boldsymbol{\alpha}$.
  (7) 关于$\mathbb{F}$中的加法及V中数量乘法$\cdot$满足分配律:$(k+l)\boldsymbol{\alpha}=k\boldsymbol{\alpha}+l\boldsymbol{\alpha}$.
  (8) 关于V中的加法$+$及数量乘法$\cdot$满足分配律:$k(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=k\boldsymbol{\alpha}+k\boldsymbol{\beta}$.

  那么我们称$(V,+,\cdot)$为数域$\mathbb{F}$上的**线性空间**.

注

- 线性空间中满足上述性质的加法及数量乘法运算统称为**线性运算**,我们有时简称数量乘法运算为**数乘**.
- 线性空间是n维向量空间的一个推广;有时除特殊说明,我们也称线性空间为向量空间.
- 我们常用V代替三元组$(V,+,\cdot)$来表示线性空间,用$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\gamma$来表示$V$中的向量.
- 除特殊说明,我们主要讨论实数域$\mathbb{R}$上的线性空间V.

注

- 线性空间中满足上述性质的加法及数量乘法运算统称为**线性运算**,我们有时简称数量乘法运算为**数乘**.
- 线性空间是n维向量空间的一个推广;有时除特殊说明,我们也称线性空间为向量空间.
- 我们常用V代替三元组$(V,+,\cdot)$来表示线性空间,用$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$来表示$V$中的向量.
- 除特殊说明,我们主要讨论实数域$\mathbb{R}$上的线性空间V.

定义 (向量)

我们称线性空间V中的元素为**向量**.

线性空间实例

例

我们定义次数不超过n的实系数多项式的全体为

$$P_n[x] := \{p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \mid a_n, \cdots, a_1, a_0 \in \mathbb{R}\}.$$

对任意$p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0,\ q(x) = b_n x^n + \cdots + b_1 x + b_0 \in P_n[x]$及任意$\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}(p+q)(x) :=& p(x) + q(x) = (a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0) + (b_n x^n + \cdots + b_1 x + b_0)\\ =&(a_n + b_n)x^n + \cdots + (a_1 + b_1)x + (a_0 + b_0) \in P_n[x],\end{aligned}$$

$$(\lambda p)(x) := \lambda p(x) = \lambda(a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0) = \lambda a_n x^n + \cdots + \lambda a_1 x + \lambda a_0 \in P_n[x].$$

于是$P_n[x]$对多项式的加法及数量乘法运算封闭, 即$P_n[x]$是$\mathbb{R}$上的一个线性空间.

线性空间实例

例

集合

$$\mathbf{M}_{m\times n}(\mathbb{R}) := \left\{ \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} : a_{ij} \in \mathbb{R},\ 1 \le i \le m,\ 1 \le j \le n \right\}$$

容易验证

- $\mathbf{M}_{m\times n}(\mathbb{R}) \neq \varnothing$;
- $\mathbf{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$对应同型矩阵之间的加法和数乘构成$\mathbb{R}$上的线性空间.

例

集合

$$\mathbf{M}_n(\mathbb{R}) := \left\{ \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} : a_{ij} \in \mathbb{R},\ 1 \leq i, j \leq n \right\}$$

对应方阵之间的加法和数乘构成$\mathbb{R}$上的线性空间.

线性空间实例

例

集合

$$\mathbf{M}_n(\mathbb{R}) := \left\{ \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} : a_{ij} \in \mathbb{R}, 1 \le i, j \le n \right\}$$

对应方阵之间的加法和数乘构成$\mathbb{R}$上的线性空间.

例

- 数域$\mathbb{F}$($\mathbb{R}$或$\mathbb{C}$)本身对应自身元素的加法和数的乘法构成一个线性空间.
- 数域$\mathbb{F}$上的n维向量空间$\mathbb{F}^n$对应n维向量的加法和数乘构成一个线性空间.

例

- 我们定义如下函数点态加法及点态数乘运算:

$$+:(f,g)\mapsto f+g,\ (f+g)(x):=f(x)+g(x),\ \forall\, x\in[a,b].$$
$$\times:(\lambda,f)\mapsto \lambda f,\ (\lambda f)(x):=\lambda\times f(x)\triangleq\lambda f(x),\ \forall\, x\in[a,b],\forall\,\lambda\in\mathbb{R}.$$

线性空间实例

例

- 我们定义如下函数点态加法及点态数乘运算:

$$+:(f,g)\mapsto f+g,\ (f+g)(x):=f(x)+g(x),\ \forall\, x\in[a,b].$$
$$\times:(\lambda,f)\mapsto \lambda f,\ (\lambda f)(x):=\lambda\times f(x)\triangleq\lambda f(x),\ \forall\, x\in[a,b],\forall\,\lambda\in\mathbb{R}.$$

- 函数集合

$$C([a,b]):=\{f\mid f\text{在}[a,b]\text{上连续}\}$$

对应上述函数点态加法及点态数乘运算构成$\mathbb{R}$上的线性空间.

- 函数集合

$$R([a,b]):=\{f\mid f\text{在}[a,b]\text{上黎曼可积}\}$$

对应上述函数点态加法及点态数乘运算构成$\mathbb{R}$上的线性空间.

线性空间实例

例

我们定义如下实系数多项式全体为

$$Q_n[x] := \{p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \mid a_n, \cdots, a_1, a_0 \in \mathbb{R},\ a_n \neq 0\}.$$

$Q_n[x]$对多项式的加法及数量乘法运算不封闭:$0p(x) = 0x^n + \cdots + 0x + 0 \notin Q_n[x]$,
因此$Q_n[x]$不构成$\mathbb{R}$上的一个线性空间.

线性空间实例

例

我们定义如下实系数多项式全体为

$$Q_n[x] := \{p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \mid a_n, \cdots, a_1, a_0 \in \mathbb{R},\ a_n \neq 0\}.$$

$Q_n[x]$对多项式的加法及数量乘法运算不封闭:$0p(x) = 0x^n + \cdots + 0x + 0 \notin Q_n[x]$,
因此$Q_n[x]$不构成$\mathbb{R}$上的一个线性空间.

例

设n个有序实数组成的数组的全体为$S^n := \{\mathbf{x} = (x_1, \cdots, x_n)^T \mid x_i \in \mathbb{R}, 1 \leq i \leq n\}$.
我们容易验证对于通常的有序数组的加法及如下定义的数量乘法

$$\odot : (\lambda, \mathbf{x}) \mapsto \lambda \odot \mathbf{x} :\ \lambda \odot \mathbf{x} := \lambda \odot (x_1, \cdots, x_n)^T = (0, \cdots, 0)^T, \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

不构成线性空间:$1 \odot \mathbf{x} = \mathbf{0} \neq \mathbf{x}$,$\forall\, \mathbf{x} \in S^n \backslash \{\mathbf{0}\}$.

注

由上述例子可知:要检验三元组$(V, +, \cdot)$是否是线性空间

- 如果V的加法和数乘运算是线性运算,我们只要检验V对线性运算是否封闭.
- 如果V中所定义的加法和数乘运算不是通常所给的实数域上运算,我们除了要检验V对所定义的运算是否封闭,还要逐一验证线性运算是否满足八条运算规律.

线性空间实例

注

由上述例子可知:要检验三元组$(V,+,\cdot)$是否是线性空间

- 如果V的加法和数乘运算是线性运算,我们只要检验V对线性运算是否封闭.
- 如果V中所定义的加法和数乘运算不是通常所给的实数域上运算,我们除了要检验V对所定义的运算是否封闭,还要逐一验证线性运算是否满足八条运算规律.

例

在正实数集$\mathbb{R}^+$中定义加法及乘数运算如下:

$$\oplus : (a,b) \mapsto a \oplus b,\ a \oplus b := ab \in \mathbb{R}^+,\ \forall\, a,b \in \mathbb{R}^+.$$
$$\circledast : (\lambda,a) \mapsto \lambda \circledast a,\ \lambda \circledast a := a^{\lambda},\ \forall\, a \in \mathbb{R}^+, \forall\, \lambda \in \mathbb{R}.$$

我们可以验证$(\mathbb{R}^+,\oplus,\circledast)$构成一个$\mathbb{R}$上的线性空间.

线性空间的性质

性质 1

线性空间中零元素唯一.

线性空间的性质

性质 1

线性空间中零元素唯一.

如果有两个零元素$\mathbf{0}_1, \mathbf{0}_2$,那么$\mathbf{0}_1 = \mathbf{0}_1 + \mathbf{0}_2 = \mathbf{0}_2$.

线性空间的性质

性质 1

线性空间中零元素唯一.

如果有两个零元素$\mathbf{0}_1, \mathbf{0}_2$,那么$\mathbf{0}_1 = \mathbf{0}_1 + \mathbf{0}_2 = \mathbf{0}_2$.

性质 2

线性空间中任一元素的负元素唯一(我们记$\alpha \in V$的负元素为$-\alpha$).

性质 1

线性空间中零元素唯一.

如果有两个零元素$\mathbf{0}_1, \mathbf{0}_2$,那么$\mathbf{0}_1 = \mathbf{0}_1 + \mathbf{0}_2 = \mathbf{0}_2$.

性质 2

线性空间中任一元素的负元素唯一(我们记$\boldsymbol{\alpha} \in V$的负元素为$-\boldsymbol{\alpha}$).

如果$\boldsymbol{\alpha}$有负元素$\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}$,那么

$$\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta} + \mathbf{0} = \boldsymbol{\beta} + (\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\gamma}) = (\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\alpha}) + \boldsymbol{\gamma} = \mathbf{0} + \boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\gamma}.$$

性质 3

$0\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$,$(-1)\boldsymbol{\alpha} = -\boldsymbol{\alpha}$,$\lambda\mathbf{0} = \mathbf{0}$.

线性空间的性质

性质 3

$0\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$,$(-1)\boldsymbol{\alpha}=-\boldsymbol{\alpha}$,$\lambda\mathbf{0}=\mathbf{0}$.

- $\boldsymbol{\alpha}+0\boldsymbol{\alpha}=1\boldsymbol{\alpha}+0\boldsymbol{\alpha}=(1+0)\boldsymbol{\alpha}=1\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}\xRightarrow{\text{性质1}}0\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$.
- $\boldsymbol{\alpha}+(-1)\boldsymbol{\alpha}=1\boldsymbol{\alpha}+(-1)\boldsymbol{\alpha}=[1+(-1)]\boldsymbol{\alpha}=0\boldsymbol{\alpha}\overset{\text{性质3结论一}}{=\!=\!=\!=}\mathbf{0}$.
- $\lambda\mathbf{0}=\lambda[\boldsymbol{\alpha}+(-1)\boldsymbol{\alpha}]=\lambda\boldsymbol{\alpha}+(-\lambda)\boldsymbol{\alpha}=[\lambda+(-\lambda)]\boldsymbol{\alpha}=0\boldsymbol{\alpha}\overset{\text{性质3结论一}}{=\!=\!=\!=}\mathbf{0}$.

性质 3

$0\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$,$(-1)\boldsymbol{\alpha}=-\boldsymbol{\alpha}$,$\lambda\mathbf{0}=\mathbf{0}$.

- $\boldsymbol{\alpha}+0\boldsymbol{\alpha}=1\boldsymbol{\alpha}+0\boldsymbol{\alpha}=(1+0)\boldsymbol{\alpha}=1\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}\xRightarrow{\text{性质1}}0\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$.
- $\boldsymbol{\alpha}+(-1)\boldsymbol{\alpha}=1\boldsymbol{\alpha}+(-1)\boldsymbol{\alpha}=[1+(-1)]\boldsymbol{\alpha}=0\boldsymbol{\alpha}\xlongequal{\text{性质3结论一}}\mathbf{0}$.
- $\lambda\mathbf{0}=\lambda[\boldsymbol{\alpha}+(-1)\boldsymbol{\alpha}]=\lambda\boldsymbol{\alpha}+(-\lambda)\boldsymbol{\alpha}=[\lambda+(-\lambda)]\boldsymbol{\alpha}=0\boldsymbol{\alpha}\xlongequal{\text{性质3结论一}}\mathbf{0}$.

性质 4

如果$\lambda\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$,那么$\lambda=0$或$\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$.

- 如果$\lambda=0$,那么结论成立.
- 如果$\lambda\neq 0$,那么$\boldsymbol{\alpha}=1\boldsymbol{\alpha}=(\lambda^{-1}\lambda)\boldsymbol{\alpha}=\lambda^{-1}(\lambda\boldsymbol{\alpha})=\lambda^{-1}\mathbf{0}=\mathbf{0}$,即$\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$.

线性空间的子空间

定义 (线性空间的子空间)

设V是实数域$\mathbb{R}$上的线性空间, $\varnothing \neq W \subseteq V$. 如果$W$关于$V$的加法和数乘运算也构成线性空间, 那么我们称$W$是$V$的**一个线性子空间**.

定义 (线性空间的子空间)

设V是实数域$\mathbb{R}$上的线性空间, $\varnothing \neq W \subseteq V$. 如果$W$关于$V$的加法和数乘运算也构成线性空间, 那么我们称$W$是$V$的**一个线性子空间**.

注

- W作为线性空间V的非空子集,W中向量关于V的线性运算自然满足运算规律$(1),(2),(5),(6),(7),(8)$.
- 如果W中向量关于V的加法和数乘是封闭的,并且满足运算规律$(3),(4)$,那么我们可断言W是V的一个子空间.
- 由$0\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}\in W$,$(-1)\boldsymbol{\alpha}=-\boldsymbol{\alpha}\in W$,我们可知$W$中向量关于$V$的运算满足$(3),(4)$.

线性空间的子空间

定义 (线性空间的子空间)

设V是实数域$\mathbb{R}$上的线性空间, $\varnothing \neq W \subseteq V$. 如果$W$关于$V$的加法和数乘运算也构成线性空间, 那么我们称$W$是$V$的**一个线性子空间**.

注

- W作为线性空间V的非空子集,W中向量关于V的线性运算自然满足运算规律$(1),(2),(5),(6),(7),(8)$.
- 如果W中向量关于V的加法和数乘是封闭的,并且满足运算规律$(3),(4)$,那么我们可断言W是V的一个子空间.
- 由$0\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}\in W$,$(-1)\boldsymbol{\alpha}=-\boldsymbol{\alpha}\in W$,我们可知$W$中向量关于$V$的运算满足$(3),(4)$.

定理 (线性空间子空间判定定理)

$\mathbb{R}$上线性空间V的非空子集W为V的线性子空间$\Leftrightarrow W$关于V的加法和数乘封闭.

例

$\mathbb{R}$上线性空间

$$\mathbf{M}_n(\mathbb{R}) := \left\{ \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} : a_{ij} \in \mathbb{R},\ 1 \leq i, j \leq n \right\}$$

中所有对角矩阵所成的集合

$$\mathbf{D}_n(\mathbb{R}) := \left\{ \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{bmatrix} : a_{ii} \in \mathbb{R},\ 1 \leq i \leq n \right\}$$

对应$\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$的线性运算是$\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$的一个线性子空间.

线性空间的维数与基

我们已经在有序n元数组组成的向量空间中详细讨论了

- 向量组的线性相关性;
- 向量组的线性表示;
- 向量组的等价.

这些概念以及有关的性质只涉及线性运算, 因此对于一般的线性空间中的元素仍然适用.

课前导读

我们已经在有序n元数组组成的向量空间中详细讨论了

- 向量组的线性相关性;
- 向量组的线性表示;
- 向量组的等价.

这些概念以及有关的性质只涉及线性运算, 因此对于一般的线性空间中的元素仍然适用.

向量空间的基与维数、向量在基下的坐标、基变换与坐标变换等概念也适用于一般的线性空间.

课前导读

我们已经在有序n元数组组成的向量空间中详细讨论了

- 向量组的线性相关性;
- 向量组的线性表示;
- 向量组的等价.

这些概念以及有关的性质只涉及线性运算, 因此对于一般的线性空间中的元素仍然适用.

向量空间的基与维数、向量在基下的坐标、基变换与坐标变换等概念也适用于一般的线性空间.

本节我们就在一般的线性空间中叙述这些概念.

定义 (线性空间的基与维数)

如果线性空间V中n个向量$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$满足:

- $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$线性无关.
- V中任一向量$\boldsymbol{\alpha}$都可由$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$线性表示.

那么我们称

- $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$为线性空间$V$的**一个基**;
- 正整数n称为V的**维数**,我们记为$\dim(V) = n$.
- 只含一个零元素的线性空间称为**零空间**,零空间没有基,我们规定它的维数为0.
- n维线性空间V也记作V_n.

定义 (由基生成的线性空间)

对于n维线性空间V_n，如果已知$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$是$V_n$的一组基，那么我们称

$$V_n := \{\boldsymbol{\alpha} = x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{\alpha}_n \mid x_1, x_2, \cdots, x_n \in \mathbb{R}\}$$

为由基$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$**生成的线性空间**，有时我们记为$V_n = \mathrm{span}(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)$.

定义 (由基生成的线性空间)

对于n维线性空间V_n, 如果已知$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$是$V_n$的一组基, 那么我们称

$$V_n := \{\boldsymbol{\alpha} = x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{\alpha}_n \mid x_1, x_2, \cdots, x_n \in \mathbb{R}\}$$

为由基$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$**生成的线性空间**, 有时我们记为$V_n = \mathrm{span}(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)$.

如果$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$是$V_n$的一组基, 那么

- 对$\forall\, \boldsymbol{\alpha} \in V_n$,存在唯一一组数$x_1, x_2, \cdots, x_n$,使得$\boldsymbol{\alpha} = x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{\alpha}_n$.
- 任给一组数$x_1, x_2, \cdots, x_n$,总有唯一的元素$\boldsymbol{\alpha} = x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{\alpha}_n \in V_n$.

上述说明了$\boldsymbol{\alpha} \in V_n$与某一组有序数组$x_1, x_2, \cdots, x_n$之间一一对应.

定义 (线性空间向量对应基的坐标)

设$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$是$V_n$的一组基, 如果对于任一元素$\boldsymbol{\alpha} \in V_n$, 有且仅有一组有序数组$x_1, x_2, \cdots, x_n$,使得

$$\boldsymbol{\alpha} = x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{\alpha}_n,$$

那么我们称有序数组$x_1, x_2, \cdots, x_n$为$\boldsymbol{\alpha}$**对应基**$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$**的坐标**, 记作

$$\mathrm{crd}(\boldsymbol{\alpha}) = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T,$$

或者简记为

$$\boldsymbol{\alpha} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T.$$

例

在线性空间$P_n[x]$中,

- 元素

$$p_0 = 1, p_1 = x, p_2 = x^2, \cdots, p_n = x^n$$

  是$P_n[x]$的一组基;

- 任一不超过n次的多项式

$$p = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

  都可表示为

$$p = a_0 p_0 + a_1 p_1 + a_2 p_2 + \cdots + a_n p_n.$$

因此p在这个基下的坐标为$(a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n)^T$.

例

线性空间$\mathbf{M}_2(\mathbb{R}) := \left\{\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} : a_{ij} \in \mathbb{R}, 1 \leq i, j \leq 2\right\}$中，对$\forall\, \mathbf{A} \in \mathbf{M}_2(\mathbb{R})$:

- $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + a_{12}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + a_{21}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + a_{22}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$;
- 矩阵$\mathbf{E}_{11} := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{E}_{12} := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{E}_{21} := \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{E}_{22} := \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$线性无关.

引例

例

线性空间$\mathbf{M}_2(\mathbb{R}) := \left\{ \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} : a_{ij} \in \mathbb{R},\ 1 \le i, j \le 2 \right\}$中，对$\forall\, \mathbf{A} \in \mathbf{M}_2(\mathbb{R})$:

- $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + a_{12} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + a_{21} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + a_{22} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$;
- 矩阵$\mathbf{E}_{11} := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{E}_{12} := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{E}_{21} := \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{E}_{22} := \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$线性无关.

所以

- $\mathbf{E}_{11}, \mathbf{E}_{12}, \mathbf{E}_{21}, \mathbf{E}_{22}$是$\mathbf{M}_2(\mathbb{R})$的一组基.
- 向量$\mathbf{A}$在这个基下的坐标就是$(a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22})^T$.

线性空间中的基变换公式

设$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n, \boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n$是$V_n$中的两组基，且

$$\begin{cases} \boldsymbol{\beta}_1 = p_{11}\boldsymbol{\alpha}_1 + p_{12}\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + p_{1n}\boldsymbol{\alpha}_n, \\ \boldsymbol{\beta}_2 = p_{21}\boldsymbol{\alpha}_1 + p_{22}\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + p_{2n}\boldsymbol{\alpha}_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \boldsymbol{\beta}_n = p_{n1}\boldsymbol{\alpha}_1 + p_{n2}\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + p_{nn}\boldsymbol{\alpha}_n. \end{cases} \tag{Δ_1}$$

线性空间中的基变换公式

设$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n, \boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n$是$V_n$中的两组基, 且

$$\begin{cases} \boldsymbol{\beta}_1 = p_{11}\boldsymbol{\alpha}_1 + p_{12}\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + p_{1n}\boldsymbol{\alpha}_n, \\ \boldsymbol{\beta}_2 = p_{21}\boldsymbol{\alpha}_1 + p_{22}\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + p_{2n}\boldsymbol{\alpha}_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \boldsymbol{\beta}_n = p_{n1}\boldsymbol{\alpha}_1 + p_{n2}\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + p_{nn}\boldsymbol{\alpha}_n. \end{cases} \tag{Δ_1}$$

将上式写成矩阵形式

$$(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n) = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)\mathbf{P}. \tag{Δ_2}$$

线性空间中的基变换公式

设$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n, \boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n$是$V_n$中的两组基，且

$$\begin{cases} \boldsymbol{\beta}_1 = p_{11}\boldsymbol{\alpha}_1 + p_{12}\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + p_{1n}\boldsymbol{\alpha}_n, \\ \boldsymbol{\beta}_2 = p_{21}\boldsymbol{\alpha}_1 + p_{22}\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + p_{2n}\boldsymbol{\alpha}_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \boldsymbol{\beta}_n = p_{n1}\boldsymbol{\alpha}_1 + p_{n2}\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + p_{nn}\boldsymbol{\alpha}_n. \end{cases} \tag{Δ_1}$$

将上式写成矩阵形式

$$(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n) = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)\mathbf{P}. \tag{Δ_2}$$

定义 (线性空间的基变换公式)

我们称式(Δ_1)和式(Δ_2)为从基$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$到基$\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n$的基变换公式.

定义 (线性空间的基变换过渡矩阵)

我们称式(Δ_2)中的矩阵P为从基$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$到基$\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n$的过渡矩阵.

定义 (线性空间的基变换过渡矩阵)

我们称式(Δ_2)中的矩阵$\mathbf{P}$为从基$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$到基$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$的过渡矩阵.

设V_n中的元素$\boldsymbol{\alpha}$满足

- 在基$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$下的坐标为$(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$,
- 在基$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$下的坐标为$(y_1,y_2,\cdots,y_n)^T$.

如果两个基满足基变换公式(Δ_2), 那么

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{bmatrix}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\mathbf{P}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{bmatrix}.$$

线性空间中的坐标变换公式

由于基$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n, \boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n$线性无关, 所以过度矩阵$\mathbf{P}$可逆, 因此

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \mathbf{P} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \text{ 或 } \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \mathbf{P}^{-1} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}. \qquad (\Delta_3)$$

线性空间中的坐标变换公式

由于基$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n, \boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n$线性无关, 所以过度矩阵$\mathbf{P}$可逆, 因此

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \mathbf{P} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \text{或} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \mathbf{P}^{-1} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}. \tag{Δ_3}$$

定义 (线性空间的坐标变换公式)

我们称式(Δ_3):

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \mathbf{P} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \text{或} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \mathbf{P}^{-1} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

为$\boldsymbol{\alpha} \in V$从基$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$到基$\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n$的坐标变换公式.

例

在$P_4[x]$中取两个基$p_0=1, p_1=x, p_2=x^2, p_3=x^3, p_4=x^4$及

$$q_0=1, q_1=1+x, q_2=(1+x)^2, q_3=(1+x)^3, q_4=(1+x)^4.$$

- 将q_0,q_1,q_2,q_3,q_4用p_0,p_1,p_2,p_3,p_4表示,有

$$(q_0,q_1,q_2,q_3,q_4)=(p_0,p_1,p_2,p_3,p_4)\begin{bmatrix}1&1&1&1&1\\0&1&2&3&4\\0&0&1&3&6\\0&0&0&1&4\\0&0&0&0&1\end{bmatrix}.$$

引例

例

- 基q_0, q_1, q_2, q_3, q_4到基p_0, p_1, p_2, p_3, p_4的过渡矩阵为

$$\mathbf{P} := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

- 设任一不超过4次的多项式$p = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4$满足
  - 在基q_0, q_1, q_2, q_3, q_4下的坐标为$\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3, y_4, y_5)^T$;
  - 在基p_0, p_1, p_2, p_3, p_4下的坐标为$\mathbf{x} = (a_0, a_1, a_2, a_3, a_4)^T$.
- 多项式p对应上述两组基有如下坐标变换公式:$\mathbf{x} = \mathbf{P}\mathbf{y}$或$\mathbf{y} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{x}$.

例

- 我们使用矩阵的初等行变换求$\mathbf{P}^{-1}$:

$$
(\mathbf{P}\mid\mathbf{E})=\left[\begin{array}{ccccc|ccccc}
1&1&1&1&1&1&0&0&0&0\\
0&1&2&3&4&0&1&0&0&0\\
0&0&1&3&6&0&0&1&0&0\\
0&0&0&1&4&0&0&0&1&0\\
0&0&0&0&1&0&0&0&0&1
\end{array}\right]
$$

$$
\to\left[\begin{array}{ccccc|ccccc}
1&0&0&0&0&1&-1&1&-1&1\\
0&1&0&0&0&0&1&-2&3&-4\\
0&0&1&0&0&0&0&1&-3&6\\
0&0&0&1&0&0&0&0&1&-4\\
0&0&0&0&1&0&0&0&0&1
\end{array}\right]=(\mathbf{E}\mid\mathbf{P}^{-1}).
$$

例

- 最终,多项式p在基q_0, q_1, q_2, q_3, q_4下的坐标为

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 \\ a_1 - 2a_2 + 3a_3 - 4a_4 \\ a_2 - 3a_3 + 6a_4 \\ a_3 - 4a_4 \\ a_4 \end{bmatrix}.$$

线性变换

我们回顾一下映射的概念:

我们回顾一下映射的概念:

定义 (映射)

设有两个非空集合A, B. 如果对于A中任一元素α, 按照某个规则, 总有B中唯一一个确定的元素β和它对应, 那么我们称这个对应规则称为从集合A到集合B的**映射**, 记作

$$T : A \to B, \quad T(\alpha) = \beta \in B, \forall\, a \in A.$$

其中

- β称为α在映射T下的**像(汇)**;
- α称为β在映射T下的**原像(源)**,A称为映射T的**源集**;
- 像的全体所构成的集合称为**像集**,记作$T(A) := \{\beta = T(\alpha) \mid \alpha \in A\} \subset B$.

我们回顾一下映射的概念:

定义 (映射)

设有两个非空集合A, B. 如果对于A中任一元素α, 按照某个规则, 总有B中唯一一个确定的元素β和它对应, 那么我们称这个对应规则称为从集合A到集合B的**映射**, 记作

$$T : A \to B, \quad T(\alpha) = \beta \in B, \forall\, a \in A.$$

其中

- β称为α在映射T下的**像(汇)**;
- α称为β在映射T下的**原像(源)**,A称为映射T的**源集**;
- 像的全体所构成的集合称为**像集**,记作$T(A) := \{\beta = T(\alpha) \mid \alpha \in A\} \subset B$.

本节我们学习线性空间到其自身的映射, 即线性变换.

线性变换

定义 (线性空间之间的线性变换)

设V, U为数域$\mathbb{F}$上的线性空间. 如果映射$\mathcal{T}: V \to U$满足:

(1) $\mathcal{T}(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}) = \mathcal{T}(\boldsymbol{\alpha}) + \mathcal{T}(\boldsymbol{\beta}), \quad \forall\, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in V$;

(2) $\mathcal{T}(\lambda\boldsymbol{\alpha}) = \lambda\mathcal{T}(\boldsymbol{\alpha}), \forall\, \boldsymbol{\alpha} \in V, \forall\, \lambda \in \mathbb{F}$.

那么我们称$\mathcal{T}$为从V到U的**线性映射**, 或者称其为**线性变换**.

定义 (线性空间之间的线性变换)

设V, U为数域$\mathbb{F}$上的线性空间. 如果映射$\mathcal{T}: V \to U$满足:

(1) $\mathcal{T}(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}) = \mathcal{T}(\boldsymbol{\alpha}) + \mathcal{T}(\boldsymbol{\beta}), \quad \forall\, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in V$;

(2) $\mathcal{T}(\lambda\boldsymbol{\alpha}) = \lambda\mathcal{T}(\boldsymbol{\alpha}), \forall\, \boldsymbol{\alpha} \in V, \forall\, \lambda \in \mathbb{F}$.

那么我们称$\mathcal{T}$为从V到U的**线性映射**, 或者称其为**线性变换**.

定义 (线性空间之间的线性变换)

设V为$\mathbb{R}$上的线性空间,对任意的$\boldsymbol{\alpha} \in V$,我们定义:

(1) V上的**恒等变换**:$\mathcal{I}: V \to V, \quad \mathcal{I}(\boldsymbol{\alpha}) = \boldsymbol{\alpha}$.

(2) V上的**零变换**:$\mathcal{O}: V \to V, \quad \mathcal{O}(\boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{0}, \mathbf{0} \in V$.

(3) V上的**数乘变换**:$\mathcal{T}: V \to V, \quad \mathcal{T}(\boldsymbol{\alpha}) = k\boldsymbol{\alpha}, \; k \in \mathbb{R}$.

例

定义映射$\mathcal{T}$如下:

$$\mathcal{T}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m,\quad \begin{bmatrix} x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}\mapsto\begin{bmatrix} y_1\\ y_2\\ \vdots\\ y_m\end{bmatrix},$$

其中

$$\begin{bmatrix} y_1\\ y_2\\ \vdots\\ y_m\end{bmatrix}=\mathcal{T}\begin{bmatrix} x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}.$$

我们可以验证$\mathcal{T}$确定了一个从$\mathbb{R}^n$到$\mathbb{R}^m$的线性映射.

线性变换引例

例

设n阶矩阵

$$\mathbf{A} = (a_{ij}) = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n), \quad \boldsymbol{\alpha}_i = (a_{1i}, a_{2i}, \cdots, a_{ni})^T, \quad 1 \leq i \leq n.$$

我们定义$\mathbb{R}^n$中的映射$\mathcal{T}$如下:

$$\mathcal{T}\mathbf{x} := \mathbf{A}\mathbf{x}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.$$

注意到对任意的$\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^n$及任意$\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}(\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}) &= \mathbf{A}(\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}) = \mathbf{A}\boldsymbol{\alpha} + \mathbf{A}\boldsymbol{\beta} = \mathcal{T}(\boldsymbol{\alpha}) + \mathcal{T}(\boldsymbol{\beta}), \\
\mathcal{T}(\lambda\boldsymbol{\alpha}) &= \mathbf{A}(\lambda\boldsymbol{\alpha}) = \lambda\mathbf{A}\boldsymbol{\alpha} = \lambda\mathcal{T}(\boldsymbol{\alpha}),
\end{aligned}$$

因此$\mathcal{T}$为$\mathbb{R}^n$上的线性变换.

线性变换引例

例

在$\mathbb{R}^2$中定义映射$\mathcal{T}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$如下:

$$\mathcal{T}\left(\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\right):=\begin{bmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}.$$

注意到对任意的$\boldsymbol{\alpha}=(x_1,y_1),\boldsymbol{\beta}=(x_2,y_2)\in\mathbb{R}^2$及任意$\lambda\in\mathbb{R}$,

$$\mathcal{T}(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=\begin{bmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\y_1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_2\\y_2\end{bmatrix}=\mathcal{T}(\boldsymbol{\alpha})+\mathcal{T}(\boldsymbol{\beta}),$$

$$\mathcal{T}(\lambda\boldsymbol{\alpha})=\begin{bmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda x_1\\ \lambda y_1\end{bmatrix}=\lambda\begin{bmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\y_1\end{bmatrix}=\lambda\mathcal{T}(\boldsymbol{\alpha}),$$

因此$\mathcal{T}$为$\mathbb{R}^2$上的线性变换. 这个线性变换的几何意义是: $\mathcal{T}$将xOy平面上任一向量绕原点按逆时针方向旋转φ角.

例

在线性空间$P_3[x]$中任意取

$$p = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0, \quad q = b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0.$$

那么

(1) 对于微分运算D:

$$D(p+q) = Dp + Dq, \quad D(\lambda p) = \lambda D(p), \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{R},$$

因此D是一个$P_3[x]$上的线性变换.

(2) 定义$\mathcal{T}(p) = 1$,我们可以验证$\mathcal{T}$是一个变换但不是线性变换:

$$\mathcal{T}(p+q) = 1 \neq 2 = 1 + 1 = \mathcal{T}(p) + \mathcal{T}(q).$$

性质 1

$\mathcal{T}\mathbf{0} = \mathbf{0}, \quad \mathcal{T}(-\boldsymbol{\alpha}) = -\mathcal{T}\boldsymbol{\alpha};$

性质 1

$\mathcal{T}\mathbf{0} = \mathbf{0}, \quad \mathcal{T}(-\boldsymbol{\alpha}) = -\mathcal{T}\boldsymbol{\alpha};$

性质 2

若$\boldsymbol{\beta} = k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_m\boldsymbol{\alpha}_m$, 则$\mathcal{T}\boldsymbol{\beta} = k_1\mathcal{T}\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\mathcal{T}\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_m\mathcal{T}\boldsymbol{\alpha}_m$.

线性空间的性质

性质 1

$\mathcal{T}\mathbf{0} = \mathbf{0}, \quad \mathcal{T}(-\boldsymbol{\alpha}) = -\mathcal{T}\boldsymbol{\alpha};$

性质 2

若$\boldsymbol{\beta} = k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_m\boldsymbol{\alpha}_m$, 则$\mathcal{T}\boldsymbol{\beta} = k_1\mathcal{T}\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\mathcal{T}\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_m\mathcal{T}\boldsymbol{\alpha}_m$.

性质 3

若$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$线性相关, 则$\mathcal{T}\boldsymbol{\alpha}_1, \mathcal{T}\boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \mathcal{T}\boldsymbol{\alpha}_m$也线性相关.

线性空间的性质

性质 1

$\mathcal{T}\mathbf{0} = \mathbf{0}, \quad \mathcal{T}(-\boldsymbol{\alpha}) = -\mathcal{T}\boldsymbol{\alpha};$

性质 2

若$\boldsymbol{\beta} = k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_m\boldsymbol{\alpha}_m$, 则$\mathcal{T}\boldsymbol{\beta} = k_1\mathcal{T}\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\mathcal{T}\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_m\mathcal{T}\boldsymbol{\alpha}_m$.

性质 3

若$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$线性相关, 则$\mathcal{T}\boldsymbol{\alpha}_1, \mathcal{T}\boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \mathcal{T}\boldsymbol{\alpha}_m$也线性相关.

注

$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$线性无关不能保证$\mathcal{T}\boldsymbol{\alpha}_1, \mathcal{T}\boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \mathcal{T}\boldsymbol{\alpha}_m$也线性无关:考虑零变换

$$\mathcal{O}\boldsymbol{\alpha}_i = \mathbf{0}, \quad 1 \leq i \leq m$$

于是尽管$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$线性无关, 但是$\mathcal{T}\boldsymbol{\alpha}_1, \mathcal{T}\boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \mathcal{T}\boldsymbol{\alpha}_m$线性相关.

性质 4

线性变换$\mathcal{T}$的像集$\mathcal{T}(V)$是一个线性空间,我们称其为线性变换$\mathcal{T}$的**像空间**,记作$\mathrm{Ran}(\mathcal{T})$.

性质 4

线性变换$\mathcal{T}$的像集$\mathcal{T}(V)$是一个线性空间,我们称其为线性变换$\mathcal{T}$的**像空间**,记作$\mathrm{Ran}(\mathcal{T})$.

设$\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2 \in \mathcal{T}(V)$, 那么存在$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2 \in V$, 使得$\boldsymbol{\beta}_1 = \mathcal{T}(\boldsymbol{\alpha}_1), \boldsymbol{\beta}_2 = \mathcal{T}(\boldsymbol{\alpha}_2)$.

- $\boldsymbol{\beta}_1 + \boldsymbol{\beta}_2 = \mathcal{T}(\boldsymbol{\alpha}_1) + \mathcal{T}(\boldsymbol{\alpha}_2) = \mathcal{T}(\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2) \in \mathcal{T}(V)$;
- $\lambda\boldsymbol{\beta}_1 = \lambda\mathcal{T}(\boldsymbol{\alpha}_1) = \mathcal{T}(\lambda\boldsymbol{\alpha}_1) \in \mathcal{T}(V), \lambda \in \mathbb{F}$.

性质 4

线性变换$\mathcal{T}$的像集$\mathcal{T}(V)$是一个线性空间,我们称其为线性变换$\mathcal{T}$的**像空间**,记作$\mathrm{Ran}(\mathcal{T})$.

设$\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2 \in \mathcal{T}(V)$, 那么存在$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2 \in V$, 使得$\boldsymbol{\beta}_1 = \mathcal{T}(\boldsymbol{\alpha}_1), \boldsymbol{\beta}_2 = \mathcal{T}(\boldsymbol{\alpha}_2)$.

- $\boldsymbol{\beta}_1 + \boldsymbol{\beta}_2 = \mathcal{T}(\boldsymbol{\alpha}_1) + \mathcal{T}(\boldsymbol{\alpha}_2) = \mathcal{T}(\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2) \in \mathcal{T}(V)$;
- $\lambda\boldsymbol{\beta}_1 = \lambda\mathcal{T}(\boldsymbol{\alpha}_1) = \mathcal{T}(\lambda\boldsymbol{\alpha}_1) \in \mathcal{T}(V), \lambda \in \mathbb{F}$.

因此$\mathcal{T}(V)$对V中的线性运算封闭, 它是一个线性子空间.

线性空间的性质

性质 5

集合$\{\boldsymbol{\alpha} \mid \boldsymbol{\alpha} \in V : \mathcal{T}\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}\}$是$V$的一个线性空间，我们称其为线性变换$\mathcal{T}$的**核**，记作$\mathrm{Ker}(\mathcal{T})$.

性质 5

集合$\{\boldsymbol{\alpha} \mid \boldsymbol{\alpha} \in V : \mathcal{T}\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}\}$是$V$的一个线性空间，我们称其为线性变换$\mathcal{T}$的核，记作$\mathrm{Ker}(\mathcal{T})$.

$\mathbf{0} \in \mathrm{Ker}(\mathcal{T}), \mathrm{Ker}(\mathcal{T}) \subset V$且对$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2 \in \mathrm{Ker}(\mathcal{T})$,$\mathcal{T}(\boldsymbol{\alpha}_1) = \mathbf{0}, \mathcal{T}(\boldsymbol{\alpha}_2) = \mathbf{0}$，于是

- $\mathcal{T}(\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2) = \mathcal{T}(\boldsymbol{\alpha}_1) + \mathcal{T}(\boldsymbol{\alpha}_2) = \mathbf{0} \in \mathrm{Ker}(\mathcal{T})$;
- $\mathcal{T}(\lambda\boldsymbol{\alpha}_1) = \lambda\mathcal{T}(\boldsymbol{\alpha}_1) = \mathbf{0} \in \mathrm{Ker}(\mathcal{T}), \lambda \in \mathbb{F}$.

性质 5

集合$\{\boldsymbol{\alpha} \mid \boldsymbol{\alpha} \in V : \mathcal{T}\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}\}$是$V$的一个线性空间，我们称其为线性变换$\mathcal{T}$的**核**，记作$\operatorname{Ker}(\mathcal{T})$.

$\mathbf{0} \in \operatorname{Ker}(\mathcal{T}), \operatorname{Ker}(\mathcal{T}) \subset V$且对$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2 \in \operatorname{Ker}(\mathcal{T})$,$\mathcal{T}(\boldsymbol{\alpha}_1) = \mathbf{0}, \mathcal{T}(\boldsymbol{\alpha}_2) = \mathbf{0}$，于是

- $\mathcal{T}(\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2) = \mathcal{T}(\boldsymbol{\alpha}_1) + \mathcal{T}(\boldsymbol{\alpha}_2) = \mathbf{0} \in \operatorname{Ker}(\mathcal{T})$;
- $\mathcal{T}(\lambda\boldsymbol{\alpha}_1) = \lambda\mathcal{T}(\boldsymbol{\alpha}_1) = \mathbf{0} \in \operatorname{Ker}(\mathcal{T}), \lambda \in \mathbb{F}$.

因此$\operatorname{Ker}(\mathcal{T})$对$V$中的线性运算封闭，它是一个线性子空间.

有限维线性空间上线性变换的矩阵表示

给定线性空间V_n的一组基$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$它的一个线性变换$\mathcal{T}$, 对任意$\boldsymbol{\alpha} \in V_n$

$$\boldsymbol{\alpha} = k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_n\boldsymbol{\alpha}_n \Rightarrow \mathcal{T}(\boldsymbol{\alpha}) = k_1\mathcal{T}(\boldsymbol{\alpha}_1) + k_2\mathcal{T}(\boldsymbol{\alpha}_2) + \cdots + k_n\mathcal{T}(\boldsymbol{\alpha}_n).$$

给定线性空间V_n的一组基$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$它的一个线性变换$\mathcal{T}$, 对任意$\boldsymbol{\alpha} \in V_n$

$$\boldsymbol{\alpha} = k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_n\boldsymbol{\alpha}_n \Rightarrow \mathcal{T}(\boldsymbol{\alpha}) = k_1\mathcal{T}(\boldsymbol{\alpha}_1) + k_2\mathcal{T}(\boldsymbol{\alpha}_2) + \cdots + k_n\mathcal{T}(\boldsymbol{\alpha}_n).$$

这说明

- $\boldsymbol{\alpha}$在$\mathcal{T}$下的像由$\mathcal{T}(\boldsymbol{\alpha}_1), \mathcal{T}(\boldsymbol{\alpha}_2), \cdots, \mathcal{T}(\boldsymbol{\alpha}_n)$唯一确定*.
- $\mathcal{T}(\boldsymbol{\alpha}_i) \in V_n$也可以由基$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$来线性表示.

给定线性空间V_n的一组基$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$它的一个线性变换$\mathcal{T}$, 对任意$\boldsymbol{\alpha} \in V_n$

$$\boldsymbol{\alpha} = k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_n\boldsymbol{\alpha}_n \Rightarrow \mathcal{T}(\boldsymbol{\alpha}) = k_1\mathcal{T}(\boldsymbol{\alpha}_1) + k_2\mathcal{T}(\boldsymbol{\alpha}_2) + \cdots + k_n\mathcal{T}(\boldsymbol{\alpha}_n).$$

这说明

- $\boldsymbol{\alpha}$在$\mathcal{T}$下的像由$\mathcal{T}(\boldsymbol{\alpha}_1), \mathcal{T}(\boldsymbol{\alpha}_2), \cdots, \mathcal{T}(\boldsymbol{\alpha}_n)$唯一确定*.
- $\mathcal{T}(\boldsymbol{\alpha}_i) \in V_n$也可以由基$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$来线性表示.

于是

$$\begin{cases} \mathcal{T}(\boldsymbol{\alpha}_1) = a_{11}\boldsymbol{\alpha}_1 + a_{12}\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + a_{1n}\boldsymbol{\alpha}_n, \\ \mathcal{T}(\boldsymbol{\alpha}_2) = a_{21}\boldsymbol{\alpha}_1 + a_{22}\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + a_{2n}\boldsymbol{\alpha}_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \mathcal{T}(\boldsymbol{\alpha}_n) = a_{n1}\boldsymbol{\alpha}_1 + a_{n2}\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + a_{nn}\boldsymbol{\alpha}_n. \end{cases}$$

- 上述表达式具有如下的矩阵表示:

$$\mathcal{T}(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n) = \mathcal{T}(\boldsymbol{\alpha}_1), \mathcal{T}(\boldsymbol{\alpha}_2), \cdots, \mathcal{T}(\boldsymbol{\alpha}_n) = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)\mathbf{A},$$

其中

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

我们称矩阵$\mathbf{A}$为线性变换$\mathcal{T}$**在基**$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$**下的矩阵**.

由此可见，若给定线性空间V_n的一个基，则V_n中任一线性变换$\mathcal{T}$都对应一个n阶方阵$\mathbf{A}$，且方阵$\mathbf{A}$由基在线性变换$\mathcal{T}$下的像唯一确定.

有限维线性空间上线性变换的矩阵表示

- 如果记V_n中的任意向量记为$\boldsymbol{\alpha} = \sum_{i=1}^{n} x_i \boldsymbol{\alpha}_i$,那么

$$\begin{aligned}\mathcal{T}(\boldsymbol{\alpha}) =& \mathcal{T}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \boldsymbol{\alpha}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathcal{T}(\boldsymbol{\alpha}_i) \\ =& (\mathcal{T}(\boldsymbol{\alpha}_1), \mathcal{T}(\boldsymbol{\alpha}_2), \cdots, \mathcal{T}(\boldsymbol{\alpha}_n)) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)\mathbf{A} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},\end{aligned}$$

即

$$\mathcal{T}\left((\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}\right) = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)\mathbf{A} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}. \qquad (\Delta^*)$$

有限维线性空间上线性变换的矩阵表示

- 式(Δ^*)唯一地确定了一个以$\mathbf{A}$为矩阵的线性变换$\mathcal{T}$. 那么抽象的线性变换与具体的矩阵之间就有了一一对应的关系, 从而线性变换的运算就可转化为矩阵的运算.

- 式(Δ^*)唯一地确定了一个以$\mathbf{A}$为矩阵的线性变换$\mathcal{T}$. 那么抽象的线性变换与具体的矩阵之间就有了一一对应的关系, 从而线性变换的运算就可转化为矩阵的运算.

定理

设线性变换$\mathcal{T}$在基$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$下的矩阵是$\mathbf{A}$, 向量$\boldsymbol{\alpha}$与$\mathcal{T}(\boldsymbol{\alpha})$在基$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$下的坐标分别是$(x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$和$(y_1, y_2, \cdots, y_n)^T$, 那么

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \text{或} \quad \mathcal{T}(\boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{A}\boldsymbol{\alpha}.$$

例

在线性空间$P_3[x]$中取一组基$p_1=1,\ p_2=x,\ p_3=x^2,\ p_4=x^3$. 那么对于微分运算$D$:

$$\begin{cases} Dp_1=0=0p_1+0p_2+0p_3+0p_4, \\ Dp_2=1=1p_1+0p_2+0p_3+0p_4, \\ Dp_3=2x=0p_1+2p_2+0p_3+0p_4, \\ Dp_4=3x^2=0p_1+0p_2+3p_3+0p_4. \end{cases}$$

所以D在这组基下的矩阵为$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&3\\0&0&0&0\end{bmatrix}$.

引例

例

在$\mathbb{R}^3$中分别取两组基

$$\boldsymbol{e}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\boldsymbol{e}_2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\boldsymbol{e}_3=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\text{ 和 }\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}.$$

我们定义$\mathbb{R}^3$上的线性变换$\mathcal{T}$如下:

$$\mathcal{T}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}:=\begin{bmatrix}2x_1-x_2\\x_2+x_3\\2x_1\end{bmatrix}.$$

引例

例

注意到

$$\mathcal{T}\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\0\\2\end{bmatrix}=2\boldsymbol{e}_1+0\boldsymbol{e}_2+2\boldsymbol{e}_3=(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)\begin{bmatrix}2\\0\\2\end{bmatrix},$$

$$\mathcal{T}\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}=-1\boldsymbol{e}_1+1\boldsymbol{e}_2+0\boldsymbol{e}_3=(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix},$$

$$\mathcal{T}\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}=0\boldsymbol{e}_1+1\boldsymbol{e}_2+0\boldsymbol{e}_3=(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}.$$

例

因此

$$\mathcal{T}(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3) = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3) \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

即$\mathcal{T}$在基$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$下的矩阵为

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

例

另一方面,

$$\mathcal{T}\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\0\\2\end{bmatrix}=2\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{bmatrix}2\\-2\\2\end{bmatrix},$$

$$\mathcal{T}\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}=0\boldsymbol{\alpha}_1-1\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{bmatrix}0\\-1\\2\end{bmatrix},$$

$$\mathcal{T}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\2\\2\end{bmatrix}=-1\boldsymbol{\alpha}_1+0\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{bmatrix}-1\\0\\2\end{bmatrix}.$$

例

因此

$$\mathcal{T}(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3) = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3) \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix},$$

即$\mathcal{T}$在基$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$下的矩阵为

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

该例子说明了同一个线性变换在不同的基下有不同的矩阵.

有限维线性空间上线性变换的矩阵表示之间关系

定理

设$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$及$\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n$是线性空间$V$的两组基.

- 这两组基之间过渡矩阵$\mathbf{P} := \mathbf{P}_{n\times n}$满足$(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n) = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)\mathbf{P}$.
- V中的线性变换$\mathcal{T}$在这两个基下的矩阵依次为$\mathbf{A}$和$\mathbf{B}$.

那么$\mathbf{B} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$.

定理

设$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$及$\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n$是线性空间$V$的两组基.

- 这两组基之间过渡矩阵$\mathbf{P} := \mathbf{P}_{n\times n}$满足$(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n) = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)\mathbf{P}$.
- V中的线性变换$\mathcal{T}$在这两个基下的矩阵依次为$\mathbf{A}$和$\mathbf{B}$.

那么$\mathbf{B} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$.

注意到$(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n) = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)\mathbf{P}$且$\mathbf{P}$可逆,而

$$\mathcal{T}(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n) = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)\mathbf{A},\ \mathcal{T}(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n) = (\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n)\mathbf{B}.$$

定理

设$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$及$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$是线性空间$V$的两组基.

- 这两组基之间过渡矩阵$\mathbf{P}:=\mathbf{P}_{n\times n}$满足$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\mathbf{P}$.
- V中的线性变换$\mathcal{T}$在这两个基下的矩阵依次为$\mathbf{A}$和$\mathbf{B}$.

那么$\mathbf{B}=\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$.

注意到$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\mathbf{P}$且$\mathbf{P}$可逆,而

$$\mathcal{T}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\mathbf{A},\ \mathcal{T}(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)\mathbf{B}.$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow\ (\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)\mathbf{B}=&\mathcal{T}(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)\\=&\mathcal{T}[(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\mathbf{P}]=[\mathcal{T}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)]\mathbf{P}\\=&(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\mathbf{A}\mathbf{P}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}.\end{aligned}$$

注

上述定理表明矩阵$\mathbf{B}$与$\mathbf{A}$相似,且两个基之间的过渡矩阵$\mathbf{P}$就是相似变换矩阵.

注

上述定理表明矩阵$\mathbf{B}$与$\mathbf{A}$相似,且两个基之间的过渡矩阵$\mathbf{P}$就是相似变换矩阵.

定义 (线性变换的秩)

我们称有限维线性空间V_n上线性变换的像空间$T(V_n)$的维数为**线性变换**T**的秩**.

注

上述定理表明矩阵$\mathbf{B}$与$\mathbf{A}$相似,且两个基之间的过渡矩阵$\mathbf{P}$就是相似变换矩阵.

定义 (线性变换的秩)

我们称有限维线性空间V_n上线性变换的像空间$\mathcal{T}(V_n)$的维数为**线性变换$\mathcal{T}$的秩**.

注

- 若$\mathbf{A}$是$\mathcal{T}$的矩阵,则$\mathcal{T}$的秩就是$R(\mathbf{A})$.
- 若$\mathcal{T}$的秩为r,则$\mathcal{T}$的核空间$\mathrm{Ker}(\mathcal{T})$的维数为$n-r$.

例 1

设$\mathbb{R}^3$上线性变换$\mathcal{T}$在基$\boldsymbol{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$下的矩阵为

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix},$$

求$\mathcal{T}$在基$\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$下的矩阵.

The End