习题 1 请使用微分中值定理证明以下不等式:

(1) $1-\dfrac{x^2}{2!}<\cos x,\ x\neq 0$; (2) $x-\dfrac{x^3}{3!}<\sin x,\ x>0$;

(3) $\cos x<1-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!},\ x\neq 0$; (4) $\sin x<x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!},\ x>0$.

习题 2 请证明如下的结论:

(1) 对$x\in\mathbb{R}$证明不等式$e^x\geq 1+x$并使用该结果验证均值不等式;

(2) 对$x\in\mathbb{R}$及$y>0$, 证明不等式$xy\leq e^x+y(\ln y-1)$并且等号成立的充要条件$y=e^x$.

习题 3* 请证明如下的结论:

(1) 设函数f在$(0,+\infty)$上连续可微且$f(0)=1$. 如果对任意$x\geq 0$有$|f(x)|\leq e^{-x}$, 请验证存在一个$x_0>0$使得$f'(x_0)=-e^{-x_0}$;

(2) 设函数f在$(1,+\infty)$上连续可微且$f(1)=1$. 如果对任意$x\geq 1$有$|f(x)|\leq\dfrac{1}{x}$, 请验证存在一个$x_0>0$使得$f'(x_0)=-\dfrac{1}{x_0^2}$.

习题 4 请使用微分中值定理证明以下不等式:

$$\left(1+\frac{x}{p}\right)^p<\left(1+\frac{x}{q}\right)^q,\quad x>0,\quad 0<p<q.$$

习题 5 请建立以下不等式:

(1) $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)\arctan x>1,\quad x>0$; (2) $2\tan x-\sinh x>0,\quad 0<x<\dfrac{\pi}{2}$;

(3) $\ln x<\dfrac{x}{e},\quad x>0,\ x\neq 0$; (4) $\dfrac{x\ln x}{x^2-1}<\dfrac{1}{2},\quad x>0,\ x\neq 0$.

习题 6 请比较以下数字之间的大小:

(1) e^π与π^e; (2) $2^{\sqrt{2}}$与e; (3) $\ln 8$与2.

习题 7* 对参数$\alpha>1$及$0\leq x\leq 1$, 请证明: $\dfrac{1}{2^{\alpha-1}}\leq x^\alpha+(1-x)^\alpha\leq 1$.

习题 8* 对参数$0<\alpha<1$及$x,y>0$, 请证明: $(x+y)^\alpha<x^\alpha+y^\alpha$.