习题 1 请叙述三元函数$u=f(x,y,z)$在有界闭区域Ω上的三重积分的定义, 其中你需要详细描述四个主要步骤.

习题 2 请计算下列累次积分:

(1) $\displaystyle\int_0^2\int_0^{z^2}\int_0^{y-z}(2x-y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$

(2) $\displaystyle\int_0^1\int_x^{2x}\int_0^{y}2xyz\,\mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}x.$

(3) $\displaystyle\int_1^2\int_0^{2z}\int_0^{\ln x}xe^{-y}\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z\mathrm{d}z.$

(4) $\displaystyle\int_0^1\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-z^2}}\frac{z}{y+1}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}z\mathrm{d}y.$

(5) $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\int_0^{y}\int_0^{x}\cos(x+y+z)\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$

(6) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{\pi}}\int_0^{x}\int_0^{xz}x^2\sin y\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z\mathrm{d}x.$

习题 3 请计算下列三重积分:

(1) $\displaystyle\iiint\limits_{\Omega} y\,\mathrm{d}V$, $\Omega=\{(x,y,z)\mid 0\le x\le 3, 0\le y\le x, x-y\le z\le x+y\}$.

(2) $\displaystyle\iiint\limits_{\Omega} e^{z/y}\,\mathrm{d}V$, $\Omega=\{(x,y,z)\mid 0\le x\le 1, y\le x\le 1, 0\le z\le xy\}$.

(3) $\displaystyle\iiint\limits_{\Omega} \frac{z}{x^2+z^2}\,\mathrm{d}V$, $\Omega=\{(x,y,z)\mid 1\le y\le 4, y\le z\le 4, 0\le x\le z\}$.

(4) $\displaystyle\iiint\limits_{\Omega} \sin y\,\mathrm{d}V$, 其中$\Omega$在平面$z=x$下方, 在以点$(0,0,0),(\pi,0,0),(0,\pi,0)$为顶点的三角形区域上方.

(5) $\displaystyle\iiint\limits_{\Omega} x\,\mathrm{d}V$, 其中$\Omega$为曲面$x=4y^2+4z^2$及平面$x=4$围成的有界闭区域.

(6) $\displaystyle\iiint\limits_{\Omega} z\,\mathrm{d}V$, 其中$\Omega$为柱体$y^2+z^2=9$及平面$x=0, y=3x, z=0$在第一卦限围成的有界闭区域.

习题 4 按照下列给定的有界闭区域Ω的形式, 将三重积分$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}V$化为对应六种累次积分的形式:

(1) $y=4-x^2-4z^2$, $y=0$.

(2) $y^2+z^2=9$, $x=-2$, $x=2$.

(3) $y=x^2$, $z=0$, $y+2z=4$.

(4) $x=2, y=2, z=0, x+y-2z=2$.

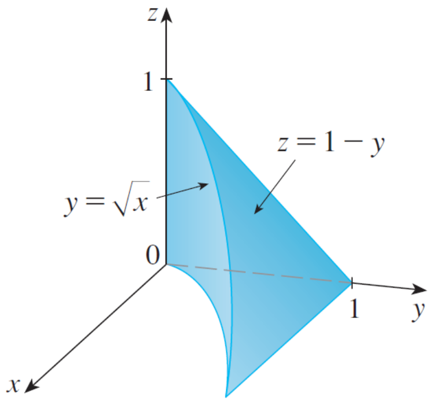
习题 5 已知下列累次积分的顺序, 请写出其他五种累次积分:

(1) $\int_0^1\int_y^1\int_0^y f(x,y,z)\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

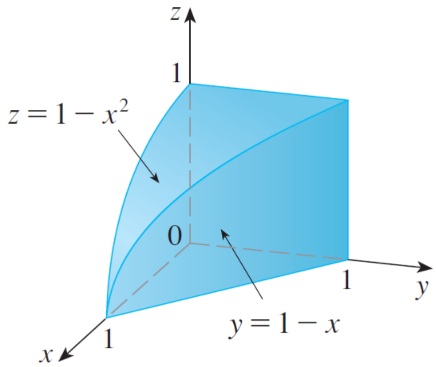
(2) $\int_0^1\int_y^1\int_0^z f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}z\mathrm{d}y$.

习题 6 如图所示，已知给定累次积分的顺序，请写出其他五种累次积分:

(1) $\displaystyle\int_0^1\int_{\sqrt{x}}^1\int_0^{1-y} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}x.$ (2) $\displaystyle\int_0^1\int_0^{1-x^2}\int_0^{1-x} f(x,y,z)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z\mathrm{d}x.$



(1)



(2)

习题 7 已知柱面坐标系中点的坐标, 写出它们对应空间直角坐标系的坐标:

(1) $(4, \pi/3, -2)$. (2) $(2, -\pi/2, 1)$. (3) $(\sqrt{2}, 3\pi/4, 2)$. (4) $(1, 1, 1)$.

习题 8 已知空间直角坐标系中点的坐标, 写出它们对应柱面坐标系的坐标:

(1) $(-1, 1, 1)$. (2) $(-2, 2\sqrt{3}, 3)$. (3) $(2\sqrt{3}, 2, -1)$. (4) $(4, -3, 2)$.

习题 9 写出下列曲面在柱面坐标系中的方程:

(1) $x^2 - x + y^2 + z^2 = 1$. (2) $z = x^2 - y^2$.

(3) $3x + 2y + z = 6$. (4) $-x^2 - y^2 + z^2 = 1$.

习题 10 将下列累次积分转化为柱面坐标系中的累次积分并进行计算:

(1) $\displaystyle\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{2} xz\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

(2) $\displaystyle\int_{-3}^{3}\int_{0}^{\sqrt{9-x^2}}\int_{0}^{9-x^2-y^2} \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}x$.

习题 11 在柱面坐标系中计算下列三重积分:

(1) $\iiint\limits_{\Omega} \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}V$, 其中$\Omega$为柱面$x^2+y^2=16$及平面$z=-5, z=4$所围成的有界闭区域.

(2) $\iiint\limits_{\Omega} (x+y+z)\,\mathrm{d}V$, 其中$\Omega$为曲面$z=4-x^2-y^2$在第一卦限所围成的有界闭区域.

(3) $\iiint\limits_{\Omega} x\,\mathrm{d}V$, 其中$\Omega$为柱面$x^2+y^2=4, x^2+y^2=9$及平面$z=0, z=x+y+5$所围成的有界闭区域.

(4) $\iiint\limits_{\Omega} x^2\,\mathrm{d}V$, 其中$\Omega$为柱面$x^2+y^2=1$, 锥面$z^2=4x^2+4y^2$及平面$z=0$上方所围成的有界闭区域.

习题 12 我们可以使用球面坐标系计算三重积分$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}V$.

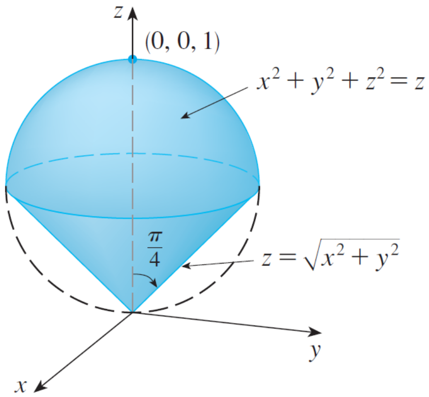
设有界闭区域Ω满足 $\Omega=\{(\rho,\theta,\varphi)\mid a\le\rho\le b,\alpha\le\theta\le\beta,c\le\varphi\le d\}$, 那么根据球坐标变换公式(这里我们只使用球坐标的方式去表示直角坐标系中的点)

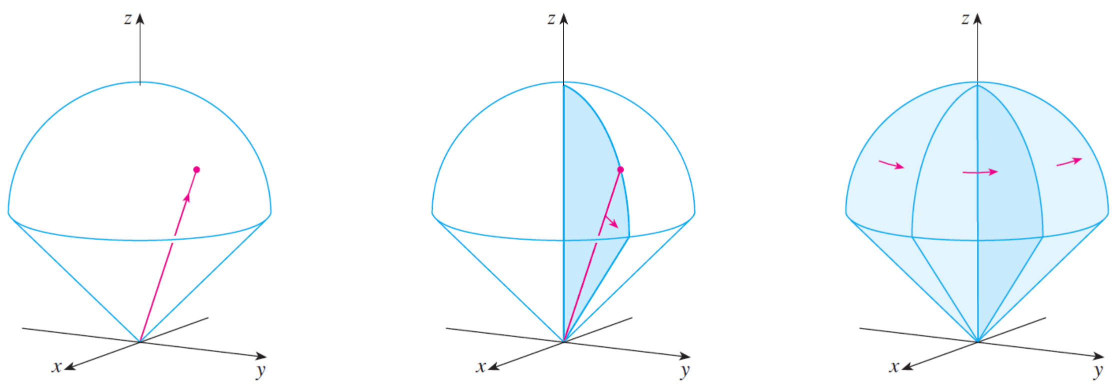
$$x=\rho\sin\varphi\cos\theta,\quad y=\rho\sin\varphi\sin\theta,\quad z=\rho\cos\varphi,$$

上述三重积分可以表示为

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}V=\int_c^d\int_\alpha^\beta\int_a^b f(\rho\sin\varphi\cos\theta,\rho\sin\varphi\sin\theta,\rho\cos\varphi)\rho^2\sin\varphi\,\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi.$$

例 如图所示, 我们可以使用球面坐标系计算由锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$上方和球面$x^2+y^2+z^2=z$下方围成的有界闭区域Ω的体积.





如图所示, 锥面和球面的方程可以提供设置球面坐标系积分上下限的额外信息: $\Omega=\{(\rho,\theta,\varphi)\mid 0\le\theta\le2\pi,\ 0\le\varphi\le\pi/4,\ 0\le\rho\le\cos\varphi\}$(为什么?), 于是

$$V(\Omega)=\iiint\limits_{\Omega}\mathbf{1}\,\mathrm{d}V=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4}\int_0^{\cos\varphi}\rho^2\sin\varphi\,\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta=\frac{2\pi}{3}\int_0^{\pi/4}\sin\varphi\cos^3\varphi\,\mathrm{d}\varphi=\frac{\pi}{8}.$$

请根据上述内容回答下列问题:

(i) 已知球面坐标系中点的坐标, 写出它们对应空间直角坐标系的坐标:

(1) $(6, \pi/3, \pi/6)$. (2) $(3, \pi/2, \pi/4)$. (3) $(2, \pi/2, \pi/2)$. (4) $(4, -\pi/4, \pi/3)$.

(ii) 已知空间直角坐标系中点的坐标, 写出它们对应柱球面坐标系的坐标:

(1) $(0, -2, 0)$. (2) $(-1, 1, -\sqrt{2})$. (3) $(1, 0, \sqrt{3})$. (4) $(\sqrt{3}, -1, 2\sqrt{3})$.

(iii) 给定曲面的球面坐标系方程, 请描述这些曲面分别是什么:

(1) $\varphi = \pi/3$. (2) $\rho = 3$.

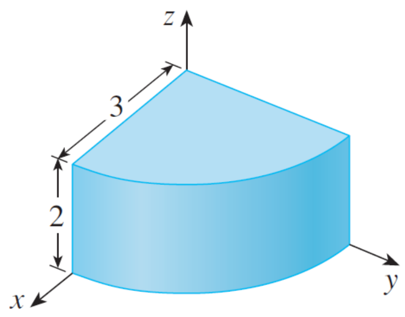
(3) $\rho = \sin\theta \sin\varphi$. (4) $\rho^2(\sin^2\varphi \sin^2\theta + \cos^2\varphi) = 9$.

(iv) 写出下列曲面在球面坐标系中的方程:

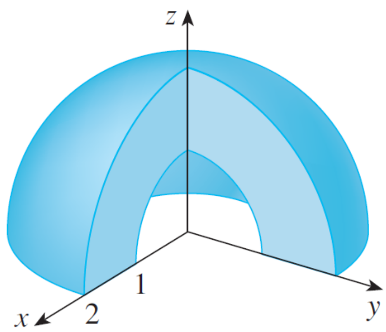
(1) $z^2 = x^2 + y^2$. (2) $x^2 + y^2 = 9$.

(3) $x^2 - 2x + y^2 + z^2 = 0$. (4) $x + 2y + 3z = 1$.

习题 13 如图所示, 请写出图中区域对应柱面或球面坐标系下的累次积分:



(1)



(2)

习题 14 将下列累次积分转化为球面坐标系中的累次积分并进行计算:

(1) $\displaystyle\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{2-x^2-y^2}} xy\,\mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}x.$

(2) $\displaystyle\int_{-a}^{a}\int_{-\sqrt{a-y^2}}^{\sqrt{a-y^2}}\int_{-\sqrt{a-x^2-y^2}}^{\sqrt{a-x^2-y^2}}(x^2z+y^2z+z^3)\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$

(3) $\displaystyle\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{2-\sqrt{4-x^2-y^2}}^{2+\sqrt{4-x^2-y^2}}(x^2+y^2+z^2)^{3/2}\,\mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}x.$

习题 15 在球面坐标系中计算下列三重积分:

(1) $\displaystyle\iiint\limits_{B}(x^2+y^2+z^2)^2\,\mathrm{d}V$, 其中$B$为以坐标原点为球心以5为半径的球.

(2) $\displaystyle\iiint\limits_{\Omega}(9-x^2-y^2)\,\mathrm{d}V$, 其中$\Omega$为半球$x^2+y^2+z^2\le 9$, $z\ge 0$.

(3) $\displaystyle\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}V$, 其中$\Omega$介于球$x^2+y^2+z^2=4$与$x^2+y^2+z^2=9$之间.

(4) $\displaystyle\iiint\limits_{\Omega}y^2\,\mathrm{d}V$, 其中$\Omega$为半球$x^2+y^2+z^2\le 9$, $y\ge 0$.

(5) $\displaystyle\iiint\limits_{\Omega}xe^{x^2+y^2+z^2}\,\mathrm{d}V$, 其中$\Omega$为单位球$x^2+y^2+z^2\le 1$在第一卦限的部分.

(6) $\displaystyle\iiint\limits_{\Omega}xyz\,\mathrm{d}V$, 其中$\Omega$介于球面$\rho=2$, $\rho=4$之间且在锥面$\varphi=\pi/3$之上.

习题 16 选取合适的坐标系计算下列有界闭区域Ω的体积:

(1) Ω为平面$2x+y+z=4$与三个坐标面围成的有界闭区域.

(2) Ω为曲面$y=x^2+z^2$与$y=8-x^2-z^2$围成的有界闭区域.

(3) Ω为柱面$y=x^2$与平面$z=0, y+z=1$围成的有界闭区域.

(4) Ω为柱面$x^2+z^2=4$与平面$y=-1, y+z=4$围成的有界闭区域.

(5) Ω为柱面$x^2+y^2=1$与球面$x^2+y^2+z^2=4$围成的有界闭区域.

(6) Ω为锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$与球面$x^2+y^2+z^2=4$围成的有界闭区域.

(7) Ω为曲面$z=x^2+y^2$与球面$x^2+y^2+z^2=4$围成的有界闭区域.

(8) Ω为曲面$z=x^2+y^2$与$z=36-3x^2-3y^2$围成的有界闭区域.

(9) Ω为球$\rho\le a$在锥面$\varphi=\pi/6$与$\varphi=\pi/3$之间的部分.

(10) Ω为曲面$\rho=4\cos\varphi$下方与锥面$\varphi=\pi/3$上方围成的有界闭区域.

习题 17 请使用球面坐标系验证以下等式成立:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\sqrt{x^2+y^2+z^2}e^{-(x^2+y^2+z^2)}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=2\pi.$$