

**习题 1** 请你判断下列函数在其定义域范围内是否有导函数. 如果导函数存在请进行计算:

$$\begin{array}{ll} (1) f(x) = x|x|, x \in \mathbb{R}; & (2) f(x) = \sqrt{|x|}, x \in \mathbb{R}; \\ (3) f(x) = [x] \sin^2(\pi x), x \in \mathbb{R}; & (4) f(x) = ([x] - x) \sin^2(\pi x), x \in \mathbb{R}; \\ (5) f(x) = \ln|x|, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}; & (6) f(x) = \arccos \frac{1}{|x|}, |x| > 1. \end{array}$$

**习题 2** 计算下列函数的导函数:

$$(1) f(x) = \log_x 2, x > 0, x \neq 1; \quad (2) f(x) = \log_x \cos x, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \setminus \{1\}.$$

**习题 3** 试讨论下列函数是否存在导函数. 如果存在请进行计算:

$$(1) f(x) = \begin{cases} \arctan x, & |x| \leq 1, \\ \frac{\pi}{4} \operatorname{sgn} x + \frac{x-1}{2}, & |x| > 1. \end{cases} \quad (2) f(x) = \begin{cases} x^2 e^{-x^2}, & |x| \leq 1, \\ \frac{1}{e}, & |x| > 1. \end{cases}$$

**习题 4** 设定  $f$  在  $\mathbb{R}$  上导函数存在的条件下请确定下列参数的值:

$$(1) f(x) = \begin{cases} 4x, & x \leq 0, \\ ax^2 + bx + c, & 0 < x < 1, \\ 3 - 2x, & x \geq 1. \end{cases} \quad (2) f(x) = \begin{cases} ax + b, & x \leq 0, \\ cx^2 + dx, & 0 < x \leq 1, \\ 1 - \frac{1}{x}, & x > 1. \end{cases}$$

**习题 5** 设函数  $f, g$  在点  $a$  处有导数值, 请计算下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow a} \frac{xf(a) - af(x)}{x - a}; \quad (2) \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)g(a) - f(a)g(x)}{x - a}.$$

**习题 6** 设函数  $f(a) > 0$  且在点  $a$  处有导数值, 请计算下列极限:

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{f(a + \frac{1}{n})}{f(a)} \right)^{\frac{1}{n}}; \quad (2) \lim_{x \rightarrow a} \left( \frac{f(x)}{f(a)} \right)^{\frac{1}{\ln x - \ln a}}, a > 0.$$

**习题 7** 设函数  $f$  在点  $a$  处有导数值, 请计算下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow a} \frac{a^n f(x) - x^n f(a)}{x - a}, n \in \mathbb{N}; \quad (2) \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)e^x - f(a)}{f(x) \cos x - f(a)}, a = 0, f'(0) \neq 0.$$

**习题 8\*** 设函数

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \left| \cos \frac{\pi}{x} \right|, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

请验证函数  $f$  在  $x_n = \frac{2}{2n+1}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$  处没有导数值, 但是在数列  $x_n$  的极限, 即  $x = 0$  处有导数值.

**习题 9\*** 如果  $|a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + \cdots + a_n \sin nx| \leq |\sin x|$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , 证明  $|a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n| \leq 1$ .

姓名:

学号:

专业:

高等数学 导数值与导函数

---