



向量空间与线性方程组解的结构

向量组及其线性组合

向量组的线性相关性

向量组的秩与矩阵的秩

线性方程组解的结构

向量空间

向量组及其线性组合

引入了空间直角坐标系后,

- 空间中的任一点 P 可用一个三元数组 (x, y, z) 来表示.
- 同时空间中的向量 \overrightarrow{OP} 也可写成 $\overrightarrow{OP} = (x, y, z)$.

于是我们对空间几何图形的性质的研究就可以转化为对三元数组 (x, y, z) 的研究.

引入了空间直角坐标系后,

- 空间中的任一点 P 可用一个三元数组 (x, y, z) 来表示.
- 同时空间中的向量 \overrightarrow{OP} 也可写成 $\overrightarrow{OP} = (x, y, z)$.

于是我们对空间几何图形的性质的研究就可以转化为对三元数组 (x, y, z) 的研究.

本章我们对三元数组 (x, y, z) 做推广去讨论 n 元数组以及 n 元数组的集合, 即 n 维向量以及向量组.

定义 (n 维向量)

- 由 n 个数 a_1, a_2, \dots, a_n 组成的有序数组称为 n 维向量.
- 如果 n 维向量写成

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

的形式, 那么我们称该向量为 n 维列向量.

- 如果 n 维向量写成

$$(a_1, a_2, \dots, a_n)$$

的形式, 那么我们称该向量为 n 维行向量.

注

- n 维列向量就是一个 $n \times 1$ 的列矩阵; n 维行向量就是一个 $1 \times n$ 的行矩阵.
- 行向量可以看成是列向量的转置.
- 我们常用 α, β, γ 来表示 n 维列向量, 而用 $\alpha^T, \beta^T, \gamma^T$ 来表示 n 维行向量.
- 当 a_1, a_2, \dots, a_n 是复数时, n 维向量称为 n 维复向量 ($\alpha \in \mathbb{C}^n$);
当 a_1, a_2, \dots, a_n 是实数时, n 维向量称为 n 维实向量 ($\alpha \in \mathbb{R}^n$).
以下我们所讨论的向量都是实向量.
- 分量都是零的向量称为**零向量**, 记为 0 .
- 向量 $(-a_1, -a_2, \dots, -a_n)$ 称为 $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ 的**负向量**, 记作 $-\alpha$.

定义 (n 维向量的运算)

设

$$\alpha = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n, \quad \beta = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

- 向量的线性运算

$$\alpha + \beta = \begin{bmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{bmatrix}, \quad k\alpha = \begin{bmatrix} ka_1 \\ ka_2 \\ \vdots \\ ka_n \end{bmatrix}, \quad k \in \mathbb{R}.$$

定义 (n 维向量的运算)

- 行向量点乘列向量(计算得到一个数)

$$\boldsymbol{\alpha}^T \boldsymbol{\beta} = (a_1, a_2, \dots, a_n) \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n.$$

- 列向量点乘行向量(计算得到一个 $n \times n$ 实矩阵)

$$\boldsymbol{\alpha} \boldsymbol{\beta}^T = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} (b_1, b_2, \dots, b_n) = \begin{bmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & \cdots & a_1 b_n \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & \cdots & a_2 b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n b_1 & a_n b_2 & \cdots & a_n b_n \end{bmatrix}.$$

向量运算实例

例

线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots \cdots \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

可用向量运算形式表示为 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = \beta$, 其中第*i*个未知量*x_i*的系数和方程组的常数分别写成

$$\alpha_i = \begin{bmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^m, (i = 1, 2, \dots, n) \quad \beta = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^m.$$

定义 (向量组)

我们称由若干个维数相同的向量构成的集合为向量组.

定义 (向量组)

我们称由若干个维数相同的向量构成的集合为向量组.

例

线性方程组

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = \beta$$

中未知量的系数构成的 m 维列向量

$$\alpha_i = \begin{bmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^m, (i = 1, 2, \dots, n)$$

的全体构成一个向量组.

例

对下列矩阵做分块矩阵如下：

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \dots, \boldsymbol{\alpha}_n) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\beta}_1^T \\ \boldsymbol{\beta}_2^T \\ \vdots \\ \boldsymbol{\beta}_m^T \end{bmatrix},$$

其中

$$\boldsymbol{\alpha}_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix} \quad (j = 1, 2, \dots, n) \text{ 为矩阵 } \mathbf{A} \text{ 的列向量组,}$$

$$\boldsymbol{\beta}_i^T = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}) \quad (i = 1, 2, \dots, m) \text{ 为矩阵 } \mathbf{A} \text{ 的行向量组.}$$

例

- 给定一个 m 维向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, 我们可以得到一个以 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 为列的 $m \times n$ 矩阵

$$\mathbf{A} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n).$$

- 给定一个 n 维向量组 $\beta_1^T, \beta_2^T, \dots, \beta_m^T$, 我们可以得到一个以 $\beta_1^T, \beta_2^T, \dots, \beta_m^T$ 为行的 $m \times n$ 矩阵

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \beta_1^T \\ \beta_2^T \\ \vdots \\ \beta_m^T \end{bmatrix}.$$

例

- 给定一个 m 维向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, 我们可以得到一个以 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 为列的 $m \times n$ 矩阵

$$\mathbf{A} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n).$$

- 给定一个 n 维向量组 $\beta_1^T, \beta_2^T, \dots, \beta_m^T$, 我们可以得到一个以 $\beta_1^T, \beta_2^T, \dots, \beta_m^T$ 为行的 $m \times n$ 矩阵

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \beta_1^T \\ \beta_2^T \\ \vdots \\ \beta_m^T \end{bmatrix}.$$

上述两个例子告诉我们, 一个向量组总可与一个矩阵建立一一对应关系.

定义 (向量组的线性组合)

- 给定 n 维向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, 我们称表达式

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_n\alpha_n, \quad k_1, k_2, \dots, k_n \in \mathbb{R}$$

为该向量组的一个线性组合.

- 给定 n 维向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 和一个 n 维向量 β , 如果存在 $k_1, k_2, \dots, k_n \in \mathbb{R}$, 使得

$$\beta = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_n\alpha_n,$$

那么我们称向量 β 可由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性表示, 或者说向量 β 是向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 的一个线性组合.

注

- 一个向量组可以线性表示这个向量组中的每一个向量.
- 零向量是任意一个向量组的线性组合.

注

- 一个向量组可以线性表示这个向量组中的每一个向量.
- 零向量是任意一个向量组的线性组合.

例

设任意一个向量 α 及向量组 e_1, e_2, \dots, e_n 分别为

$$\alpha = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}, \quad e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \cdots e_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, (\text{第 } i \text{ 个}), \quad \cdots e_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

那么向量 α 可由 e_1, e_2, \dots, e_n 线性表示: $\alpha = a_1e_1 + a_2e_2 + \cdots + a_ne_n$.

问题

对于给定 n 维向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 和 n 维向量 β , 如何判断向量 β 是否可由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性表示?

问题

对于给定 n 维向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 和 n 维向量 β , 如何判断向量 β 是否可由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性表示?

- 如果向量 β 可由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性表示.
 β 被向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性表示 \Rightarrow 存在一组 $k_1, k_2, \dots, k_n \in \mathbb{R}$, 使得

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_n\alpha_n = \beta.$$

\Rightarrow 线性方程组

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = \beta.$$

有解

$$x_i = k_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

向量组的线性组合与线性方程组的关系

- 如果线性方程组 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = \beta$ 有解

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ \vdots \\ k_n \end{bmatrix},$$

那么 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_n\alpha_n = \beta$, 即向量 β 可由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性表示.

向量组的线性组合与线性方程组的关系

- 如果线性方程组 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = \beta$ 有解

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ \vdots \\ k_n \end{bmatrix},$$

那么 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_n\alpha_n = \beta$, 即向量 β 可由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性表示.

结论

向量 β 是否可由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性表示归结于线性方程组

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = \beta$$

是否有解.

定理 (向量组的线性组合与线性方程组的关系)

向量 β 是否可由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ (唯一)线性表示的充分必要条件是线性方程组 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \dots + x_n\alpha_n = \beta$ 有(唯一)解.

定理 (向量组的线性组合与线性方程组的关系)

向量 β 是否可由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ (唯一)线性表示的充分必要条件是线性方程组 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \dots + x_n\alpha_n = \beta$ 有(唯一)解.

例 1

设有向量 $\beta = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ -6 \end{bmatrix}$, $\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

试问 β 能否由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示.

向量组的线性组合与线性方程组的关系

定理 (向量组的线性组合与线性方程组的关系)

向量 β 是否可由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ (唯一)线性表示的充分必要条件是线性方程组 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \dots + x_n\alpha_n = \beta$ 有(唯一)解.

例 1

设有向量 $\beta = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ -6 \end{bmatrix}$, $\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

试问 β 能否由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示.

例 2

设有向量 $\beta = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ -7 \end{bmatrix}$, $\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -5 \end{bmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$.

试问 β 能否由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示. 若可以, 求出线性表达式.

定义 (向量组之间的等价关系)

设两个 n 维向量组 $\mathcal{A} : \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 及 $\mathcal{B} : \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$.

- 如果向量组 \mathcal{B} 中每个向量 $\beta_j (j = 1, 2, \dots, s)$ 均可由向量组 \mathcal{A} 线性表示, 那么我们称向量组 \mathcal{B} 可由向量组 \mathcal{A} 线性表示.
- 如果向量组 \mathcal{A} 与向量组 \mathcal{B} 可以相互线性表示, 那么我们称 \mathcal{A} 与 \mathcal{B} 等价.

定义 (向量组之间的等价关系)

设两个 n 维向量组 $\mathcal{A} : \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 及 $\mathcal{B} : \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$.

- 如果向量组 \mathcal{B} 中每个向量 $\beta_j (j = 1, 2, \dots, s)$ 均可由向量组 \mathcal{A} 线性表示, 那么我们称向量组 \mathcal{B} 可由向量组 \mathcal{A} 线性表示.
- 如果向量组 \mathcal{A} 与向量组 \mathcal{B} 可以相互线性表示, 那么我们称 \mathcal{A} 与 \mathcal{B} 等价.

向量组 \mathcal{B} 中每个向量 $\beta_j (j = 1, 2, \dots, s)$ 均可由向量组 \mathcal{A} 线性表示 \Rightarrow 存在一组 $k_{1j}, k_{2j}, \dots, k_{mj} \in \mathbb{R}$, 使得

$$\beta_j = k_{1j}\alpha_1 + k_{2j}\alpha_2 + \dots + k_{mj}\alpha_m = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) \begin{bmatrix} k_{1j} \\ k_{2j} \\ k_{3j} \\ \vdots \\ k_{mj} \end{bmatrix} \quad (j = 1, 2, \dots, s).$$

以向量

$$\begin{bmatrix} k_{1j} \\ k_{2j} \\ k_{3j} \\ \vdots \\ k_{mj} \end{bmatrix}, \quad (j = 1, 2, \dots, s)$$

为列, 得到一个 $m \times s$ 矩阵

$$\mathbf{K}_{m \times s} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1s} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{m1} & k_{m2} & \cdots & k_{ms} \end{bmatrix}.$$

我们称矩阵 $\mathbf{K}_{m \times s}$ 为这一线性表示的系数矩阵.

令矩阵 $\mathbf{A} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$, $\mathbf{B} = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s)$.

- 如果向量组 \mathcal{B} 中每个向量 $\beta_j (j = 1, 2, \dots, s)$ 均可由向量组 \mathcal{A} 线性表示, 那么矩阵方程 $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ 有解 $\mathbf{X} = \mathbf{K}_{m \times s}$.
- 如果向量组 \mathcal{A} 与向量组 \mathcal{B} 等价, 那么存在系数矩阵 $\mathbf{K}_{m \times s}$ 及 $\mathbf{L}_{s \times m}$, 使得

$$\mathbf{B} = \mathbf{AK}_{m \times s}, \mathbf{BL}_{s \times m} = \mathbf{A},$$

即矩阵方程 $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ 和 $\mathbf{BY} = \mathbf{A}$ 分别有解 $\mathbf{X} = \mathbf{K}_{m \times s}$, $\mathbf{Y} = \mathbf{L}_{s \times m}$.

令矩阵 $\mathbf{A} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$, $\mathbf{B} = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s)$.

- 如果向量组 \mathcal{B} 中每个向量 $\beta_j (j = 1, 2, \dots, s)$ 均可由向量组 \mathcal{A} 线性表示, 那么矩阵方程 $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ 有解 $\mathbf{X} = \mathbf{K}_{m \times s}$.
- 如果向量组 \mathcal{A} 与向量组 \mathcal{B} 等价, 那么存在系数矩阵 $\mathbf{K}_{m \times s}$ 及 $\mathbf{L}_{s \times m}$, 使得

$$\mathbf{B} = \mathbf{AK}_{m \times s}, \mathbf{BL}_{s \times m} = \mathbf{A},$$

即矩阵方程 $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ 和 $\mathbf{BY} = \mathbf{A}$ 分别有解 $\mathbf{X} = \mathbf{K}_{m \times s}$, $\mathbf{Y} = \mathbf{L}_{s \times m}$.

定理 (两个向量组之间的线性表示及等价与矩阵方程之间的关系)

设两个 n 维向量组 $\mathcal{A} : \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 及 $\mathcal{B} : \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$.

- 向量组 \mathcal{B} 可由向量组 \mathcal{A} 线性表示当且仅当矩阵方程 $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ 有解.
- 向量组 \mathcal{A} 与向量组 \mathcal{B} 等价当且仅当矩阵方程 $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ 和 $\mathbf{BY} = \mathbf{A}$ 同时有解.

例 3

设向量组

$$\mathcal{A} : \alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

及向量组

$$\mathcal{B} : \beta_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \beta_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \beta_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

证明:向量组 β 可由向量组 \mathcal{A} 线性表示.

例 4

设向量组

$$\mathcal{A} : \alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \alpha_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

及向量组

$$\mathcal{B} : \beta_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \beta_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \beta_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

证明:向量组 \mathcal{A} 和向量组 \mathcal{B} 等价.

向量组的线性相关性

观察线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 2, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 3, \\ x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 1, \\ 3x_1 + 8x_2 + x_3 = -2, \end{cases}$$

观察线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 2, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 3, \\ x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 1, \\ 3x_1 + 8x_2 + x_3 = -2, \end{cases}$$

在这个过程中, 我们用第二个方程减去第一个方程, 就得到第三个方程. 这说明:

- 原方程组中第三个方程冗余;
- 原方程组是否有第三个方程并不影响原线性方程组的解;
- 原方程组与新方程组同解.

观察线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 2, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 3, \\ x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 1, \\ 3x_1 + 8x_2 + x_3 = -2, \end{cases}$$

在这个过程中, 我们用第二个方程减去第一个方程, 就得到第三个方程. 这说明:

- 原方程组中第三个方程冗余;
- 原方程组是否有第三个方程并不影响原线性方程组的解;
- 原方程组与新方程组同解.

本节我们介绍向量组的线性相关性并应用它去判断线性方程组中是否有多余方程并寻找哪些方程是多余方程.

定义 (向量组的线性相关性)

设有 n 维向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$. 如果存在一组不全为零的数 $k_1, k_2, \dots, k_n \in \mathbb{R}$, 使得

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_n\alpha_n = \mathbf{0},$$

那么我们称向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性相关.

定义 (向量组的线性相关性)

设有 n 维向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$. 如果存在一组不全为零的数 $k_1, k_2, \dots, k_n \in \mathbb{R}$, 使得

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_n\alpha_n = \mathbf{0},$$

那么我们称向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性相关.

定义 (向量组的线性无关性)

设有 n 维向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$. 如果若当且仅当 $k_1 = k_2 = \cdots = k_n = 0$ 才能满足

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_n\alpha_n = \mathbf{0},$$

那么我们称向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性无关

定义 (向量组的线性相关性)

设有 n 维向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$. 如果存在一组不全为零的数 $k_1, k_2, \dots, k_n \in \mathbb{R}$, 使得

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_n\alpha_n = \mathbf{0},$$

那么我们称向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性相关.

定义 (向量组的线性无关性)

设有 n 维向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$. 如果若当且仅当 $k_1 = k_2 = \cdots = k_n = 0$ 才能满足

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_n\alpha_n = \mathbf{0},$$

那么我们称向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性无关 (线性无关性说明零向量的线性表示唯一, 线性表示的系数全部为零).

例

对于向量组

$$\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \alpha_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}$$

存在一组不全为零的数2, -1, 0, 使得

$$2\alpha_1 - \alpha_2 + 0\alpha_3 = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} + 0 \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix} = \mathbf{0}.$$

所以向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关.

例

对于向量组

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \cdots \mathbf{e}_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, (\text{第 } i \text{ 个}), \cdots, \mathbf{e}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

取任意 $k_1, k_2, \dots, k_n \in \mathbb{R}$, 我们有

$$\mathbf{0} = k_1 \mathbf{e}_1 + k_2 \mathbf{e}_2 + \cdots + k_n \mathbf{e}_n = k_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \cdots + k_n \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{bmatrix}$$

当且仅当 $k_1 = k_2 = \cdots = k_n = 0$. 因此向量组 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ 线性无关.

注

当向量组只含有一个向量 α 时,

- 如果 $\alpha \neq 0$, 那么只有当 $k = 0$ 时才有 $k\alpha = 0$, 所以 α 线性无关.
- 如果 $\alpha = 0$, 那么对任意非零常数 k , 都有 $k\alpha = 0$, 所以 α 线性相关.

注

当向量组只含有一个向量 α 时,

- 如果 $\alpha \neq 0$, 那么只有当 $k = 0$ 时才有 $k\alpha = 0$, 所以 α 线性无关.
- 如果 $\alpha = 0$, 那么对任意非零常数 k , 都有 $k\alpha = 0$, 所以 α 线性相关.

命题

证明:任一含有零向量的向量组必定线性相关.

注

当向量组只含有一个向量 α 时,

- 如果 $\alpha \neq 0$, 那么只有当 $k = 0$ 时才有 $k\alpha = 0$, 所以 α 线性无关.
- 如果 $\alpha = 0$, 那么对任意非零常数 k , 都有 $k\alpha = 0$, 所以 α 线性相关.

命题

证明:任一含有零向量的向量组必定线性相关.

设向量组 $\mathcal{A} : \mathbf{0}, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$. 于是对任意 $k \in \mathbb{R}$,

$$k \cdot \mathbf{0} + 0 \cdot \alpha_1 + 0 \cdot \alpha_2 + \cdots + 0 \cdot \alpha_m = \mathbf{0},$$

因此向量组 $\mathcal{A} : \mathbf{0}, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性相关.

例 1

设向量组

$$\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \alpha_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix},$$

判断向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的线性相关性.

例 1

设向量组

$$\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \alpha_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix},$$

判断向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的线性相关性.

例 2

已知向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关,

$$\beta_1 = \alpha_1 + \alpha_2, \beta_2 = \alpha_2 + \alpha_3, \beta_3 = \alpha_3 + \alpha_1,$$

试证明: 向量组 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 也线性无关.

定理 (向量组的线性相关性与齐次线性方程组的解之间的关系)

设 n 维向量组 $\mathcal{A} : \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$.

- 向量组 \mathcal{A} 线性相关当且仅当齐次线性方程组

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_m\alpha_m = \mathbf{0}$$

有非零解.

定理 (向量组的线性相关性与齐次线性方程组的解之间的关系)

设 n 维向量组 $\mathcal{A} : \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$.

- 向量组 \mathcal{A} 线性相关当且仅当齐次线性方程组

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_m\alpha_m = \mathbf{0}$$

有非零解.

- 向量组 \mathcal{A} 线性无关当且仅当齐次线性方程组

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_m\alpha_m = \mathbf{0}$$

只有零解 $x_1 = x_2 = \cdots = x_m = 0$.

向量组的线性相关性与齐次线性方程组的解之间的关系

设齐次线性方程组为 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_m\alpha_m = \mathbf{0}$.

向量组的线性相关性与齐次线性方程组的解之间的关系

设齐次线性方程组为 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_m\alpha_m = \mathbf{0}$.

系数矩阵 $\mathbf{A} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$ 做初等行变换化为矩阵 $\mathbf{B} = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$.

向量组的线性相关性与齐次线性方程组的解之间的关系

设齐次线性方程组为 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_m\alpha_m = \mathbf{0}$.

系数矩阵 $\mathbf{A} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$ 做初等行变换化为矩阵 $\mathbf{B} = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$.

\Updownarrow

方程 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_m\alpha_m = \mathbf{0}$ 与方程 $x_1\beta_1 + x_2\beta_2 + \cdots + x_m\beta_m = \mathbf{0}$ 同解.

向量组的线性相关性与齐次线性方程组的解之间的关系

设齐次线性方程组为 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_m\alpha_m = \mathbf{0}$.

系数矩阵 $\mathbf{A} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$ 做初等行变换化为矩阵 $\mathbf{B} = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$.

\Updownarrow

方程 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_m\alpha_m = \mathbf{0}$ 与方程 $x_1\beta_1 + x_2\beta_2 + \cdots + x_m\beta_m = \mathbf{0}$ 同解.

\Updownarrow

向量组 $\mathcal{A} : \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 与向量组 $\mathcal{A} : \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$ 具有相同的线性相关性.

向量组的线性相关性与齐次线性方程组的解之间的关系

设齐次线性方程组为 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_m\alpha_m = \mathbf{0}$.

系数矩阵 $\mathbf{A} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$ 做初等行变换化为矩阵 $\mathbf{B} = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$.

\Updownarrow

方程 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_m\alpha_m = \mathbf{0}$ 与方程 $x_1\beta_1 + x_2\beta_2 + \cdots + x_m\beta_m = \mathbf{0}$ 同解.

\Updownarrow

向量组 $\mathcal{A} : \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 与向量组 $\mathcal{A} : \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$ 具有相同的线性相关性. 即

- 若 $\mathbf{A} \xrightarrow{r} \mathbf{B}$, 则矩阵 \mathbf{A} 的列向量组与矩阵 \mathbf{B} 的列向量组有相同的线性相关性.
- 若 $\mathbf{A} \xrightarrow{c} \mathbf{B}$, 则矩阵 \mathbf{A} 的行向量组与矩阵 \mathbf{B} 的行向量组有相同的线性相关性.

定理

n 维向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m (m \geq 2)$ 线性相关当且仅当存在某个向量 α_j 可由其余向量线性表示 ($1 \leq j \leq m$).

定理

n 维向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m (m \geq 2)$ 线性相关当且仅当存在某个向量 α_j 可由其余向量线性表示 ($1 \leq j \leq m$).

- 充分性: 如果存在某个向量 α_j 可由其余向量线性表示 ($1 \leq j \leq m, m \geq 2$), 那么存在一组 $k_1, \dots, k_{j-1}, k_{j+1}, \dots, k_m$, 使得

$$\alpha_j = k_1 \alpha_1 + \dots + k_{j-1} \alpha_{j-1} + k_{j+1} \alpha_{j+1} + \dots + k_m \alpha_m,$$

或者

$$k_1 \alpha_1 + \dots + k_{j-1} \alpha_{j-1} + \alpha_j + k_{j+1} \alpha_{j+1} + \dots + k_m \alpha_m = \mathbf{0}.$$

显然 $k_1, \dots, k_{j-1}, 1, k_{j+1}, \dots, k_m$ 不全为零, 因此 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性相关.

- 必要性:如果向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m (m \geq 2)$ 线性相关,那么存在一组不全为零的数 k_1, k_2, \dots, k_m ,使得 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_m\alpha_m = \mathbf{0}$.不妨设 $k_j \neq 0 (1 \leq j \leq m)$,对上式移项得到

$$-k_j\alpha_j = k_1\alpha_1 + \dots + k_{j-1}\alpha_{j-1} + k_{j+1}\alpha_{j+1} + \dots + k_m\alpha_m,$$

从而有

$$\alpha_j = -\frac{k_1}{k_j}\alpha_1 - \dots - \frac{k_{j-1}}{k_j}\alpha_{j-1} - \frac{k_{j+1}}{k_j}\alpha_{j+1} - \dots - \frac{k_m}{k_j}\alpha_m.$$

即 α_j 可由其余向量线性表示.

- 必要性: 如果向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m (m \geq 2)$ 线性相关, 那么存在一组不全为零的数 k_1, k_2, \dots, k_m , 使得 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_m\alpha_m = \mathbf{0}$. 不妨设 $k_j \neq 0 (1 \leq j \leq m)$, 对上式移项得到

$$-k_j\alpha_j = k_1\alpha_1 + \dots + k_{j-1}\alpha_{j-1} + k_{j+1}\alpha_{j+1} + \dots + k_m\alpha_m,$$

从而有

$$\alpha_j = -\frac{k_1}{k_j}\alpha_1 - \dots - \frac{k_{j-1}}{k_j}\alpha_{j-1} - \frac{k_{j+1}}{k_j}\alpha_{j+1} - \dots - \frac{k_m}{k_j}\alpha_m.$$

即 α_j 可由其余向量线性表示.

推论

两个多维向量 α_1, α_2 线性相关当且仅当它们的分量对应成比例.

向量组线性相关性在线性方程组中的应用

将线性方程组 $\mathbf{A}_{m \times n} \mathbf{x} = \boldsymbol{\beta}$ 的增广矩阵 $\tilde{\mathbf{A}} = (\mathbf{A} \mid \boldsymbol{\beta})$ 按行分块：

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\beta}_1^T \\ \boldsymbol{\beta}_2^T \\ \vdots \\ \boldsymbol{\beta}_m^T \end{bmatrix},$$

向量组线性相关性在线性方程组中的应用

将线性方程组 $\mathbf{A}_{m \times n} \mathbf{x} = \boldsymbol{\beta}$ 的增广矩阵 $\tilde{\mathbf{A}} = (\mathbf{A} \mid \boldsymbol{\beta})$ 按行分块:

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\beta}_1^T \\ \boldsymbol{\beta}_2^T \\ \vdots \\ \boldsymbol{\beta}_m^T \end{bmatrix},$$

由上述定理我们可判断

- 当行向量组 $\boldsymbol{\beta}_1^T, \boldsymbol{\beta}_2^T, \dots, \boldsymbol{\beta}_m^T$ 线性相关时, 原方程组有多余的方程;
- 若 $\boldsymbol{\beta}_j^T$ 可由其余向量线性表示, 则 $\boldsymbol{\beta}_j^T$ 所对应的第 j 个方程就是多余方程.

定义 (向量组的部分组)

给定一个向量组后, 从这个向量组中抽取一部分向量构成一个新的向量组, 我们称这个新的向量组为原向量组的部分组。

定义 (向量组的部分组)

给定一个向量组后, 从这个向量组中抽取一部分向量构成一个新的向量组, 我们称这个新的向量组为原向量组的部分组。

设 n 维向量组 $\mathcal{A} : \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$, 不失一般性, 我们可设向量组 \mathcal{A} 的部分向量组为 $\mathcal{B} : \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r (1 \leq r < m)$.

定义 (向量组的部分组)

给定一个向量组后, 从这个向量组中抽取一部分向量构成一个新的向量组, 我们称这个新的向量组为原向量组的部分组。

设 n 维向量组 $\mathcal{A} : \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$, 不失一般性, 我们可设向量组 \mathcal{A} 的部分向量组为 $\mathcal{B} : \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r (1 \leq r < m)$.

命题

- (1) 若部分组 \mathcal{B} 线性相关, 则向量组 \mathcal{A} 也线性相关.
- (2) 若向量组 \mathcal{A} 线性无关, 则其部分组 \mathcal{B} 也线性无关.

定义 (向量组的部分组)

给定一个向量组后, 从这个向量组中抽取一部分向量构成一个新的向量组, 我们称这个新的向量组为原向量组的部分组。

设 n 维向量组 $\mathcal{A} : \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$, 不失一般性, 我们可设向量组 \mathcal{A} 的部分向量组为 $\mathcal{B} : \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r (1 \leq r < m)$.

命题

- (1) 若部分组 \mathcal{B} 线性相关, 则向量组 \mathcal{A} 也线性相关.
- (2) 若向量组 \mathcal{A} 线性无关, 则其部分组 \mathcal{B} 也线性无关.

注

上述命题也可以叙述为: (1)若部分相关, 则整体相关; (2)若整体无关, 则部分必无关.

(1) 若部分组 β 线性相关, 则存在一组不全为零的数 k_1, k_2, \dots, k_r , 使得

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_r\alpha_r = \mathbf{0}.$$

于是

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_r\alpha_r + 0 \cdot \alpha_{r+1} + 0 \cdot \alpha_{r+2} + \cdots + 0 \cdot \alpha_m = \mathbf{0},$$

而 $k_1, k_2, \dots, k_r, 0, \dots, 0$ 也是一组不全为零的数, 因此向量组 α 也线性相关.

(1) 若部分组 β 线性相关, 则存在一组不全为零的数 k_1, k_2, \dots, k_r , 使得

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_r\alpha_r = \mathbf{0}.$$

于是

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_r\alpha_r + 0 \cdot \alpha_{r+1} + 0 \cdot \alpha_{r+2} + \cdots + 0 \cdot \alpha_m = \mathbf{0},$$

而 $k_1, k_2, \dots, k_r, 0, \dots, 0$ 也是一组不全为零的数, 因此向量组 α 也线性相关.

(2) 我们使用反证法:

若部分组 β 线性相关, 于是由(1)可知, 向量组 α 也线性相关, 这与已知条件矛盾. 所以部分组 β 也线性无关.

推论

- 设 n 维向量组 $\mathcal{A} : \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$. 当 $n < m$ 时该向量组一定线性相关.
- $n + 1$ 个 n 维向量一定线性相关.

推论

- 设 n 维向量组 $\mathcal{A} : \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$. 当 $n < m$ 时该向量组一定线性相关.
- $n + 1$ 个 n 维向量一定线性相关.

记矩阵 $\mathbf{A} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$. 当 $n < m$ 时, 齐次线性方程组

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$$

中方程的个数小于未知量的个数, 因此一定有非零解, 所以向量组 \mathcal{A} 线性相关.

推论

- 设 n 维向量组 $\mathcal{A} : \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$. 当 $n < m$ 时该向量组一定线性相关.
- $n + 1$ 个 n 维向量一定线性相关.

记矩阵 $\mathbf{A} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$. 当 $n < m$ 时, 齐次线性方程组

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$$

中方程的个数小于未知量的个数, 因此一定有非零解, 所以向量组 \mathcal{A} 线性相关.

定理

设向量组 $\mathcal{A} : \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性无关, 而向量组 $\mathcal{A}' : \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, \beta$ 线性相关,
那么向量 β 一定能由向量组 \mathcal{A} 线性表示且表示形式唯一.

$\mathcal{A}' : \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, \beta$ 线性相关, 那么存在不全为零的数 k_1, k_2, \dots, k_m, k , 使得

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_m\alpha_m + k\beta = \mathbf{0}.$$

$\mathcal{A}' : \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, \beta$ 线性相关, 那么存在不全为零的数 k_1, k_2, \dots, k_m, k , 使得

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_m\alpha_m + k\beta = \mathbf{0}.$$

- 如果 $k = 0$, 那么 k_1, k_2, \dots, k_m 不全为零, 于是

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_m\alpha_m = \mathbf{0},$$

即向量组 $\mathcal{A} : \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性相关, 这与已知条件矛盾, 因此 $k \neq 0$.

- 由于 $k \neq 0$, 那么

$$\beta = -\frac{k_1}{k}\alpha_1 - \frac{k_2}{k}\alpha_2 - \dots - \frac{k_m}{k}\alpha_m,$$

所以向量 β 一定能由向量组 \mathcal{A} 线性表示.

- 如果 β 存在两个线性表示:

$$\beta = \lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 \alpha_2 + \cdots + \lambda_m \alpha_m, \lambda_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, m.$$

$$\beta = \mu_1 \alpha_1 + \mu_2 \alpha_2 + \cdots + \mu_m \alpha_m, \mu_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, m.$$

那么两式相减得到

$$\mathbf{0} = (\lambda_1 - \mu_1) \alpha_1 + (\lambda_2 - \mu_2) \alpha_2 + \cdots + (\lambda_m - \mu_m) \alpha_m.$$

由于向量组 $\mathcal{A} : \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性无关, 于是 $\lambda_i = \mu_i, i = 1, 2, \dots, m$,
因此 β 可由向量组 \mathcal{A} 唯一线性表示.

定理

设两个 n 维向量组

$$\mathcal{A} : \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \quad \mathcal{B} : \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t.$$

如果

- 向量组 \mathcal{A} 可以由向量组 \mathcal{B} 线性表示;
- $s > t$,

那么向量组 $\mathcal{A} : \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性相关.

- 要证明向量组 \mathcal{A} 线性相关，只需证明方程组 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_s\alpha_s = \mathbf{0}$ 有非零解.

- 要证明向量组 \mathcal{A} 线性相关, 只需证明方程组 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_s\alpha_s = \mathbf{0}$ 有非零解.
- 向量组 \mathcal{A} 可以由向量组 \mathcal{B} 线性表示, 那么存在一个系数矩阵 $\mathbf{K}_{t \times s}$, 使得

$$(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t) \mathbf{K}_{t \times s}.$$

- 要证明向量组 \mathcal{A} 线性相关, 只需证明方程组 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_s\alpha_s = \mathbf{0}$ 有非零解.
- 向量组 \mathcal{A} 可以由向量组 \mathcal{B} 线性表示, 那么存在一个系数矩阵 $\mathbf{K}_{t \times s}$, 使得

$$(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t) \mathbf{K}_{t \times s}.$$

- 此时方程组 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_s\alpha_s = \mathbf{0}$ 可表示为

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_s\alpha_s = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_s \end{bmatrix} = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t) \mathbf{K}_{t \times s} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_s \end{bmatrix}.$$

向量组线性相关性的重要结论

- 齐次线性方程组 $\mathbf{K}_{t \times s} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_s \end{bmatrix} = \mathbf{0}$ 中方程的个数 t 小于未知量的个数 s , 从而必有

非零解 k_1, k_2, \dots, k_s , 使得 $\mathbf{K}_{t \times s} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_s \end{bmatrix} = \mathbf{0}$.

向量组线性相关性的重要结论

- 齐次线性方程组 $\mathbf{K}_{t \times s} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_s \end{bmatrix} = \mathbf{0}$ 中方程的个数 t 小于未知量的个数 s , 从而必有

非零解 k_1, k_2, \dots, k_s , 使得 $\mathbf{K}_{t \times s} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_s \end{bmatrix} = \mathbf{0}$.

- 因此

$$(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_s \end{bmatrix} = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t) \mathbf{K}_{t \times s} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_s \end{bmatrix} = \mathbf{0}.$$

- 上述等式说明齐次线性方程组 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_s\alpha_s = 0$ 有非零解 k_1, k_2, \dots, k_s , 即向量组 $\mathcal{A} : \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性相关.

- 上述等式说明齐次线性方程组 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_s\alpha_s = 0$ 有非零解 k_1, k_2, \dots, k_s , 即向量组 $\mathcal{A} : \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性相关.

推论

如果

- 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 可以由向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 线性表示;
- 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关,

那么 $s \leq t$.

- 上述等式说明齐次线性方程组 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_s\alpha_s = 0$ 有非零解 k_1, k_2, \dots, k_s , 即向量组 $\mathcal{A} : \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性相关.

推论

如果

- 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 可以由向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 线性表示;
- 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关,

那么 $s \leq t$.

推论

如果向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 与向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 均线性无关, 并且这两个向量组等价, 那么 $s = t$.

例 3

设向量组

$$\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{bmatrix}, \alpha_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix},$$

判断部分向量组 α_1, α_2 、 α_1, α_3 及 α_2, α_3 的线性相关性.

例 3

设向量组

$$\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{bmatrix}, \alpha_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix},$$

判断部分向量组 α_1, α_2 、 α_1, α_3 及 α_2, α_3 的线性相关性.

例 4

已知向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 向量组 $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性相关. 试证明: 向量 α_4 可由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示.

向量组的秩与矩阵的秩

线性方程组与它的增广矩阵有一一对应的关系:

- 增广矩阵的每一行都对应着一个方程.
- 当增广矩阵的行向量组线性相关时,这个线性方程组有多余方程.
- 删去方程组多余方程并不影响线性方程组的解.

线性方程组与它的增广矩阵有一一对应的关系:

- 增广矩阵的每一行都对应着一个方程.
- 当增广矩阵的行向量组线性相关时,这个线性方程组有多余方程.
- 删去方程组多余方程并不影响线性方程组的解.

现在我们进一步想知道,一个线性方程组中到底会有多少个多余方程? 多余方程的个数由什么来确定?

线性方程组与它的增广矩阵有一一对应的关系:

- 增广矩阵的每一行都对应着一个方程.
- 当增广矩阵的行向量组线性相关时,这个线性方程组有多余方程.
- 删去方程组多余方程并不影响线性方程组的解.

现在我们进一步想知道,一个线性方程组中到底会有多少个多余方程? 多余方程的个数由什么来确定?

本节我们引入向量组的秩、矩阵的秩和向量组的极大无关组来回答上述要探究的问题.

定义 (向量组的极大无关组)

设 \mathcal{A} 是一个 n 维向量组(\mathcal{A} 可以包含无限多个向量). 如果在 \mathcal{A} 中取出 r 个向量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$, 它满足:

- (1) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 线性无关;
- (2) 对任意 $\beta \in \mathcal{A}$, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r, \beta$ 线性相关.

那么我们称向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 为向量组 \mathcal{A} 的一个极大线性无关组, 简称极大无关组.

注

- 向量组 A 中任一向量都可由它的极大无关组线性表示.
- 极大无关组作为向量组 A 的部分组一定可由向量组 A 线性表示,因此向量组 A 与它自身的极大无关组总是等价.
- 向量组 A 中所含向量的个数有可能是无限多个,但是它的极大无关组所含向量的个数不会超过向量的维数,从而一定是有限的.

向量组的极大无关组

注

- 向量组 A 中任一向量都可由它的极大无关组线性表示.
- 极大无关组作为向量组 A 的部分组一定可由向量组 A 线性表示,因此向量组 A 与它自身的极大无关组总是等价.
- 向量组 A 中所含向量的个数有可能是无限多个,但是它的极大无关组所含向量的个数不会超过向量的维数,从而一定是有限的.

例

n 维单位坐标向量组线性无关, 所以该向量组的极大无关组就是它本身:

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, e_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}.$$

例

设向量组 \mathcal{A}

$$\alpha_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}, \alpha_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 7 \end{bmatrix},$$

- 向量 α_1 与 α_2 的分量不对应成比例, 所以 α_1, α_2 线性无关.
- 由于 $\alpha_3 = \alpha_1 + 2\alpha_2$, 所以向量组 \mathcal{A} 线性相关.

因此

- 向量组 α_1, α_2 是 \mathcal{A} 的极大无关组.
- 类似地, 容易验证 α_2, α_3 也是 \mathcal{A} 的极大无关组.

注

上述例子说明:

- 一个向量组的极大无关组并不是唯一的.
- 一个向量组与其任意一个极大无关组是相互等价的, 因此由向量组等价的传递性可知, 原向量组的任意两个极大无关组相互等价.
- 由上述极大无关组之间的等价性, 一个向量组的每一个极大无关组所含向量的个数总是相等的.

注

上述例子说明:

- 一个向量组的极大无关组并不是唯一的.
- 一个向量组与其任意一个极大无关组是相互等价的, 因此由向量组等价的传递性可知, 原向量组的任意两个极大无关组相互等价.
- 由上述极大无关组之间的等价性, 一个向量组的每一个极大无关组所含向量的个数总是相等的.

定义 (向量组的秩)

- 我们称一个向量组 \mathcal{A} 的任意一个极大无关组所含向量的个数为这个向量组 \mathcal{A} 的秩, 记为 $R(\mathcal{A})$.
- 如果向量组 \mathcal{A} 只有零向量, 那么它没有极大无关组, 此时我们规定 $R(\mathcal{A}) = 0$.

定理

等价的向量组有相同的秩.

定理

等价的向量组有相同的秩.

因为每个向量组都与它的极大无关组等价, 根据向量组等价的传递性, 任意两个等价的向量组的极大无关组也等价, 所以等价的向量组有相同的秩.

定理

等价的向量组有相同的秩.

因为每个向量组都与它的极大无关组等价, 根据向量组等价的传递性, 任意两个等价的向量组的极大无关组也等价, 所以等价的向量组有相同的秩.

命题 1

一个向量组线性无关当且仅当它的秩等于它所含向量的个数.

定理

等价的向量组有相同的秩.

因为每个向量组都与它的极大无关组等价, 根据向量组等价的传递性, 任意两个等价的向量组的极大无关组也等价, 所以等价的向量组有相同的秩.

命题 1

一个向量组线性无关当且仅当它的秩等于它所含向量的个数.

- 如果一个向量组本身线性无关, 那么这个向量组的极大无关组就是它自身, 于是它的秩等于它所含向量的个数.
- 若一个向量组的秩等于它所含向量的个数, 则这个向量组显然是线性无关的.

命题 2

任一 n 维向量组 \mathcal{A} 的秩 $R(\mathcal{A}) \leq n$.

定理

等价的向量组有相同的秩.

因为每个向量组都与它的极大无关组等价, 根据向量组等价的传递性, 任意两个等价的向量组的极大无关组也等价, 所以等价的向量组有相同的秩.

命题 1

一个向量组线性无关当且仅当它的秩等于它所含向量的个数.

- 如果一个向量组本身线性无关, 那么这个向量组的极大无关组就是它自身, 于是它的秩等于它所含向量的个数.
- 若一个向量组的秩等于它所含向量的个数, 则这个向量组显然是线性无关的.

命题 2

任一 n 维向量组 \mathcal{A} 的秩 $R(\mathcal{A}) \leq n$. ($n+1$ 个 n 维向量必定线性相关 $\Rightarrow R(\mathcal{A}) \leq n$)

回顾矩阵的相关知识, 我们知道:

- 任一矩阵都可以通过初等行变换化为阶梯形矩阵.
- 虽然阶梯形矩阵的形式不唯一,但是所有阶梯形矩阵中非零行的行数都相等.

以下我们会发现阶梯形矩阵中非零行的行数是由该矩阵本身的特性所确定的.

定义 (矩阵的 k 阶子式)

在 $m \times n$ 矩阵A中, 任取 k 行与 k 列($k \leq m, k \leq n$)位于这些行列交叉处的 k^2 个元素而不改变它们在A中所处的位置次序而得的 k 阶行列式, 我们称为矩阵A的 k 阶子式.

回顾矩阵的相关知识, 我们知道:

- 任一矩阵都可以通过初等行变换化为阶梯形矩阵.
- 虽然阶梯形矩阵的形式不唯一, 但是所有阶梯形矩阵中非零行的行数都相等.

以下我们会发现阶梯形矩阵中非零行的行数是由该矩阵本身的特性所确定的.

定义 (矩阵的 k 阶子式)

在 $m \times n$ 矩阵A中, 任取 k 行与 k 列($k \leq m, k \leq n$)位于这些行列交叉处的 k^2 个元素而不改变它们在A中所处的位置次序而得的 k 阶行列式, 我们称为矩阵A的 k 阶子式.

注

在 $m \times n$ 矩阵A中的 k 阶子式共有 $\binom{m}{k} \cdot \binom{n}{k}$ 个.

定义 (矩阵的秩)

设在矩阵A中

- 有一个不等于0的 r 阶子式 D ,
- 所有的 $r + 1$ 阶子式(如果存在)全等于0.

定义 (矩阵的秩)

设在矩阵A中

- 有一个不等于0的 r 阶子式 D ,
- 所有的 $r + 1$ 阶子式(如果存在)全等于0.

那么我们称

- D 为矩阵A的最高阶非零子式.
- 数 r 称为矩阵A的秩,记作 $R(A)$.
- 我们规定零矩阵的秩等于0.

注

- 由行列式按行(列)展开的性质可知, 如果 A 的所有 $r+1$ 阶子式全等于零, 那么所有高于 $r+1$ 阶的子式也全为0. 因此 r 阶非零子式 D 被称为最高阶非零子式.
- 矩阵 A 的秩 $R(A)$ 就是非零子式的最高阶数.
- 如果矩阵 A 中有某个 k 阶子式不为0, 那么 $R(A) \geq k$.
- 如果矩阵 A 中所有 k 阶子式全为0, 那么 $R(A) < k$.

注

- 由行列式按行(列)展开的性质可知, 如果 A 的所有 $r+1$ 阶子式全等于零, 那么所有高于 $r+1$ 阶的子式也全为0. 因此 r 阶非零子式 D 被称为最高阶非零子式.
- 矩阵 A 的秩 $R(A)$ 就是非零子式的最高阶数.
- 如果矩阵 A 中有某个 k 阶子式不为0, 那么 $R(A) \geq k$.
- 如果矩阵 A 中所有 k 阶子式全为0, 那么 $R(A) < k$.
- 对于 n 阶矩阵 A , 由于 A 的 n 阶子式只有一个 $|A|$, 所以
 - $|A| \neq 0, R(A) = n$, 即可逆矩阵的秩等于它的阶数, 我们又称其为**满秩矩阵**.
 - $|A| = 0, R(A) < n$, 即不可逆矩阵的秩小于它的阶数, 我们又称其为**降秩矩阵**.

注

- 由行列式按行(列)展开的性质可知, 如果 \mathbf{A} 的所有 $r+1$ 阶子式全等于零, 那么所有高于 $r+1$ 阶的子式也全为0. 因此 r 阶非零子式 D 被称为最高阶非零子式.
- 矩阵 \mathbf{A} 的秩 $R(\mathbf{A})$ 就是非零子式的最高阶数.
- 如果矩阵 \mathbf{A} 中有某个 k 阶子式不为0, 那么 $R(\mathbf{A}) \geq k$.
- 如果矩阵 \mathbf{A} 中所有 k 阶子式全为0, 那么 $R(\mathbf{A}) < k$.
- 对于 n 阶矩阵 \mathbf{A} , 由于 \mathbf{A} 的 n 阶子式只有一个 $|\mathbf{A}|$, 所以
 - $|\mathbf{A}| \neq 0, R(\mathbf{A}) = n$, 即可逆矩阵的秩等于它的阶数, 我们又称其为**满秩矩阵**.
 - $|\mathbf{A}| = 0, R(\mathbf{A}) < n$, 即不可逆矩阵的秩小于它的阶数, 我们又称其为**降秩矩阵**.

命题 3

矩阵 \mathbf{A} 的秩与它的转置矩阵 \mathbf{A}^T 的秩相等.

注

- 由行列式按行(列)展开的性质可知, 如果 A 的所有 $r+1$ 阶子式全等于零, 那么所有高于 $r+1$ 阶的子式也全为0. 因此 r 阶非零子式 D 被称为最高阶非零子式.
- 矩阵 A 的秩 $R(A)$ 就是非零子式的最高阶数.
- 如果矩阵 A 中有某个 k 阶子式不为0, 那么 $R(A) \geq k$.
- 如果矩阵 A 中所有 k 阶子式全为0, 那么 $R(A) < k$.
- 对于 n 阶矩阵 A , 由于 A 的 n 阶子式只有一个 $|A|$, 所以
 - $|A| \neq 0, R(A) = n$, 即可逆矩阵的秩等于它的阶数, 我们又称其为**满秩矩阵**.
 - $|A| = 0, R(A) < n$, 即不可逆矩阵的秩小于它的阶数, 我们又称其为**降秩矩阵**.

命题 3

矩阵 A 的秩与它的转置矩阵 A^T 的秩相等.

A^T 的子式都是 A 的子式的转置, 而行列式与其转置行列式相等.

例 1

计算矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ 的秩.

例 1

计算矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ 的秩.

例 2

计算矩阵 $B = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 & 4 & 5 \\ 0 & -2 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 的秩.

当矩阵的行数与列数较高时, 按定义求秩是一件很麻烦的事情.

当矩阵的行数与列数较高时, 按定义求秩是一件很麻烦的事情.

从上述引例我们可以看到:

- 按定义求阶梯形矩阵的秩比较简单.
- 阶梯形矩阵的秩刚好等于它的阶梯数.
- 任何矩阵都可以通过初等行变换化为阶梯形矩阵.

因此, 如果初等行变换不改变矩阵秩的, 那么我们就可以找到一个求矩阵秩的好方法.

当矩阵的行数与列数较高时, 按定义求秩是一件很麻烦的事情.

从上述引例我们可以看到:

- 按定义求阶梯形矩阵的秩比较简单.
- 阶梯形矩阵的秩刚好等于它的阶梯数.
- 任何矩阵都可以通过初等行变换化为阶梯形矩阵.

因此, 如果初等行变换不改变矩阵秩的, 那么我们就可以找到一个求矩阵秩的好方法.

定理 (矩阵秩的算法(1.0))

矩阵的初等行变换不改变矩阵的秩:

当矩阵的行数与列数较高时, 按定义求秩是一件很麻烦的事情.

从上述引例我们可以看到:

- 按定义求阶梯形矩阵的秩比较简单.
- 阶梯形矩阵的秩刚好等于它的阶梯数.
- 任何矩阵都可以通过初等行变换化为阶梯形矩阵.

因此, 如果初等行变换不改变矩阵秩的, 那么我们就可以找到一个求矩阵秩的好方法.

定理 (矩阵秩的算法(1.0))

矩阵的初等行变换不改变矩阵的秩:如果 $\mathbf{A} \xrightarrow{r} \mathbf{B}$, 那么 $R(\mathbf{A}) = R(\mathbf{B})$.

- 我们先观察矩阵A通过一次初等行变换变为矩阵B的情形：
设矩阵A的秩为 r , D 是矩阵A中的 r 阶非零子式, 矩阵B的秩为 t .

- 我们先观察矩阵A通过一次初等行变换变为矩阵B的情形：

设矩阵A的秩为r, D是矩阵A中的r阶非零子式, 矩阵B的秩为t.

(1) $A \xrightarrow{r_i \leftrightarrow r_j} B:$

- 我们在B中总能找到与D相对应的r阶子式 $D_1 = \pm D$, 因此 $D_1 \neq 0$, 即 $t \geq r$.
- 另一方面, 若矩阵A通过一次初等行变换变为矩阵B, 则矩阵B通过一次初等行变换变为矩阵A, 于是类似的结论有 $r \geq t$, 因此 $R(A) = s = t = R(B)$.

- 我们先观察矩阵A通过一次初等行变换变为矩阵B的情形：

设矩阵A的秩为r, D是矩阵A中的r阶非零子式, 矩阵B的秩为t.

(1) $A \xrightarrow{r_i \leftrightarrow r_j} B:$

- 我们在B中总能找到与D相对应的r阶子式 $D_1 = \pm D$, 因此 $D_1 \neq 0$, 即 $t \geq r$.
- 另一方面, 若矩阵A通过一次初等行变换变为矩阵B, 则矩阵B通过一次初等行变换变为矩阵A, 于是类似的结论有 $r \geq t$, 因此 $R(A) = s = t = R(B)$.

(2) $A \xrightarrow{k r_i} B:$

- 我们在B中总能找到与D相对应的r阶子式 $D_1 = D$ 或 $D_1 = kD$, 即 $D_1 \neq 0 \Rightarrow t \geq r$.
- 与(1)的过程类似, 我们有 $r \geq t$, 因此 $R(A) = s = t = R(B)$.

矩阵秩的算法

- 我们先观察矩阵A通过一次初等行变换变为矩阵B的情形：

设矩阵A的秩为r, D是矩阵A中的r阶非零子式, 矩阵B的秩为t.

(1) $A \xrightarrow{r_i \leftrightarrow r_j} B:$

- 我们在B中总能找到与D相对应的r阶子式 $D_1 = \pm D$, 因此 $D_1 \neq 0$, 即 $t \geq r$.
- 另一方面, 若矩阵A通过一次初等行变换变为矩阵B, 则矩阵B通过一次初等行变换变为矩阵A, 于是类似的结论有 $r \geq t$, 因此 $R(A) = s = t = R(B)$.

(2) $A \xrightarrow{k r_i} B:$

- 我们在B中总能找到与D相对应的r阶子式 $D_1 = D$ 或 $D_1 = kD$, 即 $D_1 \neq 0 \Rightarrow t \geq r$.
- 与(1)的过程类似, 我们有 $r \geq t$, 因此 $R(A) = s = t = R(B)$.

(3) $A \xrightarrow{r_i + k r_j} B:$

- 如果非零子式D不包含A中的第i行, 那么在B中能找到r阶子式 $D_1 = D$.
- 如果非零子式D包含A中的第i行, 那么在B中能找到与D相对应的r阶子式 D_1 , 满足

$$D_1 = \begin{vmatrix} \vdots & & & & \vdots \\ a_{ip_1} + ka_{jp_1} & \cdots & a_{ip_r} + ka_{jr_r} & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vdots & & & & \vdots \\ a_{ip_1} & \cdots & a_{ip_r} & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} \vdots & & & & \vdots \\ a_{jp_1} & \cdots & a_{jr_r} & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \end{vmatrix}.$$

- 我们先观察矩阵A通过一次初等行变换变为矩阵B的情形：

(3) $A \xrightarrow{r_i + kr_j} B$:

- 我们记

$$D = \begin{vmatrix} \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{ip_1} & \cdots & a_{ip_r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{jp_1} & \cdots & a_{jp_r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \end{vmatrix}.$$

矩阵秩的算法

- 我们先观察矩阵A通过一次初等行变换变为矩阵B的情形:

(3) $A \xrightarrow{r_i + kr_j} B$:

- 我们记

$$D = \begin{vmatrix} \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{ip_1} & \cdots & a_{ip_r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{jp_1} & \cdots & a_{jp_r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \end{vmatrix}.$$

- 如果非零子式D包含A中的第j行,那么 $D_2 = 0, D_1 = D \neq 0$.
- 如果非零子式D不包含A中的第j行,那么 D_2 也是B中的r阶子式且 $D_1 - kD_2 = D \neq 0$,于是 D_1, D_2 不同时为零,所以B中必有r阶非零子式,即 $t \geq r$.
- 对 $A \xrightarrow{r_i - kr_j} B$ 进行类似的讨论可知 $r \geq t$,即 $R(A) = s = t = R(B)$.

- 我们先观察矩阵A通过一次初等行变换变为矩阵B的情形:

(3) $A \xrightarrow{r_i + kr_j} B$:

- 我们记

$$D = \begin{vmatrix} \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{ip_1} & \cdots & a_{ip_r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{jp_1} & \cdots & a_{jp_r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \end{vmatrix}.$$

- 如果非零子式D包含A中的第j行,那么 $D_2 = 0, D_1 = D \neq 0$.
 - 如果非零子式D不包含A中的第j行,那么 D_2 也是B中的r阶子式且 $D_1 - kD_2 = D \neq 0$,于是 D_1, D_2 不同时为零,所以B中必有r阶非零子式,即 $t \geq r$.
 - 对 $A \xrightarrow{r_i - kr_j} B$ 进行类似的讨论可知 $r \geq t$,即 $R(A) = s = t = R(B)$.
- 如果经过一次初等行变换不改变矩阵的秩,那么经过**有限次**初等行变换也不改变矩阵的秩.

- 我们先观察矩阵A通过一次初等行变换变为矩阵B的情形:

$$(3) \ A \xrightarrow{r_i + kr_j} B:$$

- 我们记

$$D = \begin{vmatrix} \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{ip_1} & \cdots & a_{ip_r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{jp_1} & \cdots & a_{jp_r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \end{vmatrix}.$$

- 如果非零子式D包含A中的第j行,那么 $D_2 = 0, D_1 = D \neq 0$.
- 如果非零子式D不包含A中的第j行,那么 D_2 也是B中的r阶子式且 $D_1 - kD_2 = D \neq 0$,于是 D_1, D_2 不同时为零,所以B中必有r阶非零子式,即 $t \geq r$.
- 对 $A \xrightarrow{r_i - kr_j} B$ 进行类似的讨论可知 $r \geq t$,即 $R(A) = s = t = R(B)$.
- 如果经过一次初等行变换不改变矩阵的秩,那么经过**有限次**初等行变换也不改变矩阵的秩.
- 对矩阵A实施初等列变换变为矩阵B相当于对矩阵 A^T 实施初等行变换变为矩阵 B^T ,而 $R(A) = R(A^T) = R(B^T) = R(B)$,所以对矩阵A实施初等列变换变为矩阵B仍有 $R(A) = R(B)$.

定理 (矩阵秩的算法(2.0))

矩阵的初等变换不改变矩阵的秩：

定理 (矩阵秩的算法(2.0))

矩阵的初等变换不改变矩阵的秩:如果 $A \sim B$, 那么 $R(A) = R(B)$.

例 3

计算矩阵 $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & 6 & 0 \end{bmatrix}$ 的秩.

向量组的秩与矩阵的秩的关系

一个 $m \times n$ 矩阵

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \dots, \boldsymbol{\alpha}_n) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\beta}_1^T \\ \boldsymbol{\beta}_2^T \\ \vdots \\ \boldsymbol{\beta}_m^T \end{bmatrix}$$

对应两个向量组: 行向量组 $\boldsymbol{\beta}_1^T, \boldsymbol{\beta}_2^T, \dots, \boldsymbol{\beta}_m^T$, 列向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \dots, \boldsymbol{\alpha}_n$.

向量组的秩与矩阵的秩的关系

一个 $m \times n$ 矩阵

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \dots, \boldsymbol{\alpha}_n) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\beta}_1^T \\ \boldsymbol{\beta}_2^T \\ \vdots \\ \boldsymbol{\beta}_m^T \end{bmatrix}$$

对应两个向量组: 行向量组 $\boldsymbol{\beta}_1^T, \boldsymbol{\beta}_2^T, \dots, \boldsymbol{\beta}_m^T$, 列向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \dots, \boldsymbol{\alpha}_n$.

问题

矩阵行向量组的秩、列向量组的秩以及矩阵的秩三者之间有什么关系?

定理 (向量组的秩与矩阵的秩的关系)

矩阵的行向量组的秩与它的列向量组的秩相等,都等于矩阵的秩.

定理 (向量组的秩与矩阵的秩的关系)

矩阵的行向量组的秩与它的列向量组的秩相等,都等于矩阵的秩.

设矩阵

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \dots, \boldsymbol{\alpha}_n) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\beta}_1^T \\ \boldsymbol{\beta}_2^T \\ \vdots \\ \boldsymbol{\beta}_m^T \end{bmatrix}.$$

定理 (向量组的秩与矩阵的秩的关系)

矩阵的行向量组的秩与它的列向量组的秩相等,都等于矩阵的秩.

设矩阵

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \dots, \boldsymbol{\alpha}_n) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\beta}_1^T \\ \boldsymbol{\beta}_2^T \\ \vdots \\ \boldsymbol{\beta}_m^T \end{bmatrix}.$$

我们记

- 矩阵 \mathbf{A} 的行向量组的秩记为 R_{row} ;矩阵 \mathbf{A} 的列向量组的秩记为 R_{col} .
- 矩阵 \mathbf{A} 的秩记为 $R(\mathbf{A})$.

- 我们验证 $R_{\text{col}} = R(\mathbf{A})$.

设 $R(\mathbf{A}) = r$, 那么矩阵 \mathbf{A} 中存在一个 r 阶子式不为零, 而所有阶数大于 r 的子式全为零.

- 我们验证 $R_{\text{col}} = R(\mathbf{A})$.

设 $R(\mathbf{A}) = r$, 那么矩阵 \mathbf{A} 中存在一个 r 阶子式不为零, 而所有阶数大于 r 的子式全为零. 我们不妨设矩阵 \mathbf{A} 的前 r 行、 r 列构成的 r 阶子式是非零子式:

$$D_r := \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0.$$

这说明齐次线性方程组 (E_1)

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (E_1)$$

只有零解.

向量组的秩与矩阵的秩的关系

- 因而向量组 $\alpha'_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{rj} \end{bmatrix}$ ($j = 1, 2, \dots, r$) 线性无关. 而齐次线性方程组(E_2)

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{13} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rr} \\ a_{r+1,1} & a_{r+1,2} & \cdots & a_{r+1,1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_r \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (E_2)$$

的解一定是方程组(E_1)的解, 即方程组(E_2)也仅有零解.

- 向量组 $\alpha'_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{rj} \end{bmatrix}$ ($j = 1, 2, \dots, r$) 的每个向量填加若干分量所得的向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 线性无关.

- 向量组 $\alpha'_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{rj} \end{bmatrix}$ ($j = 1, 2, \dots, r$) 的每个向量填加若干分量所得的向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 线性无关.
- 我们验证矩阵 A 的每一个列向量 α_k ($k = 1, 2, \dots, n$) 均可由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 线性表示:
 - (1) 当 $1 \leq k \leq r$ 时, 显然 α_k 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 线性表示.

- 向量组 $\alpha'_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{rj} \end{bmatrix}$ ($j = 1, 2, \dots, r$) 的每个向量填加若干分量所得的向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 线性无关.
- 我们验证矩阵 A 的每一个列向量 α_k ($k = 1, 2, \dots, n$) 均可由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 线性表示:
 - 当 $1 \leq k \leq r$ 时, 显然 α_k 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 线性表示.
 - 当 $r + 1 \leq k \leq n$ 时, 构造矩阵

$$\mathbf{A}' = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r, \alpha_k) = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} & a_{1k} \\ a_{21} & \cdots & a_{2r} & a_{2k} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mr} & a_{mk} \end{bmatrix}.$$

- \mathbf{A}' 中的所有子式均是 \mathbf{A} 中的子式, 从而 \mathbf{A}' 中存在一个不为零的 r 阶子式 D_r 且所有 $r+1$ 阶子式均为零, 因此 $R(\mathbf{A}') = r$.

- \mathbf{A}' 中的所有子式均是 \mathbf{A} 中的子式, 从而 \mathbf{A}' 中存在一个不为零的 r 阶子式 D_r 且所有 $r+1$ 阶子式均为零, 因此 $R(\mathbf{A}') = r$.
- 考虑齐次线性方程组

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} & a_{1k} \\ a_{21} & \cdots & a_{2r} & a_{2k} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mr} & a_{mk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{r+1} \end{bmatrix} = \mathbf{0}. \quad (E_3)$$

对系数矩阵 \mathbf{A}' 实施初等行变换化为简化阶梯形矩阵 \mathbf{R} , 那么 \mathbf{R} 中第一个非零元的个数是 r , 小于未知量的个数 $r+1$, 因此齐次线性方程组 (E_3) 一定有非零解, 从而向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r, \alpha_k$ 线性相关.

- 结合向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 线性无关, 我们得到向量 α_k 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 线性表示($k = 1, 2, \dots, n$).

- 上述讨论说明, 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 就是矩阵 A 的列向量组的一个极大无关组, 从而有 $R_{\text{col}} = r = R(A)$.
- 由于矩阵 A 的行向量组是矩阵 A^T 的列向量组, 所以有 $R_{\text{row}} = R(A^T) = R(A)$.

- 上述讨论说明, 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 就是矩阵 A 的列向量组的一个极大无关组, 从而有 $R_{\text{col}} = r = R(\mathbf{A})$.
- 由于矩阵 A 的行向量组是矩阵 \mathbf{A}^T 的列向量组, 所以有 $R_{\text{row}} = R(\mathbf{A}^T) = R(\mathbf{A})$.

结论

上述定理给出了以下求向量组的秩的算法:

- (1) 以所给的向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 列构造矩阵 $\mathbf{A} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$;
- (2) 对矩阵 A 实施初等行变换化为阶梯形矩阵 B;
- (3) 根据矩阵 B 的阶梯数给出矩阵 A 的秩, 即为向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 的秩.

注

若将矩阵B化为行最简形矩阵 $R = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$, 则原向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 与行最简形矩阵的行向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ 有相同的线性相关性, 从而我们可以根据向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ 的极大无关组给出向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 的极大无关组, 并给出不属于极大无关组的向量由极大无关组线性表示的表示式.

注

若将矩阵B化为行最简形矩阵 $R = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$, 则原向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 与行最简形矩阵的行向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ 有相同的线性相关性, 从而我们可以根据向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ 的极大无关组给出向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 的极大无关组, 并给出不属于极大无关组的向量由极大无关组线性表示的表示式.

例

计算向量组

$$\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}, \alpha_3 = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 15 \\ -10 \end{bmatrix}, \alpha_4 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -6 \\ 5 \end{bmatrix}, \alpha_5 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \\ -4 \end{bmatrix}$$

的秩和一个极大无关组, 并把不属于极大无关组的向量用极大无关组线性表示.

令矩阵 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5)$. 对矩阵A实施初等行变换化为行最简形矩阵R:

$$A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 5 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -3 & 15 & -6 & 5 \\ 0 & 1 & -10 & 5 & -4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 5 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & -10 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -10 & 5 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -10 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5) = R.$$

- $R(\mathbf{R}) = 3$ 可知 $R(\mathbf{A}) = 3$. \mathbf{R} 中的 3 阶非零子式为 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 1 \neq 0$, 所以 $\beta_1, \beta_2, \beta_5$ 是 \mathbf{R} 的列向量组的极大无关组.
- $\beta_3 = -5\beta_1 - 10\beta_2 + 0 \cdot \beta_5, \beta_4 = 3\beta_1 + 5\beta_2 + 0 \cdot \beta_5$.

向量组的秩与矩阵的秩的关系

- $R(\mathbf{R}) = 3$ 可知 $R(\mathbf{A}) = 3$. \mathbf{R} 中的 3 阶非零子式为 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 1 \neq 0$, 所

以 $\beta_1, \beta_2, \beta_5$ 是 \mathbf{R} 的列向量组的极大无关组.

- $\beta_3 = -5\beta_1 - 10\beta_2 + 0 \cdot \beta_5, \beta_4 = 3\beta_1 + 5\beta_2 + 0 \cdot \beta_5.$
- 由于向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ 与向量组 $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5$ 有相同的线性相关性,
所以 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_5$ 是向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ 的极大无关组且有

$$\alpha_3 = -5\alpha_1 - 10\alpha_2 + 0 \cdot \alpha_5, \alpha_4 = 3\alpha_1 + 5\alpha_2 + 0 \cdot \alpha_5.$$

- $R(\mathbf{R}) = 3$ 可知 $R(\mathbf{A}) = 3$. \mathbf{R} 中的 3 阶非零子式为 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 1 \neq 0$, 所

以 $\beta_1, \beta_2, \beta_5$ 是 \mathbf{R} 的列向量组的极大无关组.

- $\beta_3 = -5\beta_1 - 10\beta_2 + 0 \cdot \beta_5, \beta_4 = 3\beta_1 + 5\beta_2 + 0 \cdot \beta_5.$
- 由于向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ 与向量组 $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5$ 有相同的线性相关性,
所以 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_5$ 是向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ 的极大无关组且有

$$\alpha_3 = -5\alpha_1 - 10\alpha_2 + 0 \cdot \alpha_5, \alpha_4 = 3\alpha_1 + 5\alpha_2 + 0 \cdot \alpha_5.$$

注

- 若 m 个方程 n 个未知量的线性方程组 $\mathbf{A}_{m \times n}\mathbf{x} = \beta$ 的增广矩阵的秩 $R(\tilde{\mathbf{A}}) < m$, 则增广矩阵的行向量组线性相关, 此时线性方程组就有多余方程.
- 当我们将增广矩阵的行向量组的极大无关组找到后, 那些不属于极大无关组的行向量所对应的方程就是多余方程.

线性方程组解的结构

我们已经讨论了：

- 非齐次线性方程组的解与它的增广矩阵之间的关系.
- 齐次线性方程组的解与它的系数矩阵之间的关系.

我们已经讨论了：

- 非齐次线性方程组的解与它的增广矩阵之间的关系.
- 齐次线性方程组的解与它的系数矩阵之间的关系.

本节我们主要探究以下内容：

- 我们首先利用矩阵的秩来重新表述非齐次线性方程组的解与它的增广矩阵、齐次线性方程组的解与它的系数矩阵之间的关系;
- 我们给出线性方程组的解的结构,即当线性方程组有多个解时,该方程解与解之间的关系.

n 元非齐次线性方程组有解的判定定理

设 n 元非齐次线性方程组为

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots \cdots \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \quad (\Delta_1)$$

将该线性方程组的系数矩阵和增广矩阵分别记为

$$\mathbf{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n), \quad \tilde{\mathbf{A}} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n \mid \boldsymbol{\beta}),$$

其中

$$\boldsymbol{\alpha}_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix} \quad (j = 1, 2, \cdots, n), \quad \boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

n 元非齐次线性方程组有解的判定定理

对增广矩阵A实施初等行变换，化为行最简形矩阵 $\tilde{\mathbf{R}}$.

为叙述方便，我们不妨设

$$\tilde{\mathbf{R}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & a'_{1,r+1} & \cdots & a'_{1n} & d_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & a'_{2,r+1} & \cdots & a'_{2n} & d_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & a'_{r,r+1} & \cdots & a'_{rn} & d_r \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & d_{r+1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

n 元非齐次线性方程组有解的判定定理

对增广矩阵A实施初等行变换，化为行最简形矩阵 $\tilde{\mathbf{R}}$.

为叙述方便，我们不妨设

$$\tilde{\mathbf{R}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & a'_{1,r+1} & \cdots & a'_{1n} & d_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & a'_{2,r+1} & \cdots & a'_{2n} & d_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & a'_{r,r+1} & \cdots & a'_{rn} & d_r \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & d_{r+1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- $\tilde{\mathbf{R}}$ 的前 n 列就是系数矩阵的行最简形.

- 线性方程组(Δ_1)无解当且仅当 $\tilde{\mathbf{R}}$ 的第一个非零元出现在 $\tilde{\mathbf{R}}$ 的最后一列,
即 $d_{r+1} \neq 0$,此时 $R(\mathbf{A}) = r$,而 $R(\tilde{\mathbf{A}}) = r + 1$.

- 线性方程组(Δ_1)无解当且仅当 $\tilde{\mathbf{R}}$ 的第一个非零元出现在 $\tilde{\mathbf{R}}$ 的最后一列,
即 $d_{r+1} \neq 0$,此时 $R(\mathbf{A}) = r$,而 $R(\tilde{\mathbf{A}}) = r + 1$.
- 线性方程组(Δ_1)一定有解当且仅当 $\tilde{\mathbf{R}}$ 的第一个非零元不出现在 $\tilde{\mathbf{R}}$ 的最后一列,
即 $d_{r+1} = 0$,此时 $R(\mathbf{A}) = R(\tilde{\mathbf{A}})$.

- 线性方程组(Δ_1)无解当且仅当 $\tilde{\mathbf{R}}$ 的第一个非零元出现在 $\tilde{\mathbf{R}}$ 的最后一列,
即 $d_{r+1} \neq 0$,此时 $R(\mathbf{A}) = r$,而 $R(\tilde{\mathbf{A}}) = r + 1$.
- 线性方程组(Δ_1)一定有解当且仅当 $\tilde{\mathbf{R}}$ 的第一个非零元不出现在 $\tilde{\mathbf{R}}$ 的最后一列,
即 $d_{r+1} = 0$,此时 $R(\mathbf{A}) = R(\tilde{\mathbf{A}})$.
- 当 $R(\mathbf{A}) = R(\tilde{\mathbf{A}}) = n$ 时, $\tilde{\mathbf{R}}$ 的第一个非零元的个数等于未知量的个数,从而线性
方程组(Δ_1)有唯一解.

- 线性方程组(Δ_1)无解当且仅当 $\tilde{\mathbf{R}}$ 的第一个非零元出现在 $\tilde{\mathbf{R}}$ 的最后一列, 即 $d_{r+1} \neq 0$, 此时 $R(\mathbf{A}) = r$, 而 $R(\tilde{\mathbf{A}}) = r + 1$.
- 线性方程组(Δ_1)一定有解当且仅当 $\tilde{\mathbf{R}}$ 的第一个非零元不出现在 $\tilde{\mathbf{R}}$ 的最后一列, 即 $d_{r+1} = 0$, 此时 $R(\mathbf{A}) = R(\tilde{\mathbf{A}})$.
- 当 $R(\mathbf{A}) = R(\tilde{\mathbf{A}}) = n$ 时, $\tilde{\mathbf{R}}$ 的第一个非零元的个数等于未知量的个数, 从而线性方程组(Δ_1)有唯一解.
- 当 $R(\mathbf{A}) = R(\tilde{\mathbf{A}}) = r < n$ 时, 第一个非零元的个数小于未知量的个数, 从而线性方程组(Δ_1)有无穷多解.

- 线性方程组(Δ_1)无解当且仅当 $\tilde{\mathbf{R}}$ 的第一个非零元出现在 $\tilde{\mathbf{R}}$ 的最后一列, 即 $d_{r+1} \neq 0$, 此时 $R(\mathbf{A}) = r$, 而 $R(\tilde{\mathbf{A}}) = r + 1$.
- 线性方程组(Δ_1)一定有解当且仅当 $\tilde{\mathbf{R}}$ 的第一个非零元不出现在 $\tilde{\mathbf{R}}$ 的最后一列, 即 $d_{r+1} = 0$, 此时 $R(\mathbf{A}) = R(\tilde{\mathbf{A}})$.
- 当 $R(\mathbf{A}) = R(\tilde{\mathbf{A}}) = n$ 时, $\tilde{\mathbf{R}}$ 的第一个非零元的个数等于未知量的个数, 从而线性方程组(Δ_1)有唯一解.
- 当 $R(\mathbf{A}) = R(\tilde{\mathbf{A}}) = r < n$ 时, 第一个非零元的个数小于未知量的个数, 从而线性方程组(Δ_1)有无穷多解.

定理 (n 元非齐次线性方程组有解判定定理)

1. 线性方程组(Δ_1)无解当且仅当 $R(\mathbf{A}) < R(\tilde{\mathbf{A}})$.
2. 线性方程组(Δ_1)有解当且仅当 $R(\mathbf{A}) = R(\tilde{\mathbf{A}})$:

- 线性方程组(Δ_1)无解当且仅当 $\tilde{\mathbf{R}}$ 的第一个非零元出现在 $\tilde{\mathbf{R}}$ 的最后一列, 即 $d_{r+1} \neq 0$, 此时 $R(\mathbf{A}) = r$, 而 $R(\tilde{\mathbf{A}}) = r + 1$.
- 线性方程组(Δ_1)一定有解当且仅当 $\tilde{\mathbf{R}}$ 的第一个非零元不出现在 $\tilde{\mathbf{R}}$ 的最后一列, 即 $d_{r+1} = 0$, 此时 $R(\mathbf{A}) = R(\tilde{\mathbf{A}})$.
- 当 $R(\mathbf{A}) = R(\tilde{\mathbf{A}}) = n$ 时, $\tilde{\mathbf{R}}$ 的第一个非零元的个数等于未知量的个数, 从而线性方程组(Δ_1)有唯一解.
- 当 $R(\mathbf{A}) = R(\tilde{\mathbf{A}}) = r < n$ 时, 第一个非零元的个数小于未知量的个数, 从而线性方程组(Δ_1)有无穷多解.

定理 (n 元非齐次线性方程组有解判定定理)

1. 线性方程组(Δ_1)无解当且仅当 $R(\mathbf{A}) < R(\tilde{\mathbf{A}})$.
2. 线性方程组(Δ_1)有解当且仅当 $R(\mathbf{A}) = R(\tilde{\mathbf{A}})$:
 - 当 $R(\mathbf{A}) = R(\tilde{\mathbf{A}}) = n$ 时, 线性方程组(Δ_1)有唯一解;
 - 当 $R(\mathbf{A}) = R(\tilde{\mathbf{A}}) = r < n$ 时, 线性方程组(Δ_1)有无穷多解.

设 n 元齐次线性方程组为

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \cdots \cdots \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases} \quad (\Delta_2)$$

线性方程组 (Δ_2) 可以看成是线性方程组 (Δ_1) 当常数 $b_1 = b_2 = \cdots = b_m = 0$ 时的特殊情形.

设 n 元齐次线性方程组为

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \cdots \cdots \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases} \quad (\Delta_2)$$

线性方程组 (Δ_2) 可以看成是线性方程组 (Δ_1) 当常数 $b_1 = b_2 = \cdots = b_m = 0$ 时的特殊情形.

定理 (n 元齐次线性方程组有解的判定定理)

1. 线性方程组 (Δ_2) 只有零解当且仅当 $R(\mathbf{A}) = n$.
2. 线性方程组 (Δ_2) 有非零解当且仅当 $R(\mathbf{A}) < n$.

定理 (矩阵方程有解判定定理)

矩阵方程 $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ 有解当且仅当 $R(\mathbf{A}) = R(\mathbf{A}, \mathbf{B})$.

定理 (矩阵方程有解判定定理)

矩阵方程 $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ 有解当且仅当 $R(\mathbf{A}) = R(\mathbf{A}, \mathbf{B})$.

设 \mathbf{A} 为 $m \times n$ 矩阵, \mathbf{B} 为 $m \times t$, 矩阵 \mathbf{X} 为 $n \times t$ 矩阵. 将 \mathbf{X} 和 \mathbf{B} 按列分块, 记为

$$\mathbf{X} = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_t), \quad \mathbf{B} = (\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \dots, \boldsymbol{\beta}_t),$$

那么矩阵方程 $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ 等价于

$$\mathbf{Ax}_j = \boldsymbol{\beta}_j, \quad j = 1, 2, \dots, t.$$

定理 (矩阵方程有解判定定理)

矩阵方程 $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ 有解当且仅当 $R(\mathbf{A}) = R(\mathbf{A}, \mathbf{B})$.

设 \mathbf{A} 为 $m \times n$ 矩阵, \mathbf{B} 为 $m \times t$, 矩阵 \mathbf{X} 为 $n \times t$ 矩阵. 将 \mathbf{X} 和 \mathbf{B} 按列分块, 记为

$$\mathbf{X} = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_t), \quad \mathbf{B} = (\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \dots, \boldsymbol{\beta}_t),$$

那么矩阵方程 $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ 等价于

$$\mathbf{Ax}_j = \boldsymbol{\beta}_j, \quad j = 1, 2, \dots, t.$$

设 $R(\mathbf{A}) = r$ 且 \mathbf{A} 的行最简形为 $\tilde{\mathbf{A}}$, 那么 $\tilde{\mathbf{A}}$ 有 r 个非零行, 它的后 $m - r$ 行全为零.

定理 (矩阵方程有解判定定理)

矩阵方程 $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ 有解当且仅当 $R(\mathbf{A}) = R(\mathbf{A}, \mathbf{B})$.

设 \mathbf{A} 为 $m \times n$ 矩阵, \mathbf{B} 为 $m \times t$, 矩阵 \mathbf{X} 为 $n \times t$ 矩阵. 将 \mathbf{X} 和 \mathbf{B} 按列分块, 记为

$$\mathbf{X} = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_t), \quad \mathbf{B} = (\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \dots, \boldsymbol{\beta}_t),$$

那么矩阵方程 $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ 等价于

$$\mathbf{Ax}_j = \boldsymbol{\beta}_j, \quad j = 1, 2, \dots, t.$$

设 $R(\mathbf{A}) = r$ 且 \mathbf{A} 的行最简形为 $\tilde{\mathbf{A}}$, 那么 $\tilde{\mathbf{A}}$ 有 r 个非零行, 它的后 $m - r$ 行全为零. 对分块矩阵 (\mathbf{A}, \mathbf{B}) 实施初等行变换

$$(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = (\mathbf{A}, \boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \dots, \boldsymbol{\beta}_t) \xrightarrow{r} (\tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\boldsymbol{\beta}}_1, \tilde{\boldsymbol{\beta}}_2, \dots, \tilde{\boldsymbol{\beta}}_t).$$

于是

$$(\mathbf{A}, \boldsymbol{\beta}_j) \xrightarrow{r} (\tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\boldsymbol{\beta}}_j), \quad j = 1, 2, \dots, t.$$

于是

$$(\mathbf{A}, \boldsymbol{\beta}_j) \xrightarrow{r} (\tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\boldsymbol{\beta}}_j), \quad j = 1, 2, \dots, t.$$

因此

$$\begin{aligned} \text{矩阵方程 } \mathbf{AX} = \mathbf{B} \text{ 有解} &\Leftrightarrow \mathbf{Ax}_j = \boldsymbol{\beta}_j (j = 1, 2, \dots, t) \text{ 有解} \\ &\Leftrightarrow R(\mathbf{A}, \boldsymbol{\beta}_j) = R(\mathbf{A}) (j = 1, 2, \dots, t) \\ &\Leftrightarrow \tilde{\boldsymbol{\beta}}_j (j = 1, 2, \dots, t) \text{ 的后 } m - r \text{ 个元全为零} \\ &\Leftrightarrow (\tilde{\boldsymbol{\beta}}_1, \tilde{\boldsymbol{\beta}}_2, \dots, \tilde{\boldsymbol{\beta}}_t) \text{ 的后 } m - r \text{ 个元全为零} \\ &\Leftrightarrow R(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = r = R(\mathbf{A}). \end{aligned}$$

将线性方程组(Δ_2)写成 $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$, 其中

$$\mathbf{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \dots, \boldsymbol{\alpha}_n), \quad \boldsymbol{\alpha}_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix} \quad (j = 1, 2, \dots, n), \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

齐次线性方程组解的结构

将线性方程组(Δ_2)写成 $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$, 其中

$$\mathbf{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \dots, \boldsymbol{\alpha}_n), \quad \boldsymbol{\alpha}_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix} \quad (j = 1, 2, \dots, n), \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

如果 $x_1 = k_1, x_2 = k_2, \dots, x_n = k_n$ 是方程组(Δ_2)的解, 那么我们称向量

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{bmatrix}$$

是方程组(Δ_2)的解向量, 也称为 $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 的解.

记方程组(Δ_2)的解向量全体所成的集合为

$$S := \{\xi \mid A\xi = 0\}.$$

记方程组(Δ_2)的解向量全体所成的集合为

$$S := \{\xi \mid A\xi = 0\}.$$

性质 (解向量集合 S 对向量线性运算封闭性)

- 对任意 $\alpha, \beta \in S$, 那么 $\alpha + \beta \in S$, 即 S 对向量的加法运算封闭.
- 对任意 $\alpha \in S$ 及任意 $k \in \mathbb{R}$, 那么 $k\alpha \in S$, 即 S 对向量的数量乘法运算封闭.

记方程组(Δ_2)的解向量全体所成的集合为

$$S := \{\xi \mid \mathbf{A}\xi = \mathbf{0}\}.$$

性质 (解向量集合 S 对向量线性运算封闭性)

- 对任意 $\alpha, \beta \in S$, 那么 $\alpha + \beta \in S$, 即 S 对向量的加法运算封闭.
- 对任意 $\alpha \in S$ 及任意 $k \in \mathbb{R}$, 那么 $k\alpha \in S$, 即 S 对向量的数量乘法运算封闭.

对任意 $\alpha, \beta \in S$ 及任意 $k \in \mathbb{R}$,

- $\alpha, \beta \in S \Rightarrow \mathbf{A}\alpha = \mathbf{0}, \mathbf{A}\beta = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{A}(\alpha + \beta) = \mathbf{A}\alpha + \mathbf{A}\beta = \mathbf{0} \Rightarrow \alpha + \beta \in S$.
- $\alpha \in S, k \in \mathbb{R} \Rightarrow \mathbf{A}\alpha = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{A}(k\alpha) = k\mathbf{A}\alpha = k\mathbf{0} = \mathbf{0} \Rightarrow k\alpha \in S$.

注

由上述性质可知, 如果 $\mathcal{A} : (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_t) \subseteq S$, 即都是齐次线性方程组 $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ 的解, 那么

$$\{k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_t\alpha_t \mid k_1, k_2, \dots, k_t \in \mathbb{R}, \alpha_j \in \mathcal{A}, j = 1, 2, \dots, t\} \subseteq S.$$

因此, 在 $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ 有非零解的情况下, 如果向量组 $\mathcal{A} : (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_t)$ 是解集 S 的极大无关组, 那么我们称表达式

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_t\alpha_t \tag{S_2}$$

为方程组 (Δ_2) 的通解.

注

由上述性质可知, 如果 $\mathcal{A} : (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_t) \subseteq S$, 即都是齐次线性方程组 $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ 的解, 那么

$$\{k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_t\alpha_t \mid k_1, k_2, \dots, k_t \in \mathbb{R}, \alpha_j \in \mathcal{A}, j = 1, 2, \dots, t\} \subseteq S.$$

因此, 在 $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ 有非零解的情况下, 如果向量组 $\mathcal{A} : (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_t)$ 是解集 S 的极大无关组, 那么我们称表达式

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_t\alpha_t \tag{S_2}$$

为方程组 (Δ_2) 的通解.

定义

齐次线性方程组解集的极大无关组称为齐次线性方程组的基础解系.

定理 (齐次线性方程组的基础解系)

设 $m \times n$ 矩阵A的秩 $R(\mathbf{A}) = r < n$, 那么n元齐次线性方程组 $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ 一定有基础解系, 且基础解系中所含向量的个数为 $n - r$, 即解集S的秩 $R_S = n - r$.

定理 (齐次线性方程组的基础解系)

设 $m \times n$ 矩阵 \mathbf{A} 的秩 $R(\mathbf{A}) = r < n$, 那么 n 元齐次线性方程组 $\mathbf{Ax} = 0$ 一定有基础解系, 且基础解系中所含向量的个数为 $n - r$, 即解集 S 的秩 $R_S = n - r$.

我们不妨设矩阵 \mathbf{A} 的前 r 个列向量线性无关, 那么 \mathbf{A} 具有行最简形矩阵:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & c_{1,r+1} & \cdots & c_{1n} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & c_{2,r+1} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & c_{r,r+1} & \cdots & c_{rn} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

矩阵R对应的方程组为

$$\begin{cases} x_1 + c_{1,r+1}x_{r+1} + \cdots + c_{1n}x_n = 0, \\ x_2 + c_{2,r+1}x_{r+1} + \cdots + c_{2n}x_n = 0, \\ \cdots \cdots \cdots \\ x_r + c_{r,r+1}x_{r+1} + \cdots + c_{rn}x_n = 0. \end{cases}$$

矩阵R对应的方程组为

$$\begin{cases} x_1 + c_{1,r+1}x_{r+1} + \cdots + c_{1n}x_n = 0, \\ x_2 + c_{2,r+1}x_{r+1} + \cdots + c_{2n}x_n = 0, \\ \cdots \cdots \cdots \\ x_r + c_{r,r+1}x_{r+1} + \cdots + c_{rn}x_n = 0. \end{cases}$$

将矩阵R的非零行的第一个非零元对应的未知量看成固定未知量留在等号的左端, 而其余的未知量看成自由未知量放在等号右端, 得到方程

$$\begin{cases} x_1 = -c_{1,r+1}x_{r+1} - \cdots - c_{1n}x_n, \\ x_2 = -c_{2,r+1}x_{r+1} - \cdots - c_{2n}x_n, \\ \cdots \cdots \cdots \\ x_r = -c_{r,r+1}x_{r+1} - \cdots - c_{rn}x_n. \end{cases} \quad (1)$$

令 $\begin{bmatrix} x_{r+1} \\ x_{r+2} \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ 分别取

$$\underbrace{\left[\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array} \right], \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{array} \right], \dots, \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{array} \right]}_{\text{共 } n-r \text{ 个}}, \quad (F_1)$$

令 $\begin{bmatrix} x_{r+1} \\ x_{r+2} \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ 分别取

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}}_{\text{共 } n-r \text{ 个}}.$$
(F₁)

将(F₁)代入方程(1), 相应地有

$$\begin{bmatrix} x_{r+1} \\ x_{r+2} \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c_{1,r+1} \\ -c_{2,r+1} \\ \vdots \\ -c_{r,r+1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -c_{1,r+2} \\ -c_{2,r+2} \\ \vdots \\ -c_{r,r+2} \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} -c_{1n} \\ -c_{2n} \\ \vdots \\ -c_{rn} \end{bmatrix}.$$

于是我们得到 $n - r$ 个解向量:

$$\xi_1 = \begin{bmatrix} -c_{1,r+1} \\ -c_{2,r+1} \\ \vdots \\ -c_{r,r+1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \xi_2 = \begin{bmatrix} -c_{1,r+2} \\ -c_{2,r+2} \\ \vdots \\ -c_{r,r+2} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, \xi_{n-r} = \begin{bmatrix} -c_{1n} \\ -c_{2n} \\ \vdots \\ -c_{rn} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}.$$

于是我们得到 $n - r$ 个解向量:

$$\xi_1 = \begin{bmatrix} -c_{1,r+1} \\ -c_{2,r+1} \\ \vdots \\ -c_{r,r+1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \xi_2 = \begin{bmatrix} -c_{1,r+2} \\ -c_{2,r+2} \\ \vdots \\ -c_{r,r+2} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, \xi_{n-r} = \begin{bmatrix} -c_{1n} \\ -c_{2n} \\ \vdots \\ -c_{rn} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}.$$

由于向量 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-r}$ 可看成是 (F_1) 中的 $n - r$ 个向量分别添加了 r 个分量后所得到, 而 (F_1) 中的 $n - r$ 个向量线性无关, 因此向量 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-r}$ 线性无关.

现在假设 n 元齐次线性方程组 $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ 的任一解向量为

$$\zeta = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{bmatrix},$$

那么 k_1, k_2, \dots, k_n 必然满足方程组(1):

$$\left\{ \begin{array}{l} k_1 = -c_{1,r+1}k_{r+1} - \cdots - c_{1n}k_n, \\ k_2 = -c_{2,r+1}k_{r+1} - \cdots - c_{2n}k_n, \\ \cdots \cdots \cdots \\ k_r = -c_{r,r+1}k_{r+1} - \cdots - c_{rn}k_n. \end{array} \right.$$

于是

$$\zeta = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_r \\ k_{r+1} \\ k_{r+2} \\ \vdots \\ k_n \end{bmatrix} = k_{r+1} \begin{bmatrix} -c_{1,r+1} \\ -c_{2,r+1} \\ \vdots \\ -c_{r,r+1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + k_{r+2} \begin{bmatrix} -c_{1,r+2} \\ -c_{2,r+2} \\ \vdots \\ -c_{r,r+2} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \cdots + k_n \begin{bmatrix} -c_{1n} \\ -c_{2n} \\ \vdots \\ -c_{rn} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}.$$

于是

$$\zeta = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_r \\ k_{r+1} \\ k_{r+2} \\ \vdots \\ k_n \end{bmatrix} = k_{r+1} \begin{bmatrix} -c_{1,r+1} \\ -c_{2,r+1} \\ \vdots \\ -c_{r,r+1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + k_{r+2} \begin{bmatrix} -c_{1,r+2} \\ -c_{2,r+2} \\ \vdots \\ -c_{r,r+2} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \cdots + k_n \begin{bmatrix} -c_{1n} \\ -c_{2n} \\ \vdots \\ -c_{rn} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}.$$

或者

$$\zeta = k_{r+1} \xi_1 + k_{r+2} \xi_2 + \cdots + k_n \xi_{n-r},$$

即任一解向量 ζ 均可以由 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-r}$ 线性表示, 所以向量组 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-r}$ 就是 n 元齐次线性方程组 $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 的一个基础解系.

将线性方程组(Δ_1)写成 $\mathbf{Ax} = \beta$, 其中

$$\mathbf{A} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n), \quad \alpha_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix} \quad (j = 1, 2, \dots, n), \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \beta = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

如果系数矩阵 \mathbf{A} 不变, 我们将常数项列向量 β 换成零向量 $\mathbf{0}$ 即可得到线性方程组(Δ_2).

将线性方程组(Δ_1)写成 $\mathbf{Ax} = \beta$, 其中

$$\mathbf{A} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n), \quad \alpha_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix} \quad (j = 1, 2, \dots, n), \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \beta = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

如果系数矩阵 \mathbf{A} 不变, 我们将常数项列向量 β 换成零向量 $\mathbf{0}$ 即可得到线性方程组(Δ_2).

定义

我们称上述齐次线性方程组 $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ 为非齐次线性方程组 $\mathbf{Ax} = \beta$ 的导出组(系数矩阵 \mathbf{A} 不变).

记方程组(Δ_1)的解向量全体所成的集合为

$$S^* := \{\xi \mid A\xi = \beta\}.$$

记方程组(Δ_1)的解向量全体所成的集合为

$$S^* := \{\xi \mid A\xi = \beta\}.$$

性质 (解向量集合 S^* 的性质)

- 对任意 $\xi, \zeta \in S^*$, $\xi - \zeta \in S$, 即 $\xi - \zeta$ 是导出组 $Ax = \beta$ 的解.
- 对任意 $\xi \in S^*$ 及任意 $\gamma \in S$, $\xi + \gamma \in S^*$.

记方程组(Δ_1)的解向量全体所成的集合为

$$S^* := \{\xi \mid A\xi = \beta\}.$$

性质 (解向量集合 S^* 的性质)

- 对任意 $\xi, \zeta \in S^*$, $\xi - \zeta \in S$, 即 $\xi - \zeta$ 是导出组 $Ax = \beta$ 的解.
- 对任意 $\xi \in S^*$ 及任意 $\gamma \in S$, $\xi + \gamma \in S^*$.

对任意 $\xi, \zeta \in S^*$ 及任意 $\gamma \in S$,

- $\xi, \zeta \in S^* \Rightarrow A\xi = \beta, A\zeta = \beta \Rightarrow A(\xi - \zeta) = A\xi - A\zeta = 0 \Rightarrow \alpha - \beta \in S$.
- $\xi \in S^*, \gamma \in S \Rightarrow A\xi = \beta, A\gamma = 0 \Rightarrow A(\xi + \gamma) = A\xi + A\gamma = \beta \Rightarrow \xi + \gamma \in S^*$.

定理 (非齐次线性方程组解的结构)

如果

- ζ 是非齐次线性方程组 $\mathbf{A}x = \beta$ 任意给定的一个解(通常称为特解).
- 向量组 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-r}$ 是导出组 $\mathbf{A}x = 0$ 的一个基础解系.

那么非齐次线性方程组 $\mathbf{A}\xi = \beta$ 的通解可以表示为

$$\mathbf{x} = k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + \cdots + k_{n-r}\xi_{n-r} + \zeta, \quad \forall k_1, k_2, \dots, k_{n-r} \in \mathbb{R}.$$

定理 (非齐次线性方程组解的结构)

如果

- ζ 是非齐次线性方程组 $\mathbf{A}x = \beta$ 任意给定的一个解(通常称为特解).
- 向量组 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-r}$ 是导出组 $\mathbf{A}x = 0$ 的一个基础解系.

那么非齐次线性方程组 $\mathbf{A}\xi = \beta$ 的通解可以表示为

$$\mathbf{x} = k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + \cdots + k_{n-r}\xi_{n-r} + \zeta, \quad \forall k_1, k_2, \dots, k_{n-r} \in \mathbb{R}.$$

- 由方程组 $\mathbf{A}x = \beta$ 解向量集合性质可知, $\mathbf{x} = k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + \cdots + k_{n-r}\xi_{n-r} + \zeta$ 确实是 $\mathbf{A}x = \beta$ 的解.

定理 (非齐次线性方程组解的结构)

如果

- ζ 是非齐次线性方程组 $\mathbf{A}x = \beta$ 任意给定的一个解(通常称为特解).
- 向量组 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-r}$ 是导出组 $\mathbf{A}x = \mathbf{0}$ 的一个基础解系.

那么非齐次线性方程组 $\mathbf{A}\xi = \beta$ 的通解可以表示为

$$\mathbf{x} = k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + \cdots + k_{n-r}\xi_{n-r} + \zeta, \quad \forall k_1, k_2, \dots, k_{n-r} \in \mathbb{R}.$$

- 由方程组 $\mathbf{A}x = \beta$ 解向量集合性质可知, $\mathbf{x} = k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + \cdots + k_{n-r}\xi_{n-r} + \zeta$ 确实是 $\mathbf{A}x = \beta$ 的解.
- 如果我们设 $\gamma \in S^* := \{\xi \mid \mathbf{A}\xi = \beta\}$, 那么 $\gamma - \zeta$ 是导出组 $\mathbf{A}x = \mathbf{0}$ 的解. 因此存在一组 $k_1, k_2, \dots, k_{n-r} \in \mathbb{R}$, 使得 $\gamma - \zeta = k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + \cdots + k_{n-r}\xi_{n-r}$, 或表示成 $\gamma = k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + \cdots + k_{n-r}\xi_{n-r} + \zeta$.

推论

在非齐次线性方程组 $\mathbf{A}\mathbf{x} = \beta$ 有解的情形下, 解唯一的充分必要条件是导出组 $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 只有零解.

推论

在非齐次线性方程组 $\mathbf{A}\mathbf{x} = \beta$ 有解的情形下, 解唯一的充分必要条件是导出组 $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 只有零解.

- (充分性)假设方程组 $\mathbf{A}\mathbf{x} = \beta$ 有两个不同的解, 那么这两个解的差就是导出组 $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 的一个非零解, 这与导出组 $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 只有零解矛盾. 因此 $\mathbf{A}\mathbf{x} = \beta$ 有唯一解.

推论

在非齐次线性方程组 $\mathbf{A}x = \beta$ 有解的情形下, 解唯一的充分必要条件是导出组 $\mathbf{A}x = 0$ 只有零解.

- (充分性)假设方程组 $\mathbf{A}x = \beta$ 有两个不同的解, 那么这两个解的差就是导出组 $\mathbf{A}x = 0$ 的一个非零解, 这与导出组 $\mathbf{A}x = 0$ 只有零解矛盾. 因此 $\mathbf{A}x = \beta$ 有唯一解.
- (必要性)设非齐次线性方程组 $\mathbf{A}x = \beta$ 有唯一解 ζ . 假设导出组 $\mathbf{A}x = 0$ 有非零解 ν , 那么 $\nu + \zeta$ 是方程组 $\mathbf{A}x = \beta$ 的异于 ζ 的另一个解, 这与方程组 ζ 有唯一解矛盾, 所以导出组 $\mathbf{A}x = 0$ 只有零解.

例 1

已知向量组

$$\mathcal{A} : \alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \alpha_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{B} : \beta_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \beta_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \beta_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

证明:向量组 \mathcal{A} 和向量组 \mathcal{B} 等价.

例 1

已知向量组

$$\mathcal{A} : \alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \alpha_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{B} : \beta_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \beta_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \beta_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

证明:向量组 \mathcal{A} 和向量组 \mathcal{B} 等价.

例 2

求非齐次线性方程组

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 1, \\ x_2 + x_3 + 2x_4 = -1, \\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 1, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = -1 \end{array} \right. \text{的通解.}$$

向量空间

- 二元数组的全体组成的集合叫做二维空间,即平面 \mathbb{R}^2 .
- 三元数组的全体组成的集合叫做三维空间,即空间 \mathbb{R}^3 .
- 对于数组的加法和数乘两种运算具有相同的特性:
 - 两个二元数组经过加法和数乘两种运算后仍旧是二元数组;
 - 两个三元数组经过加法和数乘两种运算后仍旧是三元数组.

- 二元数组的全体组成的集合叫做二维空间,即平面 \mathbb{R}^2 .
- 三元数组的全体组成的集合叫做三维空间,即空间 \mathbb{R}^3 .
- 对于数组的加法和数乘两种运算具有相同的特性:
 - 两个二元数组经过加法和数乘两种运算后仍旧是二元数组;
 - 两个三元数组经过加法和数乘两种运算后仍旧是三元数组.

本节我们将介绍 n 维向量的全体组成的集合 \mathbb{R}^n 并探究 \mathbb{R}^n 中加法和数乘两种运算的特性.

定义 (向量的运算封闭)

设 V 是 n 维向量的集合.

- 如果对于任意 $\alpha, \beta \in V$, 都有 $\alpha + \beta \in V$, 那么我们称 V 对向量的加法封闭.
- 如果对于任意 $\alpha \in V$ 及 $k \in \mathbb{R}$, 都有 $k\alpha \in V$, 那么我们称 V 对向量的乘法封闭.

定义 (向量的运算封闭)

设 V 是 n 维向量的集合.

- 如果对于任意 $\alpha, \beta \in V$, 都有 $\alpha + \beta \in V$, 那么我们称 V 对向量的加法封闭.
- 如果对于任意 $\alpha \in V$ 及 $k \in \mathbb{R}$, 都有 $k\alpha \in V$, 那么我们称 V 对向量的乘法封闭.

定义 (向量空间)

设 V 是 n 维向量的集合且 $V \neq \emptyset$. 如果 V 对向量的加法和数乘两种运算都封闭, 那么我们称集合 V 为向量空间.

定义 (向量的运算封闭)

设 V 是 n 维向量的集合.

- 如果对于任意 $\alpha, \beta \in V$, 都有 $\alpha + \beta \in V$, 那么我们称 V 对向量的加法封闭.
- 如果对于任意 $\alpha \in V$ 及 $k \in \mathbb{R}$, 都有 $k\alpha \in V$, 那么我们称 V 对向量的乘法封闭.

定义 (向量空间)

设 V 是 n 维向量的集合且 $V \neq \emptyset$. 如果 V 对向量的加法和数乘两种运算都封闭, 那么我们称集合 V 为向量空间.

注

- 任何向量空间都必须含有零向量.
- 仅含一个零向量的集合也构成向量空间, 我们称之为零向量空间.
- 除零向量空间外, 每一个向量空间都含有无限多个向量.

例

设集合 V_1 及其任意两个元素 α, β 分别为

$$V_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} : x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R} \right\}, \quad \alpha = \begin{bmatrix} 0 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}, \quad \beta = \begin{bmatrix} 0 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix},$$

满足

$$\alpha + \beta = \begin{bmatrix} 0 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ a_2 + b_2 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{bmatrix} \in V, \quad k\alpha = \begin{bmatrix} 0 \\ ka_2 \\ \vdots \\ ka_n \end{bmatrix} \in V, \quad k \in \mathbb{R}.$$

所以 V_1 对向量的加法和数乘运算封闭.

例

设集合 V_2 及其任意两个元素 α, β 分别为

$$V_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} : x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R} \right\}, \quad \alpha = \begin{bmatrix} 1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}, \quad \beta = \begin{bmatrix} 1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix},$$

满足

$$\alpha + \beta = \begin{bmatrix} 1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ a_2 + b_2 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{bmatrix} \notin V, \quad k\alpha = \begin{bmatrix} k \\ ka_2 \\ \vdots \\ ka_n \end{bmatrix} \notin V, \quad k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

所以 V_2 对向量的加法和数乘运算均不封闭。

例

n 维向量的全体组成的集合

$$\mathbb{R}^n = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} : x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}. \right\}$$

对向量的加法和数乘运算均封闭, 所以 \mathbb{R}^n 是一个向量空间.

例

n 维向量的全体组成的集合

$$\mathbb{R}^n = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} : x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}. \right\}$$

对向量的加法和数乘运算均封闭, 所以 \mathbb{R}^n 是一个向量空间.

例

n 元齐次线性方程组的解集为 $S = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$. 容易验证解集 S 对向量的加法和数乘运算封闭, 因此 S 是一个向量空间. 我们称这个向量空间为齐次线性方程组的**解空间**.

例

设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s \in \mathbb{R}^n$. 定义

$$\mathcal{L}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) := \{k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_s\alpha_s \mid k_1, k_2, \dots, k_s \in \mathbb{R}\}$$

容易验证 $\mathcal{L}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s)$ 是一个向量空间, 我们称 $\mathcal{L}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s)$ 为由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 所张成的向量空间.

例

设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s \in \mathbb{R}^n$. 定义

$$\mathcal{L}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) := \{k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_s\alpha_s \mid k_1, k_2, \dots, k_s \in \mathbb{R}\}$$

容易验证 $\mathcal{L}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s)$ 是一个向量空间, 我们称 $\mathcal{L}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s)$ 为由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 所张成的向量空间.

例

n 非元齐次线性方程组的解集为 $S^* := \{\mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \beta\}$. 不是一个向量空间:

- 如果非齐次线性方程组无解, 那么解集 $S^* = \emptyset$, 从而不是向量空间;
- 如果 $S^* \neq \emptyset$, 那么对 $\forall \zeta \in S^*, \forall k \in \mathbb{R}, k \neq 1, \mathbf{A}(k\zeta) = k\mathbf{A}(\zeta) = k\beta \neq \beta$.

所以非齐次线性方程组的解集不是向量空间.

定义 (向量子空间)

设有向量空间 V_1 与 V_2 如果 $V_1 \subseteq V_2$, 那么我们称集合 V_1 为 V_2 的向量子空间.

定义 (向量子空间)

设有向量空间 V_1 与 V_2 如果 $V_1 \subseteq V_2$, 那么我们称集合 V_1 为 V_2 的向量子空间.

例

- 回顾向量空间

$$V_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} : x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}. \right\}$$

及 n 元齐次线性方程组的解集 $S = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$, 它们均为 \mathbb{R}^n 的向量子空间.

- 任何由 n 维向量组成的集合 V 都满足 $V \subseteq \mathbb{R}^n$, 因此当 V 是向量空间时, 它即为 \mathbb{R}^n 的向量子空间.

定义 (向量空间的基与维数)

向量空间 V 中 r 个向量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 满足:

- $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 线性无关.
- 向量空间 V 中任一向量都可由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 线性表示.

那么我们称

- $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 为向量空间 V 的一个基;
- 正整数 r 称为 V 的维数, 我们记为 $\dim(V) = r$.
- 向量空间 V 也称为 r 维向量空间.

定义 (向量空间的基与维数)

向量空间 V 中 r 个向量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 满足:

- $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 线性无关.
- 向量空间 V 中任一向量都可由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 线性表示.

那么我们称

- $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 为向量空间 V 的一个基;
- 正整数 r 称为 V 的维数, 我们记为 $\dim(V) = r$.
- 向量空间 V 也称为 r 维向量空间.

注

如果向量空间 V 中只含有一个零向量, 那么 V 中没有基, 此时我们规定它的维数为0.

例

向量组

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \cdots \mathbf{e}_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, (\text{第 } i \text{ 个}), \cdots, \mathbf{e}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

是 \mathbb{R}^n 的一个基, 因此 $\dim(\mathbb{R}^n) = n$.

例

向量组

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \cdots e_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, (\text{第 } i \text{ 个}), \cdots, e_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

是 \mathbb{R}^n 的一个基, 因此 $\dim(\mathbb{R}^n) = n$.

注

我们称 \mathbb{R}^n 为 n 维向量空间或 n 维欧式空间. 有时我们也称 e_1, e_2, \dots, e_n 为 \mathbb{R}^n 的一个标准基.

例

向量组

$$\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \alpha_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, \alpha_n = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

也是 \mathbb{R}^n 的的一个基.

例

向量组

$$\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \alpha_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, \alpha_n = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

也是 \mathbb{R}^n 的一个基.

注

以 \mathbb{R}^n 为例, 向量空间的基是不唯一的, 但是任意两个基等价, 并且所含向量的个数相同, 所以向量空间的维数的定义不依赖于基的选择.

例

向量空间

$$V_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} : x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R} \right\}$$

的一个基可取为

$$e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, e_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, e_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix},$$

所以 V_1 是 $n - 1$ 维向量空间.

例

如果 n 非齐次线性方程组 $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 的系数矩阵的秩 $R(\mathbf{A}) = r$, 方程组的一个基础解系为 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-r}$, 那么 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-r}$ 就是解空间 $S = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$ 的一个基, 因此解空间 S 的维数是 $\dim(S) = n - r = n - R(\mathbf{A})$.

例

如果 n 非齐次线性方程组 $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 的系数矩阵的秩 $R(\mathbf{A}) = r$, 方程组的一个基础解系为 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-r}$, 那么 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-r}$ 就是解空间 $S = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$ 的一个基, 因此解空间 S 的维数是 $\dim(S) = n - r = n - R(\mathbf{A})$.

例

将向量空间

$$\mathcal{L}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) := \{k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_s\alpha_s \mid k_1, k_2, \dots, k_s \in \mathbb{R}\}$$

看成向量组, 它与 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 等价, 因此

- 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 的极大无关组就是向量空间 $\mathcal{L}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s)$ 的基;
- 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 的秩就是向量空间 $\mathcal{L}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s)$ 的维数.

命题(向量空间中基与线性表示之间的关系)

若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 是向量空间 V 的一个基, 则任意 $\beta \in V$ 中均可由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 唯一线性表示.

命题(向量空间中基与线性表示之间的关系)

若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 是向量空间 V 的一个基, 则任意 $\beta \in V$ 中均可由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 唯一线性表示.

- 由基的定义可知, 任意 $\beta \in V$ 均可由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 线性表示;

命题(向量空间中基与线性表示之间的关系)

若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 是向量空间 V 的一个基, 则任意 $\beta \in V$ 中均可由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 唯一线性表示.

- 由基的定义可知, 任意 $\beta \in V$ 均可由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 线性表示;
- 如果 β 存在两个线性表示:

$$\beta = \lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 \alpha_2 + \cdots + \lambda_r \alpha_r, \lambda_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, r.$$

$$\beta = \mu_1 \alpha_1 + \mu_2 \alpha_2 + \cdots + \mu_r \alpha_r, \mu_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, r.$$

那么两式相减得到

$$0 = (\lambda_1 - \mu_1) \alpha_1 + (\lambda_2 - \mu_2) \alpha_2 + \cdots + (\lambda_r - \mu_r) \alpha_r.$$

命题(向量空间中基与线性表示之间的关系)

若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 是向量空间 V 的一个基, 则任意 $\beta \in V$ 中均可由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 唯一线性表示.

- 由基的定义可知, 任意 $\beta \in V$ 均可由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 线性表示;
- 如果 β 存在两个线性表示:

$$\beta = \lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 \alpha_2 + \cdots + \lambda_r \alpha_r, \lambda_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, r.$$

$$\beta = \mu_1 \alpha_1 + \mu_2 \alpha_2 + \cdots + \mu_r \alpha_r, \mu_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, r.$$

那么两式相减得到

$$0 = (\lambda_1 - \mu_1) \alpha_1 + (\lambda_2 - \mu_2) \alpha_2 + \cdots + (\lambda_r - \mu_r) \alpha_r.$$

由于基 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 线性无关, 于是 $\lambda_i = \mu_i, i = 1, 2, \dots, r$ (零向量的线性表示唯一), 因此 β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 唯一线性表示.

定义 (向量空间中对应基的坐标)

设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 是向量空间 V 的一个基. 我们称任意 $\beta \in V$ 对应 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 的唯一线性表示

$$\beta = \lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 \alpha_2 + \dots + \lambda_r \alpha_r$$

所对应的常数 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ 为向量 β 对应 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 下的坐标.

定义 (向量空间中对应基的坐标)

设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 是向量空间 V 的一个基. 我们称任意 $\beta \in V$ 对应 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 的唯一线性表示

$$\beta = \lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 \alpha_2 + \dots + \lambda_r \alpha_r$$

所对应的常数 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ 为向量 β 对应 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 下的坐标.

例

取 \mathbb{R}^n 中的标准基 e_1, e_2, \dots, e_n 为 \mathbb{R}^n , 那么 \mathbb{R}^n 中任一向量

$$\alpha = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

在基 e_1, e_2, \dots, e_n 为 \mathbb{R}^n 下的坐标就是向量 α 的 n 个分量 a_1, a_2, \dots, a_n .

定义 (向量空间中基变换与坐标变换)

设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 及 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ 是 n 维向量空间 V 的两个基. 这两组基之间的系数矩阵 $P := P_{n \times n}$ 满足

$$(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)P.$$

我们称 P 为从基 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 到基 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ 的过渡矩阵.

定义 (向量空间中基变换与坐标变换)

设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 及 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ 是 n 维向量空间 V 的两个基. 这两组基之间的系数矩阵 $P := P_{n \times n}$ 满足

$$(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)P.$$

我们称 P 为从基 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 到基 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ 的过渡矩阵.

注

容易验证, 从基 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 到基 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ 的过渡矩阵 $P_{n \times n}$ 是可逆矩阵.

设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 及 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ 是 \mathbb{R}^n 的两组基.

设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 及 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ 是 \mathbb{R}^n 的两组基.

对任意 $\xi \in \mathbb{R}^n$, ξ 对应基 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 与基 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ 下的坐标分别为 x_1, x_2, \dots, x_n 和 y_1, y_2, \dots, y_n , 即

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}.$$

基变换与坐标变换

设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 及 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ 是 \mathbb{R}^n 的两组基.

对任意 $\xi \in \mathbb{R}^n$, ξ 对应基 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 与基 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ 下的坐标分别为 x_1, x_2, \dots, x_n 和 y_1, y_2, \dots, y_n , 即

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}.$$

令矩阵 $\mathbf{A} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n), \mathbf{B} = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$, 那么

$$\mathbf{A} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \mathbf{B} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}.$$

于是

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \mathbf{P} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

或

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \mathbf{P}^{-1} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

其中 $\mathbf{P} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$ 是从基 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 到基 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ 的过渡矩阵.

定义 (向量空间中对应不同两组基下坐标变换公式)

- 我们称表达式 (Δ_1) 为从坐标 x_1, x_2, \dots, x_n 到坐标 y_1, y_2, \dots, y_n 的坐标变换公式:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} := \mathbf{P} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \quad (\Delta_1)$$

定义 (向量空间中对应不同两组基下坐标变换公式)

- 我们称表达式 (Δ_1) 为从坐标 x_1, x_2, \dots, x_n 到坐标 y_1, y_2, \dots, y_n 的坐标变换公式:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} := \mathbf{P} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \quad (\Delta_1)$$

- 我们称表达式 (Δ_2) 为从坐标 y_1, y_2, \dots, y_n 到坐标 x_1, x_2, \dots, x_n 的坐标变换公式:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} := \mathbf{P}^{-1} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad (\Delta_2)$$

例 1

验证

$$\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \alpha_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

是 \mathbb{R}^3 的一组基, 并计算向量

$$\beta = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 6 \end{bmatrix}$$

在这组基下的坐标.

例 2

取定 \mathbb{R}^3 中两组基

$$\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \alpha_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

和

$$\beta_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \beta_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \beta_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

计算从基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 到基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 的过渡矩阵 P .

例 3

已知 $\xi \in \mathbb{R}^3$ 在基

$$\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \alpha_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

下的坐标是 $(8, -2, 4)^T$, 计算 ξ 在基

$$\beta_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \beta_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \beta_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

下的坐标.

The End