向量与空间解析几何

本章目录

向量及其运算

向量定义

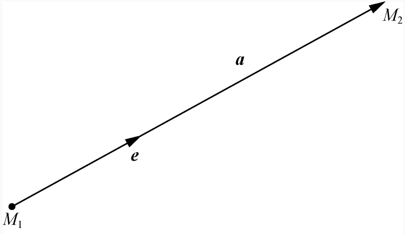
定义 (矢量化向量定义)

既有大小又有方向的物理量称为**向量**。在数学上我们可以用有向线段来表示向量，其中：(1) 有向线段长度表示向量的大小；(2) 有向线段箭头表示向量的方向。

向量定义

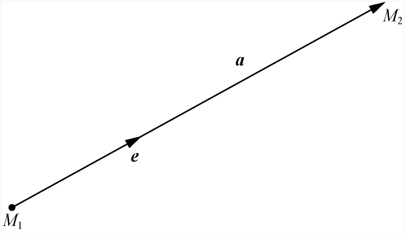
定义 (矢量化向量定义)

既有大小又有方向的物理量称为**向量**。在数学上我们可以用有向线段来表示向量，其中：(1) 有向线段长度表示向量的大小；(2) 有向线段箭头表示向量的方向。



定义 (矢量化向量定义)

既有大小又有方向的物理量称为**向量**。在数学上我们可以用有向线段来表示向量，其中：(1) 有向线段长度表示向量的大小；(2) 有向线段箭头表示向量的方向。

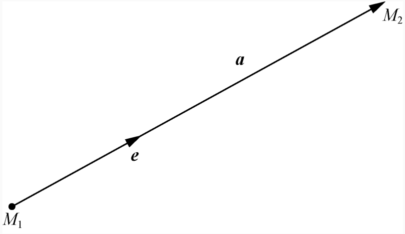


- 如图，我们使用以M_1为起点，M_2为终点的有向线段记为向量$\overrightarrow{M_1M_2}$；

向量定义

定义 (矢量化向量定义)

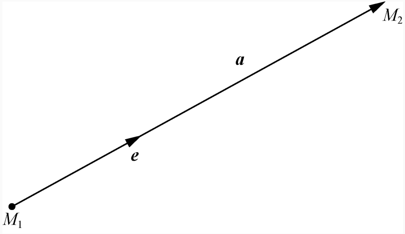
既有大小又有方向的物理量称为**向量**。在数学上我们可以用有向线段来表示向量，其中：(1) 有向线段长度表示向量的大小；(2) 有向线段箭头表示向量的方向。



- 如图，我们使用以M_1为起点，M_2为终点的有向线段记为向量$\overrightarrow{M_1M_2}$;
- 有时我们也使用黑色字体$\boldsymbol{a}$或箭头符号$\vec{a}$来表示向量;

定义 (矢量化向量定义)

既有大小又有方向的物理量称为**向量**。在数学上我们可以用有向线段来表示向量，其中：(1) 有向线段长度表示向量的大小；(2) 有向线段箭头表示向量的方向。



- 如图，我们使用以M_1为起点，M_2为终点的有向线段记为向量$\overrightarrow{M_1M_2}$；
- 有时我们也使用黑色字体$\boldsymbol{a}$或箭头符号$\vec{a}$来表示向量；
- 除非特殊说明，以下我们主要使用黑色字体符号$\boldsymbol{a}$。

向量定义

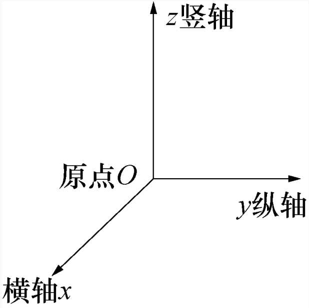
定义 (向量所包含元素及分类)

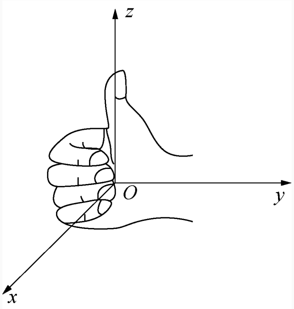
- 向量的大小叫作向量的模，记作$|\boldsymbol{a}|$；
- 模为1的向量称为**单位向量**，记作$\boldsymbol{e}$；
- 模为0的向量称为**零向量**，记作$\mathbf{0}$，零向量的方向可以看作是任意的；
- 以原始起点O为初始点，向一点M引出向量$\overrightarrow{OM}$，我们称这个向量叫作点M对于点O的**向径**，记作$\boldsymbol{r} := \overrightarrow{OM}$；
- 我们称只与大小、方向有关而与初始点无关的向量为自由向量。

定义 (空间直角坐标系)

过空间一个定点O，作三条互相垂直且具有相同的长度单位的数轴。

- 我们称这三条数轴分别为x**轴（横轴）**、 y**轴（纵轴）**、z**轴（竖轴）**，统称其为**坐标轴**，定点O称为**原点**；
- 这三条坐标轴正向符合右手规则，我们就称其组成了**空间直角坐标系**。

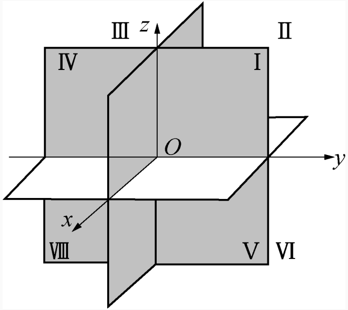




定义 (坐标面及卦限)

三条坐标轴中的两条可确定一个平面，即xOy、yOz、zOx平面，我们统称其为坐标面。它们把空间分成了八个卦限：

- 在xOy平面上面逆时针依次为I、II、III、IV卦限；
- 在xOy平面下面逆时针依次为V、VI、VII、VIII卦限。



空间中点与坐标之间的等价表示

- 空间中的点对应一个唯一的坐标：

空间中点与坐标之间的等价表示

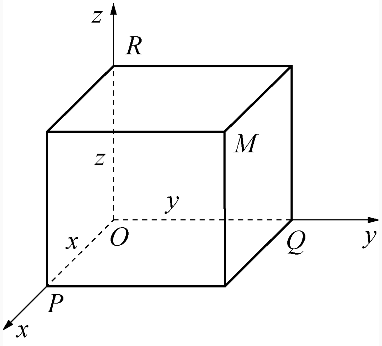
- 空间中的点对应一个唯一的坐标：

对于空间一点M，过点M作三个平面分别垂直于x轴、y轴和z轴，它们与x轴、y轴和z轴的交点依次为P, Q, R。

空间中点与坐标之间的等价表示

- 空间中的点对应一个唯一的坐标：

对于空间一点M，过点M作三个平面分别垂直于x轴、y轴和z轴，它们与x轴、y轴和z轴的交点依次为P, Q, R。这三点在x轴、y轴和z轴上的坐标为x, y, z，那么这组有序数x, y, z称为点M的**坐标**，记为$M(x, y, z)$。

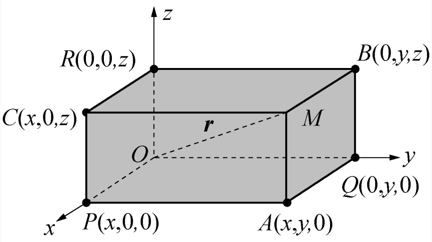


空间中点与坐标之间的等价表示

- 反过来，一个一个有序数组(x, y, z)构成的坐标对应空间内唯一一个点：

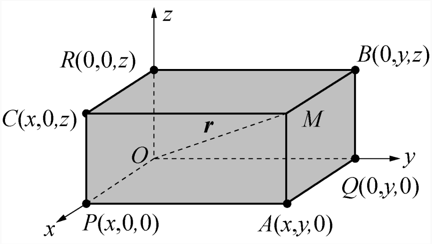
- 反过来，一个一个有序数组(x, y, z)构成的坐标对应空间内唯一一个点：

对于空间一点M，我们可以在x轴、y轴和z轴上的坐标为x的点P、坐标为y的点Q，坐标为z的点R，过三个点分别作垂直于x轴、y轴和z轴的三个平面，它们相交于一点M 那么M即为以x, y, z为坐标的点。



- 反过来，一个一个有序数组(x, y, z)构成的坐标对应空间内唯一一个点：

对于空间一点M，我们可以在x轴、y轴和z轴上的坐标为x的点P、坐标为y的点Q，坐标为z的点R，过三个点分别作垂直于x轴、y轴和z轴的三个平面，它们相交于一点M 那么M即为以x, y, z为坐标的点。

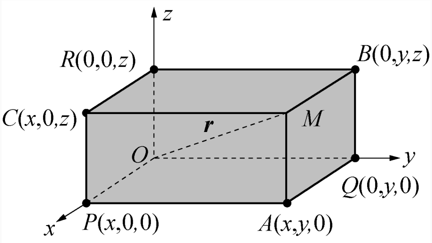


综上，通过直角坐标系，我们建立了空间中的点与空间直角坐标系中坐标之间的一一对应关系。

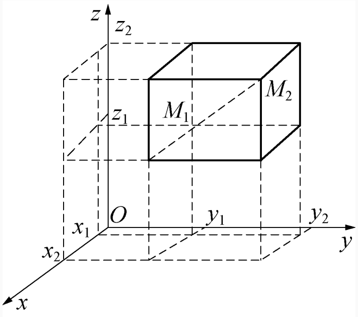
空间中特殊点和面

我们给出几个特殊点和面的坐标：

- 在xOy平面上$z=0$，对应点的坐标为$A(x,y,0)$；在yOz平面上$x=0$，对应点的坐标为$B(0,y,z)$；在zOx平面上$y=0$，对应点的坐标为$C(x,0,z)$；
- 在x轴上$y=z=0$，对应点的坐标为$P(x,0,0)$；在y轴上$z=x=0$，对应点的坐标为$Q(0,y,0)$；在z轴上$x=y=0$，对应点的坐标为$R(0,0,z)$。



设$M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$为空间两个点，通过M_1, M_2各作三个分别垂直于三条坐标轴的平面，这六个平面组成一个以M_1, M_2为体对角线的长方体：



由此得到M_1, M_2之间距离为

$$d = |\overrightarrow{M_1M_2}| = \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}.$$

引例

例 1

证明以点$M_1(4,3,1), M_2(7,1,2), M_3(5,2,3)$为顶点的三角形是等腰三角形。

引例

例 1

证明以点$M_1(4,3,1), M_2(7,1,2), M_3(5,2,3)$为顶点的三角形是等腰三角形。

例 2

在z轴上求与两点$A(-4,1,7), B(3,5,-2)$等距离的点。

向量的加减法

定义 (向量的加法)

设有两个向量$\boldsymbol{a}$与向量$\boldsymbol{b}$，任取一点A，作$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，再以$B$为起点，作$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$，连续$AC$，那么向量$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{C}$称为向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的和，记作$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，即 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$。

向量的加减法

定义 (向量的加法)

设有两个向量$\boldsymbol{a}$与向量$\boldsymbol{b}$，任取一点A，作$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，再以$B$为起点，作$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$，连续$AC$，那么向量$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{C}$称为向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的和，记作$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，即 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$。

注

上述作出两向量之和的方法叫做向量相加的三角形法则，向量的加法遵循平行四边形法则。

向量的加减法

定义 (向量的加法)

设有两个向量$\boldsymbol{a}$与向量$\boldsymbol{b}$，任取一点A，作$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，再以$B$为起点，作$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$，连续$AC$，那么向量$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{C}$称为向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的和，记作$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，即 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$。

注

上述作出两向量之和的方法叫做向量相加的三角形法则，向量的加法遵循平行四边形法则。

定理

向量的加法符合下列运算规律：

(1) 交换律 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$;

(2) 结合律 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$。

向量的加减法

注

- 由于向量的加法符合交换律与结合律，所以n个向量$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n (n \geq 3)$相加可写成
$$\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 + \cdots + \boldsymbol{a}_n.$$
- 我们规定两个向量$\boldsymbol{b}$与$\boldsymbol{a}$的差为$\boldsymbol{b} + (-\boldsymbol{a})$。特别地，当$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}$时，我们有
$$\boldsymbol{a} - \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{0}.$$
- 因为三角形两边之和大于第三边，于是我们有
$$|\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}| \leq |\boldsymbol{a}| + |\boldsymbol{b}| \text{ 及 } |\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}| \leq |\boldsymbol{a}| + |\boldsymbol{b}|,$$
其中等号在$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$同向或反向时成立。

定义 (向量与数的乘法)

向量$\boldsymbol{a}$与实数λ的乘积记作$\lambda\boldsymbol{a}$。我们规定：

- $\lambda\boldsymbol{a}$是一个向量，它的模为$|\lambda\boldsymbol{a}| := |\lambda||\boldsymbol{a}|$。
- 当$\lambda > 0$时，它的方向与$\boldsymbol{a}$相同；当$\lambda < 0$时，它的方向与$\boldsymbol{a}$相反。
- 当$\lambda = 0$时，$|\lambda\boldsymbol{a}| = 0$，即$\lambda\boldsymbol{a}$为零向量，这时它的方向可以是任意的。
- 特别地，当$\lambda = \pm 1$时有$1\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}$，$(-1)\boldsymbol{a} = -\boldsymbol{a}$。

定理

向量与数的乘积符合下列运算规律：

(1) 结合律：$\lambda(\mu\boldsymbol{a}) = \mu(\lambda\boldsymbol{a}) = (\lambda\mu)\boldsymbol{a}$.

(2) 分配律：$\bullet\, (\lambda + \mu)\boldsymbol{a} = \lambda\boldsymbol{a} + \mu\boldsymbol{a}$; $\quad \bullet\, \lambda(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = \lambda\boldsymbol{a} + \lambda\boldsymbol{b}$.

定义 (向量的线性运算和单位向量表示)

- 向量相加及数乘向量统称为向量的线性运算。
- 设$\boldsymbol{e}_a$表示与非零向量$\boldsymbol{a}$同方向的单位向量，那么我们有向量的单位向量表示：

$$\boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}|\boldsymbol{e}_a.$$

- 我们规定，当$\lambda \neq 0$时，$\dfrac{\boldsymbol{a}}{\lambda} := \dfrac{1}{\lambda}\boldsymbol{a}$；该式又可写成

$$\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|} = \boldsymbol{e}_a.$$

即一个非零向量乘以它模长倒数的结果是一个与原向量同方向的单位向量。

定义 (向量的线性运算和单位向量表示)

- 向量相加及数乘向量统称为向量的线性运算。
- 设e_a表示与非零向量$\boldsymbol{a}$同方向的单位向量，那么我们有向量的单位向量表示：

$$\boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}|\boldsymbol{e_a}.$$

- 我们规定，当$\lambda \neq 0$时，$\dfrac{\boldsymbol{a}}{\lambda} := \dfrac{1}{\lambda}\boldsymbol{a}$；该式又可写成

$$\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|} = \boldsymbol{e_a}.$$

即一个非零向量乘以它模长倒数的结果是一个与原向量同方向的单位向量。

定理

设向量$\boldsymbol{a} \neq 0$, 则向量$\boldsymbol{b}$平行于$\boldsymbol{a}$的充分必要条件是：存在唯一的实数λ, 使$\boldsymbol{b} = \lambda\boldsymbol{a}$.

上述定理是建立数轴的理论依据。我们知道，给定一个点、一个方向及单位长度，就确定了一条数轴。由于一个单位向量既确定了方向，又确定了单位长度，因此，给定一个点及一个单位向量就确定了一条数轴。

设点O及单位向量$\vec{i}$确定了数轴Ox，对于轴上任一点P，对应一个向量$\overrightarrow{OP}$，由于$\overrightarrow{OP} // \vec{i}$，根据上述定理，必有唯一实数$x$，使$\overrightarrow{OP} = x\vec{i}$(实数$x$叫做轴上有向线段$\overrightarrow{OP}$的值)，并知$\overrightarrow{OP}$与实数$x$一一对应。于是

$$\text{点}P \longleftrightarrow \text{向量}\overrightarrow{OP} = x\vec{i} \longleftrightarrow \text{实数}x,$$

从而轴上的点P与实数x有一一对应的关系。据此，定义实数x为轴上点P的坐标。

由此可知，轴上点P的坐标为x的充分必要条件是

$$\overrightarrow{OP} = x\vec{i}.$$

利用坐标作向量的线性运算

设$\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z),\boldsymbol{b}=(b_x,b_y,b_z)$,即

$$\boldsymbol{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k},\boldsymbol{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}.$$

利用向量的运算律，有

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(a_x+b_x)\vec{i}+(a_y+b_y)\vec{j}+(a_z+b_z)\vec{k},$$

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(a_x-b_x)\vec{i}+(a_y-b_y)\vec{j}+(a_z-b_z)\vec{k},$$

$$\lambda\boldsymbol{a}=(\lambda a_x)\vec{i}+(\lambda a_y)\vec{j}+(\lambda a_z)\vec{k}\quad(\lambda\in\mathbb{R}),$$

即

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(a_x+b_x,a_y+b_y,a_z+b_z),$$

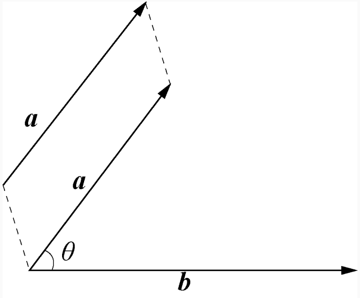
$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(a_x-b_x,a_y-b_y,a_z-b_z),$$

$$\lambda\boldsymbol{a}=(\lambda a_x,\lambda a_y,\lambda a_z).$$

定义 (向量之间夹角)

将向量$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$的初始点重合，在两向量的所在平面上，如果一个向量逆时针方向转过角度θ后可与另一个向量正向重合，那么我们称θ为向量$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$的**夹角**，记作

$$(\widehat{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}}) := \theta = (\widehat{\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}}) \quad (0 \leq \theta \leq \pi).$$



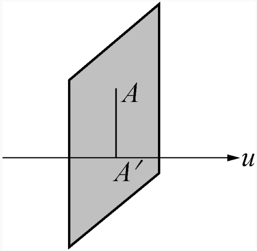
向量夹角刻画几何特征

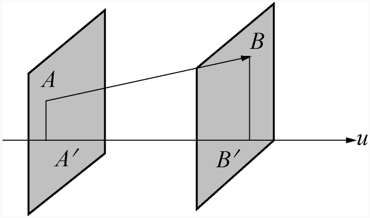
已知两向量$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$,

- 如果它们的夹角$\theta = 0$或$\theta = \pi$，那么称这两个向量**平行**，记为$\boldsymbol{a} \parallel \boldsymbol{b}$；其中
  - 两个向量指向一致时$\theta = 0$;
  - 两个向量指向相反时$\theta = \pi$。
- 如果指向相同的两个平行向量$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$还满足$|\boldsymbol{a}| = |\boldsymbol{b}|$，那么这两个向量**相等**，记为$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$。
- 如果与向量$\boldsymbol{a}$指向相反的平行向量$\boldsymbol{b}$满足$|\boldsymbol{a}| = |\boldsymbol{b}|$，那么称$\boldsymbol{b}$为$\boldsymbol{a}$的**负向量**，记作$\boldsymbol{b} := -\boldsymbol{a}$。
- 对于一向量与一轴的夹角，可将其中一轴看作向量，按两向量之间的夹角来度量；对于两个轴之间的夹角，则可看作两向量的夹角。

定义 (向量投影)

- 通过空间一点A作u轴的垂直平面，该平面与u轴的交点A'称为点A在u轴上的投影；
- 如果向量$\overrightarrow{AB}$的始点A与终点B在u轴上的投影分别为A', B'，那么u轴上向量$\overrightarrow{A'B'}$的称为向量$\overrightarrow{AB}$在u轴上的**投影**，记作$\mathbf{Prj}_u\overrightarrow{AB}$，$u$轴称为**投影轴**。

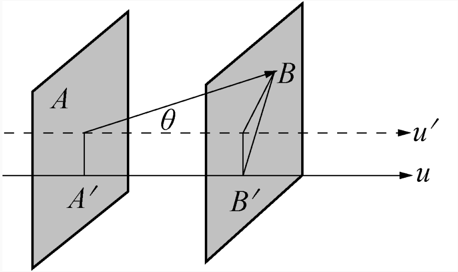




定理

向量$\overrightarrow{AB}$在u轴上的投影的长度等于向量的模乘以u轴与向量$\overrightarrow{AB}$的夹角θ的余弦

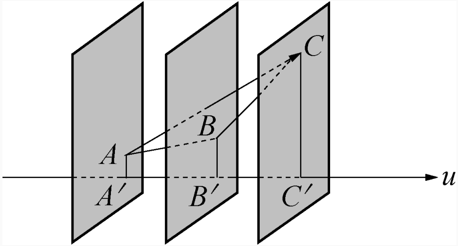
$$|\mathbf{Prj}_u\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AB}|\cos\theta.$$



向量的投影及投影定理

定理

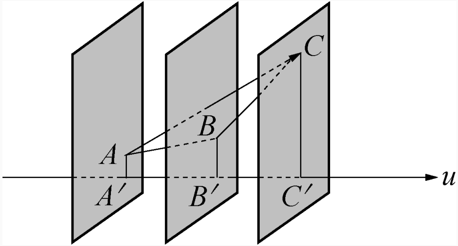
两个向量的和在轴上的投影等于两个向量在轴上的投影的和。



向量的投影及投影定理

定理

两个向量的和在轴上的投影等于两个向量在轴上的投影的和。

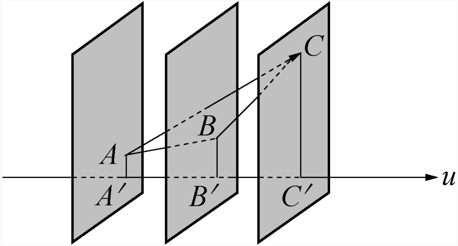


$$\mathbf{Prj}_u \boldsymbol{a}_1 + \mathbf{Prj}_u \boldsymbol{a}_2 + \cdots + \mathbf{Prj}_u \boldsymbol{a}_n = \mathbf{Prj}_u (\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 + \cdots + \boldsymbol{a}_n).$$

向量的投影及投影定理

定理

两个向量的和在轴上的投影等于两个向量在轴上的投影的和。



$$\mathbf{Prj}_u \boldsymbol{a}_1 + \mathbf{Prj}_u \boldsymbol{a}_2 + \cdots + \mathbf{Prj}_u \boldsymbol{a}_n = \mathbf{Prj}_u(\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 + \cdots + \boldsymbol{a}_n).$$

定理

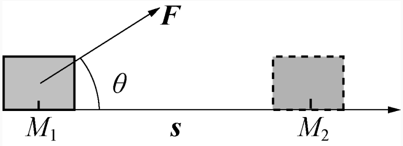
$\mathbf{Prj}_u(\lambda \boldsymbol{a}) = \lambda \mathbf{Prj}_u \boldsymbol{a}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$。

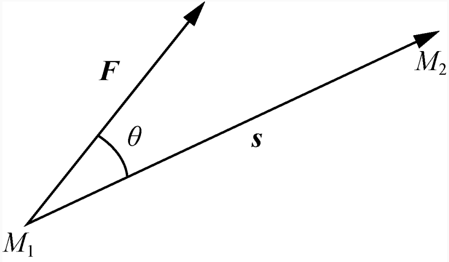
数量积(点乘或内积)

设一个物体在恒力$\boldsymbol{F}$作用下沿直线从点M_1移动到点M_2， $\boldsymbol{s}$表示位移$\overrightarrow{M_1M_2}$。那么力$\boldsymbol{F}$沿位移$\boldsymbol{s}$所做的功为

$$W = |\boldsymbol{F}||s|\cos\theta,$$

其中θ为$\boldsymbol{F}$与$\boldsymbol{s}$的夹角。



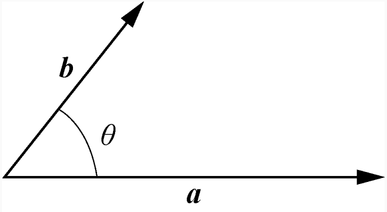


数量积(点乘或内积)

定义 (向量的数量积)

给定向量$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$，我们称$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$及它们的夹角$\theta$的余弦的乘积为向量$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$的数量积，记为$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$，即

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}| \cos\theta = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}| \cos(\widehat{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}}) \quad (0 \leq \theta < \pi).$$



数量积(点乘或内积)

注

由向量数量积的定义我们可知：

- $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}||\mathbf{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{b}||\mathbf{Prj}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}|$;
- $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{a}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}}) = |\boldsymbol{a}|^2$;
- 如果$|\boldsymbol{a}| \neq 0$，$|\boldsymbol{b}| \neq 0$，那么$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}$。

数量积(点乘或内积)

注

由向量数量积的定义我们可知:

- $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\mathbf{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{b}||\mathbf{Prj}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}|$;
- $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{a}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}})=|\boldsymbol{a}|^2$;
- 如果$|\boldsymbol{a}|\neq 0$,$|\boldsymbol{b}|\neq 0$,那么$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$。

定理

向量的数量积符合下列运算规律:

(1) 交换律:$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$;

(2) 分配律:$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$;

(3) $(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot(\lambda\boldsymbol{b})=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$, $\lambda\in\mathbb{R}$。

向量间数量积的坐标表示

设$\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$, $\boldsymbol{b}=(b_x,b_y,b_z)=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}$，则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=(a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k})\cdot(b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k})=&a_xb_x\vec{i}\cdot\vec{i}+a_xb_y\vec{i}\cdot\vec{j}+a_xb_z\vec{i}\cdot\vec{k}\\&+a_yb_x\vec{j}\cdot\vec{i}+a_yb_y\vec{j}\cdot\vec{j}+a_yb_z\vec{j}\cdot\vec{k}\\&+a_zb_x\vec{k}\cdot\vec{i}+a_zb_y\vec{k}\cdot\vec{j}+a_zb_z\vec{k}\cdot\vec{k}\end{aligned}$$

向量间数量积的坐标表示

设$\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$, $\boldsymbol{b}=(b_x,b_y,b_z)=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}$，则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=(a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k})\cdot(b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}) =&a_xb_x\vec{i}\cdot\vec{i}+a_xb_y\vec{i}\cdot\vec{j}+a_xb_z\vec{i}\cdot\vec{k}\\ &+a_yb_x\vec{j}\cdot\vec{i}+a_yb_y\vec{j}\cdot\vec{j}+a_yb_z\vec{j}\cdot\vec{k}\\ &+a_zb_x\vec{k}\cdot\vec{i}+a_zb_y\vec{k}\cdot\vec{j}+a_zb_z\vec{k}\cdot\vec{k}\end{aligned}$$

注意到$\vec{i}\cdot\vec{i}=\vec{j}\cdot\vec{j}=\vec{k}\cdot\vec{k}=1$, $\vec{i}\cdot\vec{j}=\vec{j}\cdot\vec{k}=\vec{k}\cdot\vec{i}=0$，因此

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z.$$

向量间数量积的坐标表示

设$\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$, $\boldsymbol{b}=(b_x,b_y,b_z)=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}$，则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=(a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k})\cdot(b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}) &= a_xb_x\vec{i}\cdot\vec{i}+a_xb_y\vec{i}\cdot\vec{j}+a_xb_z\vec{i}\cdot\vec{k}\\ &+a_yb_x\vec{j}\cdot\vec{i}+a_yb_y\vec{j}\cdot\vec{j}+a_yb_z\vec{j}\cdot\vec{k}\\ &+a_zb_x\vec{k}\cdot\vec{i}+a_zb_y\vec{k}\cdot\vec{j}+a_zb_z\vec{k}\cdot\vec{k}\end{aligned}$$

注意到$\vec{i}\cdot\vec{i}=\vec{j}\cdot\vec{j}=\vec{k}\cdot\vec{k}=1$, $\vec{i}\cdot\vec{j}=\vec{j}\cdot\vec{k}=\vec{k}\cdot\vec{i}=0$，因此

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z.$$

如果$|\boldsymbol{a}|\neq 0$, $|\boldsymbol{b}|\neq 0$，那么

$$\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}):=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}.$$

设$\boldsymbol{a} = (a_x, a_y, a_z) = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$, $\boldsymbol{b} = (b_x, b_y, b_z) = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$，则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = (a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}) \cdot (b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}) =& a_xb_x\vec{i} \cdot \vec{i} + a_xb_y\vec{i} \cdot \vec{j} + a_xb_z\vec{i} \cdot \vec{k} \\ &+ a_yb_x\vec{j} \cdot \vec{i} + a_yb_y\vec{j} \cdot \vec{j} + a_yb_z\vec{j} \cdot \vec{k} \\ &+ a_zb_x\vec{k} \cdot \vec{i} + a_zb_y\vec{k} \cdot \vec{j} + a_zb_z\vec{k} \cdot \vec{k}\end{aligned}$$

注意到$\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1$, $\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{i} = 0$，因此

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z.$$

如果$|\boldsymbol{a}| \neq 0$, $|\boldsymbol{b}| \neq 0$，那么

$$\cos(\widehat{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}}) := \frac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|} = \frac{a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}.$$

更多地，

$$\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b} \Leftrightarrow \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 0 \Leftrightarrow a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z = 0.$$

例 3

证明如下不等式:

$$|a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3| \le \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}.$$

其中$a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$为非零常数并指出等号成立的条件。

例 3

证明如下不等式：

$$|a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3| \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}.$$

其中$a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$为非零常数并指出等号成立的条件。

例 4

设$\boldsymbol{a} = (1, 1, -4), \boldsymbol{b} = (1, -2, 2)$，求(1) $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$；(2) $\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的夹角θ；(3) $\boldsymbol{a}$在$\boldsymbol{b}$上投影。

例 3

证明如下不等式：

$$|a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3| \leq \sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}.$$

其中$a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$为非零常数并指出等号成立的条件。

例 4

设$\boldsymbol{a}=(1,1,-4), \boldsymbol{b}=(1,-2,2)$，求(1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$；(2) $\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的夹角θ；(3) $\boldsymbol{a}$在$\boldsymbol{b}$上投影。

例 5

已知 $\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}\perp 7\boldsymbol{a}-5\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b}\perp 7\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$，求$\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$。

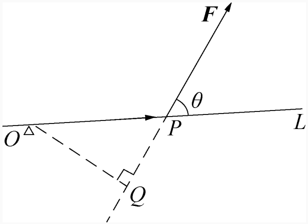
向量积(叉乘或外积)

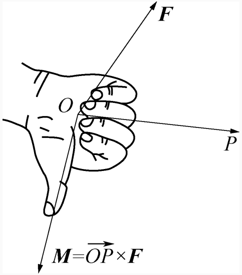
在研究物体转动问题时我们不但要考虑物体所受的力，还要分析这些力所产生的力矩。

向量积(叉乘或外积)

在研究物体转动问题时我们不但要考虑物体所受的力，还要分析这些力所产生的力矩。设杆L的支点为O且受力$\boldsymbol{F}$作用，那么力$\boldsymbol{F}$对支点O的力矩是一个向量M，其大小为

$$|\mathbf{M}| = |\overrightarrow{OQ}||\boldsymbol{F}|\sin\theta,$$





M的方向为M垂直于$\overrightarrow{OP}$与$\boldsymbol{F}$所在平面， M的指向是按右手规则从$\overrightarrow{OP}$转向$\boldsymbol{F}$，转角不超过π，此时大拇指的方向就是|M的指向（如图所示）。

向量积(叉乘或外积)

定义 (向量的向量积)

如果由向量$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$所确定的一个向量$\boldsymbol{c}$满足，

(1) $\boldsymbol{c}$的方向既垂直于$\boldsymbol{a}$又垂直于$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$的指向按右手规则从$\boldsymbol{a}$转向$\boldsymbol{b}$来确定；

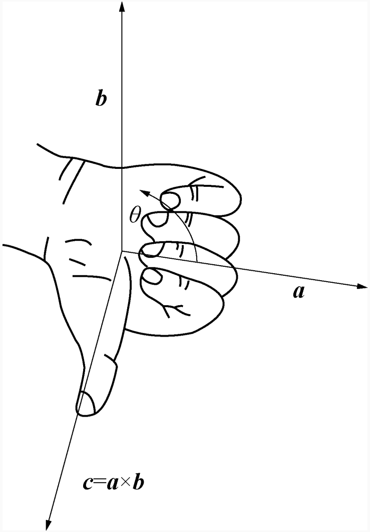
(2) $\boldsymbol{c}$的模$|\boldsymbol{c}| = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta$（其中$\theta$为$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的夹角）。

那么我们称$\boldsymbol{c}$为向量$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$的向量积，记为$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$，即

$$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta \boldsymbol{e_c} = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin(\widehat{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}})\boldsymbol{e_c} \quad (0 \leq \theta < \pi).$$

其中$\boldsymbol{e_c}$是与$\boldsymbol{c}$同方向的单位向量。

向量积(叉乘或外积)



向量积(叉乘或外积)

注

由向量积的定义我们可知:

- $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$;
- 如果$|\boldsymbol{a}| \neq 0$，$|\boldsymbol{b}| \neq 0$，那么$\boldsymbol{a} \mathbin{/\mkern-6mu/} \boldsymbol{b} \Leftrightarrow \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$;
- 空间三点A, B, C共线的充分必要条件是$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \boldsymbol{0}$。

注

由向量积的定义我们可知：

- $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$;
- 如果$|\boldsymbol{a}| \neq 0$，$|\boldsymbol{b}| \neq 0$，那么$\boldsymbol{a} \,/\!/\, \boldsymbol{b} \Leftrightarrow \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$;
- 空间三点A, B, C共线的充分必要条件是$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \boldsymbol{0}$。

定理

向量的向量积符合下列运算规律：

(1) 反交换律：$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}$;

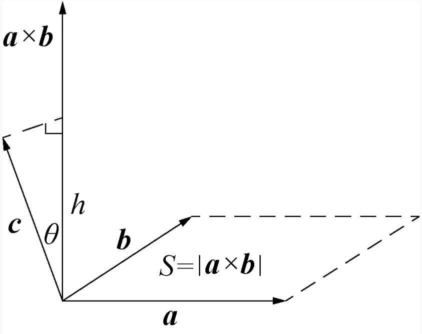
(2) 分配律：$(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c} + \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}$;

(3) 结合律：$\lambda(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = (\lambda\boldsymbol{a}) \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} \times (\lambda\boldsymbol{b})$，$\lambda \in \mathbb{R}$。

向量积(叉乘或外积)的几何意义

向量积的几何意义

$|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$表示边长为$|\boldsymbol{a}|, |\boldsymbol{b}|$的平行四边形面积。



三阶行列式展开式

在给出向量之间向量积的坐标表示公式时，我们先引入以下三阶行列式按第一行的展开式（该结论不限于具体按照行列式的第几行去展开）。

在给出向量之间向量积的坐标表示公式时，我们先引入以下三阶行列式按第一行的展开式（该结论不限于具体按照行列式的第几行去展开）。

定理 (三阶行列式展开式)

设三阶行列式

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

那么

$$|\boldsymbol{A}| = (-1)^{1+1} a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

称为三阶行列式按第一行展开的展开式。

向量间向量积的坐标表示

设$\boldsymbol{a} = (a_x, a_y, a_z) = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$, $\boldsymbol{b} = (b_x, b_y, b_z) = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$，则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = (a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}) \times (b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}) =& a_x b_x \vec{i} \times \vec{i} + a_x b_y \vec{i} \times \vec{j} + a_x b_z \vec{i} \times \vec{k} \\ &+ a_y b_x \vec{j} \times \vec{i} + a_y b_y \vec{j} \times \vec{j} + a_y b_z \vec{j} \times \vec{k} \\ &+ a_z b_x \vec{k} \times \vec{i} + a_z b_y \vec{k} \times \vec{j} + a_z b_z \vec{k} \times \vec{k}\end{aligned}$$

向量间向量积的坐标表示

设$\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$，$\boldsymbol{b}=(b_x,b_y,b_z)=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}$，则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=(a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k})\times(b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k})=&a_xb_x\vec{i}\times\vec{i}+a_xb_y\vec{i}\times\vec{j}+a_xb_z\vec{i}\times\vec{k}\\&+a_yb_x\vec{j}\times\vec{i}+a_yb_y\vec{j}\times\vec{j}+a_yb_z\vec{j}\times\vec{k}\\&+a_zb_x\vec{k}\times\vec{i}+a_zb_y\vec{k}\times\vec{j}+a_zb_z\vec{k}\times\vec{k}\end{aligned}$$

注意到$\vec{i}\times\vec{i}=\vec{j}\times\vec{j}=\vec{k}\times\vec{k}=\mathbf{0}$，$\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k},\vec{j}\times\vec{k}=\vec{i},\vec{k}\times\vec{i}=\vec{j}$，于是

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=&a_xb_y\vec{k}-a_xb_z\vec{j}-a_yb_x\vec{k}+a_yb_z\vec{i}+a_zb_x\vec{j}-a_zb_y\vec{i}\\=&(a_yb_z-a_zb_y)\vec{i}+(-1)(a_xb_z-a_zb_x)\vec{j}+(a_xb_y-a_yb_x)\vec{k}\\=&\begin{vmatrix}a_y&a_z\\b_y&b_z\end{vmatrix}\vec{i}+(-1)\begin{vmatrix}a_x&a_z\\b_x&b_z\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}a_x&a_y\\b_x&b_y\end{vmatrix}\vec{k}\\=&\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\end{vmatrix}.\end{aligned}$$

向量间向量积的坐标表示

因此，如果$|\boldsymbol{a}| \neq 0$, $|\boldsymbol{b}| \neq 0$，那么

$$\boldsymbol{a} \mathbin{/\!/} \boldsymbol{b} \Leftrightarrow \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} = 0.$$

即

$$\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z} = \lambda (\text{或 } \boldsymbol{a} = \lambda \boldsymbol{b}), \quad \lambda \in \mathbb{R} \backslash \{0\}.$$

因此，如果$|\boldsymbol{a}| \neq 0$, $|\boldsymbol{b}| \neq 0$，那么

$$\boldsymbol{a} \,//\, \boldsymbol{b} \Leftrightarrow \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} = 0.$$

即

$$\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z} = \lambda(\text{或}\,\boldsymbol{a} = \lambda\boldsymbol{b}), \quad \lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\}.$$

例 6

求与$\boldsymbol{a} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k}$，$\boldsymbol{b} = \vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$都垂直的单位向量。

因此，如果$|\boldsymbol{a}| \neq 0$, $|\boldsymbol{b}| \neq 0$，那么

$$\boldsymbol{a} \parallel \boldsymbol{b} \Leftrightarrow \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} = 0.$$

即

$$\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z} = \lambda (\text{或}\, \boldsymbol{a} = \lambda \boldsymbol{b}), \quad \lambda \in \mathbb{R} \backslash \{0\}.$$

例 6

求与$\boldsymbol{a} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k}$，$\boldsymbol{b} = \vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$都垂直的单位向量。

例 7

在顶点为$A(1, -1, 2), B(5, -6, 2), C(1, 3, -1)$的三角形中，求$AC$边上的高$BD$。

混合积

定义 (向量的混合积)

已知向量$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$，先作向量积$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ 再作数量积$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c}$，记作$[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]$，我们称$[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]$为向量$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$的**混合积**。

定义 (向量的混合积)

已知向量$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$，先作向量积$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ 再作数量积$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c}$，记作$[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]$，我们称$[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]$为向量$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$的混合积。

设

$$\boldsymbol{a} = (a_x, a_y, a_z),\ \boldsymbol{b} = (b_x, b_y, b_z),\ \boldsymbol{c} = (c_x, c_y, c_z),$$

那么

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \vec{i} + (-1) \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \vec{k}.$$

向量的混合积

于是

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} c_x + (-1) \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} c_y + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} c_z = \begin{vmatrix} c_x & c_y & c_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

向量的混合积

于是

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} c_x+(-1)\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} c_y+\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} c_z=\begin{vmatrix} c_x & c_y & c_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

注意到三阶行列式相邻两行置换位置并不改变行列式本身的值，所以

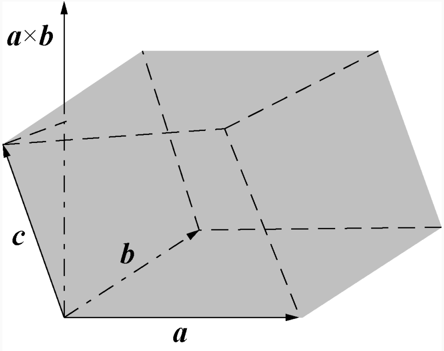
$$\begin{vmatrix} c_x & c_y & c_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}.$$

由此可得

$$[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a}=(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=\boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}).$$

向量混合积的几何意义

混合积是一个数，它的绝对值表示以向量a, b, c为棱的平行六面体的体积。



事实上

- 若$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$与$\boldsymbol{c}$在$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$所在平面的一侧，即$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$与$\boldsymbol{c}$之间的夹角$\theta$为锐角，那么$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}||\boldsymbol{c}|\cos\theta>0$；
- 若$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$与$\boldsymbol{c}$在$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$所在平面的两侧，即$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$与$\boldsymbol{c}$之间的夹角$\theta$为钝角，那么$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}||\boldsymbol{c}|\cos\theta<0$；

向量的混合积

事实上

- 若$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$与$\boldsymbol{c}$在$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$所在平面的一侧，即$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$与$\boldsymbol{c}$之间的夹角$\theta$为锐角，那么$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}||\boldsymbol{c}|\cos\theta>0$;
- 若$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$与$\boldsymbol{c}$在$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$所在平面的两侧，即$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$与$\boldsymbol{c}$之间的夹角$\theta$为钝角，那么$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}||\boldsymbol{c}|\cos\theta<0$;

注意到$|\boldsymbol{c}|\cos\theta$为平行六面体的高，因此

$$V=\pm|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}||\boldsymbol{c}|\cos\theta=\pm[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}].$$

向量的混合积

事实上

- 若$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$与$\boldsymbol{c}$在$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$所在平面的一侧，即$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$与$\boldsymbol{c}$之间的夹角$\theta$为锐角，那么$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}||\boldsymbol{c}|\cos\theta>0$；
- 若$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$与$\boldsymbol{c}$在$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$所在平面的两侧，即$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$与$\boldsymbol{c}$之间的夹角$\theta$为钝角，那么$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}||\boldsymbol{c}|\cos\theta<0$；

注意到$|\boldsymbol{c}|\cos\theta$为平行六面体的高，因此

$$V=\pm|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}||\boldsymbol{c}|\cos\theta=\pm[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}].$$

注

- 非零向量$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$共面的充分必要条件是$[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]=0$；
- 空间四点A,B,C,D共面的充分必要条件是$[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}]=0$。

例 8

已知$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=2$，计算$[(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})]\cdot(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a})$。

例 8

已知$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=2$，计算$[(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})]\cdot(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a})$。

例 9

已知空间内不在同一平面上的四点

$$A(x_1,y_1,z_1),B(x_2,y_2,z_2),C(x_3,y_3,z_3),D(x_4,y_4,z_4),$$

求四面体$ABCD$的体积。

例 8

已知$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=2$，计算$[(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})]\cdot(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a})$。

例 9

已知空间内不在同一平面上的四点

$$A(x_1,y_1,z_1),B(x_2,y_2,z_2),C(x_3,y_3,z_3),D(x_4,y_4,z_4),$$

求四面体$ABCD$的体积。

例 10

已知$\boldsymbol{a}=\vec{i},\boldsymbol{b}=\vec{j}-2\vec{k},\boldsymbol{c}=2\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}$，寻找一个单位向量$\gamma$，使得$\gamma\perp\boldsymbol{c}$，且$\gamma$与$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$同时共面。

平面及其方程

课前导读

在平面解析几何中，把平面曲线看作动点的轨迹，从而得到轨迹方程———曲线方程的概念。同样，在空间解析几何中，任何曲面都可看作满足一定几何条件的动点的轨迹，动点的轨迹也能用方程来表示，从而得到曲面的概念。

课前导读

在平面解析几何中，把平面曲线看作动点的轨迹，从而得到轨迹方程———曲线方程的概念。同样，在空间解析几何中，任何曲面都可看作满足一定几何条件的动点的轨迹，动点的轨迹也能用方程来表示，从而得到曲面的概念。

平面是空间中最简单而且最重要的曲面。本节我们将以向量为工具，在空间直角坐标系中建立其方程，并进一步讨论有关平面的一些基本性质。

课前导读

在平面解析几何中，把平面曲线看作动点的轨迹，从而得到轨迹方程———曲线方程的概念。同样，在空间解析几何中，任何曲面都可看作满足一定几何条件的动点的轨迹，动点的轨迹也能用方程来表示，从而得到曲面的概念。

平面是空间中最简单而且最重要的曲面。本节我们将以向量为工具，在空间直角坐标系中建立其方程，并进一步讨论有关平面的一些基本性质。

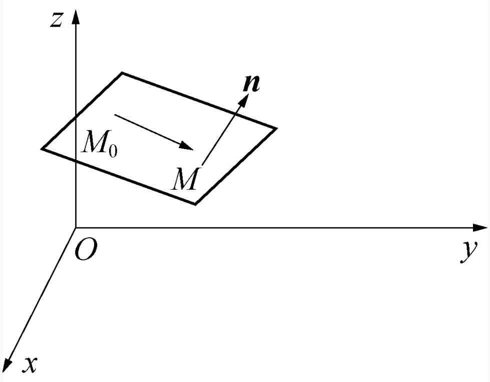
由中学立体几何知道，过空间一点，与已知直线垂直的平面是唯一的。因此，如果已知平面上一点及垂直于该平面的一个非零向量，那么这个平面的位置也完全确定了。现在，根据这个几何条件来建立平面的方程。

定义 (平面法向量)

如果一个非零向量垂直于一个平面，那么我们称此向量为该平面的**法线向量**（简称平面的**法向量**）。

定义 (平面法向量)

如果一个非零向量垂直于一个平面，那么我们称此向量为该平面的**法线向量**（简称平面的**法向量**）。



平面的点法式方程

设$M_0(x_0,y_0,z_0)$是平面Π上的一个定点，且已知该平面的法向量$\boldsymbol{n}=(A,B,C)$，则对于平面上的任一点$M(x,y,z)$，由于向量$\overrightarrow{M_0M}=(x-x_0,y-y_0,z-z_0)$ 必与平面Π的法向量$\boldsymbol{n}$垂直，于是有$\overrightarrow{M_0M}\cdot\boldsymbol{n}=0$，即

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0.$$

为平面Π的方程。我们称该方程为平面的**点法式方程**。

设$M_0(x_0,y_0,z_0)$是平面Π上的一个定点，且已知该平面的法向量$\boldsymbol{n}=(A,B,C)$，则对于平面上的任一点$M(x,y,z)$，由于向量$\overrightarrow{M_0M}=(x-x_0,y-y_0,z-z_0)$必与平面$\Pi$的法向量$\boldsymbol{n}$垂直，于是有$\overrightarrow{M_0M}\cdot\boldsymbol{n}=0$，即

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0.$$

为平面Π的方程。我们称该方程为平面的**点法式方程**。

例 1

求过点$(2,3,1)$且与$\boldsymbol{n}=(-1,-2,0)$垂直的平面的方程。

平面的点法式方程

设$M_0(x_0,y_0,z_0)$是平面Π上的一个定点，且已知该平面的法向量$\boldsymbol{n}=(A,B,C)$，则对于平面上的任一点$M(x,y,z)$，由于向量$\overrightarrow{M_0M}=(x-x_0,y-y_0,z-z_0)$必与平面$\Pi$的法向量$\boldsymbol{n}$垂直，于是有$\overrightarrow{M_0M}\cdot\boldsymbol{n}=0$，即

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0.$$

为平面Π的方程。我们称该方程为平面的**点法式方程**。

例 1

求过点$(2,3,1)$且与$\boldsymbol{n}=(-1,-2,0)$垂直的平面的方程。

例 2

求过点$M_1(1,-1,-2)$、$M_2(-1,2,0)$、$M_3(1,3,3)$的平面的方程。

平面的一般方程

方程$Ax+By+Cz+D=0$称为平面的**一般方程**，其中$\boldsymbol{n}=(A,B,C)$即为该平面的一个法向量。

平面的一般方程

方程$Ax+By+Cz+D=0$称为**平面的一般方程**，其中$\boldsymbol{n}=(A,B,C)$即为该平面的一个法向量。

任取一组(x_0,y_0,z_0)满足

$$Ax_0+By_0+Cz_0+D=0,$$

两式相减可得

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0.$$

即为平面的点法式方程。

平面的一般方程

特殊的三元一次方程所表示的平面的具有一些特点:

特殊的三元一次方程所表示的平面的具有一些特点:

(1) 当$D=0$时，平面方程为$Ax+By+Cz=0$，表示过原点的平面。

平面的一般方程

特殊的三元一次方程所表示的平面的具有一些特点：

(1) 当$D=0$时，平面方程为$Ax+By+Cz=0$，表示过原点的平面。

(2) 当$A=0$时，平面方程为$By+Cz+D=0$，该平面与x轴平行；

平面的一般方程

特殊的三元一次方程所表示的平面的具有一些特点：

(1) 当$D=0$时，平面方程为$Ax+By+Cz=0$，表示过原点的平面。

(2) 当$A=0$时，平面方程为$By+Cz+D=0$，该平面与x轴平行；
当$B=0$时，平面方程为$Ax+Cz+D=0$，该平面与y轴平行；

特殊的三元一次方程所表示的平面的具有一些特点：

(1) 当$D=0$时，平面方程为$Ax+By+Cz=0$，表示过原点的平面。

(2) 当$A=0$时，平面方程为$By+Cz+D=0$，该平面与x轴平行；
当$B=0$时，平面方程为$Ax+Cz+D=0$，该平面与y轴平行；
当$C=0$时，平面方程为$Ax+By+D=0$，该平面与z轴平行。

特殊的三元一次方程所表示的平面的具有一些特点：

(1) 当$D=0$时，平面方程为$Ax+By+Cz=0$，表示过原点的平面。

(2) 当$A=0$时，平面方程为$By+Cz+D=0$，该平面与x轴平行；
当$B=0$时，平面方程为$Ax+Cz+D=0$，该平面与y轴平行；
当$C=0$时，平面方程为$Ax+By+D=0$，该平面与z轴平行。

(3) 当$A=B=0$时，平面方程为$Cz+D=0$，该平面平行于xOy面；

特殊的三元一次方程所表示的平面的具有一些特点：

(1) 当$D=0$时，平面方程为$Ax+By+Cz=0$，表示过原点的平面。

(2) 当$A=0$时，平面方程为$By+Cz+D=0$，该平面与x轴平行；
当$B=0$时，平面方程为$Ax+Cz+D=0$，该平面与y轴平行；
当$C=0$时，平面方程为$Ax+By+D=0$，该平面与z轴平行。

(3) 当$A=B=0$时，平面方程为$Cz+D=0$，该平面平行于xOy面；
当$A=C=0$时，平面方程为$By+D=0$，该平面平行于xOz面；

平面的一般方程

特殊的三元一次方程所表示的平面的具有一些特点：

(1) 当$D=0$时，平面方程为$Ax+By+Cz=0$，表示过原点的平面。

(2) 当$A=0$时，平面方程为$By+Cz+D=0$，该平面与x轴平行；
当$B=0$时，平面方程为$Ax+Cz+D=0$，该平面与y轴平行；
当$C=0$时，平面方程为$Ax+By+D=0$，该平面与z轴平行。

(3) 当$A=B=0$时，平面方程为$Cz+D=0$，该平面平行于xOy面；
当$A=C=0$时，平面方程为$By+D=0$，该平面平行于xOz面；
当$B=C=0$时，平面方程为$Ax+D=0$，该平面平行于yOz面。

平面的一般方程

特殊的三元一次方程所表示的平面的具有一些特点：

(1) 当$D=0$时，平面方程为$Ax+By+Cz=0$，表示过原点的平面。

(2) 当$A=0$时，平面方程为$By+Cz+D=0$，该平面与x轴平行；
当$B=0$时，平面方程为$Ax+Cz+D=0$，该平面与y轴平行；
当$C=0$时，平面方程为$Ax+By+D=0$，该平面与z轴平行。

(3) 当$A=B=0$时，平面方程为$Cz+D=0$，该平面平行于xOy面；
当$A=C=0$时，平面方程为$By+D=0$，该平面平行于xOz面；
当$B=C=0$时，平面方程为$Ax+D=0$，该平面平行于yOz面。

(4) 方程$z=0$，$x=0$，$y=0$分别表示xOy面、yOz面、zOx面。

特殊的三元一次方程所表示的平面的具有一些特点：

(1) 当$D=0$时，平面方程为$Ax+By+Cz=0$，表示过原点的平面。

(2) 当$A=0$时，平面方程为$By+Cz+D=0$，该平面与x轴平行；
当$B=0$时，平面方程为$Ax+Cz+D=0$，该平面与y轴平行；
当$C=0$时，平面方程为$Ax+By+D=0$，该平面与z轴平行。

(3) 当$A=B=0$时，平面方程为$Cz+D=0$，该平面平行于xOy面；
当$A=C=0$时，平面方程为$By+D=0$，该平面平行于xOz面；
当$B=C=0$时，平面方程为$Ax+D=0$，该平面平行于yOz面。

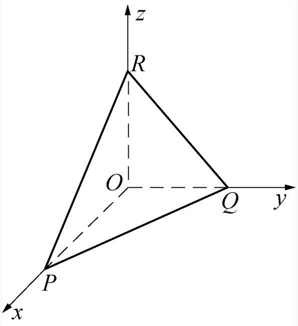
(4) 方程$z=0$，$x=0$，$y=0$分别表示xOy面、yOz面、zOx面。

例 3

试用两种方法求通过x轴和点$(2,4,1)$的平面方程。

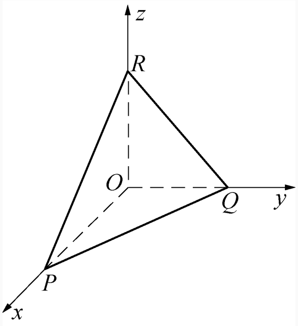
例 4

设一平面与x、y、z轴分别交于点$P(a,0,0)$、$Q(0,b,0)$、$R(0,0,c)$，$(abc \neq 0)$，求这个平面的方程。



例 4

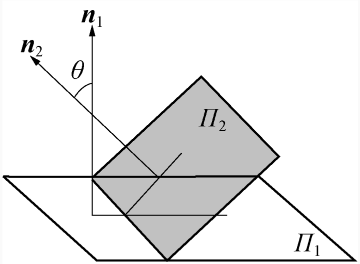
设一平面与x、y、z轴分别交于点$P(a,0,0)$、$Q(0,b,0)$、$R(0,0,c)$，$(abc\neq 0)$，求这个平面的方程。



$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$称为平面的**截距式方程**，其中$a$、$b$、$c$叫作该平面的**截距**。

定义 (两平面的夹角)

两平面的法向量所夹的锐角或直角称为**两平面的夹角**。



设平面$\varPi_1$的方程为

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$

平面$\varPi_2$的方程为

$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0,$$

即

$$\boldsymbol{n}_1 = (A_1, B_1, C_1), \boldsymbol{n}_2 = (A_2, B_2, C_2),$$

则平面$\varPi_1$与平面$\varPi_2$的夹角$\theta = (\widehat{\varPi_1, \varPi_2})$的余弦为

$$\cos\theta = \frac{|\boldsymbol{n}_1 \cdot \boldsymbol{n}_2|}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|} = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

平面与平面的关系

我们可以探究两个平面平行和垂直的充要条件:

平面与平面的关系

我们可以探究两个平面平行和垂直的充要条件:

- 当$\Pi_1 \mathbin{/\!/} \Pi_2$时，有 $\boldsymbol{n}_1 \mathbin{/\!/} \boldsymbol{n}_2 \iff \dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2}$.

我们可以探究两个平面平行和垂直的充要条件:

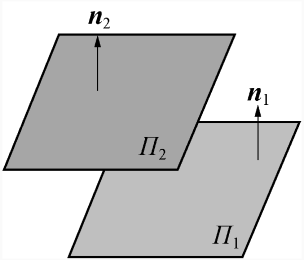
- 当$\Pi_1 \mathbin{/\!/} \Pi_2$时，有 $\boldsymbol{n}_1 \mathbin{/\!/} \boldsymbol{n}_2 \iff \dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2}$.
- 若Π_1与Π_2重合，则 $\boldsymbol{n}_1 \mathbin{/\!/} \boldsymbol{n}_2 \iff \dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2} = \dfrac{D_1}{D_2}$.

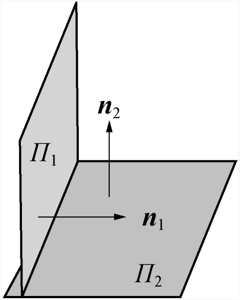
我们可以探究两个平面平行和垂直的充要条件:

- 当$\Pi_1 \mathbin{/\!/} \Pi_2$时，有 $\boldsymbol{n}_1 \mathbin{/\!/} \boldsymbol{n}_2 \iff \dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2}$.
- 若Π_1与Π_2重合，则 $\boldsymbol{n}_1 \mathbin{/\!/} \boldsymbol{n}_2 \iff \dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2} = \dfrac{D_1}{D_2}$.
- 当$\Pi_1 \perp \Pi_2$时，有 $\boldsymbol{n}_1 \perp \boldsymbol{n}_2 \iff A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$.

我们可以探究两个平面平行和垂直的充要条件:

- 当$\Pi_1 \mathbin{/\!/} \Pi_2$时，有 $\boldsymbol{n}_1 \mathbin{/\!/} \boldsymbol{n}_2 \iff \dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2}$.
- 若Π_1与Π_2重合，则 $\boldsymbol{n}_1 \mathbin{/\!/} \boldsymbol{n}_2 \iff \dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2} = \dfrac{D_1}{D_2}$.
- 当$\Pi_1 \perp \Pi_2$时，有 $\boldsymbol{n}_1 \perp \boldsymbol{n}_2 \iff A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$.





例 5

研究以下各组里两平面的位置的关系。

(1) $\mathit{\Pi}_1$： $-x+2y-z+1=0$, $\mathit{\Pi}_2$： $y+3z-1=0$；

(2) $\mathit{\Pi}_1$： $2x-y+z-1=0$, $\mathit{\Pi}_2$： $-4x+2y-2z-1=0$。

例 5

研究以下各组里两平面的位置的关系。

(1) $\mathit{\Pi}_1$： $-x+2y-z+1=0$, $\mathit{\Pi}_2$： $y+3z-1=0$；

(2) $\mathit{\Pi}_1$： $2x-y+z-1=0$, $\mathit{\Pi}_2$： $-4x+2y-2z-1=0$。

例 6

求平面$\mathit{\Phi}$，使其满足：

(1) 过z轴；

(2) $\mathit{\Pi}$与平面$2x+y-\sqrt{5}z=0$的夹角为$\frac{\pi}{3}$。

例 5

研究以下各组里两平面的位置的关系。

(1) $\mathit{\Pi}_1$：$-x+2y-z+1=0$, $\mathit{\Pi}_2$：$y+3z-1=0$；

(2) $\mathit{\Pi}_1$：$2x-y+z-1=0$, $\mathit{\Pi}_2$：$-4x+2y-2z-1=0$。

例 6

求平面$\mathit{\Phi}$，使其满足：

(1) 过z轴；

(2) $\mathit{\Pi}$与平面$2x+y-\sqrt{5}z=0$的夹角为$\dfrac{\pi}{3}$。

例 7

一平面通过两点$M_1(1,1,1)$和$M_2(0,1,-1)$且垂直于平面$x+y+z=0$，求该平面方程。

点到平面的距离

设 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 为平面 $Ax + By + Cz + D = 0$ 外的一点，在平面上任取一点 $P_1(x_1, y_1, z_1)$，则点 P_0 到平面的距离 d 就是 $\overrightarrow{P_1P_0}$ 在 $\boldsymbol{n} = (A, B, C)$ 上的投影的绝对值，即 $d = |\mathbf{Prj}_n\overrightarrow{P_1P_0}|$。

设 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 为平面 $Ax + By + Cz + D = 0$ 外的一点，在平面上任取一点 $P_1(x_1, y_1, z_1)$，则点 P_0 到平面的距离 d 就是 $\overrightarrow{P_1P_0}$ 在 $\boldsymbol{n} = (A, B, C)$ 上的投影的绝对值，即 $d = |\mathbf{Prj}_n\overrightarrow{P_1P_0}|$。

因为$Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0$，所以

$$
\begin{aligned}
d = |\mathbf{Prj}_n\overrightarrow{P_1P_0}| &= \frac{|\boldsymbol{n} \cdot \overrightarrow{P_1P_0}|}{|\boldsymbol{n}|} \\
&= \frac{|A(x_0 - x_1) + B(y_0 - y_1) + C(z_0 - z_1)|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \\
&= \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 - Ax_1 - By_1 - Cz_1|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \\
&= \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.
\end{aligned}
$$

例 8

计算点$P_0(2,1,1)$到平面$x+y-z+1=0$的距离。

例 8

计算点$P_0(2,1,1)$到平面$x+y-z+1=0$的距离。

例 9

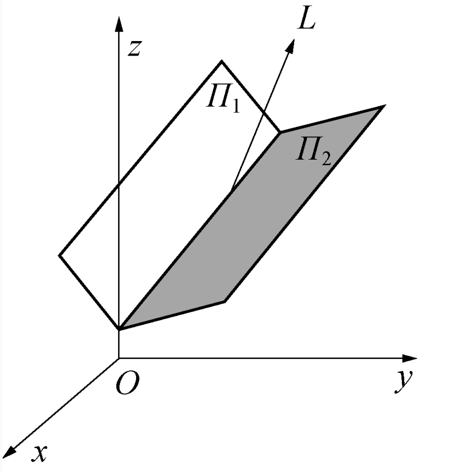
求两平行平面Π_1：$10x+2y-2z-5=0$和Π_2：$5x+y-z-1=0$之间的的距离d。

直线及其方程

在平面解析几何中，把平面曲线看作动点的轨迹，从而得到轨迹方程———曲线方程的概念。同样，在空间解析几何中，任何曲线都可以看作满足一定几何条件的动点的轨迹，动点的轨迹用方程组来表示，就得到曲线方程的概念。

空间直线是最简单的空间曲线，在本节中我们将以向量为工具讨论空间直线。

任一空间直线L都可以看作是两个相交平面的交线（如图所示）。



空间直线一般方程

若平面Π_1和平面Π_2的的方程分别为

$$\Pi_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \quad \Pi_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0,$$

则方程组

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

表示空间直线L的方程，称为空间直线的**一般方程**。

若平面Π_1和平面Π_2的的方程分别为

$$\Pi_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \quad \Pi_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0,$$

则方程组

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

表示空间直线L的方程，称为空间直线的**一般方程**。

例 1

(1) 求过点$(-3, 2, 5)$，且与已知平面$2x - y - 5z = 1$和$x - 4z = 3$平行的平面Π_1与Π_2的方程。

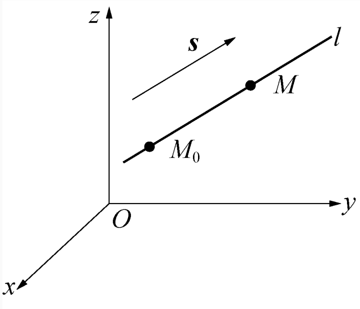
(2) 求平面Π_1与Π_2的交线方程。

由立体几何可知，过空间一点作平行于已知直线的直线是唯一的。因此，如果知道直线上一点及与直线平行的某一向量，那么该直线的位置也就完全确定。

由立体几何可知，过空间一点作平行于已知直线的直线是唯一的。因此，如果知道直线上一点及与直线平行的某一向量，那么该直线的位置也就完全确定。如果一个非零向量平行于一条已知直线，这个向量称为该直线的**方向向量**。显然，直线上的任何一个向量都平行于方向向量，并且一条直线的方向向量有无穷多个，它们之间互相平行。

对称式方程及参数方程

由立体几何可知，过空间一点作平行于已知直线的直线是唯一的。因此，如果知道直线上一点及与直线平行的某一向量，那么该直线的位置也就完全确定。如果一个非零向量平行于一条已知直线，这个向量称为该直线的**方向向量**。显然，直线上的任何一个向量都平行于方向向量，并且一条直线的方向向量有无穷多个，它们之间互相平行。由于过空间一点可作且只能作一条直线平行于已知向量，故给定直线上的$M_0(x_0, y_0, z_0)$及一个方向向量$\boldsymbol{s} = (m, n, p)$，直线的位置就完全确定了：



如果$M(x,y,z)$为直线l上任意一点，那么$\overrightarrow{M_0M} \parallel \boldsymbol{s}$，即

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}.$$

此式即为直线l的方程，称为直线的**对称式方程**，也称**点向式方程**。 $\boldsymbol{s}=(m,n,p)$的三个坐标m、n、p就称为**方向数**，而s的方向余弦就叫作该直线的**方向余弦**。

如果$M(x,y,z)$为直线l上任意一点，那么$\overrightarrow{M_0M} \,//\, \boldsymbol{s}$，即

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}.$$

此式即为直线l的方程，称为直线的**对称式方程**，也称**点向式方程**。 $\boldsymbol{s}=(m,n,p)$的三个坐标m、n、p就称为**方向数**，而s的方向余弦就叫作该直线的**方向余弦**。

若设$\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}=t$，则我们有对应直线$l$的参数方程

$$\begin{cases} x=x_0+mt, \\ y=y_0+nt, \\ z=z_0+pt. \end{cases}$$

注

在$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$中，若有个别分母为零，应理解为相应的分子也为零。

例如，如果$m=0$，$n\neq 0$，$p\neq 0$，那么上式为

$$\frac{x-x_0}{0}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p},$$

此时上式可以被理解为

$$\begin{cases} x-x_0=0, \\ \dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p} \end{cases}$$

例 2

用点向式方程或参数方程表示直线$\begin{cases} x+y+z+1=0, \\ 2x-y+3z+4=0. \end{cases}$

例 2

用点向式方程或参数方程表示直线$\begin{cases} x+y+z+1=0, \\ 2x-y+3z+4=0. \end{cases}$

例 3

求过点$A(1,0,1)$和$B(-2,1,1)$的直线方程。

定义 (两直线间夹角)

两直线的方向向量之间的夹角（通常取锐角或直角）称为**两直线的夹角**。

定义 (两直线间夹角)

两直线的方向向量之间的夹角（通常取锐角或直角）称为**两直线的夹角**。

若l_1，l_2为任意两直线，$\boldsymbol{s}_1$，$\boldsymbol{s}_2$为直线相应的方向向量，则$(\widehat{l_1, l_2}) = (\widehat{\boldsymbol{s}_1, \boldsymbol{s}_2})$或$(\widehat{l_1, l_2}) = \pi - (\widehat{\boldsymbol{s}_1, \boldsymbol{s}_2})$两者中的锐角或直角。

定义 (两直线间夹角)

两直线的方向向量之间的夹角（通常取锐角或直角）称为**两直线的夹角**。

若l_1，l_2为任意两直线，$\boldsymbol{s}_1$，$\boldsymbol{s}_2$为直线相应的方向向量，则$(\widehat{l_1, l_2}) = (\widehat{\boldsymbol{s}_1, \boldsymbol{s}_2})$或$(\widehat{l_1, l_2}) = \pi - (\widehat{\boldsymbol{s}_1, \boldsymbol{s}_2})$两者中的锐角或直角。设

$$l_1 : \frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{p_1}, \ \boldsymbol{s}_1 = (m_1, n_1, p_1), \ M_1(x_1, y_1, z_1) \in l_1,$$
$$l_2 : \frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2} = \frac{z - z_2}{p_2}, \ \boldsymbol{s}_2 = (m_2, n_2, p_2), \ M_2(x_2, y_2, z_2) \in l_2,$$

那么

$$\cos(\widehat{l_1, l_2}) = \frac{|\boldsymbol{s}_1 \cdot \boldsymbol{s}_2|}{|\boldsymbol{s}_1||\boldsymbol{s}_2|} = \frac{|m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2|}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2}\sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}.$$

两直线的夹角

当$l_1 \perp l_2$时，应有$\boldsymbol{s}_1 \perp \boldsymbol{s}_2 \iff \boldsymbol{s}_1 \cdot \boldsymbol{s}_2 = 0 \iff m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2 = 0$;

两直线的夹角

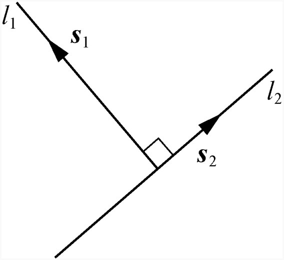
当$l_1 \perp l_2$时，应有$\boldsymbol{s}_1 \perp \boldsymbol{s}_2 \iff \boldsymbol{s}_1 \cdot \boldsymbol{s}_2 = 0 \iff m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0$；

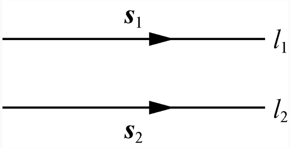
当$l_1 \mathbin{/\!/} l_2$时，应有$\boldsymbol{s}_1 \mathbin{/\!/} \boldsymbol{s}_2 \iff \boldsymbol{s}_1 \times \boldsymbol{s}_2 = \mathbf{0} \iff \dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{n_1}{n_2} = \dfrac{p_1}{p_2}$；

两直线的夹角

当$l_1 \perp l_2$时，应有$\boldsymbol{s}_1 \perp \boldsymbol{s}_2 \iff \boldsymbol{s}_1 \cdot \boldsymbol{s}_2 = 0 \iff m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2 = 0$;

当$l_1 \mathbin{/\!/} l_2$时，应有$\boldsymbol{s}_1 \mathbin{/\!/} \boldsymbol{s}_2 \iff \boldsymbol{s}_1 \times \boldsymbol{s}_2 = \mathbf{0} \iff \dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{n_1}{n_2} = \dfrac{p_1}{p_2}$;





例 4

求直线$l_1 : \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y}{-4} = \dfrac{z+3}{1}$和直线 $l_2 : \dfrac{x}{2} = \dfrac{y+2}{-2} = \dfrac{z}{-1}$的夹角。

例 4

求直线$l_1:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{-4}=\dfrac{z+3}{1}$和直线 $l_2:\dfrac{x}{2}=\dfrac{y+2}{-2}=\dfrac{z}{-1}$的夹角。

例 5

求过点$(-3,2,5)$且与两平面$x-4z=3$和$2x-y-5z=1$的交线平行的直线方程。

例 4

求直线$l_1: \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y}{-4} = \dfrac{z+3}{1}$和直线 $l_2: \dfrac{x}{2} = \dfrac{y+2}{-2} = \dfrac{z}{-1}$的夹角。

例 5

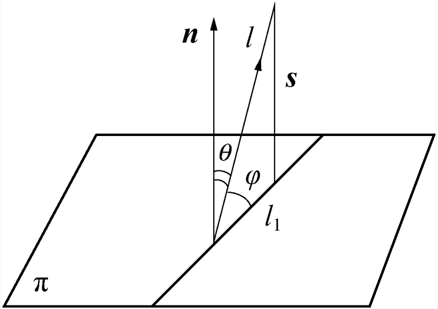
求过点$(-3,2,5)$且与两平面$x-4z=3$和$2x-y-5z=1$的交线平行的直线方程。

例 6

求过点$M(2,1,3)$且与直线$\dfrac{x+1}{3} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z}{-1}$垂直相交的直线方程。

定义 (直线与平面的夹角)

- 直线l和它在平面π上的投影直线l_1所构成的角称为该**直线与平面的夹角**，记为φ，$0 \leqslant \varphi < \dfrac{\pi}{2}$。
- 当直线与平面垂直时，规定$\varphi = \dfrac{\pi}{2}$。



设直线
$$l:\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p},\boldsymbol{s}=(m,n,p),$$
平面
$$\Pi:Ax+By+Cz+D=0,\boldsymbol{n}=(A,B,C),$$
于是 $\varphi=|\frac{\pi}{2}-(\widehat{\boldsymbol{s},\boldsymbol{n}})|$。

因此
$$\sin\varphi=|\cos(\widehat{\boldsymbol{s},\boldsymbol{n}})|=\frac{Am+Bn+Cp}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{m^2+n^2+p^2}}.$$

设直线

$$l: \frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}, \boldsymbol{s} = (m, n, p),$$

平面

$$\Pi : Ax + By + Cz + D = 0, \boldsymbol{n} = (A, B, C),$$

于是 $\varphi = |\frac{\pi}{2} - (\widehat{\boldsymbol{s}, \boldsymbol{n}})|$。

因此

$$\sin\varphi = |\cos(\widehat{\boldsymbol{s}, \boldsymbol{n}})| = \frac{Am + Bn + Cp}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}.$$

- 当$l \mathbin{//} \Pi$时，$\boldsymbol{s} \perp \boldsymbol{n}$，即有

设直线

$$l : \frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}, \boldsymbol{s} = (m, n, p),$$

平面

$$\mathit{\Pi} : Ax + By + Cz + D = 0, \boldsymbol{n} = (A, B, C),$$

于是 $\varphi = |\frac{\pi}{2} - (\widehat{\boldsymbol{s}, \boldsymbol{n}})|$。

因此

$$\sin\varphi = |\cos(\widehat{\boldsymbol{s}, \boldsymbol{n}})| = \frac{Am + Bn + Cp}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{m^2+n^2+p^2}}.$$

- 当$l \parallel \mathit{\Pi}$时，$\boldsymbol{s} \perp \boldsymbol{n}$，即有$Am + Bn + Cp = 0$。
- 当$l \perp \mathit{\Pi}$时，$\boldsymbol{s} \parallel \boldsymbol{n}$，即有

直线与平面的夹角

设直线

$$l: \frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}, \boldsymbol{s} = (m, n, p),$$

平面

$$\Pi: Ax + By + Cz + D = 0, \boldsymbol{n} = (A, B, C),$$

于是 $\varphi = |\frac{\pi}{2} - (\widehat{\boldsymbol{s}, \boldsymbol{n}})|$。

因此

$$\sin\varphi = |\cos(\widehat{\boldsymbol{s}, \boldsymbol{n}})| = \frac{Am + Bn + Cp}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{m^2+n^2+p^2}}.$$

- 当$l \parallel \Pi$时，$\boldsymbol{s} \perp \boldsymbol{n}$，即有$Am + Bn + Cp = 0$。
- 当$l \perp \Pi$时，$\boldsymbol{s} \parallel \boldsymbol{n}$，即有$\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}$。

平面束

定义 (平面束)

通过定直线的平面的全体称为过该直线的**平面束**。

定义 (平面束)

通过定直线的平面的全体称为过该直线的**平面束**。

设直线$l:\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\\A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0,\end{cases}$其中系数$A_1$、$B_1$、$C_1$与$A_2$、$B_2$、$C_2$不成比例，$\lambda_1$，$\lambda$，$\mu$为任意常数，则过该直线的平面束方程为

$$\lambda_1(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+\mu(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0 \tag{1}$$

定义 (平面束)

通过定直线的平面的全体称为过该直线的**平面束**。

设直线$l:\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\\A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0,\end{cases}$ 其中系数A_1、B_1、C_1与A_2、B_2、C_2不成比例，λ_1，λ，μ为任意常数，则过该直线的平面束方程为

$$\lambda_1(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+\mu(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0 \tag{1}$$

或

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1+\lambda(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0 \tag{2}$$

定义 (平面束)

通过定直线的平面的全体称为过该直线的**平面束**。

设直线$l:\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\\A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0,\end{cases}$ 其中系数A_1、B_1、C_1与A_2、B_2、C_2不成比例，λ_1，λ，μ为任意常数，则过该直线的平面束方程为

$$\lambda_1(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+\mu(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0 \tag{1}$$

或

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1+\lambda(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0 \tag{2}$$

注

若(1)式中$\lambda_1\neq 0$，则可写成(2)式；但(2)中并不包括$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$。

例 7

设直线$L:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z+1}{2}$，平面$\mathit{\Pi}:x-y+2z=3$，求直线$L$与平面$\mathit{\Pi}$的夹角$\varphi$。

例 7

设直线$L: \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z+1}{2}$，平面$\Pi: x-y+2z=3$，求直线$L$与平面$\Pi$的夹角$\varphi$。

例 8

一平面过直线$\begin{cases} x+y-z=0 \\ x-y+z-1=0 \end{cases}$和点$(1,1,-1)$，求该平面方程。

例 7

设直线$L:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z+1}{2}$，平面$\varPi:x-y+2z=3$，求直线$L$与平面$\varPi$的夹角$\varphi$。

例 8

一平面过直线$\begin{cases}x+y-z=0\\x-y+z-1=0\end{cases}$和点$(1,1,-1)$，求该平面方程。

例 9

过直线$L:\begin{cases}x+2y-z-6=0\\x-2y+z=0\end{cases}$作平面$\varPi$，使它垂直于平面$\varPi_1:x+2y+z=0$。

例 10

在经过直线$l:\begin{cases}x+y+z+4=0\\x+2y+z=0\end{cases}$的平面中找出平面$\Pi$，使原点到它的距离最长。

例 10

在经过直线$l:\begin{cases}x+y+z+4=0\\x+2y+z=0\end{cases}$的平面中找出平面$\Pi$，使原点到它的距离最长。

例 11

一平面过直线

$$\begin{cases}x+5y+z=0\\x-z+4=0\end{cases}$$

且与平面$x-4y-8z+12=0$所成角度为$\dfrac{\pi}{4}$，求该平面的方程。

点到直线的距离

设直线$l:\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}$，其中$\boldsymbol{s}=(m,n,p), M_0(x_0,y_0,z_0)$，直线$l$外的一点为$M_1(x_1,y_1,z_1)$，计算点$M_1$到直线$l$的距离。

点到直线的距离

点到直线的距离

设直线$l:\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}$，其中$\boldsymbol{s}=(m,n,p),M_0(x_0,y_0,z_0)$，直线$l$外的一点为$M_1(x_1,y_1,z_1)$，计算点$M_1$到直线$l$的距离。

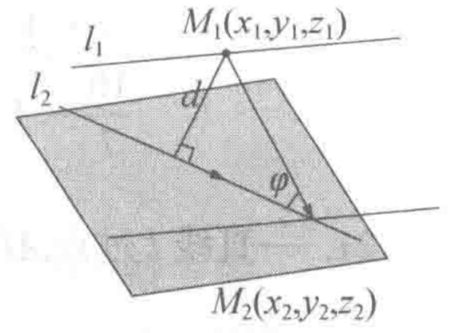
$$d=\frac{|\overrightarrow{M_1M_0}\times\boldsymbol{s}|}{|\boldsymbol{s}|}=\frac{\left\|\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\x_0-x_1&y_0-y_1&z_0-z_1\\m&n&p\end{vmatrix}\right\|}{|\boldsymbol{s}|}.$$

异面直线之间的距离

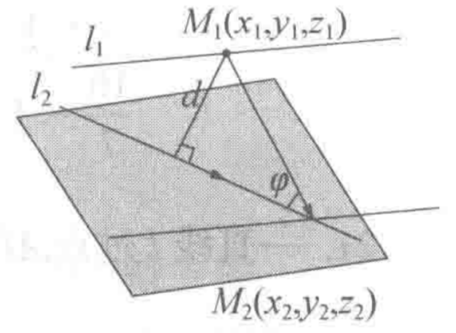
计算异面直线l_1和l_2之间的距离，其中

$$l_1 : \frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{n_1} = \frac{z-z_1}{p_1}, \quad \boldsymbol{s}_1 = (m_1, n_1, p_1), \quad M_1(x_1, y_1, z_1) \in l_1,$$
$$l_2 : \frac{x-x_2}{m_2} = \frac{y-y_2}{n_2} = \frac{z-z_2}{p_2}, \quad \boldsymbol{s}_2 = (m_2, n_2, p_2), \quad M_2(x_2, y_2, z_2) \in l_2.$$

异面直线之间的距离



异面直线之间的距离



$$d = \frac{|\overrightarrow{M_1M_2} \cdot (\boldsymbol{s}_1 \times \boldsymbol{s}_2)|}{|\boldsymbol{s}_1 \times \boldsymbol{s}_2|}.$$

曲面与曲线

本节介绍曲面与曲线方程概念，主要围绕下面两个基本问题：

(1) 已知曲面与曲线上点的几何特征，建立方程；

(2) 已知曲线与曲面上的点的坐标所满足的方程，研究曲面与曲线的形状和性质。

本节介绍曲面与曲线方程概念，主要围绕下面两个基本问题：

(1) 已知曲面与曲线上点的几何特征，建立方程；

(2) 已知曲线与曲面上的点的坐标所满足的方程，研究曲面与曲线的形状和性质。

定义

如果曲面S与三元方程$F(x,y,z)=0$满足下列关系：

(1) 曲面S上的任一点的坐标都满足方程；

(2) 不在曲面S上的点的坐标都不满足方程，

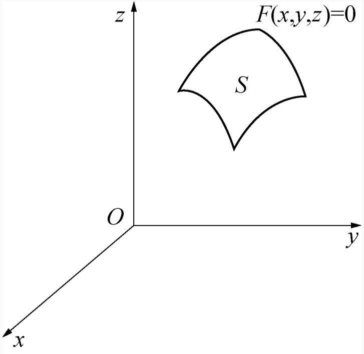
则称$F(x,y,z)=0$为曲面S的**方程**，而曲面S称为**方程**$F(x,y,z)=0$的**图形**。

曲面方程的概念

我们要研究以下两个基本问题：

(1) 已知曲面作为点的轨迹时，建立这曲面的方程；

(2) 已知一个三元方程，研究该方程所表示的几何图形。



曲面方程的概念

定义

若空间一动点到定点的距离为定值，则该动点的轨迹称为**球面**，定点叫做**球心**，定值叫做**半径**。

定义

若空间一动点到定点的距离为定值，则该动点的轨迹称为**球面**，定点叫做**球心**，定值叫做**半径**。

例 1

建立球心在点$M_0(x_0, y_0, z_0)$，半径为R的球面的方程。

定义

若空间一动点到定点的距离为定值，则该动点的轨迹称为**球面**，定点叫做**球心**，定值叫做**半径**。

例 1

建立球心在点$M_0(x_0, y_0, z_0)$，半径为R的球面的方程。

例 2

求与原点O及$M_0(2, 3, 4)$的距离之比为$1:2$的点的全体所组成的曲面方程。

定义

若空间一动点到定点的距离为定值，则该动点的轨迹称为**球面**，定点叫做**球心**，定值叫做**半径**。

例 1

建立球心在点$M_0(x_0, y_0, z_0)$，半径为R的球面的方程。

例 2

求与原点O及$M_0(2, 3, 4)$的距离之比为$1 : 2$的点的全体所组成的曲面方程。

例 3

求到两定点$A(1, 2, 3)$和$B(2, -1, 4)$等距离的点的几何轨迹。

曲面方程的概念

定义

若空间一动点到定点的距离为定值，则该动点的轨迹称为**球面**，定点叫做**球心**，定值叫做**半径**。

例 1

建立球心在点$M_0(x_0, y_0, z_0)$，半径为R的球面的方程。

例 2

求与原点O及$M_0(2, 3, 4)$的距离之比为$1:2$的点的全体所组成的曲面方程。

例 3

求到两定点$A(1, 2, 3)$和$B(2, -1, 4)$等距离的点的几何轨迹。

例 4

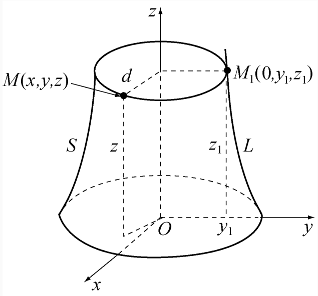
方程$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y = 0$表示什么样的曲面？

定义 (旋转曲面)

一条平面曲线绕其平面上的一条定直线旋转一周所成的曲面叫作**旋转曲面**，这条定直线叫作旋转曲面的**轴**。

定义 (旋转曲面)

一条平面曲线绕其平面上的一条定直线旋转一周所成的曲面叫作**旋转曲面**，这条定直线叫作旋转曲面的**轴**。



如图所示，设$M_1(0, y_1, z_1)$为L上任一点，则$f(y_1, z_1) = 0$，当L绕z轴旋转时，点M_1也绕z轴旋转到另一点$M(x, y, z)$，这时$z = z_1$保持不变。

旋转曲面

M到z轴的距离d保持不变且等于$|y_1|$，而

$$d = \sqrt{x^2 + y^2} = |y_1| \text{或} y_1 = \pm\sqrt{x^2 + y^2}$$

M到z轴的距离d保持不变且等于$|y_1|$，而

$$d = \sqrt{x^2 + y^2} = |y_1| \text{或} y_1 = \pm\sqrt{x^2 + y^2}$$

由$f(y_1, z_1) = 0$得

$$f(\pm\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0,$$

这就是曲面S的方程。

M到z轴的距离d保持不变且等于$|y_1|$，而

$$d = \sqrt{x^2 + y^2} = |y_1| \text{或} y_1 = \pm\sqrt{x^2 + y^2}$$

由$f(y_1, z_1) = 0$得

$$f(\pm\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0,$$

这就是曲面S的方程。

由此可知，在曲线L的方程$f(y, z) = 0$中，变量z保持不变，用$\pm\sqrt{x^2 + y^2}$替换y，就得到曲线L绕z轴旋转所形成的旋转曲面的方程。

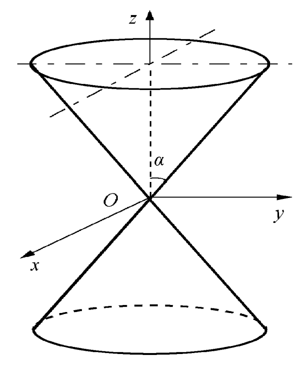
同理，曲线$L : f(y, z) = 0$绕y轴旋转所形成的旋转曲面方程为

$$f(y, \pm\sqrt{x^2 + z^2}) = 0.$$

例 5

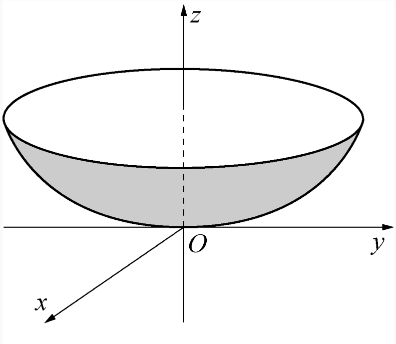
直线L绕另一条与L相交的定直线旋转一周，所得旋转曲面称为**圆锥面**，两直线的交点为圆锥面的**顶点**，两直线的平角$\alpha(0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2})$称为圆锥面的**半顶角**。

试建立顶点在坐标原点，旋转轴为z轴，半顶角为α的圆锥面方程。

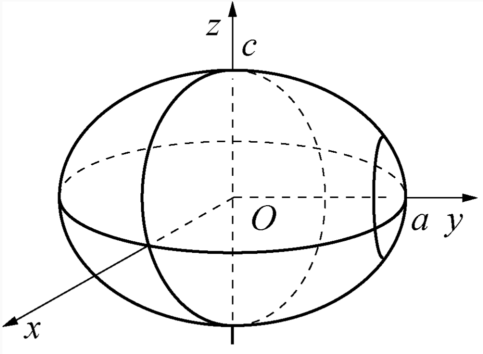


同样，我们可以得到如下常见的几个旋转曲面方程：

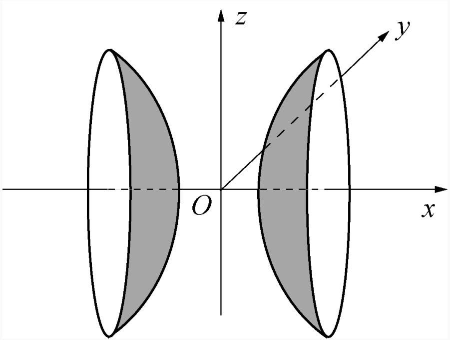
(1) 当yOz平面上的抛物线$y^2 = 2pz$绕z轴旋转时，就得到一个以z轴为旋转轴的旋转曲面，其方程为$(\pm\sqrt{x^2+y^2})^2 = 2pz$，即$x^2+y^2 = 2pz$，这是**旋转抛物面**方程。



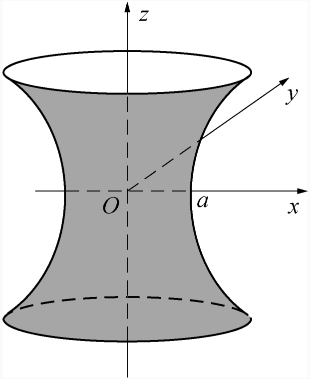
(2) 当xOz平面上的椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$绕$z$轴旋转时，就得到一个以$z$轴为旋转轴的旋转曲面，其方程为$\dfrac{x^2+y^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$，这是**旋转椭球面**方程。



(3) 当xOz平面上的双曲线$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$绕$x$轴旋转时，就得到一个以$x$轴为旋转轴的旋转曲面，其方程为$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2+z^2}{c^2}=1$，这是**旋转双曲面**方程，称为**双叶旋转双曲面**。

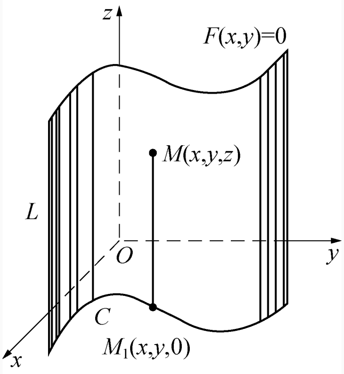


(4) 当xOz平面上的双曲线$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$绕$z$轴旋转时，就得到一个以$z$轴为旋转轴的旋转曲面，其方程为$\dfrac{x^2+y^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$，这也是**旋转双曲面**方程，称为**单叶旋转双曲面**。



定义

平行于定直线并沿定曲线C移动的直线L形成的轨迹叫作**柱面**。其中定曲线C称为柱面的**准线**，动直线L称为柱面的**母线**。

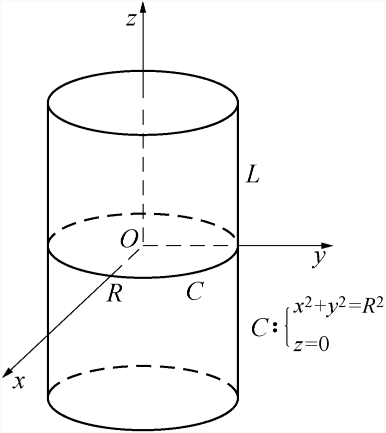


柱面

在平面解析几何中，方程$x^2+y^2=R^2$表示xOy面上圆心在原点O、半径为R的圆。

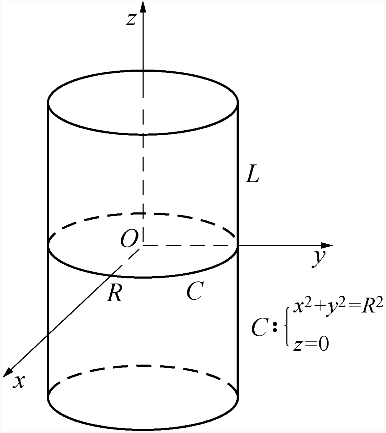
柱面

在平面解析几何中，方程$x^2+y^2=R^2$表示xOy面上圆心在原点O、半径为R的圆。在空间直角坐标系中，这个方程不含竖坐标z，即无论空间点的竖坐标z怎样，只要它的横坐标x和纵坐标y能满足这个方程，那么这些点就在这曲面上。



柱面

因此，该曲面可看成是由平行于z轴的直线L沿xOy面上的圆$x^2+y^2=R^2$移动而形成的。所以在空间解析几何中，$x^2+y^2=R^2$表示圆柱面，准线为xOy平面上的一个圆，母线是平行于z轴的直线。



一般地，设有一柱面，准线是xOy面上的曲线C：

$$\begin{cases} F(x,y)=0, \\ z=0, \end{cases}$$

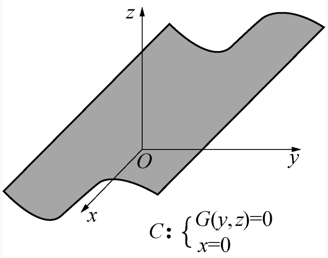
其母线平行于z轴。点$M(x,y,z)$是柱面上任意一点，过点M作平行于z轴的直线，交曲线C于点M_1，则点M_1和M有相同的横坐标和纵坐标。由于点$M_1(x,y,0)$在曲线上，故它的坐标满足准线的方程，即

$$F(x,y)=0, \tag{3}$$

又式（3）与z无关，所以$M(x,y,z)$的坐标也满足式（3）。此外，对于不在柱面上的点，它在xOy面上的垂足不在曲线C上，故其坐标不会满足式（3）。因此，式（3）就是母线平行于z轴、准线为曲线C的柱面方程。

柱面

- 母线平行于x轴，准线为yOz面上的曲线$\begin{cases} G(y,z)=0, \\ x=0, \end{cases}$其柱面方程为$G(y,z)=0$.
- 母线平行于y轴，准线为zOx面上的曲线$\begin{cases} H(x,z)=0, \\ y=0, \end{cases}$其柱面方程为$H(x,z)=0$.

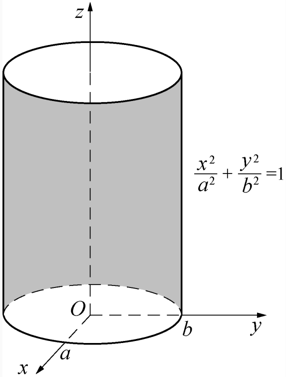


柱面

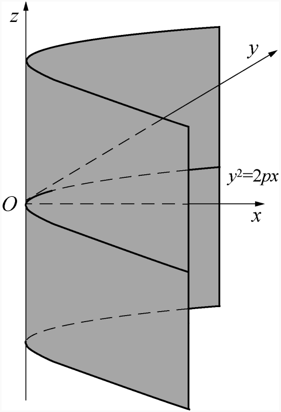
母线是平行于坐标轴的柱面的特点：方程中一般只出现两个坐标元素，方程可以表示为$F(x, y) = 0$或$G(y, z) = 0$或$H(z, x) = 0$。它们分别表示母线平行于z轴、x轴和y轴的柱面，这些方程也称为三元不完全方程。

母线是平行于坐标轴的柱面的特点：方程中一般只出现两个坐标元素，方程可以表示为$F(x, y) = 0$或$G(y, z) = 0$或$H(z, x) = 0$。它们分别表示母线平行于z轴、x轴和y轴的柱面，这些方程也称为三元不完全方程。

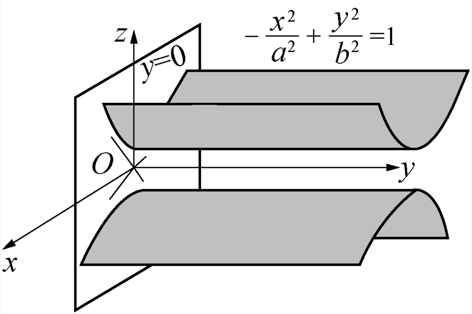
(1) 方程$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$表示母线平行于$z$轴、准线为$xOy$面上的椭圆的**椭圆柱面**。



(2) 方程$y^2 = 2px$表示母线平行于z轴、准线为xOy面上的抛物线的**抛物柱面**。



(3) 方程$-\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{b^2}=1$表示母线平行于$y$轴、准线为$zOx$面上的双曲线的**双曲柱面**。



定义

三元二次方程所表示的曲面就叫作**二次曲面**；相应地，三元一次方程所表示的曲面就叫作**一次曲面**（即平面）。

定义

三元二次方程所表示的曲面就叫作**二次曲面**；相应地，三元一次方程所表示的曲面就叫作**一次曲面**（即平面）。

常见的二次曲面包括椭球面、二次锥面、抛物面、双曲面等，适当地选取空间直角坐标系，就可得到它们的标准方程。

定义

三元二次方程所表示的曲面就叫作**二次曲面**；相应地，三元一次方程所表示的曲面就叫作**一次曲面**（即平面）。

常见的二次曲面包括椭球面、二次锥面、抛物面、双曲面等，适当地选取空间直角坐标系，就可得到它们的标准方程。

关于一般的三元方程$F(x,y,z)=0$所表示的曲面的形状，已难以用描点法得到，我们可以用**截痕法**来研究它们的形状。

椭球面方程

由方程

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \tag{4}$$

确定的曲面称为**椭球面**。

截痕法-椭球面

椭球面方程

由方程

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \tag{4}$$

确定的曲面称为**椭球面**。

当$a=b=c$时即为球面$x^2+y^2+c^2=a^2$。当a、b、c中有两个相等时，其图形为旋转椭球面。

椭球面方程

由方程

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \tag{4}$$

确定的曲面称为**椭球面**。

当$a=b=c$时即为球面$x^2+y^2+c^2=a^2$。当a、b、c中有两个相等时，其图形为旋转椭球面。由式（4）容易看到，椭球面关于坐标面、坐标轴、原点都对称，且

$$\frac{x^2}{a^2}\leqslant 1,\quad \frac{y^2}{b^2}\leqslant 1,\quad \frac{z^2}{c^2}\leqslant 1,$$

即

$$|x|\leqslant a, |y|\leqslant b, |z|\leqslant c.$$

这说明椭球面完全包含在三对平行平面$x=\pm a, y=\pm b, z=\pm c$所围成的长方体中，$a$、$b$、$c$称为椭球面的**半轴**，原点称为椭球面的**中心**。

下面我们来讨论椭球面的形状。

首先，考查三个坐标面与椭球面的交线。交线的方程分别为

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1, \\ z=0; \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1, \\ y=0; \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1, \\ x=0. \end{cases}$$

它们分别是三个坐标面上的椭圆。

下面我们来讨论椭球面的形状。

首先，考查三个坐标面与椭球面的交线。交线的方程分别为

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1, \\ z=0; \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1, \\ y=0; \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1, \\ x=0. \end{cases}$$

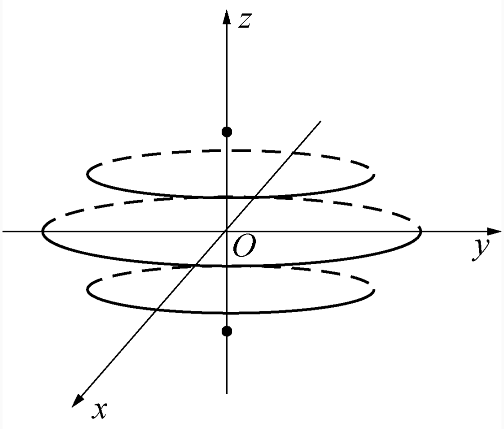
它们分别是三个坐标面上的椭圆。

其次，考查平行于坐标面的平面与椭球面的交线。用平面$z=h(|h|\leqslant c)$去截椭球面所得到的交线为

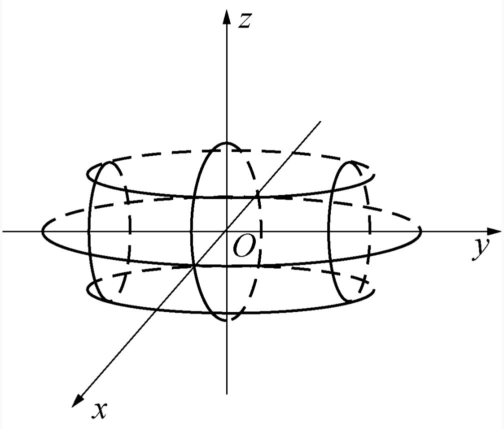
$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1-\dfrac{h^2}{c^2}, \\ z=h. \end{cases}$$

截痕法-椭球面

它是在平面$z=h$上的一个椭圆。当$|h|$由0逐渐增大到c时，椭圆逐渐由大变小，最后缩成一个点，这些椭圆就形成了椭球面：

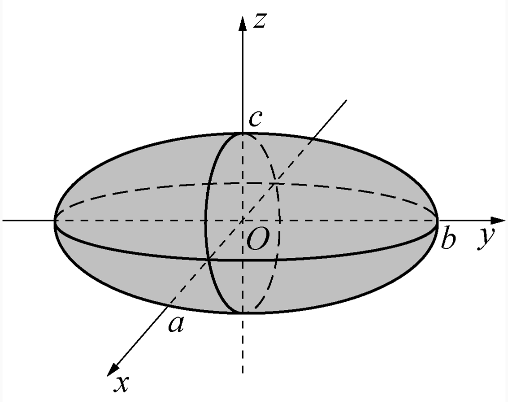


用平行于yOz面的平面或平行于xOz面的平行面分别去截椭球面也有以上类似结果：



截痕法-椭球面

椭球面的形状如图所示，这样获得的曲面几何形状的方法就叫做**截痕法**。



二次锥面（椭圆锥面）

二次锥面（椭圆锥面）方程

由方程

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z^2 \text{ 或 } \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = y^2 \text{ 或 } \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = x^2$$

所确定的曲面称为**二次锥面（椭圆锥面）**。

二次锥面（椭圆锥面）方程

由方程

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z^2 \text{ 或 } \frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=y^2 \text{ 或 } \frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=x^2$$

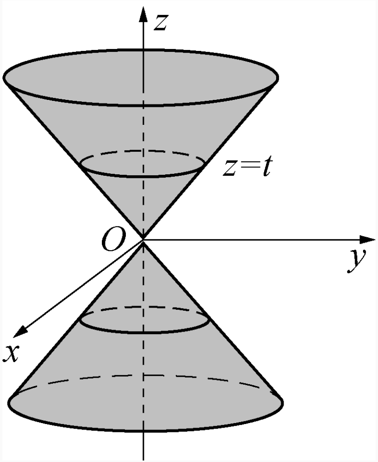
所确定的曲面称为**二次锥面（椭圆锥面）**。

考查$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=z^2$，以垂直于$z$轴的平面$z=t$截此曲面：

- 当$t=0$时得一点$(0,0,0)$；
- 当$t\neq 0$时，得平面$z=t$上的椭圆$\dfrac{x^2}{(at)^2}+\dfrac{y^2}{(bt)^2}=1$；
- 当t变化时，上式表示一族长短轴比例不变的椭圆；
- 当$|t|$从大到小并变为0时，这族椭圆从大到小缩为一点。

二次锥面（椭圆锥面）

从上述截痕，我们可以得知椭圆锥面的形状：



椭圆抛物面

椭圆抛物面方程

由方程

$$\frac{x^2}{2a} + \frac{y^2}{2b} = z \, (ab > 0)$$

所确定的曲面称为**椭圆抛物面**。

椭圆抛物面方程

由方程

$$\frac{x^2}{2a}+\frac{y^2}{2b}=z\,(ab>0)$$

所确定的曲面称为**椭圆抛物面**。

由方程的表达式可知，椭圆抛物面关于xOz面、yOz面及z轴都对称：

- 当$a>0,b>0$时，$z\geqslant 0$，所以它在xOy面的上方。
- 当$a<0,b<0$时，$z\leqslant 0$，所以它在xOy面的下方。

此外，原点O的坐标满足方程，我们称原点为椭圆抛物面的顶点。

我们用截痕法来讨论当$a > 0, b > 0$时椭圆抛物面的形状：

(1) 用平行于xOy面的平面$z = h(h > 0)$去截椭圆抛物面，交线为

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{2ah} + \dfrac{y^2}{2bh} = 1, \\ z = h, \end{cases}$$

它是平面上的一个椭圆，当z逐渐由小变大时，椭圆也逐渐由小变大，这些椭圆就形成了椭圆抛物面。

椭圆抛物面

我们用截痕法来讨论当$a > 0, b > 0$时椭圆抛物面的形状：

(1) 用平行于xOy面的平面$z = h(h > 0)$去截椭圆抛物面，交线为

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{2ah} + \dfrac{y^2}{2bh} = 1, \\ z = h, \end{cases}$$

它是平面上的一个椭圆，当z逐渐由小变大时，椭圆也逐渐由小变大，这些椭圆就形成了椭圆抛物面。

(2) 椭圆抛物面与yOz面及zOx面的交线分别为

$$\begin{cases} y^2 = 2bz, \\ x = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 = 2az, \\ y = 0, \end{cases}$$

它们分别是yOz面及zOx面上的抛物线。

(3) 用平行于坐标面$zOx(y=0)$的平面$y=k$去截椭圆抛物面，交线为一抛物线：

$$\begin{cases} x^2 = 2a\left(z - \dfrac{k^2}{2b}\right), \\ y = k. \end{cases}$$

(4) 同样，用平行于坐标面$yOz(x=0)$的平面$x=d$去截椭圆抛物面，交线仍为一抛物线。

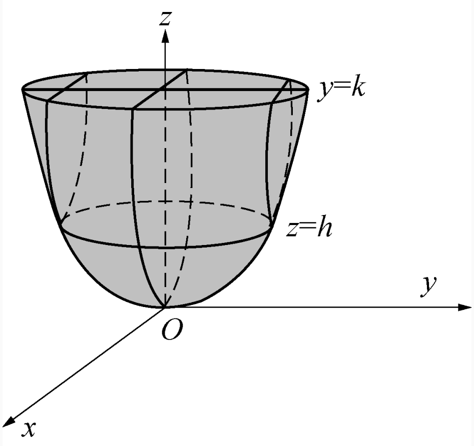
(3) 用平行于坐标面$zOx(y=0)$的平面$y=k$去截椭圆抛物面，交线为一抛物线：

$$\begin{cases} x^2 = 2a\left(z - \dfrac{k^2}{2b}\right), \\ y = k. \end{cases}$$

(4) 同样，用平行于坐标面$yOz(x=0)$的平面$x=d$去截椭圆抛物面，交线仍为一抛物线。

椭圆抛物面

根据上述截痕，就可得到椭圆抛物面的图形：



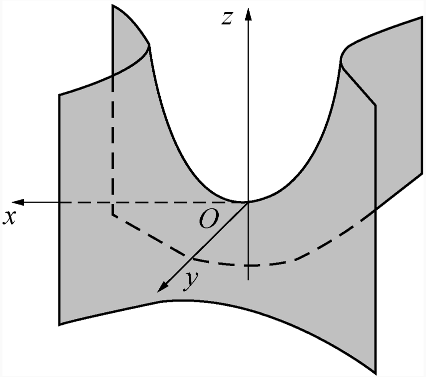
马鞍面

双曲抛物面（马鞍面）方程

由方程$\dfrac{x^2}{2a}-\dfrac{y^2}{2b}=z\,(ab>0)$所确定的曲面称为**双曲抛物面**（马鞍面）。

双曲抛物面（马鞍面）方程

由方程$\dfrac{x^2}{2a}-\dfrac{y^2}{2b}=z\,(ab>0)$所确定的曲面称为**双曲抛物面**（马鞍面）。



单叶双曲面方程

由方程

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \text{ 或 } \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \text{ 或 } -\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

确定的曲面称为**单叶双曲面**。

双曲面

单叶双曲面方程

由方程

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \text{ 或 } \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \text{ 或 } -\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

确定的曲面称为**单叶双曲面**。

双叶双曲面方程

由方程

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1 \text{ 或 } \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1 \text{ 或 } -\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1$$

确定的曲面称为**双叶双曲面**。

空间曲线的一般方程

空间曲线可看作是两个相交曲面的交线，即若设两个相交曲面的方程分别是$F(x,y,z)=0$和$G(x,y,z)=0$，则

$$\begin{cases} F(x,y,z)=0, \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$$

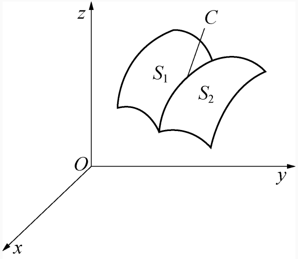
表示其交线C的方程，我们称其为曲线C的**一般方程**。

空间曲线的一般方程

空间曲线可看作是两个相交曲面的交线，即若设两个相交曲面的方程分别是$F(x,y,z)=0$和$G(x,y,z)=0$，则

$$\begin{cases} F(x,y,z)=0, \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$$

表示其交线C的方程，我们称其为曲线C的**一般方程**。

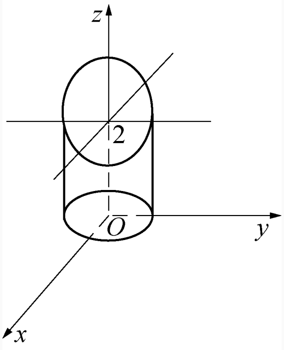


例 6

方程组$\begin{cases} x^2+y^2=1, \\ 2x+3z=6 \end{cases}$表示怎样的曲线?

例 6

方程组$\begin{cases} x^2+y^2=1, \\ 2x+3z=6 \end{cases}$ 表示怎样的曲线？

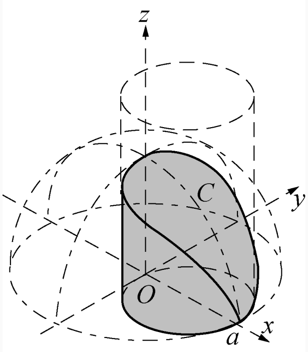


例 7

方程组$\begin{cases} z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}, \\ \left(x - \dfrac{a}{2}\right) + y^2 = \dfrac{a^2}{4} \end{cases}$表示怎样的曲线?

例 7

方程组 $\begin{cases} z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}, \\ \left(x - \dfrac{a}{2}\right) + y^2 = \dfrac{a^2}{4} \end{cases}$ 表示怎样的曲线？



空间曲线的参数方程

如果说空间曲线作为两曲面的交线而形成一般方程，那么也可以将其看作空间点移动的轨迹而形成曲线的**参数方程**。即有

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \\ z = \omega(t), \end{cases}$$

其中$\varphi(t)$、$\psi(t)$、$\omega(t)$是连续的。

空间曲线的参数方程

如果说空间曲线作为两曲面的交线而形成一般方程，那么也可以将其看作空间点移动的轨迹而形成曲线的**参数方程**。即有

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \\ z = \omega(t), \end{cases}$$

其中$\varphi(t)$、$\psi(t)$、$\omega(t)$是连续的。

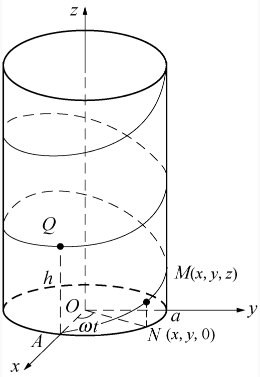
显然，随着t的变化，$\varphi(t)$、$\psi(t)$、$\omega(t)$也在变化，那么(x, y, z)对应的点M的轨迹就形成曲线。

例 8

若空间一点M在圆柱面$x^2+y^2=a^2$上以角速度ω绕z轴旋转，同时又以线速度v沿平行于z的正方向上升（其中ω、v是常数），则点M构成的图形叫做**螺旋线**，试建立其参数方程。

例 8

若空间一点M在圆柱面$x^2+y^2=a^2$上以角速度ω绕z轴旋转，同时又以线速度v沿平行于z的正方向上升（其中ω、v是常数），则点M构成的图形叫做**螺旋线**，试建立其参数方程。



注

螺旋线具有重要性质，即上升的高度与转过的角度成正比。从而当θ从θ_0变化到$\theta_0+\alpha$时，z的值由$b\theta_0$变化到$b\theta_0+b\alpha$，故当点M转过角α时，点M沿螺旋线上升了高度$b\alpha$。特别地，当$\alpha=2\pi$时，点M的高度$h=2\pi b$，称为**螺距**。

注

螺旋线具有重要性质，即上升的高度与转过的角度成正比。从而当θ从θ_0变化到$\theta_0+\alpha$时，z的值由$b\theta_0$变化到$b\theta_0+b\alpha$，故当点M转过角α时，点M沿螺旋线上升了高度$b\alpha$。特别地，当$\alpha=2\pi$时，点M的高度$h=2\pi b$，称为**螺距**。

设空间曲线C的方程为

$$\begin{cases} F(x,y,z)=0, \\ G(x,y,z)=0 \end{cases} \tag{5}$$

消去z可得方程

$$H(x,y)=0. \tag{6}$$

如果点$M(x,y,z)$满足式(5)，则其中的x、y就必定满足式(6)，而式(6)表示一个母线平行于z轴的柱面，因此曲线C在柱面(6)上。

定义 (空间曲线在坐标面上的投影)

以曲线C为准线，母线平行于z轴（即垂直于xOy面）的柱面叫作曲线C关于xOy面的**投影柱面**，而该投影柱面与xOy面的交线叫作空间曲线C在（坐标面）xOy面上的**投影曲线**（简称**投影**）。

定义 (空间曲线在坐标面上的投影)

以曲线C为准线，母线平行于z轴（即垂直于xOy面）的柱面叫作曲线C关于xOy面的**投影柱面**，而该投影柱面与xOy面的交线叫作空间曲线C在（坐标面）xOy面上的**投影曲线**（简称**投影**）。

因此，曲线C在xOy面上的投影曲线为 $\begin{cases} H(x,y)=0, \\ z=0. \end{cases}$

定义 (空间曲线在坐标面上的投影)

以曲线C为准线，母线平行于z轴（即垂直于xOy面）的柱面叫作曲线C关于xOy面的**投影柱面**，而该投影柱面与xOy面的交线叫作空间曲线C在（坐标面）xOy面上的**投影曲线**（简称**投影**）。

因此，曲线C在xOy面上的投影曲线为 $\begin{cases} H(x,y)=0, \\ z=0. \end{cases}$

类似地，

- 在式(5)中消去x，可得平行于x轴的投影柱面$R(y,z)=0$；
- 在式(5)中消去y，可得平行于y轴的投影柱面$T(x,z)=0$。

相应的投影曲线分别为 $\begin{cases} R(y,z)=0, \\ x=0 \end{cases}$ 及 $\begin{cases} T(x,z)=0, \\ y=0. \end{cases}$

例 9

方程组 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1, \\ z=\dfrac{1}{2} \end{cases}$ 在各个坐标面上的投影曲线方程。

例 9

方程组$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1, \\ z=\dfrac{1}{2} \end{cases}$在各个坐标面上的投影曲线方程。

例 10

求抛物面$y^2+z^2=x$与平面$x+2y-z=0$的截线在三个坐标面上的投影曲线方程。

例 9

方程组$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1, \\ z=\dfrac{1}{2} \end{cases}$在各个坐标面上的投影曲线方程。

例 10

求抛物面$y^2+z^2=x$与平面$x+2y-z=0$的截线在三个坐标面上的投影曲线方程。

例 11

求上半球面$z=\sqrt{4-x^2-y^2}$和锥面$z=\sqrt{3(x^2+y^2)}$的交线在xOy面上的投影曲线。

The End