AMS

多元函数微分学

本章目录

多元函数极限与连续

偏导函数与全微分

复合函数的偏导函数

隐函数的偏导函数

方向导数值与梯度

微分学的几何应用

多元函数的极值问题

多元函数极限与连续

课前导读

一元函数微积分所讨论的均是单变量函数，而在现实生活中，大量的情况往往是多变量的变化，即一个变量需要依赖于多个因素(多个变量)，这种情况反映到数学上即为多元函数问题。

课前导读

一元函数微积分所讨论的均是单变量函数，而在现实生活中，大量的情况往往是多变量的变化，即一个变量需要依赖于多个因素(多个变量)，这种情况反映到数学上即为多元函数问题。

例如在一元函数中，

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x) = A.$$

即当$x \to x_0$时$f(x)$的极限存在只需要左极限和右极限同时存在且相等即可，但多元函数极限存在的要求往往更复杂。

课前导读

一元函数微积分所讨论的均是单变量函数，而在现实生活中，大量的情况往往是多变量的变化，即一个变量需要依赖于多个因素(多个变量)，这种情况反映到数学上即为多元函数问题。

例如在一元函数中，

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x) = A.$$

即当$x \to x_0$时$f(x)$的极限存在只需要左极限和右极限同时存在且相等即可，但多元函数极限存在的要求往往更复杂。

本节将在一元函数的基础上讨论多元函数的极限与连续概念，我们以二元函数为主要讨论对象。

课前导读

一元函数微积分所讨论的均是单变量函数，而在现实生活中，大量的情况往往是多变量的变化，即一个变量需要依赖于多个因素(多个变量)，这种情况反映到数学上即为多元函数问题。

例如在一元函数中，

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x) = A.$$

即当$x \to x_0$时$f(x)$的极限存在只需要左极限和右极限同时存在且相等即可，但多元函数极限存在的要求往往更复杂。

本节将在一元函数的基础上讨论多元函数的极限与连续概念，我们以二元函数为主要讨论对象。具体地，我们先把直线上区间集合的若干概念推广到平面区域上，从而再探讨平面区域上二元函数的极限和连续概念。

平面上的集合

我们记$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{R}\}$表示$xOy$坐标平面。

- 设$M_1(x_1, y_1)$与$M_2(x_2, y_2)$为xOy平面上的两点，那么

$$d := \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

表示$\mathbb{R}^2$中$M_1(x_1, y_1)$与$M_2(x_2, y_2)$的距离；

平面上的集合

我们记$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{R}\}$表示$xOy$坐标平面。

- 设$M_1(x_1, y_1)$与$M_2(x_2, y_2)$为xOy平面上的两点，那么

$$d := \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

表示$\mathbb{R}^2$中$M_1(x_1, y_1)$与$M_2(x_2, y_2)$的距离；

- 我们称坐标平面上具有某种性质的点的集合为**平面点集**，记作

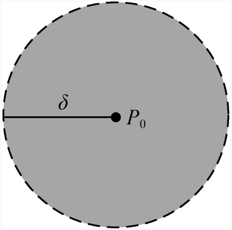
$$E = \{(x, y) \mid (x, y)\text{具备某种性质}\}.$$

- 设$P_0(x_0, y_0)$是xOy面上的一点且$\delta > 0$， xOy面上所有与点P_0的距离小于δ的点的集合称为点P_0的δ**邻域**： $U(P_0, \delta) := \{P \mid |P_0 P| < \delta\}$，或

$$U(P_0, \delta) = \{(x, y) \mid \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta\}.$$

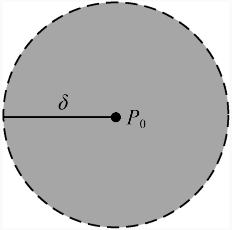
邻域的概念

如图是一个以P_0为圆心， δ为半径的圆的**内部**，所以P_0又称为邻域$U(P_0,\delta)$的**中心**， δ称为邻域$U(P_0,\delta)$的**半径**。



邻域的概念

如图是一个以P_0为圆心， δ为半径的圆的**内部**，所以P_0又称为邻域$U(P_0,\delta)$的**中心**， δ称为邻域$U(P_0,\delta)$的**半径**。

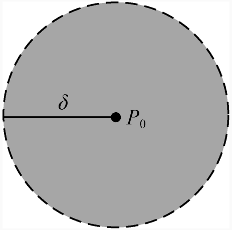


同样地，我们可以定义平面上的**去心邻域**：

$$\mathring{U}(P_0,\delta)=\{(x,y)\mid 0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta\}.$$

邻域的概念

如图是一个以P_0为圆心，δ为半径的圆的**内部**，所以P_0又称为邻域$U(P_0,\delta)$的**中心**，δ称为邻域$U(P_0,\delta)$的**半径**。



同样地，我们可以定义平面上的**去心邻域**：

$$\mathring{U}(P_0,\delta)=\{(x,y)\mid 0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta\}.$$

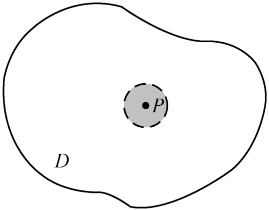
除非我们需要强调邻域的半径，有时点P_0的邻域可以简记为$U(P_0)$。

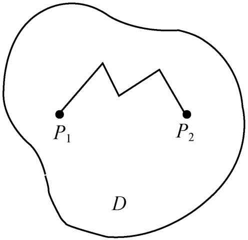
区域的概念

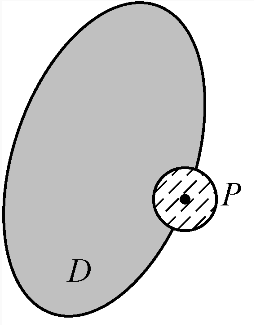
定义

设D是平面$\mathbb{R}^2$上的点集。

- 如果对于D中的任意一点P，都能找到该点的一个邻域$U(P,\delta)$，使得$U(P,\delta)\subset D$，那么我们称D为$\mathbb{R}^2$中的一个**开集**，此时点P称为D的内点)。$\mathbb{R}^2$中开集的补集称为**闭集**；
- 如果D中的任意两点都能用包含在D中的折线连接起来，那么我们称D是**连通的**。$\mathbb{R}^2$中连通开集简称为**开区域或区域**。



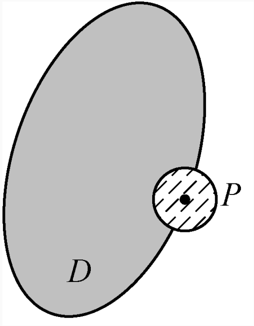




定义

设D是$\mathbb{R}^2$中的区域，点P是$\mathbb{R}^2$上的任意一点。

- 如果P的任何一个邻域中既含有D中的点也含有D^c中的点，那么点P称为D的边界点，所有边界点的集合称为D的边界，记作∂D。开区域和它的边界一起构成的集合称为**闭区域**。



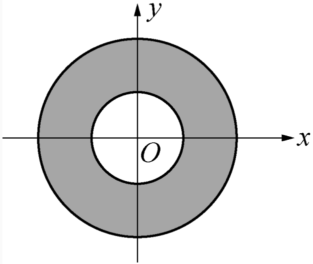
定义

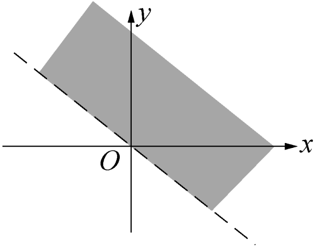
设D是$\mathbb{R}^2$中的区域，点P是$\mathbb{R}^2$上的任意一点。

- 如果P的任何一个邻域中既含有D中的点也含有D^c中的点，那么点P称为D的边界点，所有边界点的集合称为D的边界，记作∂D。开区域和它的边界一起构成的集合称为**闭区域**。
- 开区域(或闭区域)分为**有界区域**和**无界区域**。如果一个区域D能够包含在一个以原点为中心的圆内，那么其称为有界区域，否则就称其是无界区域。

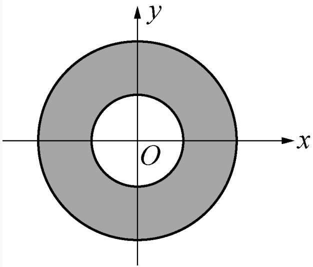
区域的概念

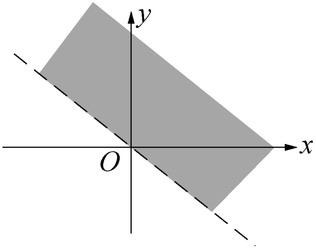
如图所示:





如图所示：





- 平面点集$D_1 = \{(x,y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$是一个有界的闭区域，边界是两个圆所对应的曲线：$\{(x,y) \mid x^2 + y^2 = 1\} \bigcup \{(x,y) \mid x^2 + y^2 = 4\}$，边界曲线属于闭区域$D_1$。
- 右图所表示的平面点集$D_2 = \{(x,y) \mid x + y > 0\}$是无界(开)区域，边界是直线$y = -x$，边界不属于区域$D_2$。

二元函数的概念

和一元函数一样，二元函数也是从实际问题中抽象出来的一个数学概念。

二元函数的概念

和一元函数一样，二元函数也是从实际问题中抽象出来的一个数学概念。

- 圆柱体的体积V和它的高h及底面积r之间有如下的关系：

$$V = \pi r^2 h.$$

当r, h在集合$\{(r, h) \mid r > 0, h > 0\}$内取值时，则有唯一的$V = \pi r^2 h$与之对应。

和一元函数一样，二元函数也是从实际问题中抽象出来的一个数学概念。

- 圆柱体的体积V和它的高h及底面积r之间有如下的关系：

$$V = \pi r^2 h.$$

  当r, h在集合$\{(r,h) \mid r > 0, h > 0\}$内取值时，则有唯一的$V = \pi r^2 h$与之对应。

- 一个定量的理想气体的压强P，体积V和温度T之间有如下的关系：

$$P = \frac{RT}{V},$$

  其中R是常数。当T, V在集合$\{(T,V) \mid T > T_0, V > 0\}$内取值时，有唯一的$P = \dfrac{RT}{V}$与之对应。

上述两个实际例子说明，在一定条件下，当两个变量在允许的范围内取值时，另一个变量通过某个对应法会有唯一的值与之对应。由此我们得到了以下二元函数的定义：

上述两个实际例子说明，在一定条件下，当两个变量在允许的范围内取值时，另一个变量通过某个对应法会有唯一的值与之对应。由此我们得到了以下二元函数的定义：

定义 (二元函数)

设D是$\mathbb{R}^2$上的一个非空点集。

- 如果对于D内的任一点(x, y)，按照某种法则f都有唯一确定的实数z与之对应，那么我们称f是D上的**二元函数**，它在(x, y)处的函数值记为$f(x, y)$；
- x, y称为对应二元函数的**自变量**，z称为**因变量**；
- 点集D称为该二元函数的**定义域**，$\{z \mid z = f(x, y), (x, y) \in D\}$称为该函数的**值域**。

上述两个实际例子说明，在一定条件下，当两个变量在允许的范围内取值时，另一个变量通过某个对应法会有唯一的值与之对应。由此我们得到了以下二元函数的定义：

定义 (二元函数)

设D是$\mathbb{R}^2$上的一个非空点集。

- 如果对于D内的任一点(x,y)，按照某种法则f都有唯一确定的实数z与之对应，那么我们称f是D上的**二元函数**，它在(x,y)处的函数值记为$f(x,y)$；
- x,y称为对应二元函数的**自变量**，z称为**因变量**；
- 点集D称为该二元函数的**定义域**，$\{z \mid z=f(x,y),(x,y)\in D\}$称为该函数的**值域**。

二元函数的概念

按照上述二元函数的定义，

- 在关系式$V=\pi r^2 h$中，V是h,r的二元函数，$\{(r,h)\mid r>0,h>0\}$为V的定义域；
- 在关系式$P=RT/V$中，P是T,V的二元函数，$\{(T,V)\mid T>T_0,V>0\}$为P的定义域。

按照上述二元函数的定义，

- 在关系式$V=\pi r^2 h$中，V是h,r的二元函数，$\{(r,h)\mid r>0,h>0\}$为V的定义域；
- 在关系式$P=RT/V$中，P是T,V的二元函数，$\{(T,V)\mid T>T_0,V>0\}$为P的定义域。

我们对二元函数的定义域作以下约定：在一般讨论用解析式表达的二元函数时，其定义域就是使该解析式有意义的自变量的变化范围。因此对二元函数$z=f(x,y)$而言，其定义域就是使$f(x,y)$有确定值z的自变量x,y的变化范围所确定的点集。

按照上述二元函数的定义，

- 在关系式$V = \pi r^2 h$中，V是h, r的二元函数，$\{(r, h) \mid r > 0, h > 0\}$为$V$的定义域；
- 在关系式$P = RT/V$中，P是T, V的二元函数，$\{(T, V) \mid T > T_0, V > 0\}$为$P$的定义域。

我们对二元函数的定义域作以下约定：在一般讨论用解析式表达的二元函数时，其定义域就是使该解析式有意义的自变量的变化范围。因此对二元函数$z = f(x, y)$而言，其定义域就是使$f(x, y)$有确定值z的自变量x, y的变化范围所确定的点集。

- 函数$z = \ln(x + y)$的定义域是满足不等式$x + y > 0$的点的全体：$D = \{(x, y) \mid x + y > 0\}$；
- 函数$z = \arcsin(x^2 + y^2)$的定义域为$D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$。

例 1

求二元函数$f(x,y)=\sqrt{3-x^2-y^2}$的定义域。

例 1

求二元函数$f(x,y)=\sqrt{3-x^2-y^2}$的定义域。

例 2

求函数$z=\ln(x^2+y^2-2x)+\ln(4-x^2-y^2)$的定义域。

例 1

求二元函数$f(x,y)=\sqrt{3-x^2-y^2}$的定义域。

例 2

求函数$z=\ln(x^2+y^2-2x)+\ln(4-x^2-y^2)$的定义域。

例 3

已知函数$f(x+y,x-y)=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$，求$f(x,y)$的表达式，并求$f(2,1)$的值。

定义

设函数$f(x,y)$的定义域为D，对于任意取定的点$P(x,y)\in D$。对于二元函数$z=f(x,y)$，以x为横坐标，y为纵坐标，z为竖坐标在空间确定点$M(x,y,z)$。当x取遍D上一切点时，得到一个$\mathbb{R}^3$的点集

$$\{(x,y,z)\mid z=f(x,y),(x,y)\in D\},$$

我们称这个点集为**二元函数的图形**。

定义

设函数$f(x,y)$的定义域为D，对于任意取定的点$P(x,y)\in D$。对于二元函数$z=f(x,y)$，以x为横坐标，y为纵坐标，z为竖坐标在空间确定点$M(x,y,z)$。当x取遍D上一切点时，得到一个$\mathbb{R}^3$的点集

$$\{(x,y,z)\mid z=f(x,y),(x,y)\in D\},$$

我们称这个点集为**二元函数的图形**。

注

- 二元函数的图形是一个曲面，例如：
  - $z=3x^2+4y^2$就是一个椭圆抛物面；
  - $z=x^2+y^2$的图形为旋转抛物面；
  - $z=\sqrt{a-x^2-y^2}$的图形为上半球面。

定义

设函数$f(x,y)$的定义域为D，对于任意取定的点$P(x,y)\in D$。对于二元函数$z=f(x,y)$，以x为横坐标，y为纵坐标，z为竖坐标在空间确定点$M(x,y,z)$。当x取遍D上一切点时，得到一个$\mathbb{R}^3$的点集

$$\{(x,y,z)\mid z=f(x,y),(x,y)\in D\},$$

我们称这个点集为**二元函数的图形**。

注

- 二元函数的图形是一个曲面，例如：
  - $z=3x^2+4y^2$就是一个椭圆抛物面；
  - $z=x^2+y^2$的图形为旋转抛物面；
  - $z=\sqrt{a-x^2-y^2}$的图形为上半球面。
- 类似地，当$n\geq 2$时，我们称n元函数统称为**多元函数**。

我们先回顾一下一元函数极限的定义：

我们先回顾一下一元函数极限的定义：设函数$f(x)$在点a的某一个去心邻域内(即点a可以除外)有定义，如果

$$\forall\,\varepsilon > 0, \exists\,\delta > 0, \text{使得当} 0 < |x-a| < \delta \text{时}, \text{恒有} |f(x) - A| < \varepsilon,$$

那么$\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$。

我们先回顾一下一元函数极限的定义：设函数$f(x)$在点a的某一个去心邻域内(即点a可以除外)有定义，如果

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{使得当} 0 < |x-a| < \delta \text{时}, \text{恒有} |f(x) - A| < \varepsilon,$$

那么$\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$。其中

- a是数轴上的定点，
- x是数轴上的动点，
- $|x-a|$表示点x与a的距离，
- $0 < |x-a| < \delta$表示$\{x \mid x \in (a-\delta, a) \cup (a, a+\delta)\}$。

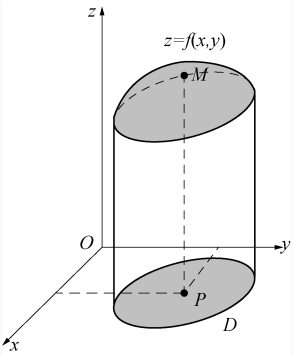
我们先回顾一下一元函数极限的定义：设函数$f(x)$在点a的某一个去心邻域内(即点a可以除外)有定义，如果

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{使得当} 0 < |x - a| < \delta \text{时}, \text{恒有} |f(x) - A| < \varepsilon,$$

那么$\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$。其中

- a是数轴上的定点，
- x是数轴上的动点，
- $|x - a|$表示点x与a的距离，
- $0 < |x - a| < \delta$表示$\{x \mid x \in (a - \delta, a) \cup (a, a + \delta)\}$。

类似地，我们可建立如下二元函数极限的概念。



定义 (二元函数的极限)

设函数$z=f(x,y)$的定义域为D， $P_0(x_0,y_0)$是xOy平面内的定点。如果存在常数A，使得$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$，当点$P(x,y)\in D\cap\mathring{U}(P_0,\delta)$时，恒有

$$|f(p)-A|=|f(x,y)-A|<\varepsilon,$$

那么称常数A为当$(x,y)\to(x_0,y_0)$时$f(x,y)$的极限：

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A,$$

或

$$f(x,y)\to A\,((x,y)\to(x_0,y_0)),$$

也可记作 $\lim\limits_{P\to P_0} f(P)=A$ 或 $f(P)\to A\,(P\to P_0)$。

注

只有当$P(x,y)$以任何的方式趋于点$P_0(x_0,y_0)$时，对应的函数值$z=f(x,y)$趋近于确定的常数A，才能说$f(x,y)$有极限, 或者说极限的存在与自变量趋近的路径无关。

反之，如果点$P(x,y)$沿着两条不同的路径趋于$P_0(x_0,y_0)$时，函数值趋于不同的常数，那么函数的极限肯定不存在。

注

只有当$P(x,y)$以任何的方式趋于点$P_0(x_0,y_0)$时，对应的函数值$z=f(x,y)$趋近于确定的常数A，才能说$f(x,y)$有极限，或者说极限的存在与自变量趋近的路径无关。
反之，如果点$P(x,y)$沿着两条不同的路径趋于$P_0(x_0,y_0)$时，函数值趋于不同的常数，那么函数的极限肯定不存在。

例 4

证明 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2}=0$

注

只有当$P(x,y)$以任何的方式趋于点$P_0(x_0,y_0)$时，对应的函数值$z=f(x,y)$趋近于确定的常数A，才能说$f(x,y)$有极限，或者说极限的存在与自变量趋近的路径无关。
反之，如果点$P(x,y)$沿着两条不同的路径趋于$P_0(x_0,y_0)$时，函数值趋于不同的常数，那么函数的极限肯定不存在。

例 4

证明 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2}=0$

例 5

证明 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$不存在.

二元函数的极限与一元函数的极限具有类似的性质和运算法则。为了区别于一元函数的极限，我们有时也称二元函数的极限为**二重极限**。

例 6

求极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}$.

二元函数的极限与一元函数的极限具有类似的性质和运算法则。为了区别于一元函数的极限，我们有时也称二元函数的极限为**二重极限**。

例 6

求极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}$.

例 7

求极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}$.

定义 (二元函数的连续性)

设二元函数$z = f(x,y)$在点(x_0,y_0)的某一邻域内有定义，(x,y)是邻域内任意一点。

- 如果
$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0),$$
那么我们称$f(x,y)$在点(x_0,y_0)**处连续**；
- 如果函数$f(x,y)$在点(x_0,y_0)处不连续，此时点(x_0,y_0)称为函数$f(x,y)$**的间断点**；
- 设函数$f(x,y)$在D上有定义，且在D上每一点$f(x,y)$都连续，那么就称函数$f(x,y)$在D上连续，或者称$f(x,y)$是D上的**连续函数**。

因为一元函数中关于极限的运算法则，对于多元函数仍然适用，所以根据一元函数的运算法则，我们有以下结论：

因为一元函数中关于极限的运算法则，对于多元函数仍然适用，所以根据一元函数的运算法则，我们有以下结论：

(1) 多元连续函数点态的和、差、积仍为连续函数；

因为一元函数中关于极限的运算法则，对于多元函数仍然适用，所以根据一元函数的运算法则，我们有以下结论：

(1) 多元连续函数点态的和、差、积仍为连续函数；

(2) 多元连续函数的点态商在分母不为零时仍为连续函数；

因为一元函数中关于极限的运算法则，对于多元函数仍然适用，所以根据一元函数的运算法则，我们有以下结论：

(1) 多元连续函数点态的和、差、积仍为连续函数；
(2) 多元连续函数的点态商在分母不为零时仍为连续函数；
(3) 多元连续函数的复合函数仍为连续函数。

因为一元函数中关于极限的运算法则，对于多元函数仍然适用，所以根据一元函数的运算法则，我们有以下结论：

(1) 多元连续函数点态的和、差、积仍为连续函数；
(2) 多元连续函数的点态商在分母不为零时仍为连续函数；
(3) 多元连续函数的复合函数仍为连续函数。

由常数及具有不同自变量的一元基本初等函数经过有限次的四则运算和复合步骤而得到的可用一个式子表示的函数称为**多元初等函数**。

一切多元初等函数在其定义区域内是连续的，所谓定义区域是指包含在定义域内的区域或闭区域。

一般地，我们在求 $\lim\limits_{P\to P_0} f(P)$时，如果$f(P)$是初等函数且$P_0$是$f(P)$的定义域的内点，那么$f(P)$在$P_0$处连续，因此

$$\lim_{P\to P_0} f(P) = f(P_0).$$

例 8

计算 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} \dfrac{e^x+y}{x+y}$。

例 8

计算 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} \dfrac{e^x + y}{x + y}$。

例 9

计算 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} \left[\ln(y - x) + \dfrac{y}{\sqrt{1 - x^2}}\right]$。

引例

例 8

计算 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} \dfrac{e^x+y}{x+y}$。

例 9

计算 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} \left[\ln(y-x)+\dfrac{y}{\sqrt{1-x^2}}\right]$。

例 10

计算 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{3-\sqrt{x^2+y^2+9}}{x^2+y^2}$。

例 11

对于函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0),\end{cases}$$

注意到当$x\to 0, y\to 0$时， $f(x,y)$的极限不存在，故$(0,0)$是$f(x,y)$的间断点。

例 11

对于函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0),\end{cases}$$

注意到当$x\to 0, y\to 0$时， $f(x,y)$的极限不存在，故$(0,0)$是$f(x,y)$的间断点。

例 12

二元函数

$$f(x,y)=\frac{1}{x+y}$$

是一个初等函数，且它在直线$y=-x$上是没有定义的，所以函数$f(x,y)$的间断点是平面上的点集

$$\{(x,y)\mid x+y=0\}.$$

与一元连续函数在闭区间上的性质相类似，在有界闭区域上的连续多元函数也具有如下性质：

与一元连续函数在闭区间上的性质相类似，在有界闭区域上的连续多元函数也具有如下性质：

定理 (性质1(有界性与最大值最小值定理))

如果函数$f(P)$在有界闭区域D上连续，那么$f(P)$在D上必有界，且能够取得最大值和最小值。

定理 (性质2(介值定理))

如果函数$f(P)$在有界闭区域D上连续，那么$f(P)$必在D上取得介于最大值和最小值之间的任何值。

偏导函数与全微分

课前导读

对于一元函数$y=f(x)$，如果自变量x产生变化(由x_0变为$x_0+\Delta x$)，那么因变量会相应地产生一个增量$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x)$。而函数关于自变量的变化率的极限$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$称为函数$y$在点$x_0$的导数值。

课前导读

对于一元函数$y = f(x)$，如果自变量x产生变化(由x_0变为$x_0 + \Delta x$)，那么因变量会相应地产生一个增量$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x)$。而函数关于自变量的变化率的极限$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$称为函数$y$在点$x_0$的导数值。

对于一个二元函数$f(x, y)$，当某一个自变量在变化而另一个自变量不变化，例如自变量$x : x_0 \to x_0 + \Delta x$而自变量$y$保持定值$y_0$时，我们即将说明，该二元函数关于发生变化的自变量$x$变化率的极限叫做这个二元函数对这个自变量$x$在$x_0$处的偏导数值。

课前导读

对于一元函数$y = f(x)$，如果自变量x产生变化(由x_0变为$x_0 + \Delta x$)，那么因变量会相应地产生一个增量$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x)$。而函数关于自变量的变化率的极限 $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$称为函数$y$在点$x_0$的导数值。

对于一个二元函数$f(x, y)$，当某一个自变量在变化而另一个自变量不变化，例如自变量$x : x_0 \to x_0 + \Delta x$而自变量$y$保持定值$y_0$时，我们即将说明，该二元函数关于发生变化的自变量$x$变化率的极限叫做这个二元函数对这个自变量$x$在$x_0$处的偏导数值。

回忆一下，对于一元函数来说，如果$\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x)$， A为仅与x_0有关的常数，那么称$f(x)$在x_0处可微， $A\Delta x$称为$f(x)$在x_0处的微分。

对于一元函数$y=f(x)$，如果自变量x产生变化(由x_0变为$x_0+\Delta x$)，那么因变量会相应地产生一个增量$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x)$。而函数关于自变量的变化率的极限$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$称为函数$y$在点$x_0$的导数值。

对于一个二元函数$f(x,y)$，当某一个自变量在变化而另一个自变量不变化，例如自变量$x: x_0\to x_0+\Delta x$而自变量y保持定值y_0时，我们即将说明，该二元函数关于发生变化的自变量x变化率的极限叫做这个二元函数对这个自变量x在x_0处的偏导数值。

回忆一下，对于一元函数来说，如果$\Delta y=A\Delta x+o(\Delta x)$， A为仅与x_0有关的常数，那么称$f(x)$在x_0处可微， $A\Delta x$称为$f(x)$在x_0处的微分。 而$f(x)$在x_0处可微的充要条件是 $dy=f'(x_0)\Delta x=f'(x_0)dx$，其中$f'(x_0)$是$f(x)$在$x_0$处的导数值。

课前导读

对于一元函数$y=f(x)$，如果自变量x产生变化(由x_0变为$x_0+\Delta x$)，那么因变量会相应地产生一个增量$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x)$。而函数关于自变量的变化率的极限 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$称为函数$y$在点$x_0$的导数值。

对于一个二元函数$f(x,y)$，当某一个自变量在变化而另一个自变量不变化，例如自变量$x:x_0\to x_0+\Delta x$而自变量y保持定值y_0时，我们即将说明，该二元函数关于发生变化的自变量x变化率的极限叫做这个二元函数对这个自变量x在x_0处的偏导数值。

回忆一下，对于一元函数来说，如果$\Delta y=A\Delta x+o(\Delta x)$， A为仅与x_0有关的常数，那么称$f(x)$在x_0处可微， $A\Delta x$称为$f(x)$在x_0处的微分。 而$f(x)$在x_0处可微的充要条件是 $dy=f'(x_0)\Delta x=f'(x_0)dx$，其中$f'(x_0)$是$f(x)$在$x_0$处的导数值。

本节我们讨论关于二元函数偏导数值、偏导函数和二元函数微分的定义以及考察二元函数的微分和其偏导函数之间是否能延续类似一元函数微分学中的微分和导函数之间的对应关系。

一元函数从变化率的研究引入了函数在某点处导数值的概念：

$$f'(x_0) = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

其几何意义是曲线$y = f(x)$在点$(x_0, f(x_0))$处切线的斜率为$k = \tan\alpha = f'(x_0)$。

多元函数的偏导数值

一元函数从变化率的研究引入了函数在某点处导数值的概念：

$$f'(x_0) = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

其几何意义是曲线$y = f(x)$在点$(x_0, f(x_0))$处切线的斜率为$k = \tan\alpha = f'(x_0)$。

由于多元函数的自变量不止一个，所以因变量与自变量的关系要比一元函数复杂得多, 因此我们首先考虑多元函数中关于其中一个变量的变化率。

多元函数的偏导数值

一元函数从变化率的研究引入了函数在某点处导数值的概念：

$$f'(x_0)=\frac{dy}{dx}\bigg|_{x=x_0}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

其几何意义是曲线$y=f(x)$在点$(x_0,f(x_0))$处切线的斜率为$k=\tan\alpha=f'(x_0)$。

由于多元函数的自变量不止一个，所以因变量与自变量的关系要比一元函数复杂得多, 因此我们首先考虑多元函数中关于其中一个变量的变化率。我们以二元函数$z=f(x,y)$为例，如果该函数只有自变量x变化而自变量y不变(暂作常量)，这时我们就可看作该二元函数为x的一元函数。

多元函数的偏导数值

一元函数从变化率的研究引入了函数在某点处导数值的概念：

$$f'(x_0) = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

其几何意义是曲线$y=f(x)$在点$(x_0, f(x_0))$处切线的斜率为$k=\tan\alpha=f'(x_0)$。

由于多元函数的自变量不止一个，所以因变量与自变量的关系要比一元函数复杂得多，因此我们首先考虑多元函数中关于其中一个变量的变化率。我们以二元函数$z=f(x,y)$为例，如果该函数只有自变量x变化而自变量y不变(暂作常量)，这时我们就可看作该二元函数为x的一元函数。例如：理想气态方程$P=k\dfrac{T}{V}$，其中T,V是两个变量，k是常量(比例系数)，有时我们需考虑

- 在等温条件下(T不变)压缩气体压强P关于体积V的变化率；
- 在等容条件下(V不变)压缩气体压强P关于温度T的变化率。

上述涉及到的内容即可看作是对应某个变量处的偏导数值问题。

定义 (多元函数的偏导数值)

设函数$z=f(x,y)$在点$f(x_0,y_0)$的某一邻域内有定义。当y固定在y_0而x在x_0处有增量Δx时，相应的函数有增量

$$f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0).$$

如果极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

存在，那么我们称此极限为函数$z=f(x,y)$在点$f(x_0,y_0)$处对x**的偏导数值**，记为

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}},\quad \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}},\quad \left.z_x\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}} \text{ 或 } f_x(x_0,y_0).$$

偏导数值及偏导函数的定义及计算

例如

$$f_x(x_0, y_0) := \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}.$$

例如

$$f_x(x_0, y_0) := \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}.$$

定义

二元函数$z = f(x, y)$在点(x_0, y_0)**处对y的偏导数值**可定义为

$$f_y(x_0, y_0) := \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}.$$

此时我们记其为

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}, \quad \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}, \quad z_y\Big|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}} \text{ 或 } f_y(x_0, y_0).$$

例如

$$f_x(x_0, y_0) := \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}.$$

定义

二元函数$z = f(x, y)$在点(x_0, y_0)**处对**y**的偏导数值**可定义为

$$f_y(x_0, y_0) := \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}.$$

此时我们记其为

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}}, \quad \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}}, \quad z_y\Big|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}} \text{ 或 } f_y(x_0, y_0).$$

偏导数值及偏导函数的定义及计算

上述二元函数偏导数值的定义可以类推到多元函数中。

偏导数值及偏导函数的定义及计算

上述二元函数偏导数值的定义可以类推到多元函数中。

定义

如果函数$z=f(x,y)$在区域D内每一点处对x的偏导数值都存在，那么这个偏导数值可以看作是x,y的一个二元函数，我们称其为函数$z=f(x,y)$对**自变量**x**的偏导函数**，记作

$$\frac{\partial z}{\partial x},\ \frac{\partial f}{\partial x},\ z_x,\ \text{或}\ f_x(x,y).$$

函数$z=f(x,y)$对**自变量**y**的偏导函数**记作

$$\frac{\partial z}{\partial y},\ \frac{\partial f}{\partial y},\ z_y,\ \text{或}\ f_y(x,y).$$

上述二元函数偏导数值的定义可以类推到多元函数中。

定义

如果函数$z=f(x,y)$在区域D内每一点处对x的偏导数值都存在，那么这个偏导数值可以看作是x,y的一个二元函数，我们称其为函数$z=f(x,y)$对**自变量x的偏导函数**，记作

$$\frac{\partial z}{\partial x},\ \frac{\partial f}{\partial x},\ z_x,\ \text{或}\ f_x(x,y).$$

函数$z=f(x,y)$对**自变量y的偏导函数**记作

$$\frac{\partial z}{\partial y},\ \frac{\partial f}{\partial y},\ z_y,\ \text{或}\ f_y(x,y).$$

上述定义表明，在求多元函数对某个自变量的偏导函数时，我们只需把其余自变量看作是常量，然后直接利用一元函数求导函数公式及复合函数求导函数法则来计算。

例 1

设函数$z = x^3 + 2x^2y^3 + ye^x$，求$\frac{\partial z}{\partial x}$及$\frac{\partial z}{\partial y}$。

例 1

设函数$z = x^3 + 2x^2y^3 + ye^x$，求$\dfrac{\partial z}{\partial x}$及$\dfrac{\partial z}{\partial y}$。

例 2

求函数$z = f(x,y) = x^2 + 3xy + y^2$在点$(1,2)$处的偏导数值。

例 1

设函数$z = x^3 + 2x^2y^3 + ye^x$，求$\dfrac{\partial z}{\partial x}$及$\dfrac{\partial z}{\partial y}$。

例 2

求函数$z = f(x, y) = x^2 + 3xy + y^2$在点$(1, 2)$处的偏导数值。

例 3

求函数$z = x^y$的两个偏导函数$\dfrac{\partial z}{\partial x}$及$\dfrac{\partial z}{\partial y}$。

例 1

设函数$z = x^3 + 2x^2y^3 + ye^x$, 求$\dfrac{\partial z}{\partial x}$及$\dfrac{\partial z}{\partial y}$。

例 2

求函数$z = f(x, y) = x^2 + 3xy + y^2$在点$(1, 2)$处的偏导数值。

例 3

求函数$z = x^y$的两个偏导函数$\dfrac{\partial z}{\partial x}$及$\dfrac{\partial z}{\partial y}$。

例 4

设$f(x, y) = (x-1)g(y) + (y-1)h(x)$，求$f_x(1, 1)$。

例 1

设函数$z=x^3+2x^2y^3+ye^x$，求$\dfrac{\partial z}{\partial x}$及$\dfrac{\partial z}{\partial y}$。

例 2

求函数$z=f(x,y)=x^2+3xy+y^2$在点$(1,2)$处的偏导数值。

例 3

求函数$z=x^y$的两个偏导函数$\dfrac{\partial z}{\partial x}$及$\dfrac{\partial z}{\partial y}$。

例 4

设$f(x,y)=(x-1)g(y)+(y-1)h(x)$，求$f_x(1,1)$。

例 5

计算三元函数$u=\sin(x+y^2-e^z)$的偏导函数。

注

关于多元函数的偏导数，我们补充以下几点说明:

注

关于多元函数的偏导数，我们补充以下几点说明：

(1) 对一元函数而言，导函数$\frac{dy}{dx}$可看作函数的微分dy与自变量的微分dx的微商，但偏导数的记号$\frac{\partial u}{\partial x}$是一个整体而不可分割；

注

关于多元函数的偏导数，我们补充以下几点说明：

(1) 对一元函数而言，导函数$\dfrac{dy}{dx}$可看作函数的微分dy与自变量的微分dx的微商，但偏导数的记号$\dfrac{\partial u}{\partial x}$是一个整体而不可分割；

(2) 与一元函数类似，对于分段多元函数在分段点的偏导数值要利用偏导数值的定义来计算；

注

关于多元函数的偏导数，我们补充以下几点说明：

(1) 对一元函数而言，导函数 $\dfrac{dy}{dx}$ 可看作函数的微分 dy 与自变量的微分 dx 的微商，但偏导数的记号 $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ 是一个整体而不可分割；

(2) 与一元函数类似，对于分段多元函数在分段点的偏导数值要利用偏导数值的定义来计算；

(3) 我们知道，在一元函数微分学中，如果函数在某点存在导数值，那么它在该点必定连续。但对多元函数而言，即使函数在某点的各个偏导数值都存在，也不能保证该多元函数在此点处连续。

例 6

二元函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0),\end{cases}$$

在点$(0,0)$的偏导数值分别为

$$f_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{0}{\Delta x}=0,$$

$$f_y(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,0+\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{0}{\Delta y}=0.$$

但由多元函数点态连续的定义可知该函数在点$(0,0)$处不连续。

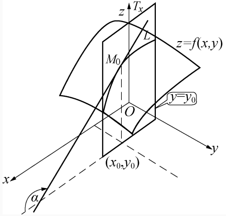
偏导数值的几何意义

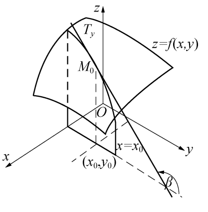
设曲面的方程为$z=f(x,y)$，$M(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$是该曲面上一点。过点M_0作平面$y=y_0, x=x_0$，截此曲面得到曲线：

$$\begin{cases} z=f(x,y_0), \\ y=y_0, \end{cases} \quad \text{及} \quad \begin{cases} z=f(x_0,y), \\ x=x_0. \end{cases}$$

那么

- 偏导数值$f_x(x_0,y_0)$为曲线在点M_0处切线M_0T_x对x轴正向的斜率(见左图)；
- 偏导数值$f_y(x_0,y_0)$为曲面在点M_0处切线M_0T_y对y轴正向的斜率(见右图)。





定义

设函数$z = f(x, y)$在区域D内具有偏导函数

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f_x(x, y),\ \frac{\partial z}{\partial y} = f_y(x, y),$$

它们在D上都是关于x, y的函数。

- 如果这两个函数关于自变量x, y的偏导函数存在，那么称它们是函数$z = f(x, y)$的**二阶偏导函数**。
- 按照对变量求导函数次序的不同，我们可得到共有下列四个二阶偏导函数：
- 当$n > 2$时，如果函数$f(x, y)$的二阶偏导函数还可以继续计算偏导函数，我们统一称这些偏导函数为f的**高阶偏导函数**。

定义

按照对变量求导函数次序的不同，我们可得到共有下列四个二阶偏导函数：

- 对单一变量计算两次之后的二阶偏导函数：

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f_{xx}(x,y),\quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f_{yy}(x,y)$$

- 对两个变量分别按不同次序计算之后的**二阶混合偏导函数**：

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_{xy}(x,y),\quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=f_{yx}(x,y).$$

例 7

设$z = 4x^3 + 3x^2y - 3xy^2 - x + y$，计算

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x^3}.$$

例 7

设$z = 4x^3 + 3x^2y - 3xy^2 - x + y$，计算

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \ \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}, \ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \ \frac{\partial^3 z}{\partial x^3}.$$

例 8

计算$z = x \ln(x + y)$的四个二阶偏导函数。

例 7

设$z=4x^3+3x^2y-3xy^2-x+y$，计算

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\ \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x},\ \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y},\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2},\ \frac{\partial^3 z}{\partial x^3}.$$

例 8

计算$z=x\ln(x+y)$的四个二阶偏导函数。

例 9

计算$z=x^y$的四个二阶偏导函数。

例 10

验证函数$u(x, y) = \ln\sqrt{x^2+y^2}$满足方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

.

引例

例 10

验证函数$u(x,y)=\ln\sqrt{x^2+y^2}$满足方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

.

定义 (拉普拉斯方程)

方程

$$\Delta u := \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

称为**拉普拉斯方程**。

例 10

验证函数$u(x,y)=\ln\sqrt{x^2+y^2}$满足方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

.

定义 (拉普拉斯方程)

方程

$$\Delta u := \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

称为**拉普拉斯方程**。

拉普拉斯方程代表数学物理方程中的一类很重要的方程，上述符号Δ也称为拉**普拉斯算子**。

此外，上述例子中我们还看到，有些二元函数的二阶混合偏导函数满足

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}.$$

高阶偏导函数

此外，上述例子中我们还看到，有些二元函数的二阶混合偏导函数满足

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}.$$

事实上，我们有如下定理：

定理 (Euler)

如果函数$z = f(x, y)$的两个二阶混合偏导函数$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$及$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$在区域$D$内连续，那么在该区域内有

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}.$$

此外，上述例子中我们还看到，有些二元函数的二阶混合偏导函数满足

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}.$$

事实上，我们有如下定理：

定理 (Euler)

如果函数$z = f(x, y)$的两个二阶混合偏导函数$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$及$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$在区域$D$内连续，那么在该区域内有

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}.$$

上述定理说明，连续的二阶混合偏导函数与求偏导函数的次序无关。

在实际问题中，我们经常需要考虑用$\Delta x, \Delta y$的线性函数来代替全增量Δz，即多元函数的线性逼近。

对于二元函数$z = f(x, y)$，它对某个自变量的偏导函数表示当其中一个自变量固定时，因变量对另一个自变量的变化率。相应地，我们可以定义二元函数的偏增量和偏微分：

定义

- 我们称$\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y)$和$\Delta_y z = f(x, y + \Delta y) - f(x, y)$分别为二元函数对变量$x$与$y$的**偏增量**；
- 固定自变量y，如果$f_x(x, y)$存在时，

$$\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y) = A\Delta x + o(\Delta x),$$

  那么我们称$f_x(x, y)\Delta x$为二元函数$z = f(x, y)$**关于**x**的偏微分**；
- 同理，我们可以定义**关于**y**的偏微分**$f_y(x, y)\Delta y$。

全微分：多元函数全增量问题

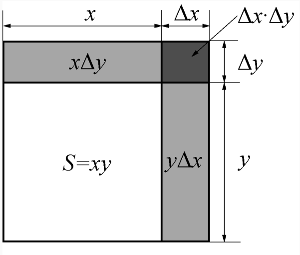
设矩形的长和宽分别为x和y，于是此矩形的面积为$S = xy$。

设矩形的长和宽分别为x和y，于是此矩形的面积为$S = xy$。如果边长x有增量Δx，边长y有增量Δy，设$\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$，那么对应面积$S$有相应的增量：

$$\Delta S = (x + \Delta x)(y + \Delta y) - xy = \underbrace{y\Delta x + x\Delta y}_{\Delta x, \Delta y\text{的一次式}} + \underbrace{\Delta x \cdot \Delta y}_{\rho\text{的高阶无穷小}}.$$

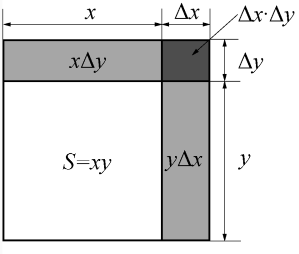
设矩形的长和宽分别为x和y，于是此矩形的面积为$S = xy$。如果边长x有增量Δx，边长y有增量Δy，设$\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$，那么对应面积$S$有相应的增量：

$$\Delta S = (x + \Delta x)(y + \Delta y) - xy = \underbrace{y\Delta x + x\Delta y}_{\Delta x,\Delta y\text{的一次式}} + \underbrace{\Delta x \cdot \Delta y}_{\rho\text{的高阶无穷小}} .$$



设矩形的长和宽分别为x和y，于是此矩形的面积为$S = xy$。如果边长x有增量Δx，边长y有增量Δy，设$\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$，那么对应面积$S$有相应的增量：

$$\Delta S = (x + \Delta x)(y + \Delta y) - xy = \underbrace{y\Delta x + x\Delta y}_{\Delta x,\Delta y\text{的一次式}} + \underbrace{\Delta x \cdot \Delta y}_{\rho\text{的高阶无穷小}} .$$



并且

$$0 \le \frac{|\Delta x \cdot \Delta y|}{\rho} = \frac{|\Delta x \cdot \Delta y|}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} \le \frac{1}{2}\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \to 0.$$

于是

$$\Delta S = y\Delta x + x\Delta y + o(\rho).$$

全微分的定义

根据一元函数微分学中增量与微分的关系可得

$$f(x+\Delta x, y) - f(x,y) \approx f_x(x,y)\Delta x, f(x, y+\Delta y) - f(x,y) \approx f_y(x,y)\Delta y.$$

根据一元函数微分学中增量与微分的关系可得

$$f(x+\Delta x,y)-f(x,y)\approx f_x(x,y)\Delta x, f(x,y+\Delta y)-f(x,y)\approx f_y(x,y)\Delta y.$$

一般地，如果函数$z=f(x,y)$在点$P(x,y)$的某邻域$U(P(x,y),\delta)$内有定义，并且我们设$P'(x+\Delta x,y+\Delta y)$为这邻域内的任意一点，那么我们称

$$f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)$$

为函数在点P对应于自变量增量$\Delta x,\Delta y$的全增量，记为Δz：

$$\Delta z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y).$$

全微分的定义

根据一元函数微分学中增量与微分的关系可得

$$f(x+\Delta x,y)-f(x,y)\approx f_x(x,y)\Delta x,\, f(x,y+\Delta y)-f(x,y)\approx f_y(x,y)\Delta y.$$

一般地，如果函数$z=f(x,y)$在点$P(x,y)$的某邻域$U(P(x,y),\delta)$内有定义，并且我们设$P'(x+\Delta x,y+\Delta y)$为这邻域内的任意一点，那么我们称

$$f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)$$

为函数在点P对应于自变量增量$\Delta x,\Delta y$的全增量，记为Δz：

$$\Delta z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y).$$

计算全增量比较复杂，与一元函数的情形类似，我们希望使用关于自变量增量$\Delta x,\Delta y$的线性函数来近似地代替函数的全增量Δz，由此我们引入关于二元函数全微分的定义。

定义 (全微分)

设函数$z=f(x,y)$在点(x,y)的全增量为 $\Delta z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)$。

- 如果Δz可以表示为
$$A\Delta x+B\Delta y+o(\rho),$$
其中A,B不依赖于$\Delta x,\Delta y$而仅与x,y有关， $\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$，那么称函数$z=f(x,y)$在点$(x,y)$**可微分**， $A\Delta x+B\Delta y$称为函数$z=f(x,y)$在点(x,y)的**全微分**，记为
$$dz=A\Delta x+B\Delta y.$$
- 如果函数$f(x,y)$在区域D内各点处都可微分，那么我们称这个函数在D内可微分。

全微分的定义

定义 (全微分)

设函数$z=f(x,y)$在点(x,y)的全增量为 $\Delta z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)$。

- 如果Δz可以表示为
$$A\Delta x+B\Delta y+o(\rho),$$
其中A,B不依赖于$\Delta x,\Delta y$而仅与x,y有关， $\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$，那么称函数$z=f(x,y)$在点$(x,y)$**可微分**， $A\Delta x+B\Delta y$称为函数$z=f(x,y)$在点(x,y)的**全微分**，记为
$$dz=A\Delta x+B\Delta y.$$
- 如果函数$f(x,y)$在区域D内各点处都可微分，那么我们称这个函数在D内可微分。

由上述定义可知，矩形面积$S=xy$在(x,y)处的全微分为$dS=y\Delta x+x\Delta y$。

多元函数可微的条件

回忆一下，如果一个一元函数在某一点可微，那么该函数在该点处必连续，且在该点处可计算导数值。

多元函数可微的条件

回忆一下，如果一个一元函数在某一点可微，那么该函数在该点处必连续，且在该点处可计算导数值。对二元函数我们也有类似的性质：

回忆一下，如果一个一元函数在某一点可微，那么该函数在该点处必连续，且在该点处可计算导数值。对二元函数我们也有类似的性质：

定理 (必要条件)

如果函数$z = f(x, y)$在点(x_0, y_0)处可微分，那么

(1) 函数$f(x, y)$在点(x_0, y_0)处连续，

回忆一下，如果一个一元函数在某一点可微，那么该函数在该点处必连续，且在该点处可计算导数值。对二元函数我们也有类似的性质：

定理 (必要条件)

如果函数$z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)处可微分，那么

(1) 函数$f(x,y)$在点(x_0,y_0)处连续，

(2) 函数$f(x,y)$在点(x_0,y_0)处的两个偏导数值$\dfrac{\partial z}{\partial x}(x_0,y_0)$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}(x_0,y_0)$都存在，且$f(x,y)$在点$(x_0,y_0)$处的全微分为

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}(x_0,y_0)\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}(x_0,y_0)\Delta y.$$

注

函数$z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)处的两个偏导数值$\dfrac{\partial z}{\partial x}(x_0,y_0),\dfrac{\partial z}{\partial y}(x_0,y_0)$存在，并不能保证函数$f(x,y)$在点$(x_0,y_0)$处可微。

注

函数$z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)处的两个偏导数值$\dfrac{\partial z}{\partial x}(x_0,y_0)$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}(x_0,y_0)$存在，并不能保证函数$f(x,y)$在点$(x_0,y_0)$处可微。

例如，函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0),\end{cases}$$

在$(0,0)$处的两个偏导数值$f_x(0,0)$和$f_y(0,0)$都存在，但是它在点$(0,0)$处不连续，所以在点$(0,0)$处不可微。

函数可微的条件

一元函数在某点可求导数值是在该一元函数在此点可微的充分必要条件。但对于多元函数而言此论断不成立，二元函数在某点的各偏导数值存在只是其全微分在这一点存在的必要条件而非充分条件。

由此可见，对于多元函数而言，点态偏导数值存在并不一定得到点态可微，这是因为多元函数在某点的偏导数值仅仅描述了该多元函数在这一点处沿坐标轴的变化率，而这一点处的全微分则描述了多元函数沿可能存在的各个方向的变化情况。

函数可微的条件

一元函数在某点可求导数值是在该一元函数在此点可微的充分必要条件。但对于多元函数而言此论断不成立，二元函数在某点的各偏导数值存在只是其全微分在这一点存在的必要条件而非充分条件。

由此可见，对于多元函数而言，点态偏导数值存在并不一定得到点态可微，这是因为多元函数在某点的偏导数值仅仅描述了该多元函数在这一点处沿坐标轴的变化率，而这一点处的全微分则描述了多元函数沿可能存在的各个方向的变化情况。因此，如果我们对点态偏导数值再补充某些条件，就可以保证多元函数的点态可微性。

一元函数在某点可求导数值是在该一元函数在此点可微的充分必要条件。但对于多元函数而言此论断不成立，二元函数在某点的各偏导数值存在只是其全微分在这一点存在的必要条件而非充分条件。

由此可见，对于多元函数而言，点态偏导数值存在并不一定得到点态可微，这是因为多元函数在某点的偏导数值仅仅描述了该多元函数在这一点处沿坐标轴的变化率，而这一点处的全微分则描述了多元函数沿可能存在的各个方向的变化情况。因此，如果我们对点态偏导数值再补充某些条件，就可以保证多元函数的点态可微性。

定理 (充分条件)

如果函数$z=f(x,y)$的偏导函数$\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$在点$(x_0,y_0)$有定义且连续，那么该多元函数在点$(x_0,y_0)$处可微分。

全微分的计算表达式

习惯上，沿用一元函数中的符号记法，我们常将自变量的增量$\Delta x, \Delta y$分别记为dx, dy，并分别称其为自变量x, y的微分。此时函数$z = f(x, y)$的全微分就可表示为

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy.$$

上述关于二元函数的全微分的必要条件和充分条件也可以完全类似地推广到多元函数中。

全微分的计算表达式

习惯上，沿用一元函数中的符号记法，我们常将自变量的增量$\Delta x, \Delta y$分别记为dx, dy，并分别称其为自变量x, y的微分。此时函数$z = f(x, y)$的全微分就可表示为

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy.$$

上述关于二元函数的全微分的必要条件和充分条件也可以完全类似地推广到多元函数中。例如，三元函数$u = f(x, y, z)$的全微分可表示为

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz.$$

例 11

计算函数$z = 4xy^3 + 5x^2y^6$的全微分。

例 11

计算函数$z = 4xy^3 + 5x^2y^6$的全微分。

例 12

计算函数$z = x^y$在点$(2, 1)$处的全微分。

例 11

计算函数$z = 4xy^3 + 5x^2y^6$的全微分。

例 12

计算函数$z = x^y$在点$(2, 1)$处的全微分。

例 13

计算函数$u = x + \sin\frac{y}{2} + e^{yz}$的全微分。

例 11

计算函数$z = 4xy^3 + 5x^2y^6$的全微分。

例 12

计算函数$z = x^y$在点$(2, 1)$处的全微分。

例 13

计算函数$u = x + \sin \dfrac{y}{2} + e^{yz}$的全微分。

例 14

计算函数$u = x^{y^z}$的偏导函数和全微分。

全微分在近似计算中的应用*

设二元函数$z = f(x, y)$在点$P(x_0, y_0)$的两个偏导数值$f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0)$连续，且$|\Delta x|, |\Delta y|$都比较小，那么根据全微分定义，我们有$\Delta z \approx dz$，即

$$\Delta z \approx f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y.$$

全微分在近似计算中的应用*

设二元函数$z=f(x,y)$在点$P(x_0,y_0)$的两个偏导数值$f_x(x_0,y_0), f_y(x_0,y_0)$连续，且$|\Delta x|, |\Delta y|$都比较小，那么根据全微分定义，我们有$\Delta z \approx dz$，即

$$\Delta z \approx f_x(x_0,y_0)\Delta x + f_y(x_0,y_0)\Delta y.$$

由增量表达式

$$\Delta z = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0),$$

我们可得到二元函数的全微分近似计算公式:

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) \approx f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)\Delta x + f_y(x_0,y_0)\Delta y.$$

例 15

计算$(1.04)^{2.02}$的近似值。

引例

例 15

计算$(1.04)^{2.02}$的近似值。

例 16

当x, y的绝对值很小时，计算函数$(1+x)^m(1+y)^n$的近似公式。

例 15

计算$(1.04)^{2.02}$的近似值。

例 16

当x, y的绝对值很小时，计算函数$(1+x)^m(1+y)^n$的近似公式。

例 17

已知一个矩形盒的边长分别为$75cm, 60cm$以及$40cm$，且可能的最大测量误差为$0.2cm$。试用全微分估计利用这些测量值计算盒子体积时可能带来的最大误差。

复合函数的偏导函数

课前导读

设复合函数$y=f(u)$，$u=\varphi(x)$，注意到函数变量之间的关系可以用如下结构图来表示：

$$y \longrightarrow u \longrightarrow x$$

课前导读

设复合函数$y=f(u)$，$u=\varphi(x)$，注意到函数变量之间的关系可以用如下结构图来表示：

$$y \longrightarrow u \longrightarrow x$$

我们回顾一下一元复合函数求导函数的“链式法则”：设$u=\varphi(x)$对于变量x可求导函数，而$y=f(u)$对应中间变量u可求导函数，那么复合函数$y=f\left[\varphi(x)\right]$对变量$x$可求导函数，并且

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}.$$

课前导读

设复合函数$y = f(u)$，$u = \varphi(x)$，注意到函数变量之间的关系可以用如下结构图来表示：

$$y \longrightarrow u \longrightarrow x$$

我们回顾一下一元复合函数求导函数的“链式法则”：设$u = \varphi(x)$对于变量x可求导函数，而$y = f(u)$对应中间变量u可求导函数，那么复合函数$y = f\left[\varphi(x)\right]$对变量$x$可求导函数，并且

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$$

本节我们结合链式图和一元复合函数求导函数法则来给出对应多元复合函数的求导函数法则。

课前导读

首先，我们可以将这样的“链式图”或“树状图”推广到多元复合函数中。

课前导读

首先，我们可以将这样的“链式图”或“树状图”推广到多元复合函数中。例如，函数$u = f(x, y, z)$用链式图来表示就是

$$\begin{tikzcd} & x \\ u \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & y \\ & z \end{tikzcd}$$

课前导读

首先，我们可以将这样的“链式图”或“树状图”推广到多元复合函数中。例如，函数$u=f(x,y,z)$用链式图来表示就是

$$
\begin{tikzcd}
 & x \\
u \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & y \\
 & z
\end{tikzcd}
$$

而$z=f(x,y)$与$y=\varphi(x)$复合而成的函数$z=f(x,\varphi(x))$的链式图为

$$
\begin{tikzcd}
 & x & \\
z \arrow[ur] \arrow[dr] & & \\
 & y \arrow[r] & x
\end{tikzcd}
$$

定理 (复合函数中间变量为一元函数的求导函数法则)

设$u=u(t), v=v(t)$对应变量t处可求导函数，函数$z=f(u,v)$对应变量(u,v)有连续偏导函数，那么多元复合函数$z=f[u(t),v(t)]$对变量t可求导函数，且

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{dt}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{dv}{dt}. \tag{1}$$

公式(1)中的导函数$\dfrac{dz}{dt}$称为**全导函数**。

我们使用函数的链式图来表示：

$$
\begin{array}{ccc}
 & & v \longrightarrow t \\
 & \nearrow & \\
z & & \\
 & \searrow & \\
 & & u \longrightarrow t
\end{array}
$$

其中

- z通过中间变量u和v到达t有两条"路径"；
- 式(1)右侧有两式相加，且每条“路径”上都是两项的乘积。

因此式(1)的右边是偏导函数与导函数乘积的和式：

$$\frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{dt}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{dv}{dt}.$$

我们使用函数的链式图来表示：

$$\begin{tikzcd} & v \arrow[r] & t \\ z \arrow[ur] \arrow[dr] & & \\ & u \arrow[r] & t \end{tikzcd}$$

其中

- z通过中间变量u和v到达t有两条"路径"；
- 式(1)右侧有两式相加，且每条“路径”上都是两项的乘积。

因此式(1)的右边是偏导函数与导函数乘积的和式：

$$\frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{dt}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{dv}{dt}.$$

上述方法可以推广到三元函数的情形。

多元复合函数求导函数

上述方法可以推广到三元函数的情形。设$u = u(t), v = v(t), w = w(t)$对变量$t$均可求导函数， $z = f(u, v, w)$在对应点处具有连续偏导函数此时该函数的链式图是

$$\begin{array}{ccccc} & \nearrow & x & \longrightarrow & t \\ u & \longrightarrow & y & \longrightarrow & t \\ & \searrow & z & \longrightarrow & t \end{array}$$

此时由z经中间变量u, v, w到达t有三条“路径”，因此多元复合函数的导函数应该是三项之和，即它的全导数为

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{dt} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{dv}{dt} + \frac{\partial z}{\partial w}\frac{dw}{dt}.$$

例 1

设$z = uv$,而$u = e^t, v = \cos t$，求导函数$\dfrac{dz}{dt}$。

多元复合函数求导函数

例 1

设$z = uv$,而$u = e^t, v = \cos t$，求导函数$\dfrac{dz}{dt}$。

例 2

设$z = \ln(u+v) + e^t$,而$u = 2t, v = t^2$，求导函数$\dfrac{dz}{dt}$。

例 1

设$z=uv$,而$u=e^t, v=\cos t$，求导函数$\dfrac{dz}{dt}$。

例 2

设$z=\ln(u+v)+e^t$,而$u=2t, v=t^2$，求导函数$\dfrac{dz}{dt}$。

注

导函数符号$\dfrac{dz}{dt}$和$\dfrac{\partial z}{\partial t}$的含义是不一样的：

- $\dfrac{dz}{dt}$表示复合以后一元函数$z=f[u(t),v(t),w(t)]$对t的全导函数；
- $\dfrac{\partial z}{\partial t}$表示复合前三元函数$z=\ln(u+v)+e^t$对第三个自变量$t$的偏导函数。

定理 (复合函数中间变量为多元函数的求导函数法则)

设$u=u(x,y),v=v(x,y)$对应二元变量(x,y)可求偏导函数

$$\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial v}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial y},$$

函数$z=f(u,v)$在对应二元变量(u,v)具有连续偏导函数$\frac{\partial z}{\partial u}$和$\frac{\partial z}{\partial v}$，那么复合函数

$$z=f\left[u(x,y),v(x,y)\right]$$

对应二元变量(x,y)处的两个偏导函数存在：

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}, \tag{2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}. \tag{3}$$

多元复合函数求导函数

上述定理中多元复合函数的链式图为:

$$
\begin{tikzcd}[row sep=small]
 & & x \\
 & u \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 z \arrow[ur] \arrow[ddr] & & y \\
 & & x \\
 & v \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & & y
\end{tikzcd}
$$

上述定理中多元复合函数的链式图为：

$$\begin{tikzcd}
 & & x \\
 & u \arrow[ur] \arrow[r] & y \\
z \arrow[ur] \arrow[dr] & & \\
 & v \arrow[r] \arrow[dr] & x \\
 & & y
\end{tikzcd}$$

借助该链式图和相同的分析方法，我们可以直接写出式(2)和式(3)。

多元复合函数求导函数

上述定理中多元复合函数的链式图为：

$$\begin{tikzcd}[row sep=small]
 & & x \\
 & u \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
z \arrow[ur] \arrow[dr] & & y \\
 & & x \\
 & v \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & & y
\end{tikzcd}$$

借助该链式图和相同的分析方法，我们可以直接写出式(2)和式(3)。

例 3

设$z = e^u \sin v$,而$u = xy, v = x + y$，计算$\dfrac{\partial z}{\partial x}$和$\dfrac{\partial z}{\partial y}$。

上述定理中多元复合函数的链式图为：

$$\begin{tikzcd}
 & u \arrow[r] \arrow[dr] & x \\
z \arrow[ur] \arrow[dr] & & y \\
 & v \arrow[r] \arrow[dr] & x \\
 & & y
\end{tikzcd}$$

借助该链式图和相同的分析方法，我们可以直接写出式(2)和式(3)。

例 3

设$z = e^u \sin v$,而$u = xy, v = x + y$，计算$\dfrac{\partial z}{\partial x}$和$\dfrac{\partial z}{\partial y}$。

例 4

计算$z = (3x^2 + y^2)^{4x+2y}$的两个偏导函数$\dfrac{\partial z}{\partial x}$和$\dfrac{\partial z}{\partial y}$。

多元复合函数求偏导函数法则：复合函数中间变量既有一元函数也有多元函数的情形

复合函数中间变量既有一元函数也有多元函数的情形可以视为中间变量为多元函数的特例，我们仅以以下一种情况为例，其他情形类似。

定理 (复合函数中间变量既有一元函数也有多元函数的求导函数法则)

如果函数$u = u(x, y)$对应二元变量(x, y)处具有对x和y的偏导函数，函数$v = v(y)$对应变量y可求导函数，函数$z = f(u, v)$对应变量(u, v)具有连续偏导函数，那么复合函数

$$z = f\left[u(x, y), v(y)\right]$$

对应二元变量(x, y)的两个偏导函数为：

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}, \tag{4}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{dv}{dy}. \tag{5}$$

多元复合函数求导函数

上述定理中多元复合函数的链式图为:

$$\begin{tikzcd}[row sep=small]
 & & x \\
 & u \arrow[ur] \arrow[r] & y \\
z \arrow[ur] \arrow[dr] & & \\
 & v \arrow[r] & y
\end{tikzcd}$$

上述定理中多元复合函数的链式图为:

$$
\begin{tikzcd}
 & & x \\
 & u \arrow[ur] \arrow[r] & y \\
z \arrow[ur] \arrow[dr] & & \\
 & v \arrow[r] & y
\end{tikzcd}
$$

例 5

设$z = e^{u^2+v^2}$而$u = x^2 \sin y, v = \cos y$，计算$\dfrac{\partial z}{\partial x}$和$\dfrac{\partial z}{\partial y}$。

上述定理中多元复合函数的链式图为：

$$
\begin{tikzcd}
 & & x \\
 & u \arrow[ur] \arrow[r] & y \\
z \arrow[ur] \arrow[dr] & & \\
 & v \arrow[r] & y
\end{tikzcd}
$$

例 5

设$z = e^{u^2+v^2}$而$u = x^2 \sin y, v = \cos y$，计算$\dfrac{\partial z}{\partial x}$和$\dfrac{\partial z}{\partial y}$。

例 6

设$z = f(x, y, u) = (x - y)^u$而$u = xy$，计算$\dfrac{\partial z}{\partial x}$和$\dfrac{\partial z}{\partial y}$。

注

上述例子中等号两边关于偏导函数符号$\dfrac{\partial z}{\partial x}$的含义是不一样的：

注

上述例子中等号两边关于偏导函数符号$\dfrac{\partial z}{\partial x}$的含义是不一样的：

- 等号左边是二元函数$z=(x-y)^{xy}$对x的偏导函数；
- 等号右边的是三元函数$z=f(x,y,u)=(x-y)^u$对x的偏导函数。

注

上述例子中等号两边关于偏导函数符号$\dfrac{\partial z}{\partial x}$的含义是不一样的：

- 等号左边是二元函数$z=(x-y)^{xy}$对x的偏导函数；
- 等号右边的是三元函数$z=f(x,y,u)=(x-y)^{u}$对x的偏导函数。

因此，为了区分该符号，有时等号右边的$\dfrac{\partial z}{\partial x}$常写作$\dfrac{\partial f}{\partial x}$。

注

上述例子中等号两边关于偏导函数符号$\frac{\partial z}{\partial x}$的含义是不一样的：

- 等号左边是二元函数$z=(x-y)^{xy}$对x的偏导函数；
- 等号右边的是三元函数$z=f(x,y,u)=(x-y)^{u}$对x的偏导函数。

因此，为了区分该符号，有时等号右边的$\frac{\partial z}{\partial x}$常写作$\frac{\partial f}{\partial x}$。

同理，等号两边的偏导函数符号$\frac{\partial z}{\partial y}$的含义也不一样，等号右边的$\frac{\partial z}{\partial y}$也常写作$\frac{\partial f}{\partial y}$。

注

上述例子中等号两边关于偏导函数符号$\frac{\partial z}{\partial x}$的含义是不一样的：

- 等号左边是二元函数$z=(x-y)^{xy}$对x的偏导函数；
- 等号右边的是三元函数$z=f(x,y,u)=(x-y)^u$对x的偏导函数。

因此，为了区分该符号，有时等号右边的$\frac{\partial z}{\partial x}$常写作$\frac{\partial f}{\partial x}$。

同理，等号两边的偏导函数符号$\frac{\partial z}{\partial y}$的含义也不一样，等号右边的$\frac{\partial z}{\partial y}$也常写作$\frac{\partial f}{\partial y}$。

例 7

设$z=f(\sin x, x^2-y^2)$，函数f具有一阶连续偏导函数，计算$\frac{\partial z}{\partial x}$和$\frac{\partial z}{\partial y}$。

注

有时为表达简便起见，我们引入以下记号：

$$f_1'(u,v) = f_u(u,v), \quad f_2'(u,v) = f_v(u,v),$$

这里的下标1表示对第一个变量求偏导函数，下标2表示对第二个变量求偏导函数。使用这类记号，上述例子的结果可以表示为

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \cos x \cdot f_1' + 2x f_2', \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -2y f_2'.$$

同理，对应二阶偏导函数我们也可以引入$f_{11}'', f_{12}'', f_{21}'', f_{22}''$记号。

例 8

(1) 设$u = f(x+z, xyz)$，其中f具有二阶偏导函数，计算$\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$；

(2) 设$u = f(xy, xyz)$，其中f具有二阶连续偏导函数，计算$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$。

例 8

(1) 设$u=f(x+z,xyz)$，其中f具有二阶偏导函数，计算$\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$；

(2) 设$u=f(xy,xyz)$，其中f具有二阶连续偏导函数，计算$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$。

例 9

设函数$u=f(x,y)$具有二阶连续偏导数，将下列表达式转换为极坐标的形式：

$$(1)\ \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2;\quad (2)\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

全微分形式的不变性

设函数$z = f(u, v)$可微，于是

$$dz = \frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv,$$

如果$u = u(x, y), v = v(x, y)$本身也可微，那么$z = f(u(x, y), v(x, y)) = f(x, y)$可微，从而

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy.$$

由于

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{\partial z}{\partial u} \cdot \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial z}{\partial v} \cdot \dfrac{\partial v}{\partial x}, \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{\partial z}{\partial u} \cdot \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial z}{\partial v} \cdot \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{cases}$$

因此

$$
\begin{aligned}
dz &= \left(\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}\right)dx+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}\right)dy \\
&= \frac{\partial z}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy\right)+\frac{\partial z}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial x}dx+\frac{\partial v}{\partial y}dy\right) \\
&= \frac{\partial z}{\partial u}du+\frac{\partial z}{\partial v}dv.
\end{aligned}
$$

全微分形式的不变性

因此

$$
\begin{aligned}
dz &= \left(\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}\right)dx+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}\right)dy\\
&=\frac{\partial z}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy\right)+\frac{\partial z}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial x}dx+\frac{\partial v}{\partial y}dy\right)\\
&=\frac{\partial z}{\partial u}du+\frac{\partial z}{\partial v}dv.
\end{aligned}
$$

可以看出，无论z是自变量x, y的函数，还是中间变量u, v的函数，它的全微分形式都是一样的，我们称这个性质为全微分形式的不变性。

因此

$$
\begin{aligned}
dz &= \left(\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}\right)dx+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}\right)dy\\
&= \frac{\partial z}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy\right)+\frac{\partial z}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial x}dx+\frac{\partial v}{\partial y}dy\right)\\
&= \frac{\partial z}{\partial u}du+\frac{\partial z}{\partial v}dv.
\end{aligned}
$$

可以看出，无论z是自变量x, y的函数，还是中间变量u, v的函数，它的全微分形式都是一样的，我们称这个性质为全微分形式的不变性。

例 10

设$z=(x-y)^{x^2+y^2}$，求$\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}$。

隐函数的偏导函数

课前导读

在一元函数微分学中我们曾引入了隐函数的概念，并介绍了不经过显化而直接由方程

$$F(x, y) = 0$$

来求它所确定的隐函数$y = f(x)$的导函数的方法。

在一元函数微分学中我们曾引入了隐函数的概念，并介绍了不经过显化而直接由方程

$$F(x,y)=0$$

来求它所确定的隐函数$y=f(x)$的导函数的方法。

需要注意的是，能够使用一元隐函数求解导函数法则的前提是我们需要假定方程$F(x,y)=0$能够确定y是x的函数$y=f(x)$，然而并不是每个方程$F(x,y)=0$都能够确定y是x的函数且使得$y=f(x)$可求导函数。

课前导读

在一元函数微分学中我们曾引入了隐函数的概念，并介绍了不经过显化而直接由方程

$$F(x, y) = 0$$

来求它所确定的隐函数$y = f(x)$的导函数的方法。

需要注意的是，能够使用一元隐函数求解导函数法则的前提是我们需要假定方程$F(x, y) = 0$能够确定y是x的函数$y = f(x)$，然而并不是每个方程$F(x, y) = 0$都能够确定y是x的函数且使得$y = f(x)$可求导函数。

因此，本节我们讨论在什么样的条件下，方程$F(x, y) = 0$可以确定出以为变量x的函数y；所确定出函数是否可求导函数以及如何来计算该导函数。

定理 (隐函数存在定理：单一方程情形)

设函数$F(x,y)$满足

- $F(x,y)$在点$P(x_0,y_0)$的某一邻域内具有连续偏导函数，
- $F_y(x_0,y_0)\neq 0$，
- $F(x_0,y_0)=0$。

那么方程$F(x,y)=0$在点$P(x_0,y_0)$的某一邻域内恒能唯一确定一个函数$y=f(x)$，该函数连续且具有连续导函数， $y_0=f(x_0)$ 且

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x}{F_y}.$$

- 方程$F(x,y)=0$在点$P(x_0,y_0)$的某一邻域$U(P,\delta)$内恒能唯一确定一个连续函数$y=f(x)$，那么将$y=f(x)$“代入”$F(x,y)=0$，我们得到在邻域$U(P,\delta)$内的恒等式：

$$F(x,f(x))\equiv 0.$$

隐函数求导函数法则

- 方程$F(x,y)=0$在点$P(x_0,y_0)$的某一邻域$U(P,\delta)$内恒能唯一确定一个连续函数$y=f(x)$，那么将$y=f(x)$“代入”$F(x,y)=0$，我们得到在邻域$U(P,\delta)$内的恒等式：

$$F(x,f(x))\equiv 0.$$

- 函数$F(x,f(x))$是一个复合函数，它对应的链式图为

$$\begin{tikzcd}
 & x \arrow[r] & x \\
F \arrow[ur] \arrow[dr] & & \\
 & y \arrow[r] & x
\end{tikzcd}$$

对应方程的我们可计算出全导函数$F_x+F_y\dfrac{dy}{dx}=0$。

隐函数求导函数法则

- 方程$F(x,y)=0$在点$P(x_0,y_0)$的某一邻域$U(P,\delta)$内恒能唯一确定一个连续函数$y=f(x)$，那么将$y=f(x)$“代入”$F(x,y)=0$，我们得到在邻域$U(P,\delta)$内的恒等式：

$$F(x,f(x))\equiv 0.$$

- 函数$F(x,f(x))$是一个复合函数，它对应的链式图为

$$\begin{tikzcd} & x \arrow[r] & x \\ F \arrow[ur] \arrow[dr] & & \\ & y \arrow[r] & x \end{tikzcd}$$

对应方程的我们可计算出全导函数$F_x+F_y\dfrac{dy}{dx}=0$。

- 由于$F_y(x,y)$连续且$F_y(x_0,y_0)\neq 0$，由连续函数性质，存在$P_0(x_0,y_0)$的一个邻域，使得在这个邻域内满足$F_y(x_0,y_0)\neq 0$。因此

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x}{F_y}.$$

注

如果$F(x,y)$的二阶偏导数也连续，那么可把上面等式两端看作x的复合函数而再次求导函数：

$$\begin{aligned}\frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{d}{dx}\left(-\frac{F_x}{F_y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{F_x}{F_y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{F_x}{F_y}\right)\cdot\frac{dy}{dx} \\ &= -\frac{F_{xx}F_y - F_xF_{yx}}{F_y^2} - \frac{F_{xy}F_y - F_xF_{yy}}{F_y^2}\cdot\left(-\frac{F_x}{F_y}\right) \\ &- \frac{F_{xx}F_y^2 - F_xF_yF_{xy} + F_{yy}F_x^2}{F_y^3}.\end{aligned}$$

引例

例 1

验证方程$x^2+y^2-1=0$在点$(0,1)$的某邻域内能唯一确定一个具有连续导函数且满足当$x=0$时$y=1$的隐函数$y=f(x)$，并求这函数的一阶和二阶导数在$x=0$的值。

例 1

验证方程$x^2+y^2-1=0$在点$(0,1)$的某邻域内能唯一确定一个具有连续导函数且满足当$x=0$时$y=1$的隐函数$y=f(x)$，并求这函数的一阶和二阶导数在$x=0$的值。

例 2

求由方程$xy-e^x+e^y=0$所确定的隐函数y的导函数$\dfrac{dy}{dx}$以及导数值$\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0}$。

例 1

验证方程$x^2+y^2-1=0$在点$(0,1)$的某邻域内能唯一确定一个具有连续导函数且满足当$x=0$时$y=1$的隐函数$y=f(x)$，并求这函数的一阶和二阶导数在$x=0$的值。

例 2

求由方程$xy-e^x+e^y=0$所确定的隐函数y的导函数$\frac{dy}{dx}$以及导数值$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}$。

例 3

求由方程$x-y-e^y=0$确定的隐函数的导函数$\frac{dy}{dx},\frac{d^2y}{dx^2}$。

隐函数存在定理：多个变量情形

隐函数存在定理可以推广到三元以及三元以上的方程的情形。

隐函数存在定理：多个变量情形

隐函数存在定理可以推广到三元以及三元以上的方程的情形。

定理 (隐函数存在定理：多个变量情形)

设函数$F(x,y,z)$满足

- 函数$F(x,y,z)$在点$P(x_0,y_0,z_0)$的某一邻域内有连续偏导函数；
- $F(x_0,y_0,z_0)=0$；
- $F_z(x_0,y_0,z_0)\neq 0$。

那么方程$F(x,y,z)=0$在点$P(x_0,y_0,z_0)$的某一邻域内恒能唯一确定一个函数$z=f(x,y)$，该函数连续且具有连续偏导函数， $z_0=f(x_0,y_0)$，并且

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z},\ \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}.$$

隐函数求导函数法则

- 将$z=f(x,y)$代入方程$F(x,y,z)=0$，得到恒等式
$$F(x,y,f(x,y))\equiv 0.$$
- 方程左端可以看作关于是x,y的复合函数，由链式法则，我们可以对恒等式两边分别对x,y求偏导函数： $F_x+F_z\dfrac{\partial z}{\partial x}=0,\ F_y+F_z\dfrac{\partial z}{\partial y}=0.$
- 由于$F_z(x,y,z)$连续且$F_z(x_0,y_0,z_0)\neq 0$，由连续函数性质，存在$P_0(x_0,y_0,z_0)$的一个邻域，使得在这个邻域内满足$F_z(x_0,y_0,z_0)\neq 0$。因此
$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z},\ \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}.$$
这就是隐函数$z=f(x,y)$的偏导函数表达式。

- 将$z=f(x,y)$代入方程$F(x,y,z)=0$，得到恒等式
$$F(x,y,f(x,y))\equiv 0.$$
- 方程左端可以看作关于是x,y的复合函数，由链式法则，我们可以对恒等式两边分别对x,y求偏导函数： $F_x+F_z\dfrac{\partial z}{\partial x}=0,\ F_y+F_z\dfrac{\partial z}{\partial y}=0.$
- 由于$F_z(x,y,z)$连续且$F_z(x_0,y_0,z_0)\neq 0$，由连续函数性质，存在$P_0(x_0,y_0,z_0)$的一个邻域，使得在这个邻域内满足$F_z(x_0,y_0,z_0)\neq 0$。因此
$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z},\ \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}.$$
这就是隐函数$z=f(x,y)$的偏导函数表达式。

例 4

求由方程$\dfrac{x}{z}=\ln\dfrac{z}{y}$所确定的隐函数$z=f(x,y)$的偏导函数$\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$及$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$。

定理 (隐函数存在定理：多个变量及方程组情形)

设函数$F(x,y,u,v),G(x,y,u,v)$满足

- 设函数$F(x,y,u,v),G(x,y,u,v)$在点$P_0(x_0,y_0,u_0,v_0)$的某个邻域内具有对各个变量的一阶连续偏导函数；
- $F(x_0,y_0,u_0,v_0)=0,G(x_0,y_0,u_0,v_0)=0$；
- 函数$F(x,y,u,v),G(x,y,u,v)$在点$P_0(x_0,y_0,u_0,v_0)$处偏导数值所组成的函数行列式*(*也称雅可比(Jacobi)行列式*)*

$$J:=\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial F}{\partial u} & \dfrac{\partial F}{\partial v}\\ \dfrac{\partial G}{\partial u} & \dfrac{\partial G}{\partial v}\end{vmatrix}\neq 0,$$

定理 (隐函数存在定理：多个变量及方程组情形)

那么方程组

$$\begin{cases} F(x,y,u,v)=0, \\ G(x,y,u,v)=0 \end{cases}$$

在点$P_0(x_0,y_0,u_0,v_0)$的某个邻域内恒能唯一确定一组函数$u=u(x,y),v=v(x,y)$，使得

- 函数组$u=u(x,y),v=v(x,y)$连续；
- 函数组$u=u(x,y),v=v(x,y)$具有连续偏导函数；
- 函数组$u=u(x,y),v=v(x,y)$满足条件$u_0=u(x_0,y_0),v_0=v(x_0,y_0)$；

定理 (隐函数存在定理：多个变量及方程组情形)

- 对变量x，函数组$u = u(x, y), v = v(x, y)$满足

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)} = -\frac{\begin{vmatrix} F_x & F_v \\ G_x & G_v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)} = -\frac{\begin{vmatrix} F_u & F_x \\ G_u & G_x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}}.$$

- 对变量y，函数组$u = u(x, y), v = v(x, y)$满足

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)} = -\frac{\begin{vmatrix} F_y & F_v \\ G_y & G_v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)} = -\frac{\begin{vmatrix} F_u & F_y \\ G_u & G_y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}}.$$

克拉默法则

在介绍多个变量及方程组情形下的隐函数存在定理时，我们先引入线性方程组的克拉默法则。

克拉默法则

在介绍多个变量及方程组情形下的隐函数存在定理时，我们先引入线性方程组的克拉默法则。设有一个含有n个未知数$x_1, x_2, \cdots, x_n$,，n个线性方程的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots a_{nn}x_n = b_n, \end{cases}$$

借助于矩阵乘法，我们可以将该线性方程组写成$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$，其中

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

定理 (Cramer(克拉默)法则)

如果线性方程组$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$的系数行列式不等于零，即$|\boldsymbol{A}|\neq 0$，则方程组唯一解

$$x_1=\frac{D_1}{|\boldsymbol{A}|}, x_2=\frac{D_2}{|\boldsymbol{A}|}, \cdots, x_n=\frac{D_n}{|\boldsymbol{A}|},$$

其中$D_j(j=1,2,\cdots,n)$是把系数行列式的第j列用$\boldsymbol{b}$的元素代替后得到的行列式。

定理 (Cramer(克拉默)法则)

如果线性方程组$\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$的系数行列式不等于零，即$|\boldsymbol{A}| \neq 0$，则方程组唯一解

$$x_1 = \frac{D_1}{|\boldsymbol{A}|}, x_2 = \frac{D_2}{|\boldsymbol{A}|}, \cdots, x_n = \frac{D_n}{|\boldsymbol{A}|},$$

其中$D_j(j = 1, 2, \cdots, n)$是把系数行列式的第j列用$\boldsymbol{b}$的元素代替后得到的行列式。

例

用克拉默法则求解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = -1, \\ -2x_1 + 2x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 1. \end{cases}$$

解： 我们先计算系数矩阵行列式：

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

解：我们先计算系数矩阵行列式：

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

并且我们还可分别计算其余行列式

$$D_1 = \begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -2, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -2, \quad D_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

解：我们先计算系数矩阵行列式：

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

并且我们还可分别计算其余行列式

$$D_1 = \begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -2, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -2, \quad D_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

因此，由克拉默法则，该线性方程组的解为

$$x_1 = \frac{D_1}{|\boldsymbol{A}|} = -2, x_2 = \frac{D_2}{|\boldsymbol{A}|} = -2, x_3 = \frac{D_3}{|\boldsymbol{A}|} = 1.$$

- 将函数组$u = u(x,y), v = v(x,y)$ “代入”

$$\begin{cases} F(x,y,u,v) = 0, \\ G(x,y,u,v) = 0, \end{cases} \text{即得} \begin{cases} F(x,y,u(x,y),v(x,y)) \equiv 0, \\ G(x,y,u(x,y),v(x,y)) \equiv 0, \end{cases}$$

隐函数求导函数法则

- 将函数组$u=u(x,y),v=v(x,y)$“代入”

$$\begin{cases}F(x,y,u,v)=0,\\G(x,y,u,v)=0,\end{cases}\text{即得}\quad\begin{cases}F(x,y,u(x,y),v(x,y))\equiv 0,\\G(x,y,u(x,y),v(x,y))\equiv 0,\end{cases}$$

- 对方程组分别关于x,y求偏导函数，得到

$$\begin{cases}F_x+F_u\dfrac{\partial u}{\partial x}+F_v\dfrac{\partial v}{\partial x}=0,\\G_x+G_u\dfrac{\partial u}{\partial x}+G_v\dfrac{\partial v}{\partial x}=0,\end{cases}\quad\begin{cases}F_y+F_u\dfrac{\partial u}{\partial y}+F_v\dfrac{\partial v}{\partial y}=0,\\G_y+G_u\dfrac{\partial u}{\partial y}+G_v\dfrac{\partial v}{\partial y}=0.\end{cases}$$

隐函数求导函数法则

- 将函数组$u = u(x,y), v = v(x,y)$ “代入”

$$\begin{cases} F(x,y,u,v) = 0, \\ G(x,y,u,v) = 0, \end{cases} \quad \text{即得} \quad \begin{cases} F(x,y,u(x,y),v(x,y)) \equiv 0, \\ G(x,y,u(x,y),v(x,y)) \equiv 0, \end{cases}$$

- 对方程组分别关于x, y求偏导函数，得到

$$\begin{cases} F_x + F_u \dfrac{\partial u}{\partial x} + F_v \dfrac{\partial v}{\partial x} = 0, \\ G_x + G_u \dfrac{\partial u}{\partial x} + G_v \dfrac{\partial v}{\partial x} = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} F_y + F_u \dfrac{\partial u}{\partial y} + F_v \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0, \\ G_y + G_u \dfrac{\partial u}{\partial y} + G_v \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0. \end{cases}$$

- 由于雅可比行列式J不为零，从而根据连续函数性质及线性方程组中克拉默法则，我们分别计算得到 $\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial v}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}, \dfrac{\partial v}{\partial y}$ 的函数表达式。

例 5

设$u=u(x,y),v=v(x,y)$由方程组$\begin{cases} u+v=x+y, \\ xu+yv=1 \end{cases}$确定，求$\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial v}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial y}$。

例 5

设$u=u(x,y),v=v(x,y)$由方程组$\begin{cases}u+v=x+y,\\ xu+yv=1\end{cases}$确定，求$\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial u}{\partial y},\dfrac{\partial v}{\partial x},\dfrac{\partial v}{\partial y}$。

例 6

设函数$y=y(x),z=z(x)$由方程组$\begin{cases}x+y+z+z^2=1,\\ x+y^2+z+z^3=2\end{cases}$确定，求$\dfrac{\partial y}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial x}$。

例 5

设$u=u(x,y),v=v(x,y)$由方程组$\begin{cases} u+v=x+y, \\ xu+yv=1 \end{cases}$确定，求$\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial u}{\partial y},\dfrac{\partial v}{\partial x},\dfrac{\partial v}{\partial y}$。

例 6

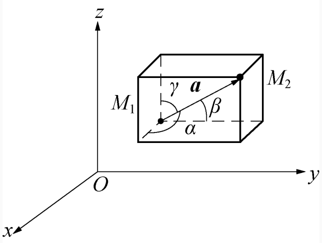
设函数$y=y(x),z=z(x)$由方程组$\begin{cases} x+y+z+z^2=1, \\ x+y^2+z+z^3=2 \end{cases}$确定，求$\dfrac{\partial y}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial x}$。

例 7

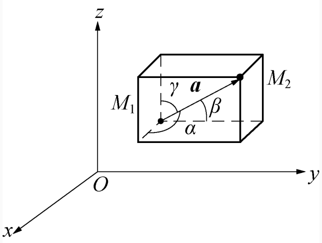
设函数$x=x(u,v),y=y(u,v)$在点(u,v)的某个邻域内连续且具有一阶连续偏导数,$J=\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}\neq 0$，试求$\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial u}{\partial y},\dfrac{\partial v}{\partial x},\dfrac{\partial v}{\partial y}$。

方向导数值与梯度

如图所示，设$\boldsymbol{a}$为任意一个非零自由向量，$\boldsymbol{a}$与x, y, z坐标轴正向之间的夹角分别为α, β, γ，其中这些角度满足$0 \leq \alpha, \beta, \gamma < \pi$.



如图所示，设$\boldsymbol{a}$为任意一个非零自由向量，$\boldsymbol{a}$与x, y, z坐标轴正向之间的夹角分别为α, β, γ，其中这些角度满足$0 \le \alpha, \beta, \gamma < \pi$.



定义 (向量的方向角与方向余弦)

- α, β, γ分别为$\boldsymbol{a}$的**方向角**；
- 向量$\boldsymbol{a}$的坐标即为它在坐标轴上的投影，该投影向量的坐标分别为$a_x = |\boldsymbol{a}|\cos\alpha$, $a_y = |\boldsymbol{a}|\cos\beta$, $a_z = |\boldsymbol{a}|\cos\gamma$，其中我们称$\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$为$\boldsymbol{a}$的**方向余弦**.

向量的方向角与方向余弦

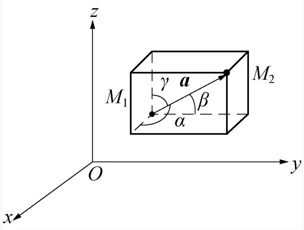
- 由向量模长的定义, $|\boldsymbol{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$, 所以我们可以得到

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}, \quad \cos\beta = \frac{a_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}, \quad \cos\gamma = \frac{a_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}},$$

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

- 向量$\boldsymbol{a}$的单位化可以表示为

$$\boldsymbol{e_a} = \frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|} = \frac{1}{|\boldsymbol{a}|}(a_x, a_y, a_z) = \frac{1}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}(a_x, a_y, a_z) = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma).$$



例

已知点$M_1(2,2,\sqrt{2})$和$M_2(1,3,0)$, 试分别写出

(1) 向量$\overrightarrow{M_1M_2}$,$\overrightarrow{M_2M_1}$的坐标及向量表达式;

(2) 向量$\overrightarrow{M_1M_2}$,$\overrightarrow{M_2M_1}$的模、方向余弦、方向角和单位向量.

例

已知点$M_1(2,2,\sqrt{2})$和$M_2(1,3,0)$，试分别写出

(1) 向量$\overrightarrow{M_1M_2}$,$\overrightarrow{M_2M_1}$的坐标及向量表达式;

(2) 向量$\overrightarrow{M_1M_2}$,$\overrightarrow{M_2M_1}$的模、方向余弦、方向角和单位向量.

例

计算平行于向量$\boldsymbol{a}=6\vec{i}+7\vec{j}-6\vec{k}$的单位向量.

例

已知点$M_1(2,2,\sqrt{2})$和$M_2(1,3,0)$，试分别写出

(1) 向量$\overrightarrow{M_1M_2}$,$\overrightarrow{M_2M_1}$的坐标及向量表达式;

(2) 向量$\overrightarrow{M_1M_2}$,$\overrightarrow{M_2M_1}$的模、方向余弦、方向角和单位向量.

例

计算平行于向量$\boldsymbol{a}=6\vec{i}+7\vec{j}-6\vec{k}$的单位向量.

例

已知向量$\overrightarrow{P_1P_2}$的模为2，该向量与x轴和y轴的夹角分别为$\dfrac{\pi}{3}$和$\dfrac{\pi}{4}$. 如果P_1坐标为$(1,0,3)$，试计算点P_2的坐标.

偏导数值反映的是函数在某点处沿坐标轴方向的变化率，但在实际问题中，只考虑沿坐标轴方向的变化率是不够的。

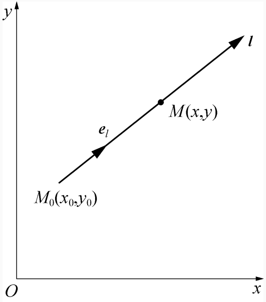
多元函数的点态方向导数值

偏导数值反映的是函数在某点处沿坐标轴方向的变化率，但在实际问题中，只考虑沿坐标轴方向的变化率是不够的。例如，热空气要向冷的地方流动、气象学需要考虑大气温度、气压沿着某个方向的变化率等。因此我们需要研究函数沿任意指定方向的变化率问题。

多元函数的点态方向导数值

偏导数值反映的是函数在某点处沿坐标轴方向的变化率，但在实际问题中，只考虑沿坐标轴方向的变化率是不够的。例如，热空气要向冷的地方流动、气象学需要考虑大气温度、气压沿着某个方向的变化率等。因此我们需要研究函数沿任意指定方向的变化率问题。 本节我们即将探讨的方向导数值就是反映函数在某一点处沿一条特定的射线方向的变化率。

偏导数值反映的是函数在某点处沿坐标轴方向的变化率，但在实际问题中，只考虑沿坐标轴方向的变化率是不够的。例如，热空气要向冷的地方流动、气象学需要考虑大气温度、气压沿着某个方向的变化率等。因此我们需要研究函数沿任意指定方向的变化率问题。 本节我们即将探讨的方向导数值就是反映函数在某一点处沿一条特定的射线方向的变化率。



定义 (多元函数的点态方向导数值)

设函数$z = f(x, y)$在点$M_0(x_0, y_0)$的某个邻域$U(M_0)$内有定义， ℓ是以$M_0(x_0, y_0)$为始点的一条射线，它与x轴正向的夹角为α， $M(x, y)$为ℓ上任一点。设$|MM_0| = \rho$，于是

$$\begin{cases} x = x_0 + \rho\cos\alpha, \\ y = y_0 + \rho\sin\alpha. \end{cases}$$

多元函数的点态方向导数值

定义 (多元函数的点态方向导数值)

如果极限

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{\Delta z}{\rho}=\lim_{\rho\to 0^+}\frac{f(x_0+\rho\cos\alpha,y_0+\rho\sin\alpha)-f(x_0,y_0)}{\rho}$$

存在，那么我们称此极限为函数$z=f(x,y)$在点$M_0(x_0,y_0)$沿方向ℓ的**方向导数值**，记作$\left.\frac{\partial z}{\partial \ell}\right|_{M_0}$，即

$$\left.\frac{\partial z}{\partial \ell}\right|_{M_0}=\lim_{\rho\to 0^+}\frac{f(x_0+\rho\cos\alpha,y_0+\rho\sin\alpha)-f(x_0,y_0)}{\rho}$$

定义 (多元函数的点态方向导数值)

如果极限

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{\Delta z}{\rho}=\lim_{\rho\to 0^+}\frac{f(x_0+\rho\cos\alpha,y_0+\rho\sin\alpha)-f(x_0,y_0)}{\rho}$$

存在，那么我们称此极限为函数$z=f(x,y)$在点$M_0(x_0,y_0)$沿方向ℓ的**方向导数值，**记作$\left.\frac{\partial z}{\partial \ell}\right|_{M_0}$，即

$$\left.\frac{\partial z}{\partial \ell}\right|_{M_0}=\lim_{\rho\to 0^+}\frac{f(x_0+\rho\cos\alpha,y_0+\rho\sin\alpha)-f(x_0,y_0)}{\rho}$$

由上述方向导数值定义可知，函数$f(x,y)$在点M_0的方向导数值$\left.\frac{\partial z}{\partial \ell}\right|_{M_0}$就是函数$f(x,y)$在点$M_0(x_0,y_0)$处沿方向$\ell$的变化率。

多元函数的点态方向导数值

一个多元函数在某个点处的偏导数值存在只能得到该函数在此点处分别沿x轴，y轴方向的方向导数值存在，却不能得到其他方向上对应的方向导数值存在。

一个多元函数在某个点处的偏导数值存在只能得到该函数在此点处分别沿x轴，y轴方向的方向导数值存在，却不能得到其他方向上对应的方向导数值存在。

论断推理

函数$f(x,y)$在点$M_0(x_0,y_0)$的偏导数值存在，那么

- 取$e_\ell=\vec{i}=(1,0)$，从而

$$\left.\frac{\partial z}{\partial l}\right|_{M_0}=\lim_{\rho\to0^+}\frac{f(x_0+\rho,y_0)-f(x_0,y_0)}{\rho}=f_x(x_0,y_0).$$

- 取$e_\ell=\vec{j}=(0,1)$，从而

$$\left.\frac{\partial z}{\partial l}\right|_{M_0}=\lim_{\rho\to0^+}\frac{f(x_0,y_0+\rho)-f(x_0,y_0)}{\rho}=f_y(x_0,y_0).$$

多元函数的点态方向导数值

而一个多元函数在某个点处的方向导数值存在却不能得到该函数在此点处的偏导函数值存在。

而一个多元函数在某个点处的方向导数值存在却不能得到该函数在此点处的偏导函数值存在。同时，方向导数值是单侧极限($\rho \geq 0$)，而偏导函数值$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$的定义中要求$x$无论是从$x_0$的左侧还是右侧趋于$x_0$时极限存在且相等。

例

函数$z = \sqrt{x^2 + y^2}$在点$(0,0)$处沿方向$e_\ell = \vec{i} = (1,0)$的方向导数值为

$$\left.\frac{\partial z}{\partial \ell}\right|_{(0,0)} = \lim_{\rho \to 0^+} \frac{f(0,\rho) - f(0,0)}{\rho} = \lim_{\rho \to 0^+} \frac{\sqrt{0^2 + \rho^2}}{\rho} = 1,$$

但是我们可以通过偏导函数值的定义验证得到$\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(0,0)}$不存在。对于$\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{(0,0)}$的情况我们可类似去验证。

多元函数的点态方向导函数值

多元函数在定义域内的点态可微性可以得到对应该点的方向导数值的存在性。

多元函数在定义域内的点态可微性可以得到对应该点的方向导数值的存在性。

定理 (多元函数点态方向导数值的存在性定理)

如果$z=f(x,y)$在点$M_0(x_0,y_0)$处可微，那么$z=f(x,y)$在该点处沿任一方向ℓ的方向导数值均存在，且

$$\frac{\partial z}{\partial l}=\frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial z}{\partial y}\sin\alpha,$$

其中

- α为方向ℓ与x轴正向的夹角；
- $\cos\alpha$和$\sin\alpha$即为方向ℓ的方向余弦, 即$e_\ell=(\cos\alpha,\sin\alpha)$。

多元函数的点态方向导函数值

多元函数在定义域内的点态可微性可以得到对应该点的方向导数值的存在性。

定理 (多元函数点态方向导数值的存在性定理)

如果$z=f(x,y)$在点$M_0(x_0,y_0)$处可微，那么$z=f(x,y)$在该点处沿任一方向ℓ的方向导数值均存在，且

$$\frac{\partial z}{\partial l}=\frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial z}{\partial y}\sin\alpha,$$

其中

- α为方向ℓ与x轴正向的夹角；
- $\cos\alpha$和$\sin\alpha$即为方向ℓ的方向余弦, 即$e_\ell=(\cos\alpha,\sin\alpha)$。

注

根据上述方向导数值的存在性定理的条件可知，函数可微则其方向导数值存在；但是函数在某点处的方向导数值存在，该函数未必在此点处可微。

例 1

求函数$z = x^2 - xy + y^2$在点$M_0(1,1)$处沿与Ox轴正向成$\dfrac{\pi}{4}$的方向ℓ上的方向导数值。

引例

例 1

求函数$z = x^2 - xy + y^2$在点$M_0(1,1)$处沿与Ox轴正向成$\dfrac{\pi}{4}$的方向ℓ上的方向导数值。

例 2

求函数$z = xy + \sin(x + 2y)$在点$O(0,0)$处沿方向$\ell = (1,2)$上的方向导数值。

引例

例 1

求函数$z=x^2-xy+y^2$在点$M_0(1,1)$处沿与Ox轴正向成$\dfrac{\pi}{4}$的方向ℓ上的方向导数值。

例 2

求函数$z=xy+\sin(x+2y)$在点$O(0,0)$处沿方向$\ell=(1,2)$上的方向导数值。

例 3

求函数$z=xy+yz+zx$在点$(1,1,2)$处沿方向ℓ上的方向导数值，其中ℓ的方向角分别为$60^\circ,45^\circ,60^\circ$。

引例

例 1

求函数$z=x^2-xy+y^2$在点$M_0(1,1)$处沿与Ox轴正向成$\dfrac{\pi}{4}$的方向ℓ上的方向导数值。

例 2

求函数$z=xy+\sin(x+2y)$在点$O(0,0)$处沿方向$\ell=(1,2)$上的方向导数值。

例 3

求函数$z=xy+yz+zx$在点$(1,1,2)$处沿方向ℓ上的方向导数值，其中ℓ的方向角分别为$60^\circ,45^\circ,60^\circ$。

例 4

求函数$u=x\sin yz$在点$(1,3,0)$处沿方向$\ell=(1,2,-1)$上的方向导数值。

函数的点态方向导数值反映了该函数沿某射线方向的变化率。一般说来，一个二元函数在给定点处沿不同方向的方向导数值是不一样的。

梯度

函数的点态方向导数值反映了该函数沿某射线方向的变化率。一般说来，一个二元函数在给定点处沿不同方向的方向导数值是不一样的。在许多实际问题中，我们需要进一步讨论：一个多元函数在某点处沿哪个方向的方向导数值为最大？为此，我们引进下面的梯度概念。

函数的点态方向导数值反映了该函数沿某射线方向的变化率。一般说来，一个二元函数在给定点处沿不同方向的方向导数值是不一样的。在许多实际问题中，我们需要进一步讨论：一个多元函数在某点处沿哪个方向的方向导数值为最大？为此，我们引进下面的梯度概念。

定义

设$z=f(x,y)$在平面区域D内具有一阶连续偏导函数。

- 对于点$(x_0,y_0)\in D$，我们称$\left(\frac{\partial z}{\partial x}(x_0,y_0),\frac{\partial z}{\partial y}(x_0,y_0)\right)$为函数$z=f(x,y)$在点$(x_0,y_0)$处的**梯度**，记作$\mathbf{grad}z$，即

$$\mathbf{grad}z|_{(x_0,y_0)}=\left(\frac{\partial z}{\partial x}(x_0,y_0),\frac{\partial z}{\partial y}(x_0,y_0)\right).$$

- 如果记$\nabla=\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right)$，那么$\mathbf{grad}z|_{(x_0,y_0)}=\nabla z|_{(x_0,y_0)}$。

梯度

由方向导数值的计算公式，如果$z=f(x,y)$具有一阶连续偏导函数，那么

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial \ell} =& \frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y}\sin\alpha \\ =& \left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right)\cdot(\cos\alpha, \sin\alpha) \\ =& \mathbf{grad} z \cdot \mathbf{e}_\ell = |\mathbf{grad} z|\cos\theta,\end{aligned}$$

其中

$$\boldsymbol{e}_\ell = (\cos\alpha, \sin\alpha), \quad \theta = (\widehat{\mathbf{grad} z, \boldsymbol{e}_\ell}), \quad \left.\frac{\partial z}{\partial \ell}\right|_{\max} = |\mathbf{grad} z|.$$

梯度

由方向导数值的计算公式，如果$z=f(x,y)$具有一阶连续偏导函数，那么

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial \ell} =& \frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y}\sin\alpha \\
=& \left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right)\cdot(\cos\alpha, \sin\alpha) \\
=& \mathbf{grad}z \cdot \mathbf{e}_\ell = |\mathbf{grad}z|\cos\theta,
\end{aligned}
$$

其中

$$
\boldsymbol{e}_\ell = (\cos\alpha, \sin\alpha), \quad \theta = \widehat{(\mathbf{grad}z, \boldsymbol{e}_\ell)}, \quad \left.\frac{\partial z}{\partial \ell}\right|_{\max} = |\mathbf{grad}z|.
$$

因此，函数在某一点的梯度是这样一个向量：它的方向是函数在该点处的方向导数值可取得最大值的方向，且方向导数值的最大值等于梯度的模。

引例

例 5

计算$\mathbf{grad}\,\dfrac{1}{x^2+y^2}$。

例 5

计算$\mathbf{grad}\,\dfrac{1}{x^2+y^2}$。

例 6

设$z=f(x,y)=xe^y$.

引例

例 5

计算$\mathbf{grad}\dfrac{1}{x^2+y^2}$。

例 6

设$z=f(x,y)=xe^y$.

(1) 求出f在点$P(2,0)$处沿从P到$Q(1/2,2)$方向的变化率；

例 5

计算$\mathbf{grad}\dfrac{1}{x^2+y^2}$。

例 6

设$z=f(x,y)=xe^y$.

(1) 求出f在点$P(2,0)$处沿从P到$Q(1/2,2)$方向的变化率;

(2) f在点$P(2,0)$处沿什么方向具有最大的增长率，最大增长率为多少?

例 5

计算$\mathbf{grad}\dfrac{1}{x^2+y^2}$。

例 6

设$z=f(x,y)=xe^y$.

(1) 求出f在点$P(2,0)$处沿从P到$Q(1/2,2)$方向的变化率；

(2) f在点$P(2,0)$处沿什么方向具有最大的增长率，最大增长率为多少？

例 7

计算函数$f(x,y,z)=(x-1)^2+2(y+1)^2+3(z-2)^2-6$在点$(2,0,1)$处沿向量$(1,-2,-2)$的方向导数值。

数量场与向量场简介*

定义

- 我们称在整体空间或在部分空间上的分布为**场**，它可以由空间位置及时间所确定的某些物理量来共同决定；
- 若形成场的物理量是数量，则称为**数量场**：即如果对于空间区域G内的任意一点M，都有一个确定的数量函数$f(M)$，那么我们称在空间区域G内确定了一个数量场；
- 若形成场的物理量是向量，则称为**向量场**：即如果对于空间区域G内的任意一点M，都有一个确定的向量值函数$f(M)$，那么我们称在空间区域G内确定了一个向量场；
- 若向量场$f(M)$是某个数量函数$f(M)$的梯度场$\mathbf{grad}\,f(M)$，则称$f(M)$是向量场$f(M)$的一个**势函数**，并称向量$f(M)$是一个**势场**。

注

- 气压、气温、电位、电场强度、流体密度等较为熟悉的物理对象都可以看成场;
- 一个数量场可用一个数量函数$f(M)$来确定，例如大气温度的分布、流体密度的分布都形成数量场;
- 一个向量场可用一个向量值函数$f(M)$来确定，例如流体流动的速度、电场强度的分布都形成向量场;
- 任何一个向量场并不一定都是势场，因为它不一定是某个数量函数的梯度场。

例 5

试求数量场$\dfrac{m}{r}$所产生的梯度场, 其中常数$m>0, r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$为原点$O$到点$M(x,y,z)$的距离.

例 5

试求数量场$\dfrac{m}{r}$所产生的梯度场, 其中常数$m > 0, r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$为原点$O$到点$M(x, y, z)$的距离.

注意到

$$\mathbf{grad}\frac{m}{r} = -\frac{m}{r^2}\mathbf{e}_r,$$

该等式的右端在力学上可解释为：位于原点O而质量为m的质点对位于点M而质量为1的质点的引力。

例 5

试求数量场$\frac{m}{r}$所产生的梯度场, 其中常数$m>0, r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$为原点$O$到点$M(x,y,z)$的距离.

注意到

$$\mathbf{grad}\frac{m}{r}=-\frac{m}{r^2}\mathbf{e}_r,$$

该等式的右端在力学上可解释为：位于原点O而质量为m的质点对位于点M而质量为1的质点的引力。其中

- 该引力的大小与两质点的质量的乘积成正比，而与它们之间的距离平方成反比；
- 该引力的方向由点M指向原点。

因此数量场$\frac{m}{r}$的势场即梯度场$\mathbf{grad}\frac{m}{r}$称为**引力场**，而函数$\frac{m}{r}$则称为**引力势**。

微分学的几何应用

在一元函数微分学中我们介绍了平面曲线的切线和法线:

- 如果一元函数$y = f(x), x \in D$在D上可求导函数，函数在某一点$x_0 \in D$的切线斜率为$k = f'(x_0) \neq 0$，那么
  (1) 该点对应的切线方程为$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$;
  (2) 此点处对应法线方程为$(x - x_0) + f'(x_0)(y - y_0) = 0$。
- 如果一元函数用参数方程

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} \quad t \in [\alpha, \beta]$$

来表示，其中$\varphi(t), \psi(t)$在$[\alpha, \beta]$上可求导函数，且导数$\varphi'(t) \neq 0$，那么

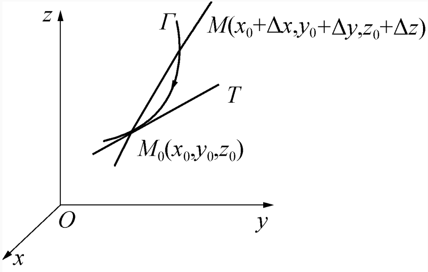
(1) 点$t_0 \in (\alpha, \beta)$处的切线斜率为$\dfrac{\psi'(t_0)}{\varphi'(t_0)}$，对应的切线方程为$\dfrac{y - y_0}{\psi'(t_0)} = \dfrac{x - x_0}{\varphi'(t_0)}$;
(2) 点$t_0 \in (\alpha, \beta)$处的法线方程为$\varphi'(t_0)(x - x_0) + \psi'(t_0)(y - y_0) = 0$。

类似地，我们可以定义一条空间曲线Γ在点$M_0(x_0, y_0, z_0)$处的切线：

类似地，我们可以定义一条空间曲线Γ在点$M_0(x_0, y_0, z_0)$处的切线：

定义 (空间曲线的切线和法平面)

在空间曲线Γ上任取一点 $M_0(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z)$ 并作割线M_0M。当点M沿曲线Γ趋近于M_0时，对应割线的极限位置M_0T称为空间曲线Γ在点$M_0(x_0, y_0, z_0)$处的**切线**，点M_0为**切点**。过点$M_0(x_0, y_0, z_0)$并与空间曲线Γ在点M_0处的切线M_0T垂直的平面称为空间曲线Γ在点M_0处的**法平面**。



空间曲线的切线与法平面：空间曲线以t为变量的参数方程所给出

设空间曲线Γ的参数方程为

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \quad t \in [\alpha, \beta], \\ z = \omega(t), \end{cases}$$

其中$\varphi(t), \psi(t), \omega(t)$在$[\alpha, \beta]$上可求导函数且导函数值不同时为零。

- 设与点M_0对应的参数为t_0，与点$M_0(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z)$对应的参数为$t_0 + \Delta t$，于是当$M \to M_0$时有$\Delta t \to 0$。
- 由于向量$\overrightarrow{M_0M}(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$是割线$M_0M$的一个方向向量且点$M_0(x_0, y_0, z_0)$在割线上，于是割线的方程为

$$\frac{x - x_0}{\Delta x} = \frac{y - y_0}{\Delta y} = \frac{z - z_0}{\Delta z}.$$

- 上式各个分母同除以Δt，得到

$$\frac{x-x_0}{\frac{\Delta x}{\Delta t}}=\frac{y-y_0}{\frac{\Delta y}{\Delta t}}=\frac{z-z_0}{\frac{\Delta z}{\Delta t}},$$

- 上式各个分母同除以Δt，得到

$$\frac{x-x_0}{\frac{\Delta x}{\Delta t}}=\frac{y-y_0}{\frac{\Delta y}{\Delta t}}=\frac{z-z_0}{\frac{\Delta z}{\Delta t}},$$

- 令$M\to M_0$，相应地$\Delta t\to 0$，对上式分母求极限我们便得到空间曲线在点M_0处的切线方程：

$$\frac{x-x_0}{\varphi'(t_0)}=\frac{y-y_0}{\psi'(t_0)}=\frac{z-z_0}{\omega'(t_0)}.$$

- 上式各个分母同除以Δt，得到
$$\frac{x-x_0}{\frac{\Delta x}{\Delta t}}=\frac{y-y_0}{\frac{\Delta y}{\Delta t}}=\frac{z-z_0}{\frac{\Delta z}{\Delta t}},$$
- 令$M\to M_0$，相应地$\Delta t\to 0$，对上式分母求极限我们便得到空间曲线在点M_0处的切线方程：
$$\frac{x-x_0}{\varphi'(t_0)}=\frac{y-y_0}{\psi'(t_0)}=\frac{z-z_0}{\omega'(t_0)}.$$
- 向量$\boldsymbol{\tau}|_{t=t_0}=(\varphi'(t_0),\psi'(t_0),\omega'(t_0))$是切线的方向向量，又叫做**切向量**。

- 上式各个分母同除以Δt，得到

$$\frac{x-x_0}{\frac{\Delta x}{\Delta t}}=\frac{y-y_0}{\frac{\Delta y}{\Delta t}}=\frac{z-z_0}{\frac{\Delta z}{\Delta t}},$$

- 令$M\to M_0$，相应地$\Delta t\to 0$，对上式分母求极限我们便得到空间曲线在点M_0处的切线方程：

$$\frac{x-x_0}{\varphi'(t_0)}=\frac{y-y_0}{\psi'(t_0)}=\frac{z-z_0}{\omega'(t_0)}.$$

- 向量$\boldsymbol{\tau}|_{t=t_0}=(\varphi'(t_0),\psi'(t_0),\omega'(t_0))$是切线的方向向量，又叫做**切向量**。
- 对于曲线Γ在点M_0处的切线与法平面垂直，可知此法平面的法向量正是切线的方向向量(切向量)，因此法平面的点法式方程为

$$\varphi'(t_0)\cdot(x-x_0)+\psi'(t_0)\cdot(y-y_0)+\omega'(t_0)\cdot(z-z_0)=0.$$

例 1

求曲线

$$x = a\cos t, y = a\sin t, z = bt\,(a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0, b \neq 0)$$

在点$M_0(a, 0, 0)$的切线和法平面方程。

例 1

求曲线

$$x = a\cos t, y = a\sin t, z = bt\,(a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0, b \neq 0)$$

在点$M_0(a, 0, 0)$的切线和法平面方程。

例 2

求曲线

$$x = a\sin^2 t, y = b\sin t\cos t, z = c\cos^2 t$$

在点$t = \pi/4$对应点的切线及法平面方程。

例 1

求曲线

$$x = a\cos t, y = a\sin t, z = bt\,(a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0, b \neq 0)$$

在点$M_0(a, 0, 0)$的切线和法平面方程。

例 2

求曲线

$$x = a\sin^2 t, y = b\sin t\cos t, z = c\cos^2 t$$

在点$t = \pi/4$对应点的切线及法平面方程。

例 3

在曲线

$$x = t, y = t^2, z = t^3$$

上求出一点，使此点的切线平行于平面$x + 2y + z - 4 = 0$。

空间曲线的切线与法平面：空间曲线以x为变量的参数方程所给出

如果空间曲线Γ是以两个柱面的交线的形式给出，即$\Gamma:\begin{cases} y=\psi(x), \\ z=\omega(x), \end{cases}$ 将x视为参数得到$x=x, y=\psi(x), z=\omega(x)$，任一点处切向量为$\boldsymbol{\tau}=(1,\psi'(x),\omega'(x))$。

- 空间曲线Γ在点$M_0(x_0,y_0,z_0)$处的切线方程为

$$\frac{x-x_0}{1}=\frac{y-y_0}{\psi'(x_0)}=\frac{z-z_0}{\omega'(x_0)},$$

- 空间曲线Γ对应法平面方程为

$$(x-x_0)+\psi'(x_0)\cdot(y-y_0)+\omega'(x_0)\cdot(z-z_0)=0.$$

如果空间曲线$\varGamma$是以两个柱面的交线的形式给出，即$\varGamma:\begin{cases} y=\psi(x), \\ z=\omega(x), \end{cases}$ 将x视为参数得到$x=x, y=\psi(x), z=\omega(x)$，任一点处切向量为$\boldsymbol{\tau}=(1,\psi'(x),\omega'(x))$。

- 空间曲线$\varGamma$在点$M_0(x_0,y_0,z_0)$处的切线方程为

$$\frac{x-x_0}{1}=\frac{y-y_0}{\psi'(x_0)}=\frac{z-z_0}{\omega'(x_0)},$$

- 空间曲线$\varGamma$对应法平面方程为

$$(x-x_0)+\psi'(x_0)\cdot(y-y_0)+\omega'(x_0)\cdot(z-z_0)=0.$$

例 4

求曲线$\begin{cases} y=2x^3, \\ z=x+3, \end{cases}$ 在点$M(1,2,4)$处的切线及法平面方程。

空间曲线的切线与法平面：空间曲线以若干曲面组成方程组联立给出

如果空间曲线Γ是一般方程形式(两个曲面的交线)

$$\begin{cases} F(x,y,z)=0, \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$$

给出，且F,G具有连续偏导函数，

$$\begin{cases} F(x_0,y_0,z_0)=0, \\ G(x_0,y_0,z_0)=0, \end{cases} \text{且} \left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\right|_{M_0} \neq 0,$$

此时由隐函数存在定理，

$$\begin{cases} F(x,y,z)=0, \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$$

必在点M_0的某个邻域内能唯一地确定具有连续导数的函数$y=\psi(x)$和$z=\omega(x)$.

所以空间曲线Γ的表达式可为

$$x = x, y = \psi(x), z = \omega(x),$$

切向量为

$$\boldsymbol{\tau} = (1, \psi'(x), \omega'(x)) = \left(1, \frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}\right).$$

所以空间曲线Γ的表达式可为

$$x = x, y = \psi(x), z = \omega(x),$$

切向量为

$$\boldsymbol{\tau} = (1, \psi'(x), \omega'(x)) = \left(1, \frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}\right).$$

对方程组$\begin{cases} F(x,y,z) = 0, \\ G(x,y,z) = 0, \end{cases}$两边同时对$x$求导函数，得到

$$\begin{cases} F_x + F_y \dfrac{dy}{dx} + F_z \dfrac{dz}{dx} = 0, \\ G_x + G_y \dfrac{dy}{dx} + G_z \dfrac{dz}{dx} = 0. \end{cases}$$

空间曲线的切线与法平面：空间曲线以若干曲面组成方程组联立给出

使用克拉默法则求解上面的方程组得到对应$\dfrac{dy}{dx}, \dfrac{dz}{dx}$的表达式：

$$\frac{dy}{dx} = \psi'(x) = \frac{\begin{vmatrix} F_z & F_x \\ G_z & G_x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}} \qquad \frac{dz}{dx} = \omega'(x) = \frac{\begin{vmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}}$$

使用克拉默法则求解上面的方程组得到对应$\dfrac{dy}{dx},\dfrac{dz}{dx}$的表达式：

$$\frac{dy}{dx}=\psi'(x)=\frac{\begin{vmatrix}F_z & F_x\\ G_z & G_x\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}F_y & F_z\\ G_y & G_z\end{vmatrix}}\qquad \frac{dz}{dx}=\omega'(x)=\frac{\begin{vmatrix}F_x & F_y\\ G_x & G_y\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}F_y & F_z\\ G_y & G_z\end{vmatrix}}$$

从而$\boldsymbol{\tau}'=(1,\psi'(x_0),\omega'(x_0))$是曲线$\Gamma$在点$M_0(x_0,y_0,z_0)$处的一个切向量，其中

$$\psi'(x_0)=\frac{\begin{vmatrix}F_z & F_x\\ G_z & G_x\end{vmatrix}_{M_0}}{\begin{vmatrix}F_y & F_z\\ G_y & G_z\end{vmatrix}_{M_0}}\qquad \omega'(x_0)=\frac{\begin{vmatrix}F_x & F_y\\ G_x & G_y\end{vmatrix}_{M_0}}{\begin{vmatrix}F_y & F_z\\ G_y & G_z\end{vmatrix}_{M_0}}$$

分子分母带下标M_0的行列式表示行列式在点$M_0(x_0,y_0,z_0)$的值。

将上面的切向量乘以$\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}_{M_0}$ 计算得到的向量

$$\boldsymbol{\tau}|_{M_0} = \left(\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}_{M_0}, \begin{vmatrix} F_z & F_x \\ G_z & G_x \end{vmatrix}_{M_0}, \begin{vmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{vmatrix}_{M_0} \right)$$

也就是曲线Γ在点$M_0(x_0, y_0, z_0)$处的一个切向量。

将上面的切向量乘以$\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}_{M_0}$计算得到的向量

$$\boldsymbol{\tau}|_{M_0} = \left(\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}_{M_0}, \begin{vmatrix} F_z & F_x \\ G_z & G_x \end{vmatrix}_{M_0}, \begin{vmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{vmatrix}_{M_0} \right)$$

也就是曲线Γ在点$M_0(x_0, y_0, z_0)$处的一个切向量。

综上，我们得到对应曲线Γ在点$M_0(x_0, y_0, z_0)$处的切线方程为

$$\frac{x - x_0}{\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}_{M_0}} = \frac{y - y_0}{\begin{vmatrix} F_z & F_x \\ G_z & G_x \end{vmatrix}_{M_0}} = \frac{z - z_0}{\begin{vmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{vmatrix}_{M_0}};$$

曲线Γ对应的法平面方程为

$$\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}_{M_0} (x - x_0) + \begin{vmatrix} F_z & F_x \\ G_z & G_x \end{vmatrix}_{M_0} (y - y_0) + \begin{vmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{vmatrix}_{M_0} (z - z_0) = 0.$$

注

- 借助于三阶行列式，我们可以把上述的切向量表示为

$$\boldsymbol{\tau}|_{M_0} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ F_x & F_y & F_z \\ G_x & G_y & G_z \end{vmatrix},$$

- 如果$\left.\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\right|_{M_0} = 0$，而$\left.\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\right|_{M_0}$或$\left.\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}\right|_{M_0}$中至少有一个不为零时，我们同样可得到上述结果。例如，其他条件不变，而

$$\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\right|_{M_0} \neq 0,$$

则我们可唯一确定$x = x(z), y = y(z)$。

例 5

求曲线

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 6, \\ x + y + z = 0, \end{cases}$$

在点$(1, -2, 1)$处的切线及法平面方程。

例 5

求曲线

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 6, \\ x + y + z = 0, \end{cases}$$

在点$(1, -2, 1)$处的切线及法平面方程。

例 6

求曲线

$$\begin{cases} x^2 + 2y^2 + z^2 = 7, \\ 2x + 5y - 3z = -4, \end{cases}$$

在点$(2, -1, 1)$处的切线及法平面方程.

由空间解析几何可知，空间曲线Γ的参数方程为

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t),\ t \in [\alpha, \beta], \\ z = \omega(t), \end{cases}$$

如果我们记

$$\boldsymbol{r} = (x, y, z), \boldsymbol{f}(t) = (\varphi(t), \psi(t), \omega(t)),$$

那么曲线Γ的方程可写成向量的形式：

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{f}(t), t \in [\alpha, \beta].$$

空间曲线的切线与法平面：一元向量值函表示形式

定义

设数集$D \subset \mathbb{R}$。我们称关系$\boldsymbol{f} : D \to \mathbb{R}^3$为一元向量值函数，记为$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{f}(t), t \in D$。其中我们称数集$D$为函数的定义域， t称为自变量， $\boldsymbol{r}$称为因变量。

定义

设数集$D \subset \mathbb{R}$。我们称关系$\boldsymbol{f}: D \to \mathbb{R}^3$为一元向量值函数，记为$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{f}(t), t \in D$。其中我们称数集$D$为函数的定义域，$t$称为自变量，$\boldsymbol{r}$称为因变量。

在$\mathbb{R}^3$中，如果向量函数$\boldsymbol{f}(t), t \in D$的三个分量函数依次为$f_1(t), f_2(t), f_3(t), t \in D$，那么向量值函数$\boldsymbol{f}$可表示为

$$\boldsymbol{f}(t) = f_1(t)\boldsymbol{i} + f_2(t)\boldsymbol{j} + f_3(t)\boldsymbol{k} = (f_1(t), f_2(t), f_3(t)), t \in D.$$

设向量$\boldsymbol{r}$的起点取在坐标系的原点，终点在M处, 即$\boldsymbol{r} = \overrightarrow{OM}$，终点$M$的轨迹(记为曲线$\Gamma$)称为向量值函数$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{f}(t), t \in D$的图形，而$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{f}(t), t \in D$就称为曲线$\Gamma$的向量方程。

根据$\mathbb{R}^3$中向量的模的概念与向量的线性运算，我们可以定义一元向量值函数的局部和全局连续性和微分性质。

定义 (向量值函数的点态连续性)

设向量值函数$\boldsymbol{f}(t)$在点t_0的某一邻域内有定义。

- 如果$\lim\limits_{t\to t_0} \boldsymbol{f}(t) = \boldsymbol{f}(t_0)$，那么我们称向量值函数$\boldsymbol{f}(t)$在点$t_0$处连续；
- 向量值函数$\boldsymbol{f}(t)$在t_0连续 $\iff$ $f_1(t), f_2(t), f_3(t)$在t_0连续；

定义 (向量值函数的全局连续性)

设向量值函数$\boldsymbol{f}(t), t \in D$。如果$D_1 \subset D$，函数$\boldsymbol{f}(t)$在$D_1$上每一点处都连续，那么我们称$\boldsymbol{f}(t)$在$D_1$上连续或称$\boldsymbol{f}(t)$为$D_1$上的连续函数。

定义 (向量值函数的点态可求导函数值)

设向量值函数$\boldsymbol{f}(t)$在点t_0的某一邻域内有定义，如果

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{f(t_0+\Delta t)-f(t_0)}{\Delta t}$$

存在，那么我们称此极限向量值函数$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{f}(t)$在$t_0$处的向量导数值或导数值向量，记作$\boldsymbol{f}'(t_0)$或$\left.\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right|_{t=t_0}$。

定义

设向量值函数$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{f}(t), t \in D$，

- 如果$D_1 \subset D$, $\boldsymbol{f}(t)$在D_1上每一点处都存在导向量$\boldsymbol{f}'(t)$，那么称$\boldsymbol{f}(t)$在D_1上可导。
- 向量值函数$\boldsymbol{f}(t)$在t_0可求导函数值 $\iff$ $f_1(t), f_2(t), f_3(t)$在t_0可导。
- 当$\boldsymbol{f}(t)$在t处可导时，有

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{f}(t) = \frac{d}{dt}(f_1(t), f_2(t), f_3(t)) = ({f_1}'(t), {f_2}'(t), {f_3}'(t)).$$

设空间曲面Σ的方程为$F(x,y,z)=0$，其中F具有连续偏导数F_x,F_y,F_z且不同时为零。

首先，在曲面Σ上点M_0处可以引无数多条曲线，我们任取其中过点M_0的一条曲线

$$\varGamma:\begin{cases}x=\varphi(t),\\ y=\psi(t),\ t\in[\alpha,\beta],\\ z=\omega(t),\end{cases}$$

其中$t=t_0$对应的点为$M_0(x_0,y_0,z_0)$， $\varphi(t),\psi(t),\omega(t)$在$[\alpha,\beta]$上可求导函数，且导函数不同时为零。曲线$\varGamma$在点$M_0$处的切向量为

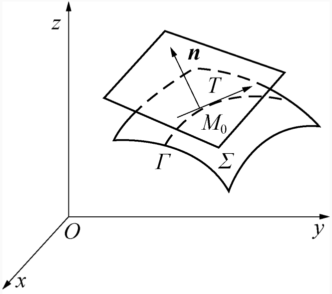
$$\boldsymbol{\tau}=(\varphi'(t_0),\psi'(t_0),\omega'(t_0)),$$

因为曲线$\varGamma$在曲面Σ上, 所以

$$F(\varphi(t),\psi(t),\omega(t))\equiv 0.$$

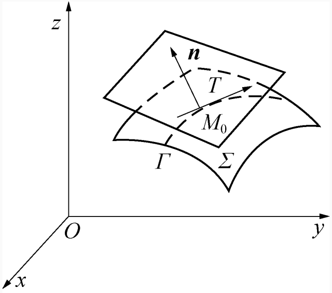
由于F具有连续偏导数且$\varphi'(t_0),\psi'(t_0),\omega'(t_0)$存在，因此对上述恒等式在$t=t_0$时有全导数$\left.\dfrac{dF}{dt}\right|_{t=t_0}=0$，即

$$F_x(x_0,y_0,z_0)\varphi'(t_0)+F_y(x_0,y_0,z_0)\psi'(t_0)+F_z(x_0,y_0,z_0)\omega'(t_0)=0,$$



由于F具有连续偏导数且$\varphi'(t_0),\psi'(t_0),\omega'(t_0)$存在，因此对上述恒等式在$t=t_0$时有全导数$\left.\dfrac{dF}{dt}\right|_{t=t_0}=0$，即

$$F_x(x_0,y_0,z_0)\varphi'(t_0)+F_y(x_0,y_0,z_0)\psi'(t_0)+F_z(x_0,y_0,z_0)\omega'(t_0)=0,$$



上式也可写成$(F_x(M_0),F_y(M_0),F_z(M_0))\cdot(\varphi'(t_0),\psi'(t_0),\omega'(t_0))=0$。

记$\boldsymbol{n}|_{M_0} = F_x(M_0), F_y(M_0), F_z(M_0)$，那么

$$\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{\tau}|_{t=t_0} = 0,$$

这表明$\boldsymbol{n}$(固定向量)与切线向量$\boldsymbol{\tau}$垂直由于曲线Γ是Σ上过点M_0的任意一条曲线，它们在点M_0的切线都与同一向量$\boldsymbol{n}$垂直，所以在曲面上通过点M_0的一切曲线的切线都是同一平面上。我们称这个平面为曲面Σ上点M_0处的**切平面**，其**法向量**为$\boldsymbol{n}$。

记$\boldsymbol{n}|_{M_0} = F_x(M_0), F_y(M_0), F_z(M_0)$，那么

$$\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{\tau}|_{t=t_0} = 0,$$

这表明$\boldsymbol{n}$(固定向量)与切线向量$\boldsymbol{\tau}$垂直由于曲线Γ是Σ上过点M_0的任意一条曲线，它们在点M_0的切线都与同一向量$\boldsymbol{n}$垂直，所以在曲面上通过点M_0的一切曲线的切线都是同一平面上。我们称这个平面为曲面Σ上点M_0处的**切平面**，其**法向量**为$\boldsymbol{n}$。

根据平面点法式方程可知该切平面方程为

$$F_x(x_0, y_0, z_0) \cdot (x - x_0) + F_y(x_0, y_0, z_0) \cdot (y - y_0) + F_z(x_0, y_0, z_0) \cdot (z - z_0) = 0,$$

而过点$M_0(x_0, y_0, z_0)$垂直于此点切平面的直线就是曲面Σ上点M_0处的法线，它的对称式(点向式)方程为

$$\frac{x - x_0}{F_x(x_0, y_0, z_0)} = \frac{y - y_0}{F_y(x_0, y_0, z_0)} = \frac{z - z_0}{F_z(x_0, y_0, z_0)}.$$

如果空间曲面Σ的方程为$z=f(x,y)$，其中f具有连续偏导函数，那么取

$$F(x,y,z)=z-f(x,y)\text{或}F(x,y,z)=f(x,y)-z,$$

得到曲面在点$M_0(x_0,y_0,z_0)$处的法线向量

$$\boldsymbol{n}=(-f_x,-f_y,1)\quad\text{或}\quad\boldsymbol{n}=(f_x,f_y,-1).$$

如果空间曲面Σ的方程为$z = f(x, y)$，其中f具有连续偏导函数，那么取

$$F(x, y, z) = z - f(x, y) \text{或} F(x, y, z) = f(x, y) - z,$$

得到曲面在点$M_0(x_0, y_0, z_0)$处的法线向量

$$\boldsymbol{n} = (-f_x, -f_y, 1) \quad \text{或} \quad \boldsymbol{n} = (f_x, f_y, -1).$$

于是点$M_0(x_0, y_0, z_0)$处的切平面方程为

$$f_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + f_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0) + f_z(x_0, y_0) \cdot (z - z_0) = 0,$$

法线方程为

$$\frac{x - x_0}{f_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{f_y(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}.$$

如果空间曲面Σ的方程为$z=f(x,y)$，其中f具有连续偏导函数，那么取

$$F(x,y,z)=z-f(x,y)\text{或}F(x,y,z)=f(x,y)-z,$$

得到曲面在点$M_0(x_0,y_0,z_0)$处的法线向量

$$\boldsymbol{n}=(-f_x,-f_y,1)\quad\text{或}\quad\boldsymbol{n}=(f_x,f_y,-1).$$

于是点$M_0(x_0,y_0,z_0)$处的切平面方程为

$$f_x(x_0,y_0)\cdot(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)\cdot(y-y_0)+f_z(x_0,y_0)\cdot(z-z_0)=0,$$

法线方程为

$$\frac{x-x_0}{f_x(x_0,y_0)}=\frac{y-y_0}{f_y(x_0,y_0)}=\frac{z-z_0}{-1}.$$

例 7

求曲面$3x^2+y^2-z^2=27$在点$M_0(3,1,1)$处的切平面及法线方程。

如果空间曲面Σ的方程为$z=f(x,y)$，其中f具有连续偏导函数，那么取

$$F(x,y,z)=z-f(x,y)\text{或}F(x,y,z)=f(x,y)-z,$$

得到曲面在点$M_0(x_0,y_0,z_0)$处的法线向量

$$\boldsymbol{n}=(-f_x,-f_y,1)\quad\text{或}\quad\boldsymbol{n}=(f_x,f_y,-1).$$

于是点$M_0(x_0,y_0,z_0)$处的切平面方程为

$$f_x(x_0,y_0)\cdot(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)\cdot(y-y_0)+f_z(x_0,y_0)\cdot(z-z_0)=0,$$

法线方程为

$$\frac{x-x_0}{f_x(x_0,y_0)}=\frac{y-y_0}{f_y(x_0,y_0)}=\frac{z-z_0}{-1}.$$

例 7

求曲面$3x^2+y^2-z^2=27$在点$M_0(3,1,1)$处的切平面及法线方程。

例 8

求圆锥面$z = \sqrt{x^2 + y^2}$在点$M_0(1, 0, 1)$处的切平面及法线方程。

例 8

求圆锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$在点$M_0(1,0,1)$处的切平面及法线方程。

例 9

试求曲面$x^2+y^2+z^2-xy-3=0$上垂直于直线$\begin{cases} x+y+1=0, \\ z-3=0 \end{cases}$的切平面方程。

例 8

求圆锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$在点$M_0(1,0,1)$处的切平面及法线方程。

例 9

试求曲面$x^2+y^2+z^2-xy-3=0$上垂直于直线$\begin{cases} x+y+1=0, \\ z-3=0 \end{cases}$的切平面方程。

例 10

验证曲面$\Sigma:\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=\sqrt{a}(a>0)$上任一点处的切平面在各坐标轴上的截距之和为$a$。

例 8

求圆锥面$z = \sqrt{x^2 + y^2}$在点$M_0(1, 0, 1)$处的切平面及法线方程。

例 9

试求曲面$x^2 + y^2 + z^2 - xy - 3 = 0$上垂直于直线$\begin{cases} x + y + 1 = 0, \\ z - 3 = 0 \end{cases}$的切平面方程。

例 10

验证曲面$\Sigma : \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = \sqrt{a}(a > 0)$上任一点处的切平面在各坐标轴上的截距之和为$a$。

例 11

在椭球面$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$上求一个截取各正半坐标轴为相等线段的切平面方程。

多元函数的极值问题

多元函数的极值

在实际问题中我们会大量遇到求多元函数的最大值，最小值的问题。与一元函数的情形类似，多元函数的最大值、最小值与极大值、极小值有密切的联系。

在实际问题中我们会大量遇到求多元函数的最大值，最小值的问题。与一元函数的情形类似，多元函数的最大值、最小值与极大值、极小值有密切的联系。

定义 (二元函数极值)

设函数$z = f(x, y)$在点(x_0, y_0)的某一邻域内有定义。对于该邻域内异于(x_0, y_0)的任意一点(x, y)，

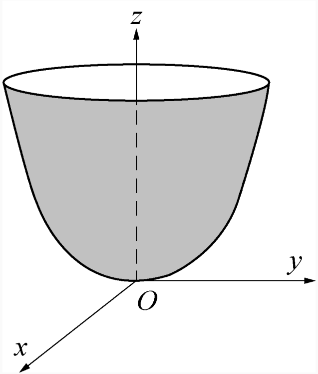
- 如果
$$f(x, y) < f(x_0, y_0),$$
那么称函数在(x_0, y_0)有**极大值**$f(x_0, y_0)$；
- 如果
$$f(x, y) > f(x_0, y_0),$$
那么称函数在(x_0, y_0)有**极小值**$f(x_0, y_0)$；
- 极大值、极小值统称为**极值**。使函数取得极值的点称为**极值点**。

例 1

函数$z = 2x^2 + 3y^2$在点$(0, 0)$处有极小值。

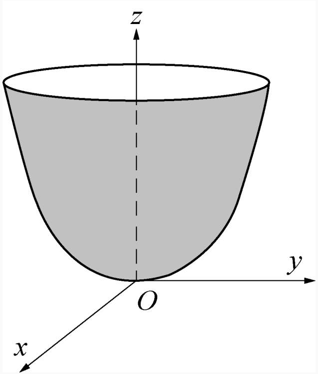
例 1

函数$z = 2x^2 + 3y^2$在点$(0,0)$处有极小值。



例 1

函数$z = 2x^2 + 3y^2$在点$(0,0)$处有极小值。



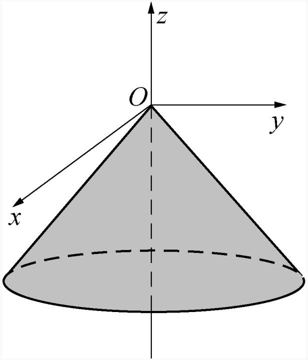
从几何上看， $z = 2x^2 + 3y^2$表示一开口向上的椭圆抛物面，点$(0,0,0)$是它的顶点。

例 2

函数$z = -\sqrt{x^2+y^2}$在点$(0,0)$处有极大值。

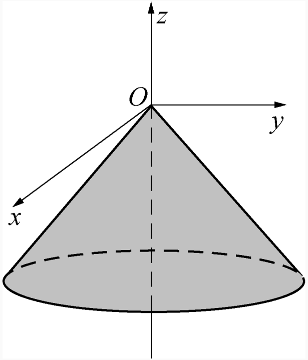
例 2

函数$z = -\sqrt{x^2 + y^2}$在点$(0, 0)$处有极大值。



例 2

函数$z=-\sqrt{x^2+y^2}$在点$(0,0)$处有极大值。



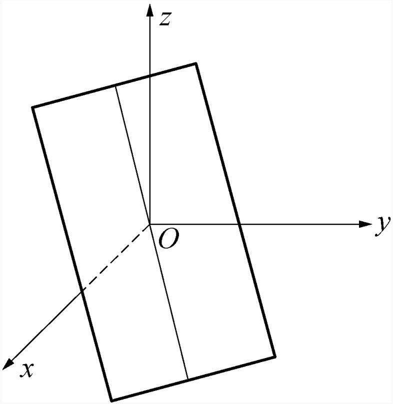
从几何上看，$z=-\sqrt{x^2+y^2}$表示一开口向下的半圆锥面，点$(0,0,0)$是它的顶点。

例 3

函数$z = x$在点$(0, 0)$处无极值。

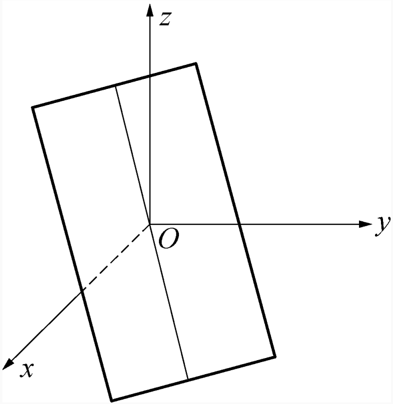
例 3

函数$z=x$在点$(0,0)$处无极值。



例 3

函数$z=x$在点$(0,0)$处无极值。



从几何上看，它表示过原点的平面。

多元函数有极值的必要条件

与一元函数的情形类似，我们使用偏导数值给出二元函数有极值的必要条件。

与一元函数的情形类似，我们使用偏导数值给出二元函数有极值的必要条件。

定理 (二元函数有极值的必要条件)

设函数$z = f(x, y)$在点(x_0, y_0)处具有偏导数值，且在点(x_0, y_0)处有极值，那么它在该点处的偏导数值必然为零，即

$$f_x(x_0, y_0) = 0,\ \ f_y(x_0, y_0) = 0.$$

多元函数有极值的必要条件

与一元函数的情形类似，我们使用偏导数值给出二元函数有极值的必要条件。

定理 (二元函数有极值的必要条件)

设函数$z = f(x, y)$在点(x_0, y_0)处具有偏导数值，且在点(x_0, y_0)处有极值，那么它在该点处的偏导数值必然为零，即

$$f_x(x_0, y_0) = 0,\ \ f_y(x_0, y_0) = 0.$$

定义

凡是能使多元函数的一阶偏导数值同时为零的点称为该多元函数的**驻点**。

与一元函数的情形类似，我们使用偏导数值给出二元函数有极值的必要条件。

定理 (二元函数有极值的必要条件)

设函数$z = f(x, y)$在点(x_0, y_0)处具有偏导数值，且在点(x_0, y_0)处有极值，那么它在该点处的偏导数值必然为零，即

$$f_x(x_0, y_0) = 0,\ \ f_y(x_0, y_0) = 0.$$

定义

凡是能使多元函数的一阶偏导数值同时为零的点称为该多元函数的**驻点**。

由上述定理可知，可计算偏导函数的多元函数的极值点必为其驻点，但该函数的驻点不一定是极值点。

与一元函数的情形类似，我们使用偏导数值给出二元函数有极值的必要条件。

定理 (二元函数有极值的必要条件)

设函数$z = f(x, y)$在点(x_0, y_0)处具有偏导数值，且在点(x_0, y_0)处有极值，那么它在该点处的偏导数值必然为零，即

$$f_x(x_0, y_0) = 0,\ \ f_y(x_0, y_0) = 0.$$

定义

凡是能使多元函数的一阶偏导数值同时为零的点称为该多元函数的**驻点**。

由上述定理可知，可计算偏导函数的多元函数的极值点必为其驻点，但该函数的驻点不一定是极值点。 例如函数$z = xy$在点$(0, 0)$处的两个偏导数值分别为

$$f_x(0, 0) = y\big|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}} = 0,\ \ f_y(0, 0) = x\big|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}} = 0,$$

所以点$(0, 0)$是函数$z = xy$的驻点，然而显然点$(0, 0)$不是极值点（为什么）。

在上述必要条件的基础上，我们给出使驻点成为极值点的充分条件。

定理 (多元函数有极值的充分条件)

设函数$z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)的某邻域内有直到二阶的连续偏导函数，且

$$f_x(x_0,y_0)=0, f_y(x_0,y_0)=0.$$

令$f_{xx}(x_0,y_0)=A,\ f_{xy}(x_0,y_0)=B,\ f_{yy}(x_0,y_0)=C$，那么

在上述必要条件的基础上，我们给出使驻点成为极值点的充分条件。

定理 (多元函数有极值的充分条件)

设函数$z = f(x, y)$在点(x_0, y_0)的某邻域内有直到二阶的连续偏导函数，且

$$f_x(x_0, y_0) = 0, f_y(x_0, y_0) = 0.$$

令$f_{xx}(x_0, y_0) = A$，$f_{xy}(x_0, y_0) = B$，$f_{yy}(x_0, y_0) = C$，那么

(1) 当$AC - B^2 > 0$时，函数$f(x, y)$在(x_0, y_0)处有极值，且当$A > 0$时有极小值$f(x_0, y_0)$，$A < 0$时有极大值$f(x_0, y_0)$；

在上述必要条件的基础上，我们给出使驻点成为极值点的充分条件。

定理 (多元函数有极值的充分条件)

设函数$z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)的某邻域内有直到二阶的连续偏导函数，且

$$f_x(x_0,y_0)=0, f_y(x_0,y_0)=0.$$

令$f_{xx}(x_0,y_0)=A$，$f_{xy}(x_0,y_0)=B$，$f_{yy}(x_0,y_0)=C$，那么

(1) 当$AC-B^2>0$时，函数$f(x,y)$在(x_0,y_0)处有极值，且当$A>0$时有极小值$f(x_0,y_0)$，$A<0$时有极大值$f(x_0,y_0)$；

(2) 当$AC-B^2<0$时，函数$f(x,y)$在(x_0,y_0)处没有极值；

在上述必要条件的基础上，我们给出使驻点成为极值点的充分条件。

定理 (多元函数有极值的充分条件)

设函数$z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)的某邻域内有直到二阶的连续偏导函数，且

$$f_x(x_0,y_0)=0,\ f_y(x_0,y_0)=0.$$

令$f_{xx}(x_0,y_0)=A$，$f_{xy}(x_0,y_0)=B$，$f_{yy}(x_0,y_0)=C$，那么

(1) 当$AC-B^2>0$时，函数$f(x,y)$在(x_0,y_0)处有极值，且当$A>0$时有极小值$f(x_0,y_0)$，$A<0$时有极大值$f(x_0,y_0)$；

(2) 当$AC-B^2<0$时，函数$f(x,y)$在(x_0,y_0)处没有极值；

(3) 当$AC-B^2=0$时，函数$f(x,y)$在(x_0,y_0)处可能有极值也可能没有极值，此时该判别方法失效。

多元函数的极值计算方法

根据上述两个定理，若函数$f(x, y)$具有二阶连续偏导函数，则求$z = f(x, y)$的极值的一般步骤如下：

根据上述两个定理，若函数$f(x,y)$具有二阶连续偏导函数，则求$z=f(x,y)$的极值的一般步骤如下：

(1) 求解方程组$f_x(x,y)=0, f_y(x,y)=0$，找出$f(x,y)$在定义域内的所有驻点；

根据上述两个定理，若函数$f(x,y)$具有二阶连续偏导函数，则求$z=f(x,y)$的极值的一般步骤如下：

(1) 求解方程组$f_x(x,y)=0, f_y(x,y)=0$，找出$f(x,y)$在定义域内的所有驻点；

(2) 计算函数$f(x,y)$的二阶偏导函数并依次确定各驻点处A,B,C的值，根据$AC-B^2$的符号判定驻点是否为极值点；

根据上述两个定理，若函数$f(x,y)$具有二阶连续偏导函数，则求$z=f(x,y)$的极值的一般步骤如下：

(1) 求解方程组$f_x(x,y)=0, f_y(x,y)=0$，找出$f(x,y)$在定义域内的所有驻点；
(2) 计算函数$f(x,y)$的二阶偏导函数并依次确定各驻点处A,B,C的值，根据$AC-B^2$的符号判定驻点是否为极值点；
(3) 如果驻点是极值点，那么计算函数$f(x,y)$对应在极值点处的极值。

根据上述两个定理，若函数$f(x,y)$具有二阶连续偏导函数，则求$z=f(x,y)$的极值的一般步骤如下：

(1) 求解方程组$f_x(x,y)=0, f_y(x,y)=0$，找出$f(x,y)$在定义域内的所有驻点；
(2) 计算函数$f(x,y)$的二阶偏导函数并依次确定各驻点处A,B,C的值，根据$AC-B^2$的符号判定驻点是否为极值点；
(3) 如果驻点是极值点，那么计算函数$f(x,y)$对应在极值点处的极值。

例 4

计算函数$f(x,y)=(x-1)^2+(y-4)^2$的极值。

根据上述两个定理，若函数$f(x,y)$具有二阶连续偏导函数，则求$z=f(x,y)$的极值的一般步骤如下：

(1) 求解方程组$f_x(x,y)=0, f_y(x,y)=0$，找出$f(x,y)$在定义域内的所有驻点；
(2) 计算函数$f(x,y)$的二阶偏导函数并依次确定各驻点处A,B,C的值，根据$AC-B^2$的符号判定驻点是否为极值点；
(3) 如果驻点是极值点，那么计算函数$f(x,y)$对应在极值点处的极值。

例 4

计算函数$f(x,y)=(x-1)^2+(y-4)^2$的极值。

例 5

计算函数$f(x,y)=3xy-x^3-y^3$的极值。

根据上述两个定理，若函数$f(x,y)$具有二阶连续偏导函数，则求$z=f(x,y)$的极值的一般步骤如下：

(1) 求解方程组$f_x(x,y)=0, f_y(x,y)=0$，找出$f(x,y)$在定义域内的所有驻点；

(2) 计算函数$f(x,y)$的二阶偏导函数并依次确定各驻点处A,B,C的值，根据$AC-B^2$的符号判定驻点是否为极值点；

(3) 如果驻点是极值点，那么计算函数$f(x,y)$对应在极值点处的极值。

例 4

计算函数$f(x,y)=(x-1)^2+(y-4)^2$的极值。

例 5

计算函数$f(x,y)=3xy-x^3-y^3$的极值。

例 6

计算函数$f(x,y)=x^3-y^3+3x^2+3y^2-9x$的极值。

注

- 讨论函数的极值问题时如果函数在所讨论的区域内具有偏导函数，那么由定理的充分条件可知，极值只能在驻点处取得。
- 然而，如果函数在个别处的偏导数不存在，这些点当然不是驻点，但有可能是极值点。例如函数$z=-\sqrt{x^2+y^2}$在点$(0,0)$处的偏导数值不存在，但该函数在此点处具有极大值。
- 在考虑多元函数的极值问题时，除了考虑函数的驻点外，我们也应当考虑那些偏导数值不存在的点。

多元函数的最值

由有界闭区域上连续函数的性质可知，如果函数$z = f(x, y)$在闭区域上连续，那么它在闭区域上一定有最大值和最小值。

多元函数的最值

由有界闭区域上连续函数的性质可知，如果函数$z = f(x, y)$在闭区域上连续，那么它在闭区域上一定有最大值和最小值。 借助多元函数极值的寻求方法，寻求函数$f(x, y)$的最大值和最小值的一般步骤如下：

由有界闭区域上连续函数的性质可知，如果函数$z = f(x, y)$在闭区域上连续，那么它在闭区域上一定有最大值和最小值。 借助多元函数极值的寻求方法，寻求函数$f(x, y)$的最大值和最小值的一般步骤如下：

(1) 求函数$f(x, y)$在D内所有驻点处的函数值；

由有界闭区域上连续函数的性质可知，如果函数$z=f(x,y)$在闭区域上连续，那么它在闭区域上一定有最大值和最小值。 借助多元函数极值的寻求方法，寻求函数$f(x,y)$的最大值和最小值的一般步骤如下：

(1) 求函数$f(x,y)$在D内所有驻点处的函数值；

(2) 求$f(x,y)$在D的边界上的最大值和最小值；

由有界闭区域上连续函数的性质可知，如果函数$z=f(x,y)$在闭区域上连续，那么它在闭区域上一定有最大值和最小值。 借助多元函数极值的寻求方法，寻求函数$f(x,y)$的最大值和最小值的一般步骤如下：

(1) 求函数$f(x,y)$在D内所有驻点处的函数值；

(2) 求$f(x,y)$在D的边界上的最大值和最小值；

(3) 将前两步得到的所有函数值进行比较，其中最大者即为最大值，最小者即为最小值；

由有界闭区域上连续函数的性质可知，如果函数$z = f(x, y)$在闭区域上连续，那么它在闭区域上一定有最大值和最小值。借助多元函数极值的寻求方法，寻求函数$f(x, y)$的最大值和最小值的一般步骤如下：

(1) 求函数$f(x, y)$在D内所有驻点处的函数值；

(2) 求$f(x, y)$在D的边界上的最大值和最小值；

(3) 将前两步得到的所有函数值进行比较，其中最大者即为最大值，最小者即为最小值；

(4) 判断出函数$f(x, y)$的最值一定在D的内部取得，而函数$f(x, y)$在D内只有一个驻点，那么我们可以肯定该驻点处的函数值就是函数$f(x, y)$在D上的最值。

由有界闭区域上连续函数的性质可知，如果函数$z=f(x,y)$在闭区域上连续，那么它在闭区域上一定有最大值和最小值。借助多元函数极值的寻求方法，寻求函数$f(x,y)$的最大值和最小值的一般步骤如下：

(1) 求函数$f(x,y)$在D内所有驻点处的函数值；

(2) 求$f(x,y)$在D的边界上的最大值和最小值；

(3) 将前两步得到的所有函数值进行比较，其中最大者即为最大值，最小者即为最小值；

(4) 判断出函数$f(x,y)$的最值一定在D的内部取得，而函数$f(x,y)$在D内只有一个驻点，那么我们可以肯定该驻点处的函数值就是函数$f(x,y)$在D上的最值。

例 7

计算函数$f(x,y)=x^2-2xy+2y$在矩形域$D=\{(x,y)|0\le x\le 3,0\le y\le 2\}$上的最大值和最小值。

由有界闭区域上连续函数的性质可知，如果函数$z=f(x,y)$在闭区域上连续，那么它在闭区域上一定有最大值和最小值。借助多元函数极值的寻求方法，寻求函数$f(x,y)$的最大值和最小值的一般步骤如下：

(1) 求函数$f(x,y)$在D内所有驻点处的函数值；

(2) 求$f(x,y)$在D的边界上的最大值和最小值；

(3) 将前两步得到的所有函数值进行比较，其中最大者即为最大值，最小者即为最小值；

(4) 判断出函数$f(x,y)$的最值一定在D的内部取得，而函数$f(x,y)$在D内只有一个驻点，那么我们可以肯定该驻点处的函数值就是函数$f(x,y)$在D上的最值。

例 7

计算函数$f(x,y)=x^2-2xy+2y$在矩形域$D=\{(x,y)|0\leq x\leq 3,0\leq y\leq 2\}$上的最大值和最小值。

条件极值问题

计算平面$2x+y-z-5=0$上到坐标原点最近的点的坐标。

条件极值问题

计算平面$2x+y-z-5=0$上到坐标原点最近的点的坐标。

条件极值问题

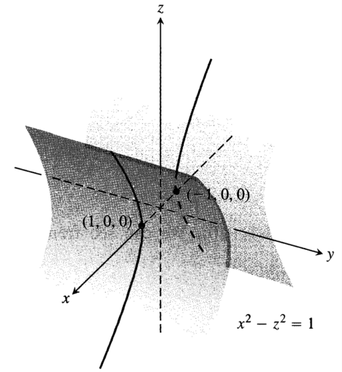
计算双曲柱面$x^2-z^2-1=0$上到坐标原点最近的点的坐标。

条件极值问题

计算平面$2x+y-z-5=0$上到坐标原点最近的点的坐标。

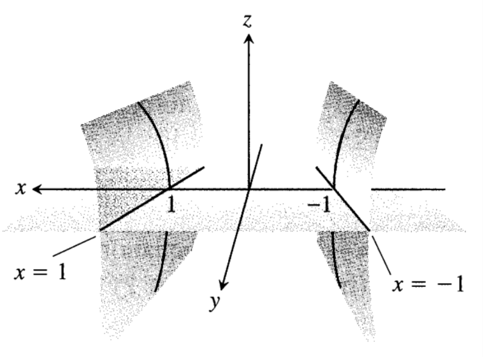
条件极值问题

计算双曲柱面$x^2-z^2-1=0$上到坐标原点最近的点的坐标。



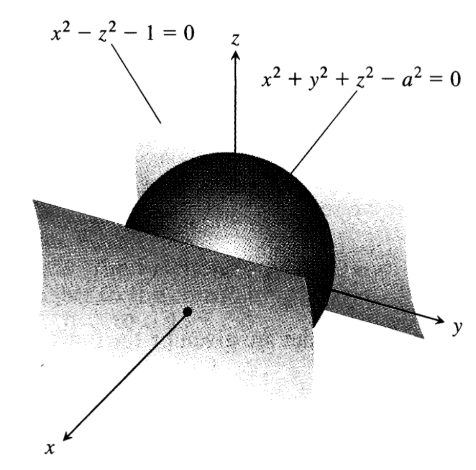
条件极值问题

计算双曲柱面$x^2 - z^2 - 1 = 0$上到坐标原点最近的点的坐标。



条件极值问题

计算双曲柱面$x^2 - z^2 - 1 = 0$上到坐标原点最近的点的坐标。



定理 (正交梯度定理)

设函数$u = f(x, y, z)$在区域D内可微且D的内部包含曲线

$$\Gamma: \ \boldsymbol{r} = \boldsymbol{f}(t) = f_1(t)\boldsymbol{i} + f_2(t)\boldsymbol{j} + f_3(t)\boldsymbol{k}.$$

如果函数f在限制区域D的某个点$P_0 \in \Gamma$处取得极值，那么其梯度∇f在点P_0处与曲线Γ正交。

定理 (正交梯度定理)

设函数$u=f(x,y,z)$在区域D内可微且D的内部包含曲线

$$\Gamma:\ \boldsymbol{r}=\boldsymbol{f}(t)=f_1(t)\boldsymbol{i}+f_2(t)\boldsymbol{j}+f_3(t)\boldsymbol{k}.$$

如果函数f在限制区域D的某个点$P_0\in\Gamma$处取得极值，那么其梯度∇f在点P_0处与曲线Γ正交。

推论

设函数$z=f(x,y)$在区域D内可微且D的内部包含曲线

$$\Gamma:\ \boldsymbol{r}=\boldsymbol{f}(t)=f_1(t)\boldsymbol{i}+f_2(t)\boldsymbol{j}.$$

如果函数f在限制区域D的某个点$P_0\in\Gamma$处取得极值，那么其梯度∇f在点P_0处满足$\nabla f\cdot\boldsymbol{r}'=0$。

Lanrange乘数法：单一限制条件

设目标函数$f(x, y, z)$和限制条件函数表达式$g(x, y, z)$可微。

- 为了寻找函数f限制在g上的极值，极值点(x, y, z)和乘数λ需要同时满足

$$\nabla f = \lambda \nabla g \quad \text{并且} \quad g(x, y, z) = 0.$$

Lanrange乘数法：单一限制条件

设目标函数$f(x, y, z)$和限制条件函数表达式$g(x, y, z)$可微。

- 为了寻找函数f限制在g上的极值，极值点(x, y, z)和乘数λ需要同时满足

$$\nabla f = \lambda \nabla g \quad \text{并且} \quad g(x, y, z) = 0.$$

- 类似地，对于可微的二元变量目标函数$f(x, y)$及限制条件函数表达式$g(x, y)$，极值点(x, y)和乘数λ需要同时满足

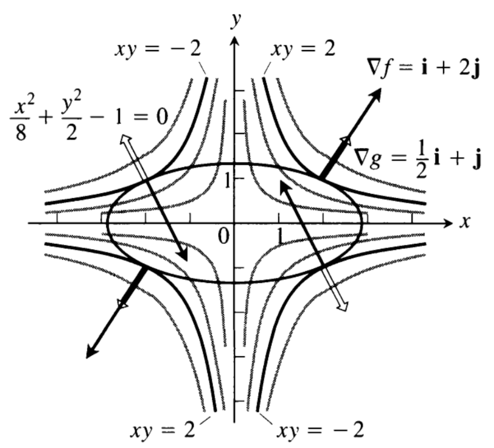
$$\nabla f = \lambda \nabla g \quad \text{并且} \quad g(x, y) = 0.$$

例 8

计算函数$f(x,y)=xy$限制在椭圆$\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{2}=1$上的极值。

例 8

计算函数$f(x,y)=xy$限制在椭圆$\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{2}=1$上的极值。

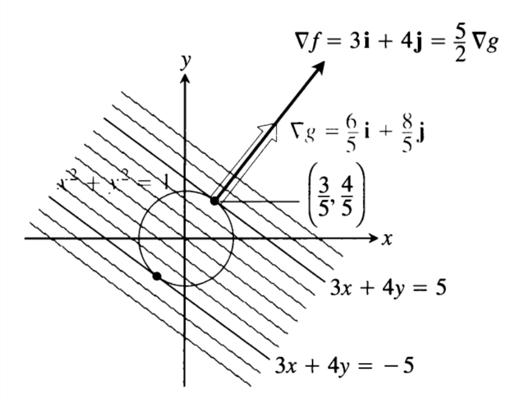


例 9

计算函数$f(x,y)=3x+4y$限制在圆$x^2+y^2=1$上的极值。

例 9

计算函数$f(x,y)=3x+4y$限制在圆$x^2+y^2=1$上的极值。



Lanrange乘数法：多限制条件

设目标函数$f(x,y,z)$和限制条件函数表达式$g_1(x,y,z), g_2(x,y,z)$可微并且$\nabla g_1, \nabla g_2$不共线。
为了寻找函数f限制在g_1, g_2上的极值，极值点(x,y,z)和乘数λ, μ需要同时满足

$$\nabla f = \lambda \nabla g_1 + \mu \nabla g_2 \quad \text{并且} \quad g_1(x,y,z) = 0,\ g_2(x,y,z) = 0.$$

Lanrange乘数法：多限制条件

Lanrange乘数法：多限制条件

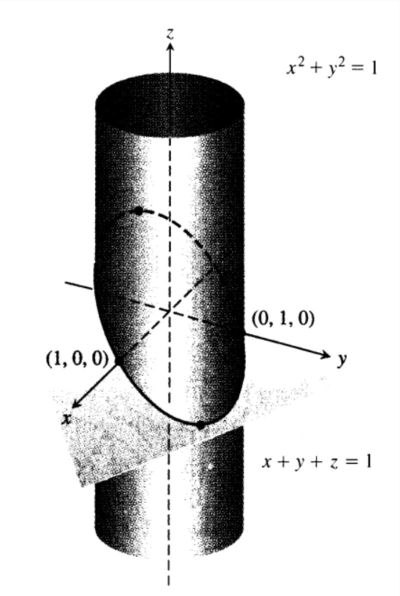
设目标函数$f(x,y,z)$和限制条件函数表达式$g_1(x,y,z), g_2(x,y,z)$可微并且$\nabla g_1, \nabla g_2$不共线。
为了寻找函数f限制在g_1, g_2上的极值，极值点(x,y,z)和乘数λ, μ需要同时满足

$$\nabla f = \lambda \nabla g_1 + \mu \nabla g_2 \quad \text{并且} \quad g_1(x,y,z) = 0,\ g_2(x,y,z) = 0.$$

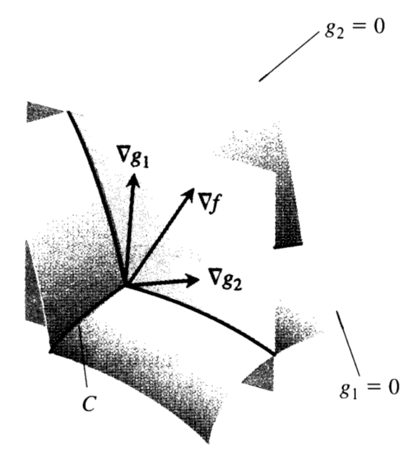
例 10

已知平面$x+y+z=1$可以截取柱面$x^2+y^2=1$为一个椭圆，寻找这个椭圆上距离坐标原点最近及最远的点。

引例



Lanrange乘数法：多限制条件(几何直观图)



二元函数Taylor公式*

如果一个二元函数$F(x,y)$具有高阶连续偏导函数，那么我们可以将微分符号D看作是算子，此时我们可以定义微分算子多项式$P(D)$，其中$P=P_n$是数域$\mathbb{K}$上的n次多项式。

如果一个二元函数$F(x, y)$具有高阶连续偏导函数，那么我们可以将微分符号D看作是算子，此时我们可以定义微分算子多项式$P(D)$，其中$P = P_n$是数域$\mathbb{K}$上的n次多项式。例如：

二元函数Taylor公式*

如果一个二元函数$F(x,y)$具有高阶连续偏导函数，那么我们可以将微分符号D看作是算子，此时我们可以定义微分算子多项式$P(D)$，其中$P = P_n$是数域$\mathbb{K}$上的n次多项式。例如：

- Laplace算子：$\Delta := \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}$;

二元函数Taylor公式*

如果一个二元函数$F(x,y)$具有高阶连续偏导函数，那么我们可以将微分符号D看作是算子，此时我们可以定义微分算子多项式$P(D)$，其中$P=P_n$是数域$\mathbb{K}$上的n次多项式。例如：

- Laplace算子：$\Delta := \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}$；
- 二阶微分算子可以对应完全平方多项式：

$$\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 = h^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}+2hk\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}+k^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

如果一个二元函数$F(x,y)$具有高阶连续偏导函数，那么我们可以将微分符号D看作是算子，此时我们可以定义微分算子多项式$P(D)$，其中$P=P_n$是数域$\mathbb{K}$上的n次多项式。例如：

- Laplace算子：$\Delta := \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}$;
- 二阶微分算子可以对应完全平方多项式：

$$\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 = h^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}+2hk\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}+k^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

如果我们设$F(t)=f(a+ht,b+kt)$，$(a,b)\in\mathbb{R}^2$，且二元函数$f(x,y)$的高阶偏导函数存在那么

$$F^{(n)}(t)=\frac{d^n}{dt^n}F(t)=\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(x,y).$$

定理 (二元函数$f(x,y)$在点(a,b)处的Taylor公式)

设函数$f(x,y)$在以点(a,b)为中心的开矩形区域R上具有直至$n+1$阶连续偏导函数，那么在R上

$$\begin{aligned} f(a+h,b+k) = {} & f(a,b) + (hf_x + kf_y)\big|_{(a,b)} + \frac{1}{2!}(h^2 f_{xx} + 2hk f_{xy} + k^2 f_{yy})\big|_{(a,b)} \\ & + \frac{1}{3}(h^3 f_{xxx} + 3h^2 k f_{xxy} + 3hk^2 f_{xyy} + k^3 f_{yyy})\big|_{(a,b)} + \cdots \\ & + \frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f\Bigg|_{(a,b)} \\ & + \frac{1}{(n+1)!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1} f\Bigg|_{(a+ch,b+ck)} \qquad ((a+ch,b+ck) \in R). \end{aligned}$$

二元函数Taylor公式*

定理 (二元函数$f(x,y)$在原点处的Taylor公式)

设函数$f(x,y)$在以原点为中心的开矩形区域R上具有直至$n+1$阶连续偏导函数，那么

$$\begin{aligned} f(x,y) = {} & f(0,0) + (xf_x + yf_y)|_{(0,0)} + \frac{1}{2!}(x^2 f_{xx} + 2xyf_{xy} + y^2 f_{yy})|_{(0,0)} \\ & + \frac{1}{3}(x^3 f_{xxx} + 3x^2 y f_{xxy} + 3xy^2 f_{xyy} + y^3 f_{yyy})|_{(0,0)} + \cdots \\ & + \frac{1}{n!}\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f\Bigg|_{(0,0)} \\ & + \frac{1}{(n+1)!}\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1} f\Bigg|_{(cx,cy)} \qquad ((cx,cy) \in R). \end{aligned}$$

The End