

习题 1 请证明以下Riemann积分的Schwartz不等式: 设函数 f, g 在 $[a, b]$ 上Riemann可积, 那么

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx \right)^2 \leq \int_a^b f^2(x)dx \int_a^b g^2(x)dx.$$

更多地, 如果函数 f, g 在区间 $[a, b]$ 上连续, 那么上述不等式等号成立当且仅当存在一组常数 λ_1, λ_2 使得 $|\lambda_1| + |\lambda_2| > 0$ 且对任意 $x \in [a, b]$, $\lambda_1 f(x) = \lambda_2 g(x)$.

习题 2 设函数 f 在 $[a, b]$ 上Riemann可积, 证明

$$\left(\int_a^b f(x) \sin x dx \right)^2 + \left(\int_a^b f(x) \cos x dx \right)^2 \leq (b-a) \int_a^b f^2(x)dx.$$

习题 3 设正函数 f 在 $[a, b]$ 上Riemann可积, 证明

$$(b-a)^2 \leq \int_a^b f(x)dx \int_a^b \frac{dx}{f(x)}.$$

习题 4 设函数 f 在 $[a, b]$ 上一阶连续可微, $f(a) = f(b) = 0$ 且 $\int_a^b f^2(x)dx = 1$. 证明

$$\int_a^b x f(x) f'(x) dx = -\frac{1}{2}, \text{ 且 } \frac{1}{4} \leq \int_a^b (f'(x))^2 dx \int_a^b x^2 f^2(x)dx.$$

习题 5* 设函数 f 在 $[0, 1]$ 上Riemann可积且对任意 $x \in [0, 1]$, $|f(x)| \leq 1$, 证明

$$\int_0^1 \sqrt{1 - f^2(x)} dx \leq \sqrt{1 - \left(\int_0^1 f(x)dx \right)^2}.$$

习题 6*** 设非负函数 f_1, f_2, \dots, f_n 在 $[a, b]$ 上Riemann可积, 那么对正实数 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 满足条件 $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$, 证明下列积分形式的Hölder不等式

$$\int_a^b \prod_{i=1}^n f_i^{\alpha_i}(x)dx \leq \prod_{i=1}^n \left(\int_a^b f_i(x)dx \right)^{\alpha_i}.$$

习题 7*** 设非负函数 f_1, f_2, \dots, f_n 在 $[a, b]$ 上Riemann可积, 证明下列积分形式的Minkowski不等式

$$\left(\int_a^b \left(\sum_{i=1}^n f_i(x) \right)^p dx \right)^{1/p} \leq \sum_{i=1}^n \left(\int_a^b f_i^p(x)dx \right)^{1/p}.$$

姓名:

学号:

专业:

高等数学 积分不等式
