

**习题 1** 请计算以下极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos x\right)}{\sin(\sin x)}; \quad (2) \lim_{x \rightarrow 0} \left( x^2 \left( 1 + 2 + 3 + \cdots + \left[ \frac{1}{|x|} \right] \right) \right).$$

**习题 2** 设  $a > 1$  及  $\alpha \in \mathbb{R}$ , 请证明 (1)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a^x}{x} = +\infty$ ; (2)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a^x}{x^\alpha} = +\infty$ .

**习题 3** 请证明  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0$ , 其中  $\alpha > 0$ .

**习题 4** 计算下列极限:

$$\begin{array}{lll} (1) \lim_{x \rightarrow \infty} (\ln x)^{1/x}; & (2) \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\sin x}; & (3) \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{1/\sin^2 x}; \\ (4) \lim_{x \rightarrow \infty} (e^x - 1)^{1/x}; & (5) \lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin x)^{1/\ln x}. \end{array}$$

**习题 5** 计算下列极限:

$$\begin{array}{ll} (1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x + 2 \arctan 3x + 3x^2}{\ln(1 + 3x + \sin^2 x) + xe^x}; & (2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x}{\tan x^2}; \\ (3) \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x^2)^{\cot x}; & (4) \lim_{x \rightarrow \infty} x \left( \ln \left( 1 + \frac{x}{2} \right) - \ln \frac{x}{2} \right). \end{array}$$

**习题 6\*** 设函数  $f$  在  $x = 0$  处的某个邻域内满足  $f(x) \geq |x|^\alpha$ ,  $\frac{1}{2} < \alpha < 1$  且  $f(x)f(2x) \leq |x|$ , 请验证  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ .

**习题 7\*** 设单调函数  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  满足  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(2x)}{f(x)} = 1$ . 证明对任意  $c > 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(cx)}{f(x)} = 1$ .

姓名:

学号:

专业:

高等数学 函数极限

---