AMS

无穷级数

常数项级数的概念与性质

课前导读

我们来计算下列和式：

课前导读

我们来计算下列和式:

$$1+2=3,\quad 1+2+3=6,\quad 1+2+3+4=10,\quad \cdots,$$

$$\Longrightarrow 1+2+3+4+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

课前导读

我们来计算下列和式:

$$1+2=3,\quad 1+2+3=6,\quad 1+2+3+4=10,\quad \cdots,$$

$$\Longrightarrow 1+2+3+4+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

$$1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2},\quad 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}=\frac{7}{4},\quad \cdots,$$

$$\Longrightarrow 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}=\frac{1\cdot\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}{\frac{1}{2}}.$$

课前导读

我们来计算下列和式：

$$1+2=3,\quad 1+2+3=6,\quad 1+2+3+4=10,\quad \cdots,$$

$$\Longrightarrow 1+2+3+4+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

$$1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2},\quad 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}=\frac{7}{4},\quad \cdots,$$

$$\Longrightarrow 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}=\frac{1\cdot\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}{\frac{1}{2}}.$$

问题：如果“无限项”相加会是什么样的结果呢？

课前导读

如果把数列前n项和的极限，作为数列“无限项”相加的和，则可以得到

如果把数列前n项和的极限，作为数列“无限项”相加的和，则可以得到

$$1+2+3+4+\cdots+n+\cdots=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2}=\infty,$$

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots=\lim_{n\to\infty}2\cdot\left(1-\frac{1}{2^n}\right)=2.$$

课前导读

如果把数列前n项和的极限，作为数列“无限项”相加的和，则可以得到

$$1+2+3+4+\cdots+n+\cdots=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2}=\infty,$$

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots=\lim_{n\to\infty}2\cdot\left(1-\frac{1}{2^n}\right)=2.$$

第一个极限不存在，因此“和”不存在；第二个极限存在，因此“和”为2。

定义

设有数列$\{a_n\}(n=1,2,\cdots)$，将$\{a_n\}$中的各项用加号连接的形式

$$a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots$$

称为**常数项无穷级数**，简称级数，记为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$，第$n$项$a_n$称为级数的**一般项**（通项）。

定义

对数列$\{a_n\}(n=1,2,\cdots)$，取它的前n项的和

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k,$$

S_n称为级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$的**部分和**。

定义

- 若级数的部分和数列S_n有极限S，即$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$，则称无穷级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$**收敛**，同时称极限$S$就叫作无穷级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$**的和**，并写成

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S.$$

常数项级数的概念

定义

- 若级数的部分和数列S_n有极限S，即$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$，则称无穷级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$**收敛**，同时称极限$S$就叫作无穷级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$的**和**，并写成

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S.$$

- 若数列S_n没有极限，则称无穷级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$**发散**。

讨论无穷级数的收敛问题，实际上就是讨论部分和数列的极限是否存在:

讨论无穷级数的收敛问题，实际上就是讨论部分和数列的极限是否存在:

- 一方面，由级数的收敛定义可知，若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$的部分和数列$\{S_n\}$满足$\lim_{n\to\infty} S_n = S$，则级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛且和为$S$；

讨论无穷级数的收敛问题，实际上就是讨论部分和数列的极限是否存在:

- 一方面，由级数的收敛定义可知，若$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$的部分和数列$\{S_n\}$满足$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$，则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$收敛且和为$S$；
- 另一方面，若给出一个数列S_n，令

$$a_1 = S_1, \quad a_n = S_n - S_{n-1} \quad \cdots ,$$

则该级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$的部分和数列为$\{S_n\}$。因此，若$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$，则

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S_1 + \sum_{n=2}^{\infty} (S_n - S_{n-1})$$

收敛且和为S。

常数项级数的概念

当级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$收敛时，部分和$S_n$为级数和$S$的近似值，它们之间的差

$$r_n = S - S_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$$

叫作级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$的**余项**。

当级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$收敛时，部分和$S_n$为级数和$S$的近似值，它们之间的差

$$r_n = S - S_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$$

叫作级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$的**余项**。

r_n还是一个无穷级数，且

$$\lim_{n\to\infty} r_n = \lim_{n\to\infty} (S - S_n) = 0.$$

引例

例 1

讨论级数（等比级数）

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^n + \cdots (a \neq 0)$$

的收敛性。

例 2

验证下列级数发散:

$$1+2+3+4+\cdots+n+\cdots$$

引例

例 2

验证下列级数发散：

$$1+2+3+4+\cdots+n+\cdots$$

例 3

验证下列级数收敛：

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}+\cdots$$

例 4

判定下列级数的敛散性: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$.

例 5

判定下列级数的敛散性: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$.

例 4

判定下列级数的敛散性： $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$.

例 5

判定下列级数的敛散性： $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$.

例 6

证明调和级数

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$$

是发散的。

收敛级数的基本性质

性质1（线性性质）

若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$， $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$收敛，其和分别为$A$，$B$。则对任何$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$，级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha a_n \pm \beta b_n)$$

收敛，并且有

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha a_n \pm \beta b_n) = \alpha\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right) \pm \beta\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n\right) = \alpha A \pm \beta B.$$

性质1（线性性质）

若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$，$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$收敛，其和分别为A，B。则对任何$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$，级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha a_n \pm \beta b_n)$$

收敛，并且有

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha a_n \pm \beta b_n) = \alpha\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right) \pm \beta\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n\right) = \alpha A \pm \beta B.$$

只需将线性运算操作于部分和：

$$\lim_{n\to\infty}(\alpha A_n \pm \beta B_n) = \alpha \lim_{n\to\infty} A_n \pm \beta \lim_{n\to\infty} B_n = \alpha A \pm \beta B.$$

推论 1

- 若$\alpha \neq 0$，则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$和$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha a_n$具有相同敛散性；
- 若$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$收敛、$\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$发散，则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n)$发散。

收敛级数的基本性质

推论 1

- 若$\alpha \neq 0$，则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$和$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha a_n$具有相同敛散性；
- 若$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$收敛、$\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$发散，则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n)$发散。

例 7

求级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left[\dfrac{1}{2^n} + \dfrac{3}{n(n+1)}\right]$的和。

推论 1

- 若$\alpha \neq 0$，则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$和$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha a_n$具有相同敛散性；
- 若$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$收敛、$\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$发散，则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n)$发散。

例 7

求级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left[\dfrac{1}{2^n} + \dfrac{3}{n(n+1)}\right]$的和。

例 8

讨论级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{1}{2^n} - \dfrac{2}{n}\right)$的敛散性。

性质 2（级数收敛的必要条件）

如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，那么 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$。

性质 2（级数收敛的必要条件）

如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$收敛，那么 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$。

由于

$$a_1 = S_1, \quad a_n = S_n - S_{n-1},$$

所以

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = 0.$$

性质 2（级数收敛的必要条件）

如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛，那么 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$。

由于

$$a_1 = S_1, \quad a_n = S_n - S_{n-1},$$

所以

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = 0.$$

推论 2（判断级数发散的工具）

如果 $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$，那么级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$发散。

例 9

取级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{n+1}$，

$$|a_n| = \left|(-1)^{n-1}\frac{n}{n+1}\right| = \frac{n}{n+1} \to 1 \quad (n \to \infty),$$

即 $\lim_{n\to\infty}|a_n| \neq 0$，原级数发散。

例 9

取级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{n+1}$，

$$|a_n| = \left|(-1)^{n-1}\frac{n}{n+1}\right| = \frac{n}{n+1} \to 1 \quad (n\to\infty),$$

即 $\lim_{n\to\infty}|a_n| \neq 0$，原级数发散。

注

一般项趋于零不是级数收敛的充分条件。事实上许多发散的级数的一般项是趋于零的，例如 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ 但是调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散。

收敛级数的基本性质

性质 3

改变级数中有限项的值不会改变级数的收敛性。

性质 3

改变级数中有限项的值不会改变级数的收敛性。

改变级数中有限项的值，对应操作产生新的部分和也只是原部分和有限项的改变，因此新部分和的收敛性不会改变，所以新级数的收敛性不会改变。

性质 3

改变级数中有限项的值不会改变级数的收敛性。

改变级数中有限项的值，对应操作产生新的部分和也只是原部分和有限项的改变，因此新部分和的收敛性不会改变，所以新级数的收敛性不会改变。

推论 3

级数中去掉或增加有限多项不改变级数的收敛性。

常数项级数的审敛准则

课前导读

对于一个级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$，我们主要关心以下两个问题：

- 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$是否收敛？
- 当级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$收敛时，如何求它的和？

课前导读

对于一个级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$，我们主要关心以下两个问题：

- 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$是否收敛？
- 当级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛时，如何求它的和？

一般情况下，利用定义和性质来判断级数的收敛性是比较困难的，我们能否找到简单有效的判别方法呢？

正项级数的概念

定义

当$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$各项都是大于或等于零的常数时，称$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$为正项级数。

正项级数的概念

定义

当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 各项都是大于或等于零的常数时，称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 为正项级数。

正项级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots ,$$

满足

$$a_n \geq 0, \quad S_1 \leq S_2 \leq \cdots \leq S_n \leq \cdots .$$

因此我们得到一个单调递增的数列$\{S_n\}$。

正项级数收敛的基本定理

一方面，如果数列$\{S_n\}$有上界，即

$$\exists\, M \geq 0, \quad s.t., \quad S_n \leq M, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

由单调有界定理，数列$\{S_n\}$收敛，这说明正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$收敛。

正项级数收敛的基本定理

一方面，如果数列$\{S_n\}$有上界，即

$$\exists\, M \geq 0, \quad s.t., \quad S_n \leq M, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

由单调有界定理，数列$\{S_n\}$收敛，这说明正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$收敛。

另一方面，正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$收敛，那么$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$，因此$\{S_n\}$为有界数列。

一方面，如果数列$\{S_n\}$有上界，即

$$\exists\, M \geq 0, \quad s.t., \quad S_n \leq M, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

由单调有界定理，数列$\{S_n\}$收敛，这说明正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$收敛。

另一方面，正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$收敛，那么$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$，因此$\{S_n\}$为有界数列。

定理 (正项级数收敛的基本定理)

$$\text{正项级数}\sum_{n=1}^{\infty} a_n\text{收敛} \quad \Longleftrightarrow \quad \text{部分和数列}\{S_n\}\text{有界}.$$

例 1

证明下列正项级数收敛：

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

例 1

证明下列正项级数收敛：

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

我们可以用同样的方法证明：对任意的$p > 1$，正项级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

都是收敛的。

定理 (比较审敛法)

设正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$满足

$$a_n \leq b_n, \quad n = 1, 2, \cdots .$$

- 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$收敛，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$也收敛；
- 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$发散，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$也发散。

例 2

判定下列正项级数的敛散性：

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3+1}.$$

引例

例 2

判定下列正项级数的敛散性：

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3+1}.$$

例 3

证明当$0 < p < 1$时，下列正项级数发散：

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}.$$

例 2

判定下列正项级数的敛散性：

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3+1}.$$

例 3

证明当$0 < p < 1$时，下列正项级数发散：

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}.$$

我们称级数$\zeta(p) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}\ (p > 0)$为黎曼级数。

比较审敛法的广义形式

注

比较审敛定理也可写成：正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$满足

$$\exists\, C>0,\quad N\in\mathbb{N},\quad s.t.,\quad a_n\le Cb_n,\quad \forall\, n\ge N.$$

则

- 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$收敛，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$也收敛；
- 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$发散，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$也发散。

引例

对一给定的正项级数，如果要用比较审敛定理来判别其收敛性，需要找到另一个已知级数与其进行比较。

对一给定的正项级数，如果要用比较审敛定理来判别其收敛性，需要找到另一个已知级数与其进行比较。

目前我们已知的收敛级数包括几何级数及黎曼级数($p > 1$)。

例 4

判定下列级数的敛散性：

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n^2+1)}}.$$

引例

对一给定的正项级数，如果要用比较审敛定理来判别其收敛性，需要找到另一个已知级数与其进行比较。

目前我们已知的收敛级数包括几何级数及黎曼级数($p > 1$)。

例 4

判定下列级数的敛散性：

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n^2+1)}}.$$

例 5

判定下列级数的敛散性：

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}.$$

比较审敛法的极限形式

有时直接建立级数通项之间的比较不等式很困难，我们给出比较审敛定理的极限形式：

比较审敛法的极限形式

有时直接建立级数通项之间的比较不等式很困难，我们给出比较审敛定理的极限形式：

推论 1

正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$满足

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \ell.$$

则

- 若$0 < \ell < +\infty$，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$同敛散；
- 若$\ell = 0$且级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$收敛，则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$也收敛；
- 若$\ell = +\infty$且级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$发散，则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$也发散。

例 6

判定下列级数的敛散性：

$$(1)\ \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right); \quad (2)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}.$$

例 6

判定下列级数的敛散性：

$$(1)\ \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right);\quad (2)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}.$$

例 7

判定下列级数的敛散性：

$$(1)\ \sum_{n=1}^{\infty} \left(1-\cos\frac{1}{n}\right);\quad (2)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n-2^n}.$$

正项级数的比式判别法

使用比较审敛定理或其极限形式，需要找到一个已知级数作比较。

正项级数的比式判别法

使用比较审敛定理或其极限形式，需要找到一个已知级数作比较。当我们很难找到比较级数时，我们需要利用级数自身的特点来判断级数的收敛性：

正项级数的比式判别法

使用比较审敛定理或其极限形式，需要找到一个已知级数作比较。当我们很难找到比较级数时，我们需要利用级数自身的特点来判断级数的收敛性：

定理 (d'Alembert比式判别法)

正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$满足 $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell$。

- $\ell < 1$时，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛；
- $\ell > 1$时，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$发散；
- $\ell = 1$时，无法判断 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$敛散性，判别法失效；

例 8

判定下列级数的敛散性:

$$(1)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!};\quad (2)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{10^n};\quad (3)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n(2n-1)};$$

$$(4)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{2^n};\quad (5)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n};\quad (6)\ \sum_{n=1}^{\infty}n!\left(\frac{x}{n}\right)^n\ (x\geq 0).$$

例 9

判定下列级数的敛散性：

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\left(2+\frac{1}{n}\right)^n}.$$

引例

例 9

判定下列级数的敛散性：

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\left(2+\frac{1}{n}\right)^n}.$$

例 10

判定下列级数的敛散性：

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!a^n}{n^n}\ (a>0).$$

正项级数的根式判别法

除比式外，我们还可以使用正项级数通项的根式来判断级数的收敛性：

除比式外，我们还可以使用正项级数通项的根式来判断级数的收敛性：

定理 (Cauchy根式判别法)

正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$满足$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \ell$。

- $\ell < 1$时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$收敛；
- $\ell > 1$时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$发散；
- $\ell = 1$时，无法判断$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$敛散性，判别法失效；

例 11

判定下列级数的敛散性：

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n^s}\,(s > 0, \alpha > 0).$$

例 11

判定下列级数的敛散性：

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n^s} \, (s > 0, \alpha > 0).$$

例 12

判定下列级数的敛散性：

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 + (-1)^n}{3^n}.$$

我们进一步讨论关于一般常数项级数收敛性的判别法。

交错级数及其审敛性

我们进一步讨论关于一般常数项级数收敛性的判别法。一般常数项级数是指级数的各项可以是正数、负数或零。

交错级数及其审敛性

我们进一步讨论关于一般常数项级数收敛性的判别法。一般常数项级数是指级数的各项可以是正数、负数或零。以下我们先来讨论交错级数，再讨论一般常数项级数。

我们进一步讨论关于一般常数项级数收敛性的判别法。一般常数项级数是指级数的各项可以是正数、负数或零。以下我们先来讨论交错级数，再讨论一般常数项级数。

定义

设$a_n \geq 0(n=1,2,\cdots)$，称$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$或$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$为**交错级数**。

我们进一步讨论关于一般常数项级数收敛性的判别法。一般常数项级数是指级数的各项可以是正数、负数或零。以下我们先来讨论交错级数，再讨论一般常数项级数。

定义

设$a_n \geq 0(n=1,2,\cdots)$，称$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$或$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$为**交错级数**。

交错级数具有如下具体形式：

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + (-1)^{n-1}a_n + \cdots,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}a_n = -a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - \cdots + (-1)^{n}a_n + \cdots.$$

由于上述交错级数只相差一个符号，这里我们只需讨论首项为正的交错级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$。

由于上述交错级数只相差一个符号，这里我们只需讨论首项为正的交错级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$。

定理 (Leibniz定理)

如果交错级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$满足：

(1) $a_n \geq a_{n+1}\ (n = 1, 2, \cdots)$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$，

那么交错级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$收敛到$S$且$S \leq a_1$。

例 13

判定下列交错级数是收敛的：

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}.$$

例 13

判定下列交错级数是收敛的：

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}.$$

例 14

判定交错级数的敛散性：

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n\cdot 4^{n}}.$$

例 13

判定下列交错级数是收敛的：

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}.$$

例 14

判定交错级数的敛散性：

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n\cdot 4^n}.$$

例 15

判定交错级数的敛散性：

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{\ln n}.$$

例 13

判定下列交错级数是收敛的：

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}.$$

例 14

判定交错级数的敛散性：

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n\cdot 4^n}.$$

例 15

判定交错级数的敛散性：

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{\ln n}.$$

绝对收敛和条件收敛

对$a_n \in \mathbb{R}$，任意项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$具有如下形式：

对$a_n \in \mathbb{R}$，任意项级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$具有如下形式：

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_n + \cdots .$$

对$a_n \in \mathbb{R}$，任意项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$具有如下形式：

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_n + \cdots .$$

对任意项级数，我们给每项加上绝对值符号构造一个正项级数：

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = |a_1| + |a_2| + |a_3| + |a_4| + \cdots + |a_n| + \cdots .$$

绝对收敛和条件收敛

对$a_n \in \mathbb{R}$，任意项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$具有如下形式：

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_n + \cdots .$$

对任意项级数，我们给每项加上绝对值符号构造一个正项级数：

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = |a_1| + |a_2| + |a_3| + |a_4| + \cdots + |a_n| + \cdots .$$

以下我们讨论任意项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$的收敛性和$\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$的收敛性的关系。

定理 (绝对收敛与收敛之间的关系)

若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$收敛，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$必收敛。

定理 (绝对收敛与收敛之间的关系)

若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$收敛，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$必收敛。

对级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$，我们使用 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$构造它的正部级数 $\sum_{n=1}^{\infty}p_n$ 和负部级数 $\sum_{n=1}^{\infty}q_n$：

$$p_n=\frac{|a_n|+a_n}{2},\quad q_n=\frac{|a_n|-a_n}{2}.$$

定理 (绝对收敛与收敛之间的关系)

若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$收敛，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$必收敛。

对级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$，我们使用 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$构造它的正部级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}p_n$ 和负部级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}q_n$：

$$p_n=\frac{|a_n|+a_n}{2},\quad q_n=\frac{|a_n|-a_n}{2}.$$

注意到 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}p_n$和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}q_n$都是正项级数，由比较审敛法和级数的线性性质：

- 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}p_n$和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}q_n$均收敛；
- 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$发散且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}p_n$和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}q_n$均发散。

绝对收敛和条件收敛

上述结果说明，一般常数项级数的收敛性判别问题可以转化为正项级数的收敛性判别问题。

上述结果说明，一般常数项级数的收敛性判别问题可以转化为正项级数的收敛性判别问题。

定义

若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$收敛，则称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$**绝对收敛**。

若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$发散但级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛，则称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$**条件收敛**。

绝对收敛和条件收敛

上述结果说明，一般常数项级数的收敛性判别问题可以转化为正项级数的收敛性判别问题。

定义

若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$收敛，则称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$**绝对收敛**。

若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$发散但级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛，则称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$**条件收敛**。

简而言之，一个绝对收敛的级数必收敛，且

- 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$绝对收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}p_n$和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}q_n$均收敛；
- 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$条件收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}p_n$和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}q_n$均发散。

由正项级数的比较审敛定理和比值审敛定理立即得到下列判定任意项级数绝对收敛的判别法:

由正项级数的比较审敛定理和比值审敛定理立即得到下列判定任意项级数绝对收敛的判别法：

定理 (绝对收敛判别方法)

若任意项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 满足下列条件之一，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 必绝对收敛：

- 存在收敛的正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$，使得 $|a_n| \leq b_n \ (n = 1, 2, \cdots)$；
- $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \ell < 1$；
- $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \ell < 1$。

注

当级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 发散时不能确定任意项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 的收敛性。

注

当级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 发散时不能确定任意项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的收敛性。但使用比值审敛定理判断出 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 发散，即

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \ell > 1 \quad \text{或} \quad \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = +\infty,$$

则必有 $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$，因此级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散。

例 16

判定下列级数的敛散性：

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^p}\ (p>0).$$

例 16

判定下列级数的敛散性：

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^p}\ (p>0).$$

例 17

判定下列级数的敛散性：

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n^2}.$$

例 16

判定下列级数的敛散性：

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^p}\ (p>0).$$

例 17

判定下列级数的敛散性：

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n^2}.$$

例 18

判定下列级数的敛散性：

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^{n+1}}{(n+1)!}.$$

例 16

判定下列级数的敛散性：

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^p}\ (p>0).$$

例 17

判定下列级数的敛散性：

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n^2}.$$

例 18

判定下列级数的敛散性：

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^{n+1}}{(n+1)!}.$$

例 19

判定下列级数是绝对收敛还是条件收敛：

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{n^2+1}.$$

例 19

判定下列级数是绝对收敛还是条件收敛：

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{n^2+1}.$$

例 20

判定下列级数是绝对收敛还是条件收敛：

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}.$$

幂级数收敛及函数展开式

课前导读

对比常数项级数（各项都是常数），如果一个级数的各个项都是定义在某个区间上的函数，我们称该级数为**函数项级数**。

课前导读

对比常数项级数（各项都是常数），如果一个级数的各个项都是定义在某个区间上的函数，我们称该级数为**函数项级数**。更具体地，设定义在区间I上的函数列为$\{f_n(x)\}$，则函数项级数具有如下形式：

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) := f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x) + \cdots, \quad x \in I.$$

对比常数项级数（各项都是常数），如果一个级数的各个项都是定义在某个区间上的函数，我们称该级数为**函数项级数**。更具体地，设定义在区间I上的函数列为$\{f_n(x)\}$，则函数项级数具有如下形式：

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) := f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x) + \cdots, \quad x \in I.$$

对于I上的每一个值x_0，$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$为常数项级数。

- 若$\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$收敛，称$x_0$是$\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$的**一个收敛点**；收敛点的全体组成的数集称为$\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$的**收敛域**；
- 若$\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$发散，称$x_0$是$\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$的**一个发散点**；发散点的全体组成的数集称为$\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$的**发散域**。

对于收敛域中的每一个数x，常数项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$的和$S(x)$是$x$的函数，称$S(x)$为函数项级数的**和函数**。

课前导读

对于收敛域中的每一个数x，常数项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$的和$S(x)$是$x$的函数，称$S(x)$为函数项级数的**和函数**。

和函数的定义域就是函数项级数的收敛域，且对于收敛域内的点x，有$S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$。

课前导读

对于收敛域中的每一个数x，常数项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$的和$S(x)$是$x$的函数，称$S(x)$为函数项级数的**和函数**。

和函数的定义域就是函数项级数的收敛域，且对于收敛域内的点x，有$S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$。

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$的部分和为$S_n(x)$，满足

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = S(x), \quad x \in I.$$

$r_n(x) := S(x) - S_n(x)$为$\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$的**余项**，且有

$$\lim_{n\to\infty} r_n(x) = 0, \quad x \in I.$$

课前导读

对于收敛域中的每一个数x，常数项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$的和$S(x)$是$x$的函数，称$S(x)$为函数项级数的**和函数**。

和函数的定义域就是函数项级数的收敛域，且对于收敛域内的点x，有$S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$。

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$的部分和为$S_n(x)$，满足

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = S(x), \quad x \in I.$$

$r_n(x) := S(x) - S_n(x)$为$\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$的**余项**，且有

$$\lim_{n\to\infty} r_n(x) = 0, \quad x \in I.$$

本节我们主要讨论一类特殊的函数项级数，即幂级数。

幂函数的定义

定义

取实数$a_n\ (n=1,2,\cdots)$，形如

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_n(x-x_0)^n + \cdots$$

的函数项级数称作关于$(x-x_0)$的**幂级数**。

幂函数的定义

定义

取实数$a_n\ (n=1,2,\cdots)$，形如

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_n(x-x_0)^n + \cdots$$

的函数项级数称作关于$(x-x_0)$的**幂级数**。

不失一般性，取$x_0=0$，我们仅讨论幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$。

幂函数的定义

定义

取实数$a_n\ (n=1,2,\cdots)$，形如

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_n(x-x_0)^n + \cdots$$

的函数项级数称作关于$(x-x_0)$的**幂级数**。

不失一般性，取$x_0=0$，我们仅讨论幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$。

该幂级数在收敛域I上的和函数$S(x)$可以表示为

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad x \in I.$$

例 1

取幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$：

引例

例 1

取幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$：

- 当$x=0$时，幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$收敛到$a_0$；
- 当$a_n \equiv 1\,(n=1,2,\cdots,)$时，得到几何级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$。

例 1

取幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$：

- 当$x=0$时，幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$收敛到$a_0$；
- 当$a_n \equiv 1\,(n=1,2,\cdots,)$时，得到几何级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$。

  当$|x|<1$时，该幂级数收敛，且

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, \quad (-1<x<1).$$

  当$|x|>1$时，该幂级数发散。

幂级数的收敛半径和收敛域

上述例子告诉我们，一般幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 总是有一个收敛点 $x = 0$。那么除了 $x = 0$ 之外，幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 还有哪些收敛点呢？

上述例子告诉我们，一般幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$总是有一个收敛点$x=0$。那么除了$x=0$之外，幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$还有哪些收敛点呢？

定理 (Abel收敛定理)

设幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$满足$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \ell$，

(1) 若$\ell = 0$，则$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$在任意$x$处均收敛；

(2) 若$0 < \ell < +\infty$，当$|x| < \frac{1}{\ell}$时，$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$绝对收敛；当$|x| > \frac{1}{\ell}$时，$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$发散；

(3) 若$\ell = +\infty$，$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$在$x \neq 0$处都发散。

上述定理说明:

上述定理说明：

- 幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$在$\left(-\frac{1}{\ell}, \frac{1}{\ell}\right)$内绝对收敛；

上述定理说明：

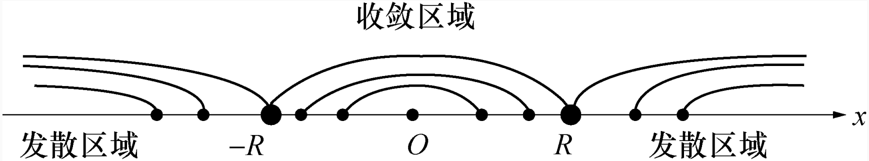
- 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $\left(-\dfrac{1}{\ell}, \dfrac{1}{\ell}\right)$ 内绝对收敛；
- 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $\left(-\infty, -\dfrac{1}{\ell}\right) \cup \left(\dfrac{1}{\ell}, +\infty\right)$ 内发散；
- 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x = -\dfrac{1}{\ell}, x = \dfrac{1}{\ell}$ 处可能收敛，也可能发散。

上述定理说明：

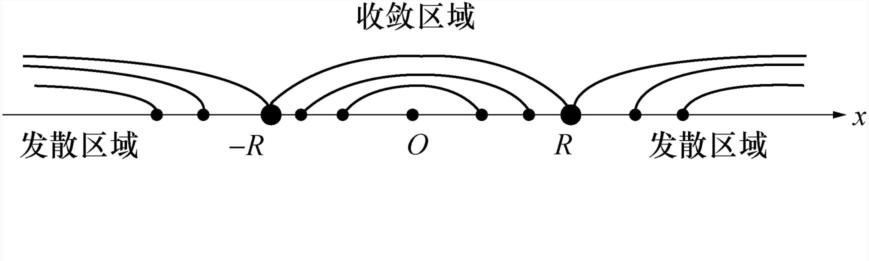
- 幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$在$\left(-\frac{1}{\ell}, \frac{1}{\ell}\right)$内绝对收敛；
- 幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$在$\left(-\infty, -\frac{1}{\ell}\right) \cup \left(\frac{1}{\ell}, +\infty\right)$内发散；
- 幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$在$x = -\frac{1}{\ell}, x = \frac{1}{\ell}$处可能收敛，也可能发散。

$x = -\frac{1}{\ell}, x = \frac{1}{\ell}$是幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$收敛点和发散点的分界点，且它们到原点的距离都是$\frac{1}{\ell}$。我们称$R := \frac{1}{\ell}$为幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$的**收敛半径**。

如图所示，区间$(-R, R)$称为幂级数的收敛区间。

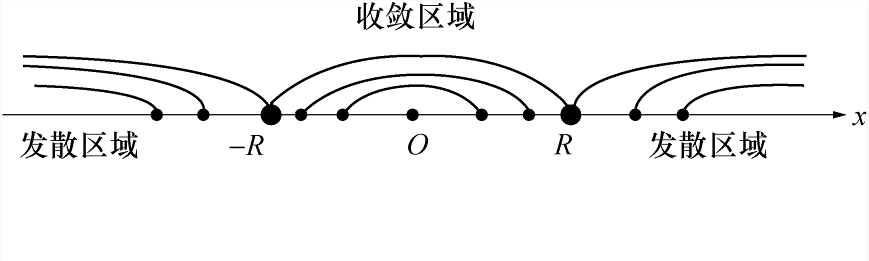


如图所示，区间$(-R, R)$称为幂级数的收敛区间。



- 当$\ell = 0$时，幂级数处处收敛，此时定义$R := +\infty$；

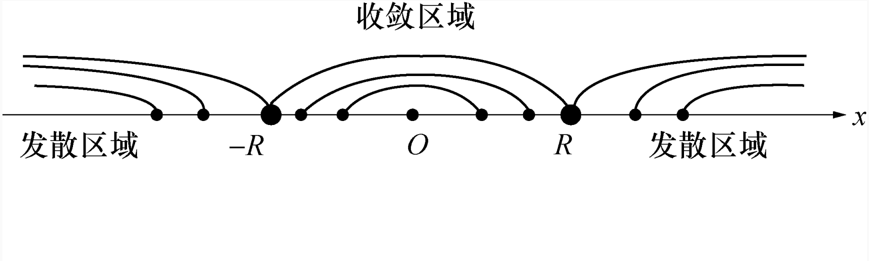
如图所示，区间$(-R, R)$称为幂级数的收敛区间。



- 当$\ell = 0$时，幂级数处处收敛，此时定义$R := +\infty$;
- 当$\ell = +\infty$时，幂级数仅在原点处收敛，此时定义$R := 0$;

幂级数的收敛半径和收敛域

如图所示，区间$(-R, R)$称为幂级数的收敛区间。



- 当$\ell = 0$时，幂级数处处收敛，此时定义$R := +\infty$；
- 当$\ell = +\infty$时，幂级数仅在原点处收敛，此时定义$R := 0$；
- 当$0 < \ell < +\infty$时，幂级数的收敛域必为下列区间之一：

$$(-R, R), [-R, R), (-R, R], [-R, R].$$

幂级数的收敛半径和收敛域

定理 (幂级数的收敛半径)

已知幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$满足

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \ell.$$

则幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$的收敛半径为

$$R = \begin{cases} \dfrac{1}{\ell}, & \ell \neq 0, \\ +\infty, & \ell = 0, \\ 0, & \ell = +\infty. \end{cases}$$

例 2

求下列幂级数的收敛半径：

$$(1)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n};\quad (2)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-nx)^n;\quad (3)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!};$$

$$(4)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n}{\sqrt{n}}\left(x-\frac{1}{2}\right)^n;\quad (5)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{\sqrt{n}}x^n;\quad (6)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{n^2}x^n.$$

引例

例 2

求下列幂级数的收敛半径:

$$(1)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n};\quad (2)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-nx)^n;\quad (3)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!};$$

$$(4)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n}{\sqrt{n}}\left(x-\frac{1}{2}\right)^n;\quad (5)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{\sqrt{n}}x^n;\quad (6)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{n^2}x^n.$$

例 3

求下列幂级数的收敛域:

$$(1)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}2^n x^{2n-1};\quad (2)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+(-2)^n}{n}(x+1)^n.$$

幂级数的性质

性质1（代数运算）

设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$，$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$如下：

性质1（代数运算）

设幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$，$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$如下：

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots, \quad -R_1 < x < R_1,$$

$$B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_n x^n + \cdots, \quad -R_2 < x < R_2.$$

性质1（代数运算）

设幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$，$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$如下：

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots, \quad -R_1 < x < R_1,$$
$$B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_n x^n + \cdots, \quad -R_2 < x < R_2.$$

若取$R = \min\{R_1, R_2\}$，则上述幂级数可在区间$(-R, R)$上做加法、减法及乘法：

性质1（代数运算）

设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$，$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$如下：

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots , \quad -R_1 < x < R_1,$$

$$B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_n x^n + \cdots , \quad -R_2 < x < R_2.$$

若取$R = \min\{R_1, R_2\}$，则上述幂级数可在区间$(-R, R)$上做加法、减法及乘法：

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \pm \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n) x^n = A(x) \pm B(x), \qquad -R < x < R,$$

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right) x^n, \qquad -R < x < R.$$

定理 (和函数的连续性)

设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛区间为 I，则它的和函数 $S(x)$ 在 I 内连续。

定理 (和函数的连续性)

设幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$的收敛区间为$I$，则它的和函数$S(x)$在$I$内连续。

定理 (和函数的可导性)

设幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$的收敛半径为$R(R>0)$，则它的和函数$S(x)$在$(-R,R)$内可求导函数，且有逐项求导函数公式：

$$S'(x)=\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)'=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n x^n)'=\sum_{n=0}^{\infty} a_n n x^{n-1},\quad -R<x<R.$$

逐项求导函数后所得到的幂级数的收敛半径仍为R，但是收敛域可能变小（体现在端点处）。

定理 (和函数的可积性)

设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$的收敛半径为$R(R>0)$，则它的和函数$S(x)$在$(-R,R)$内可积，且有**逐项求积分公式**:

$$\int_0^x S(t)dt = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n\right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^x t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}, \quad -R < x < R.$$

逐项积分后所得到的幂级数的收敛半径仍为R，但是收敛域可能变大（体现在端点处）。

例 4

求下列幂级数的收敛域及和函数：

$$(1)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n};\quad (2)\ \sum_{n=1}^{\infty}nx^n;\quad (3)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n};$$

$$(4)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!};\quad (5)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}x^n.$$

例 4

求下列幂级数的收敛域及和函数：

$$(1)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n};\quad (2)\ \sum_{n=1}^{\infty}nx^n;\quad (3)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n};$$

$$(4)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!};\quad (5)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}x^n.$$

例 5

求下列幂级数的收敛域及和函数：

$$\sum_{n=1}^{\infty}n2^{\frac{n}{2}}x^{3n-1}.$$

设幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$的收敛半径为$R(R>0)$，且有

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad -R<x<R.$$

设幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$的收敛半径为$R(R>0)$，且有

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,\quad -R<x<R.$$

注意到n次多项式

$$P_n(x)=a_n x^n=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$$

是该幂级数的前$n+1$项部分和，那么

$$\lim_{n\to\infty} P_n(x)=S(x),\quad -R<x<R.$$

函数展开成幂级数

设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_nx^n$ 的收敛半径为 $R(R>0)$，且有

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n, \quad -R < x < R.$$

注意到 n 次多项式

$$P_n(x) = a_nx^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$$

是该幂级数的前 $n+1$ 项部分和，那么

$$\lim_{n\to\infty} P_n(x) = S(x), \quad -R < x < R.$$

因此我们可以使用多项式近似逼近和函数：

$$S(x) \approx P_n(x), \quad -R < x < R.$$

函数展开成幂级数

设幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$的收敛半径为$R(R>0)$，且有现在给定函数$f(x)$，要寻求一个幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$，使它的和函数恰为$f(x)$ 称这一问题为**将$f(x)$展开成幂级数**。

函数展开成幂级数

设幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$的收敛半径为$R(R>0)$，且有现在给定函数$f(x)$，要寻求一个幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$，使它的和函数恰为$f(x)$ 称这一问题为**将$f(x)$展开成幂级数**。

现设置幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$在$(-R,R)$内的和函数为$f(x)$，即

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad -R<x<R.$$

我们称$f(x)$在$x=0$处**可展开成幂级数**，右侧幂级数称作$f(x)$在$x=0$处的**幂级数展开式**。

我们考察如何计算幂级数的系数a_n。

函数展开成幂级数

我们考察如何计算幂级数的系数a_n。根据幂级数的性质，如果函数$f(x)$的展开式

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad -R < x < R$$

成立，那么f在$(-R, R)$内有任意阶导函数：

我们考察如何计算幂级数的系数a_n。根据幂级数的性质，如果函数$f(x)$的展开式

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad -R < x < R$$

成立，那么f在$(-R, R)$内有任意阶导函数：

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)a_n x^{n-k}.$$

我们考察如何计算幂级数的系数a_n。根据幂级数的性质，如果函数$f(x)$的展开式

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad -R < x < R$$

成立，那么f在$(-R, R)$内有任意阶导函数：

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)a_n x^{n-k}.$$

代入$x = 0$，得到

$$f^{(k)}(0) = k!a_k, \quad k = 1, 2, \cdots, \quad \text{即}\ a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}, \quad k = 1, 2, \cdots.$$

我们考察如何计算幂级数的系数a_n。根据幂级数的性质，如果函数$f(x)$的展开式

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n,\quad -R<x<R$$

成立，那么f在$(-R,R)$内有任意阶导函数：

$$f^{(k)}(x)=\sum_{n=k}^{\infty}n(n-1)\cdots(n-k+1)a_nx^{n-k}.$$

代入$x=0$，得到

$$f^{(k)}(0)=k!a_k,\quad k=1,2,\cdots,\quad \text{即}\ a_k=\frac{f^{(k)}(0)}{k!},\quad k=1,2,\cdots.$$

因此$f(x)$展开式必是幂级数

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n,\quad -R<x<R.$$

我们称幂级数展开式

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n, \quad -R < x < R.$$

是$f(x)$的**麦克劳林级数**。

我们称幂级数展开式

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n, \quad -R < x < R.$$

是$f(x)$的**麦克劳林级数**。反之，设$f(x)$在$x = 0$的邻域内有任意阶导数，那么我们总可以作出$f(x)$的麦克劳林级数。因此我们有如下定理：

我们称幂级数展开式

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n,\quad -R<x<R.$$

是$f(x)$的**麦克劳林级数**。反之，设$f(x)$在$x=0$的邻域内有任意阶导数，那么我们总可以作出$f(x)$的麦克劳林级数。因此我们有如下定理：

定理 (初等函数的展开定理)

设初等函数$f(x)$在$x=0$的某个邻域内有任意阶导函数，则$f(x)$在$x=0$处可展开幂级数：

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n,\quad -R<x<R.$$

如果在端点$x=\pm R$处$f(x)$有定义且上述幂级数收敛，那么上述$f(x)$的幂级数展开式在端点处也成立。

例 6

求函数$f(x) = e^x$的麦克劳林展开式:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots .$$

例 6

求函数$f(x)=e^x$的麦克劳林展开式：

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots.$$

例 7

求函数$f(x)=\sin x$的麦克劳林展开式：

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots.$$

例 6

求函数$f(x) = e^x$的麦克劳林展开式:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots .$$

例 7

求函数$f(x) = \sin x$的麦克劳林展开式:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots .$$

利用幂级数的运算性质，对$\sin(x)$逐项求导函数，我们得到

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots .$$

上述例子中，我们可以使用以下主要两种方法求解初等函数的幂级数展开式：

引例

上述例子中，我们可以使用以下主要两种方法求解初等函数的幂级数展开式：

- 我们可以直接使用初等函数的各项导函数（如果存在）去计算幂级数的系数，再对初等函数求解对应幂级数展开式；

上述例子中，我们可以使用以下主要两种方法求解初等函数的幂级数展开式：

- 我们可以直接使用初等函数的各项导函数（如果存在）去计算幂级数的系数，再对初等函数求解对应幂级数展开式；
- 借助已知基本初等函数的幂级数展开式，我们也可以通过幂级数的运算（如四则运算、逐项求导函数、逐项积分）及变量替换的方法间接计算其他初等函数的幂级数展开式。

上述例子中，我们可以使用以下主要两种方法求解初等函数的幂级数展开式：

- 我们可以直接使用初等函数的各项导函数（如果存在）去计算幂级数的系数，再对初等函数求解对应幂级数展开式；
- 借助已知基本初等函数的幂级数展开式，我们也可以通过幂级数的运算（如四则运算、逐项求导函数、逐项积分）及变量替换的方法间接计算其他初等函数的幂级数展开式。

例 8

将函数$f(x)$展开成x的幂级数：

$$(1)\quad f(x)=\frac{1}{x+1};\qquad (2)\quad f(x)=\frac{1}{x^2-x-6};$$

$$(3)\quad f(x)=\ln(4-3x-x^2);\qquad (4)\quad f(x)=\arctan x^2.$$

例 9

将下列函数展开成$x-x_0$的幂级数（即在点x_0处的Taylor级数）：

$$(1)\quad f(x)=\ln x,\quad x_0=1;\qquad (2)\quad f(x)=\sin x,\quad x_0=\frac{\pi}{4}.$$

傅里叶级数

自然界和工程技术中存在很多与时间变量t相关的周期运动：

- 单摆简谐振动：
$$y = A\sin(\omega t + \varphi), \quad T = \frac{2\pi}{\omega},$$
其中A, ω, t, T, φ分别为振幅、角频率、时间、周期及初始相位；
- 交流电电流强度随时间变化的周期关系为$I = I_0 \sin(\omega t + \varphi)$。

课前导读

自然界和工程技术中存在很多与时间变量t相关的周期运动：

- 单摆简谐振动：

$$y = A\sin(\omega t + \varphi), \quad T = \frac{2\pi}{\omega},$$

  其中A, ω, t, T, φ分别为振幅、角频率、时间、周期及初始相位；
- 交流电电流强度随时间变化的周期关系为$I = I_0 \sin(\omega t + \varphi)$。

如何研究非正弦周期函数？

自然界和工程技术中存在很多与时间变量t相关的周期运动：

- 单摆简谐振动：
$$y = A\sin(\omega t+\varphi),\quad T=\frac{2\pi}{\omega},$$
其中A,ω,t,T,φ分别为振幅、角频率、时间、周期及初始相位；
- 交流电电流强度随时间变化的周期关系为$I=I_0\sin(\omega t+\varphi)$。

如何研究非正弦周期函数？

我们设想将一个一般非正弦周期函数展开成一个三角级数（级数各项皆为三角函数）。换句话说，将一个复杂周期运动分解成若干简谐振动的叠加：
$$f(x)\doteq A_0+\sum_{n=0}^{\infty}A_n\sin(n\omega t+\varphi_n),\quad A_0,A_n,\varphi_n\in\mathbb{R}\,(n=1,2,\cdots).$$

上述三角级数的一般项展开为

$$A_n \sin(n\omega t + \varphi_n) = A_n \sin\varphi_n \cos n\omega t + A_n \cos\varphi_n \sin n\omega t.$$

上述三角级数的一般项展开为

$$A_n \sin(n\omega t + \varphi_n) = A_n \sin\varphi_n \cos n\omega t + A_n \cos\varphi_n \sin n\omega t.$$

我们进一步简化三角级数：

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\frac{n\pi t}{\ell} + b_n \sin\frac{n\pi t}{\ell} \right), \quad \frac{a_0}{2} = A_0, a_n = A_n \sin\varphi_n, b_n = A_n \cos\varphi_n, \omega = \frac{\pi}{\ell}.$$

上述三角级数的一般项展开为

$$A_n \sin(n\omega t + \varphi_n) = A_n \sin\varphi_n \cos n\omega t + A_n \cos\varphi_n \sin n\omega t.$$

我们进一步简化三角级数：

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\frac{n\pi t}{\ell} + b_n \sin\frac{n\pi t}{\ell} \right), \quad \frac{a_0}{2} = A_0, a_n = A_n \sin\varphi_n, b_n = A_n \cos\varphi_n, \omega = \frac{\pi}{\ell}.$$

令 $\pi t/\ell = x$，我们得到本节所讨论的以2π为周期的三角级数（即以2ℓ为周期的级数可以按下述方式进行转换）：

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

定义

我们称函数系 $1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cdots, \cos nx, \sin nx, \cdots$ 为三角函数系。

该三角函数系中任何两个相同函数的乘积在$[-\pi, \pi]$上的积分不为零，任何两个不同函数的乘积在$[-\pi, \pi]$上的积分为零：

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1^2 dx = 2\pi, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx dx = \pi, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx dx = \pi, \quad n = 1, 2, \cdots,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \cos nx dx = \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \sin nx dx = 0, \quad n = 1, 2, \cdots$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cdot \cos nx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \sin nx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cdot \sin nx dx = 0 \, (n \neq m).$$

定义

如果一个函数系$\{\varphi_n(x)\}$在区间$[a,b]$上满足

$$\int_a^b \varphi_n(x)\varphi_m(x)dx = 0\,(n \neq m),$$

那么称这个函数系是**正交的**。更多地，如果

$$\int_a^b \varphi_n(x)\varphi_m(x)dx = \begin{cases} 1, & n = m; \\ 0, & n \neq m. \end{cases}$$

那么称这个函数系是**标准正交的**。

定义

如果一个函数系$\{\varphi_n(x)\}$在区间$[a,b]$上满足

$$\int_a^b \varphi_n(x)\varphi_m(x)dx = 0\,(n \neq m),$$

那么称这个函数系是**正交的**。更多地，如果

$$\int_a^b \varphi_n(x)\varphi_m(x)dx = \begin{cases} 1, & n = m; \\ 0, & n \neq m. \end{cases}$$

那么称这个函数系是**标准正交的**。

三角函数系 $1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cdots, \cos nx, \sin nx, \cdots$ 在$[-\pi, \pi]$上是正交的。

假设周期为2π的函数$f(x)$可以展开成傅里叶级数：

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \,.$$

假设周期为2π的函数$f(x)$可以展开成傅里叶级数：

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) .$$

我们进一步假设该三角级数可以逐项积分：

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} dx + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)\, dx = a_0\pi.$$

即

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx.$$

使用三角函数系的正交性我们还可以得到:

周期为2π的函数的傅里叶级数

使用三角函数系的正交性我们还可以得到：

$$
\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mx dx = & \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} \cos mx dx \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \left(a_n \cos nx \cos mx + b_n \sin nx \cos mx\right) dx \\
= & a_m \pi, \quad \text{即 } a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx dx, \quad m = 1, 2, \cdots,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin mx dx = & \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} \cos mx dx \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \left(a_n \cos nx \sin mx + b_n \sin nx \sin mx\right) dx \\
= & b_m \pi, \quad \text{即 } b_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin mx dx, \quad m = 1, 2, \cdots.
\end{aligned}
$$

使用三角函数系的正交性我们还可以得到：

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mx dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2}\cos mx dx \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi}(a_n \cos nx \cos mx + b_n \sin nx \cos mx)\,dx \\ &= a_m\pi, \quad \text{即 } a_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mx dx, \quad m = 1, 2, \cdots,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin mx dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2}\cos mx dx \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi}(a_n \cos nx \sin mx + b_n \sin nx \sin mx)\,dx \\ &= b_m\pi, \quad \text{即 } b_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin mx dx, \quad m = 1, 2, \cdots.\end{aligned}$$

定义

对指标 $n=1,2,\cdots$，如果积分

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx, a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx, b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx$$

存在，那么$a_0,a_n,b_n\ (n=1,2,\cdots)$称作函数$f$的**傅里叶系数**；三角级数

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

称作f的**傅里叶级数**。

傅里叶级数的收敛性

如果一个定义在$\mathbb{R}$上周期为2π的函数f在其一个周期上可积，那么我们一定可以得到该函数的傅里叶级数。

如果一个定义在$\mathbb{R}$上周期为2π的函数f在其一个周期上可积，那么我们一定可以得到该函数的傅里叶级数。现在我们讨论在什么条件下f的傅里叶级数收敛？如何确定收敛域？在收敛域内的傅里叶级数是否还会收敛到f？

如果一个定义在$\mathbb{R}$上周期为2π的函数f在其一个周期上可积，那么我们一定可以得到该函数的傅里叶级数。现在我们讨论在什么条件下f的傅里叶级数收敛？如何确定收敛域？在收敛域内的傅里叶级数是否还会收敛到f？

定理 (Dirichlet收敛条件)

如果一个定义在$\mathbb{R}$上周期为2π的函数f满足：

(1) f在一个周期内连续或只有有限个第一类间断点；

(2) f在一个周期内至多只有有限个极值点，

那么

- f的傅里叶级数收敛；
- 当f在x处连续时，f的傅里叶级数收敛到$f(x)$；
- 当x为f的间断点时，f的傅里叶级数收敛到$\dfrac{1}{2}[f(x^-)+f(x^+)]$。

注

将函数展开成傅里叶级数的条件比起将函数展开成幂级数的条件要低得多：只要函数f满足Dirichlet收敛条件，则

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)\,,\ x\in C:=\left\{x:f(x)=\frac{1}{2}[f(x^-)+f(x^+)]\right\}.$$

例 1

设周期为2π的函数f在一个周期区间$[-\pi,\pi)$上有表达式

$$f(x)=\begin{cases}-1, & -\pi\le x<0,\\ 1, & 0\le x<\pi.\end{cases}$$

将f展开成傅里叶级数。

例 2

设周期为2π的函数f在一个周期区间$[-\pi,\pi)$上有表达式

$$f(x)=\begin{cases} x, & -\pi\leq x<0, \\ 0, & 0\leq x<\pi. \end{cases}$$

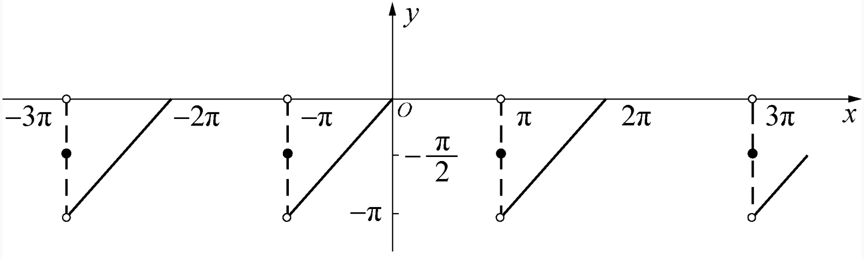
将f展开成傅里叶级数。

例 2

设周期为2π的函数f在一个周期区间$[-\pi,\pi)$上有表达式

$$f(x)=\begin{cases} x, & -\pi\le x<0,\\ 0, & 0\le x<\pi. \end{cases}$$

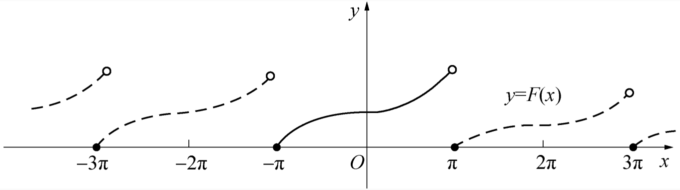
将f展开成傅里叶级数。



若函数f仅在$[-\pi,\pi)$上有定义，并且满足收敛定理的条件，如图所示，使用周期延拓的方法，我们可以先把f延拓成定义在$\mathbb{R}$周期为2π的函数F，再将F展开成傅里叶级数。

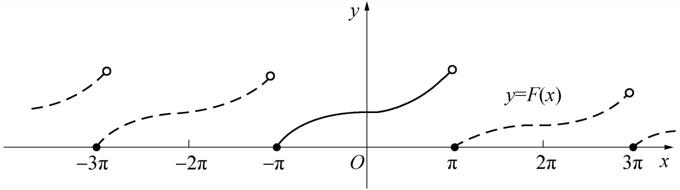
引例

若函数f仅在$[-\pi,\pi)$上有定义，并且满足收敛定理的条件，如图所示，使用周期延拓的方法，我们可以先把f延拓成定义在$\mathbb{R}$周期为2π的函数F，再将F展开成傅里叶级数。



引例

若函数f仅在$[-\pi,\pi)$上有定义，并且满足收敛定理的条件，如图所示，使用周期延拓的方法，我们可以先把f延拓成定义在$\mathbb{R}$周期为2π的函数F，再将F展开成傅里叶级数。



例 3

将函数

$$f(x)=\begin{cases}-x, & -\pi\leq x<0,\\ x, & 0\leq x<\pi.\end{cases}$$

展开成傅里叶级数。

定义

若f是奇函数，则

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=0, a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx=0,$$
$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(x)\sin nxdx, n=1,2,\cdots,$$

我们称傅里叶级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx$$

为f的**正弦级数**。

定义

若f是偶函数，则

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)dx,$$
$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nxdx,$$
$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx=0, n=1,2,\cdots,$$

我们称傅里叶级数

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx$$

为f的**余弦级数**。

例 4

将函数$f(x)=x$在$(-\pi,\pi)$展开成傅里叶级数。

例 4

将函数$f(x)=x$在$(-\pi,\pi)$展开成傅里叶级数。

如果函数f仅在$[0,\pi]$上有定义，且满足收敛定理的条件，我们可以在$(-\pi,0)$内补充定义，得到$(-\pi,\pi]$上的函数F，使它在$(-\pi,\pi)$上成为奇函数或者偶函数，按这种方式拓广函数定义域的过程称为**奇延拓**或**偶延拓**：

- 奇延拓：

$$F(x)=\begin{cases} f(x), & 0\le x\le \pi, \\ -f(-x), & -\pi\le x<0. \end{cases}$$

- 偶延拓：

$$F(x)=\begin{cases} f(x), & 0\le x\le \pi, \\ f(-x), & -\pi\le x<0. \end{cases}$$

引例

如果定义在$[0,\pi]$上的函数要展开成正弦级数或余弦级数，则需先将函数在$(-\pi,0)$内作奇延拓或偶延拓，然后在$(-\pi,\pi]$外作周期延拓。

如果定义在$[0,\pi]$上的函数要展开成正弦级数或余弦级数，则需先将函数在$(-\pi,0)$内作奇延拓或偶延拓，然后在$(-\pi,\pi]$外作周期延拓。

例 5

将函数

$$f(x)=\begin{cases} 0, & 0<x<\dfrac{\pi}{2}, \\ \dfrac{1}{2}, & x=\dfrac{\pi}{2}, \\ 1, & \dfrac{\pi}{2}<x<\pi. \end{cases}$$

在$(0,\pi)$展开成正弦级数。

引例

如果定义在$[0,\pi]$上的函数要展开成正弦级数或余弦级数，则需先将函数在$(-\pi,0)$内作奇延拓或偶延拓，然后在$(-\pi,\pi]$外作周期延拓。

例 5

将函数

$$f(x)=\begin{cases}0, & 0<x<\dfrac{\pi}{2},\\ \dfrac{1}{2}, & x=\dfrac{\pi}{2},\\ 1, & \dfrac{\pi}{2}<x<\pi.\end{cases}$$

在$(0,\pi)$展开成正弦级数。

例 6

将函数$f(x)=x$在$(0,\pi]$展开成余弦级数。

定理

设周期为2ℓ的周期函数f满足收敛定理条件，则f可以展开成傅里叶级数

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{\ell}x+b_n\sin\frac{n\pi}{\ell}x\right),$$

$$x\in C:=\left\{x:f(x)=\frac{1}{2}[f(x^-)+f(x^+)]\right\}.$$

其中

$$a_0=\frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell}f(x)dx,$$

$$a_n=\frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell}f(x)\cos\frac{n\pi}{\ell}xdx,\quad b_n=\frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell}f(x)\sin\frac{n\pi}{\ell}xdx,\quad n=1,2,\cdots.$$

若f是奇函数，则有正弦级数

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi}{\ell} x, \quad b_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) \sin \frac{n\pi}{\ell} x dx, \quad n = 1, 2, \cdots .$$

若f是奇函数，则有正弦级数

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi}{\ell} x, \quad b_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) \sin \frac{n\pi}{\ell} x dx, \quad n = 1, 2, \cdots .$$

若f是偶函数，则有余弦级数

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi}{\ell} x,$$

其中

$$a_0 = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) dx, \quad a_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) \cos \frac{n\pi}{\ell} x dx, \quad n = 1, 2, \cdots .$$

一般周期函数的傅里叶级数

若函数f仅在$[-\ell,\ell)$上有定义，并且满足收敛定理的条件，使用周期延拓的方法，我们可以先把f延拓成定义在$\mathbb{R}$周期为2ℓ的函数F，再将F展开成傅里叶级数。

若函数f仅在$[-\ell,\ell)$上有定义，并且满足收敛定理的条件，使用周期延拓的方法，我们可以先把f延拓成定义在$\mathbb{R}$周期为2ℓ的函数F，再将F展开成傅里叶级数。

例 7

将函数

$$f(x)=\begin{cases}2x, & -3<x\le 0,\\ x, & 0\le x\le 3.\end{cases}$$

展开成傅里叶级数。

如果函数f仅在$(0, \ell]$上有定义，且满足收敛定理的条件，我们可以在$(-\ell, 0]$内做奇（偶）延拓，得到$(-\ell, \ell]$上的函数F，再将它延拓成定义在$\mathbb{R}$周期为2ℓ的奇（偶）函数并展开成正弦（余弦）级数。

如果函数f仅在$(0,\ell]$上有定义，且满足收敛定理的条件，我们可以在$(-\ell,0]$内做奇（偶）延拓，得到$(-\ell,\ell]$上的函数F，再将它延拓成定义在$\mathbb{R}$周期为2ℓ的奇（偶）函数并展开成正弦（余弦）级数。

例 8

将函数

$$f(x)=\begin{cases} x, & 0\le x\le 1,\\ 1, & 1<x\le 2.\end{cases}$$

展开成正弦级数。

The End