



一元函数微分学

导数值及导函数

导函数的计算法则

微分的概念与应用

微分中值定理及其应用

泰勒公式*

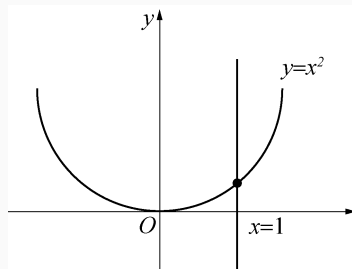
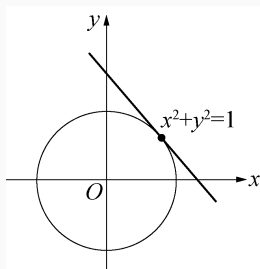
函数的性态与图形

微分学的应用

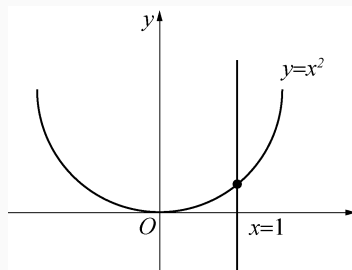
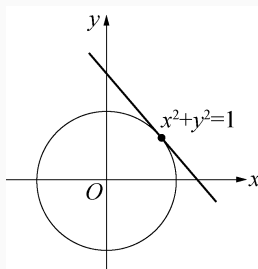
导数值及导函数

圆的切线可以定义为“与圆只有一个交点的直线”。但对于一般曲线，这个定义不再适用。

圆的切线可以定义为“与圆只有一个交点的直线”。但对于一般曲线，这个定义不再适用。



圆的切线可以定义为“与圆只有一个交点的直线”。但对于一般曲线，这个定义不再适用。



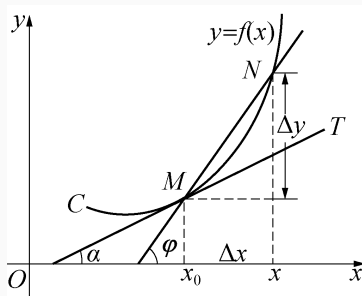
例如：直线 $x = 1$ 与抛物线 $y = x^2$ 只有一个交点，但 $x = 1$ 显然不是 $y = x^2$ 的切线。

一般曲线的切线定义

设曲线 $C : y = f(x), x \in I$ ，在曲线 C 上取点 $M(x_0, y_0)$ 及点 $N(x, y)$ ，连接 MN ，则 MN 为过点 M 的割线。

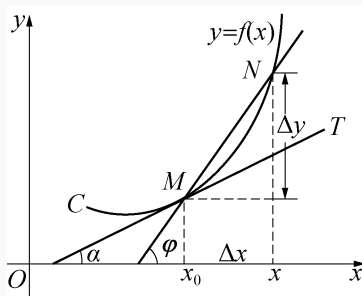
一般曲线的切线定义

设曲线 $C: y = f(x), x \in I$, 在曲线 C 上取点 $M(x_0, y_0)$ 及点 $N(x, y)$, 连接 MN , 则 MN 为过点 M 的割线。



一般曲线的切线定义

设曲线 $C: y = f(x), x \in I$, 在曲线 C 上取点 $M(x_0, y_0)$ 及点 $N(x, y)$, 连接 MN , 则 MN 为过点 M 的割线。



设割线的倾角为 φ , 则割线 MN 的斜率为

$$\tan \varphi = \frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

一般曲线的切线定义

当 $N \rightarrow M$, 即 $x \rightarrow x_0$ 时, 如果割线趋于一极限位置, 我们就把此极限位置上的直线 MT 称为曲线在 M 点处的切线。此时切线的斜率即为

$$k = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{y - y_0}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

一般曲线的切线定义

当 $N \rightarrow M$, 即 $x \rightarrow x_0$ 时, 如果割线趋于一极限位置, 我们就把此极限位置上的直线 MT 称为曲线在 M 点处的切线。此时切线的斜率即为

$$k = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{y - y_0}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

注

在求切线斜率的过程中, 我们需要用到极限

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

导数值（可导）的定义

定义

设函数 $y = f(x)$ 在 x_0 的某个邻域 $U(x_0, \delta)$ 内有定义，当 x 在 x_0 处增量为 Δx （需要满足 $x_0 + \Delta x \in U(x_0, \delta)$ ）时，相应地函数有增量 $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ 。

导数值（可导）的定义

定义

设函数 $y = f(x)$ 在 x_0 的某个邻域 $U(x_0, \delta)$ 内有定义，当 x 在 x_0 处增量为 Δx （需要满足 $x_0 + \Delta x \in U(x_0, \delta)$ ）时，相应地函数有增量 $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ 。

- 如果极限

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

存在，那么称该极限为 $y = f(x)$ 在 x_0 处的**导数值**，也称函数 $y = f(x)$ 在 x_0 处可**求导数值**，记为

$$f'(x_0), y'|_{x=x_0}, \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_0}, \text{ 或 } \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x_0}.$$

导数值（可导）的定义

定义

设函数 $y = f(x)$ 在 x_0 的某个邻域 $U(x_0, \delta)$ 内有定义，当 x 在 x_0 处增量为 Δx （需要满足 $x_0 + \Delta x \in U(x_0, \delta)$ ）时，相应地函数有增量 $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ 。

- 如果极限

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

存在，那么称该极限为 $y = f(x)$ 在 x_0 处的**导数值**，也称函数 $y = f(x)$ 在 x_0 处可**求导数值**，记为

$$f'(x_0), y'|_{x=x_0}, \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_0}, \text{ 或 } \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x_0}.$$

- 如果该极限不存在，那么称函数 $y = f(x)$ 在 x_0 处**不可求导数值**；

导数值（可导）的定义

定义

设函数 $y = f(x)$ 在 x_0 的某个邻域 $U(x_0, \delta)$ 内有定义，当 x 在 x_0 处增量为 Δx （需要满足 $x_0 + \Delta x \in U(x_0, \delta)$ ）时，相应地函数有增量 $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ 。

- 如果极限

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

存在，那么称该极限为 $y = f(x)$ 在 x_0 处的**导数值**，也称函数 $y = f(x)$ 在 x_0 处可**求导数值**，记为

$$f'(x_0), y'|_{x=x_0}, \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_0}, \text{ 或 } \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x_0}.$$

- 如果该极限不存在，那么称函数 $y = f(x)$ 在 x_0 处**不可求导数值**；
- 如果 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \infty$ ，那么称函数 $y = f(x)$ 在 x_0 处**导数值为无穷大**。

注

- $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 是函数 $y = f(x)$ 在 $[x_0, x_0 + \Delta x]$ 上的平均变化率;
- $\left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x_0}$ 则反映函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处的瞬时变化率, 它反映函数随自变量变化而变化的“快慢程度”。

注

- $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 是函数 $y = f(x)$ 在 $[x_0, x_0 + \Delta x]$ 上的平均变化率;
- $\left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x_0}$ 则反映函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处的瞬时变化率, 它反映函数随自变量变化而变化的“快慢程度”。

例 1

设 $f'(0)$ 存在, 试求下列各极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(2x) - f(0)}{x}; \quad (2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}, \text{ 其中 } f(0) = 0.$$

例 2

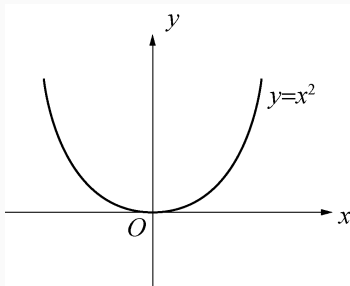
函数 $y = x^2$ 在点 $x = 0$ 处满足

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(0 + \Delta x)^2 - 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x = 0, \text{ 极限存在, 可求导数值.}$$

例 2

函数 $y = x^2$ 在点 $x = 0$ 处满足

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(0 + \Delta x)^2 - 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x = 0, \text{ 极限存在, 可求导数值.}$$



例 3

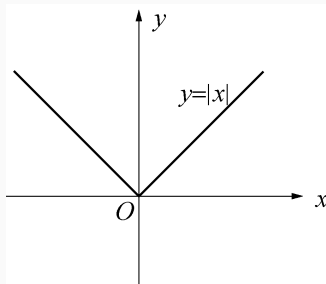
函数 $y = |x|$ 在点 $x = 0$ 处满足

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{|0 + \Delta x| - 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x}, \text{ 极限不存在, 不可求导数值.}$$

例 3

函数 $y = |x|$ 在点 $x = 0$ 处满足

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{|0 + \Delta x| - 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x}, \text{ 极限不存在, 不可求导数值.}$$



上述例子中，极限 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x}$ 不存在，但是左极限

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x} = -1,$$

上述例子中，极限 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x}$ 不存在，但是左极限

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x} = -1,$$

右极限

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = 1,$$

上述例子中，极限 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x}$ 不存在，但是左极限

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x} = -1,$$

右极限

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = 1,$$

这反映函数 $f(x) = |x|$ 在点0处左、右侧的瞬时变化率存在且不同。

上述例子中, 极限 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x}$ 不存在, 但是左极限

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x} = -1,$$

右极限

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = 1,$$

这反映函数 $f(x) = |x|$ 在点0处左、右侧的瞬时变化率存在且不同。就像左、右连续的概念一样, 我们需引入左、右导数的概念。

定义

设函数 $y = f(x)$ 在 x_0 的某个邻域 $U(x_0, \delta)$ 内有定义。

- 如果

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

存在, 那么称该极限为 $y = f(x)$ 在 x_0 处的右导数值, 记作 $f'_+(x_0)$;

定义

设函数 $y = f(x)$ 在 x_0 的某个邻域 $U(x_0, \delta)$ 内有定义。

- 如果

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

存在, 那么称该极限为 $y = f(x)$ 在 x_0 处的右导数值, 记作 $f'_+(x_0)$;

- 如果

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

存在, 那么称该极限为 $y = f(x)$ 在 x_0 处的左导数值, 记作 $f'_-(x_0)$ 。

定理 (函数在某点处可求导数值的充要条件)

函数 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处可求导数值 \Leftrightarrow 函数 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处左、右导数值存在且相等。

定理 (函数在某点处可求导数值的充要条件)

函数 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处可求导数值 \Leftrightarrow 函数 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处左、右导数值存在且相等。

由于 $f'_-(0) \neq f'_+(0)$ ，函数 $f(x) = |x|$ 在点0处不可求导数值。

函数在某点处左、右导数值

定理 (函数在某点处可求导数值的充要条件)

函数 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处可求导数值 \Leftrightarrow 函数 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处左、右导数值存在且相等。

由于 $f'_-(0) \neq f'_+(0)$, 函数 $f(x) = |x|$ 在点0处不可求导数值。

例 4

已知 $f(x) = \begin{cases} \sin x, & x < 0, \\ x, & x \geq 0. \end{cases}$ 求 $f'_-(0)$, $f'_+(0)$ 及 $f'(0)$ 。

函数点态可求导数值与函数点态连续的关系

定理

若函数 $f(x)$ 在 x_0 处可求导数值, 则 $f(x)$ 在 x_0 处必连续。

定理

若函数 $f(x)$ 在 x_0 处可求导数值, 则 $f(x)$ 在 x_0 处必连续。

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \Delta x = \left(\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \right) \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x = f'(x_0) \cdot 0 = 0.$$

函数点态可求导数值与函数点态连续的关系

定理

若函数 $f(x)$ 在 x_0 处可求导数值, 则 $f(x)$ 在 x_0 处必连续。

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \Delta x = \left(\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \right) \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x = f'(x_0) \cdot 0 = 0.$$

注

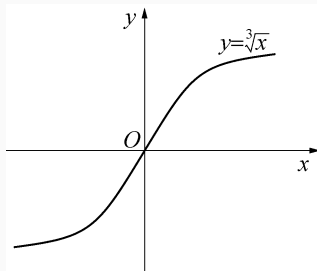
例3当中绝对值函数在 $x = 0$ 处连续但是在该点处无法求导数值, 这说明函数点态连续是函数点态可求导数值的必要条件。

函数点态可求导数值与函数点态连续的关系

例 5

函数 $f(x) = \sqrt[3]{x}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续, 但在点 $x = 0$ 处不可求导数值。

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{\Delta x} - 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (\Delta x)^{-\frac{2}{3}} = +\infty.$$



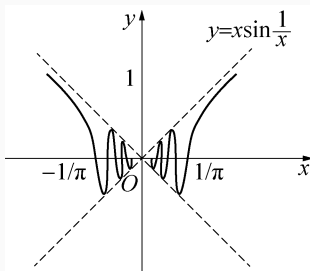
从图形上看, 在该点处有与 x 轴垂直的切线 $x = 0$ 。

函数点态可求导数值与函数点态连续的关系

例 6

函数 $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$ 在 0 处连续: $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$ 。

但是 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin \frac{1}{x} - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$ 不存在。



定义

- 如果 $y = f(x)$ 在 (a, b) 内的每一点处均可求导数值，那么称 $y = f(x)$ 在 (a, b) 内可求导数值。
- 如果 (a, b) 内的每一点都对应 $f(x)$ 一个导数值，那么我们得到一个对应的新函数，称这个函数为 f 在 (a, b) 上的**导函数**：

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}, \quad x \in (a, b),$$

定义

- 如果 $y = f(x)$ 在 (a, b) 内的每一点处均可求导数值，那么称 $y = f(x)$ 在 (a, b) 内可求导数值。
- 如果 (a, b) 内的每一点都对应 $f(x)$ 一个导数值，那么我们得到一个对应的新函数，称这个函数为 f 在 (a, b) 上的**导函数**：

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}, \quad x \in (a, b),$$

记作

$$f'(x), y', \frac{dy}{dx}, \text{ 或 } \frac{df}{dx}.$$

定义

- 如果 $y = f(x)$ 在 (a, b) 内的每一点处均可求导数值，那么称 $y = f(x)$ 在 (a, b) 内可求导数值。
- 如果 (a, b) 内的每一点都对应 $f(x)$ 一个导数值，那么我们得到一个对应的新函数，称这个函数为 f 在 (a, b) 上的**导函数**：

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}, \quad x \in (a, b),$$

记作

$$f'(x), y', \frac{dy}{dx}, \text{ 或 } \frac{df}{dx}.$$

- 函数 $y = f(x)$ 在 x_0 处的导数值即为导函数 $f'(x)$ 在 x_0 处的函数值：

$$f'(x_0) = f'(x)|_{x=x_0}.$$

一些基本初等函数的导函数

例 7

求 $f(x) = C$ (C 为常数) 的导函数。

一些基本初等函数的导函数

例 7

求 $f(x) = C$ (C 为常数) 的导函数。

例 8

求 $f(x) = x^n$ (n 为正整数) 的导函数。

一些基本初等函数的导函数

例 7

求 $f(x) = C$ (C 为常数) 的导函数。

例 8

求 $f(x) = x^n$ (n 为正整数) 的导函数。

例 9

求 $f(x) = \sin x, g(x) = \cos x$ 的导函数。

一些基本初等函数的导函数

例 7

求 $f(x) = C$ (C 为常数) 的导函数。

例 8

求 $f(x) = x^n$ (n 为正整数) 的导函数。

例 9

求 $f(x) = \sin x, g(x) = \cos x$ 的导函数。

例 10

求 $f(x) = a^x$ ($a > 0, a \neq 1$) 的导函数。

一些基本初等函数的导函数

例 7

求 $f(x) = C$ (C 为常数) 的导函数。

例 8

求 $f(x) = x^n$ (n 为正整数) 的导函数。

例 9

求 $f(x) = \sin x, g(x) = \cos x$ 的导函数。

例 10

求 $f(x) = a^x$ ($a > 0, a \neq 1$) 的导函数。

例 11

求 $f(x) = \log_a x$ ($a > 0, a \neq 1$) 的导函数。

定理

若 $u(x), v(x)$ 在点 x 处的导数值存在, 则它们的和、差、积、商的导数值也都存在, 且有

$$(1) [\alpha u(x) \pm \beta v(x)]' = \alpha u'(x) \pm \beta v'(x), \alpha, \beta \in \mathbb{R};$$

$$(2) [u(x) \cdot v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x);$$

$$(3) \left[\frac{u(x)}{v(x)} \right]' = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)} \quad (v(x) \neq 0)。$$

函数点态四则运算求导函数法则

定理

若 $u(x), v(x)$ 在点 x 处的导数值存在, 则它们的和、差、积、商的导数值也都存在, 且有

$$(1) [\alpha u(x) \pm \beta v(x)]' = \alpha u'(x) \pm \beta v'(x), \alpha, \beta \in \mathbb{R};$$

$$(2) [u(x) \cdot v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x);$$

$$(3) \left[\frac{u(x)}{v(x)} \right]' = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)} \quad (v(x) \neq 0).$$

注

若 $u(x), v(x), w(x)$ 在点 x 处的导数值存在, 则

$$[u(x) \cdot v(x) \cdot w(x)]' = u'(x)v(x)w(x) + u(x)v'(x)w(x) + u(x)v(x)w'(x).$$

利用商的求导函数公式可以得到另外四个三角函数的计算公式：

三角函数求导函数法则

利用商的求导函数公式可以得到另外四个三角函数的计算公式：

三角函数求导函数法则

$$(\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right)' = \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x;$$

$$(\cot x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x} \right)' = \frac{-\sin x \cdot \sin x - \cos x \cdot \cos x}{\sin^2 x} = \frac{-1}{\cos^2 x} = -\csc^2 x;$$

$$(\sec x)' = \left(\frac{1}{\cos x} \right)' = \frac{0 - (-\sin x)}{\cos^2 x} = \sec x \tan x;$$

$$(\csc x)' = \left(\frac{1}{\sin x} \right)' = \frac{-\cos x}{\sin^2 x} = -\csc x \cot x.$$

例 12

计算下列函数的导函数：

$$\begin{array}{ll} (1) y = 3^x - \ln x + \sin x + e; & (2) y = x^3 + 4 \cos x - \sin \frac{\pi}{7}; \\ (3) y = (x^2 + 3a^x)(\sin x - 1); & (4) y = (2x + 3)(1 - x)(x + 2); \\ (5) y = \frac{x + 1}{\ln x}; & (6) y = \frac{2\sqrt{x} \tan x}{1 + x^2}. \end{array}$$

定理

如果单调函数 $x = \varphi(y)$ 在某一区间 I_y 内可求导函数, 且 $\varphi'(y) \neq 0$, 则它的反函数 $y = f(x)$ 在对应的区间 $I_x := \{x \mid x = \varphi(y), y \in I_y\}$ 内也可求导函数, 且

$$f'(x) = \frac{1}{\varphi'(y)} \Big|_{y=f(x)}.$$

定理

如果单调函数 $x = \varphi(y)$ 在某一区间 I_y 内可求导函数, 且 $\varphi'(y) \neq 0$, 则它的反函数 $y = f(x)$ 在对应的区间 $I_x := \{x \mid x = \varphi(y), y \in I_y\}$ 内也可求导函数, 且

$$f'(x) = \frac{1}{\varphi'(y)} \Big|_{y=f(x)}.$$

由反函数存在定理可知 $f(x)$ 是单调、连续的:

反函数求导函数法则

定理

如果单调函数 $x = \varphi(y)$ 在某一区间 I_y 内可求导函数, 且 $\varphi'(y) \neq 0$, 则它的反函数 $y = f(x)$ 在对应的区间 $I_x := \{x \mid x = \varphi(y), y \in I_y\}$ 内也可求导函数, 且

$$f'(x) = \frac{1}{\varphi'(y)} \Big|_{y=f(x)}.$$

由反函数存在定理可知 $f(x)$ 是单调、连续的:

$x \rightarrow x + \Delta x \Rightarrow \Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) \neq 0$ ($f(x)$ 单调); $\Delta x \rightarrow 0 \Rightarrow \Delta y \rightarrow 0$ ($f(x)$ 连续).

反函数求导函数法则

定理

如果单调函数 $x = \varphi(y)$ 在某一区间 I_y 内可求导函数, 且 $\varphi'(y) \neq 0$, 则它的反函数 $y = f(x)$ 在对应的区间 $I_x := \{x \mid x = \varphi(y), y \in I_y\}$ 内也可求导函数, 且

$$f'(x) = \frac{1}{\varphi'(y)} \Big|_{y=f(x)}.$$

由反函数存在定理可知 $f(x)$ 是单调、连续的:

$x \rightarrow x + \Delta x \Rightarrow \Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) \neq 0$ ($f(x)$ 单调); $\Delta x \rightarrow 0 \Rightarrow \Delta y \rightarrow 0$ ($f(x)$ 连续).

因为 $x = \varphi(y)$ 在某一区间 I_y 内可求导函数, 且 $\varphi'(y) \neq 0$, 则

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\Delta x}{\Delta y}} = \frac{1}{\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta y}} = \frac{1}{\varphi'(y)}.$$

反函数求导函数法则

定理

如果单调函数 $x = \varphi(y)$ 在某一区间 I_y 内可求导函数, 且 $\varphi'(y) \neq 0$, 则它的反函数 $y = f(x)$ 在对应的区间 $I_x := \{x \mid x = \varphi(y), y \in I_y\}$ 内也可求导函数, 且

$$f'(x) = \frac{1}{\varphi'(y)} \Big|_{y=f(x)}.$$

由反函数存在定理可知 $f(x)$ 是单调、连续的:

$x \rightarrow x + \Delta x \Rightarrow \Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) \neq 0$ ($f(x)$ 单调); $\Delta x \rightarrow 0 \Rightarrow \Delta y \rightarrow 0$ ($f(x)$ 连续).

因为 $x = \varphi(y)$ 在某一区间 I_y 内可求导函数, 且 $\varphi'(y) \neq 0$, 则

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\Delta x}{\Delta y}} = \frac{1}{\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta y}} = \frac{1}{\varphi'(y)}.$$

本定理也可简单叙述为: **反函数的导函数等于其原函数导函数的倒数。**

反三角函数求导函数法则

利用反函数的求导法则可以求出下列反三角函数的导函数：

反三角函数求导函数法则

利用反函数的求导法则可以求出下列反三角函数的导函数：

三角函数求导函数法则

$y = \arcsin x$ 是 $x = \sin y$ 的反函数。

$x = \sin y$ 在 $I_y := \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 内单调、可求导函数，且 $(\sin y)'_y = \cos y > 0$,

因此，对 $x \in I_x := (-1, 1)$,

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} \xrightarrow{\cos y > 0, y \in I_y} \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

同理，对 $x \in I_x := (-1, 1)$,

$$(\arccos x)' = \frac{1}{(\cos y)'} = -\frac{1}{\sin y} \xrightarrow{\sin y > 0, y \in I_y := (0, \pi)} -\frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2 y}} = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

三角函数求导函数法则

$y = \arctan x$ 是 $x = \tan y$ 的反函数。

$x = \tan y$ 在 $I_y := \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 内单调、可求导函数，且 $(\tan y)'_y = \sec^2 y \neq 0$,

因此，对 $x \in I_x := (-\infty, +\infty)$,

$$(\arctan x)' = \frac{1}{(\tan y)'} = \frac{1}{\sec^2 y} = \frac{1}{1 + \tan^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

同理，对 $x \in I_x := (-\infty, +\infty)$,

$$(\operatorname{arccot} x)' = \frac{1}{(\cot y)'} = -\frac{1}{\csc^2 y} = -\frac{1}{1 + \cot^2 y} = -\frac{1}{1 + x^2}.$$

基本初等函数导函数公式

$$(1) (C)' = 0;$$

$$(3) (e^x)' = e^x;$$

$$(5) (a^x)' = a^x \ln a (a > 0, a \neq 1);$$

$$(7) (\sin x)' = \cos x;$$

$$(9) (\tan x)' = \sec^2 x;$$

$$(11) (\sec x)' = \sec x \tan x;$$

$$(13) (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$(15) (\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2};$$

$$(2) (x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1};$$

$$(4) (\ln |x|)' = \frac{1}{x};$$

$$(6) (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a} (a > 0, a \neq 1);$$

$$(8) (\cos x)' = -\sin x;$$

$$(10) (\cot x)' = -\csc^2 x;$$

$$(12) (\csc x)' = -\csc x \cot x;$$

$$(14) (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$(16) (\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2};$$

求分段函数的导函数时，在每一段区间内的导函数可按一般求导函数法则计算，而在分段点处的导函数值要用左、右导数值的定义来计算。

求分段函数的导函数时，在每一段区间内的导函数可按一般求导函数法则计算，而在分段点处的导数值要用左、右导数值的定义来计算。

例 13

计算函数 $f(x) = \begin{cases} 2x, & 0 < x \leq 1, \\ x^2 + 1, & 1 < x < 2 \end{cases}$ 的导函数。

定义 (切线与法线方程)

- 函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的导数值在几何上表示曲线 $y = f(x)$ 在点 $M(x_0, f(x_0))$ 处切线的斜率为 $k = f'(x_0)$ 。
- 函数 $y = f(x)$ 在点 $M(x_0, f(x_0))$ 处切线方程为

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

- 函数 $y = f(x)$ 在点 $M(x_0, f(x_0))$ 处法线 (过切点 $M(x_0, f(x_0))$ 且与切线垂直的直线) 方程为

$$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) \quad (f'(x_0) \neq 0).$$

定义 (切线与法线方程)

- 函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的导数值在几何上表示曲线 $y = f(x)$ 在点 $M(x_0, f(x_0))$ 处切线的斜率为 $k = f'(x_0)$ 。
- 函数 $y = f(x)$ 在点 $M(x_0, f(x_0))$ 处切线方程为

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

- 函数 $y = f(x)$ 在点 $M(x_0, f(x_0))$ 处法线 (过切点 $M(x_0, f(x_0))$ 且与切线垂直的直线) 方程为

$$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) \quad (f'(x_0) \neq 0).$$

例 14

计算曲线 $y = \frac{1}{x}$ 在点 $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$ 处的切线斜率, 并写出切线及法线方程。

导函数的计算法则

本节我们讨论复合函数、高阶导函数、隐函数和函数参数方程求导函数法则。

本节我们讨论复合函数、高阶导函数、隐函数和函数参数方程求导函数法则。

(1) 复合函数分解: $y = f[g(x)]$ 由内层函数 $u = g(x)$ 和外层函数 $y = f(u)$ 复合而成;

本节我们讨论复合函数、高阶导函数、隐函数和函数参数方程求导函数法则。

- (1) 复合函数分解: $y = f[g(x)]$ 由内层函数 $u = g(x)$ 和外层函数 $y = f(u)$ 复合而成;
- (2) 函数本身的表示方式: 函数之间的对应关系可以用不同方式来进行表达:

本节我们讨论复合函数、高阶导函数、隐函数和函数参数方程求导函数法则。

- (1) 复合函数分解: $y = f[g(x)]$ 由内层函数 $u = g(x)$ 和外层函数 $y = f(u)$ 复合而成;
- (2) 函数本身的表示方式: 函数之间的对应关系可以用不同方式来进行表达:
 - 通过函数解析式进行表示称为函数的显性表达 (显函数);
 - 通过一个方程确定变量之间关系的表示方法称为函数的隐性表达 (隐函数)。

本节我们讨论复合函数、高阶导函数、隐函数和函数参数方程求导函数法则。

- (1) 复合函数分解: $y = f[g(x)]$ 由内层函数 $u = g(x)$ 和外层函数 $y = f(u)$ 复合而成;
- (2) 函数本身的表示方式: 函数之间的对应关系可以用不同方式来进行表达:
 - 通过函数解析式进行表示称为函数的显性表达 (显函数);
 - 通过一个方程确定变量之间关系的表示方法称为函数的隐性表达 (隐函数)。
- (3) 变量 y 与 x 直接不是直接由表达式 $y = f(x)$ 表示, 而是通过一个参变量 t 的方程来表示的方式称为函数的参数方程:

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t). \end{cases} \quad t \in [\alpha, \beta], \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

复合函数求导函数法则

定理 (复合函数求导函数法则)

如果 $y = f(u)$ 在点 u 处可求导函数, $u = g(x)$ 在点 x 处可求导函数, 那么复合函数 $y = f[g(x)]$ 在点 x 处可求导函数, 且

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \text{ (即 } y'(x) = f'(u) \cdot g'(x) \text{)}.$$

复合函数求导函数法则

定理 (复合函数求导函数法则)

如果 $y = f(u)$ 在点 u 处可求导函数, $u = g(x)$ 在点 x 处可求导函数, 那么复合函数 $y = f[g(x)]$ 在点 x 处可求导函数, 且

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \text{ (即 } y'(x) = f'(u) \cdot g'(x) \text{)}.$$

注

复合函数的求导法则也称为**链式法则**, 它可推广到有限个函数复合的情形:
若 $y = f(u)$, $u = g(v)$ 及 $v = h(x)$ 可求导函数, 则 $y = f\{g[h(x)]\}$ 可求导函数, 且

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx} = f'(u) \cdot g'(v) \cdot h'(x).$$

例 1

计算下列函数的导函数：

$$\begin{aligned} (1) y &= e^{2x}; & (2) y &= \sin x^2; & (3) y &= (x^2 + 1)^{10}; & (4) y &= \sqrt{1 - x^2}; \\ (5) y &= \ln(\sin x); & (6) y &= \cos^2 x; & (7) y &= e^{\sin \frac{x}{2}}; & (8) y &= (x + \sin^2 x)^3. \end{aligned}$$

例 1

计算下列函数的导函数：

$$\begin{array}{llll} (1) y = e^{2x}; & (2) y = \sin x^2; & (3) y = (x^2 + 1)^{10}; & (4) y = \sqrt{1 - x^2}; \\ (5) y = \ln(\sin x); & (6) y = \cos^2 x; & (7) y = e^{\sin \frac{x}{2}}; & (8) y = (x + \sin^2 x)^3. \end{array}$$

例 2

计算函数 $y = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ 的导函数。

例 1

计算下列函数的导函数：

$$\begin{aligned} (1) y &= e^{2x}; & (2) y &= \sin x^2; & (3) y &= (x^2 + 1)^{10}; & (4) y &= \sqrt{1 - x^2}; \\ (5) y &= \ln(\sin x); & (6) y &= \cos^2 x; & (7) y &= e^{\sin \frac{x}{2}}; & (8) y &= (x + \sin^2 x)^3. \end{aligned}$$

例 2

计算函数 $y = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ 的导函数。

例 3

计算函数 $y = \ln \sqrt{x^2 + 1}$ 的导函数。

例 1

计算下列函数的导函数：

$$\begin{aligned} (1) y &= e^{2x}; & (2) y &= \sin x^2; & (3) y &= (x^2 + 1)^{10}; & (4) y &= \sqrt{1 - x^2}; \\ (5) y &= \ln(\sin x); & (6) y &= \cos^2 x; & (7) y &= e^{\sin \frac{x}{2}}; & (8) y &= (x + \sin^2 x)^3. \end{aligned}$$

例 2

计算函数 $y = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ 的导函数。

例 3

计算函数 $y = \ln \sqrt{x^2 + 1}$ 的导函数。

例 4

计算函数 $y = x^{\frac{1}{x}} (x > 0, x \neq 1)$ 的导函数。

定义 (高阶导函数)

- 如果函数 $f(x)$ 的导函数 $f'(x)$ 仍对变量 x 可求导函数, 那么称 $f'(x)$ 的导函数为 $f(x)$ 的二阶导函数, 记作

$$y'' = (y')', f''(x) = [f'(x)]', \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) \text{ 或 } \frac{d^2 f}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{df}{dx} \right).$$

定义 (高阶导函数)

- 如果函数 $f(x)$ 的导函数 $f'(x)$ 仍对变量 x 可求导函数, 那么称 $f'(x)$ 的导函数为 $f(x)$ 的二阶导函数, 记作

$$y'' = (y')', f''(x) = [f'(x)]', \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) \text{ 或 } \frac{d^2 f}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{df}{dx} \right).$$

- 设 $n \in \mathbb{Z}^+, n \geq 2$, 如果 $f(x)$ 的 $n-1$ 阶导函数仍可以计算导函数, 那么我们称 $f(x)$ 的 n 阶导函数,

$$y^{(n)}, f^{(n)}(x), \frac{d^n y}{dx^n} \text{ 或 } \frac{d^n f}{dx^n}.$$

定义 (高阶导函数)

- 如果函数 $f(x)$ 的导函数 $f'(x)$ 仍对变量 x 可求导函数, 那么称 $f'(x)$ 的导函数为 $f(x)$ 的二阶导函数, 记作

$$y'' = (y')', f''(x) = [f'(x)]', \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) \text{ 或 } \frac{d^2 f}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{df}{dx} \right).$$

- 设 $n \in \mathbb{Z}^+, n \geq 2$, 如果 $f(x)$ 的 $n-1$ 阶导函数仍可以计算导函数, 那么我们称 $f(x)$ 的 n 阶导函数,

$$y^{(n)}, f^{(n)}(x), \frac{d^n y}{dx^n} \text{ 或 } \frac{d^n f}{dx^n}.$$

- 一个函数的二阶及二阶以上的导函数均称为高阶导数。

例 5

计算函数 $f(x) = x^2 + \ln x$ 的二阶导函数。

引例（二阶导函数）

例 5

计算函数 $f(x) = x^2 + \ln x$ 的二阶导函数。

例 6

设函数 $y = \arctan x$ ，计算 $f''(0)$ 。

引例（二阶导函数）

例 5

计算函数 $f(x) = x^2 + \ln x$ 的二阶导函数。

例 6

设函数 $y = \arctan x$ ，计算 $f''(0)$ 。

例 7

证明 $y = e^x \sin x$ 满足关系式 $y'' - 2y' + 2y = 0$ 。

引例（二阶导函数）

例 5

计算函数 $f(x) = x^2 + \ln x$ 的二阶导函数。

例 6

设函数 $y = \arctan x$ ，计算 $f''(0)$ 。

例 7

证明 $y = e^x \sin x$ 满足关系式 $y'' - 2y' + 2y = 0$ 。

例 8

计算函数 $y = x^\mu$ 的 n 阶导函数。

引例（高阶导函数）

例 8

计算函数 $y = x^\mu$ 的 n 阶导函数。

例 9

设函数 $y = \frac{1}{x}$ ，计算 $y^{(n)}$ 。

引例（高阶导函数）

例 8

计算函数 $y = x^\mu$ 的 n 阶导函数。

例 9

设函数 $y = \frac{1}{x}$ ，计算 $y^{(n)}$ 。

例 10

计算函数 $\sin x, \cos x$ 的 n 阶导函数。

引例（高阶导函数）

例 8

计算函数 $y = x^\mu$ 的 n 阶导函数。

例 9

设函数 $y = \frac{1}{x}$ ，计算 $y^{(n)}$ 。

例 10

计算函数 $\sin x, \cos x$ 的 n 阶导函数。

例 11

计算函数 $f(x) = \frac{1}{x^2 + 5x + 6}$ 的 n 阶导函数。

定理 (高阶导函数的运算法则)

如果 $f(x), g(x)$ 具有 n 阶导函数, 那么

定理 (高阶导函数的运算法则)

如果 $f(x), g(x)$ 具有 n 阶导函数, 那么

$$(1) [\alpha f(x) \pm \beta g(x)]^{(n)} = \alpha f(x)^{(n)} \pm \beta g(x)^{(n)};$$

定理 (高阶导函数的运算法则)

如果 $f(x), g(x)$ 具有 n 阶导函数, 那么

$$(1) [\alpha f(x) \pm \beta g(x)]^{(n)} = \alpha f(x)^{(n)} \pm \beta g(x)^{(n)};$$

(2) 莱布尼茨(Leibniz)公式:

$$\begin{aligned} [f(x) \cdot g(x)]^{(n)} &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)} = \sum_{k=0}^n C_n^k f^{(k)} g^{(n-k)} \\ &:= f g^{(n)} + C_n^1 f^{(1)} g^{(n-1)} + \cdots + C_n^k f^{(k)} g^{(n-k)} + \cdots + f^{(n)} g, \end{aligned}$$

其中

$$\binom{n}{k} = C_n^k = \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{k!}.$$

定义 (隐函数)

设变量 x 和 y 满足方程 $F(x, y) = 0$ ，如果在某些条件下，当 x 取某区间内的任一值时，相应地总有满足这个方程的唯一的 y 值存在，那么称方程 $F(x, y) = 0$ 在该区间内确定了一个隐函数，记为 $y = y(x)$ 。

定义 (隐函数)

设变量 x 和 y 满足方程 $F(x, y) = 0$ ，如果在某些条件下，当 x 取某区间内的任一值时，相应地总有满足这个方程的唯一的 y 值存在，那么称方程 $F(x, y) = 0$ 在该区间内确定了一个隐函数，记为 $y = y(x)$ 。

将一个隐函数转化成显函数，叫作隐函数的显化：

定义 (隐函数)

设变量 x 和 y 满足方程 $F(x, y) = 0$ ，如果在某些条件下，当 x 取某区间内的任一值时，相应地总有满足这个方程的唯一的 y 值存在，那么称方程 $F(x, y) = 0$ 在该区间内确定了一个隐函数，记为 $y = y(x)$ 。

将一个隐函数转化成显函数，叫作隐函数的显化：

- $x + y^3 - 1 = 0 \Rightarrow y = \sqrt[3]{1-x}$ 的过程就是一个隐函数显化过程；

定义 (隐函数)

设变量 x 和 y 满足方程 $F(x, y) = 0$ ，如果在某些条件下，当 x 取某区间内的任一值时，相应地总有满足这个方程的唯一的 y 值存在，那么称方程 $F(x, y) = 0$ 在该区间内确定了一个隐函数，记为 $y = y(x)$ 。

将一个隐函数转化成显函数，叫作隐函数的显化：

- $x + y^3 - 1 = 0 \Rightarrow y = \sqrt[3]{1-x}$ 的过程就是一个隐函数显化过程；
- 方程 $e^x - e^y + \sin xy - 1 = 0$ 无法完成隐函数的显化。

定义 (隐函数)

设变量 x 和 y 满足方程 $F(x, y) = 0$ ，如果在某些条件下，当 x 取某区间内的任一值时，相应地总有满足这个方程的唯一的 y 值存在，那么称方程 $F(x, y) = 0$ 在该区间内确定了一个隐函数，记为 $y = y(x)$ 。

将一个隐函数转化成显函数，叫作隐函数的显化：

- $x + y^3 - 1 = 0 \Rightarrow y = \sqrt[3]{1-x}$ 的过程就是一个隐函数显化过程；
- 方程 $e^x - e^y + \sin xy - 1 = 0$ 无法完成隐函数的显化。

设方程 $F(x, y) = 0$ 确定了一个函数 $y = y(x)$ ，如何计算该函数的导函数？

定义 (隐函数)

设变量 x 和 y 满足方程 $F(x, y) = 0$, 如果在某些条件下, 当 x 取某区间内的任一值时, 相应地总有满足这个方程的唯一的 y 值存在, 那么称方程 $F(x, y) = 0$ 在该区间内确定了一个隐函数, 记为 $y = y(x)$ 。

将一个隐函数转化成显函数, 叫作隐函数的显化:

- $x + y^3 - 1 = 0 \Rightarrow y = \sqrt[3]{1-x}$ 的过程就是一个隐函数显化过程;
- 方程 $e^x - e^y + \sin xy - 1 = 0$ 无法完成隐函数的显化。

设方程 $F(x, y) = 0$ 确定了一个函数 $y = y(x)$, 如何计算该函数的导函数?

(1) 将 $y = y(x)$ “代入” 方程得到恒等式 $F(x, y(x)) \equiv 0$;

定义 (隐函数)

设变量 x 和 y 满足方程 $F(x, y) = 0$, 如果在某些条件下, 当 x 取某区间内的任一值时, 相应地总有满足这个方程的唯一的 y 值存在, 那么称方程 $F(x, y) = 0$ 在该区间内确定了一个隐函数, 记为 $y = y(x)$ 。

将一个隐函数转化成显函数, 叫作隐函数的显化:

- $x + y^3 - 1 = 0 \Rightarrow y = \sqrt[3]{1-x}$ 的过程就是一个隐函数显化过程;
- 方程 $e^x - e^y + \sin xy - 1 = 0$ 无法完成隐函数的显化。

设方程 $F(x, y) = 0$ 确定了一个函数 $y = y(x)$, 如何计算该函数的导函数?

- (1) 将 $y = y(x)$ “代入” 方程得到恒等式 $F(x, y(x)) \equiv 0$;
- (2) 将 y 看作 x 的函数, 在等式 $F(x, y(x)) \equiv 0$ 两边关于 x 求导函数即可解得 y' 。

定义 (隐函数)

设变量 x 和 y 满足方程 $F(x, y) = 0$, 如果在某些条件下, 当 x 取某区间内的任一值时, 相应地总有满足这个方程的唯一的 y 值存在, 那么称方程 $F(x, y) = 0$ 在该区间内确定了一个隐函数, 记为 $y = y(x)$ 。

将一个隐函数转化成显函数, 叫作隐函数的显化:

- $x + y^3 - 1 = 0 \Rightarrow y = \sqrt[3]{1-x}$ 的过程就是一个隐函数显化过程;
- 方程 $e^x - e^y + \sin xy - 1 = 0$ 无法完成隐函数的显化。

设方程 $F(x, y) = 0$ 确定了一个函数 $y = y(x)$, 如何计算该函数的导函数?

- (1) 将 $y = y(x)$ “代入” 方程得到恒等式 $F(x, y(x)) \equiv 0$;
- (2) 将 y 看作 x 的函数, 在等式 $F(x, y(x)) \equiv 0$ 两边关于 x 求导函数即可解得 y' 。

对隐函数也可以求高阶导函数, 只要在计算过程中始终将 $y, y', \dots, y^{(n)}$ 等看成 x 的函数即可。

例 12

设方程 $y = 1 + xe^y$ 所确定的隐函数为 $y = y(x)$ ，求 $y'(0)$ 。

引例（隐函数计算导函数）

例 12

设方程 $y = 1 + xe^y$ 所确定的隐函数为 $y = y(x)$ ，求 $y'(0)$ 。

例 13

求由方程 $xy + \ln y = 1$ 所确定的函数 $y = y(x)$ 在点 $M(1, 1)$ 处的切线方程。

引例（隐函数计算导函数）

例 12

设方程 $y = 1 + xe^y$ 所确定的隐函数为 $y = y(x)$ ，求 $y'(0)$ 。

例 13

求由方程 $xy + \ln y = 1$ 所确定的函数 $y = y(x)$ 在点 $M(1, 1)$ 处的切线方程。

例 14

设 $x^4 - xy + y^4 = 1$ ，求 y'' 在点 $(0, 1)$ 处的值。

引例（隐函数计算导函数）

例 12

设方程 $y = 1 + xe^y$ 所确定的隐函数为 $y = y(x)$ ，求 $y'(0)$ 。

例 13

求由方程 $xy + \ln y = 1$ 所确定的函数 $y = y(x)$ 在点 $M(1, 1)$ 处的切线方程。

例 14

设 $x^4 - xy + y^4 = 1$ ，求 y'' 在点 $(0, 1)$ 处的值。

例 15

设 $y = \frac{(x+1)\sqrt[3]{x-1}}{(x+4)^2 e^x}$ ，求 y' 。

引例（隐函数计算导函数）

对于幂指函数 $y = u(x)^{v(x)}$:

$$y = u(x)^{v(x)} \implies y = e^{v(x) \ln u(x)},$$

两边取对数:

$$\ln y = v(x) \ln u(x),$$

将其视为隐函数 y 对 x 求导函数的方法称为**对数求导函数方法**。

引例（隐函数计算导函数）

对于幂指函数 $y = u(x)^{v(x)}$:

$$y = u(x)^{v(x)} \implies y = e^{v(x) \ln u(x)},$$

两边取对数:

$$\ln y = v(x) \ln u(x),$$

将其视为隐函数 y 对 x 求导函数的方法称为**对数求导函数方法**。

例 16

求由方程 $x^y = y^x$ ($x, y > 0, x, y \neq 1$) 所确定的隐函数 y 对 x 的导函数。

参数方程所确定函数的的导函数

设参数方程 $\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t). \end{cases}$ (其中 t 为参数)确定函数 $y = y(x)$ 。

参数方程所确定函数的导函数

设参数方程 $\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t). \end{cases}$ (其中 t 为参数) 确定函数 $y = y(x)$ 。

- 我们可以考虑消去参数 t :

$x = \varphi(t) \Rightarrow t = \varphi^{-1}(x) \Rightarrow$ 使用复合函数求导函数法则 $y = \psi[\varphi^{-1}(x)]$ 计算 $y'(x)$ 。

参数方程所确定函数的导函数

设参数方程 $\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t). \end{cases}$ (其中 t 为参数) 确定函数 $y = y(x)$ 。

- 我们可以考虑消去参数 t :

$x = \varphi(t) \Rightarrow t = \varphi^{-1}(x) \Rightarrow$ 使用复合函数求导函数法则 $y = \psi[\varphi^{-1}(x)]$ 计算 $y'(x)$ 。

- 如果消去参数 t 非常困难 (例如 $\begin{cases} x = \sin t + e^t, \\ y = t^2 + \cos t. \end{cases}$), 但 $x = \varphi(t)$ 的反函

数 $t = \varphi^{-1}(x)$ 满足求导函数的条件, 那么对复合函数 $y = \psi[\varphi^{-1}(x)]$ 使用反函数求导函数法则:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{1}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}.$$

(这里 $\varphi'(t) \neq 0$ 是反函数的求导法则中的条件之一)

- 如果 $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ 具有二阶导函数, 那么

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{\frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dx} \right)}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{\varphi'(t)\psi''(t) - \varphi''(t)\psi'(t)}{[\varphi'(t)]^2}}{\varphi'(t)}.$$

参数方程所确定函数的的导函数

- 如果 $x = \varphi(t), y = \psi(t)$ 具有二阶导函数, 那么

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{\frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dx} \right)}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{\varphi'(t)\psi''(t) - \varphi''(t)\psi'(t)}{[\varphi'(t)]^2}}{\varphi'(t)}.$$

例 17

已知圆的参数方程为 $\begin{cases} x = a \sin t, \\ y = a \cos t. \end{cases} (a > 0)$, 求 y' 。

例 18

已知函数参数方程为 $\begin{cases} x = a \sin^3 t, \\ y = b \cos^3 t. \end{cases} (a, b > 0)$, 求 y' 。

例 18

已知函数参数方程为 $\begin{cases} x = a \sin^3 t, \\ y = b \cos^3 t. \end{cases} (a, b > 0)$, 求 y' 。

例 19

已知函数参数方程为 $\begin{cases} x = \ln(1 + t^2), \\ y = t - \arctan t. \end{cases}$, 求 y'' 。

引例（参数方程所确定函数计算导函数）

例 18

已知函数参数方程为 $\begin{cases} x = a \sin^3 t, \\ y = b \cos^3 t. \end{cases} (a, b > 0)$, 求 y' 。

例 19

已知函数参数方程为 $\begin{cases} x = \ln(1 + t^2), \\ y = t - \arctan t. \end{cases}$, 求 y'' 。

例 20

已知函数参数方程为 $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = -a \cos t. \end{cases} (a > 0)$, 求 y'' 。

微分的概念与应用

当自变量 x 有微小变化 Δx ，求函数 $f(x)$ 的微小改变量 $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ 。

当自变量 x 有微小变化 Δx ，求函数 $f(x)$ 的微小改变量 $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ 。

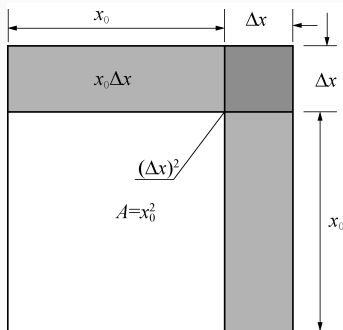
线性化引例

一块正方形金属薄片因受温度变化的影响，其边长由 x_0 变到 $x_0 + \Delta x$ ，那么此薄片面积改变了多少？

当自变量 x 有微小变化 Δx ，求函数 $f(x)$ 的微小改变量 $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ 。

线性化引例

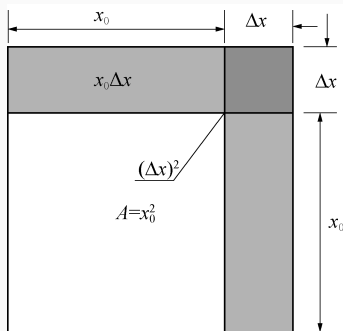
一块正方形金属薄片因受温度变化的影响，其边长由 x_0 变到 $x_0 + \Delta x$ ，那么此薄片面积改变了多少？



当自变量 x 有微小变化 Δx ，求函数 $f(x)$ 的微小改变量 $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ 。

线性化引例

一块正方形金属薄片因受温度变化的影响，其边长由 x_0 变到 $x_0 + \Delta x$ ，那么此薄片面积改变了多少？

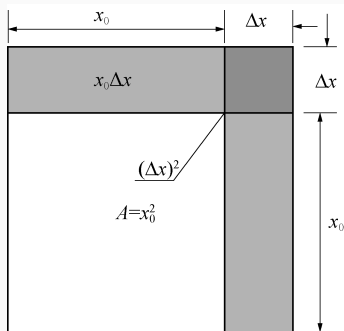


设正方形金属薄片边长为 x_0 ，面积为 A 。

当自变量 x 有微小变化 Δx ，求函数 $f(x)$ 的微小改变量 $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ 。

线性化引例

一块正方形金属薄片因受温度变化的影响，其边长由 x_0 变到 $x_0 + \Delta x$ ，那么此薄片面积改变了多少？



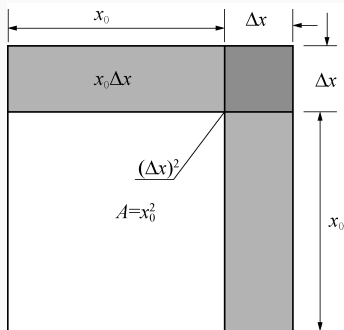
设正方形金属薄片边长为 x_0 ，面积为 A 。

当自变量 x 从 x_0 变到 $x_0 + \Delta x$ 时，面积的改变量为

当自变量 x 有微小变化 Δx ，求函数 $f(x)$ 的微小改变量 $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ 。

线性化引例

一块正方形金属薄片因受温度变化的影响，其边长由 x_0 变到 $x_0 + \Delta x$ ，那么此薄片面积改变了多少？



设正方形金属薄片边长为 x_0 ，面积为 A 。

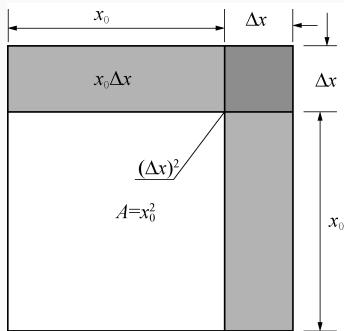
当自变量 x 从 x_0 变到 $x_0 + \Delta x$ 时，面积的改变量为

$$\Delta A = (x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2 = \underbrace{2x_0 \Delta x}_{\Delta x \text{ 的线性函数}} + \underbrace{(\Delta x)^2}_{\text{比 } \Delta x \text{ 高阶的无穷小}}.$$

当自变量 x 有微小变化 Δx ，求函数 $f(x)$ 的微小改变量 $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ 。

线性化引例

一块正方形金属薄片因受温度变化的影响，其边长由 x_0 变到 $x_0 + \Delta x$ ，那么此薄片面积改变了多少？



设正方形金属薄片边长为 x_0 ，面积为 A 。

当自变量 x 从 x_0 变到 $x_0 + \Delta x$ 时，面积的改变量为

$$\Delta A = (x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2 = \underbrace{2x_0 \Delta x}_{\Delta x \text{ 的线性函数}} + \underbrace{(\Delta x)^2}_{\text{比 } \Delta x \text{ 高阶的无穷小}}.$$

当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时，面积的改变量 ΔA 可近似地用第一部分关于 Δx 的线性函数来代替。

计算引例

取函数 $y = \sin x$ ，我们在 $x = \frac{\pi}{3}$ 处分别计算 Δy 及 $dy := (\sin x)'|_{x=\frac{\pi}{3}} \cdot \Delta x$ ：

计算引例

取函数 $y = \sin x$, 我们在 $x = \frac{\pi}{3}$ 处分别计算 Δy 及 $dy := (\sin x)'|_{x=\frac{\pi}{3}} \cdot \Delta x$:

Δx	0.1	0.01	0.001	0.0001	0.00001
Δy	0.000871	0.000088	0.000009	0.000001	0.00000008
dy	0.05	0.005	0.0005	0.00005	0.000005

计算引例

取函数 $y = \sin x$, 我们在 $x = \frac{\pi}{3}$ 处分别计算 Δy 及 $dy := (\sin x)'|_{x=\frac{\pi}{3}} \cdot \Delta x$:

Δx	0.1	0.01	0.001	0.0001	0.00001
Δy	0.000871	0.000088	0.000009	0.000001	0.00000008
dy	0.05	0.005	0.0005	0.00005	0.000005

观察上述表格数据可知:

计算引例

取函数 $y = \sin x$ ，我们在 $x = \frac{\pi}{3}$ 处分别计算 Δy 及 $dy := (\sin x)'|_{x=\frac{\pi}{3}} \cdot \Delta x$ ：

Δx	0.1	0.01	0.001	0.0001	0.00001
Δy	0.000871	0.000088	0.000009	0.000001	0.00000008
dy	0.05	0.005	0.0005	0.00005	0.000005

观察上述表格数据可知：

(1) 计算 dy 比计算 Δy 更容易；

计算引例

取函数 $y = \sin x$ ，我们在 $x = \frac{\pi}{3}$ 处分别计算 Δy 及 $dy := (\sin x)'|_{x=\frac{\pi}{3}} \cdot \Delta x$ ：

Δx	0.1	0.01	0.001	0.0001	0.00001
Δy	0.000871	0.000088	0.000009	0.000001	0.00000008
dy	0.05	0.005	0.0005	0.00005	0.000005

观察上述表格数据可知：

- (1) 计算 dy 比计算 Δy 更容易；
- (2) 当 Δy 越来越小时， dy 与 Δy 越来越接近。

微分的定义

如果函数 $y = f(x)$ 满足一定条件，使得 $\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x)$ 且常数 A 不依赖于 Δx ，那么

- $A\Delta x$ 是一个关于 Δx 的线性函数；
- $\Delta y - A\Delta x = o(\Delta x)$ 是比 Δx 高阶的无穷小。

因此，当 $A \neq 0$ 且 Δx 足够小时，我们可以用 $A\Delta x$ 近似替代 Δy 。

微分的定义

如果函数 $y = f(x)$ 满足一定条件, 使得 $\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x)$ 且常数 A 不依赖于 Δx , 那么

- $A\Delta x$ 是一个关于 Δx 的线性函数;
- $\Delta y - A\Delta x = o(\Delta x)$ 是比 Δx 高阶的无穷小。

因此, 当 $A \neq 0$ 且 Δx 足够小时, 我们可以用 $A\Delta x$ 近似替代 Δy 。

定义

设函数 $f(x)$ 在某区间 I 内有定义, $x_0, x_0 + \Delta x \in I$, 如果函数的增量 Δy 可表示为

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x) = A\Delta x + o(\Delta x),$$

其中 A 为不依赖于 Δx 的常数且 $o(\Delta x)$ 是比 Δx 高阶的无穷小, 那么称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处是可微分的, 而 $A\Delta x$ 称作函数 $f(x)$ 在点 x_0 相应于 Δx 的微分, 记作 $dy|_{x=x_0}$, 即 $dy|_{x=x_0} = A\Delta x$ 。

函数点态可微分的充分必要条件

定理

函数 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处可微分的充分必要条件是 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处可求导数值。

函数点态可微分的充分必要条件

定理

函数 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处可微分的充分必要条件是 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处可求导数值。

(\implies) $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处可微分, 那么 $\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x)$ 。

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_0} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[A + \frac{o(\Delta x)}{\Delta x} \right] = A \Rightarrow f(x) \text{ 在 } x = x_0 \text{ 处可求导数值。}$$

函数点态可微分的充分必要条件

定理

函数 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处可微分的充分必要条件是 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处可求导数值。

(\implies) $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处可微分, 那么 $\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x)$ 。

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_0} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[A + \frac{o(\Delta x)}{\Delta x} \right] = A \Rightarrow f(x) \text{ 在 } x = x_0 \text{ 处可求导数值。}$$

(\impliedby) $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处可求导数值, 那么

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_0} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_0} + \alpha(\Delta x), \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha(\Delta x) = 0 \Rightarrow \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\alpha(\Delta x)\Delta x}{\Delta x} = 0.$$

函数点态可微分的充分必要条件

定理

函数 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处可微分的充分必要条件是 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处可求导数值。

(\implies) $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处可微分, 那么 $\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x)$ 。

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_0} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[A + \frac{o(\Delta x)}{\Delta x} \right] = A \Rightarrow f(x) \text{ 在 } x = x_0 \text{ 处可求导数值。}$$

(\impliedby) $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处可求导数值, 那么

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_0} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_0} + \alpha(x_0), \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha(x_0) = 0 \Rightarrow \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\alpha(x_0)\Delta x}{\Delta x} = 0.$$

$$\text{因此, } \Delta y = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_0} \cdot \Delta x + \alpha(x_0) \cdot \Delta x \xrightarrow{\alpha(x_0)\Delta x = o(\Delta x)} \Delta y = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_0} \cdot \Delta x + o(\Delta x),$$

所以 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处可微分且 $dy|_{x=x_0} = A\Delta x = f'(x_0)\Delta x$ 。

定义

- 如果函数 $y = f(x)$ 在区间 (a, b) 内每一点都可微分，那么称 $f(x)$ 是 (a, b) 内的可微函数；

定义

- 如果函数 $y = f(x)$ 在区间 (a, b) 内每一点都可微分, 那么称 $f(x)$ 是 (a, b) 内的可微函数;
- 函数 $f(x)$ 在任意一点 x 处的微分记为 $dy = f'(x)\Delta x$;

定义

- 如果函数 $y = f(x)$ 在区间 (a, b) 内每一点都可微分, 那么称 $f(x)$ 是 (a, b) 内的可微函数;
- 函数 $f(x)$ 在任意一点 x 处的微分记为 $dy = f'(x)\Delta x$;
- 对函数 $y = x$, 一方面 $dy = (x)'\Delta x = \Delta x$, 另一方面 $dy = dx$, 于是我们有

$$dy = f'(x)\Delta x \xrightarrow{dx=\Delta x} dy = f'(x)dx \Rightarrow y' = \frac{dy}{dx}.$$

定义

- 如果函数 $y = f(x)$ 在区间 (a, b) 内每一点都可微分, 那么称 $f(x)$ 是 (a, b) 内的可微函数;
- 函数 $f(x)$ 在任意一点 x 处的微分记为 $dy = f'(x)\Delta x$;
- 对函数 $y = x$, 一方面 $dy = (x)'\Delta x = \Delta x$, 另一方面 $dy = dx$, 于是我们有

$$dy = f'(x)\Delta x \xrightarrow{dx=\Delta x} dy = f'(x)dx \Rightarrow y' = \frac{dy}{dx}.$$

- 注意到

$$\text{导函数 } y' = \frac{\text{函数 } y=f(x) \text{ 的微分 } dy}{\text{自变量 } x \text{ 的微分 } dx},$$

因此, 导函数可以看作是二个微分(函数微分与自变量微分)的商, 称为微商。

注

- 设导函数 $y'(x) \neq 0$, 当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时,

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y - dy}{\Delta y} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y - y' \Delta x}{\Delta y} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[1 - \frac{y'}{\frac{\Delta y}{\Delta x}} \right] = 0 \Rightarrow \Delta y - dy = o(\Delta y).$$

因此当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时, 称 dy 是 Δy 的线性主部。

- 当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时,

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{dy}{\Delta y} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{y' \Delta x}{\Delta y} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{y'}{\frac{\Delta y}{\Delta x}} = 1 \quad (y'(x) \neq 0) \Rightarrow \Delta y \approx dy \quad (\text{当 } \Delta x \text{ 很小时}).$$

- 微分可通过微商表示为 $dy = y' dx$, 所以由基本初等函数的导函数公式和求导函数法则很容易得到基本初等函数的微分公式及求微分法则。

基本初等函数的微分公式及求微分法则

基本初等函数微分公式

$$(1) d(C) = 0dx (C \in \mathbb{R});$$

$$(2) d(x^\alpha) = \alpha x^{\alpha-1} dx (\alpha \in \mathbb{R});$$

$$(3) d(e^x) = e^x dx;$$

$$(4) d(\ln |x|) = \frac{dx}{x};$$

$$(5) d(a^x) = a^x \ln a dx (a > 0, a \neq 1); \quad (6) d(\log_a x) = \frac{dx}{x \ln a} (a > 0, a \neq 1);$$

$$(7) d(\sin x) = \cos x dx;$$

$$(8) d(\cos x) = -\sin x dx;$$

$$(9) d(\tan x) = \sec^2 x dx;$$

$$(10) d(\cot x) = -\csc^2 x dx;$$

$$(11) d(\sec x) = \sec x \tan x dx;$$

$$(12) d(\csc x) = -\csc x \cot x dx;$$

$$(13) d(\arcsin x) = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$(14) d(\arccos x) = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$(15) d(\arctan x) = \frac{dx}{1+x^2};$$

$$(16) d(\operatorname{arccot} x) = -\frac{dx}{1+x^2};$$

可微函数求微分法则

$$(1) \quad d(u \pm v) = (u \pm v)'dx = u'dx \pm v'dx = du \pm dv;$$

$$(2) \quad d(u \cdot v) = (u \cdot v)'dx = u'vdx \pm uv'dx = vdu \pm udv;$$

$$(3) \quad d\left(\frac{u}{v}\right) = \left(\frac{u}{v}\right)'dx = \left(\frac{u'v - uv'}{v^2}\right)dx = \frac{vu'dx - uv'dx}{v^2} = \frac{vdu - udv}{v^2};$$

(4) 设 $y = f(u)$, $u = \varphi(x)$ 可微, 则复合函数 $y = f[\varphi(x)]$ 可微且

$$dy = y'dx = f'[\varphi(x)]\varphi'(x)dx \xrightarrow[u=\varphi(x)]{du=\varphi'(x)dx} f'(u)du.$$

因此不管 u 是自变量还是中间变量(另一变量的可微函数), 微分形式 dy 保持不变, 我们称这一性质为微分形式的不变性。

例 2

设 $y = \cos x$, 求 dy 。

例 2

设 $y = \cos x$, 求 dy 。

例 3

设 $y = \ln(1 - x) \sin x$, 求 dy 。

例 2

设 $y = \cos x$, 求 dy 。

例 3

设 $y = \ln(1 - x) \sin x$, 求 dy 。

例 4

设 $y = e^{\cos^2 x}$, 求 dy 。

例 2

设 $y = \cos x$, 求 dy 。

例 3

设 $y = \ln(1 - x) \sin x$, 求 dy 。

例 4

设 $y = e^{\cos^2 x}$, 求 dy 。

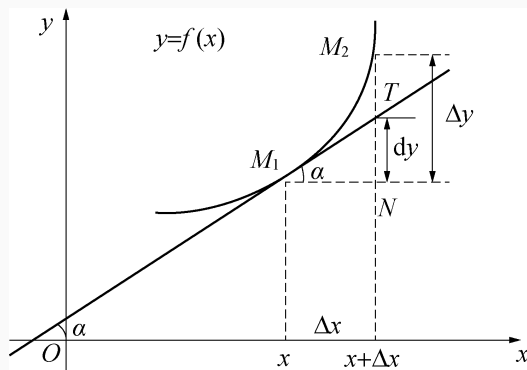
例 5

设 $y = y(x)$ 是由方程 $x^2y + xy^2 = 1$ 确定的隐函数, 求 dy 。

在可微函数 $y = f(x)$ 的曲线上取相邻两点 $M_1(x, y)$ 和 $M_2(x + \Delta x, y + \Delta y)$ 。过点 M_1 作曲线的切线 M_1T ，设 M_1T 的倾角为 α ，则 M_1T 的斜率为 $\tan \alpha = f'(x)$ 。

函数点态微分的几何意义

在可微函数 $y = f(x)$ 的曲线上取相邻两点 $M_1(x, y)$ 和 $M_2(x + \Delta x, y + \Delta y)$ 。过点 M_1 作曲线的切线 M_1T ，设 M_1T 的倾角为 α ，则 M_1T 的斜率为 $\tan \alpha = f'(x)$ 。



观察到

$$M_1N = \Delta x, NM_2 = \Delta y, \Rightarrow NT = M_1 \cdot \tan \alpha = f'(x)\Delta x = dy.$$

观察到

$$M_1N = \Delta x, NM_2 = \Delta y, \Rightarrow NT = M_1 \cdot \tan \alpha = f'(x)\Delta x = dy.$$

因此,

- 当 Δy 是曲线对应于点 x 的函数增量时, dy 即是过点 $M_1(x, y)$ 的切线的纵坐标增量;
- 当 Δy 是曲线 $y = f(x)$ 上的点的纵坐标的增量时, dy 就是曲线的切线上点的纵坐标的相应增量;
- 当 $|\Delta x|$ 很小时, $|\Delta y - dy|$ 比 $|\Delta x|$ 小得多, 所以在点 M_1 的邻近我们可用切线段来近似代替曲线段。

使用函数点态微分进行近似计算

我们可以使用函数点态微分进行近似计算。

使用函数点态微分进行近似计算

我们可以使用函数点态微分进行近似计算。设函数 $y = f(x)$ 在 x_0 处可微分，且 $f'(x_0) \neq 0$ ，那么当 Δx 很小时， $\Delta y \approx dy = f'(x_0)\Delta x$ 。

使用函数点态微分进行近似计算

我们可以使用函数点态微分进行近似计算。设函数 $y = f(x)$ 在 x_0 处可微分，且 $f'(x_0) \neq 0$ ，那么当 Δx 很小时， $\Delta y \approx dy = f'(x_0)\Delta x$ 。

- 记 $x = x_0 + \Delta x$ ，则 $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ ；

使用函数点态微分进行近似计算

我们可以使用函数点态微分进行近似计算。设函数 $y = f(x)$ 在 x_0 处可微分，且 $f'(x_0) \neq 0$ ，那么当 Δx 很小时， $\Delta y \approx dy = f'(x_0)\Delta x$ 。

- 记 $x = x_0 + \Delta x$ ，则 $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ ；
- 取 $x_0 = 0, \Delta x = x$ ，则当 Δx 很小时， $f(x) \approx f(0) + f'(0)x$ ，我们得到零点附近的几个近似公式：

$$\sqrt[n]{1+x} \approx 1 + \frac{n}{x}, \sin x \approx x, \tan x \approx x, e^x \approx 1 + x, \ln(1+x) \approx x.$$

使用函数点态微分进行近似计算

我们可以使用函数点态微分进行近似计算。设函数 $y = f(x)$ 在 x_0 处可微分，且 $f'(x_0) \neq 0$ ，那么当 Δx 很小时， $\Delta y \approx dy = f'(x_0)\Delta x$ 。

- 记 $x = x_0 + \Delta x$ ，则 $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ ；
- 取 $x_0 = 0, \Delta x = x$ ，则当 Δx 很小时， $f(x) \approx f(0) + f'(0)x$ ，我们得到零点附近的几个近似公式：

$$\sqrt[n]{1+x} \approx 1 + \frac{n}{x}, \sin x \approx x, \tan x \approx x, e^x \approx 1 + x, \ln(1+x) \approx x.$$

例 6

利用微分计算 $\sin 30^\circ 30'$ 的近似值。

使用函数点态微分进行近似计算

我们可以使用函数点态微分进行近似计算。设函数 $y = f(x)$ 在 x_0 处可微分，且 $f'(x_0) \neq 0$ ，那么当 Δx 很小时， $\Delta y \approx dy = f'(x_0)\Delta x$ 。

- 记 $x = x_0 + \Delta x$ ，则 $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ ；
- 取 $x_0 = 0, \Delta x = x$ ，则当 Δx 很小时， $f(x) \approx f(0) + f'(0)x$ ，我们得到零点附近的几个近似公式：

$$\sqrt[n]{1+x} \approx 1 + \frac{n}{x}, \sin x \approx x, \tan x \approx x, e^x \approx 1 + x, \ln(1+x) \approx x.$$

例 6

利用微分计算 $\sin 30^\circ 30'$ 的近似值。

例 7

计算 $\sqrt[6]{65}$ 的近似值。

微分中值定理及其应用

微分近似计算公式

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x$$

告诉我们，当 Δx 很小时， $f(x)$ 可以由线性函数 $f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$ 来近似代替。

微分近似计算公式

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x$$

告诉我们，当 Δx 很小时， $f(x)$ 可以由线性函数 $f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$ 来近似代替。但是它也有缺陷：(1)我们需要 Δx 很小；(2)这个公式只是近似替代但不是精确值。

微分近似计算公式

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x$$

告诉我们，当 Δx 很小时， $f(x)$ 可以由线性函数 $f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$ 来近似代替。但是它也有缺陷：(1)我们需要 Δx 很小；(2)这个公式只是近似替代但不是精确值。

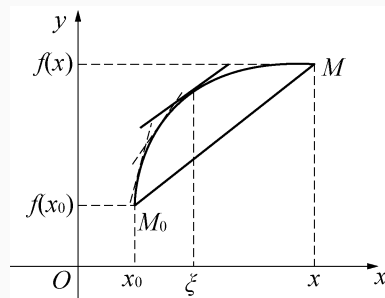
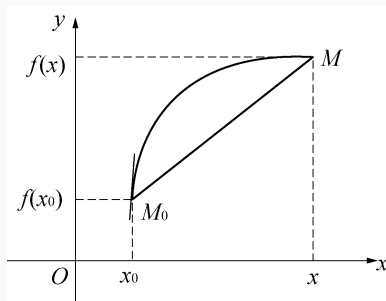
如果对于任何的 Δx ，我们希望有等式

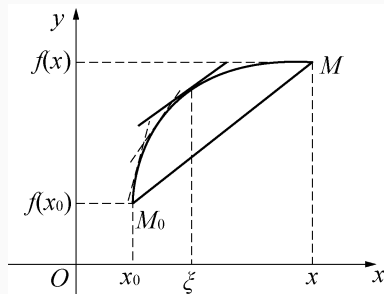
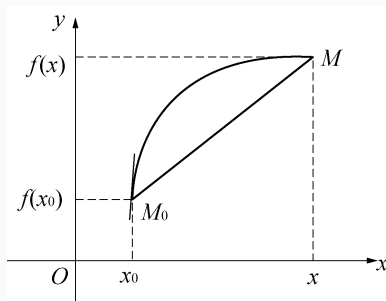
$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) \text{ 或 } \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0),$$

而不是一个近似表达式

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) \text{ 或 } \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \approx f'(x_0),$$

那么我们该如何改进呢？





如图可知,

- 如果将过点 $M_0(x_0, f(x_0))$, $M(x, f(x))$ 的直线斜率近似用曲线 $y=f(x)$ 过点 M_0 处的切线斜率来表示, 它们一般不会相等;
- 逐渐移动点的切线, 我们总会找到一点 $(\xi, f(\xi))$, 使得过该点的切线平行于弦 M_0M , 这说明从近似表达式过度到等式是可能的。

定理 (费马引理)

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域 $U(x_0)$ 内有定义并且在 x_0 处可求导数值, 且对任意 $x \in U(x_0)$, 恒有

$$f(x) \leq f(x_0) \quad (\text{或 } f(x) \geq f(x_0)),$$

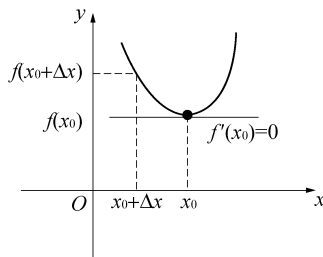
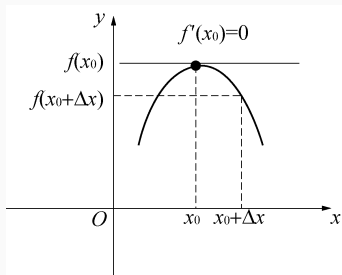
那么 $f'(x_0) = 0$ 。

定理 (费马引理)

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域 $U(x_0)$ 内有定义并且在 x_0 处可求导数值, 且对任意 $x \in U(x_0)$, 恒有

$$f(x) \leq f(x_0) \quad (\text{或 } f(x) \geq f(x_0)),$$

那么 $f'(x_0) = 0$ 。



我们称导数值等于零的点为函数的**驻点**（或称为**稳定点**、**临界点**）。

不妨设 $x \in U(x_0)$ 时 $f(x) \leq f(x_0)$ ($f(x) \geq f(x_0)$ 类似)。

不妨设 $x \in U(x_0)$ 时 $f(x) \leq f(x_0)$ ($f(x) \geq f(x_0)$ 类似)。

对于 $x_0 + \Delta x \in U(x_0)$, 有 $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \leq 0$, 于是

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \leq 0 \ (\Delta x > 0), \quad \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \geq 0 \ (\Delta x < 0).$$

不妨设 $x \in U(x_0)$ 时 $f(x) \leq f(x_0)$ ($f(x) \geq f(x_0)$ 类似)。

对于 $x_0 + \Delta x \in U(x_0)$, 有 $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \leq 0$, 于是

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \leq 0 \quad (\Delta x > 0), \quad \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \geq 0 \quad (\Delta x < 0).$$

根据函数 $f(x)$ 在 x_0 处可求导数值的条件和极限保号性:

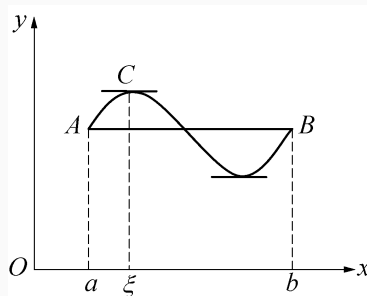
$$f'(x_0) = f'_+(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \leq 0,$$

$$f'(x_0) = f'_-(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \geq 0,$$

所以 $f'(x_0) = 0$ 。

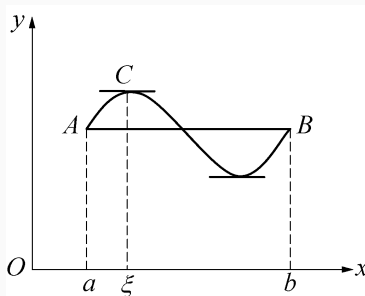
罗尔定理

如图，我们先考虑以下特殊函数 $y = f(x)$ ($x \in [a, b]$)的图形：



罗尔定理

如图，我们先考虑以下特殊函数 $y = f(x) (x \in [a, b])$ 的图形：



- 连续曲线弧 AB 的两个端点的纵坐标相等： $f(a) = f(b)$ ；
- 除了端点外处处有不垂直于 x 轴的切线。

可以发现，在曲线弧的最高点或最低点处，曲线有水平的切线。如果记 C 点的横坐标为 ξ 那么就有 $f'(\xi) = 0$ 。

定理 (罗尔定理)

如果函数 $y = f(x)$ 满足

- (1) 在闭区间 $[a, b]$ 上连续;
- (2) 在开区间 (a, b) 上每个点处可求导数值;
- (3) 在区间端点处的函数值相等: $f(a) = f(b)$ 。

那么至少有一点 $\xi \in (a, b)$, 使得 $f'(\xi) = 0$ 。

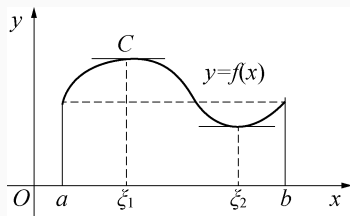
罗尔定理

定理 (罗尔定理)

如果函数 $y = f(x)$ 满足

- (1) 在闭区间 $[a, b]$ 上连续;
- (2) 在开区间 (a, b) 上每个点处可求导数值;
- (3) 在区间端点处的函数值相等: $f(a) = f(b)$ 。

那么至少有一点 $\xi \in (a, b)$, 使得 $f'(\xi) = 0$ 。



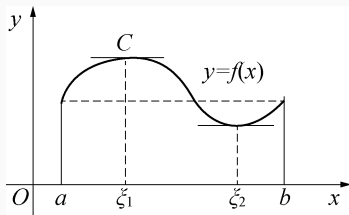
罗尔定理

定理 (罗尔定理)

如果函数 $y = f(x)$ 满足

- (1) 在闭区间 $[a, b]$ 上连续;
- (2) 在开区间 (a, b) 上每个点处可求导数值;
- (3) 在区间端点处的函数值相等: $f(a) = f(b)$ 。

那么至少有一点 $\xi \in (a, b)$, 使得 $f'(\xi) = 0$ 。



罗尔定理的几何意义 如果曲线段 $y = f(x)$ ($x \in (a, b)$) 是连续不断的、光滑的且区间端点处的函数值相等, 那么该曲线段在 $[a, b]$ 上至少有一条水平切线。

由于 $y = f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 根据闭区间上连续函数最大值最小值定理, $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上必定取得最大值 M 和最小值 m 。

由于 $y = f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 根据闭区间上连续函数最大值最小值定理, $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上必定取得最大值 M 和最小值 m 。

情况1: $M = m$ 。于是 $y = f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上必为常数, 因此

$$y \equiv M \Rightarrow f'(x) \equiv 0, \text{ i.e., } \forall \xi \in (a, b), f'(\xi) = 0.$$

由于 $y = f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 根据闭区间上连续函数最大值最小值定理, $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上必定取得最大值 M 和最小值 m 。

情况1: $M = m$ 。于是 $y = f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上必为常数, 因此

$$y \equiv M \Rightarrow f'(x) \equiv 0, \text{ i.e., } \forall \xi \in (a, b), f'(\xi) = 0.$$

情况2: $M > m$ 。 M 和 m 两个数中至少有一个不等于 $f(a)$, 不妨设 $M \neq f(a)$ ($m \neq f(a)$ 类似)。于是

$$f(a) = f(b) \Rightarrow M \neq f(b) \Rightarrow \exists \xi \in (a, b), \text{ 使得 } f(\xi) = M.$$

因此对任意 $x \in [a, b]$, $f(\xi) \geq f(x)$ 。由费马引理可知, $f'(\xi) = 0$ 。

注

如果罗尔定理中某一个条件不满足，那么该定理的结论就可能不成立。

罗尔定理

注

如果罗尔定理中某一个条件不满足，那么该定理的结论就可能不成立。

例（破坏连续性条件）

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x = 0, \\ x, & 0 < x \leq 1. \end{cases}$$

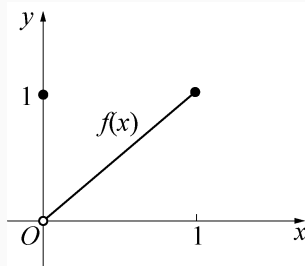
罗尔定理

注

如果罗尔定理中某一个条件不满足，那么该定理的结论就可能不成立。

例（破坏连续性条件）

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x = 0, \\ x, & 0 < x \leq 1. \end{cases}$$



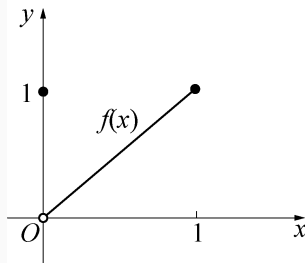
罗尔定理

注

如果罗尔定理中某一个条件不满足，那么该定理的结论就可能不成立。

例（破坏连续性条件）

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x = 0, \\ x, & 0 < x \leq 1. \end{cases}$$



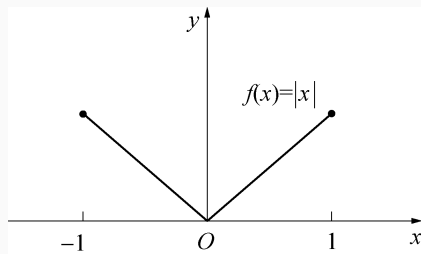
函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 的左端点 $x = 0$ 处间断，不满足在闭区间上连续的条件。此时虽然 $f(x)$ 满足定理的另外两个条件，但 $f(x)$ 没有水平切线。

例（破坏求导数值条件）

$$f(x) = |x|, x \in [-1, 1]。$$

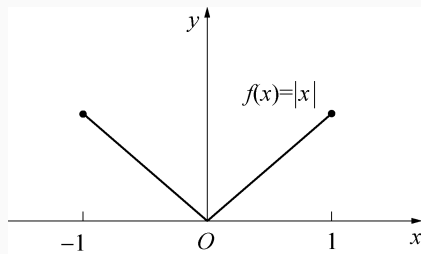
例（破坏求导数值条件）

$$f(x) = |x|, x \in [-1, 1]。$$



例（破坏求导数值条件）

$$f(x) = |x|, x \in [-1, 1]。$$



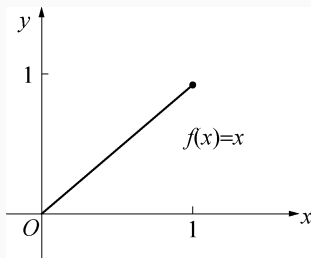
函数 $f(x)$ 在点 $x = 0$ 处无法求导数值，因而不满足在开区间内可求导数值的条件。此时虽然 $f(x)$ 满足定理的另外两个条件，但 $f(x)$ 没有水平切线。

例（破坏在两端点处函数值相等的条件）

$$f(x) = x, x \in [0, 1]。$$

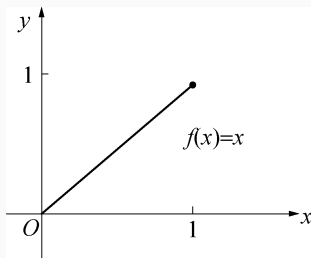
例（破坏在两端点处函数值相等的条件）

$$f(x) = x, x \in [0, 1]。$$



例（破坏在两端点处函数值相等的条件）

$$f(x) = x, x \in [0, 1]。$$



函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续，在 $(0, 1)$ 内每个点可求导数值，但 $f(0) = 0 \neq 1 = f(1)$ ，即 $f(x)$ 不满足在两端点处函数值相等的条件， $f(x)$ 没有水平切线。

注

- (1) 使用罗尔定理时，我们一定要仔细验证是否满足该定理的三个条件，否则容易产生错误。
- (2) 这里要指出，我们需要说明罗尔定理的三个条件是充分的，而非必要的：
 - 若满足罗尔定理的三个条件，则该定理的结论必定成立；
 - 若定理的三个条件不完全满足，则定理的结论可能成立，也可能不成立。

注

- (1) 使用罗尔定理时，我们一定要仔细验证是否满足该定理的三个条件，否则容易产生错误。
- (2) 这里要指出，我们需要说明罗尔定理的三个条件是充分的，而非必要的：
 - 若满足罗尔定理的三个条件，则该定理的结论必定成立；
 - 若定理的三个条件不完全满足，则定理的结论可能成立，也可能不成立。

例 1

验证函数 $f(x) = x^3 + 4x^2 - 7x - 10$ 在区间 $[-1, 2]$ 上满足罗尔定理的三个条件，并求出满足 $f'(\xi) = 0$ 的点 ξ 。

注

- (1) 使用罗尔定理时，我们一定要仔细验证是否满足该定理的三个条件，否则容易产生错误。
- (2) 这里要指出，我们需要说明罗尔定理的三个条件是充分的，而非必要的：
 - 若满足罗尔定理的三个条件，则该定理的结论必定成立；
 - 若定理的三个条件不完全满足，则定理的结论可能成立，也可能不成立。

例 1

验证函数 $f(x) = x^3 + 4x^2 - 7x - 10$ 在区间 $[-1, 2]$ 上满足罗尔定理的三个条件，并求出满足 $f'(\xi) = 0$ 的点 ξ 。

例 2

证明 $f(x) = x^3 - 3x + a$ 在 $[0, 1]$ 上不可能有两个零点。

去掉罗尔定理中 $f(a) = f(b)$ 的特殊条件，我们可得到拉格朗日中值定理。

拉格朗日中值定理

去掉罗尔定理中 $f(a) = f(b)$ 的特殊条件，我们可得到拉格朗日中值定理。

定理 (拉格朗日中值定理)

如果函数 $y = f(x)$ 满足：(1)在闭区间 $[a, b]$ 上连续；(2)在开区间 (a, b) 上每个点处可求导数值。那么至少有一点 $\xi \in (a, b)$ ，使得

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}, \text{ 即 } f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a).$$

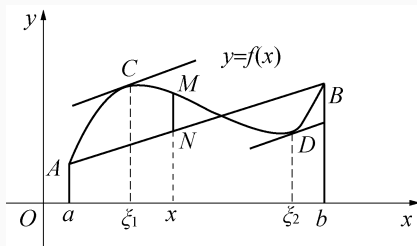
拉格朗日中值定理

去掉罗尔定理中 $f(a) = f(b)$ 的特殊条件，我们可得到拉格朗日中值定理。

定理 (拉格朗日中值定理)

如果函数 $y = f(x)$ 满足：(1)在闭区间 $[a, b]$ 上连续；(2)在开区间 (a, b) 上每个点处可求导数值。那么至少有一点 $\xi \in (a, b)$ ，使得

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}, \text{ 即 } f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a).$$



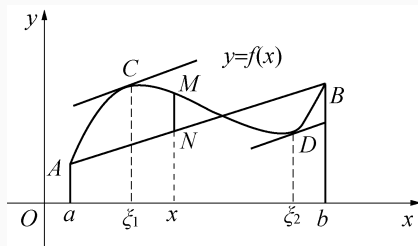
拉格朗日中值定理

去掉罗尔定理中 $f(a) = f(b)$ 的特殊条件，我们可得到拉格朗日中值定理。

定理 (拉格朗日中值定理)

如果函数 $y = f(x)$ 满足：(1)在闭区间 $[a, b]$ 上连续；(2)在开区间 (a, b) 上每个点处可求导数值。那么至少有一点 $\xi \in (a, b)$ ，使得

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}, \text{ 即 } f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a).$$



拉格朗日中值定理的几何意义 如果曲线段 $y = f(x)(x \in (a, b))$ 是连续不断的、光滑的且除端点外处处具有不垂直于横坐标轴的切线，则该曲线段在 $[a, b]$ 上至少有一点，使得曲线在该点处的切线与两端点的连线(弦)平行。

我们作辅助函数

$$F(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (x - a) - f(a).$$

依上图, $F(x)$ 即为曲线 $y = f(x)$ 与直线 $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (x - a) + f(a)$ 的纵坐标之差。

我们作辅助函数

$$F(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (x - a) - f(a).$$

依上图, $F(x)$ 即为曲线 $y = f(x)$ 与直线 $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (x - a) + f(a)$ 的纵坐标之差。

$F(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 在开区间 (a, b) 上每个点处可求导数值, 且在区间端点处的函数值相等: $F(a) = F(b) = 0$, 则由罗尔定理知至少存在一点 $\xi \in (a, b)$, 使得 $F'(\xi) = 0$, 即

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

我们作辅助函数

$$F(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (x - a) - f(a).$$

依上图, $F(x)$ 即为曲线 $y = f(x)$ 与直线 $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (x - a) + f(a)$ 的纵坐标之差。

$F(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 在开区间 (a, b) 上每个点处可求导数值, 且在区间端点处的函数值相等: $F(a) = F(b) = 0$, 则由罗尔定理知至少存在一点 $\xi \in (a, b)$, 使得 $F'(\xi) = 0$, 即

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

例 3

对于函数 $f(x) = \ln x$ 在闭区间 $[1, e]$ 上验证拉格朗日中值定理的正确性。

推论1

若函数 $f(x)$ 在区间 I 内满足 $f'(x)$ 恒为零，则 $f(x)$ 在区间 I 内恒为常数 C 。

推论1

若函数 $f(x)$ 在区间 I 内满足 $f'(x)$ 恒为零, 则 $f(x)$ 在区间 I 内恒为常数 C 。

$$\forall x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2 \xrightarrow{\text{在}[x_1, x_2]\text{上使用Lagrange中值定理}} f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1).$$

因为 $f'(x) \equiv 0$, 所以 $f(x_2) = f(x_1)$ 。由 x_1, x_2 的任意性, $f(x) = C, C \in \mathbb{R}$ 。

推论1

若函数 $f(x)$ 在区间 I 内满足 $f'(x)$ 恒为零, 则 $f(x)$ 在区间 I 内恒为常数 C 。

$$\forall x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2 \xrightarrow{\text{在}[x_1, x_2]\text{上使用Lagrange中值定理}} f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1).$$

因为 $f'(x) \equiv 0$, 所以 $f(x_2) = f(x_1)$ 。由 x_1, x_2 的任意性, $f(x) = C, C \in \mathbb{R}$ 。

推论2

若函数 $f(x), g(x)$ 在区间 I 内满足 $f'(x) = g'(x)$, 则在区间 I 内恒有 $f(x) = g(x) + C$, 其中 C 为任意常数。

推论1

若函数 $f(x)$ 在区间 I 内满足 $f'(x)$ 恒为零, 则 $f(x)$ 在区间 I 内恒为常数 C 。

$$\forall x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2 \xrightarrow{\text{在}[x_1, x_2]\text{上使用Lagrange中值定理}} f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1).$$

因为 $f'(x) \equiv 0$, 所以 $f(x_2) = f(x_1)$ 。由 x_1, x_2 的任意性, $f(x) = C, C \in \mathbb{R}$ 。

推论2

若函数 $f(x), g(x)$ 在区间 I 内满足 $f'(x) = g'(x)$, 则在区间 I 内恒有 $f(x) = g(x) + C$, 其中 C 为任意常数。

$$\text{取 } F(x) = f(x) - g(x) \xrightarrow{F(x) \text{在} I \text{内满足 } F'(x)=0} f(x) - g(x) = F(x) = C, \forall C \in \mathbb{R}.$$

例 4

证明恒等式 $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2} \quad (-1 \leq x \leq 1)$ 。

例 4

证明恒等式 $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2} \quad (-1 \leq x \leq 1)$ 。

例 5

证明当 $x > 0$ 时, $\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x$ 。

拉格朗日中值定理

例 4

证明恒等式 $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2} \quad (-1 \leq x \leq 1)$ 。

例 5

证明当 $x > 0$ 时, $\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x$ 。

注

若函数 $f(x)$ 在区间 $[x, x + \Delta x]$ (或 $[x + \Delta x, x]$) 上满足拉格朗日中值定理条件, 则有

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = f'(x + \theta \Delta x) \cdot \Delta x, \quad \xi = x + \theta \Delta x, \quad (0 < \theta < 1).$$

此时增量 $\Delta y = f'(x + \theta \Delta x) \cdot \Delta x$ 相比于 $\Delta y \approx dy = f'(x) \cdot \Delta x$ 是一个准确值, 我们称该表达式为**有限增量公式**。

对上述连续曲线弧 \widehat{AB} ，我们可以考虑其参数方程

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t). \end{cases} \quad t \in [a, b], \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

由函数参数方程求导函数法则，曲线弧上点 (x, y) 处的切线斜率和弦 AB 的斜率分别为

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}, \quad \frac{\psi(b) - \psi(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)}.$$

对上述连续曲线弧 \widehat{AB} ，我们可以考虑其参数方程

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t). \end{cases} \quad t \in [a, b], \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

由函数参数方程求导函数法则，曲线弧上点 (x, y) 处的切线斜率和弦 AB 的斜率分别为

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}, \quad \frac{\psi(b) - \psi(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)}.$$

拉格朗日中值定理告诉我们，曲线弧 \widehat{AB} 在 $[a, b]$ 上至少有一点 C ，使得过点 C 处的切线与弦 AB 平行。假定点 C 对应的参数值 $t = \xi$ ，那么上述几何特征可以刻画为

$$\frac{\psi(b) - \psi(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} = \frac{\psi'(\xi)}{\varphi'(\xi)}.$$

对上述连续曲线弧 \widehat{AB} ，我们可以考虑其参数方程

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t). \end{cases} \quad t \in [a, b], \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

由函数参数方程求导函数法则，曲线弧上点 (x, y) 处的切线斜率和弦 AB 的斜率分别为

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}, \quad \frac{\psi(b) - \psi(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)}.$$

拉格朗日中值定理告诉我们，曲线弧 \widehat{AB} 在 $[a, b]$ 上至少有一点 C ，使得过点 C 处的切线与弦 AB 平行。假定点 C 对应的参数值 $t = \xi$ ，那么上述几何特征可以刻画为

$$\frac{\psi(b) - \psi(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} = \frac{\psi'(\xi)}{\varphi'(\xi)}.$$

将拉格朗日中值定理在上述函数参数方程上的应用进行推广，我们得到如下柯西中值定理。

定理 (柯西中值定理)

如果函数 $f(x), F(x)$ 满足: (1) 在闭区间 $[a, b]$ 上连续; (2) 在开区间 (a, b) 上每个点处可求导数值; (3) 当 (a, b) 时, $F'(x) \neq 0$ 。那么至少有一点 $\xi \in (a, b)$, 使得

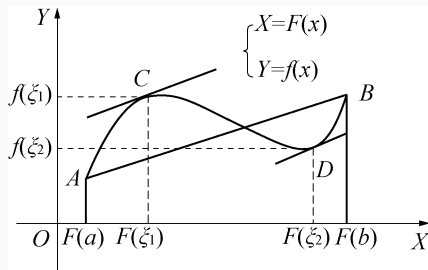
$$\frac{f(b) - f(a)}{F(b) - F(a)} = \frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}.$$

柯西中值定理

定理 (柯西中值定理)

如果函数 $f(x), F(x)$ 满足: (1) 在闭区间 $[a, b]$ 上连续; (2) 在开区间 (a, b) 上每个点处可求导数值; (3) 当 (a, b) 时, $F'(x) \neq 0$ 。那么至少有一点 $\xi \in (a, b)$, 使得

$$\frac{f(b) - f(a)}{F(b) - F(a)} = \frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}.$$



由拉格朗日中值定理

$$F(b) - F(a) = F'(\eta)(b - a) \xrightarrow[b \neq a]{F'(\eta) \neq 0} F(b) \neq F(a).$$

我们作辅助函数

$$\varphi(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{F(b) - F(a)} \cdot F(x).$$

由拉格朗日中值定理

$$F(b) - F(a) = F'(\eta)(b - a) \xrightarrow[b \neq a]{F'(\eta) \neq 0} F(b) \neq F(a).$$

我们作辅助函数

$$\varphi(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{F(b) - F(a)} \cdot F(x).$$

$\varphi(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 在开区间 (a, b) 上每个点处可求导数值且在区间端点处的函数值相等:

$$\varphi(a) = \varphi(b) = \frac{F(b)f(a) - F(a)f(b)}{F(b) - F(a)},$$

则由罗尔定理知至少存在一点 $\xi \in (a, b)$, 使得

$$0 = \varphi'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{F(b) - F(a)} \cdot F'(\xi) \Rightarrow \text{即 } \frac{f(b) - f(a)}{F(b) - F(a)} = \frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}.$$

定义

设两个函数都是无穷小或都是无穷大。它们的商的极限可能存在也可能不存在，我们称这种比值的极限为**不定式**。其中

- 两个函数都是无穷小时记作 $\frac{0}{0}$ 型不定式；
- 两个函数都是无穷大时记作 $\frac{\infty}{\infty}$ 型不定式。

定义

设两个函数都是无穷小或都是无穷大。它们的商的极限可能存在也可能不存在，我们称这种比值的极限为**不定式**。其中

- 两个函数都是无穷小时记作 $\frac{0}{0}$ 型不定式；
- 两个函数都是无穷大时记作 $\frac{\infty}{\infty}$ 型不定式。

例如

- 极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$ 是一个 $\frac{0}{0}$ 型不定式；
- 极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x}$ 是一个 $\frac{\infty}{\infty}$ 型不定式。

定义

设两个函数都是无穷小或都是无穷大。它们的商的极限可能存在也可能不存在，我们称这种比值的极限为**不定式**。其中

- 两个函数都是无穷小时记作 $\frac{0}{0}$ 型不定式；
- 两个函数都是无穷大时记作 $\frac{\infty}{\infty}$ 型不定式。

例如

- 极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$ 是一个 $\frac{0}{0}$ 型不定式；
- 极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x}$ 是一个 $\frac{\infty}{\infty}$ 型不定式。

由于这类极限不能直接使用极限的商的运算法则来计算，使用柯西中值定理，我们得到一种简便、重要且又很有效求解不定式的方法：洛必达法则。

洛必达法则: $x \rightarrow x_0$ 时 $\frac{0}{0}$ 型不定式

定理 (洛必达法则: $x \rightarrow x_0$ 时 $\frac{0}{0}$ 型不定式)

如果函数 $f(x), g(x)$ 满足:

- (1) $f(x) \rightarrow 0, g(x) \rightarrow 0 (x \rightarrow x_0)$;
- (2) $f'(x), g'(x)$ 在 x_0 的某个去心邻域 $\mathring{U}(x_0)$ 内有定义, 且 $g'(x) \neq 0$;
- (3) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在 (或为无穷大)。

那么

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad (\text{或为无穷大}) .$$

洛必达法则: $x \rightarrow x_0$ 时 $\frac{0}{0}$ 型不定式

定理 (洛必达法则: $x \rightarrow x_0$ 时 $\frac{0}{0}$ 型不定式)

如果函数 $f(x), g(x)$ 满足:

- (1) $f(x) \rightarrow 0, g(x) \rightarrow 0 (x \rightarrow x_0)$;
- (2) $f'(x), g'(x)$ 在 x_0 的某个去心邻域 $\dot{U}(x_0)$ 内有定义, 且 $g'(x) \neq 0$;
- (3) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在 (或为无穷大)。

那么

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad (\text{或为无穷大}) .$$

例 6

求极限: (1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{\sin x}$; (2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$ 。

洛必达法则: $x \rightarrow \infty$ 时 $\frac{0}{0}$ 型不定式

定理 (洛必达法则: $x \rightarrow \infty$ 时 $\frac{0}{0}$ 型不定式)

如果函数 $f(x), g(x)$ 满足:

- (1) $f(x) \rightarrow 0, g(x) \rightarrow 0 (x \rightarrow \infty)$;
- (2) 存在 $X > 0$, 当 $|x| > X$ 时, $f'(x), g'(x)$ 有定义, 且 $g'(x) \neq 0$;
- (3) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在 (或为无穷大)。

那么

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad (\text{或为无穷大}) .$$

洛必达法则: $x \rightarrow \infty$ 时 $\frac{0}{0}$ 型不定式

定理 (洛必达法则: $x \rightarrow \infty$ 时 $\frac{0}{0}$ 型不定式)

如果函数 $f(x), g(x)$ 满足:

- (1) $f(x) \rightarrow 0, g(x) \rightarrow 0 (x \rightarrow \infty)$;
- (2) 存在 $X > 0$, 当 $|x| > X$ 时, $f'(x), g'(x)$ 有定义, 且 $g'(x) \neq 0$;
- (3) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在 (或为无穷大)。

那么

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad (\text{或为无穷大}) .$$

注

类似地, 对 $x \rightarrow x_0$ 时 $\frac{\infty}{\infty}$ 型不定式、 $x \rightarrow \infty$ 时 $\frac{\infty}{\infty}$ 型不定式都有类似的洛必达法则。

例 7

求极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan x}{\frac{1}{x}}$ ($\frac{0}{0}$ 型不定式)。

例 7

求极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan x}{\frac{1}{x}}$ ($\frac{0}{0}$ 型不定式)。

例 8

求极限 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(\cot x)}{\ln x}$ ($\frac{\infty}{\infty}$ 型不定式)。

例 7

求极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan x}{\frac{1}{x}}$ ($\frac{0}{0}$ 型不定式)。

例 8

求极限 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(\cot x)}{\ln x}$ ($\frac{\infty}{\infty}$ 型不定式)。

例 9

求极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^n}$ ($\frac{\infty}{\infty}$ 型不定式) ($n \in \mathbb{Z}^+$)。

例 7

求极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan x}{\frac{1}{x}}$ ($\frac{0}{0}$ 型不定式)。

例 8

求极限 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(\cot x)}{\ln x}$ ($\frac{\infty}{\infty}$ 型不定式)。

例 9

求极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^n}$ ($\frac{\infty}{\infty}$ 型不定式) ($n \in \mathbb{Z}^+$)。

例 10

求极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{e^x}$ ($\frac{\infty}{\infty}$ 型不定式) ($n \in \mathbb{Z}^+$)。

注

上述例子还说明：对数函数 $\ln x$ 、幂函数 x^n 、指数函数 e^x 均为当 $x \rightarrow \infty$ 时的无穷大，但它们增大的速度不一样。

注

上述例子还说明：对数函数 $\ln x$ 、幂函数 x^n 、指数函数 e^x 均为当 $x \rightarrow \infty$ 时的无穷大，但它们增大的速度不一样。

对于 $\infty - \infty$ 、 $0 \cdot \infty$ 、 0^0 、 1^∞ 、 ∞^0 等其他形式的不定式，我们可以使用恒等变换等方法转化成 $\frac{0}{0}$ 及 $\frac{\infty}{\infty}$ 型不定式后，再使用洛必达法则。

例 11

求极限：(1) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \ln x$ ($0 \cdot \infty$ 型不定式)；(2) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x$ (0^0 型不定式)。

注

上述例子还说明：对数函数 $\ln x$ 、幂函数 x^n 、指数函数 e^x 均为当 $x \rightarrow \infty$ 时的无穷大，但它们增大的速度不一样。

对于 $\infty - \infty$ 、 $0 \cdot \infty$ 、 0^0 、 1^∞ 、 ∞^0 等其他形式的不定式，我们可以使用恒等变换等方法转化成 $\frac{0}{0}$ 及 $\frac{\infty}{\infty}$ 型不定式后，再使用洛必达法则。

例 11

求极限：(1) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \ln x$ ($0 \cdot \infty$ 型不定式)；(2) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x$ (0^0 型不定式)。

例 12

求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right)$ ($\infty - \infty$ 型不定式)。

注

洛必达法则虽然是求未定式的一种有效方法，但若能与其他求极限的方法结合使用，效果则更好。

注

洛必达法则虽然是求未定式的一种有效方法，但若能与其他求极限的方法结合使用，效果则更好。

极限解析式化简 \Rightarrow 应用等价无穷小或重要极限进行替换 \Rightarrow $\begin{cases} \text{直接计算极限} \\ \text{使用洛必达法则} \end{cases}$

注

洛必达法则虽然是求未定式的一种有效方法，但若能与其他求极限的方法结合使用，效果则更好。

极限解析式化简 \Rightarrow 应用等价无穷小或重要极限进行替换 $\Rightarrow \begin{cases} \text{直接计算极限} \\ \text{使用洛必达法则} \end{cases}$

例 13

求极限：(1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x - \sin 3x}{(1 - \cos x) \ln(1 + 2x)}$ ；(2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x}$ 。

泰勒公式*

对于一些复杂的函数，我们往往希望用一些简单函数来近似表达。

对于一些复杂的函数，我们往往希望用一些简单函数来近似表达。

已知

$$\sin x \sim x \ (x \rightarrow 0) \Rightarrow \sin x = x + o(x).$$

- $o(x)$ 是 x 的几阶无穷小？
- 事先允许误差范围，我们能否找到简单精确的多项式函数，使得

$$\sin x = a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_nx^n + o(x^n), \quad n \in \mathbb{Z}^+.$$

- 如果这个多项式函数存在，那么该多项式的系数和函数本身之间有什么关系？

对 $n \in \mathbb{Z}^+$, 取一个关于 $(x - x_0)$ 的 n 次多项式

$$P_n(x) := a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_n(x - x_0)^n,$$

我们希望在某一个 x_0 的某个邻域 $U(x_0)$ 内, $P_n(x)$ 可以近似表示函数 $f(x)$, 使得

$$f(x) - P_n(x) = o((x - x_0)^n), \quad x \in U(x_0),$$

即

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - P_n(x)}{(x - x_0)^n} = 0.$$

对 $n \in \mathbb{Z}^+$, 取一个关于 $(x - x_0)$ 的 n 次多项式

$$P_n(x) := a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_n(x - x_0)^n,$$

我们希望在某一个 x_0 的某个邻域 $U(x_0)$ 内, $P_n(x)$ 可以近似表示函数 $f(x)$, 使得

$$f(x) - P_n(x) = o((x - x_0)^n), \quad x \in U(x_0),$$

即

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - P_n(x)}{(x - x_0)^n} = 0.$$

我们假设函数 $f(x)$ 在邻域 $U(x_0)$ 内具有直到 $(n + 1)$ 阶导函数, 按照该条件我们来确定多项式 $P_n(x)$ 的各个系数 a_i , $0 \leq i \leq n$ 。

注意到

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - P_n(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) - a_0 = f(x_0) - a_0,$$

而

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - P_n(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - P_n(x)}{(x - x_0)^n} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0)^n = 0.$$

所以我们可以取 $a_0 = f(x_0)$ 。

注意到

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - P_n(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) - a_0 = f(x_0) - a_0,$$

而

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - P_n(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - P_n(x)}{(x - x_0)^n} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0)^n = 0.$$

所以我们可以取 $a_0 = f(x_0)$ 。对 $P_n(x)$ 求一阶导函数

$$P'_n(x) := 1!a_1 + 2a_2(x - x_0) + 3a_3(x - x_0)^2 + \cdots + na_n(x - x_0)^{n-1},$$

同时对表达式 $f(x) - P_n(x)$ 在 $x = x_0$ 处取一阶导函数值，一方面，

$$f'(x_0) - P'_n(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} [f'(x) - P'_n(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) - 1!a_1 = f'(x_0) - 1!a_1.$$

另一方面,

$$\begin{aligned}& f'(x_0) - P'_n(x_0) \\&= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - P_n(x) - [f(x_0) - P_n(x_0)]}{x - x_0} \\&= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - P_n(x)}{x - x_0} (\text{我们已设置 } P_n(x_0) = a_0 = f(x_0)) \\&= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - P_n(x)}{(x - x_0)^n} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0)^{n-1} \\&= 0.\end{aligned}$$

另一方面,

$$\begin{aligned} & f'(x_0) - P'_n(x_0) \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - P_n(x) - [f(x_0) - P_n(x_0)]}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - P_n(x)}{x - x_0} \text{ (我们已设置 } P_n(x_0) = a_0 = f(x_0) \text{)} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - P_n(x)}{(x - x_0)^n} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0)^{n-1} \\ &= 0. \end{aligned}$$

所以我们可以取 $P'_n(x_0) = 1!a_1 = f'(x_0)$, 即 $a_1 = \frac{f'(x_0)}{1!}$ 。

对 $P'_n(x)$ 求一阶导函数

$$P''_n(x) := 2!a_2 + (3 \cdot 2)a_3(x - x_0) + \cdots + (n \cdot (n - 1))a_n(x - x_0)^{n-2},$$

同时对表达式 $f'(x) - P'_n(x)$ 在 $x = x_0$ 处取一阶导数值，一方面，

$$f''(x_0) - P''_n(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} [f''(x) - P''_n(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f''(x) - 2!a_2 = f''(x_0) - 2!a_2.$$

对 $P'_n(x)$ 求一阶导函数

$$P''_n(x) := 2!a_2 + (3 \cdot 2)a_3(x - x_0) + \cdots + (n \cdot (n - 1))a_n(x - x_0)^{n-2},$$

同时对表达式 $f'(x) - P'_n(x)$ 在 $x = x_0$ 处取一阶导函数值, 一方面,

$$f''(x_0) - P''_n(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} [f''(x) - P''_n(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f''(x) - 2!a_2 = f''(x_0) - 2!a_2.$$

另一方面, 因为

$$P_n(x_0) = f(x_0),$$

且函数 $f(x) - P_n(x)$, $(x - x_0)^n$ 在去心邻域 $\mathring{U}(x_0)$ 内满足柯西中值定理条件, 那么对 $x \in U(x_0)$, 存在 $\xi \in (x, x_0)$ (区间 (x_0, x) 类似), 使得

$$\frac{f'(\xi) - P'_n(\xi)}{n(\xi - x_0)^{n-1}} = \frac{f(x) - P_n(x) - [f(x_0) - P_n(x_0)]}{(x - x_0)^n - (x_0 - x_0)^n} = \frac{f(x) - P_n(x)}{(x - x_0)^n}.$$

由于 $x \rightarrow x_0$ 时有 $\xi \rightarrow x_0$, 所以

$$\lim_{\xi \rightarrow x_0} \frac{f'(\xi) - P'_n(\xi)}{(\xi - x_0)^{n-1}} = n \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - P_n(x)}{(x - x_0)^n} = 0.$$

由于 $x \rightarrow x_0$ 时有 $\xi \rightarrow x_0$, 所以

$$\lim_{\xi \rightarrow x_0} \frac{f'(\xi) - P'_n(\xi)}{(\xi - x_0)^{n-1}} = n \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - P_n(x)}{(x - x_0)^n} = 0.$$

于是

$$\begin{aligned} f''(x_0) - P''_n(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x) - P'_n(x) - [f'(x_0) - P'_n(x_0)]}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x) - P'_n(x)}{x - x_0} \quad (\text{我们已设置 } P'_n(x_0) = 1!a_1 = f'(x_0)) \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x) - P'_n(x)}{(x - x_0)^{n-1}} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0)^{n-2} \\ &= 0. \end{aligned}$$

所以我们可以取 $P''_n(x_0) = 2!a_2 = f''(x_0)$, 即 $a_2 = \frac{f''(x_0)}{2!}$ 。

对 $P_n(x)$ 求 k 阶导函数 $P_n^{(k)}(x)$, $k = 1, 2, \dots, n$,

$$P_n^{(k)}(x) := k!a_k + (k \cdot (k-1) \cdot 2)a_{k+1}(x-x_0) + \dots + (n \cdot (n-1) \cdot (n-k+1))a_n(x-x_0)^{n-k+1},$$

同时取函数 $f^{(k)}(x) - P_n^{(k)}(x)$ 在 $x = x_0$ 处的函数值,

$$f^{(k)}(x_0) - P_n^{(k)}(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} [f^{(k)}(x) - P_n^{(k)}(x)] = f^{(k)}(x_0) - k!a_k.$$

对 $P_n(x)$ 求 k 阶导函数 $P_n^{(k)}(x)$, $k = 1, 2, \dots, n$,

$$P_n^{(k)}(x) := k!a_k + (k \cdot (k-1) \cdot 2)a_{k+1}(x-x_0) + \dots + (n \cdot (n-1) \cdot (n-k+1))a_n(x-x_0)^{n-k+1},$$

同时取函数 $f^{(k)}(x) - P_n^{(k)}(x)$ 在 $x = x_0$ 处的函数值,

$$f^{(k)}(x_0) - P_n^{(k)}(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} [f^{(k)}(x) - P_n^{(k)}(x)] = f^{(k)}(x_0) - k!a_k.$$

且我们可以类似得到

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^{(k-1)}(x) - P_n^{(k-1)}(x)}{(x-x_0)^{n-k+1}} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - P_n(x)}{(x-x_0)^n} = 0.$$

所以 $f^{(k)}(x_0) - P_n^{(k)}(x_0) = 0$, 我们可以取 $k!a_k = f^{(k)}(x_0)$, 即 $a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$ 。

泰勒中值定理

综上，我们找到了如下近似多项式：

$$P_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

定理 (泰勒中值定理)

设函数 $f(x)$ 在含有 x_0 的开区间 (a, b) 内具有直到 $(n + 1)$ 阶的导函数，那么当 $x \in (a, b)$ 时， $f(x)$ 可以表示为一个 $(x - x_0)$ 的 n 次多项式与一个余项 $R_n(x)$ 之和：

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x).$$

其中

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}, \xi \text{ 介于 } x, x_0 \text{ 之间}.$$

注

- 我们称多项式

$$P_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

为 $f(x)$ 按 $(x - x_0)$ 的幂展开的 n 次近似多项式;

- 我们称

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x).$$

为 $f(x)$ 按 $(x - x_0)$ 的幂展到 n 次泰勒公式;

注

- 我们称

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}, \xi \text{ 介于 } x, x_0 \text{ 之间.}$$

为拉格朗日型余项;

- ξ 可写成 $\xi = x_0 + \theta(x - x_0)$, 其中 $0 < \theta < 1$.

注

- 我们称

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}, \xi \text{ 介于 } x, x_0 \text{ 之间.}$$

为拉格朗日型余项;

- ξ 可写成 $\xi = x_0 + \theta(x - x_0)$, 其中 $0 < \theta < 1$.

若存在 $M > 0$, 使得 $|f^{(n+1)}(x)| \leq M, x \in (a, b)$, 则

$$0 \leq \left| \frac{R_n(x)}{(x - x_0)^n} \right| = \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0) \right| \leq \frac{M}{(n+1)!} (x - x_0) \rightarrow 0 (x \rightarrow x_0).$$

从而

$$f(x) - P_n(x) = R_n(x) = o((x - x_0)^n).$$

此时 $f(x) = P_n(x) + R_n(x)$ 也可称为带有皮亚诺型余项的泰勒公式。

带有皮亚诺型余项的泰勒公式

对于带有皮亚诺型余项的泰勒公式，我们还可以减弱函数的光滑条件。

带有皮亚诺型余项的泰勒公式

对于带有皮亚诺型余项的泰勒公式，我们还可以减弱函数的光滑条件。

定理

设函数 $f(x)$ 在含有 x_0 的开区间 (a, b) 内具有直到 n 阶的导函数，那么当 $x \in (a, b)$ 时，

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n).$$

带有皮亚诺型余项的泰勒公式

对于带有皮亚诺型余项的泰勒公式，我们还可以减弱函数的光滑条件。

定理

设函数 $f(x)$ 在含有 x_0 的开区间 (a, b) 内具有直到 n 阶的导函数，那么当 $x \in (a, b)$ 时，

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n).$$

在泰勒公式中若取 $x_0 = 0$ ，我们称

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}, \quad 0 < \theta < 1.$$

为函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处的**麦克劳林公式**。若存在 $M > 0$ ，使得 $|f^{(n+1)}(x)| \leq M$ ，则函数 $f(x)$ 的近似公式和误差分别为

$$f(x) \approx f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n, \quad |R_n(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!}|x|^{n+1}.$$

例 1

写出函数 $f(x) = e^x$ 带有拉格朗日型余项的 n 阶麦克劳林公式。

例 1

写出函数 $f(x) = e^x$ 带有拉格朗日型余项的 n 阶麦克劳林公式。

例 2

证明 $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n)$ 。

例 1

写出函数 $f(x) = e^x$ 带有拉格朗日型余项的 n 阶麦克劳林公式。

例 2

证明 $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n)$ 。

例 3

证明 $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^{m-1} \frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!}$ ，其中

$$R_{2m}(x) = \frac{\sin \left[(2m+1) \frac{\pi}{2} + \theta x \right]}{(2m+1)!} x^{2m+1} \quad (0 < \theta < 1).$$

常用初等函数的麦克劳林公式($0 < \theta < 1$)

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1};$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \frac{\sin \left[(2n+1) \frac{\pi}{2} + \theta x \right]}{(2n+1)!} x^{2n+1};$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \frac{\cos [(n+1)\pi + \theta x]}{(2n+2)!} x^{2n+2};$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{x^{n+1}}{n+1} + o(x^{n+1});$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n);$$

$$(1+x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{a(a-1) \cdots (a-n+1)}{n!}x^n + o(x^{n+1}) \quad (a \in \mathbb{R}).$$

泰勒公式的应用

应用已知初等函数的麦克劳林公式，我们可以间接地展开一些更复杂的函数的麦克劳林公式以及求某些函数的极限。

泰勒公式的应用

应用已知初等函数的麦克劳林公式，我们可以间接地展开一些更复杂的函数的麦克劳林公式以及求某些函数的极限。

例 4

写出函数 $f(x) = x^3 \ln x$ 在 $x = 1$ 处带有拉格朗日型余项的四阶泰勒公式。

泰勒公式的应用

应用已知初等函数的麦克劳林公式，我们可以间接地展开一些更复杂的函数的麦克劳林公式以及求某些函数的极限。

例 4

写出函数 $f(x) = x^3 \ln x$ 在 $x = 1$ 处带有拉格朗日型余项的四阶泰勒公式。

例 5

写出函数 $y = \frac{1}{3-x}$ 在 $x = 1$ 处带有皮亚诺型余项的 n 阶泰勒展开式。

泰勒公式的应用

应用已知初等函数的麦克劳林公式，我们可以间接地展开一些更复杂的函数的麦克劳林公式以及求某些函数的极限。

例 4

写出函数 $f(x) = x^3 \ln x$ 在 $x = 1$ 处带有拉格朗日型余项的四阶泰勒公式。

例 5

写出函数 $y = \frac{1}{3-x}$ 在 $x = 1$ 处带有皮亚诺型余项的 n 阶泰勒展开式。

例 6

写出函数 $f(x) = xe^{-x}$ 带有皮亚诺型余项的 n 阶麦克劳林公式。

泰勒公式的应用

应用已知初等函数的麦克劳林公式，我们可以间接地展开一些更复杂的函数的麦克劳林公式以及求某些函数的极限。

例 4

写出函数 $f(x) = x^3 \ln x$ 在 $x = 1$ 处带有拉格朗日型余项的四阶泰勒公式。

例 5

写出函数 $y = \frac{1}{3-x}$ 在 $x = 1$ 处带有皮亚诺型余项的 n 阶泰勒展开式。

例 6

写出函数 $f(x) = xe^{-x}$ 带有皮亚诺型余项的 n 阶麦克劳林公式。

例 7

利用带有皮亚诺型余项的麦克劳林展开式计算极限： $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} + 2 \cos x - 3}{x^4}$ 。

函数的性态与图形

单调函数的定义

定义 (单调函数)

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D ，区间 $I \subset D$ 。如果对任意 $x_1, x_2 \in I$,

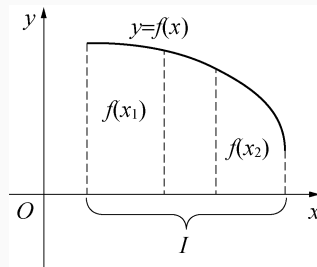
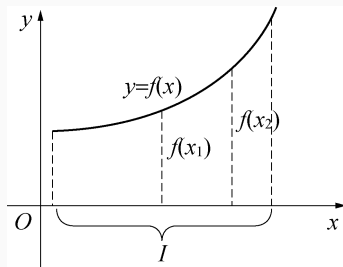
- 当 $x_1 < x_2$ 时恒有 $f(x_1) \leq f(x_2)$ ，那么称函数 $f(x)$ 在区间 I 上**单调递增**；
- 当 $x_1 < x_2$ 时恒有 $f(x_1) \geq f(x_2)$ ，那么称函数 $f(x)$ 在区间 I 上**单调递减**；
- 单调递增或单调递减的函数统称**单调函数**。

单调函数的定义

定义 (单调函数)

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D ，区间 $I \subset D$ 。如果对任意 $x_1, x_2 \in I$,

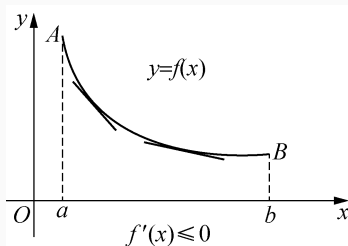
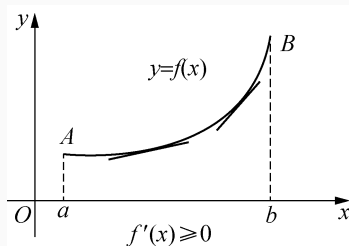
- 当 $x_1 < x_2$ 时恒有 $f(x_1) \leq f(x_2)$ ，那么称函数 $f(x)$ 在区间 I 上**单调递增**；
- 当 $x_1 < x_2$ 时恒有 $f(x_1) \geq f(x_2)$ ，那么称函数 $f(x)$ 在区间 I 上**单调递减**；
- 单调递增或单调递减的函数统称**单调函数**。



函数单调性的判别

观察单调函数图像可知：

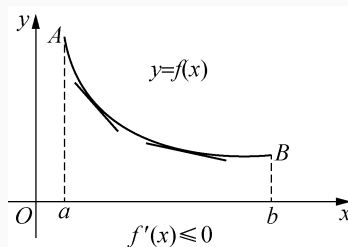
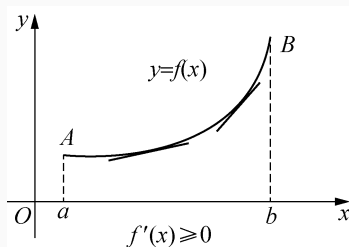
- 单调递增函数：(1)曲线沿 x 轴正向上升；(2)曲线切线斜率均非负： $f'(x) \geq 0$ ；
- 单调递减函数：(1)曲线沿 x 轴正向下降；(2)曲线切线斜率均非正： $f'(x) \leq 0$ 。



函数单调性的判别

观察单调函数图像可知：

- 单调递增函数：(1)曲线沿 x 轴正向上升；(2)曲线切线斜率均非负： $f'(x) \geq 0$ ；
- 单调递减函数：(1)曲线沿 x 轴正向下降；(2)曲线切线斜率均非正： $f'(x) \leq 0$ 。



这说明函数的单调性与函数导函数符号之间有着密切的关系。由于拉格朗日中值定理建立了函数与导数之间的联系，我们可以使用中值定理得到判断函数单调性的方法。

定理 (函数单调性判别法)

设函数 $f(x)$ 在区间 I 上连续, 且在 I 内可求导函数。

- 若对任意 $x \in I$, $f'(x) \geq 0$, 则 $f(x)$ 在 I 上单调递增;
- 若对任意 $x \in I$, $f'(x) \leq 0$, 则 $f(x)$ 在 I 上单调递减。

定理 (函数单调性判别法)

设函数 $f(x)$ 在区间 I 上连续, 且在 I 内可求导函数。

- 若对任意 $x \in I$, $f'(x) \geq 0$, 则 $f(x)$ 在 I 上单调递增;
- 若对任意 $x \in I$, $f'(x) \leq 0$, 则 $f(x)$ 在 I 上单调递减。

任取 $x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2$, $f(x)$ 在 $[x_1, x_2]$ 上满足拉格朗日中值定理条件, 则

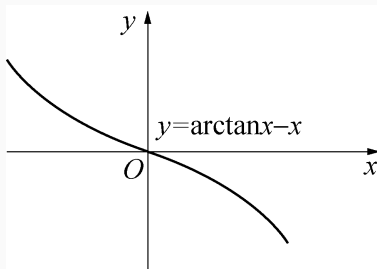
$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1), \xi \in (x_1, x_2) \Rightarrow \begin{cases} f'(x) \geq 0, x \in I \Rightarrow f \nearrow, \\ f'(x) \leq 0, x \in I \Rightarrow f \searrow. \end{cases}$$

例 1

讨论函数 $y = \arctan x - x$ 的单调性。

例 1

讨论函数 $y = \arctan x - x$ 的单调性。

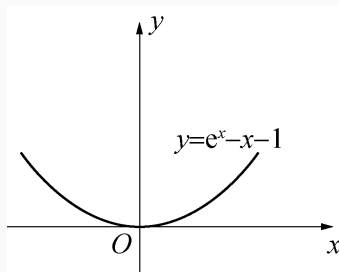


例 2

讨论函数 $y = e^x - x - 1$ 的单调性。

例 2

讨论函数 $y = e^x - x - 1$ 的单调性。



划分函数单调性的区间

可以看出，满足导函数 $y' = 0$ 的点可能是划分函数单调区间的分界点，它可以使原来在定义域内不单调的函数在各个部分区间内是单调的。因此，满足 $y' = 0$ 的点、导数值不存在的点、使函数不连续的点都可能成为单调区间的分界点。

划分函数单调性的区间

可以看出，满足导函数 $y' = 0$ 的点可能是划分函数单调区间的分界点，它可以使原来在定义域内不单调的函数在各个部分区间内是单调的。因此，满足 $y' = 0$ 的点、导数值不存在的点、使函数不连续的点都可能成为单调区间的分界点。

划分函数的单调区间可按如下步骤进行：

- (1) 找出函数定义域内的不连续点；
- (2) 计算导函数 $f'(x)$ ，找出满足 $f'(x) = 0$ 及定义域内导数值不存在的点；
- (3) 确定各个分划区间内导函数的符号。

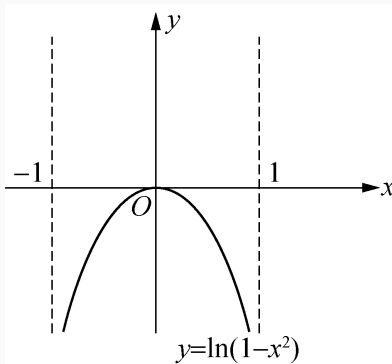
由此我们得到函数定义域内各个单调区间及每个区间内函数的单调性。

例 3

讨论函数 $y = \ln(1 - x^2)$ 的单调性。

例 3

讨论函数 $y = \ln(1 - x^2)$ 的单调性。

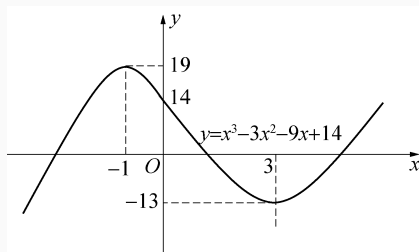


例 4

寻找函数 $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 14$ 的单调区间。

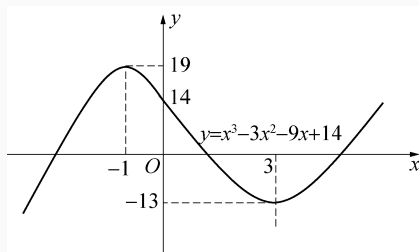
例 4

寻找函数 $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 14$ 的单调区间。



例 4

寻找函数 $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 14$ 的单调区间。



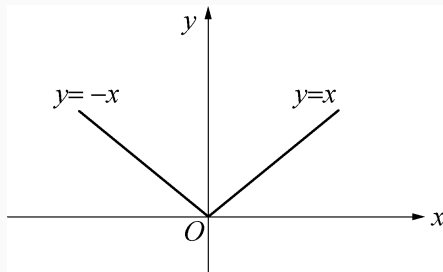
区间	$(-\infty, -1)$	$(-1, 3)$	$(3, +\infty)$
y'	+	-	+
y	\nearrow	\searrow	\nearrow

例 5

函数 $y = |x|$ 在 $x = 0$ 处导数值不存在，该函数在 $(-\infty, 0)$ 内单调递减，在 $(0, +\infty)$ 内单调递增。

例 5

函数 $y = |x|$ 在 $x = 0$ 处导数值不存在，该函数在 $(-\infty, 0)$ 内单调递减，在 $(0, +\infty)$ 内单调递增。

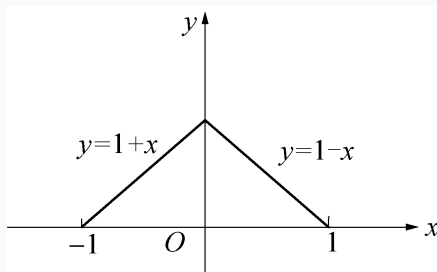


例 6

函数 $f(x) = \begin{cases} 1, & x = 0, \\ x, & 0 < x \leq 1. \end{cases}$ 在 $x = 0$ 处导数值不存在, 而 $x = 0$ 也是单调区间的
一个分界点。该函数在 $[-1, 0)$ 内单调递增, 在 $[0, 1]$ 内单调递减。

例 6

函数 $f(x) = \begin{cases} 1, & x = 0, \\ x, & 0 < x \leq 1. \end{cases}$ 在 $x = 0$ 处导数值不存在, 而 $x = 0$ 也是单调区间的
一个分界点。该函数在 $[-1, 0)$ 内单调递增, 在 $[0, 1]$ 内单调递减。



函数的单调性还可以用来证明不等式。

函数的单调性还可以用来证明不等式。

例 7

试证明当 $x > 1$ 时，有 $2\sqrt{x} > 3 - \frac{1}{x}$ 。

函数的单调性还可以用来证明不等式。

例 7

试证明当 $x > 1$ 时, 有 $2\sqrt{x} > 3 - \frac{1}{x}$ 。

例 8

证明方程 $x^5 + x + 1 = 0$ 在区间 $(-1, 0)$ 内有且只有一个实根。

定义 (函数的极值及极值点)

设函数 $f(x)$ 在 (a, b) 有定义, 点 $x_0 \in (a, b)$ 。如果存在点 x_0 的一个邻域 $U(x_0)$, 使得

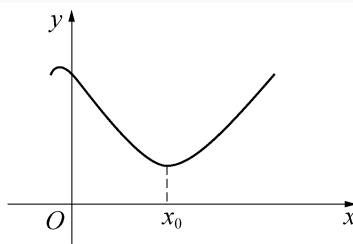
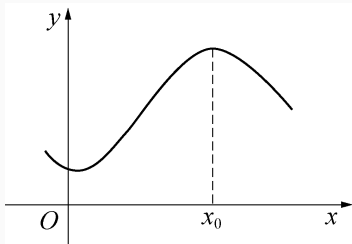
- 当 $x \in \dot{U}(x_0)$ 时恒有 $f(x) < f(x_0)$, 那么称 $f(x_0)$ 为 $f(x)$ 的极大值;
- 当 $x \in \dot{U}(x_0)$ 时恒有 $f(x) > f(x_0)$, 那么称 $f(x_0)$ 为 $f(x)$ 的极小值;
- 函数的极大值、极小值统称为极值, 使函数取得极值的点称为极值点。

函数极值的定义

定义 (函数的极值及极值点)

设函数 $f(x)$ 在 (a, b) 有定义, 点 $x_0 \in (a, b)$ 。如果存在点 x_0 的一个邻域 $U(x_0)$, 使得

- 当 $x \in \dot{U}(x_0)$ 时恒有 $f(x) < f(x_0)$, 那么称 $f(x_0)$ 为 $f(x)$ 的极大值;
- 当 $x \in \dot{U}(x_0)$ 时恒有 $f(x) > f(x_0)$, 那么称 $f(x_0)$ 为 $f(x)$ 的极小值;
- 函数的极大值、极小值统称为极值, 使函数取得极值的点称为极值点。



函数取得极值的必要条件

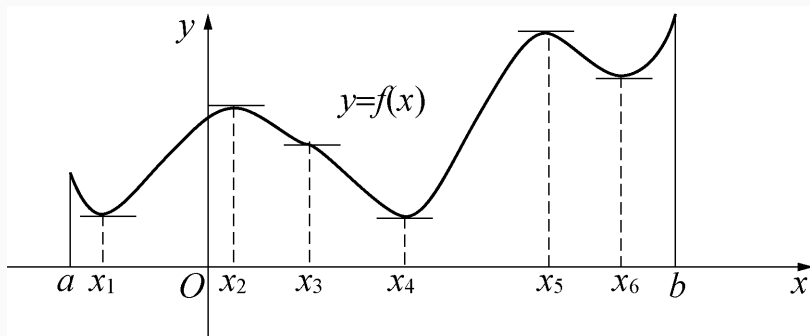
定理 (函数极值的必要条件)

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可求导数值, 且在点 x_0 处取得极值, 则必有 $f'(x_0) = 0$ 。

函数取得极值的必要条件

定理 (函数极值的必要条件)

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可求导数值, 且在点 x_0 处取得极值, 则必有 $f'(x_0) = 0$ 。



(回顾一下, 我们称函数定义域内满足 $f'(x)=0$ 的点 x_0 称为 $f(x)$ 的驻点。)

函数取得极值的必要条件

不妨设 $f(x_0)$ 是函数 $f(x)$ 的极小值（极大值类似）。那么存在点 x_0 的一个邻域 $U(x_0)$ ，当 $x \in \overset{\circ}{U}(x_0)$ 时有 $f(x) > f(x_0)$ 。于是

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{当 } x < x_0 \text{ 时, } \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} < 0 \Rightarrow f'_-(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0, \\ \text{当 } x > x_0 \text{ 时, } \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0 \Rightarrow f'_+(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0. \end{array} \right.$$

因为函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可求导数值，所以 $f'(x_0) = f'_-(x_0) = f'_+(x_0) = 0$ 。

函数取得极值的必要条件

不妨设 $f(x_0)$ 是函数 $f(x)$ 的极小值（极大值类似）。那么存在点 x_0 的一个邻域 $U(x_0)$ ，当 $x \in \overset{\circ}{U}(x_0)$ 时有 $f(x) > f(x_0)$ 。于是

$$\begin{cases} \text{当 } x < x_0 \text{ 时, } \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} < 0 \Rightarrow f'_-(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0, \\ \text{当 } x > x_0 \text{ 时, } \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0 \Rightarrow f'_+(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0. \end{cases}$$

因为函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可求导数值，所以 $f'(x_0) = f'_-(x_0) = f'_+(x_0) = 0$ 。

注

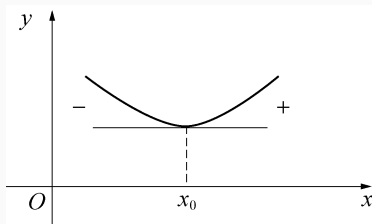
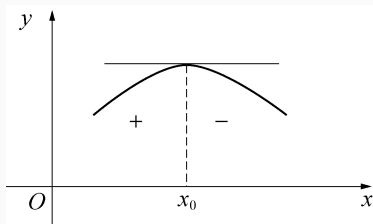
- 若函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可求导数值且点 x_0 是极值点，则 x_0 必是驻点；反之不然： $y = x^3$ 在 $x = 0$ 处有 $y' = 0$ 但 $x = 0$ 并不是 y 的极值点；
- 极值点必是驻点的前提是函数在该点处可求导数值：函数 $y = |x|$ 在 $x = 0$ 处有极小值，但 y 在该点不可求导数值，它不是驻点。

函数取得极值的充分条件

定理 (函数极值的第一充分条件)

设函数 $f(x)$ 在 x_0 的邻域 $U(x_0)$ 内连续, 在 $\dot{U}(x_0)$ 内可求导函数。

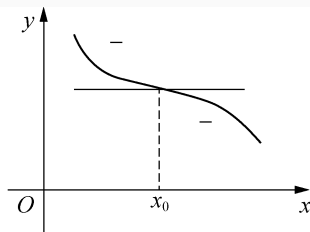
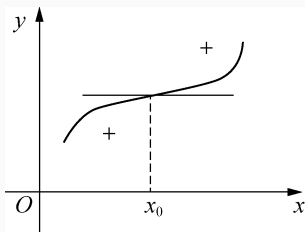
- 如果 x 在 x_0 的左邻域内有 $f'(x) > 0$, 在 x_0 的右邻域内有 $f'(x) < 0$, 那么函数 $f(x)$ 在 x_0 处取得极大值;
- 如果 x 在 x_0 的左邻域内有 $f'(x) < 0$, 在 x_0 的右邻域内有 $f'(x) > 0$, 那么函数 $f(x)$ 在 x_0 处取得极小值;



函数取得极值的充分条件

定理 (函数极值的第一充分条件)

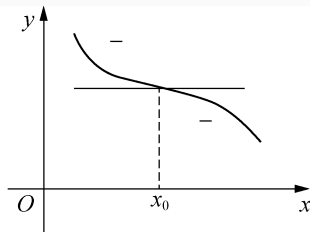
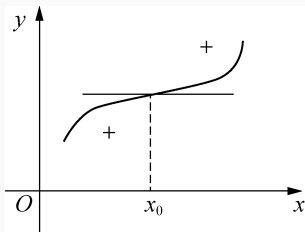
- 如果 $x \in \dot{U}(x_0)$ 时有 $f'(x)$ 恒正或恒负, 那么函数 $f(x)$ 在点 x_0 处无极值。



函数取得极值的充分条件

定理 (函数极值的第一充分条件)

- 如果 $x \in \dot{U}(x_0)$ 时有 $f'(x)$ 恒正或恒负, 那么函数 $f(x)$ 在点 x_0 处无极值。



x 在 x_0 的左邻域内有 $f'(x) > 0$, 在 x_0 的右邻域内有 $f'(x) < 0$.

$\Rightarrow f(x)$ 在 x_0 的左邻域单调递增, 在 x_0 的右邻域单调递减.

$\Rightarrow f(x) < f(x_0)$, $x \in \dot{U}(x_0)$, 即函数 $f(x)$ 在 x_0 处取得极大值. 其余的结论可类似验证.

例 9

求出函数 $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$ 的单调区间和极值。

例 9

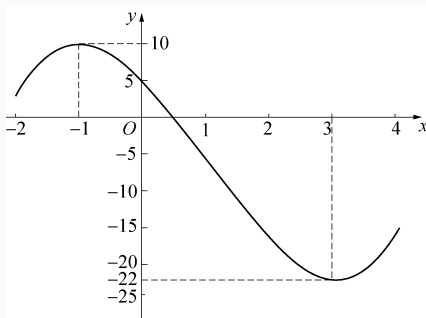
求出函数 $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$ 的单调区间和极值。

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 3)$	3	$(3, +\infty)$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	\nearrow	$f(-1) = 10$	\searrow	$f(3) = -22$	\nearrow

例 9

求出函数 $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$ 的单调区间和极值。

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 3)$	3	$(3, +\infty)$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	\nearrow	$f(-1) = 10$	\searrow	$f(3) = -22$	\nearrow

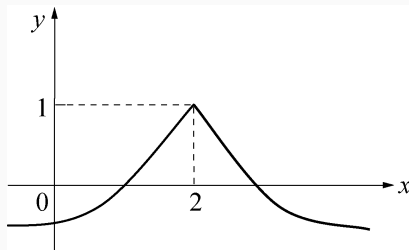


例 10

求函数 $f(x) = 1 - (x - 2)^{\frac{2}{3}}$ 的极值。

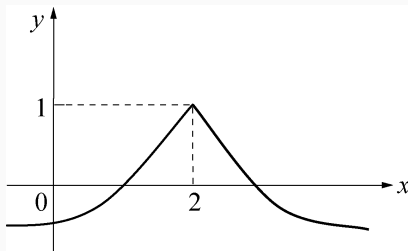
例 10

求函数 $f(x) = 1 - (x - 2)^{\frac{2}{3}}$ 的极值。



例 10

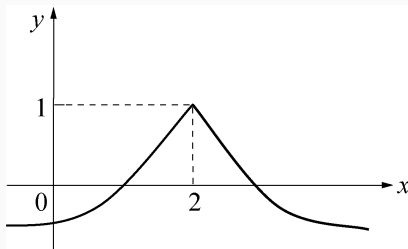
求函数 $f(x) = 1 - (x - 2)^{\frac{2}{3}}$ 的极值。



综上所述我们可得到求函数 $f(x)$ 极值的步骤：

例 10

求函数 $f(x) = 1 - (x - 2)^{\frac{2}{3}}$ 的极值。



综上所述我们可得到求函数 $f(x)$ 极值的步骤：

求导函数 $f'(x) \Rightarrow$ 找出所有驻点和不可求导数值的点

\Rightarrow 在这些点的两侧确定 $f'(x)$ 的符号 \Rightarrow 确定极值点并求出极值.

定理 (函数极值的第二充分条件)

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 处具有二阶导函数值, 且 $f'(x_0) = 0, f''(x_0) \neq 0$, 那么

- 当 $f''(x_0) < 0$ 时, 函数 $f(x)$ 在 x_0 处取得极大值;
- 当 $f''(x_0) > 0$ 时, 函数 $f(x)$ 在 x_0 处取得极小值。

函数取得极值的充分条件

定理 (函数极值的第二充分条件)

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 处具有二阶导函数值, 且 $f'(x_0) = 0, f''(x_0) \neq 0$, 那么

- 当 $f''(x_0) < 0$ 时, 函数 $f(x)$ 在 x_0 处取得极大值;
- 当 $f''(x_0) > 0$ 时, 函数 $f(x)$ 在 x_0 处取得极小值。

$$\begin{aligned} f''(x_0) < 0 &\Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{x - x_0} < 0 \\ &\Rightarrow \text{存在邻域 } \dot{U}(x_0), \text{ 使得 } \frac{f(x)}{x - x_0} < 0, x \in \dot{U}(x_0). \\ &\Rightarrow x < x_0 \text{ 时 } f'(x) > 0, x > x_0 \text{ 时 } f'(x) < 0. \\ &\Rightarrow \text{函数 } f(x) \text{ 在 } x_0 \text{ 处取得极大值.} \end{aligned}$$

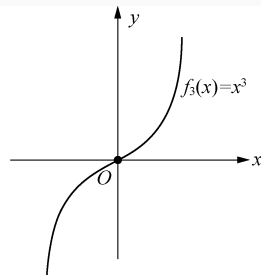
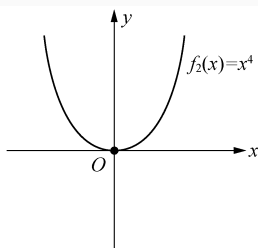
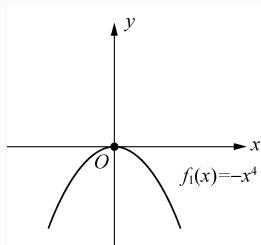
函数取得极值的充分条件

注

条件 $f''(x_0) \neq 0$ 不可缺少。

取函数 $f_1(x) = -x^4$, $f_2(x) = x^4$, $f_3(x) = x^3$, 我们可计算得到

$$f_1'(0) = f_2'(0) = f_3'(0) = 0, f_1''(0) = f_2''(0) = f_3''(0) = 0.$$



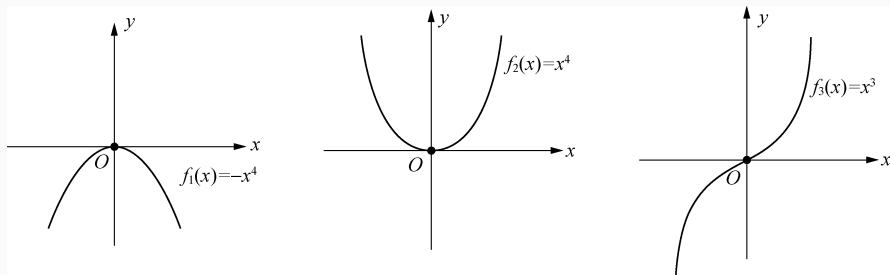
函数取得极值的充分条件

注

条件 $f''(x_0) \neq 0$ 不可缺少。

取函数 $f_1(x) = -x^4$, $f_2(x) = x^4$, $f_3(x) = x^3$, 我们可计算得到

$$f_1'(0) = f_2'(0) = f_3'(0) = 0, f_1''(0) = f_2''(0) = f_3''(0) = 0.$$



然而在 $x = 0$ 处, $f_1(x)$ 取得极大值, $f_2(x)$ 取得极小值, $f_3(x)$ 无极值。

注

在判定驻点 x_0 是否为函数 $f(x)$ 的极值点时，若在驻点 x_0 处 $f''(x_0) = 0$ ，则函数取得极值的第二充分条件失效，此时我们仍需用函数取得极值的第一充分条件。

例 11

求函数 $f(x) = e^x \cos x$ 在区间 $[0, 2\pi]$ 上的极值。

注

在判定驻点 x_0 是否为函数 $f(x)$ 的极值点时, 若在驻点 x_0 处 $f''(x_0) = 0$, 则函数取得极值的第二充分条件失效, 此时我们仍需用函数取得极值的第一充分条件。

例 11

求函数 $f(x) = e^x \cos x$ 在区间 $[0, 2\pi]$ 上的极值。

例 12

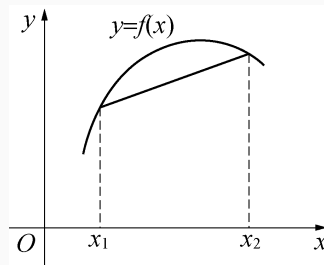
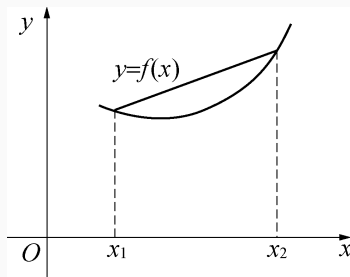
求函数 $f(x) = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2 + 1$ 的极值。

定义 (函数凹凸性的描述性定义)

- 若一个函数曲线上任意弧段位于所张弦的下方，则这样的曲线称为**下凸曲线**；
- 若一个函数曲线上任意弧段位于所张弦的上方，则这样的曲线称为**上凸曲线**。

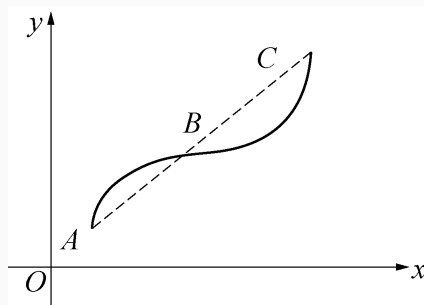
定义 (函数凹凸性的描述性定义)

- 若一个函数曲线上任意弧段位于所张弦的下方, 则这样的曲线称为下凸曲线;
- 若一个函数曲线上任意弧段位于所张弦的上方, 则这样的曲线称为上凸曲线。



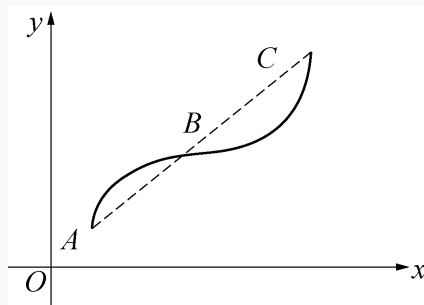
函数的凹凸性

如图，函数曲线弧 \widehat{ABC} 整体是单调上升的，但是弧段 \widehat{AB} 是上凸的，而弧段 \widehat{BC} 是下凸的：



函数的凹凸性

如图，函数曲线弧 \widehat{ABC} 整体是单调上升的，但是弧段 \widehat{AB} 是上凸的，而弧段 \widehat{BC} 是下凸的：



因此我们不仅要考虑函数的增减性，还需要研究函数曲线的弯曲（凹凸）方向。

定义 (函数凹凸性的精确定义)

设函数 $f(x)$ 在区间 I 上连续。

- 如果对任意 $x_1, x_2 \in I$, 恒有

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) < \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2},$$

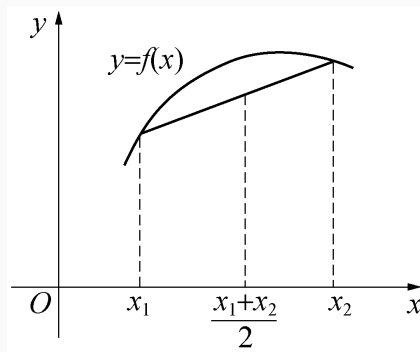
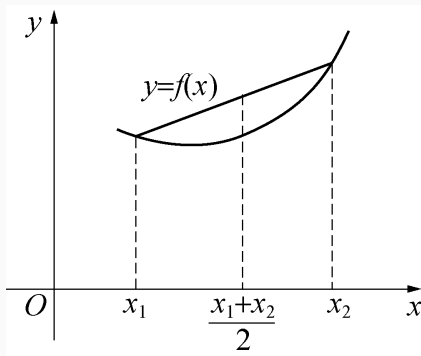
那么称 $f(x)$ 的图形(曲线 $y = f(x)$)是凸的(下凸);

- 如果对任意 $x_1, x_2 \in I$, 恒有

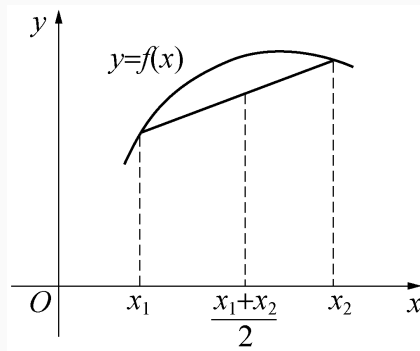
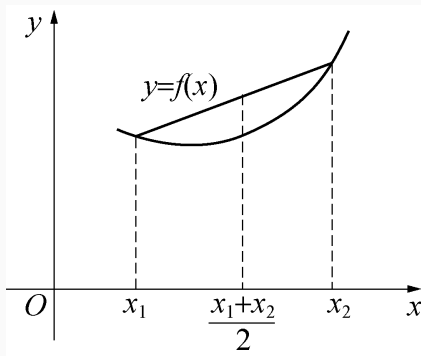
$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) > \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2},$$

那么称 $f(x)$ 的图形(曲线 $y = f(x)$)是凹的(上凸)。

函数的凹凸性



函数的凹凸性

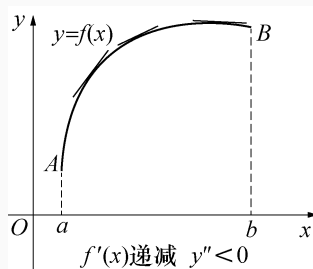
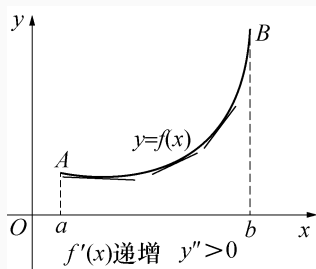


如何确定函数图形的凹凸性呢？

函数的凹凸性

如图，随着横坐标 x 的增加

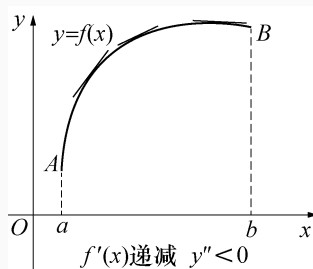
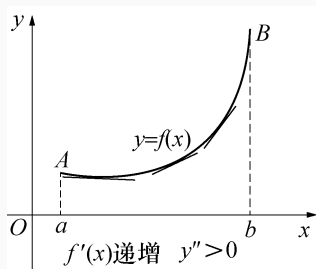
- 下凸曲线上各点处的切线斜率逐渐增大，即 $f'(x)$ 单调递增；
- 上凸曲线上各点处的切线斜率逐渐减小，即 $f'(x)$ 单调递减。



函数的凹凸性

如图，随着横坐标 x 的增加

- 下凸曲线上各点处的切线斜率逐渐增大，即 $f'(x)$ 单调递增；
- 上凸曲线上各点处的切线斜率逐渐减小，即 $f'(x)$ 单调递减。



对于 $f'(x)$ 的增减性，我们可由 $f'(x)$ 的导函数 $f''(x)$ 来判定。因此如果一个函数 $f(x)$ 具有二阶导函数，我们可利用二阶导函数 $f''(x)$ 的符号来确定函数图形的凹凸性。

定理 (函数凹凸性判别方法)

设函数 $f(x)$ 在区间 I 上连续, 在 I 内具有一阶导函数及二阶导函数。

- 如果在 I 内 $f''(x) > 0$, 那么 $f(x)$ 在 I 上的图形是下凸的;
- 如果在 I 内 $f''(x) < 0$, 那么 $f(x)$ 在 I 上的图形是上凸的。

定理 (函数凹凸性判别方法)

设函数 $f(x)$ 在区间 I 上连续, 在 I 内具有一阶导函数及二阶导函数。

- 如果在 I 内 $f''(x) > 0$, 那么 $f(x)$ 在 I 上的图形是下凸的;
- 如果在 I 内 $f''(x) < 0$, 那么 $f(x)$ 在 I 上的图形是上凸的。

连续曲线 $y = f(x)$ 的下凸曲线部分与上凸曲线部分的分界点称为该曲线的拐点。

定理 (函数凹凸性判别方法)

设函数 $f(x)$ 在区间 I 上连续, 在 I 内具有一阶导函数及二阶导函数。

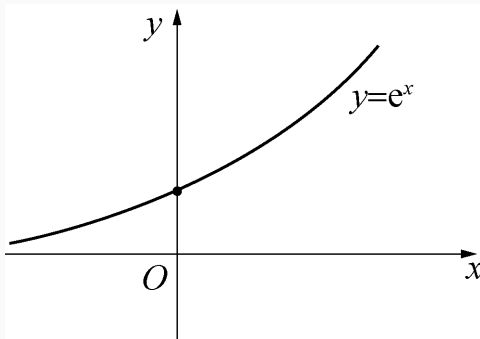
- 如果在 I 内 $f''(x) > 0$, 那么 $f(x)$ 在 I 上的图形是下凸的;
- 如果在 I 内 $f''(x) < 0$, 那么 $f(x)$ 在 I 上的图形是上凸的。

连续曲线 $y = f(x)$ 的下凸曲线部分与上凸曲线部分的分界点称为该曲线的拐点。判断曲线 $y = f(x)$ 的凹凸性与求拐点的一般步骤如下:

- (1) 计算二阶导函数 $f''(x)$;
- (2) 计算方程 $f''(x) = 0$ 的实根;
- (3) $f''(x) = 0$ 的实根将函数 $f(x)$ 的定义域分为若干区间, 在每个区间上确定 $f''(x)$ 的符号, 从而确定曲线 $y = f(x)$ 的凹凸区间;
- (4) 若在 $f''(x) = 0$ 的实根 x_0 的两侧 $f''(x)$ 的符号相反, 则 $(x_0, f(x_0))$ 是曲线 $y = f(x)$ 的拐点。

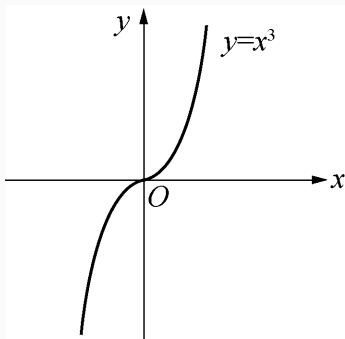
例 13

判断曲线 $y = e^x$ 的凹凸性。



例 14

判断曲线 $y = x^3$ 的凹凸性。



例 15

求出函数 $f(x) = 3x^4 - 4x^3 + 1$ 的拐点及凹凸区间。

例 15

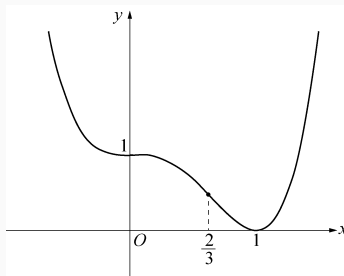
求出函数 $f(x) = 3x^4 - 4x^3 + 1$ 的拐点及凹凸区间。

x	$(-\infty, 0)$	0	$\left(0, \frac{2}{3}\right)$	$\frac{2}{3}$	$\left(\frac{2}{3}, +\infty\right)$
y''	+	0	-	0	+
y	下凸	拐点(0, 1)	上凸	$\left(\frac{2}{3}, \frac{11}{27}\right)$	下凸

例 15

求出函数 $f(x) = 3x^4 - 4x^3 + 1$ 的拐点及凹凸区间。

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, \frac{2}{3})$	$\frac{2}{3}$	$(\frac{2}{3}, +\infty)$
y''	+	0	-	0	+
y	下凸	拐点(0, 1)	上凸	$(\frac{2}{3}, \frac{11}{27})$	下凸

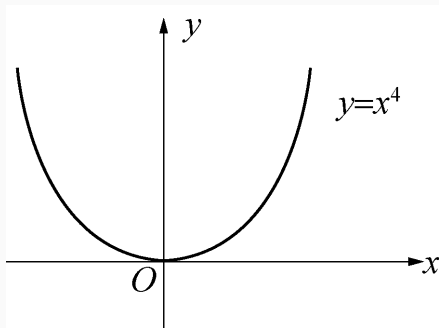


例 16

证明曲线 $y = x^4$ 没有拐点。

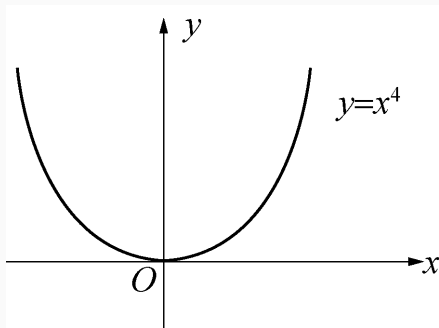
例 16

证明曲线 $y = x^4$ 没有拐点。



例 16

证明曲线 $y = x^4$ 没有拐点。



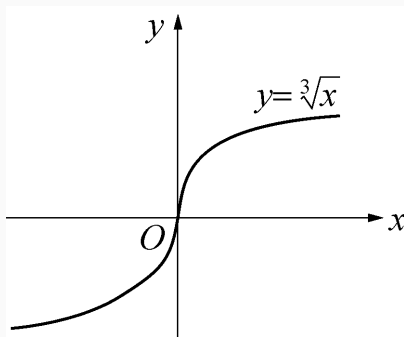
从本例可看出，使 $y'' = 0$ 的点未必是拐点。

例 17

求曲线 $y = \sqrt[3]{x}$ 的拐点。

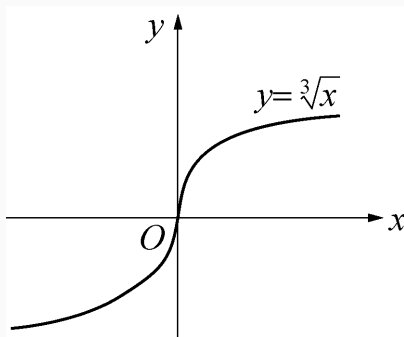
例 17

求曲线 $y = \sqrt[3]{x}$ 的拐点。



例 17

求曲线 $y = \sqrt[3]{x}$ 的拐点。



从本例可看出，导数值不存在的点也有可能是拐点。

函数曲线的渐近线

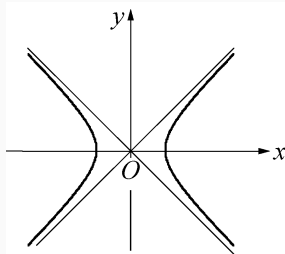
讨论函数曲线伸向无穷远处时，如果该曲线伸向无穷远处且能渐渐靠近一条直线，那么我们就可以既快又好地画出无穷远处该曲线的走向趋势。

函数曲线的渐近线

讨论函数曲线伸向无穷远处时，如果该曲线伸向无穷远处且能渐渐靠近一条直线，那么我们就可以既快又好地画出无穷远处该曲线的走向趋势。

例（双曲线）

取双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ，当 $x \rightarrow \infty$ 时就渐渐靠近两条直线 $y = \frac{b}{a}x$ 及 $y = -\frac{b}{a}x$ 。

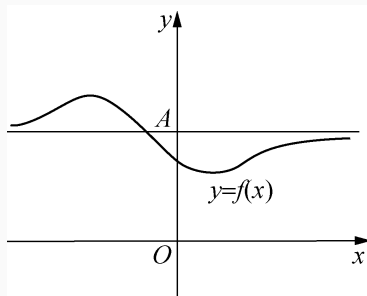


函数的水平渐近线

例（极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$ ）

极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$ 表明当 $|x|$ 无限增大时，对应的函数值 $f(x)$ 与数值 A 无限接近。

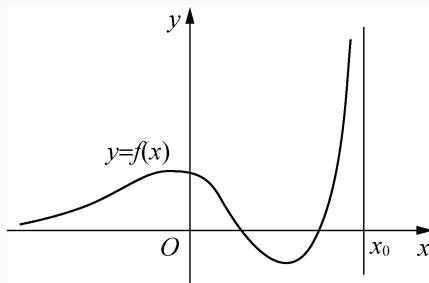
几何上可描述为：当曲线 $y = f(x)$ 沿 x 轴正、负向伸展到无穷远时，曲线上的点与直线 $y = A$ 上的点无限接近，即直线 $y = A$ 为曲线 $y = f(x)$ 的水平渐近线。



函数的铅直渐近线

例 (极限 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$)

极限 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ 表明当 x 充分接近 x_0 时, 对应的函数值 $f(x)$ 的绝对值 $|f(x)|$ 无限增大。几何上可描述为: x 充分接近 x_0 时, 曲线 $y = f(x)$ 可以伸展到无穷远, 也就是 $x = x_0$ 为曲线 $y = f(x)$ 的铅直渐近线。



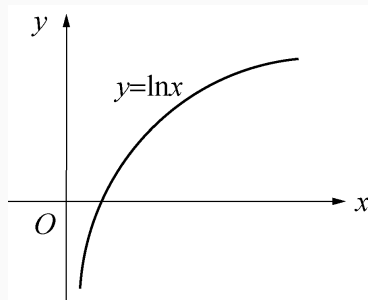
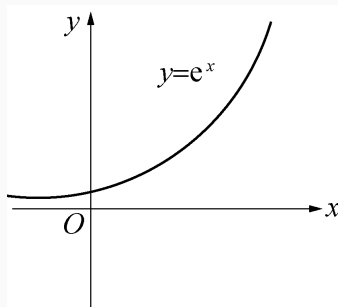
注

- 若 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$ 或 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$, 则直线 $y = A$ 为曲线 $y = f(x)$ 的水平渐近线, 这时的渐近线仅仅限于曲线 $y = f(x)$ 在 $x \rightarrow +\infty$ 的一侧或 $x \rightarrow -\infty$ 的一侧;
- 若 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \infty$ 或 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \infty$, 则直线 $x = x_0$ 为曲线 $y = f(x)$ 的铅直渐近线, 这时渐近线仅仅限于曲线 $y = f(x)$ 在 $x > x_0$ 的一侧或 $x < x_0$ 的一侧。

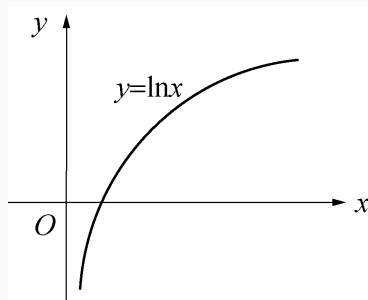
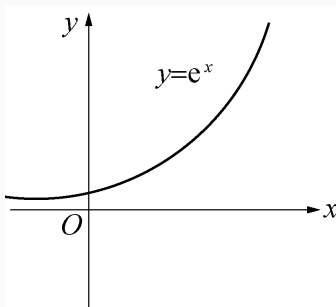
注

- 若 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$ 或 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$, 则直线 $y = A$ 为曲线 $y = f(x)$ 的水平渐近线, 这时的渐近线仅仅限于曲线 $y = f(x)$ 在 $x \rightarrow +\infty$ 的一侧或 $x \rightarrow -\infty$ 的一侧;
- 若 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \infty$ 或 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \infty$, 则直线 $x = x_0$ 为曲线 $y = f(x)$ 的铅直渐近线, 这时渐近线仅仅限于曲线 $y = f(x)$ 在 $x > x_0$ 的一侧或 $x < x_0$ 的一侧。
- 曲线 $y = e^x$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$, 所以直线 $y = 0$ 是曲线 $y = \ln x$ 的水平渐近线;
- 曲线 $y = \ln x$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$, 所以直线 $x = 0$ 是曲线 $y = \ln x$ 的铅直渐近线。

函数曲线的渐近线



函数曲线的渐近线



例 18

求曲线 $y = \frac{e^x}{x^2 - 1}$ 的渐近线。

函数图形的描绘

对于一个函数，若能作出其图形，就能从直观上了解该函数的性态特征。我们现在可以使用导函数描绘函数 $y = f(x)$ 的图形，其一般步骤如下：

函数图形的描绘

对于一个函数，若能作出其图形，就能从直观上了解该函数的性态特征。我们现在可以使用导函数描绘函数 $y = f(x)$ 的图形，其一般步骤如下：

- (1) 确定函数 $f(x)$ 的定义域并研究函数特性，如奇偶性、周期性、有界性等，求出函数的一阶导函数 $f'(x)$ 和二阶导函数 $f''(x)$ ；

函数图形的描绘

对于一个函数，若能作出其图形，就能从直观上了解该函数的性态特征。我们现在可以使用导函数描绘函数 $y = f(x)$ 的图形，其一般步骤如下：

- (1) 确定函数 $f(x)$ 的定义域并研究函数特性，如奇偶性、周期性、有界性等，求出函数的一阶导函数 $f'(x)$ 和二阶导函数 $f''(x)$ ；
- (2) 求出一阶导函数 $f'(x)$ 和二阶导函数 $f''(x)$ 在函数定义域内的全部零点，并求出函数 $f(x)$ 的间断点以及导函数 $f'(x)$ 和 $f''(x)$ 不存在的点，用这些点把函数定义域划分成若干个部分区间；

函数图形的描绘

对于一个函数，若能作出其图形，就能从直观上了解该函数的性态特征。我们现在可以使用导函数描绘函数 $y = f(x)$ 的图形，其一般步骤如下：

- (1) 确定函数 $f(x)$ 的定义域并研究函数特性，如奇偶性、周期性、有界性等，求出函数的一阶导函数 $f'(x)$ 和二阶导函数 $f''(x)$ ；
- (2) 求出一阶导函数 $f'(x)$ 和二阶导函数 $f''(x)$ 在函数定义域内的全部零点，并求出函数 $f(x)$ 的间断点以及导函数 $f'(x)$ 和 $f''(x)$ 不存在的点，用这些点把函数定义域划分成若干个部分区间；
- (3) 确定在这些部分区间内 $f'(x)$ 和 $f''(x)$ 的符号，并由此确定函数的增减性和凹凸性、极值点和拐点；

函数图形的描绘

对于一个函数，若能作出其图形，就能从直观上了解该函数的性态特征。我们现在可以使用导函数描绘函数 $y = f(x)$ 的图形，其一般步骤如下：

- (1) 确定函数 $f(x)$ 的定义域并研究函数特性，如奇偶性、周期性、有界性等，求出函数的一阶导函数 $f'(x)$ 和二阶导函数 $f''(x)$ ；
- (2) 求出一阶导函数 $f'(x)$ 和二阶导函数 $f''(x)$ 在函数定义域内的全部零点，并求出函数 $f(x)$ 的间断点以及导函数 $f'(x)$ 和 $f''(x)$ 不存在的点，用这些点把函数定义域划分成若干个部分区间；
- (3) 确定在这些部分区间内 $f'(x)$ 和 $f''(x)$ 的符号，并由此确定函数的增减性和凹凸性、极值点和拐点；
- (4) 确定函数图形的水平、铅直渐近线以及其他变化趋势；

函数图形的描绘

对于一个函数，若能作出其图形，就能从直观上了解该函数的性态特征。我们现在可以使用导函数描绘函数 $y = f(x)$ 的图形，其一般步骤如下：

- (1) 确定函数 $f(x)$ 的定义域并研究函数特性，如奇偶性、周期性、有界性等，求出函数的一阶导函数 $f'(x)$ 和二阶导函数 $f''(x)$ ；
- (2) 求出一阶导函数 $f'(x)$ 和二阶导函数 $f''(x)$ 在函数定义域内的全部零点，并求出函数 $f(x)$ 的间断点以及导函数 $f'(x)$ 和 $f''(x)$ 不存在的点，用这些点把函数定义域划分成若干个部分区间；
- (3) 确定在这些部分区间内 $f'(x)$ 和 $f''(x)$ 的符号，并由此确定函数的增减性和凹凸性、极值点和拐点；
- (4) 确定函数图形的水平、铅直渐近线以及其他变化趋势；
- (5) 算出 $f'(x)$ 和 $f''(x)$ 的零点以及不存在的点所对应的函数值，并在坐标平面上定出图形上相应的点；

函数图形的描绘

对于一个函数，若能作出其图形，就能从直观上了解该函数的性态特征。我们现在可以使用导函数描绘函数 $y = f(x)$ 的图形，其一般步骤如下：

- (1) 确定函数 $f(x)$ 的定义域并研究函数特性，如奇偶性、周期性、有界性等，求出函数的一阶导函数 $f'(x)$ 和二阶导函数 $f''(x)$ ；
- (2) 求出一阶导函数 $f'(x)$ 和二阶导函数 $f''(x)$ 在函数定义域内的全部零点，并求出函数 $f(x)$ 的间断点以及导函数 $f'(x)$ 和 $f''(x)$ 不存在的点，用这些点把函数定义域划分成若干个部分区间；
- (3) 确定在这些部分区间内 $f'(x)$ 和 $f''(x)$ 的符号，并由此确定函数的增减性和凹凸性、极值点和拐点；
- (4) 确定函数图形的水平、铅直渐近线以及其他变化趋势；
- (5) 算出 $f'(x)$ 和 $f''(x)$ 的零点以及不存在的点所对应的函数值，并在坐标平面上定出图形上相应的点；
- (6) 有时还需适当补充一些辅助作图点(如与坐标轴的交点和曲线的端点等)，然后根据第(3)、(4)步中得到的结果，用平滑曲线联接而画出函数的图形。

例 19

作函数 $f(x) = x^3 - x^2 - x + 1$ 的图形。

解 定义域为 $(-\infty, +\infty)$ ，无奇偶性及周期性。

$$f'(x) = (3x + 1)(x - 1), \quad f''(x) = 2(3x - 1).$$

令 $f'(x) = 0$ ，得到 $x = -\frac{1}{3}$ 或 $x = 1$ ；令 $f''(x) = 0$ ，得到 $x = \frac{1}{3}$ 。列表如下：

例 19

作函数 $f(x) = x^3 - x^2 - x + 1$ 的图形。

解 定义域为 $(-\infty, +\infty)$ ，无奇偶性及周期性。

$$f'(x) = (3x + 1)(x - 1), \quad f''(x) = 2(3x - 1).$$

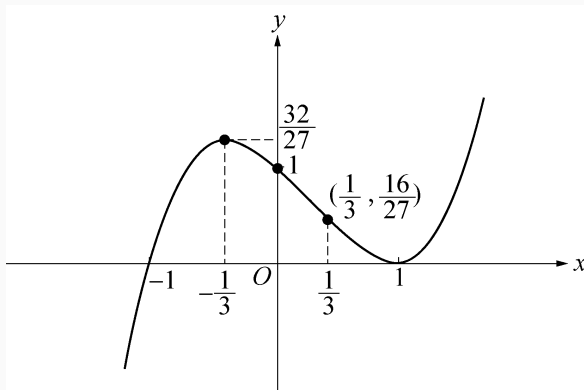
令 $f'(x) = 0$ ，得到 $x = -\frac{1}{3}$ 或 $x = 1$ ；令 $f''(x) = 0$ ，得到 $x = \frac{1}{3}$ 。列表如下：

x	$(-\infty, -\frac{1}{3})$	$-\frac{1}{3}$	$(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$	$\frac{1}{3}$	$(\frac{1}{3}, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-		-	0	+
$f''(x)$	-		-		+		+
$f(x)$	\nearrow	$\frac{32}{27}$	\searrow	$(\frac{1}{3}, \frac{16}{27})$	\searrow	0	\nearrow

补充点: $A(-1, 0), B(0, 1), C\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{8}\right)$ 。

函数图形的描绘

补充点: $A(-1, 0), B(0, 1), C\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{8}\right)$ 。综上, 作出图形如下:



例 20

作函数 $f(x) = \frac{4(x+1)}{x^2} - 2$ 的图形。

解 函数的定义域为 $\{x \mid x \neq 0\}$ ，非奇非偶函数，且无对称性。

$$f'(x) = -\frac{4(x+1)}{x^3}, \quad f''(x) = \frac{8(x+1)}{x^4}.$$

令 $f'(x) = 0$ ，得到 $x = -2$ ；令 $f''(x) = 0$ ，得到 $x = -3$ 。

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{4(x+1)}{x^2} - 2 \right] = -2,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{4(x+1)}{x^2} - 2 \right] = +\infty.$$

分别得到水平渐近线 $y = -2$ 和铅直渐近线 $x = 0$ 。

我们可以列表如下：

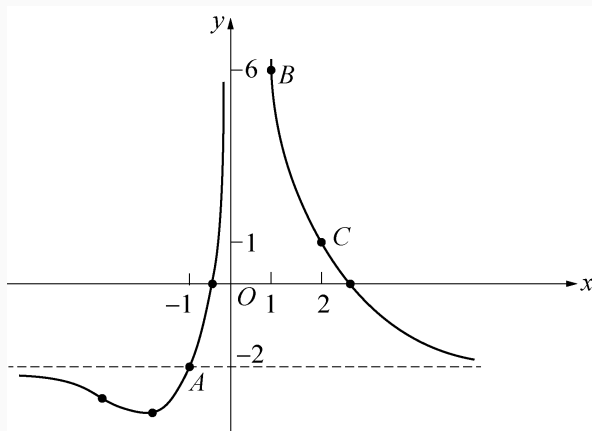
我们可以列表如下：

x	$(-\infty, -3)$	-3	$(-3, -2)$	-2	$(-2, 0)$	0	$(0, +\infty)$
$f'(x)$	—		—	0	+	不存在	—
$f''(x)$	—	0	+		+		+
$f(x)$	\searrow	$\left(-3, \frac{26}{9}\right)$	\searrow	极值	\nearrow	间断	\searrow

补充点: $(1 - \sqrt{3}, 0), (1 + \sqrt{3}, 0); A(-1, -2), B(1, 6), C(2, 1)$ 。

函数图形的描绘

补充点: $(1 - \sqrt{3}, 0), (1 + \sqrt{3}, 0); A(-1, -2), B(1, 6), C(2, 1)$ 。综上, 作出图形如下:



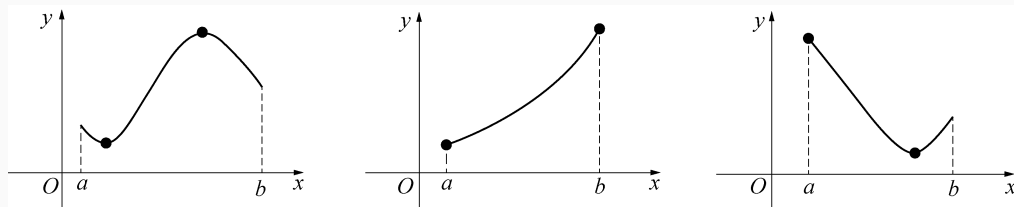
微分学的应用

函数的最大值、最小值

极值的概念是局部性的，是描述函数在某一点邻域内的性态。

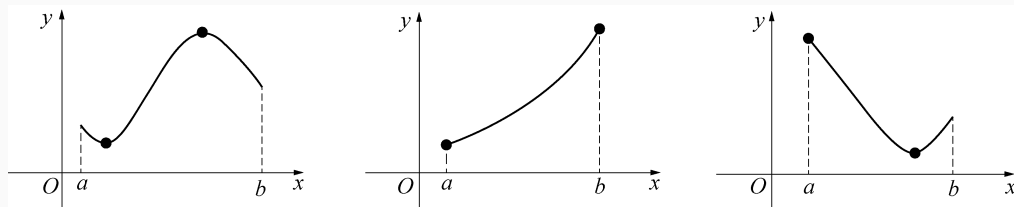
函数的最大值、最小值

极值的概念是局部性的，是描述函数在某一点邻域内的性态。在函数定义域，即全局范围内，我们可以讨论函数最大值、最小值问题。



函数的最大值、最小值

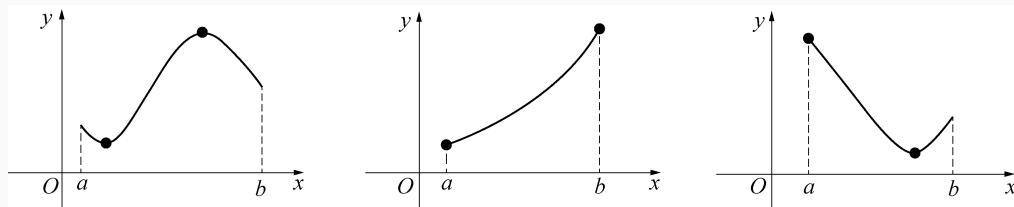
极值的概念是局部性的，是描述函数在某一点邻域内的性态。在函数定义域，即全局范围内，我们可以讨论函数最大值、最小值问题。



由闭区间上连续函数的性质知：若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上一定取得最大值和最小值。

函数的最大值、最小值

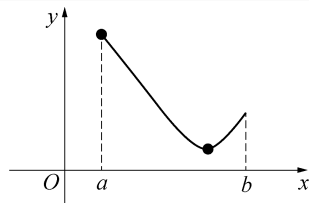
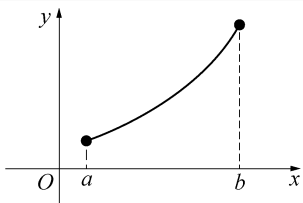
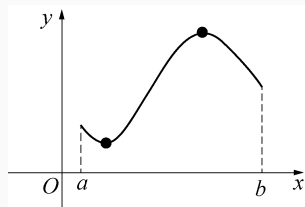
极值的概念是局部性的，是描述函数在某一点邻域内的性态。在函数定义域，即全局范围内，我们可以讨论函数最大值、最小值问题。



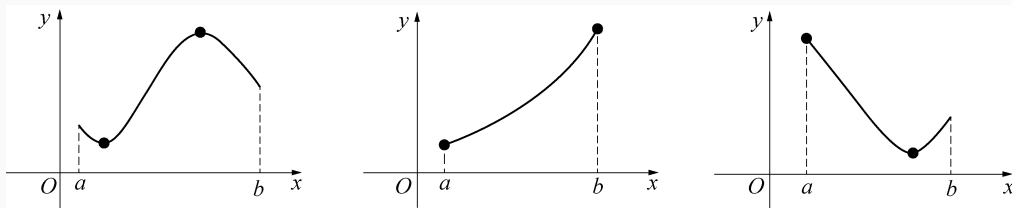
由闭区间上连续函数的性质知：若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上一定取得最大值和最小值。

- 函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的最值在什么位置可以取到？
- 如何求出连续函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的最大值和最小值呢？

函数的最大值、最小值

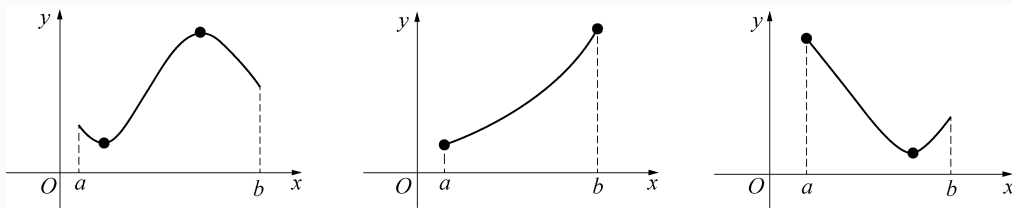


函数的最大值、最小值



由图像可知, $f(x)$ 的最大值与最小值可能在区间 $[a, b]$ 的内部取得, 也可能在区间端点 $x = a$ 或 $x = b$ 处取得。

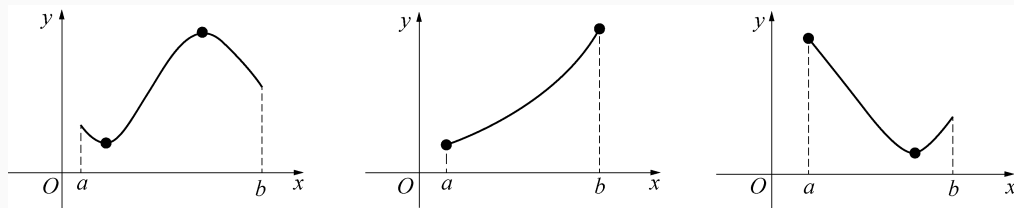
函数的最大值、最小值



由图像可知， $f(x)$ 的最大值与最小值可能在区间 $[a, b]$ 的内部取得，也可能在区间端点 $x = a$ 或 $x = b$ 处取得。

- (1) 若 $f(x)$ 的最大值与最小值在区间端点 $x = a$ 或 $x = b$ 处取得，我们可直接计算函数值 $f(a)$ 或 $f(b)$ ；
- (2) 若 $f(x)$ 在开区间 (a, b) 内 x_0 处取得最大值（最小值），则 $f(x_0)$ 必是函数 $f(x)$ 的极大值（极小值），对应着 $f'(x_0)$ 可能存在，也可能不存在；
- (3) 若 $f'(x_0)$ 存在，则 x_0 必为 $f(x)$ 的驻点。

函数的最大值、最小值



由图像可知， $f(x)$ 的最大值与最小值可能在区间 $[a, b]$ 的内部取得，也可能在区间端点 $x = a$ 或 $x = b$ 处取得。

- (1) 若 $f(x)$ 的最大值与最小值在区间端点 $x = a$ 或 $x = b$ 处取得，我们可直接计算函数值 $f(a)$ 或 $f(b)$ ；
- (2) 若 $f(x)$ 在开区间 (a, b) 内 x_0 处取得最大值（最小值），则 $f(x_0)$ 必是函数 $f(x)$ 的极大值（极小值），对应着 $f'(x_0)$ 可能存在，也可能不存在；
- (3) 若 $f'(x_0)$ 存在，则 x_0 必为 $f(x)$ 的驻点。

函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的最值必在 $f(x)$ 的驻点、导数不存在的点或区间端点处取得。

函数最值的求解步骤

根据上述分析，我们可以由下列过程求函数最大值和最小值：

- (1) 找出 $f(x)$ 在 (a, b) 内所有驻点及不可求导数值的点 x_i ($i = 1, 2, \dots, m$)；
- (2) 比较函数值 $f(x_i)$ ($i = 1, 2, \dots, m$)及 $f(a), f(b)$ 的大小；
- (3) 计算函数的最值：

$$\text{最大值 } M = \max\{f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_m), f(a), f(b)\},$$

$$\text{最小值 } m = \min\{f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_m), f(a), f(b)\}.$$

函数最值的求解步骤

根据上述分析，我们可以由下列过程求函数最大值和最小值：

- (1) 找出 $f(x)$ 在 (a, b) 内所有驻点及不可求导数值的点 x_i ($i = 1, 2, \dots, m$)；
- (2) 比较函数值 $f(x_i)$ ($i = 1, 2, \dots, m$)及 $f(a), f(b)$ 的大小；
- (3) 计算函数的最值：

$$\text{最大值 } M = \max\{f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_m), f(a), f(b)\},$$

$$\text{最小值 } m = \min\{f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_m), f(a), f(b)\}.$$

例 1

求函数 $f(x) = x^4 - 2x^2 + 5$ 在区间 $[-2, 2]$ 上的最大值和最小值。

函数最值的求解步骤

根据上述分析，我们可以由下列过程求函数最大值和最小值：

- (1) 找出 $f(x)$ 在 (a, b) 内所有驻点及不可求导数值的点 x_i ($i = 1, 2, \dots, m$)；
- (2) 比较函数值 $f(x_i)$ ($i = 1, 2, \dots, m$)及 $f(a), f(b)$ 的大小；
- (3) 计算函数的最值：

$$\text{最大值 } M = \max\{f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_m), f(a), f(b)\},$$

$$\text{最小值 } m = \min\{f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_m), f(a), f(b)\}.$$

例 1

求函数 $f(x) = x^4 - 2x^2 + 5$ 在区间 $[-2, 2]$ 上的最大值和最小值。

例 2

求函数 $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ 在区间 $[0, 2]$ 上的最大值和最小值。

函数最值的求解步骤

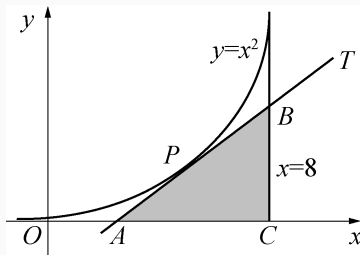
若 $f(x)$ 在 (a, b) 内有唯一驻点，且此驻点为极大(小)值，则此极大(小)值必为最大(小)值。

函数最值的求解步骤

若 $f(x)$ 在 (a, b) 内有唯一驻点，且此驻点为极大(小)值，则此极大(小)值必为最大(小)值。

例 3

由直线 $y = 0$, $x = 8$ 及抛物线 $y = x^2$ 围成一个曲边三角形，在曲线 $y = x^2$ 上求一点，使曲线在该点处的切线与直线 $y = 0$ 及 $x = 8$ 所围成的三角形面积最大。



弧微分的概念

要讨论如何定量地描述曲线的弯曲程度，我们需要引入曲率的概念。而介绍曲率需要我们先引进弧微分的概念。

弧微分的概念

要讨论如何定量地描述曲线的弯曲程度，我们需要引入曲率的概念。而介绍曲率需要我们先引进弧微分的概念。

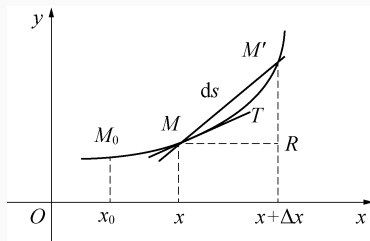
若函数 $y = f(x)$ 在区间 (a, b) 内具有一阶连续导函数，其图形为一条处处有切线的光滑曲线，且曲线上每个点的切线随切点的移动而连续转动。

弧微分的概念

要讨论如何定量地描述曲线的弯曲程度，我们需要引入曲率的概念。而介绍曲率需要我们先引进弧微分的概念。

若函数 $y = f(x)$ 在区间 (a, b) 内具有一阶连续导函数，其图形为一条处处有切线的光滑曲线，且曲线上每个点的切线随切点的移动而连续转动。在曲线 $y = f(x)$ 上取固定点 $M_0(x_0, f(x_0))$ 作为度量弧长的基点，并规定：

- 以 x 增加的方向作为曲线的正向；
- 对曲线上任意点 $M(x, f(x))$ ，有向弧段 $\widehat{M_0M}$ 的长度为 $s = |s|\operatorname{sgn}(x - x_0)$ ，称为弧 s 。



由上述设定，弧 s 是 x 的函数： $s = s(x)$ ，且它是单调增加的。并且

$$\Delta s = \widehat{M_0 M'} - \widehat{M_0 M} = \widehat{M M'}.$$

弧微分公式

由上述设定，弧 s 是 x 的函数： $s = s(x)$ ，且它是单调增加的。并且

$$\Delta s = \widehat{M_0 M'} - \widehat{M_0 M} = \widehat{M M'}.$$

注意到

$$\left(\frac{\Delta s}{\Delta x}\right)^2 = \left(\frac{\widehat{M M'}}{\Delta x}\right)^2 = \left(\frac{\widehat{M M'}}{\overline{M M'}}\right)^2 \cdot \left(\frac{\overline{M M'}}{\Delta x}\right)^2 = \left(\frac{\widehat{M M'}}{\overline{M M'}}\right)^2 \cdot \left[1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2\right],$$

由上述设定，弧 s 是 x 的函数： $s = s(x)$ ，且它是单调增加的。并且

$$\Delta s = \widehat{M_0 M'} - \widehat{M_0 M} = \widehat{M M'}.$$

注意到

$$\left(\frac{\Delta s}{\Delta x}\right)^2 = \left(\frac{\widehat{M M'}}{\Delta x}\right)^2 = \left(\frac{\widehat{M M'}}{\overline{M M'}}\right)^2 \cdot \left(\frac{\overline{M M'}}{\Delta x}\right)^2 = \left(\frac{\widehat{M M'}}{\overline{M M'}}\right)^2 \cdot \left[1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2\right],$$

所以

$$\frac{\Delta s}{\Delta x} = \pm \left| \frac{\widehat{M M'}}{\overline{M M'}} \right| \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}.$$

由于 $M' \rightarrow M$ ($\Delta x \rightarrow 0$)，所以

$$\lim_{M' \rightarrow M} \left| \frac{\widehat{M M'}}{\overline{M M'}} \right| = 1, \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2 = y'^2.$$

而 $s = s(x)$ 单调增加, 即 $y' \geq 0$, 因此可得弧微分公式为

$$\frac{ds}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta x} = \sqrt{1 + y'^2} \Rightarrow ds = \sqrt{1 + y'^2} dx.$$

弧微分公式

而 $s = s(x)$ 单调增加, 即 $y' \geq 0$, 因此可得弧微分公式为

$$\frac{ds}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta x} = \sqrt{1 + y'^2} \Rightarrow ds = \sqrt{1 + y'^2} dx.$$

注

- 若函数曲线由参数方程

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t) \end{cases}$$

所表示, 则

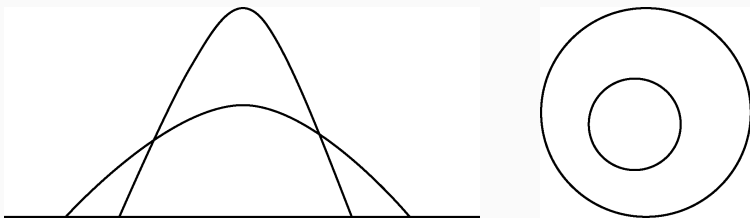
$$ds = \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt;$$

- 若函数曲线参数方程为极坐标形式 $r = r(\theta)$, 则

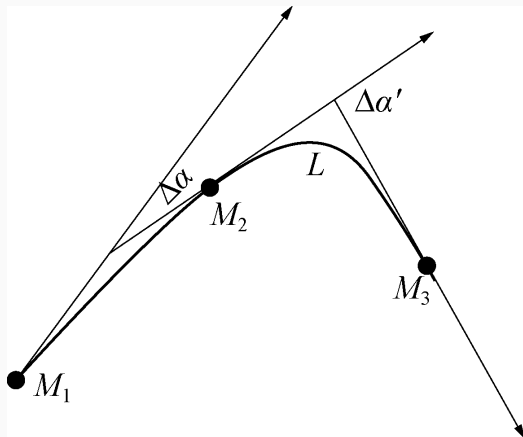
$$ds = \sqrt{r^2(t) + r'^2(t)} dt.$$

从几何直观上容易看出：

- 直线不弯曲；
- 抛物线在顶点处弯曲最厉害；当抛物线上的点越远离顶点，抛物线弯曲程度越低；
- 圆上各点的弯曲程度是相同的；圆的半径越小，其弯曲越厉害。

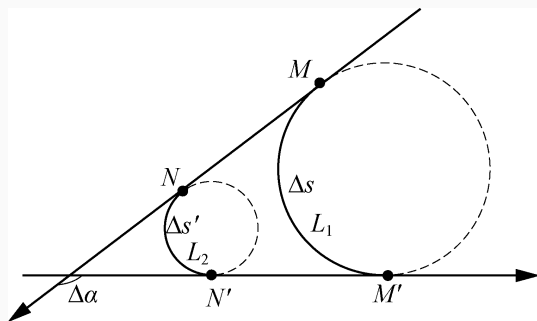


如图所示, 在曲线 L 上点从 M_1 移动到 M_2 时, 切线转过的角度(简称转角) $\Delta\alpha$ 很小, 但点从 M_2 移动到 M_3 时, 切线转过的角度(转角) $\Delta\alpha'$ 很大。

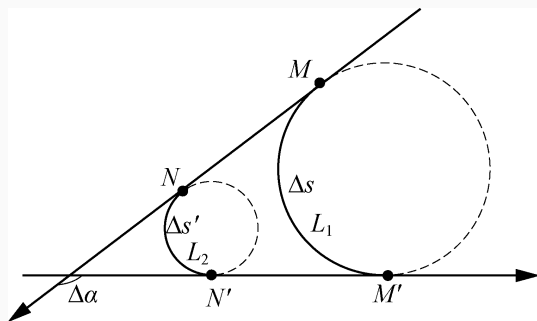


但是单用转角来衡量曲线的弯曲程度是不完全的。

但是单用转角来衡量曲线的弯曲程度是不完全的。如图所示，当点从 M 沿 L_1 移动到 M' 时(弧长为 Δs)与点从 N 沿 L_2 移动到 N' 时(弧长为 $\Delta s'$)，它们有相同的转角，但 $\widehat{MM'}$ 比 $\widehat{NN'}$ 的弯曲程度要小。



但是单用转角来衡量曲线的弯曲程度是不完全的。如图所示，当点从 M 沿 L_1 移动到 M' 时(弧长为 Δs)与点从 N 沿 L_2 移动到 N' 时(弧长为 $\Delta s'$)，它们有相同的转角，但 $\widehat{MM'}$ 比 $\widehat{NN'}$ 的弯曲程度要小。



因此，曲线的弯曲程度既与转角 $\Delta\alpha$ 有关(成正比)，也与经过的弧长 Δs 有关(成反比)。

曲率的定义

定义 (曲线的曲率)

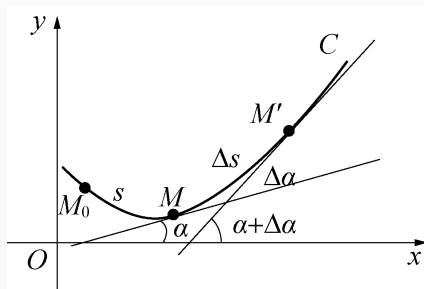
设曲线 $C : y = f(x)$ 是光滑的, 在 C 上任取一点 $M_0(x_0, f(x_0))$ 作为度量弧长的基点。

曲率的定义

定义 (曲线的曲率)

设曲线 $C: y = f(x)$ 是光滑的, 在 C 上任取一点 $M_0(x_0, f(x_0))$ 作为度量弧长的基点。设

- 曲线 C 上点 $M(x, y)$ 对应弧 s 且该点处曲线的切线倾斜角为 α ;
- 曲线 C 上点 $M'(x + \Delta x, y + \Delta y)$ 对应弧 $s + \Delta s$ 且该点处曲线的切线倾斜角为 $\alpha + \Delta\alpha$ 。



定义 (曲线的曲率)

- 当动点由点 M 沿 C 移动到点 M' 时, 切线转过的角度为 $|\Delta\alpha|$, 比值 $\left|\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right|$ 称为弧段 $\widehat{MM'}$ 的**平均曲率**, 记作

$$\bar{K} := \left| \frac{\Delta\alpha}{\Delta s} \right| \text{ (单位弧段上切线转角的大小).}$$

- 当 $M \rightarrow M'$ 时, $\Delta s \rightarrow 0$, 将平均曲率取极限(若极限存在), 称该极限值为曲线 C 在点 M 处的**曲率**, 记作

$$K := \lim_{M \rightarrow M'} \bar{K} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta\alpha}{\Delta s} \right| = \left| \frac{d\alpha}{ds} \right|.$$

例 4

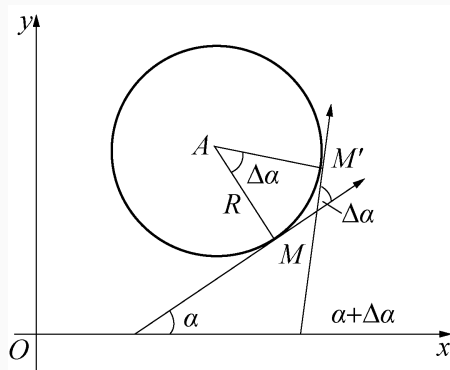
求直线上各点的曲率。

例 4

求直线上各点的曲率。

例 5

求半径为 R 的圆上任意一点处的曲率。



设曲线 $y = f(x)$ ，其中 $f(x)$ 具有二阶导函数。由导数值的几何意义知

$$y' = \tan \alpha, \alpha = \alpha(x).$$

曲率的计算方法

设曲线 $y = f(x)$ ，其中 $f(x)$ 具有二阶导函数。由导数值的几何意义知

$$y' = \tan \alpha, \alpha = \alpha(x).$$

对 $y' = \tan \alpha$ 两边求导函数得到

$$y'' = \sec^2 \alpha \cdot \frac{d\alpha}{dx} = (1 + \tan^2 \alpha) \cdot \frac{d\alpha}{dx} = (1 + y'^2) \frac{d\alpha}{ds} \cdot \frac{ds}{dx}.$$

曲率的计算方法

设曲线 $y = f(x)$ ，其中 $f(x)$ 具有二阶导函数。由导数值的几何意义知

$$y' = \tan \alpha, \alpha = \alpha(x).$$

对 $y' = \tan \alpha$ 两边求导函数得到

$$y'' = \sec^2 \alpha \cdot \frac{d\alpha}{dx} = (1 + \tan^2 \alpha) \cdot \frac{d\alpha}{dx} = (1 + y'^2) \frac{d\alpha}{ds} \cdot \frac{ds}{dx}.$$

因此

$$\text{弧微分} \frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + y'^2} \Rightarrow \frac{d\alpha}{ds} = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}} \Rightarrow K = \left| \frac{d\alpha}{ds} \right| = \frac{|y''|}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

曲率的计算方法

设曲线 $y = f(x)$ ，其中 $f(x)$ 具有二阶导函数。由导数值的几何意义知

$$y' = \tan \alpha, \alpha = \alpha(x).$$

对 $y' = \tan \alpha$ 两边求导函数得到

$$y'' = \sec^2 \alpha \cdot \frac{d\alpha}{dx} = (1 + \tan^2 \alpha) \cdot \frac{d\alpha}{dx} = (1 + y'^2) \frac{d\alpha}{ds} \cdot \frac{ds}{dx}.$$

因此

$$\text{弧微分} \frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + y'^2} \Rightarrow \frac{d\alpha}{ds} = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}} \Rightarrow K = \left| \frac{d\alpha}{ds} \right| = \frac{|y''|}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

特别地，当 $|y'| \ll 1$ 时， $K \approx |y''|$ 。

注

若函数曲线由参数方程 $\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t) \end{cases}$ 所表示, 则由 $y' = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$ 可得

$$y'' = \frac{\varphi'(t)\psi''(t) - \varphi''(t)\psi'(t)}{[\varphi'(t)]^3} \Rightarrow K = \frac{\varphi'(t)\psi''(t) - \varphi''(t)\psi'(t)}{[\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)]^{\frac{3}{2}}}.$$

注

若函数曲线由参数方程 $\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t) \end{cases}$ 所表示, 则由 $y' = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$ 可得

$$y'' = \frac{\varphi'(t)\psi''(t) - \varphi''(t)\psi'(t)}{[\varphi'(t)]^3} \Rightarrow K = \frac{\varphi'(t)\psi''(t) - \varphi''(t)\psi'(t)}{[\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)]^{\frac{3}{2}}}.$$

例 5

求正弦曲线 $y = \sin x$ 在区间 $[0, \pi]$ 上各点处的曲率。

注

若函数曲线由参数方程 $\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t) \end{cases}$ 所表示, 则由 $y' = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$ 可得

$$y'' = \frac{\varphi'(t)\psi''(t) - \varphi''(t)\psi'(t)}{[\varphi'(t)]^3} \Rightarrow K = \frac{\varphi'(t)\psi''(t) - \varphi''(t)\psi'(t)}{[\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)]^{\frac{3}{2}}}.$$

例 5

求正弦曲线 $y = \sin x$ 在区间 $[0, \pi]$ 上各点处的曲率。

例 6

求椭圆 $\begin{cases} x = a \cos t, \\ y = b \sin t \end{cases}$ 在点 $(0, b)$ 处的曲率。

定义

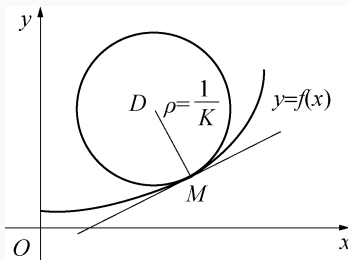
设曲线 $y = f(x)$ 在点 $M(x, y)$ 处的曲率为 $K (K \neq 0)$ ，在点 M 处的曲线的法线上凹的一侧取一点 D ，使 $|DM| = \frac{1}{K} = \rho$ 。

- 称以 D 为圆心、 ρ 为半径的圆为曲线在点 M 处的**曲率圆**；
- 曲率圆的圆心 D 叫作曲线在点 M 处的**曲率中心**；
- 曲率圆的半径 ρ 叫作曲线在点 M 处的**曲率半径**。

定义

设曲线 $y = f(x)$ 在点 $M(x, y)$ 处的曲率为 $K (K \neq 0)$ ，在点 M 处的曲线的法线上凹的一侧取一点 D ，使 $|DM| = \frac{1}{K} = \rho$ 。

- 称以 D 为圆心、 ρ 为半径的圆为曲线在点 M 处的**曲率圆**；
- 曲率圆的圆心 D 叫作曲线在点 M 处的**曲率中心**；
- 曲率圆的半径 ρ 叫作曲线在点 M 处的**曲率半径**。



由上述定义可知：

- 曲率圆与曲线在点 M 处有相同的切线与曲率，且在点 M 的邻近有相同的凹向。因此，我们往往可用曲率圆在点 M 附近的一段弧来近似代替曲线弧；
- 曲率圆的半径和曲率之间满足 $\rho = \frac{1}{K}$ ，或 $K = \frac{1}{\rho}$ 。

由上述定义可知：

- 曲率圆与曲线在点 M 处有相同的切线与曲率，且在点 M 的邻近有相同的凹向。因此，我们往往可用曲率圆在点 M 附近的一段弧来近似代替曲线弧；
- 曲率圆的半径和曲率之间满足 $\rho = \frac{1}{K}$ ，或 $K = \frac{1}{\rho}$ 。

例 7

求曲线 $y = \tan x$ 在点 $\left(\frac{\pi}{4}, 1\right)$ 处的曲率与曲率半径。

The End