

姓名:

学号:

专业:

高等数学 导数值与导函数

习题 1 请你判断下列函数在其定义域范围内是否有导函数. 如果导函数存在请进行计算:

$$(1) f(x) = x|x|, x \in \mathbb{R};$$

$$(2) f(x) = \sqrt{|x|}, x \in \mathbb{R};$$

$$(3) f(x) = [x] \sin^2(\pi x), x \in \mathbb{R};$$

$$(4) f(x) = ([x] - x) \sin^2(\pi x), x \in \mathbb{R};$$

$$(5) f(x) = \ln |x|, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\};$$

$$(6) f(x) = \arccos \frac{1}{|x|}, |x| > 1.$$

习题 2 计算下列函数的导函数:

$$(1) f(x) = \log_x 2, x > 0, x \neq 1;$$

$$(2) f(x) = \log_x \cos x, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \setminus \{1\}.$$

习题 3 试讨论下列函数是否存在导函数. 如果存在请进行计算:

$$(1) f(x) = \begin{cases} \arctan x, & |x| \leq 1, \\ \frac{\pi}{4} \operatorname{sgn} x + \frac{x-1}{2}, & |x| > 1. \end{cases}$$

$$(2) f(x) = \begin{cases} x^2 e^{-x^2}, & |x| \leq 1, \\ \frac{1}{e}, & |x| > 1. \end{cases}$$

习题 4 设定 f 在 \mathbb{R} 上导函数存在的条件下请确定下列参数的值:

$$(1) f(x) = \begin{cases} 4x, & x \leq 0, \\ ax^2 + bx + c, & 0 < x < 1, \\ 3 - 2x, & x \geq 1. \end{cases}$$

$$(2) f(x) = \begin{cases} ax + b, & x \leq 0, \\ cx^2 + dx, & 0 < x \leq 1, \\ 1 - \frac{1}{x}, & x > 1. \end{cases}$$

习题 5 设函数 f, g 在点 a 处有导数值, 请计算下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow a} \frac{xf(a) - af(x)}{x - a};$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)g(a) - f(a)g(x)}{x - a}.$$

习题 6 设函数 $f(a) > 0$ 且在点 a 处有导数值, 请计算下列极限:

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{f\left(a + \frac{1}{n}\right)}{f(a)} \right)^{\frac{1}{n}};$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f(x)}{f(a)} \right)^{\frac{1}{\ln x - \ln a}}, a > 0.$$

习题 7 设函数 f 在点 a 处有导数值, 请计算下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow a} \frac{a^n f(x) - x^n f(a)}{x - a}, n \in \mathbb{N};$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)e^x - f(a)}{f(x) \cos x - f(a)}, a = 0, f'(0) \neq 0.$$

姓名:

学号:

专业:

高等数学 导数值与导函数

习题 8* 设函数

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \left| \cos \frac{\pi}{x} \right|, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

请验证函数 f 在 $x_n = \frac{2}{2n+1}$, $n \in \mathbb{Z}$ 处没有导数值, 但是在数列 x_n 的极限, 即 $x = 0$ 处有导数值.

习题 9* 如果 $|a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + \cdots + a_n \sin nx| \leq |\sin x|$, $x \in \mathbb{R}$, 证明 $|a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n| \leq 1$.

姓名: 学号: 专业: 高等数学 导数值与导函数
