AMS

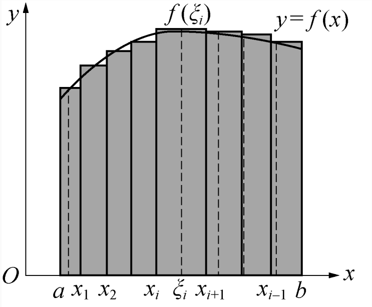
多元函数积分学

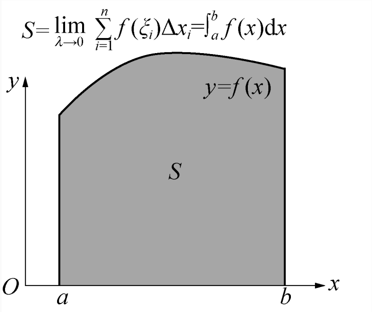
二重积分

课前导读

如果f在$[a,b]$上连续且$f(x)\geq 0$，那么对于直线$x=a$，$x=b$，曲线$y=f(x)$及x轴所围成曲边梯形的面积，可以通过定积分来计算：

如果f在$[a,b]$上连续且$f(x)\geq 0$，那么对于直线$x=a$，$x=b$，曲线$y=f(x)$及x轴所围成曲边梯形的面积，可以通过定积分来计算：





曲顶柱体的体积

本节我们由曲顶柱体的体积公式引入二重积分的概念，并且研究二重积分的相关性质。

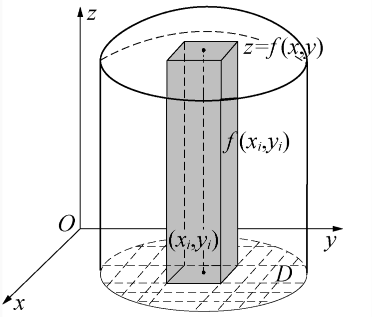
曲顶柱体的体积

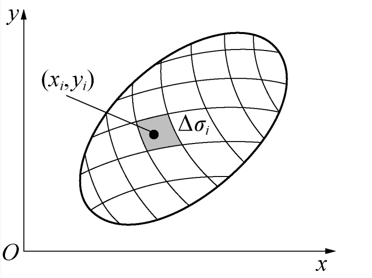
本节我们由曲顶柱体的体积公式引入二重积分的概念，并且研究二重积分的相关性质。曲面$z=f(x,y)$在平面闭区域D上连续，且$f(x,y)\geq 0$。

过D边界作垂直于xOy平面的柱面S，则区域D和柱面S以及曲面$z=f(x,y)$构成一个封闭的立体图形，即D为底、以$z=f(x,y)$为顶的**曲顶柱体**。

本节我们由曲顶柱体的体积公式引入二重积分的概念，并且研究二重积分的相关性质。曲面$z = f(x, y)$在平面闭区域D上连续，且$f(x, y) \geq 0$。

过D边界作垂直于xOy平面的柱面S，则区域D和柱面S以及曲面$z = f(x, y)$构成一个封闭的立体图形，即D为底、以$z = f(x, y)$为顶的**曲顶柱体**。





曲顶柱体的体积

(1) 将D任意分割成n份$\Delta D_1, \Delta D_2, \cdots, \Delta D_n$，其对应的面积分别为$\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \cdots, \Delta\sigma_n$。对$1 \le i \le n$，过$\Delta D_i$的边界作垂直于$xOy$面的柱体去做一个小的曲顶柱体；

曲顶柱体的体积

(1) 将D任意分割成n份$\Delta D_1, \Delta D_2, \cdots, \Delta D_n$，其对应的面积分别为$\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \cdots, \Delta\sigma_n$。对$1 \leq i \leq n$，过$\Delta D_i$的边界作垂直于$xOy$面的柱体去做一个小的曲顶柱体；

(2) 在ΔD_i上任取一点(x_i, y_i)，做乘积$f(x_i, y_i)\Delta\sigma_i$；

曲顶柱体的体积

(1) 将D任意分割成n份$\Delta D_1, \Delta D_2, \cdots, \Delta D_n$，其对应的面积分别为$\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \cdots, \Delta\sigma_n$。对$1 \le i \le n$，过$\Delta D_i$的边界作垂直于$xOy$面的柱体去做一个小的曲顶柱体；

(2) 在ΔD_i上任取一点(x_i, y_i)，做乘积$f(x_i, y_i)\Delta\sigma_i$；

(3) 第i块小的曲顶柱体体积近似值为$V_i \approx f(x_i, y_i)\Delta\sigma_i$，而整个立体体积可近似为

$$V \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta\sigma_i.$$

曲顶柱体的体积

(1) 将D任意分割成n份$\Delta D_1, \Delta D_2, \cdots, \Delta D_n$，其对应的面积分别为$\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \cdots, \Delta\sigma_n$。对$1 \leq i \leq n$，过$\Delta D_i$的边界作垂直于$xOy$面的柱体去做一个小的曲顶柱体；

(2) 在ΔD_i上任取一点(x_i, y_i)，做乘积$f(x_i, y_i)\Delta\sigma_i$；

(3) 第i块小的曲顶柱体体积近似值为$V_i \approx f(x_i, y_i)\Delta\sigma_i$，而整个立体体积可近似为

$$V \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta\sigma_i.$$

(4) 设λ为$\Delta D_1, \Delta D_2, \cdots, \Delta D_n$中区域直径最大值。令$\lambda \to 0$，所得的极限值即为所求的曲顶柱体的体积：

$$V = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta\sigma_i.$$

定义

设$f(x,y)$是平面闭区域D上的有界函数。将D任意分割成n份ΔD_i，其对应的面积为$\Delta\sigma_i$，对$1\leq i\leq n$。在ΔD_i上任取一点(x_i,y_i)，作

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i)\Delta\sigma_i.$$

取$\lambda=\max\limits_{1\leq i\leq n}\operatorname{diam}\{\Delta D_i\}$，如果极限$\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i,y_i)\Delta\sigma_i$存在，那么称该极限值为$f(x,y)$在$D$上的**二重积分**，记为

$$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i)\Delta\sigma_i.$$

二重积分的概念

如果二重积分$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma$存在，也称函数$f(x,y)$在区域$D$上可积。其中

- D**为积分区域**；
- $f(x,y)$被称为**积分函数**；
- $d\sigma$**为面积微元**；
- $f(x,y)d\sigma$**称为被积表达式**；
- $\sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i,y_i)\Delta\sigma_i$称为**Riemann积分和**。

可积函数类

在区域D上可积的函数$f(x,y)$一定是D上的有界函数。

可积函数类

在区域D上可积的函数$f(x,y)$一定是D上的有界函数。什么样的函数一定是可积的?

在区域D上可积的函数$f(x,y)$一定是D上的有界函数。什么样的函数一定是可积的?

定理

区域D上的连续函数一定是可积的。

可积函数类

在区域D上可积的函数$f(x,y)$一定是D上的有界函数。什么样的函数一定是可积的？

定理

区域D上的连续函数一定是可积的。

除此之外，曲顶柱体的体积

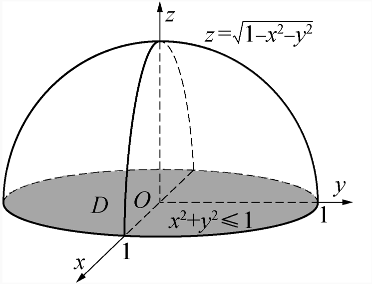
$$V=\iint_D f(x,y)d\sigma\ (f\geq 0)\ \text{或}\ V=-\iint_D f(x,y)d\sigma\ (f<0).$$

例 1

用二重积分表示上半球体$x^2+y^2+z^2\leq 1,\ z\geq 0$ 并写出积分区域。

例 1

用二重积分表示上半球体$x^2 + y^2 + z^2 \leq 1,\ z \geq 0$ 并写出积分区域。



性质 (线性性质)

若f, g在D上可积，则

$$\iint\limits_D [\alpha f(x,y) \pm \beta g(x,y)] d\sigma = \alpha \iint\limits_D f(x,y) d\sigma \pm \beta \iint\limits_D g(x,y) d\sigma, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

二重积分的性质

性质 (线性性质)

若f,g在D上可积，则

$$\iint\limits_D [\alpha f(x,y) \pm \beta g(x,y)]d\sigma = \alpha \iint\limits_D f(x,y)d\sigma \pm \beta \iint\limits_D g(x,y)d\sigma, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

性质 (区域可加性)

若$D = D_1 \cup D_2 \cup \cdots \cup D_n$且$D_i, D_j\ (i \neq j)$两两互不相交，则

$$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma = \sum_{i=1}^{n} \iint\limits_{D_i} f(x,y)d\sigma.$$

性质 (区域面积)

若$f(x,y)\equiv 1$，则区域面积S_D为

$$\iint\limits_D 1 d\sigma = S_D = \iint\limits_D d\sigma.$$

性质 (区域面积)

若$f(x,y)\equiv 1$，则区域面积S_D为

$$\iint\limits_D 1d\sigma = S_D = \iint\limits_D d\sigma.$$

性质 (介值性质)

若$M=\max\limits_D f(x,y)$，$m=\min\limits_D f(x,y)$，则

$$mS_D \le \iint\limits_D f(x,y)d\sigma \le MS_D.$$

性质 (保号性)

若区域D上满足$f(x,y) \leq g(x,y)$，则

$$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma \leq \iint\limits_D g(x,y)d\sigma.$$

特别地，

$$\left|\iint\limits_D f(x,y)d\sigma\right| \leq \iint\limits_D |f(x,y)|d\sigma.$$

性质 (保号性)

若区域D上满足$f(x,y) \leq g(x,y)$，则

$$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma \leq \iint\limits_D g(x,y)d\sigma.$$

特别地，

$$\left|\iint\limits_D f(x,y)d\sigma\right| \leq \iint\limits_D |f(x,y)|d\sigma.$$

性质 (二重积分中值定理)

若$f(x,y)$在有界闭区域D上连续，则存在一个(ξ,η)，使得

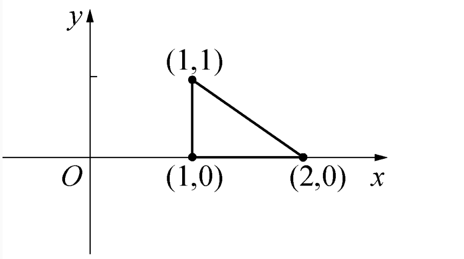
$$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma = f(\xi,\eta)\cdot S_D.$$

例 2

比较积分 $\iint\limits_D \ln(x+y)d\sigma$ 与 $\iint\limits_D [\ln(x+y)]^2 d\sigma$ 的大小，其中区域 D 是顶点各为 $(1,0),(1,1),(2,0)$ 的三角形闭区域。

例 2

比较积分$\iint\limits_D \ln(x+y)d\sigma$与$\iint\limits_D [\ln(x+y)]^2 d\sigma$的大小，其中区域$D$是顶点各为$(1,0),(1,1),(2,0)$的三角形闭区域。



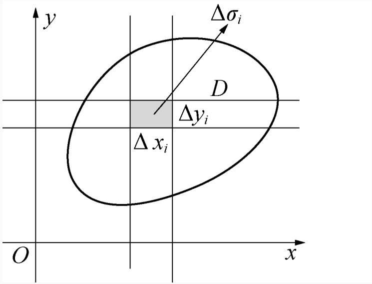
例 3

估计$I=\iint\limits_{D} e^{x^2+y^2}d\sigma$的值，其中$D$是椭圆闭区域：

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leq 1 \quad (0<b<a).$$

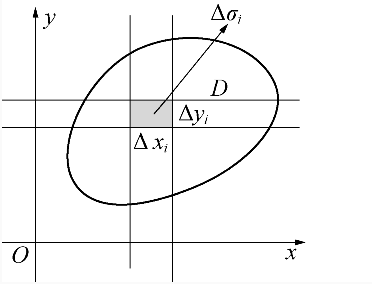
在直角坐标系中，常用平行于x轴和y轴的两组直线来分割积分区域D，除包含边界点的一些小闭区域外，其余的小闭区域都是矩形闭区域。

在直角坐标系中，常用平行于x轴和y轴的两组直线来分割积分区域D，除包含边界点的一些小闭区域外，其余的小闭区域都是矩形闭区域。确定边长$\Delta x_i, \Delta y_i$ 则矩形闭区域面积可以表示为$\Delta\sigma_i = \Delta x_i \Delta y_i$，故在直角坐标系中，重积分符号下对应面积微元为$d\sigma = dxdy$。



直角坐标系下二重积分的计算

在直角坐标系中，常用平行于x轴和y轴的两组直线来分割积分区域D，除包含边界点的一些小闭区域外，其余的小闭区域都是矩形闭区域。确定边长$\Delta x_i, \Delta y_i$ 则矩形闭区域面积可以表示为$\Delta\sigma_i = \Delta x_i \Delta y_i$，故在直角坐标系中，重积分符号下对应面积微元为$d\sigma = dxdy$。



直接通过二重积分的定义和性质来计算二重积分是困难的，这里我们将二重积分化为两次定积分来计算，称这个过程化为**重积分为累次积分**。

矩形区域上的二重积分

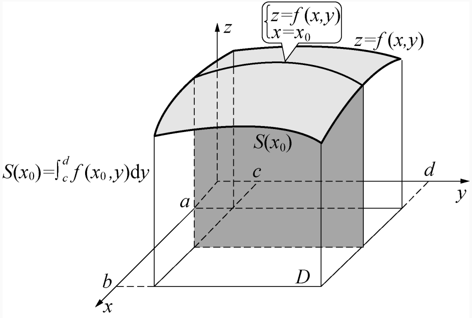
设函数$f(x,y)$在矩形区域 $D=\{(x,y)\mid a\le x\le b,\quad c\le y\le d\}$ 上连续，且$f(x,y)\ge 0$。

矩形区域上的二重积分

设函数$f(x,y)$在矩形区域 $D=\{(x,y)\mid a\leq x\leq b,\quad c\leq y\leq d\}$ 上连续，且$f(x,y)\geq 0$。在区间$[a,b]$上任意选定一点x_0，作垂直于x轴的平面$x=x_0$，此平面截曲顶柱体所得到的截面是一个以$[c,d]$为底、以则曲线$z=f(x_0,y)$为曲边的曲边梯形。

矩形区域上的二重积分

设函数$f(x,y)$在矩形区域 $D=\{(x,y)\mid a\le x\le b,\quad c\le y\le d\}$ 上连续，且$f(x,y)\ge 0$。在区间$[a,b]$上任意选定一点x_0，作垂直于x轴的平面$x=x_0$，此平面截曲顶柱体所得到的截面是一个以$[c,d]$为底、以则曲线$z=f(x_0,y)$为曲边的曲边梯形。该曲边梯形截面面积为 $\displaystyle\int_c^d f(x_0,y)dy$



因此，对于区间$[a,b]$上的任何一点x，对应的截面面积为

$$S(x)=\int_c^d f(x,y)dy$$

因此，对于区间$[a,b]$上的任何一点x，对应的截面面积为

$$S(x)=\int_c^d f(x,y)dy$$

故曲顶柱体的体积为

$$V=\int_a^b S(x)dx=\int_a^b\left[\int_c^d f(x,y)dy\right]dx=\int_a^b dx\int_c^d f(x,y)dy.$$

矩形区域上的二重积分

因此，对于区间$[a,b]$上的任何一点x，对应的截面面积为

$$S(x)=\int_c^d f(x,y)dy$$

故曲顶柱体的体积为

$$V=\int_a^b S(x)dx=\int_a^b\left[\int_c^d f(x,y)dy\right]dx=\int_a^b dx\int_c^d f(x,y)dy.$$

即

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\int_a^b dx\int_c^d f(x,y)dy.$$

我们称该过程为**先对y后对x的累次积分**。

例 4

计算定积分$\int_0^1 (x+y)dy$。

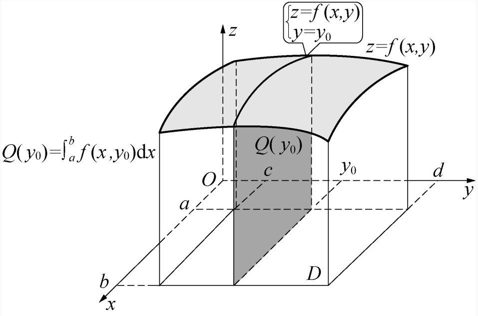
例 5

计算$I=\iint\limits_D e^{x+y}d\sigma$的值，其中区域$D$是由$x=0, x=1, y=0, y=1$所围成的矩形。

我们还可以通过另一个截面来求曲顶柱体的体积：

我们还可以通过另一个截面来求曲顶柱体的体积：现过y轴上任一点y_0做垂直于y轴的截面，得到一个以$[a,b]$为底、以曲面$z=f(x,y)$和平面$y=y_0$的交线$y=f(x,y_0)$为顶的曲边梯形，其面积为

$$Q(y_0)=\int_a^b f(x,y_0)dy.$$



由y_0的任意性可知，过y轴上任一点y的截面面积为

$$Q(y_0) = \int_a^b f(x, y_0)dy,$$

这是y的函数．利用已知截面面积的立体体积公式可知，曲顶柱体的体积是

$$V = \int_c^d Q(y)dy = \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)dx\right] dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x,y)dx,$$

即

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int_c^d dy \int_a^b f(x,y)dx.$$

我们称该过程为**先对x后对y的累次积分**。

矩形区域上的二重积分

定理 ((Fubini)矩形区域上的二重积分)

设二元函数f在矩形区域$[a,b]\times[c,d]$上可积，则矩形区域上的二重积分的计算公式：

$$\int_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)dxdy = \int_a^b dx\int_c^d f(x,y)dy = \int_c^d dy\int_a^b f(x,y)dx.$$

例 6

计算$I = \iint\limits_D xy^2 d\sigma$的值，其中区域$D = [0,1]\times[1,2]$。

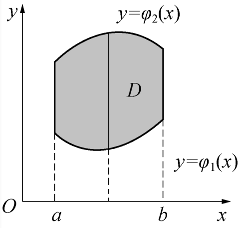
定义

称趋于D为X型区域，如果

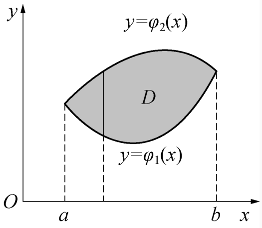
$$D = \{(x, y) \mid \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x),\ a \le x \le b\},$$

其中$\varphi_1(x), \varphi_2(x)$在区间$[a, b]$上连续。

注意到穿过穿过X型区域内部且平行于y轴的直线与该X型区域的边界最多相交于两点：



(a)

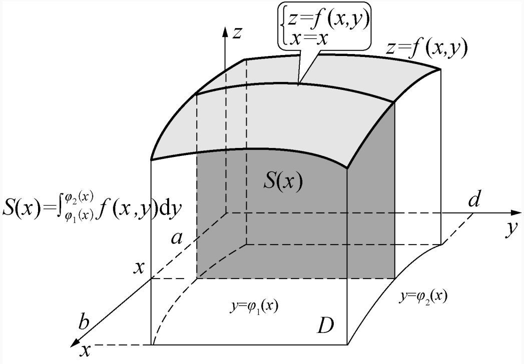


(b)

一般地，X型区域

$$D=\{(x,y)\mid \varphi_1(x)\le y\le \varphi_2(x),\, a\le x\le b\},$$

垂直于x轴，可以过x轴上的任一点x做曲顶柱体的截面，则截面面积是以$[\varphi_1(x),\varphi_2(x)]$，以$z=f(x,y)$为顶的曲边梯形：



X型区域上的二重积分

该截面面积为

$$S(x) = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)dy.$$

对应的立体体积为

$$V = \int_a^b S(x)dx = \int_a^b \left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)dy\right] dx.$$

从而

$$\iint\limits_D f(x, y)dxdy = \int_a^b \left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)dy\right] dx = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)dy.$$

例 7

将下列区域写成X型区域的表达式：

(1) $D=\left\{(x,y)\mid 0\le y\le \dfrac{b}{a}x,\ 0\le x\le a\right\}$；

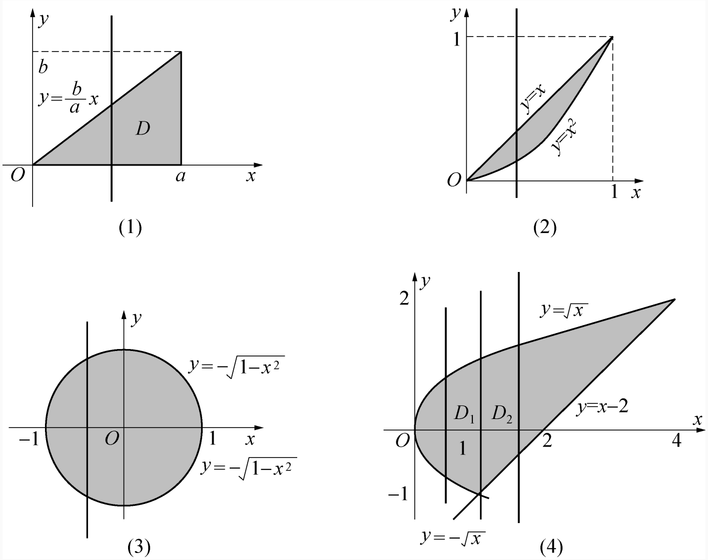
(2) $D=\{(x,y)\mid x^2\le y\le x,\ 0\le x\le 1\}$；

(3) $D=\{(x,y)\mid -\sqrt{1-x^2}\le y\le \sqrt{1-y^2},\ -1\le x\le 1\}$；

(4) 区域可以写成两个X型区域的和D_1+D_2：其中

$$D_1=\{(x,y)\mid -\sqrt{x}\le y\le \sqrt{x},\ 0\le x\le 1\},$$
$$D_2=\{(x,y)\mid x-2\le y\le \sqrt{x},\ 1\le x\le 4\}.$$

引例



y
b
$y=\frac{b}{a}x$
D
O
a
x
(1)
y
1
$y=x$
$y=x^2$
O
1
x
(2)
y
$y=-\sqrt{1-x^2}$
−1
O
1
x
$y=-\sqrt{1-x^2}$
(3)
y
2
$y=\sqrt{x}$
D_1
D_2
$y=x-2$
x
O
1
2
4
−1
$y=-\sqrt{x}$
(4)

例 8

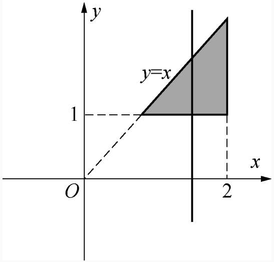
计算二次积分 $\int_{-1}^{0} dx \int_{\sqrt{x}}^{x} xy dy$。

例 8

计算二次积分$\int_{-1}^{0} dx \int_{\sqrt{x}}^{x} xydy$。

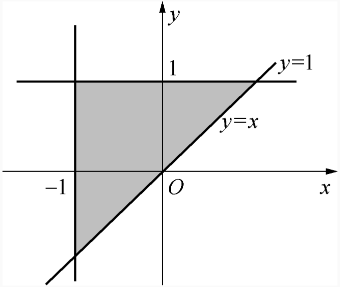
例 9

计算积分$\iint\limits_{D} xy^2 d\sigma$，其中$D$是由直线$y=1, x=2$及$y=x$所围成的闭区域。



例 10

计算积分$\displaystyle\iint_D y\sqrt{1+x^2-y^2}d\sigma$，其中$D$是由直线$y=1, x=-1$及$y=x$所围成的闭区域。



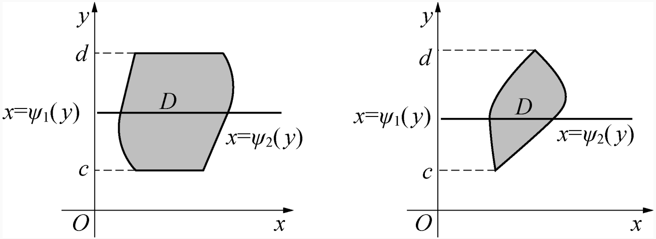
定义

称趋于D为Y**型区域**，如果

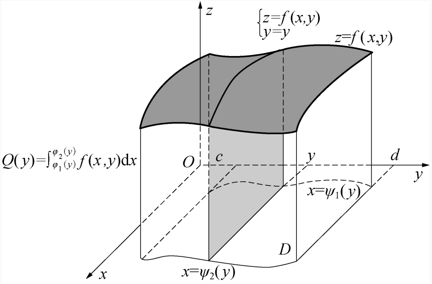
$$D = \{(x,y) \mid \psi_1(y) \le x \le \psi_2(y),\, c \le y \le d\},$$

其中$\psi_1(x), \psi_2(x)$在区间$[c,d]$上连续。

注意到穿过穿过Y型区域内部且平行于x轴的直线与该Y型区域的边界最多相交于两点：

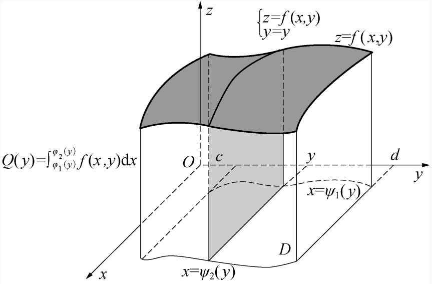


类似地，对Y型区域 $D = \{(x, y) \mid \psi_1(y) \le x \le \psi_2(y),\ c \le y \le d\}$，



Y型区域上的二重积分

类似地，对Y型区域 $D=\{(x,y)\mid \psi_1(y)\le x\le \psi_2(y),\ c\le y\le d\}$，

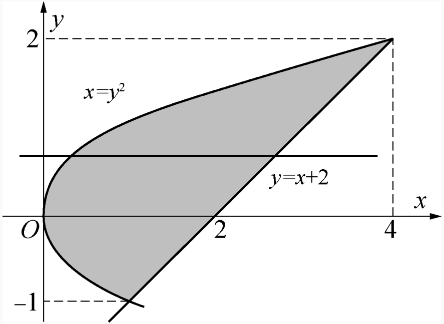


以D为底、以曲面$z=f(x,y)$（$f(x,y)$连续且非负）为顶的曲顶柱体的体积是一个先对y后对x的二次积分：

$$\iint_D f(x,y)dxdy=\int_c^d\left[\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx\right]dy=\int_c^d dy\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx.$$

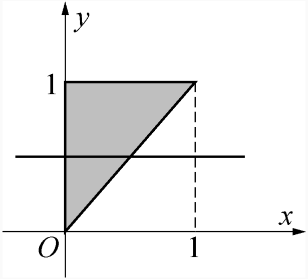
例 11

计算积分$\iint\limits_D xy d\sigma$，其中$D$是由抛物线$y^2=x$及直线$y=x+2$所围成的闭区域。



例 12

计算积分 $\iint\limits_D e^{y^2}d\sigma$，其中$D$是由$y=x, y=1$及$y$轴所围成的闭区域。



定理 (Fubini定理)

如果一个积分区域D既可以写成X型表达式:

$$D = \{(x, y) \mid \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x),\ a \le x \le b\},$$

又可以写成Y型表达式:

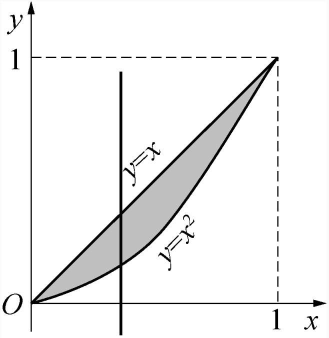
$$D = \{(x, y) \mid \psi_1(y) \le x \le \psi_2(y),\ c \le y \le d\},$$

那么D上二重积分可以进行如下积分换序:

$$\iint\limits_D f(x, y) d\sigma = \int_a^b \left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy\right] dx = \int_c^d \left[\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx\right] dy.$$

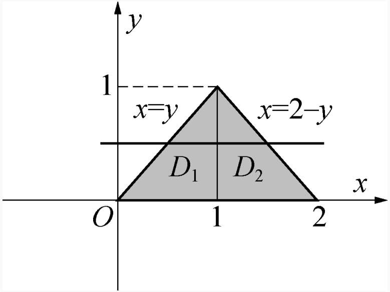
例 13

交换二次积分$\int_0^1 dx\int_{x^2}^{x} f(x,y)dy$的积分次序。



例 14

交换二次积分$\int_0^1 dx \int_0^x f(x,y)dy + \int_1^2 dx \int_0^{2-x} f(x,y)dy$的积分次序。



当积分区域D是圆域、环形域、扇形域，（区域D的边界曲线用极坐标表示时比较简洁）；或被积函数$f(x,y)$用极坐标表示时比较简洁：

$$f\left(\sqrt{x^2+y^2},\arctan\frac{y}{x}\right),$$

可考虑利用极坐标系计算二重积分。

当积分区域D是圆域、环形域、扇形域，（区域D的边界曲线用极坐标表示时比较简洁）；或被积函数$f(x,y)$用极坐标表示时比较简洁：

$$f\left(\sqrt{x^2+y^2}, \arctan\frac{y}{x}\right),$$

可考虑利用极坐标系计算二重积分。

极坐标转换公式

直角坐标系与极坐标系的转换公式为

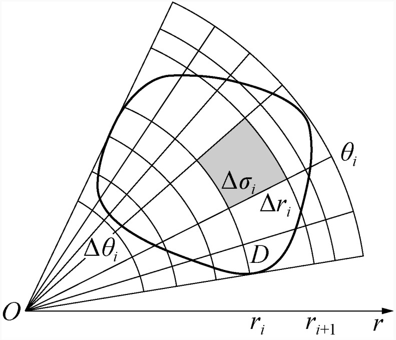
$$\begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = r\sin\theta. \end{cases} \quad \text{以及} \quad \begin{cases} r^2 = x^2+y^2, \\ \theta = \arctan\dfrac{y}{x}. \end{cases}$$

极坐标系下二重积分的计算

我们来讨论： 直角坐标系下面积微元 $\Longrightarrow$ 极坐标系下面积微元

极坐标系下二重积分的计算

我们来讨论： 直角坐标系下面积微元 $\Longrightarrow$ 极坐标系下面积微元



直角坐标系下面积微元可以写成

$$d\sigma = dxdy.$$

设过极点O的射线与平面闭区域D的边界曲线最多相交于两点。

- 极径$r = c\,(c \in \mathbb{R})$表示圆心在极点，半径为$c$的一个圆；
- 极角$\theta = c\,(c \in \mathbb{R})$表示一个从极点出发的射线。

极坐标系下二重积分的计算

设过极点O的射线与平面闭区域D的边界曲线最多相交于两点。

- 极径$r = c\,(c \in \mathbb{R})$表示圆心在极点，半径为$c$的一个圆；
- 极角$\theta = c\,(c \in \mathbb{R})$表示一个从极点出发的射线。

现以极点为中心作一组同心圆$r = r_i$，从极点出发作一组射线$\theta = \theta_i$，将区域D分成n个小闭区域，这些区域的面积记为$\Delta\sigma_i$，$i = 1, 2, \cdots, n$。

极坐标系下二重积分的计算

设过极点O的射线与平面闭区域D的边界曲线最多相交于两点。

- 极径$r = c\,(c \in \mathbb{R})$表示圆心在极点，半径为$c$的一个圆；
- 极角$\theta = c\,(c \in \mathbb{R})$表示一个从极点出发的射线。

现以极点为中心作一组同心圆$r = r_i$，从极点出发作一组射线$\theta = \theta_i$，将区域D分成n个小闭区域，这些区域的面积记为$\Delta\sigma_i$，$i = 1, 2, \cdots, n$。除了包含边界点的一些小区域外，$\Delta\sigma_i$的面积都可以看作是两个圆扇形的面积之差：

$$
\begin{aligned}
\Delta\sigma_i =& \frac{1}{2}(r_i + \Delta r_i)^2 \Delta\theta_i - \frac{1}{2} r_i^2 \Delta\theta_i \\
=& r_i \Delta r_i \Delta\theta_i + \frac{1}{2}(\Delta r_i)^2 \Delta\theta_i \\
\approx& r_i \Delta r_i \Delta\theta_i .
\end{aligned}
$$

设过极点O的射线与平面闭区域D的边界曲线最多相交于两点。

- 极径$r = c\,(c \in \mathbb{R})$表示圆心在极点，半径为$c$的一个圆；
- 极角$\theta = c\,(c \in \mathbb{R})$表示一个从极点出发的射线。

现以极点为中心作一组同心圆$r = r_i$，从极点出发作一组射线$\theta = \theta_i$，将区域D分成n个小闭区域，这些区域的面积记为$\Delta\sigma_i$，$i = 1, 2, \cdots, n$。除了包含边界点的一些小区域外，$\Delta\sigma_i$的面积都可以看作是两个圆扇形的面积之差：

$$\begin{aligned}\Delta\sigma_i =& \frac{1}{2}(r_i + \Delta r_i)^2\Delta\theta_i - \frac{1}{2}r_i^2\Delta\theta_i\\ =& r_i\Delta r_i\Delta\theta_i + \frac{1}{2}(\Delta r_i)^2\Delta\theta_i\\ \approx& r_i\Delta r_i\Delta\theta_i.\end{aligned}$$

于是就得到了极坐标系下的面积微元：

$$d\sigma = r dr d\theta.$$

若已知直角坐标系下的二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)d\sigma$，则用以下方法可以把其变换为极坐标系下的二重积分：

(1) 将积分区域D的边界曲线用极坐标方程表示；

(2) 利用变换$\begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = r\sin\theta. \end{cases}$ 将被积函数$f(x,y)$转化为

$$f(x,y) = f(r\cos\theta, r\sin\theta).$$

(3) 直角坐标系下面积微元转化为极坐标系下面积微元。

若已知直角坐标系下的二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)d\sigma$，则用以下方法可以把其变换为极坐标系下的二重积分：

(1) 将积分区域D的边界曲线用极坐标方程表示；

(2) 利用变换 $\begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = r\sin\theta. \end{cases}$ 将被积函数$f(x,y)$转化为

$$f(x,y) = f(r\cos\theta, r\sin\theta).$$

(3) 直角坐标系下面积微元转化为极坐标系下面积微元。

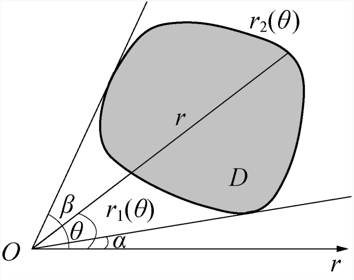
极坐标下二重积分表达式

二重积分的极坐标系下的表达式为

$$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma = \iint\limits_D f(r\cos\theta, r\sin\theta)rdrd\theta.$$

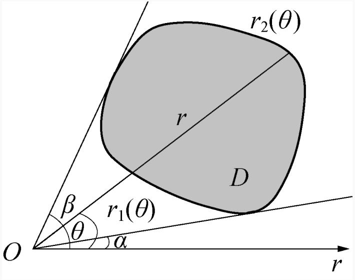
- **积分区域**D**介于两条射线**$\theta=\alpha,\theta=\beta$**之间，则区域**$D$**的积分限为**

$$\alpha\le\theta\le\beta,\quad r_1(\theta)\le r\le r_2(\theta).$$



- 积分区域D介于两条射线$\theta=\alpha,\theta=\beta$之间，则区域$D$的积分限为

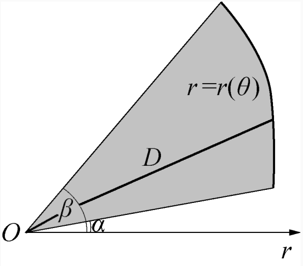
$$\alpha\le\theta\le\beta,\quad r_1(\theta)\le r\le r_2(\theta).$$



$$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma=\iint\limits_D f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdrd\theta=\int_\alpha^\beta d\theta\int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)}f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr.$$

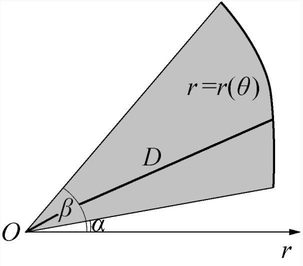
- **积分区域D是介于两条射线$\theta=\alpha,\theta=\beta$之间的曲边扇形，则可看作是第一**种情形中$r_1(\theta)=0, r_2(\theta)=r(\theta)$. 于是区域$D$的积分限为

$$\alpha \le \theta \le \beta, \quad 0 \le r \le r(\theta).$$



- 积分区域D是介于两条射线$\theta=\alpha,\theta=\beta$之间的曲边扇形，则可看作是第一种情形中$r_1(\theta)=0, r_2(\theta)=r(\theta)$. 于是区域$D$的积分限为

$$\alpha\le\theta\le\beta,\quad 0\le r\le r(\theta).$$

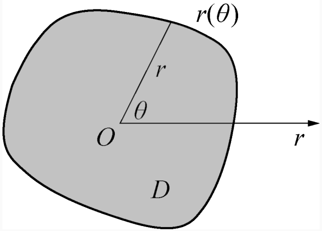


$$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma=\iint\limits_D f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdrd\theta=\int_\alpha^\beta d\theta\int_0^{r(\theta)}f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr.$$

- **如果极点O位于积分区域D的内部，**则可看作是第二种情形中$\theta = 0, \theta = 2\pi$.

于是区域D的积分限为

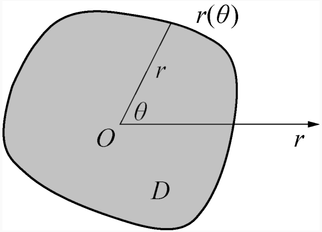
$$0 \le \theta \le 2\pi, \quad 0 \le r \le r(\theta).$$



- **如果极点O位于积分区域D的内部，**则可看作是第二种情形中$\theta=0,\theta=2\pi$.

于是区域D的积分限为

$$0\le\theta\le 2\pi,\quad 0\le r\le r(\theta).$$



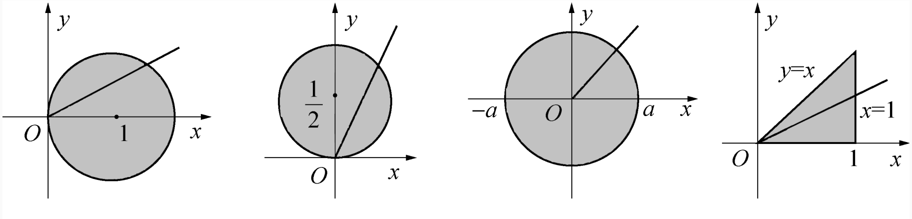
$$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma=\iint\limits_D f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdrd\theta=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{r(\theta)}f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr.$$

例 15

将下列区域用极坐标表示:

(1) $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 2x\}$； (2) $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le y\}$；

(3) $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le a^2\,(a>0)\}$； (4) D为$y=x, y=0$与$x=1$所围区域。



(1) (2) (3) (4)

例 16

计算二重积分$\iint\limits_D e^{-x^2-y^2}d\sigma$，其中$D$是由中心在原点，半径为$a$的圆周所围成的闭区域。

例 16

计算二重积分$\iint\limits_{D} e^{-x^2-y^2}d\sigma$，其中$D$是由中心在原点，半径为$a$的圆周所围成的闭区域。

注

- 直角坐标系下，二重积分$I=\int_{-a}^{a}dx\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}}e^{-x^2-y^2}dy$。而积分$\int e^{-y^2}dy$不能用初等函数来表示，因此直角坐标系下二重积分转化为累次积分的方式失效；
- 我们可以使用本案例进一步计算$I=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}dx.$

例 17

写出在极坐标系下二重积分$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma$，其中

$$D=\{(x,y)\mid 1-x\le y\le \sqrt{1-x^2},\ \ 0\le x\le 1\}.$$

例 18

计算二重积分$\iint\limits_D \frac{y^2}{x^2}d\sigma$，其中$D$是由曲线$x^2+y^2=2x$所围成的平面区域。

二重积分应用举例（空间立体体积）

若$z=f(x,y)$在有界闭区域D上连续，且$f(x,y)\geq 0$，则二重积分

$$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma$$

在几何上是以$z=f(x,y)$为顶的曲顶柱体的体积。

二重积分应用举例（空间立体体积）

若$z=f(x,y)$在有界闭区域D上连续，且$f(x,y)\geq 0$，则二重积分

$$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma$$

在几何上是以$z=f(x,y)$为顶的曲顶柱体的体积。

例 19

求两个底面圆半径相等的直角圆柱所围立体体积。

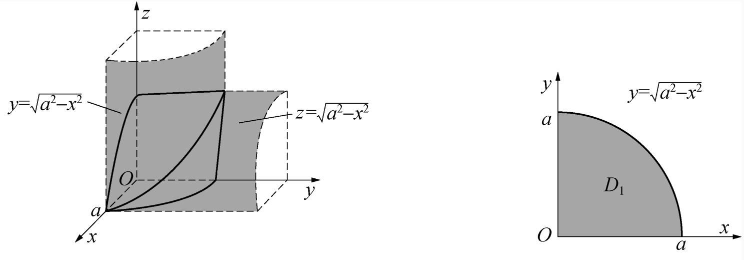
若$z=f(x,y)$在有界闭区域D上连续，且$f(x,y)\geq 0$，则二重积分

$$\iint\limits_{D} f(x,y)d\sigma$$

在几何上是以$z=f(x,y)$为顶的曲顶柱体的体积。

例 19

求两个底面圆半径相等的直角圆柱所围立体体积。



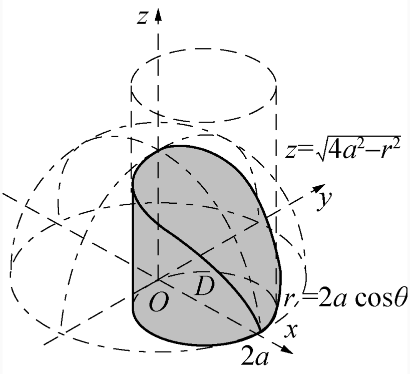
(a) (b)

例 20

求球体$x^2+y^2+z^2\le 4a^2$被圆柱面$x^2+y^2=2ax\,(a>0)$所截得的（含在圆柱面内的部分）立体的体积。

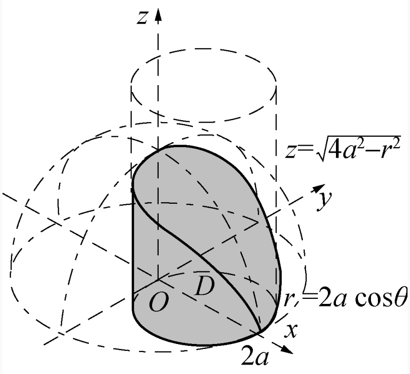
例 20

求球体$x^2+y^2+z^2 \le 4a^2$被圆柱面$x^2+y^2=2ax\ (a>0)$所截得的（含在圆柱面内的部分）立体的体积。



例 20

求球体$x^2 + y^2 + z^2 \leq 4a^2$被圆柱面$x^2 + y^2 = 2ax\ (a > 0)$所截得的（含在圆柱面内的部分）立体的体积。



二重积分应用举例（平面区域面积）

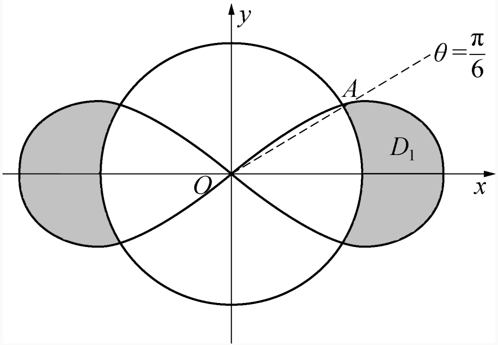
闭区域D（区域包含极点）的面积σ_D的面积可以表示为

$$\sigma_D = \iint\limits_D \mathbf{1} d\sigma = \underbrace{\iint\limits_D dxdy}_{\text{直角坐标系}}$$

$$= \underbrace{\iint\limits_D r dr d\theta}_{\text{极坐标系}} = \int_\alpha^\beta d\theta \int_0^{r(\theta)} r dr = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\theta) d\theta.$$

例 22

求曲线$(x^2+y^2)^2=2a^2(x^2-y^2)$和$x^2+y^2\geq a^2$所围成区域$D$的面积。



定义 (简单曲面)

如果一个曲面上的点与其在xOy面上的投影区域D上的点一一对应，那么称这个曲面为一个简单曲面。

定义 (简单曲面)

如果一个曲面上的点与其在xOy面上的投影区域D上的点一一对应，那么称这个曲面为一个简单曲面。

设曲面

$$\Sigma : z = f(x, y),\ (x, y) \in D_{xy},$$ 其中 D_{xy}为该曲面在xOy上的投影区域,

且$f(x, y)$在D_{xy}上具有一阶连续偏导函数。

定义 (简单曲面)

如果一个曲面上的点与其在xOy面上的投影区域D上的点一一对应，那么称这个曲面为一个简单曲面。

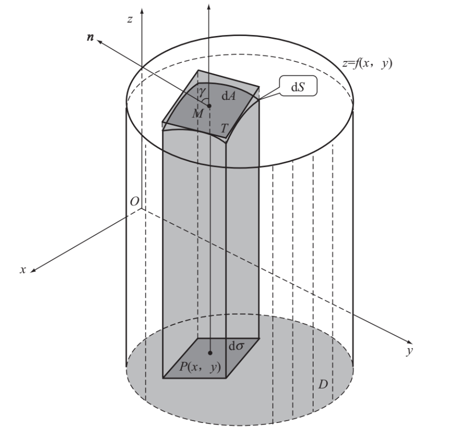
设曲面

$$\Sigma : z = f(x, y), \ (x, y) \in D_{xy}, \quad \text{其中 } D_{xy} \text{为该曲面在} xOy \text{上的投影区域},$$

且$f(x, y)$在D_{xy}上具有一阶连续偏导函数。

- 如果任何平行于z轴的直线和曲面Σ正好相交于一点，那么这个曲面就是简单曲面；
- 如果曲面不是这种类型，那么可将其分成若干部分，使其每一部分符合上述性质。

将投影区域D任意划分成若干个直径很小的区域$\Delta\sigma_i$，$i=1,2,\cdots,n$。我们取某个小区域并不妨记其面积也为$d\sigma$，在$d\sigma$上任意取一点$P(x,y)$，对应有曲面上一点$M(x,y,f(x,y))\in\Sigma$，即点M在xOy平面上投影为P。



二重积分应用举例（曲面的面积）

点M处曲面Σ的切平面为T，过$d\sigma$的边界且母线平行于z轴的柱面截曲面Σ及其切平面，截得的小曲面记为dS，切平面上的一小片平面记为dA。

点M处曲面Σ的切平面为T，过$d\sigma$的边界且母线平行于z轴的柱面截曲面Σ及其切平面，截得的小曲面记为dS，切平面上的一小片平面记为dA。由于$d\sigma$的直径很小，那么$dS \approx dA$。由于 $dA = \dfrac{d\sigma}{\cos\gamma}$，其中$\gamma$为点$M$处曲面$\Sigma$上的法向量$\vec{n}$与$z$轴正方向所成的夹角，

点M处曲面Σ的切平面为T，过$d\sigma$的边界且母线平行于z轴的柱面截曲面Σ及其切平面，截得的小曲面记为dS，切平面上的一小片平面记为dA。由于$d\sigma$的直径很小，那么$dS \approx dA$。由于 $dA = \dfrac{d\sigma}{\cos\gamma}$，其中$\gamma$为点$M$处曲面$\Sigma$上的法向量$\vec{n}$与$z$轴正方向所成的夹角，那么

$$\vec{n} = (-f_x'(x,y), -f_y'(x,y), 1) \Rightarrow \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + (f_x'(x,y))^2 + (f_y'(x,y))^2}},$$

所以

$$dS \approx dA = \frac{d\sigma}{\cos\gamma} = \sqrt{1 + (f_x'(x,y))^2 + (f_y'(x,y))^2}d\sigma.$$

因此

$$S_\Sigma = \iint\limits_{D_{xy}} \sqrt{1 + (f_x'(x,y))^2 + (f_y'(x,y))^2}d\sigma = \iint\limits_{D_{xy}} \sqrt{1 + (z_x')^2 + (z_y')^2}d\sigma.$$

二重积分应用举例（曲面的面积）

- 设曲面$\Sigma: x = g(y,z)$, $(y,z) \in D_{yz}$, 其中D_{yz}为该曲面在yOz上的投影区域，且$g(y,z)$在D_{yz}上具有一阶连续偏导函数，则

$$S_\Sigma = \iint\limits_{D_{yz}} \sqrt{1 + (x'_y)^2 + (x'_z)^2} d\sigma.$$

二重积分应用举例（曲面的面积）

- 设曲面$\Sigma : x = g(y,z)$, $(y,z) \in D_{yz}$, 其中D_{yz}为该曲面在yOz上的投影区域, 且$g(y,z)$在D_{yz}上具有一阶连续偏导函数，则

$$S_\Sigma = \iint\limits_{D_{yz}} \sqrt{1 + (x'_y)^2 + (x'_z)^2} d\sigma.$$

- 设曲面 $\Sigma : y = h(x,z)$, $(x,z) \in D_{xz}$, 其中D_{xz}为该曲面在xOz上的投影区域, 且$h(x,z)$在D_{xz}上具有一阶连续偏导函数，则

$$S_\Sigma = \iint\limits_{D_{xz}} \sqrt{1 + (y'_x)^2 + (y'_z)^2} d\sigma.$$

例 23

求半径为a的球面的面积。

例 24 (牟合方盖)

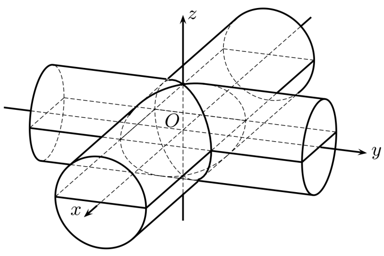
求以曲面$x^2+z^2=a^2$和$y^2+z^2=a^2$为界的物体的表面积.

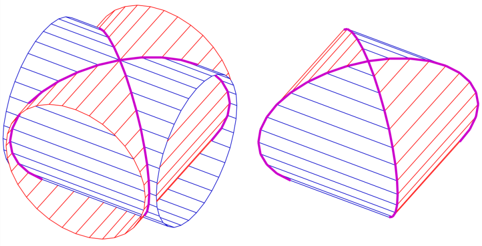
例 23

求半径为a的球面的面积。

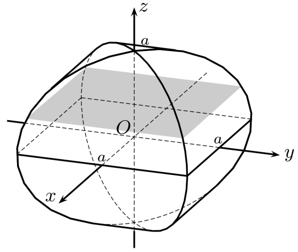
例 24 (牟合方盖)

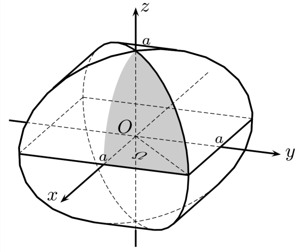
求以曲面$x^2+z^2=a^2$和$y^2+z^2=a^2$为界的物体的表面积.

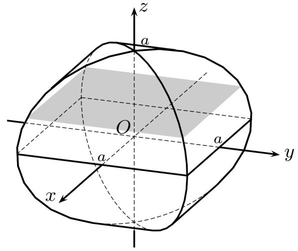


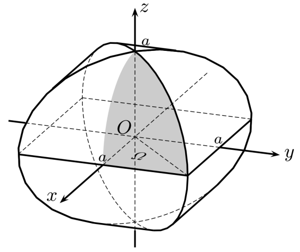


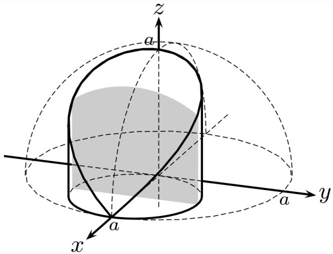
二重积分应用举例（曲面的面积）











例 25 (维维亚尼体)

求曲面$x^2+y^2+z^2=a^2$在圆柱$x^2+y^2=\pm ax$之外的部分的表面积.

定理 (二重积分换元公式)

设函数$f(x,y)$在xOy平面内的闭区域D上连续, 变换$\begin{cases} x = x(u,v), \\ y = y(u,v). \end{cases}$ 将uOv上的平面闭区域D'变换成xOy上的平面闭区域D, 且满足

1. $x = x(u,v), y = y(u,v)$在D'上一阶可微;
2. 在D'上Jacobian行列式$J = \dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \neq 0$;
3. 变换$\begin{cases} x = x(u,v), \\ y = y(u,v). \end{cases}: D' \to D$是一对一的.

那么

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D'} f(x(u,v),y(u,v))|J|dudv.$$

例 26

请使用变换 $u=\dfrac{2x-y}{2}, v=\dfrac{y}{2}$ 计算积分 $\displaystyle\int_0^4\int_{y/2}^{(y/2)+1}\frac{2x-y}{2}dxdy$

例 27

计算二重积分 $\displaystyle\iint_D e^{\frac{y-x}{y+x}}dxdy$, 其中区域$D$由$x=0, y=0, x+y=2$所围成

例 28

求曲面$z=\dfrac{1}{2}(x^2-y^2)$被平面$x-y=\pm1, x+y=\pm1$所截部分的面积.

三重积分

课前导读

和二重积分一样，我们可以从实际具体案例出发引入三重积分的概念。

课前导读

和二重积分一样，我们可以从实际具体案例出发引入三重积分的概念。我们计算空间物体的质量：假设三维空间物体占据底层有界闭区域Ω，

- 如果物体是均质的（其密度ρ为常量），那么其质量为$M = \rho V_\Omega$；
- 如果物体是非均质的（其密度ρ为变量），我们设$\rho = \rho(x, y, z)$，$(x, y, x) \in \Omega$是连续函数。

课前导读

和二重积分一样，我们可以从实际具体案例出发引入三重积分的概念。我们计算空间物体的质量：假设三维空间物体占据底层有界闭区域Ω，

- 如果物体是均质的（其密度ρ为常量），那么其质量为$M=\rho V_{\Omega}$；
- 如果物体是非均质的（其密度ρ为变量），我们设$\rho=\rho(x,y,z)$，$(x,y,x)\in\Omega$是连续函数。任取若干个曲面网格，将区域Ω划分为n个小区域$\Delta\Omega_i$，每个小区域的体积记为ΔV_i，$1\le i\le n$，同时定义

$$\lambda := \max_{1\le i\le n} \operatorname{diam}(\Delta\Omega_i).$$

那么我们在$\Delta\Omega_i$内选取任意一点(x_i,y_i,z_i)，并以该点密度$\rho(x_i,y_i,z_i)$近似表示v_i上每一个点的密度，则$\Delta\Omega_i$的质量为$\Delta m_i\approx\rho(x_i,y_i,z_i)\Delta V_i$。因此该物体的质量为

$$M=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\Delta m_i=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\rho(x_i,y_i,z_i)\Delta V_i.$$

定义

设$f(x,y,z)$在空间有界闭区域Ω上的有界。将Ω任意分割成n份$\Delta\Omega_i$，其对应的体积为ΔV_i，对$1\le i\le n$。在$\Delta\Omega_i$上任取一点(x_i,y_i,z_i)，作

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i,z_i)\Delta V_i.$$

取$\lambda=\max\limits_{1\le i\le n}\operatorname{diam}\{\Delta\Omega_i\}$，如果极限$\lim\limits_{\lambda\to0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i,y_i,z_i)\Delta V_i$存在，那么称该极限值为$f(x,y,z)$在$\Omega$上的三重积分，记为

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dV=\lim_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i,z_i)\Delta V_i.$$

注

- 二重积分定义中一些术语都可以相应地沿用到三重积分上；
- 在直角坐标系中，用平行于坐标面的平面来划分Ω，那么除了包括Ω的边界点的一些不规则的小闭区域外，得到的小闭区域为长方体。我们设长方体的小闭区域的边长分别为$\Delta x_i, \Delta y_i, \Delta z_i$，那么其体积$\Delta V_i = \Delta x_i \Delta y_i \Delta z_i$。因此，我们可记体积元素$dV = dxdydz$，而三重积分记为$\iiint_{\Omega} f(x, y, z)dxdydz$；
- 我们总是假定函数在有界闭区域Ω上连续，此时极限$\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta V_i$必定存在；
- 闭区域Ω的体积为$V = \iiint_{\Omega} dV$；如果Ω上连续函数$\rho(x, y, z)$表示占据空间闭区域Ω的物体在点(x, y, z)的密度，那么物体质量$M = \iiint_{\Omega} \rho(x, y, z)dV$。

利用直角坐标计算三重积分

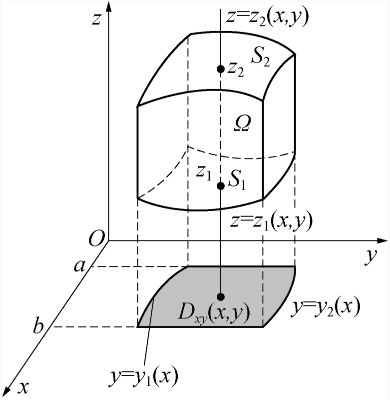
我们先考虑有如下几何特征的闭区域Ω：

- 平行于z轴且穿过Ω内部的直线与Ω的边界曲面S相交不多于两点；
- 若多于两点，则需将Ω分成若干部分，使每一部分都满足相交不多于两点的要求。

利用直角坐标计算三重积分

我们先考虑有如下几何特征的闭区域Ω：

- 平行于z轴且穿过Ω内部的直线与Ω的边界曲面S相交不多于两点；
- 若多于两点，则需将Ω分成若干部分，使每一部分都满足相交不多于两点的要求。



把这种闭区域Ω投影到xOy面上去，得到一个平面闭区域D_{xy}。以D_{xy}的边界为准线作母线平行于z轴的柱面，该柱面与曲面S的交线就从S中分出上下两部分曲面来，它们的方程分别为

$$S_1 : z = z_1(x, y), \quad S_2 : z = z_2(x, y).$$

利用直角坐标计算三重积分

把这种闭区域Ω投影到xOy面上去，得到一个平面闭区域D_{xy}。以D_{xy}的边界为准线作母线平行于z轴的柱面，该柱面与曲面S的交线就从S中分出上下两部分曲面来，它们的方程分别为

$$S_1 : z = z_1(x,y), \quad S_2 : z = z_2(x,y).$$

假定$z_1(x,y), z_2(x,y)$都是D_{xy}上的连续函数，且不妨设$z_1(x,y) \leq z_2(x,y)$，此时对于D_{xy}内的任一点(x,y)，过该点且平行于z轴的直线必然通过曲面S_1穿入Ω的内部，继而又通过曲面S_2而穿出Ω的内部，其中穿入、穿出的点的竖坐标分别是$z_1(x,y), z_2(x,y)$，因此该积分区域可以表示为

$$\Omega = \{(x,y,z) \mid z_1 \leq z(x,y) \leq z_2, \quad (x,y) \in D_{xy}\}.$$

固定x, y，我们将$f(x, y, z)$看作是z的函数，在区间$[z_1(x, y), z_2(x, y)]$上对z做定积分，那么该积分事实上成为D_{xy}上关于x, y的函数。记该函数为$F(x, y)$，即

$$F(x, y) = \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z) dz.$$

固定x, y，我们将$f(x,y,z)$看作是z的函数，在区间$[z_1(x,y), z_2(x,y)]$上对z做定积分，那么该积分事实上成为D_{xy}上关于x, y的函数。记该函数为$F(x,y)$，即

$$F(x,y) = \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz.$$

因此， $F(x,y)$在D_{xy}上的二重积分就是三重积分$\iiint_\Omega f(x,y,z)dV$，即

$$\iiint\limits_\Omega f(x,y,z)dV = \iint\limits_{D_{xy}} F(x,y)dxdy = \iint\limits_{D_{xy}} \left[\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz\right] dxdy.$$

利用直角坐标计算三重积分

固定x, y，我们将$f(x, y, z)$看作是z的函数，在区间$[z_1(x, y), z_2(x, y)]$上对z做定积分，那么该积分事实上成为D_{xy}上关于x, y的函数。记该函数为$F(x, y)$，即

$$F(x, y) = \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z) dz.$$

因此，$F(x, y)$在D_{xy}上的二重积分就是三重积分$\iiint_\Omega f(x, y, z) dV$，即

$$\iiint\limits_\Omega f(x, y, z) dV = \iint\limits_{D_{xy}} F(x, y) dxdy = \iint\limits_{D_{xy}} \left[\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z) dz \right] dxdy.$$

此式有时也记作

$$\iiint\limits_\Omega f(x, y, z) dV = \iint\limits_{D_{xy}} dxdy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z) dz.$$

如果闭区域D_{xy}又可以表示为

$$D_{xy} = \{(x, y) \mid y_1(x) \le y \le y_2(x), \quad a \le x \le b\},$$

那么再把对x与y的二重积分化为累次积分，最终得到三重积分可化为先对z，再对y，最后对x的累次积分：

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x, y, z)dV = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z)dz.$$

如果闭区域D_{xy}又可以表示为

$$D_{xy} = \{(x, y) \mid y_1(x) \leq y \leq y_2(x), \quad a \leq x \leq b\},$$

那么再把对x与y的二重积分化为累次积分，最终得到三重积分可化为先对z，再对y，最后对x的累次积分：

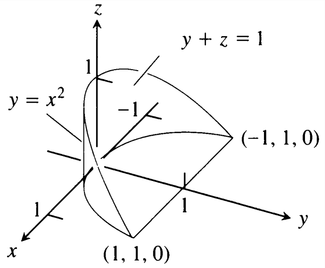
$$\iiint\limits_{\Omega} f(x, y, z)dV = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z)dz.$$

上述将三重积分化成累次积分的方法称为**投影法**。

例

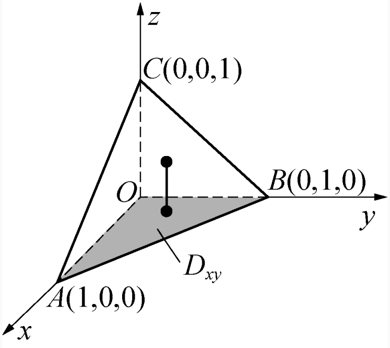
已知累次积分$\int_{-1}^{1}\int_{x^2}^{1}\int_{0}^{1-y} dzdydx$对应如图所示的有界闭区域，请分别写出其余5个累次积分：

$$(1)dydzdx;\ (2)dydxdz;\ (3)dxdydz;\ (4)dxdzdy;\ (5)dzdxdy.$$



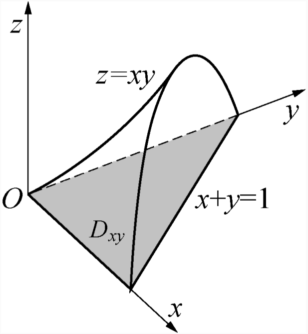
例 1

计算三重积分 $\displaystyle\iiint_{\Omega} x\,dV$，其中$\Omega$为三个坐标面及平面$x+y+z=1$所围成的闭区域。



例 2

计算三重积分$I=\iiint\limits_{\Omega} x dV$，其中$\Omega$为双曲抛物面$xy=z$ 及平面$x+y-1=0$, $z=0$所围成的闭区域。



例 3

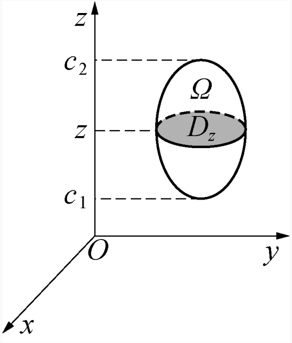
化三重积分$I = \iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dV$为先对$z$，再对$y$，最后对$x$的累次积分，其中$\Omega$为由曲面$z = x^2 + 2y^2$ 及$z = 2 - x^2$所围成的闭区域。

例 3

化三重积分$I=\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dV$为先对$z$，再对$y$，最后对$x$的累次积分，其中$\Omega$为由曲面$z=x^2+2y^2$ 及$z=2-x^2$所围成的闭区域。

$$I=\iint\limits_{D} dxdy\int_{x^2+2y^2}^{2-x^2} f(x,y,z)dz=\int_{-1}^{1} dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy\int_{x^2+2y^2}^{2-x^2} f(x,y,z)dz.$$

我们还可以把三重积分化为先对某两个变量的二重积分，后对第三个变量的定积分。设区域Ω恰介于平面$z=c_1$与$z=c_2$之间，那么对于任意取定的$c_1\le z\le c_2$，用过点$(0,0,z)$且平行于xOy面的平面截Ω，得到一个平面闭区域D_z，其中的点的竖坐标都同为z。于是Ω也可以表示为 $\Omega=\{(x,y,z)\mid(x,y)\in D_z,\quad c_1\le z\le c_2\}$:



利用直角坐标计算三重积分

因此

$$I = \iiint\limits_{\Omega} f(x, y, z)dV = \int_{c_1}^{c_2} \left[\iint\limits_{D_z} f(x, y, z)dxdy \right] dz = \int_{c_1}^{c_2} dz \iint\limits_{D_z} f(x, y, z)dxdy.$$

这种计算三重积分的方法称为**截面法**。

因此

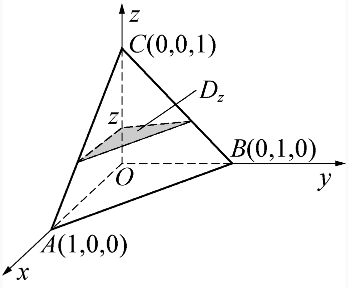
$$I = \iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dV = \int_{c_1}^{c_2} \left[\iint\limits_{D_z} f(x,y,z)dxdy \right] dz = \int_{c_1}^{c_2} dz \iint\limits_{D_z} f(x,y,z)dxdy.$$

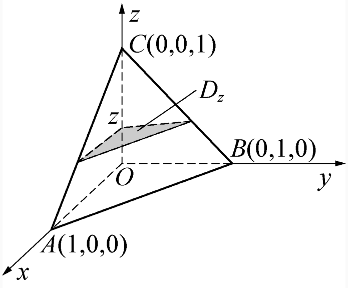
这种计算三重积分的方法称为**截面法**。

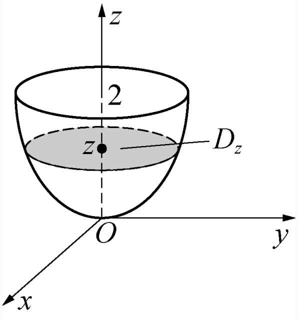
例 4

计算三重积分$I = \iiint\limits_{\Omega} zdxdydz$，其中$\Omega$为三个坐标面及平面$x+y+z=1$所围成的闭区域。

引例







例 5

计算三重积分$I = \iiint\limits_{\Omega} z^2 dV$，其中$\Omega$为由$z = x^2 + y^2$ 与$z = 2$所围成的闭区域。

设$P(x,y,z)$为空间内一点，点P在xOy面上的投影在平面xOy中用极坐标表示为(r,θ)，则这样的三个数r,θ,z就叫作点P的**柱面坐标**。

设$P(x,y,z)$为空间内一点，点P在xOy面上的投影在平面xOy中用极坐标表示为(r,θ)，则这样的三个数r,θ,z就叫作点P的**柱面坐标**。

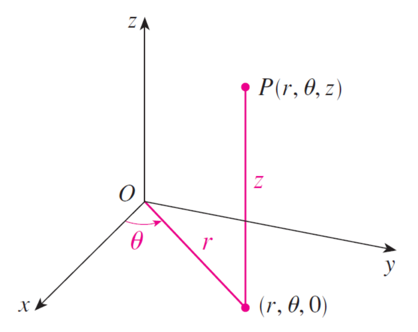
我们规定r,θ,z的变化范围为

$$0 \le r \le +\infty,\quad 0 \le \theta \le 2\pi,\quad -\infty < z < +\infty.$$

其中

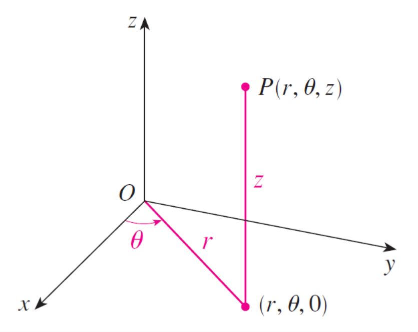
- $r=$常数，即表示以z轴为轴的圆柱面；
- $\theta=$常数，即表示过z轴的半平面；
- $z=$常数，即表示与xOy面平行的平面。

此时直角坐标与柱面坐标的关系为 $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta,\ z = z.$



利用柱面坐标计算三重积分

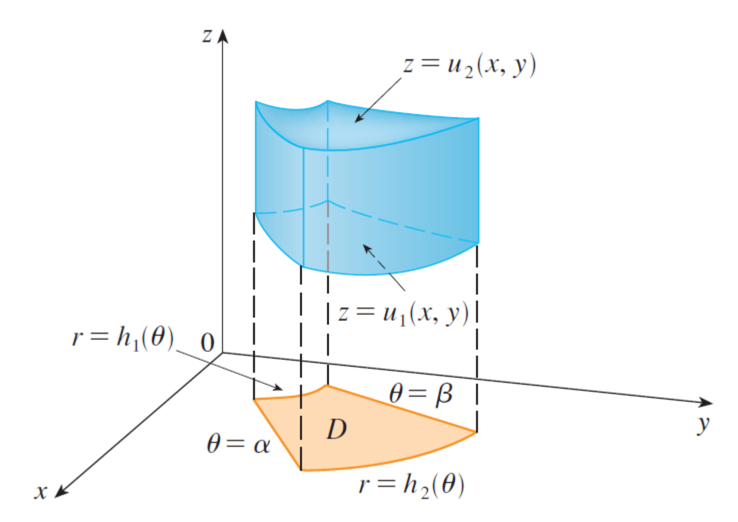
此时直角坐标与柱面坐标的关系为 $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta,\ z = z.$



因此三重积分从直角坐标系变化到柱面坐标系的公式为

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dV = \iiint\limits_{\Omega} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)\underbrace{rdrd\theta dz}_{\text{体积元素}}.$$

设 $\Omega = \{(r,\theta,z) \mid u_1(r,\theta) \le z \le u_2(r,\theta),\ \ h_1(\theta) \le r \le h_2(\theta),\ \ \alpha \le \theta \le \beta\}$,



那么柱面坐标系下的三重积分可化为累次积分：

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dV = \int_{\alpha}^{\beta} d\theta \int_{h_1(\theta)}^{h_2(\theta)} r dr \int_{u_1(r,\theta)}^{u_2(r,\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)dz.$$

那么柱面坐标系下的三重积分可化为累次积分：

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dV = \int_{\alpha}^{\beta} d\theta \int_{h_1(\theta)}^{h_2(\theta)} rdr \int_{u_1(r,\theta)}^{u_2(r,\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)dz.$$

例 6

计算三重积分$I = \iiint_{\Omega} zdV$，其中Ω为由球面$z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ 及旋转抛物面$x^2 + y^2 = 3z$所围成。

那么柱面坐标系下的三重积分可化为累次积分：

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dV = \int_{\alpha}^{\beta} d\theta \int_{h_1(\theta)}^{h_2(\theta)} rdr \int_{u_1(r,\theta)}^{u_2(r,\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)dz.$$

例 6

计算三重积分$I=\iiint_{\Omega} zdV$，其中Ω为由球面$z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ 及旋转抛物面$x^2+y^2=3z$所围成。

例 7

计算$I=\iiint_{\Omega}\sqrt{x^2+y^2}dV$，其中$\Omega$为平面$z=4$下方由柱面$x^2+y^2=1$ 及抛物面$z=1-x^2-y^2$所围成的区域。

例 8

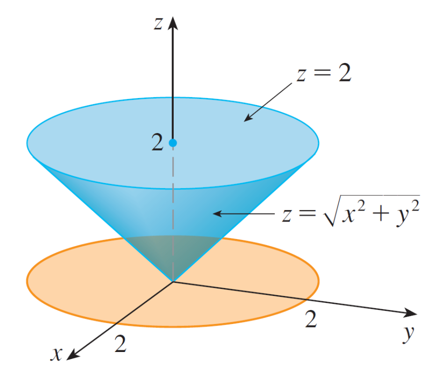
计算

$$\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{2}(x^2+y^2)dzdydx.$$

例 8

计算

$$\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{2}(x^2+y^2)dzdydx.$$



利用球面坐标计算三重积分*

设$P(x,y,z)$为空间内一点，点P可以用有序数组ρ,ϕ,θ来确定，其中

- ρ为原点O到P的距离，
- ϕ为$\overrightarrow{OP}$与z轴正半轴的夹角，
- θ为从z轴正半轴自x轴按逆时针方向转到$\overrightarrow{OP}$的角，
- P为点P在xOy面上的投影。

我们称有序数组ρ,ϕ,θ为点P的**球面坐标**。

设$P(x,y,z)$为空间内一点，点P可以用有序数组ρ,ϕ,θ来确定，其中

- ρ为原点O到P的距离，
- ϕ为$\overrightarrow{OP}$与z轴正半轴的夹角，
- θ为从z轴正半轴自x轴按逆时针方向转到$\overrightarrow{OP}$的角，
- P为点P在xOy面上的投影。

我们称有序数组ρ,ϕ,θ为点P的**球面坐标**。我们规定ρ,θ,z的变化范围为

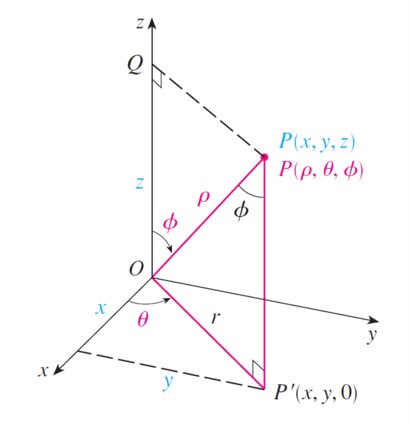
$$0 \le r \le +\infty, \quad 0 \le \varphi \le \pi, \quad 0 \le \theta \le 2\pi.$$

其中

- $\rho =$常数，即以原点为球心的球面；
- $\phi =$常数，即以原点为顶点，z轴为轴的圆锥面；
- $\theta =$常数，即过z轴的半平面。

利用球面坐标计算三重积分*

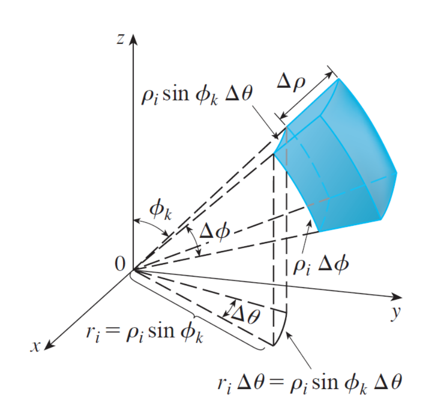
如图所示



直角坐标与球面坐标的关系为 $x = \rho\sin\phi\cos\theta,\ y = \rho\sin\phi\sin\theta,\ z = \rho\cos\phi.$

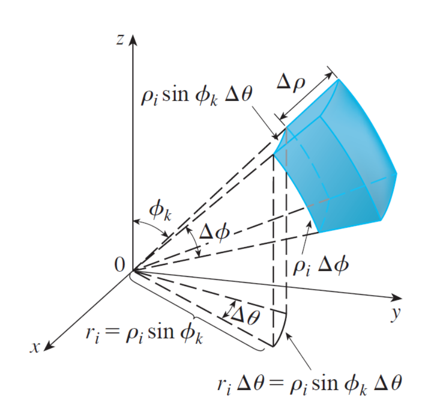
利用球面坐标计算三重积分*

我们考虑由ρ,ϕ,θ各取得微小增量$d\rho,d\phi,d\theta$所围成的六面体的体积：



利用球面坐标计算三重积分*

我们考虑由ρ, ϕ, θ各取得微小增量$d\rho, d\phi, d\theta$所围成的六面体的体积：



不计高阶无穷小，我们可以将这个六面体近似看作是长方体，于是球面坐标系下的体积元素为$dV = \rho^2 \sin\phi d\rho d\phi d\theta$.

利用球面坐标计算三重积分*

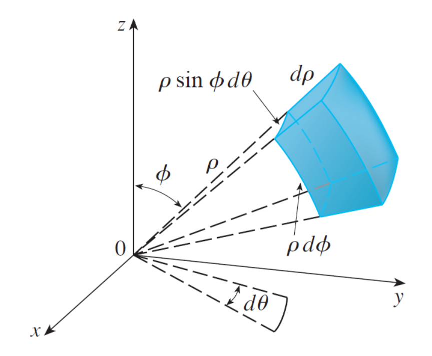
因此三重积分从直角坐标系变化到球面坐标系的公式为

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dV = \iiint\limits_{\Omega} f(\rho\sin\phi\cos\theta, \rho\sin\phi\sin\theta, \rho\cos\phi)\,\underbrace{\rho^2\sin\phi d\rho d\phi d\theta}_{\text{体积元素}}.$$

利用球面坐标计算三重积分*

因此三重积分从直角坐标系变化到球面坐标系的公式为

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dV = \iiint\limits_{\Omega} f(\rho\sin\phi\cos\theta, \rho\sin\phi\sin\theta, \rho\cos\phi)\,\underbrace{\rho^2\sin\phi d\rho d\phi d\theta}_{\text{体积元素}}.$$



利用球面坐标计算三重积分*

设积分区域Ω对应的球面坐标表示为

$$\Omega = \{(\rho, \phi, \theta) \mid \alpha \le \theta \le \beta,\ \phi_1 \le \phi \le \phi_2,\ g_1(\theta, \phi) \le \rho \le g_2(\theta, \phi)\},$$

那么球面坐标系下的三重积分可化为累次积分:

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x, y, z) dV$$

$$= \int_{\phi_1}^{\phi_2} \int_{\alpha}^{\beta} \int_{g_1(\theta,\phi)}^{g_2(\theta,\phi)} f(\rho \sin\phi \cos\theta, \rho \sin\phi \sin\theta, \rho \cos\phi) \rho^2 \sin\varphi d\rho d\theta d\phi.$$

利用球面坐标计算三重积分*

设积分区域Ω对应的球面坐标表示为

$$\Omega = \{(\rho, \phi, \theta) \mid \alpha \le \theta \le \beta,\ \phi_1 \le \phi \le \phi_2,\ g_1(\theta, \phi) \le \rho \le g_2(\theta, \phi)\},$$

那么球面坐标系下的三重积分可化为累次积分：

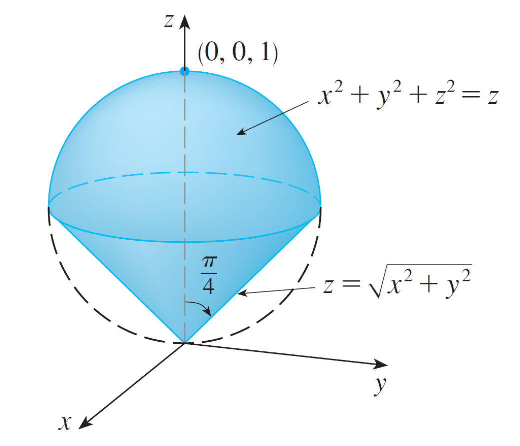
$$\begin{aligned}&\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dV \\ = &\int_{\phi_1}^{\phi_2} \int_{\alpha}^{\beta} \int_{g_1(\theta,\phi)}^{g_2(\theta,\phi)} f(\rho \sin\phi \cos\theta, \rho \sin\phi \sin\theta, \rho\cos\phi) \rho^2 \sin\varphi d\rho d\theta d\phi.\end{aligned}$$

例 9

计算 $\iiint_B e^{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} dV$，其中 $B = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \le 1\}$.

例 10

计算球面$x^2+y^2+z^2=z$与锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$之间所围成空间区域的体积。



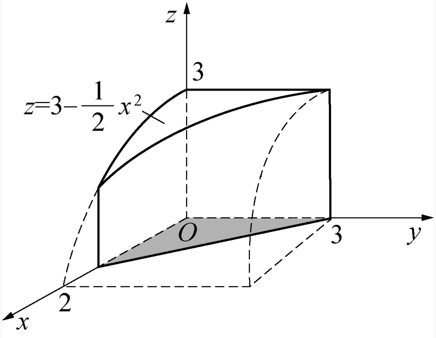
三重积分的应用：空间立体的体积

我们可以用三重积分来计算空间立体体积：$V_\Omega = \iiint_\Omega dV$。

我们可以用三重积分来计算空间立体体积： $V_\Omega = \iiint_\Omega dV$。

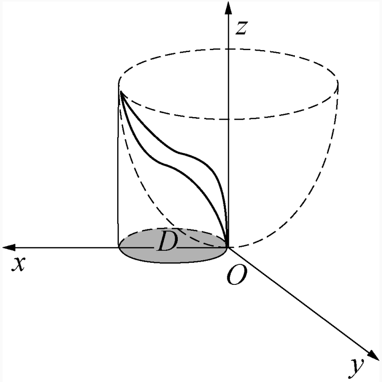
例 11

求由平面$x=0, y=0, z=0, 3x+2y=6$及曲面$z=3-\dfrac{x^2}{2}$所围立体的体积。



例 12

设$a > 0$，计算旋转抛物面$x^2 + y^2 = az$，圆柱面$x^2 + y^2 = 2ax$与平面$z = 0$所围成的立体Ω的体积。



曲线积分

课前导读

我们遇到的一些实际问题，例如质点受变力作用下沿曲线运动做功，流体通过曲面的流量等，需要我们推广积分范围。

课前导读

我们遇到的一些实际问题，例如质点受变力作用下沿曲线运动做功，流体通过曲面的流量等，需要我们推广积分范围。

定积分的积分范围是数轴上的区间，二重积分的积分范围为平面闭区域，三重积分的积分范围为立体空间。

课前导读

我们遇到的一些实际问题，例如质点受变力作用下沿曲线运动做功，流体通过曲面的流量等，需要我们推广积分范围。

定积分的积分范围是数轴上的区间，二重积分的积分范围为平面闭区域，三重积分的积分范围为立体空间。

本节我们将积分范围推广到一段曲线（有线长度的曲线弧）来讨论曲线积分。

假设在xOy平面上有一曲线构件，设曲线弧$\overset{\frown}{AB}$的长为L，线密度为连续函数

$$\rho = \rho(x, y), \quad (x, y) \in \overset{\frown}{AB}.$$

对弧长的曲线积分（第一类曲线积分）

假设在xOy平面上有一曲线构件，设曲线弧$\overset{\frown}{AB}$的长为L，线密度为连续函数

$$\rho = \rho(x, y), \quad (x, y) \in \overset{\frown}{AB}.$$

- 若密度ρ是常数（均匀质体），则曲线构件的质量$m = \rho L$；

假设在xOy平面上有一曲线构件，设曲线弧$\overset{\frown}{AB}$的长为L，线密度为连续函数

$$\rho = \rho(x, y), \quad (x, y) \in \overset{\frown}{AB}.$$

- 若密度ρ是常数（均匀质体），则曲线构件的质量$m = \rho L$；
- 若构件的线密度$\rho = \rho(x, y)$是变量（非均匀质体），我们不能直接用上述方法计算其质量。

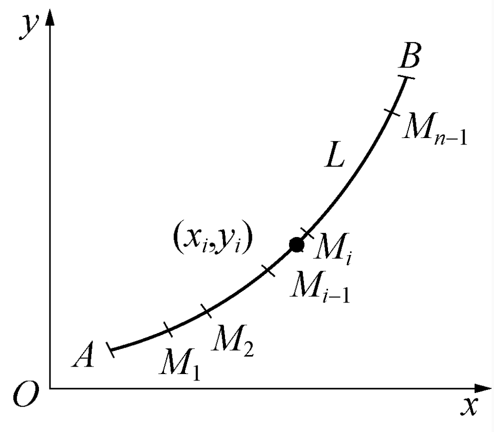
对弧长的曲线积分（第一类曲线积分）

假设在xOy平面上有一曲线构件，设曲线弧$\overset{\frown}{AB}$的长为L，线密度为连续函数

$$\rho = \rho(x, y), \quad (x, y) \in \overset{\frown}{AB}.$$

- 若密度ρ是常数（均匀质体），则曲线构件的质量$m = \rho L$；
- 若构件的线密度$\rho = \rho(x, y)$是变量（非均匀质体），我们不能直接用上述方法计算其质量。

用点$M_1, M_2, \cdots, M_{n-1}$将曲线弧$\overset{\frown}{AB}$分成$n$个小弧段，每个小弧段的长度为$\Delta s_i$，$i = 1, 2, \cdots, n$。



由于线密度连续变化，所以只要小弧段长度足够短，就可以用这一小段上任一点处的线密度代替这一小段上其他各点处的线密度：

$$\forall\,(x_i, y_i) \in \Delta s_i \Rightarrow \text{小段质量}\ \Delta m_i \approx \rho(x_i, y_i)\Delta s_i,\ i = 1, 2, \cdots, n.$$

对弧长的曲线积分（第一类曲线积分）

由于线密度连续变化，所以只要小弧段长度足够短，就可以用这一小段上任一点处的线密度代替这一小段上其他各点处的线密度：

$$\forall\,(x_i, y_i) \in \Delta s_i \Rightarrow \text{小段质量}\,\Delta m_i \approx \rho(x_i, y_i)\Delta s_i,\ i = 1, 2, \cdots, n.$$

从而曲线形构件的质量为

$$m = \sum_{i=1}^{n} \Delta m_i \approx \sum_{i=1}^{n} \rho(x_i, y_i)\Delta s_i.$$

由于线密度连续变化，所以只要小弧段长度足够短，就可以用这一小段上任一点处的线密度代替这一小段上其他各点处的线密度：

$$\forall\,(x_i,y_i)\in\Delta s_i \Rightarrow \text{小段质量}\,\Delta m_i\approx\rho(x_i,y_i)\Delta s_i,\ i=1,2,\cdots,n.$$

从而曲线形构件的质量为

$$m=\sum_{i=1}^{n}\Delta m_i\approx\sum_{i=1}^{n}\rho(x_i,y_i)\Delta s_i.$$

取$\lambda:=\max\limits_{1\le i\le n}\{\Delta s_i\}$，当分点无限增多且$\lambda\to 0$时，此和式极限就是该曲线形构件的质量，即

$$m=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\rho(x_i,y_i)\Delta s_i.$$

定义

设L为xOy平面上一条光滑（或分段光滑）的曲线弧，函数$f(x,y)$在L上有界。在L上任意取点$M_1, M_2, \cdots, M_{n-1}$将$L$分成$n$个小弧段，记弧长$\Delta s_i = \overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$，$i = 1, 2, \cdots, n$。任取$(x_i, y_i) \in \Delta s_i$，$\lambda = \max\limits_{1 \le i \le n} \{\Delta s_i\}$。如果极限

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i) \Delta s_i$$

存在，那么称该极限为f在L上**对弧长的曲线积分或第一类曲线积分**，记作

$$\int_L f(x,y) ds.$$

注

- 若L是封闭曲线，那么函数$f(x,y)$在闭曲线上对弧长L的曲线积分通常记为

$$\oint_L f(x,y)ds.$$

- 可以证明：若$f(x,y)$在光滑曲线弧L上连续，则$f(x,y)$在L上的曲线积分$\int_L f(x,y)ds$一定存在，所以我们总假定$f(x,y)$在光滑曲线弧L上连续。
- 上述定义完全可以推广到空间曲线Γ的情形：

$$\int_\Gamma f(x,y,z)ds = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i,z_i)\Delta s_i.$$

以下我们只叙述对计算有重要作用的第一类曲线积分的两个性质：

以下我们只叙述对计算有重要作用的第一类曲线积分的两个性质：

性质（线性性质）

$$\int_L [\alpha f(x,y) \pm \beta g(x,y)] ds = \alpha \int_L f(x,y) ds \pm \beta \int_L g(x,y) ds, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

以下我们只叙述对计算有重要作用的第一类曲线积分的两个性质：

性质（线性性质）

$$\int_L [\alpha f(x,y) \pm \beta g(x,y)]ds = \alpha \int_L f(x,y)ds \pm \beta \int_L g(x,y)ds, \quad \forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

性质（弧线区域可加性）

设曲线弧L由L_1和L_2组成，则

$$\int_L f(x,y)ds = \int_{L_1} f(x,y)ds + \int_{L_2} f(x,y)ds.$$

对弧长的曲线积分的计算方法

对弧长的曲线积分可以化为定积分来计算:

对弧长的曲线积分可以化为定积分来计算：

定理

设$f(x,y)$在平面曲线弧L上连续，平面曲线的参数方程为

$$L=\overset{\frown}{AB}:\begin{cases}x=\varphi(t),\\ y=\psi(t),\end{cases}\quad \alpha\le t\le\beta,$$

其中$\varphi(t),\psi(t)$及$\varphi'(t),\psi'(t)$在$[\alpha,\beta]$上连续，且$(\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2\neq 0$，则

$$\int_L f(x,y)ds=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t),\psi(t)]\sqrt{(\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2}dt\,(\alpha<\beta).$$

注

- 如果平面曲线$L=\overset{\frown}{AB}$的方程为$y=y(x),\ a\le x\le b\ (a<b)$，其中$y(x)$在$[a,b]$上具有一阶连续导函数， $f(x,y)$在L上连续，则

$$\int_L f(x,y)ds=\int_a^b f(x,y(x))\sqrt{1+(y'(x))^2}dx.$$

- 如果平面曲线$L=\overset{\frown}{AB}$的方程用极坐标表示为$r=r(\theta),\ \alpha\le\theta\le\beta\ (\alpha<\beta)$，其中$r(\theta)$在$[\alpha,\beta]$上具有一阶连续导函数， $f(x,y)$在L上连续，则

$$\int_L f(x,y)ds=\int_\alpha^\beta f(r(\theta)\cos\theta,r(\theta)\sin\theta)\sqrt{r^2(\theta)+(r'(\theta))^2}d\theta.$$

- 对空间曲线弧Γ上的曲线积分$\displaystyle\int_\Gamma f(x,y,z)ds$有着相似的计算结果。

定理

设$f(x,y,z)$在空间曲线Γ上连续，空间曲线的参数方程为

$$\Gamma=\overset{\frown}{AB}:\begin{cases}x=\varphi(t),\\ y=\psi(t), & \alpha\le t\le\beta,\\ z=\omega(t),\end{cases}$$

其中$\varphi(t),\psi(t),\omega(t)$及$\varphi'(t),\psi'(t),\omega'(t)$在$[\alpha,\beta]$上连续，且

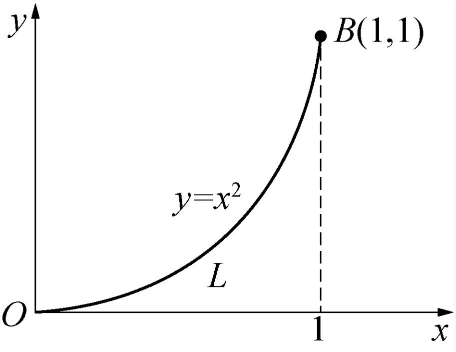
$$(\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2+(\omega'(t))^2\neq 0,$$

则

$$\int_\Gamma f(x,y,z)ds=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t),\psi(t),\omega(t)]\sqrt{(\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2+(\omega'(t))^2}dt\,(\alpha<\beta).$$

例 1

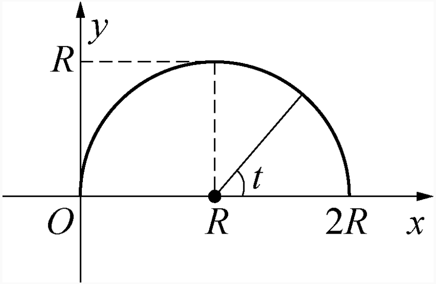
计算$\int_L \sqrt{y}ds$，其中L是抛物线$y=x^2$上点$O(0,0)$与点$B(1,1)$之间的一段弧。



引例

例 2

计算$\int_L (x^2+y^2)ds$，其中L是中心在$(R,0)$，半径为R的上半圆周。



我们可以把极坐标转化为参数方程形式到曲线积分公式中：

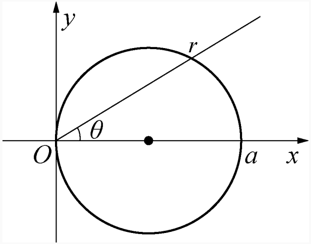
$$L:\begin{cases} x = r(\theta)\cos\theta, \\ y = r(\theta)\sin\theta, \end{cases} \quad \alpha \le \theta \le \beta,$$

我们可以把极坐标转化为参数方程形式到曲线积分公式中：

$$L:\begin{cases} x = r(\theta)\cos\theta, \\ y = r(\theta)\sin\theta, \end{cases} \quad \alpha \le \theta \le \beta,$$

例 3

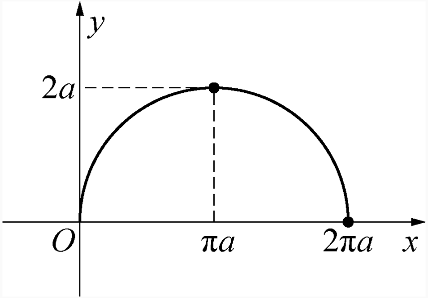
计算$\oint_L \sqrt{x^2+y^2}ds$，其中$L: x^2+y^2 = ax\ (a>0)$。



例 4

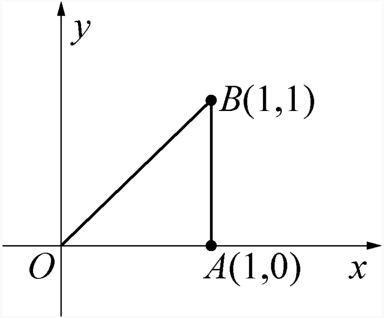
计算$\int_L y^2 ds$，其中L是为摆线的一拱：

$$L:\begin{cases} x = a(t-\sin t), \\ y = a(1-\cos t), \end{cases} \quad 0 \le t \le 2\pi,$$



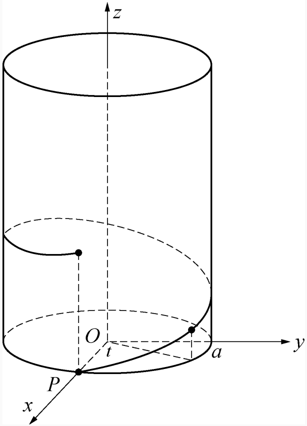
例 5

计算$\oint_L (x+y)ds$，其中L为连接三点 $O(0,0), A(1,0), B(0,1)$的封闭折线段$OABO$。



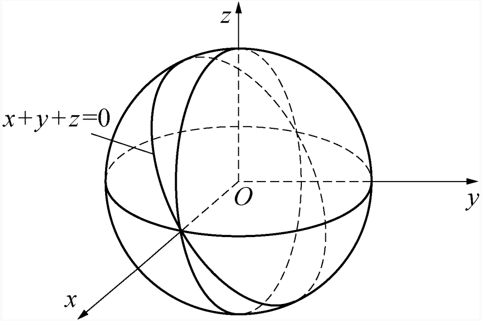
例 6

计算$\oint_{\Gamma}(x^2+y^2+z^2)ds$，其中$\Gamma$为螺旋线$x=a\cos t, y=a\sin t, z=kt$上相应于$t$从$0$到$2\pi$的一段弧。



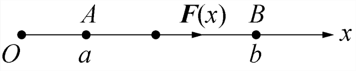
例 7

计算$I=\int_{\Gamma}x^2ds$，其中Γ为球面$x^2+y^2+z^2=a^2$被平面$x+y+z=0$所截得的圆周。



质点受变力作用沿平面曲线运动做功问题 质点受变力$\mathbf{F}=\mathbf{F}(x)$ (方向与x正向一致)作用沿直线(x轴)从点A运动到点B所做的功为

$$W=\int_a^b \mathbf{F}(x)dx.$$



若$\mathbf{F}$为常力，质点沿有向线段$\overrightarrow{AB}$从点A运动到点B，设θ为$\mathbf{F}$与$\overrightarrow{AB}$的夹角，那么

$$W=|\mathbf{F}|\cos\theta|\overrightarrow{AB}|=\mathbf{F}\cdot\overrightarrow{AB}.$$

对坐标的曲线积分（第二类曲线积分）

现在考虑质点受变力$\mathbf{F}(x,y)=P(x,y)\vec{i}+Q(x,y)\vec{j}$作用沿平面曲线$L=\overset{\frown}{AB}$运动做功问题：

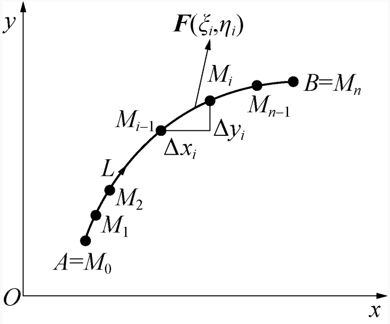
对坐标的曲线积分（第二类曲线积分）

现在考虑质点受变力$\mathbf{F}(x,y)=P(x,y)\vec{i}+Q(x,y)\vec{j}$作用沿平面曲线$L=\widehat{AB}$运动做功问题：将$\widehat{AB}$任意地分成$n$个小弧段$\Delta s_i=\widehat{M_{i-1}M_i}\,(i=1.\cdots,n)$，当每个小弧段的长度很小时，我们取其中一小弧段$\widehat{M_{i-1}M_i}$，并考虑

$$\mathbf{F}(\xi_i,\eta_i)=P(\xi_i,\eta_i)\vec{i}+Q(\xi_i,\eta_i)\vec{j}$$

现在考虑质点受变力$\mathbf{F}(x,y)=P(x,y)\vec{i}+Q(x,y)\vec{j}$作用沿平面曲线$L=\widehat{AB}$运动做功问题：将$\widehat{AB}$任意地分成$n$个小弧段$\Delta s_i=\widehat{M_{i-1}M_i}\ (i=1.\cdots,n)$，当每个小弧段的长度很小时，我们取其中一小弧段$\widehat{M_{i-1}M_i}$，并考虑

$$\mathbf{F}(\xi_i,\eta_i)=P(\xi_i,\eta_i)\vec{i}+Q(\xi_i,\eta_i)\vec{j}$$



近似替代小弧段$\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$上各点处受到的力，于是变力$\mathbf{F}$在$\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$所做的功为

$$
\begin{aligned}
\Delta W_i \approx & \mathbf{F}(\xi_i, \eta_i) \cdot \overrightarrow{M_{i-1}M_i} \\
= & (P(\xi_i, \eta_i), Q(\xi_i, \eta_i)) \cdot (\Delta x_i, \Delta y_i) \\
= & P(\xi_i, \eta_i)\Delta x_i + Q(\xi_i, \eta_i)\Delta y_i.
\end{aligned}
$$

于是

$$
W = \sum_{i=1}^{n} \Delta W_i \approx \sum_{i=1}^{n} [P(\xi_i, \eta_i)\Delta x_i + Q(\xi_i, \eta_i)\Delta y_i].
$$

近似替代小弧段$\overparen{M_{i-1}M_i}$上各点处受到的力，于是变力**F**在$\overparen{M_{i-1}M_i}$所做的功为

$$\begin{aligned}\Delta W_i \approx& \mathbf{F}(\xi_i,\eta_i)\cdot\overrightarrow{M_{i-1}M_i}\\ =&(P(\xi_i,\eta_i),Q(\xi_i,\eta_i))\cdot(\Delta x_i,\Delta y_i)\\ =&P(\xi_i,\eta_i)\Delta x_i+Q(\xi_i,\eta_i)\Delta y_i.\end{aligned}$$

于是

$$W=\sum_{i=1}^{n}\Delta W_i\approx\sum_{i=1}^{n}[P(\xi_i,\eta_i)\Delta x_i+Q(\xi_i,\eta_i)\Delta y_i].$$

令$\lambda=\max\limits_{1\le i\le n}\Delta s_i$，则有

$$W=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}[P(\xi_i,\eta_i)\Delta x_i+Q(\xi_i,\eta_i)\Delta y_i].$$

近似替代小弧段$\widehat{M_{i-1}M_i}$上各点处受到的力，于是变力**F**在$\widehat{M_{i-1}M_i}$所做的功为

$$\begin{aligned}\Delta W_i \approx& \mathbf{F}(\xi_i,\eta_i)\cdot\overrightarrow{M_{i-1}M_i}\\ =&(P(\xi_i,\eta_i),Q(\xi_i,\eta_i))\cdot(\Delta x_i,\Delta y_i)\\ =&P(\xi_i,\eta_i)\Delta x_i+Q(\xi_i,\eta_i)\Delta y_i.\end{aligned}$$

于是

$$W=\sum_{i=1}^{n}\Delta W_i\approx\sum_{i=1}^{n}[P(\xi_i,\eta_i)\Delta x_i+Q(\xi_i,\eta_i)\Delta y_i].$$

令$\lambda=\max\limits_{1\le i\le n}\Delta s_i$，则有

$$W=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}[P(\xi_i,\eta_i)\Delta x_i+Q(\xi_i,\eta_i)\Delta y_i].$$

对此和式极限进行讨论，我们即得到第二类曲线积分的定义。

定义

设L为xOy平面上从点A到点B的一条光滑（或分段光滑）的曲线弧，函数$P(x,y),Q(x,y)$在L上有界。在L上任意取点

$$A=M_0(x_0,y_0),M_1(x_1,y_1),M_2(x_2,y_2),\cdots,M_{n-1}(x_{n-1},y_{n-1}),M(x_n,y_n)=B.$$

将L分成n个小弧段，记$\Delta s_i=\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$，$\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$，$\Delta y_i=y_i-y_{i-1}$，$i=1,2,\cdots,n$。任取$(\xi_i,\eta_i)\in\Delta s_i$，$\lambda=\max\limits_{1\le i\le n}\{\Delta s_i\}$。如果极限

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}P(\xi_i,\eta_i)\Delta x_i,\quad \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}Q(\xi_i,\eta_i)\Delta y_i$$

存在，那么称上述极限分别为函数$P(x,y)$在有向曲线弧L上**对坐标x的曲线积分**及函数$Q(x,y)$在有向曲线弧L上**对坐标y的曲线积分**。

定义

上述积分记作

$$\int_L P(x,y)dx := \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} P(\xi_i,\eta_i)\Delta x_i,$$

$$\int_L Q(x,y)dy := \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} Q(\xi_i,\eta_i)\Delta y_i,$$

其中

- $P(x,y), Q(x,y)$称为**被积函数**；
- 我们称L为**有向曲线弧段或有向积分路径**。

以上两个积分也称为**第二类曲线积分**。

定义

上述积分记作

$$\int_L P(x,y)dx := \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} P(\xi_i,\eta_i)\Delta x_i,$$

$$\int_L Q(x,y)dy := \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} Q(\xi_i,\eta_i)\Delta y_i,$$

其中

- $P(x,y), Q(x,y)$称为**被积函数**；
- 我们称L为**有向曲线弧段或有向积分路径**。

以上两个积分也称为**第二类曲线积分**。

若$P(x,y),Q(x,y)$在有向光滑曲线弧L上连续，则$\int_L P(x,y)dx$, $\int_L Q(x,y)dy$存在，且我们可记

$$\int_L P(x,y)dx + \int_L Q(x,y)dy = \int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy.$$

对坐标的曲线积分的概念与性质

若$P(x,y),Q(x,y)$在有向光滑曲线弧L上连续，则$\int_L P(x,y)dx, \int_L Q(x,y)dy$存在，且我们可记

$$\int_L P(x,y)dx + \int_L Q(x,y)dy = \int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy.$$

上述积分也可以写成向量形式

$$\int_L \mathbf{F}(x,y)\cdot d\mathbf{r}.$$

其中$\mathbf{F}(x,y) = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j}$**为向量值函数，** $d\mathbf{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j}$**为有向曲线弧元素。**

若$P(x,y),Q(x,y)$在有向光滑曲线弧L上连续，则$\int_L P(x,y)dx,\int_L Q(x,y)dy$存在，且我们可记

$$\int_L P(x,y)dx+\int_L Q(x,y)dy=\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy.$$

上述积分也可以写成向量形式

$$\int_L \mathbf{F}(x,y)\cdot d\mathbf{r}.$$

其中$\mathbf{F}(x,y)=P(x,y)\vec{i}+Q(x,y)\vec{j}$**为向量值函数，** $d\mathbf{r}=dx\vec{i}+dy\vec{j}$**为有向曲线弧元素。**

更多地，质点受力场$\mathbf{F}(x,y)=P(x,y)\vec{i}+Q(x,y)\vec{j}$的作用，沿$L=\widehat{AB}$从点$A$移动到点$B$时所做的功为

$$W=\int_L \mathbf{F}(x,y)\cdot d\mathbf{s}=\int_{\widehat{AB}} P(x,y)dx+Q(x,y)dy,\quad d\mathbf{s}=dx\vec{i}+dy\vec{j}.$$

性质（线性性质）

$$\int_L [\alpha F_1(x,y) \pm \beta F_2(x,y)] \cdot d\mathbf{r} = \alpha \int_L F_1(x,y) \cdot d\mathbf{r} \pm \beta \int_L F_2(x,y) \cdot d\mathbf{r}, \quad \forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

性质（线性性质）

$$\int_L [\alpha F_1(x,y) \pm \beta F_2(x,y)] \cdot d\mathbf{r} = \alpha \int_L F_1(x,y) \cdot d\mathbf{r} \pm \beta \int_L F_2(x,y) \cdot d\mathbf{r}, \quad \forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

性质（对区间的可加性）

设曲线弧L由两段有向曲线弧L_1和L_2组成，则

$$\int_L F(x,y) \cdot d\mathbf{r} = \int_{L_1} F(x,y) \cdot d\mathbf{r} + \int_{L_2} F(x,y) \cdot d\mathbf{r}.$$

性质（方向性）

设L是有向曲线弧，L是L^-反向曲线弧，则

$$\int_{L^-} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = -\int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy.$$

因此，计算对坐标的曲线积分必须注意积分弧段的方向。

对坐标的曲线积分可以类似地推广到积分弧段为空间有向曲线弧Γ（我们总假定Γ光滑且具有有限长度）的情形：

$$\int_\Gamma P(x,y,z)dx := \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^n P(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta x_i,$$

$$\int_\Gamma Q(x,y,z)dy := \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^n Q(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta y_i,$$

$$\int_\Gamma R(x,y,z)dz := \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^n R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta z_i.$$

该类积分存在的条件、性质等都可以类似地推广到空间曲线弧的情形，并且我们可以简便地把上式写成

$$\int_\Gamma P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz.$$

对坐标的曲线积分也可以化为定积分来计算：

对坐标的曲线积分的计算方法

对坐标的曲线积分也可以化为定积分来计算：

定理

设$P(x,y),Q(x,y)$在平面曲线弧L上有定义且连续，平面曲线的参数方程为

$$L=\overset{\frown}{AB}:\begin{cases}x=\varphi(t),\\ y=\psi(t),\end{cases}\quad \alpha\le t\le\beta,$$

当参数t单调地由α变到β时，相应的点$M(x,y)$从起点A沿L运动到终点B，函数$\varphi(t),\psi(t)$及$\varphi'(t),\psi'(t)$在$[\alpha,\beta]$上连续，且$(\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2\neq 0$，那么

$$\int_L P(x,y)dx+O(x,y)dy=\int_\alpha^\beta[P(\varphi(t),\psi(t))\varphi'(t)+Q(\varphi(t),\psi(t))\varphi'(t)]dt.$$

定理

设空间曲线Γ的参数方程为

$$\Gamma = \overset{\frown}{AB}: \begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), & \alpha \le t \le \beta, \\ z = \omega(t), \end{cases}$$

其中α对应起始点，β对应终点， $\varphi(t), \psi(t), \omega(t)$及$\varphi'(t), \psi'(t), \omega'(t)$在$[\alpha, \beta]$上连续，$P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)$在$\Gamma$上连续，那么

$$\int_\Gamma P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz$$
$$= \int_\alpha^\beta [P(\varphi(t), \psi(t), \omega(t))\varphi'(t) + Q(\varphi(t), \psi(t), \omega(t))\psi'(t) + R(\varphi(t), \psi(t), \omega(t))\omega'(t)]dt.$$

注

- 上述定理表明，计算对坐标的曲线积分时，我们需要从曲线的起点所对应的参数值α到曲线的终点所对应的参数值β作定积分即可。

注

- 上述定理表明，计算对坐标的曲线积分时，我们需要从曲线的起点所对应的参数值α到曲线的终点所对应的参数值β作定积分即可。必须注意的是：
  (1) 在平面曲线L中，积分下限α一定要对应于L的起点，而积分上限β一定要对应于L的终点，α不一定小于β。
  (2) 类似地，在空间曲线Γ中，积分下限α一定要对应于Γ的起点，而积分上限β一定要对应于Γ的终点。

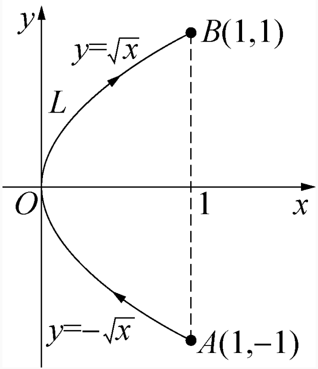
注

- 上述定理表明，计算对坐标的曲线积分时，我们需要从曲线的起点所对应的参数值α到曲线的终点所对应的参数值β作定积分即可。必须注意的是：
  (1) 在平面曲线L中，积分下限α一定要对应于L的起点，而积分上限β一定要对应于L的终点，α不一定小于β。
  (2) 类似地，在空间曲线Γ中，积分下限α一定要对应于Γ的起点，而积分上限β一定要对应于Γ的终点。
- 当平面曲线$L=\widehat{AB}$由$y=y(x), x: a\to b$给出，其中a对应起始点， b对应终点，$y(x)$在$[a,b]$上具有一阶连续导数， $P(x,y), Q(x,y)$在L上连续，那么

$$\int_L P(x,y)dx+O(x,y)dy=\int_a^b [P(x,y(x))+Q(x,y(x))y'(x)]dx.$$

例 8

计算$I=\int_L xydx$，其中L为曲线$y^2=x$上从$A(1,-1)$到$B(1,1)$的一段弧。

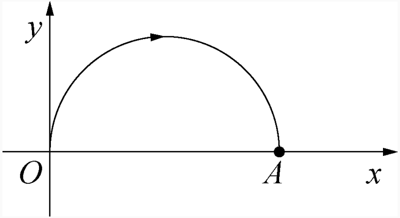


例 9

计算$I=\int_L(2a-y)dx+xdy$，其中L为摆线

$$\begin{cases} x=a(t-\sin t), \\ y=a(1-\cos t), \end{cases} \quad 0\le t\le 2\pi$$

的一拱， O为起点，A为终点。



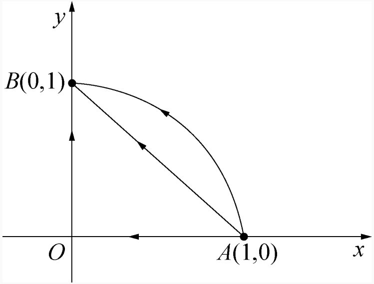
例 10

计算$I=\int_L xydx+y^2dy$，其中$L=\overset{\frown}{AB}$分别为

(1) 从点$A(1,0)$沿直线到点$B(0,1)$；

(2) 从点$A(1,0)$沿圆周$x=\cos t, y=\sin t\,(0\le t\le \pi/2)$到点$B(0,1)$；

(3) 从点$A(1,0)$沿x轴到$O(0,0)$再沿y轴到点$B(0,1)$。



例 11

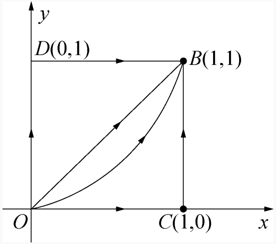
计算$I=\int_L 2xydx+x^2dy$，其中$L=\overset{\frown}{OB}$分别为

(1) 从点$O(0,0)$沿直线到点$B(1,1)$；

(2) 从点$O(0,0)$沿曲线$y=x^3$到点$B(1,1)$；

(3) 从点$O(0,0)$沿x轴到$C(1,0)$再沿直线到点$B(1,1)$；

(4) 从点$O(0,0)$沿y轴到$D(0,1)$再沿直线到点$B(1,1)$。



例 12

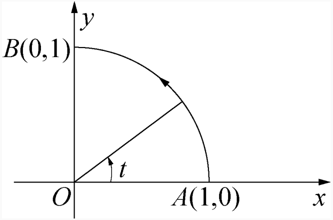
计算$\int_{\Gamma} xdx + ydy + (x+y-1)dz$，其中$\Gamma$为点$A(2,3,4)$到点$B(1,1,1)$的空间有向线段。

例 12

计算$\int_\Gamma xdx+ydy+(x+y-1)dz$，其中$\Gamma$为点$A(2,3,4)$到点$B(1,1,1)$的空间有向线段。

例 13

求质点在力$\mathrm{F}(x,y)=x^2\vec{i}-xy\vec{j}$的作用下沿着曲线 $L:x=\cos t,y=\sin t$从点$A(1,0)$移动到点$B(0,1)$时所做的功。



两类曲线积分的关系

上述两类曲线积分有着不同的物理背景及不同计算特征，但在某些条件下它们之间是有联系的。

两类曲线积分的关系

上述两类曲线积分有着不同的物理背景及不同计算特征，但在某些条件下它们之间是有联系的。设平面有向曲线弧

$$L = \overset{\frown}{AB} : \begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} \quad \alpha \leq t \leq \beta,$$

其中α对应起点A， β对应终点B。不妨设$\alpha < \beta$ （如果$\alpha > \beta$，我们可令$s = -t$，A, B对应$s = -\alpha$， $s = -\beta$，就有$(-\alpha) < (-\beta)$，因此我们直接可以讨论s），并设置

- 设$\varphi(t), \psi(t)$在$[\alpha, \beta]$上具有一阶连续导函数；
- $\varphi'^2(t) + \psi'^2(t) \neq 0$且$P(x, y), Q(x, y)$在$L$上连续。

那么

$$\int_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_\alpha^\beta [P(\varphi(t), \psi(t))\varphi'(t) + Q(\varphi(t), \psi(t))\psi'(t)]dt.$$

已知$\tau=(\varphi'(t),\psi'(t))$是曲线弧$L$在点$M(\varphi(t),\psi(t))$处的一个切向量，它的指向与参数$t$的增长方向一致，且当$\alpha<\beta$时，这个指向就是有向曲线弧$L=\overset{\frown}{AB}$的方向。我们称这种指向与有向曲线弧的方向一致的切向量为**有向曲线弧的切向量**。

已知$\tau=(\varphi'(t),\psi'(t))$是曲线弧$L$在点$M(\varphi(t),\psi(t))$处的一个切向量，它的指向与参数$t$的增长方向一致，且当$\alpha<\beta$时，这个指向就是有向曲线弧$L=\overset{\frown}{AB}$的方向。我们称这种指向与有向曲线弧的方向一致的切向量为**有向曲线弧的切向量**。于是，当有向曲线弧$L=\overset{\frown}{AB}$的切向量为$\tau=(\varphi'(t),\psi'(t))$，其方向余弦为

$$\cos\alpha=\frac{\varphi'(t)}{\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}},\quad \cos\beta=\frac{\psi'(t)}{\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}}.$$

那么

$$\begin{aligned}\int_L(P(x,y)\cos\alpha+Q(x,y)\cos\beta)ds&=\int_\alpha^\beta\left[P(\varphi(t),\psi(t))\frac{\varphi'(t)}{\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}}\right.\\&\left.+Q(\varphi(t),\psi(t))\frac{\psi'(t)}{\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}}\right]\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}dt\\&=\int_\alpha^\beta[P(\varphi(t),\psi(t))\varphi'(t)+Q(\varphi(t),\psi(t))\psi'(t)]dt.\end{aligned}$$

因此

$$\int_\Gamma \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = \int_\Gamma \mathbf{A}\cdot \tau ds \Rightarrow \int_\Gamma \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = \int_\Gamma \mathbf{A}_\tau ds.$$

其中$\mathbf{A} = (P, Q, R)$， $\tau = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$为有向曲线弧$L$在点$(x, y, z)$处的单位切向量， $d\mathbf{r} = \tau ds = (dx, dy, dz)$称为**有向曲线元**， $\mathbf{A}_\tau$为向量$\mathbf{A}$在向量τ上的投影。

因此

$$\int_\Gamma \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = \int_\Gamma \mathbf{A}\cdot \tau ds \Rightarrow \int_\Gamma \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = \int_\Gamma \mathbf{A}_\tau ds.$$

其中$\mathbf{A} = (P, Q, R)$， $\tau = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$为有向曲线弧$L$在点$(x, y, z)$处的单位切向量， $d\mathbf{r} = \tau ds = (dx, dy, dz)$称为**有向曲线元**， $\mathbf{A}_\tau$为向量$\mathbf{A}$在向量τ上的投影。

类似地，在空间中我们也有

$$\int_\Gamma Pdx + Qdy + Rdz = \int_\Gamma (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)ds,$$

其中$\alpha(x, y, z), \beta(x, y, z), \gamma(x, y, z)$为空间有向曲线弧$\Gamma$在点$(x, y, z)$处的切向量的方向角。

因此

$$\int_\Gamma \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r}=\int_\Gamma \mathbf{A}\cdot \tau ds \Rightarrow \int_\Gamma \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r}=\int_\Gamma \mathbf{A}_\tau ds.$$

其中$\mathbf{A}=(P,Q,R)$， $\tau=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$为有向曲线弧$L$在点$(x,y,z)$处的单位切向量， $d\mathbf{r}=\tau ds=(dx,dy,dz)$**称为有向曲线元，** $\mathbf{A}_\tau$为向量$\mathbf{A}$在向量τ上的投影。

类似地，在空间中我们也有

$$\int_\Gamma Pdx+Qdy+Rdz=\int_\Gamma (P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)ds,$$

其中$\alpha(x,y,z),\beta(x,y,z),\gamma(x,y,z)$为空间有向曲线弧$\Gamma$在点$(x,y,z)$处的切向量的方向角。

例 14

设L为从点$(0,0)$沿曲线$y=\sqrt{2x-x^2}$到点$(1,1)$的曲线弧，化以下第二类曲线积分$\int_L Pdx+Qdy$为第一类曲线积分。

曲面积分

课前导读

到目前为止，我们讨论了以下各个类型的积分：

课前导读

到目前为止，我们讨论了以下各个类型的积分：

- 定积分：$\int_a^b f(x)dx$；

课前导读

到目前为止，我们讨论了以下各个类型的积分：

- 定积分：$\int_a^b f(x)dx$；
- 重积分：二重积分$\iint_D f(x,y)d\sigma$和三重积分$\iiint_\Omega f(x,y,z)dV$；

课前导读

到目前为止，我们讨论了以下各个类型的积分：

- 定积分：$\int_a^b f(x)dx$；
- 重积分：二重积分 $\iint_D f(x,y)d\sigma$ 和三重积分 $\iiint_\Omega f(x,y,z)dV$；
- 曲线积分：

(1) 对弧长的曲线积分：$\int_L f(x,y)ds,\ \int_\Gamma f(x,y,z)ds$；

(2) 对坐标的曲线积分：$\int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy$，

$$\int_\Gamma P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz.$$

到目前为止，我们讨论了以下各个类型的积分：

- 定积分：$\displaystyle\int_a^b f(x)dx$；
- 重积分：二重积分$\displaystyle\iint_D f(x,y)d\sigma$和三重积分$\displaystyle\iiint_\Omega f(x,y,z)dV$；
- 曲线积分：

  (1) 对弧长的曲线积分：$\displaystyle\int_L f(x,y)ds,\ \int_\Gamma f(x,y,z)ds$；

  (2) 对坐标的曲线积分：$\displaystyle\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy$，

$$\int_\Gamma P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz.$$

在本节中，我们将积分范围推广到曲面的情形，这样推广出来的积分称为曲面积分。

我们可由曲面状构件的质量问题导出对面积曲面积分的定义。

对面积的曲面积分（第一类曲面积分）

我们可由曲面状构件的质量问题导出对面积曲面积分的定义。设有一曲面状构件Σ，其面积为S，面密度为连续函数$\rho(x,y,z),(x,y,z)\in\Sigma$。

对面积的曲面积分（第一类曲面积分）

我们可由曲面状构件的质量问题导出对面积曲面积分的定义。设有一曲面状构件Σ，其面积为S，面密度为连续函数$\rho(x,y,z),(x,y,z)\in\Sigma$。

- 若ρ是常数（均匀质体），则$m=\rho S_\Sigma$；

对面积的曲面积分（第一类曲面积分）

我们可由曲面状构件的质量问题导出对面积曲面积分的定义。设有一曲面状构件Σ，其面积为S，面密度为连续函数$\rho(x,y,z),(x,y,z)\in\Sigma$。

- 若ρ是常数（均匀质体），则$m=\rho S_{\Sigma}$；
- 若$\rho=\rho(x,y,z)$（非均匀质体），我们可将曲面Σ任意分割成n个小曲面$\Delta\Sigma_i(i=1,2,\cdots,n)$，$\Delta S_i$为小曲面$\Delta\Sigma_i$的面积，$\lambda=\max\limits_{1\le i\le n}(\mathrm{diam}\Delta\Sigma_i)$。任取$(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\in\Delta\Sigma_i$，于是$\Delta\Sigma_i$的质量为$\Delta m_i\approx\rho(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i,1\le i\le n$，从而曲面状构件的质量为

$$m=\sum_{i=1}^{n}\Delta m_i\approx\sum_{i=1}^{n}\rho(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i.$$

对面积的曲面积分（第一类曲面积分）

我们可由曲面状构件的质量问题导出对面积曲面积分的定义。设有一曲面状构件Σ，其面积为S，面密度为连续函数$\rho(x,y,z),(x,y,z)\in\Sigma$。

- 若ρ是常数（均匀质体），则$m=\rho S_{\Sigma}$；
- 若$\rho=\rho(x,y,z)$（非均匀质体），我们可将曲面Σ任意分割成n个小曲面$\Delta\Sigma_i(i=1,2,\cdots,n)$，$\Delta S_i$为小曲面$\Delta\Sigma_i$的面积，$\lambda=\max\limits_{1\le i\le n}(\mathrm{diam}\Delta\Sigma_i)$。任取$(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\in\Delta\Sigma_i$，于是$\Delta\Sigma_i$的质量为$\Delta m_i\approx\rho(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i,1\le i\le n$，从而曲面状构件的质量为
$$m=\sum_{i=1}^{n}\Delta m_i\approx\sum_{i=1}^{n}\rho(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i.$$
当分点无限加密，即$\lambda\to 0$时，此和式极限就是该曲面状构件的质量。
$$m=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\rho(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i.$$

定义

设Σ为光滑（或分段光滑）的曲面，函数$f(x,y,z)$在Σ上有界。将Σ任意分割成n个小曲面$\Delta\Sigma_i(i=1,2,\cdots,n)$， ΔS_i为小曲面$\Delta\Sigma_i$的面积， $\lambda=\max\limits_{1\le i\le n}(\mathrm{diam}\Delta\Sigma_i)$。任取$(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\in\Delta\Sigma_i$，如果极限

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i$$

存在，那么称该极限为f在Σ上**对面积的曲面积分或第一类曲面积分**，记作

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)dS.$$

注

- 所谓曲面是光滑的，即曲面上各点处都有切平面，且当点在曲面上连续移动时，切平面也连续转动；
- 如果曲面Σ是分片光滑的，即曲面Σ由有限片光滑曲面组成，那么我们规定函数在分片光滑曲面Σ上的对面积的曲面积分等于各片光滑的曲面上对面积的曲面积分之和。

注

- 所谓曲面是光滑的，即曲面上各点处都有切平面，且当点在曲面上连续移动时，切平面也连续转动；
- 如果曲面Σ是分片光滑的，即曲面Σ由有限片光滑曲面组成，那么我们规定函数在分片光滑曲面Σ上的对面积的曲面积分等于各片光滑的曲面上对面积的曲面积分之和。例如，如果Σ可分为两片光滑曲面Σ_1和Σ_2，即$\Sigma=\Sigma_1+\Sigma_2$，那么

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)dS=\iint_{\Sigma_1+\Sigma_2} f(x,y,z)dS=\iint_{\Sigma_1} f(x,y,z)dS+\iint_{\Sigma_2} f(x,y,z)dS.$$

注

- 所谓曲面是光滑的，即曲面上各点处都有切平面，且当点在曲面上连续移动时，切平面也连续转动；
- 如果曲面Σ是分片光滑的，即曲面Σ由有限片光滑曲面组成，那么我们规定函数在分片光滑曲面Σ上的对面积的曲面积分等于各片光滑的曲面上对面积的曲面积分之和。例如，如果Σ可分为两片光滑曲面Σ_1和Σ_2，即$\Sigma = \Sigma_1 + \Sigma_2$，那么

$$\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)dS = \iint\limits_{\Sigma_1+\Sigma_2} f(x,y,z)dS = \iint\limits_{\Sigma_1} f(x,y,z)dS + \iint\limits_{\Sigma_2} f(x,y,z)dS.$$

- 以后我们总是假定曲面Σ是光滑或分片光滑的。

注

- 如果Σ是闭曲面，那么函数$f(x,y,z)$在Σ上对面积的曲面积分通常会记为$\oiint_{\Sigma} f(x,y,z)dS$；
- 当被积函数$f(x,y,z)\equiv 1$时，它在Σ上对面积的曲面积分通常记为$\iint_{\Sigma} dS$，即
$$S_{\Sigma}=\iint_{\Sigma} dS.$$
表示Σ的面积，其中dS为积分曲面Σ的面积元素；
- 可以证明，如果函数$f(x,y,z)$在曲面Σ上连续，那么在Σ上对面积的曲面积分$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)dS$必定存在。今后我们总是假定$f(x,y,z)$在$\Sigma$上连续。

对面积的曲面积分的概念与性质

注

- 如果Σ是闭曲面，那么函数$f(x,y,z)$在Σ上对面积的曲面积分通常会记为$\oiint_{\Sigma} f(x,y,z)dS$；
- 当被积函数$f(x,y,z)\equiv 1$时，它在Σ上对面积的曲面积分通常记为$\iint_{\Sigma} dS$，即

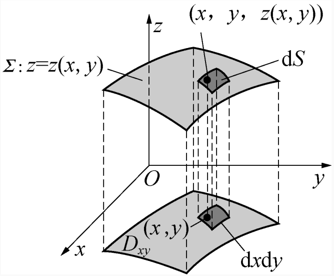
$$S_{\Sigma}=\iint_{\Sigma} dS.$$

  表示Σ的面积，其中dS为积分曲面Σ的面积元素；
- 可以证明，如果函数$f(x,y,z)$在曲面Σ上连续，那么在Σ上对面积的曲面积分$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)dS$必定存在。今后我们总是假定$f(x,y,z)$在$\Sigma$上连续。
- 对面积的曲面积分的定义可知，它具有与对弧长的曲线积分相类似的性质。

定理

设积分曲面Σ由方程$z=z(x,y)$给出， Σ在xOy面上的投影区域为D_{xy}，其中$z(x,y)$在D_{xy}上具有一阶连续偏导数，被积函数$f(x,y,z)$在Σ上连续，那么

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)dS = \iint_{D_{xy}} f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy.$$



注

- 上述定理说明，对面积的曲面积分可化成相应的二重积分；
- 设积分曲面Σ由方程$x = x(y, z)$给出， Σ在yOz面上的投影区域为D_{yz}，其中$x(y, z)$在D_{yz}上具有一阶连续偏导数，那么

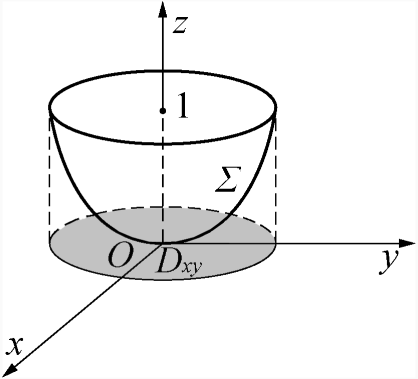
$$\iint\limits_{\Sigma} f(x, y, z) dS = \iint\limits_{D_{yz}} f(x(y, z), y, z)\sqrt{1 + x_y^2 + x_z^2} dydz.$$

- 设积分曲面Σ由方程$y = y(z, x)$给出， Σ在zOx面上的投影区域为D_{zx}，其中$y(z, x)$在D_{zx}上具有一阶连续偏导数，那么

$$\iint\limits_{\Sigma} f(x, y, z) dS = \iint\limits_{D_{zx}} f(x, y(z, x), z)\sqrt{1 + y_z^2 + y_x^2} dzdx.$$

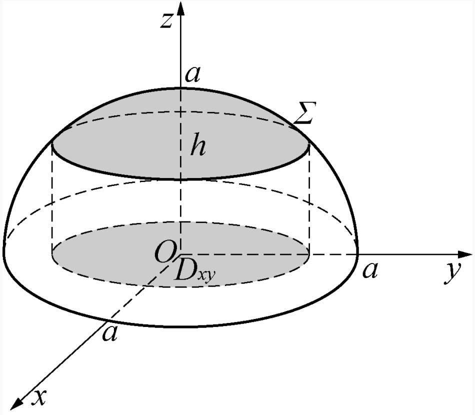
例 1

计算$\iint_{\Sigma}\sqrt{1+4z}dS$，其中$\Sigma$为$z=x^2+y^2\ (z\leq 1)$的部分。



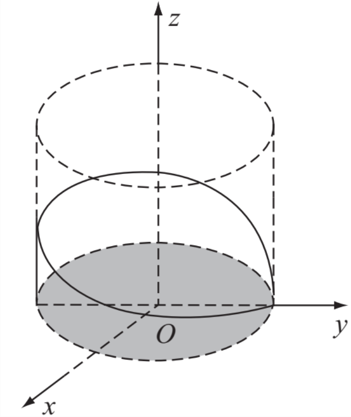
例 2

计算曲面积分 $\displaystyle\iint_{\Sigma}\frac{dS}{z}$，其中$\Sigma$是球面$x^2+y^2+z^2=a^2$被平面$z=h\,(0<h<a)$截出的顶部。



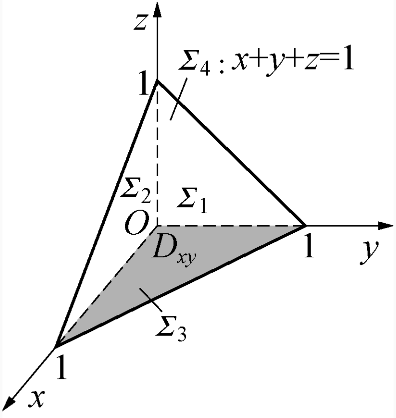
例 3

计算曲面积分$\iint_{\Sigma}(x+y+z)dS$，其中Σ是平面$y+z=5$被柱面$x^2+y^2=25$所截得的部分。



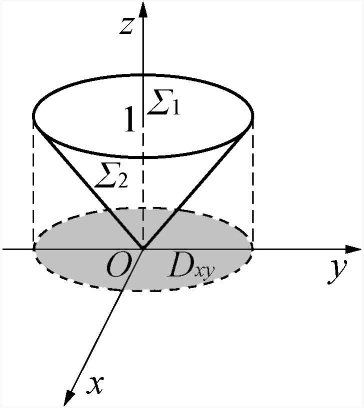
例 4

计算曲面积分 $\oiint_{\Sigma} xyzdS$，其中Σ是平面$x=0, y=0, z=0$被柱面$x+y+z=1$所围四面体的整个边界曲面。



例 5

计算曲面积分 $\oiint_{\Sigma}(x^2+y^2)dS$，其中Σ为立方体 $\sqrt{x^2+y^2} \le z \le 1$ 的整个边界曲面。



曲面有单侧曲面和双侧曲面之分：

曲面有单侧曲面和双侧曲面之分：

- 由方程$z = z(x, y)$给出的曲面有上侧、下侧之分；
- 由方程$y = y(x, z)$给出的曲面有右侧、左侧之分；
- 由方程$x = x(y, z)$给出的曲面有前侧、后侧之分；
- 对于一个包围某一空间区域的闭曲面有内侧、外侧之分。

对坐标的曲面积分（第二类曲面积分）

曲面有单侧曲面和双侧曲面之分：

- 由方程$z = z(x, y)$给出的曲面有上侧、下侧之分；
- 由方程$y = y(x, z)$给出的曲面有右侧、左侧之分；
- 由方程$x = x(y, z)$给出的曲面有前侧、后侧之分；
- 对于一个包围某一空间区域的闭曲面有内侧、外侧之分。

我们总是假定以后所考虑的曲面都是双侧曲面，并且我们还要选定它的某一侧。

曲面有单侧曲面和双侧曲面之分：

- 由方程$z = z(x, y)$给出的曲面有上侧、下侧之分；
- 由方程$y = y(x, z)$给出的曲面有右侧、左侧之分；
- 由方程$x = x(y, z)$给出的曲面有前侧、后侧之分；
- 对于一个包围某一空间区域的闭曲面有内侧、外侧之分。

我们总是假定以后所考虑的曲面都是双侧曲面，并且我们还要选定它的某一侧。

定义

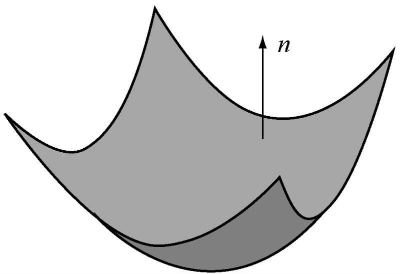
我们将选定了某一侧的双侧曲面称为**有向曲面**。

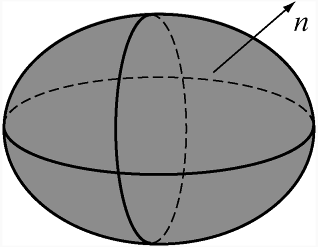
选定曲面的侧与确定该曲面的法向量的指向密切相关：

- 我们可以通过确定曲面上法向量的指向来确定曲面的侧；
- 反之，如果我们确定了曲面的侧，那我们也就确定出曲面上法向量的指向。

选定曲面的侧与确定该曲面的法向量的指向密切相关：

- 我们可以通过确定曲面上法向量的指向来确定曲面的侧；
- 反之，如果我们确定了曲面的侧，那我们也就确定出曲面上法向量的指向。



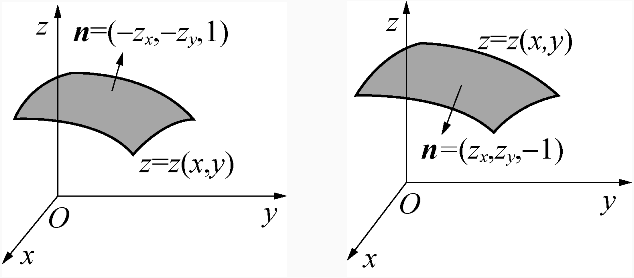


- 由于左图曲面的法向量n指向朝上，我们取定曲面的上侧；
- 由于右图闭曲面的法向量n指向朝外，我们取定曲面的外侧。

对坐标的曲面积分（第二类曲面积分）

我们设置曲面$z = z(x, y)$对应的函数表达式具有连续偏导函数，且它在某点(x, y, z)的法向量为$\mathbf{n} = \pm(-z_x, -z_y, 1)$。

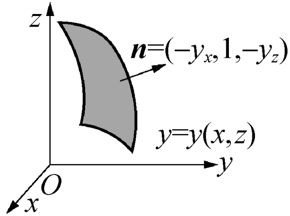
我们设置曲面$z = z(x, y)$对应的函数表达式具有连续偏导函数，且它在某点(x, y, z)的法向量为$\mathbf{n} = \pm(-z_x, -z_y, 1)$。

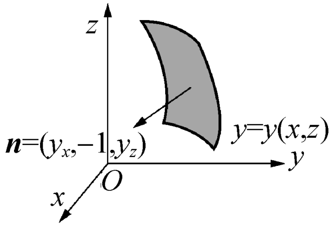


- 如果取n向上，其与z轴的夹角γ是锐角，此时有$\cos\gamma = 1/\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} > 0$，我们取$\mathbf{n} = (-z_x, -z_y, 1)$，选定曲面的上侧；
- 如果取n向下，其与z轴的夹角γ是钝角，此时有$\cos\gamma = -1/\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} < 0$，我们取$\mathbf{n} = (z_x, z_y, -1)$，选定曲面的下侧。

同样地，我们设置曲面$y = y(x, y)$对应的函数表达式具有连续偏导函数，且它在某点(x, y, z)的法向量为$\mathbf{n} = \pm(-y_x, 1, -y_z)$。

同样地，我们设置曲面$y=y(x,y)$对应的函数表达式具有连续偏导函数，且它在某点(x,y,z)的法向量为$\mathbf{n}=\pm(-y_x,1,-y_z)$。

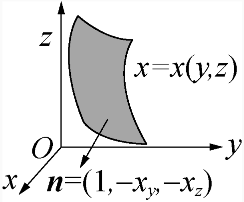


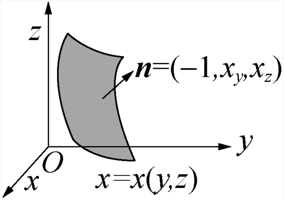


- 取$\mathbf{n}=(-y_x,1,-y_z)$，我们选定曲面的右侧；
- 取$\mathbf{n}=(y_x,-1,y_z)$，我们选定曲面的左侧。

最后，我们设置曲面$x = x(y, z)$对应的函数表达式具有连续偏导函数，且它在某点(x, y, z)的法向量为$\mathbf{n} = \pm(1, -x_y, -x_z)$。

最后，我们设置曲面$x = x(y, z)$对应的函数表达式具有连续偏导函数，且它在某点(x, y, z)的法向量为$\mathbf{n} = \pm(1, -x_y, -x_z)$。





- 取$\mathbf{n} = (1, -x_y, -x_z)$，我们选定曲面的前侧；
- 取$\mathbf{n} = (-1, x_y, x_z)$，我们选定曲面的后侧。

因此，曲面的侧可以通过其单位法向量$\mathbf{e}_n = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$来确定。

我们设Σ是有向曲面，在Σ上取一小块曲面$\Delta\Sigma$，将$\Delta\Sigma$投影到xOy面上得一投影区域，其面积记为$(\Delta\sigma)_{xy}$，且我们假定在$\Delta\Sigma$上各点处的法向量与z轴夹角γ的余弦$\cos\gamma$有相同的符号，那么我们规定$\Delta\Sigma$在xOy面上的投影$(\Delta\Sigma)_{xy}$为

$$(\Delta\Sigma)_{xy} = \begin{cases} (\Delta\sigma)_{xy}, \quad \cos\gamma > 0, \\ -(\Delta\sigma)_{xy}, \quad \cos\gamma < 0, \\ 0, \quad \cos\gamma \equiv 0. \end{cases}$$

其中$\cos\gamma \equiv 0$对应$(\Delta\sigma)_{xy} = 0$的情形。

对坐标的曲面积分（第二类曲面积分）

我们设Σ是有向曲面，在Σ上取一小块曲面$\Delta\Sigma$，将$\Delta\Sigma$投影到xOy面上得一投影区域，其面积记为$(\Delta\sigma)_{xy}$，且我们假定在$\Delta\Sigma$上各点处的法向量与z轴夹角γ的余弦$\cos\gamma$有相同的符号，那么我们规定$\Delta\Sigma$在xOy面上的投影$(\Delta\Sigma)_{xy}$为

$$(\Delta\Sigma)_{xy} = \begin{cases} (\Delta\sigma)_{xy}, & \cos\gamma > 0, \\ -(\Delta\sigma)_{xy}, & \cos\gamma < 0, \\ 0, & \cos\gamma \equiv 0. \end{cases}$$

其中$\cos\gamma \equiv 0$对应$(\Delta\sigma)_{xy} = 0$的情形。

类似地我们也可以定义$\Delta\Sigma$在yOz面上的投影$(\Delta\Sigma)_{yz}$及$\Delta\Sigma$在xOz面上的投影$(\Delta\Sigma)_{xz}$。

流向曲面一侧的流量

设稳定流动（流速与时间无关）的不可压缩流体（假定密度为1）的速度场由

$$\mathbf{v}(x,y,z)=P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k}$$

给出， Σ为速度场中的一片有向曲面，函数$P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)$都在$\Sigma$上连续，计算在单位时间内流向$\Sigma$指定侧的流体的质量，或称为**流量**$\Phi$。

流向曲面一侧的流量

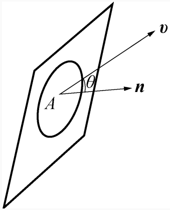
设稳定流动（流速与时间无关）的不可压缩流体（假定密度为1）的速度场由

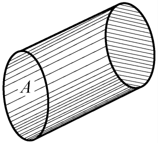
$$\mathbf{v}(x,y,z)=P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k}$$

给出， Σ为速度场中的一片有向曲面，函数$P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)$都在$\Sigma$上连续，计算在单位时间内流向$\Sigma$指定侧的流体的质量，或称为**流量**$\Phi$。

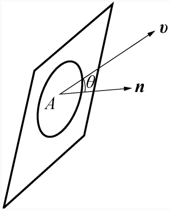
如果流体流过平面上面积为A的一个闭区域，我们设置$\mathbf{v}$是常向量， $\mathbf{n}$为该平面的单位法向量，那么在单位时间内流过这闭区域的流体组成一个底面积为A、斜高为$|\mathbf{v}|$的柱体。

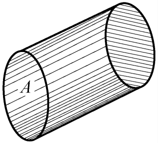
对坐标的曲面积分的概念和性质





对坐标的曲面积分的概念和性质





- 如果v与n的夹角小于90°，此时斜柱体的体积为$A\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}$，这也就是通过闭区域流向n所指一侧的流量；
- 如果v与n的夹角大于90°，此时$A\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}<0$，我们仍称$A\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}$为通过闭区域流向n所指一侧的流量，它表示流体通过闭区域实际上是流向$-\mathbf{n}$所指的一侧，且流向这一侧的流量为$-A\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}$；
- 如果v与n的夹角等于90°，那么流体通过闭区域流向n所指一侧的流量为零，即$A\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}=0$。

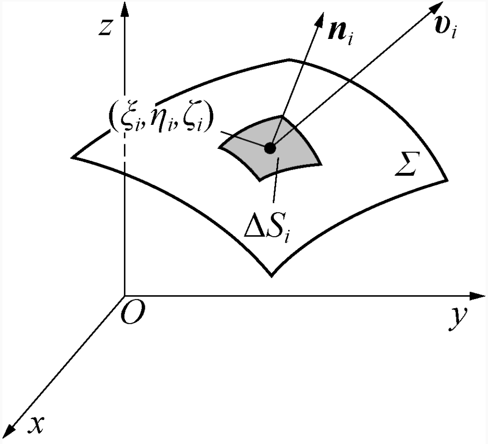
- 如果$\mathbf{v}$与$\mathbf{n}$的夹角小于90°，此时斜柱体的体积为$A\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}$，这也就是通过闭区域流向$\mathbf{n}$所指一侧的流量；
- 如果$\mathbf{v}$与$\mathbf{n}$的夹角大于90°，此时$A\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}<0$，我们仍称$A\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}$为通过闭区域流向$\mathbf{n}$所指一侧的流量，它表示流体通过闭区域实际上是流向$-\mathbf{n}$所指的一侧，且流向这一侧的流量为$-A\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}$；
- 如果$\mathbf{v}$与$\mathbf{n}$的夹角等于90°，那么流体通过闭区域流向$\mathbf{n}$所指一侧的流量为零，即$A\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}=0$。

因此，流体通过闭区域流向所指一侧的流量都等于$A\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}$。

对坐标的曲面积分的概念和性质

现在我们考虑平面闭区域是一个曲面，且流速v是连续的向量值函数。

现在我们考虑平面闭区域是一个曲面，且流速v是连续的向量值函数。将光滑曲面Σ任意分成n个小块曲面$\Delta\Sigma_i$， ΔS_i为$\Delta\Sigma_i$的面积， $i = 1, 2, \cdots, n$。



只要$\Delta\Sigma_i$的直径很小，我们就可以用$\Delta\Sigma_i$上任一点(ξ_i,η_i,ζ_i)处的流速

$$\mathbf{v}_i=\mathbf{v}(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)=P(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\vec{i}+Q(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\vec{j}+R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\vec{k}$$

来代替$\Delta\Sigma_i$上其他各点处的流速，以点(ξ_i,η_i,ζ_i)处曲面Σ的单位法向量

$$\mathbf{n}_i=\cos\alpha_i\vec{i}+\cos\beta_i\vec{j}+\cos\gamma_i\vec{k}$$

来代替$\Delta\Sigma_i$上其他各点处的单位法向量。

对坐标的曲面积分的概念和性质

只要$\Delta\Sigma_i$的直径很小，我们就可以用$\Delta\Sigma_i$上任一点(ξ_i,η_i,ζ_i)处的流速

$$\mathbf{v}_i=\mathbf{v}(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)=P(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\vec{i}+Q(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\vec{j}+R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\vec{k}$$

来代替$\Delta\Sigma_i$上其他各点处的流速，以点(ξ_i,η_i,ζ_i)处曲面Σ的单位法向量

$$\mathbf{n}_i=\cos\alpha_i\vec{i}+\cos\beta_i\vec{j}+\cos\gamma_i\vec{k}$$

来代替$\Delta\Sigma_i$上其他各点处的单位法向量。因此，通过Σ流向指定侧的流量Φ为

$$\begin{aligned}\Phi&\approx\sum_{i=1}^{n}\mathbf{v}_i\cdot\mathbf{n}_i\Delta S_i\\&=\sum_{i=1}^{n}[P(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\cos\alpha_i+Q(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\cos\beta_i+R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\cos\gamma_i]\Delta S_i.\end{aligned}$$

而

$$\cos\alpha_i \Delta S_i \approx (\Delta S_i)_{yz}, \cos\beta_i \Delta S_i \approx (\Delta S_i)_{zx}, \cos\gamma_i \Delta S_i \approx (\Delta S_i)_{xy},$$

因此

$$\Phi \approx \sum_{i=1}^{n} [P(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)(\Delta S_i)_{yz} + Q(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)(\Delta S_i)_{zx} + R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)(\Delta S_i)_{xy}].$$

而

$$\cos\alpha_i \Delta S_i \approx (\Delta S_i)_{yz}, \cos\beta_i \Delta S_i \approx (\Delta S_i)_{zx}, \cos\gamma_i \Delta S_i \approx (\Delta S_i)_{xy},$$

因此

$$\Phi \approx \sum_{i=1}^{n} [P(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)(\Delta S_i)_{yz} + Q(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)(\Delta S_i)_{zx} + R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)(\Delta S_i)_{xy}].$$

令$\lambda = \max\limits_{1 \leq i \leq n} (\mathrm{diam} \Delta\Sigma_i)$，那么

$$\Phi = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} [P(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)(\Delta S_i)_{yz} + Q(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)(\Delta S_i)_{zx} + R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)(\Delta S_i)_{xy}].$$

定义

设Σ为光滑（或分片光滑）的有向曲面，函数$R(x,y,z)$在Σ上有界。将Σ任意分成n个小块曲面$\Delta\Sigma_i$， ΔS_i为$\Delta\Sigma_i$的面积， $\Delta\Sigma_i$在xOy坐标面的投影是$(\Delta\Sigma_i)_{xy}$，$i=1,2,\cdots,n$， $\lambda=\max\limits_{1\le i\le n}(\mathrm{diam}\Delta\Sigma_i)$。

任取$(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\in\Delta\Sigma_i$，如果极限

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{xy}$$

存在，那么称该极限分别为$R(x,y,z)$在有向曲面Σ上**对坐标x,y的曲面积分**，记作$\iint_\Sigma R(x,y,z)dxdy$，即

$$\iint_\Sigma R(x,y,z)dxdy=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{xy}.$$

对坐标的曲面积分的概念和性质

定义

函数$P(x,y,z)$在有向曲面Σ上**对坐标**y,z**的曲面积分：**

$$\iint_{\Sigma} P(x,y,z)dxdy = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} P(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{yz};$$

函数$Q(x,y,z)$在有向曲面Σ上**对坐标**z,x**的曲面积分：**

$$\iint_{\Sigma} Q(x,y,z)dxdy = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} Q(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{zx}.$$

定义

函数$P(x, y, z)$在有向曲面Σ上**对坐标**y, z**的曲面积分**:

$$\iint_{\Sigma} P(x, y, z)dxdy = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} P(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)(\Delta S_i)_{yz};$$

函数$Q(x, y, z)$在有向曲面Σ上**对坐标**z, x**的曲面积分**:

$$\iint_{\Sigma} Q(x, y, z)dxdy = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} Q(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)(\Delta S_i)_{zx}.$$

我们称以上三个曲面积分为**第二类曲面积分**。

注

- 如果Σ是分片光滑有向曲面，那么我们规定函数在Σ上对坐标的曲面积分等于函数在光滑的各片曲面上对坐标的曲面积分之和；
- 如果Σ是闭合的有向曲面，那么在Σ上对坐标的曲面积分的记号中积分号$\iint$通常会换为$\oiint$；
- 我们总是假定被积函数$P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)$在$\Sigma$上连续；
- 第二类曲线积分有时也记为

$$\iint_{\Sigma} P(x, y, z) dydz + Q(x, y, z) dzdx + R(x, y, z) dxdy.$$

注

- 如果令

$$\mathbf{A}(x,y,z)=P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k},\ \ d\mathbf{S}=\underbrace{dydz\vec{i}+dzdx\vec{j}+dxdy\vec{k}}_{\text{面积元素}},$$

  那么曲线积分可记为$\iint_{\Sigma}\mathbf{A}(x,y,z)\cdot d\mathbf{S}$，其中$d\mathbf{S}$称为**有向曲面面积元素**。

- 对坐标的曲面积分也具有线性性、区域可加性。特别地，如果用$-\Sigma$表示双侧曲面Σ与指定的一侧相反的一侧，那么

$$\iint_{-\Sigma}Pdydz+Qdzdx+Rdxdy=-\iint_{\Sigma}Pdydz+Qdzdx+Rdxdy.$$

  因此，关于对坐标的曲面积分我们必须注意积分曲面的侧。

对坐标的曲面积分的概念和性质

定理

设光滑有向曲面Σ由方程$z=z(x,y)$给出， Σ在xOy面上的投影区域为D_{xy}，函数$z(x,y)$在D_{xy}上具有一阶连续偏导数，被积函数$R(x,y,z)$在Σ上连续，那么

- 曲线积分
$$\iint_{\Sigma} R(x,y,z)dxdy = \pm \iint_{D_{xy}} R(x,y,z(x,y))dxdy.$$
- 当曲面Σ取上侧，Σ的法向量的方向余弦$\cos\gamma > 0$，等式右端取正号：
$$\iint_{\Sigma} R(x,y,z)dxdy = \iint_{D_{xy}} R(x,y,z(x,y))dxdy.$$
- 当曲面Σ取下侧，Σ的法向量的方向余弦$\cos\gamma < 0$，等式右端取负号：
$$\iint_{\Sigma} R(x,y,z)dxdy = -\iint_{D_{xy}} R(x,y,z(x,y))dxdy.$$

定理

设光滑有向曲面Σ由方程$x = x(y,z)$给出，Σ在yOz面上的投影区域为D_{yz}，函数$x(y,z)$在D_{yz}上具有一阶连续偏导数，被积函数$P(x,y,z)$在Σ上连续，那么

- 曲线积分
$$\iint_{\Sigma} P(x,y,z)dydz = \pm \iint_{D_{yz}} P(x(y,z),y,z)dydz.$$
- 当曲面Σ取前侧，Σ的法向量的方向余弦$\cos\alpha > 0$，等式右端取正号：
$$\iint_{\Sigma} P(x,y,z)dydz = \iint_{D_{yz}} P(x(y,z),y,z)dydz.$$
- 当曲面Σ取后侧，Σ的法向量的方向余弦$\cos\alpha < 0$，等式右端取负号：
$$\iint_{\Sigma} P(x,y,z)dydz = -\iint_{D_{yz}} P(x(y,z),y,z)dydz.$$

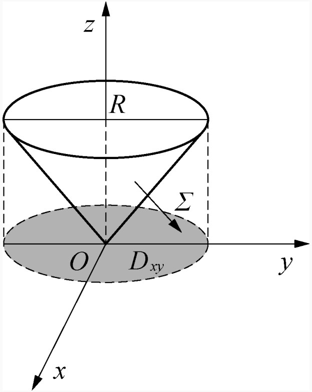
定理

设光滑有向曲面Σ由方程$y=y(z,x)$给出， Σ在xOy面上的投影区域为D_{zx}，函数$y(z,x)$在D_{zx}上具有一阶连续偏导数，被积函数$Q(x,y,z)$在Σ上连续，那么

- 曲线积分
$$\iint_{\Sigma} Q(x,y,z)dxdy = \pm\iint_{D_{zx}} Q(x,y(z,x),z)dzdx.$$
- 当曲面Σ取右侧，Σ的法向量的方向余弦$\cos\beta>0$，等式右端取正号：
$$\iint_{\Sigma} Q(x,y,z)dxdy = \iint_{D_{zx}} Q(x,y(z,x),z)dzdx.$$
- 当曲面Σ取左侧，Σ的法向量的方向余弦$\cos\beta<0$，等式右端取负号：
$$\iint_{\Sigma} Q(x,y,z)dxdy = -\iint_{D_{zx}} Q(x,y(z,x),z)dzdx.$$

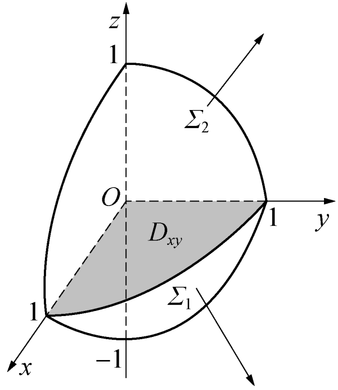
例 6

计算曲面积分 $\iint_{\Sigma} x^2y^2zdxdy$，其中$\Sigma$为锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}\,(0\le z\le R)$的下侧。



例 7

计算曲面积分$\iint_{\Sigma} xyzdxdy$，其中Σ是球面$x^2+y^2+z^2=1$的外侧在$x \geq 0, y \geq 0$的部分。

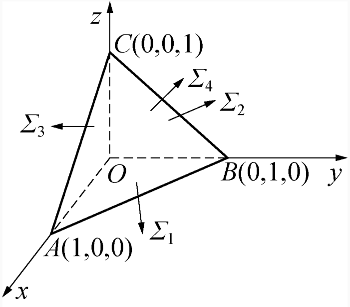


例 8

计算曲面积分

$$\oiint_{\Sigma}(x+1)dydz+ydzdx+dxdy,$$

其中Σ为由平面$x=0,y=0,z=0$及$x+y+z=1$所围四面体的外侧。



两类曲面积分之间的关系

- 有向曲面$\Sigma: z = z(x, y)$， Σ在xOy面上投影区域为D_{xy}；
- 函数$z(x, y)$在D_{xy}上具有一阶连续偏导数，$R(x, y, z)$在Σ上连续；
- $\mathbf{e}_n = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$为曲面$\Sigma$在点$(x, y, z)$处的单位法向量。

- 有向曲面$\Sigma: z=z(x,y)$， Σ在xOy面上投影区域为D_{xy}；
- 函数$z(x,y)$在D_{xy}上具有一阶连续偏导数，$R(x,y,z)$在Σ上连续；
- $\mathbf{e}_n=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$为曲面$\Sigma$在点$(x,y,z)$处的单位法向量。

(1)取Σ上侧，那么依照计算曲面积分定理结论，

$$\iint_{\Sigma} R(x,y,z)dxdy=\iint_{D_{xy}} R(x,y,z(x,y))dxdy.$$

- 有向曲面$\Sigma: z=z(x,y)$， Σ在xOy面上投影区域为D_{xy}；
- 函数$z(x,y)$在D_{xy}上具有一阶连续偏导数，$R(x,y,z)$在Σ上连续；
- $\mathbf{e}_n=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$为曲面$\Sigma$在点$(x,y,z)$处的单位法向量。

(1)取Σ上侧，那么依照计算曲面积分定理结论，

$$\iint_{\Sigma} R(x,y,z)dxdy = \iint_{D_{xy}} R(x,y,z(x,y))dxdy.$$

而

$$\begin{aligned}\iint_{\Sigma} R(x,y,z)\cos\gamma dS &= \iint_{D_{xy}} R(x,y,z(x,y))\frac{1}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}\cdot\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy \\ &= \iint_{D_{xy}} R(x,y,z(x,y))dxdy,\end{aligned}$$

因此 $\iint_{\Sigma} R(x,y,z)dxdy = \iint_{\Sigma} R(x,y,z)\cos\gamma dS$。

(2)取Σ下侧，于是，

$$\iint_{\Sigma} R(x,y,z)dxdy = -\iint_{D_{xy}} R(x,y,z(x,y))dxdy.$$

(2)取Σ下侧，于是，

$$\iint_{\Sigma} R(x,y,z)dxdy = -\iint_{D_{xy}} R(x,y,z(x,y))dxdy.$$

又

$$\iint_{\Sigma} R(x,y,z)\cos\gamma dS = \iint_{D_{xy}} R(x,y,z(x,y))\frac{-1}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}\cdot\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy$$
$$= -\iint_{D_{xy}} R(x,y,z(x,y))dxdy,$$

因此 $\iint_{\Sigma} R(x,y,z)dxdy = \iint_{\Sigma} R(x,y,z)\cos\gamma dS$。类似地，

$$\iint_{\Sigma} P(x,y,z)dydz = \iint_{\Sigma} P(x,y,z)\cos\alpha dS, \iint_{\Sigma} Q(x,y,z)dzdx = \iint_{\Sigma} Q(x,y,z)\cos\beta dS.$$

上述三个等式合并，我们得到

$$\iint_{\Sigma} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \iint_{\Sigma} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)dS.$$

并且注意到这两类曲面积分的关系式中满足

$$dS = \frac{dydz}{\cos\alpha} = \frac{dzdx}{\cos\beta} = \frac{dxdy}{\cos\gamma}.$$

上述三个等式合并，我们得到

$$\iint_{\Sigma} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \iint_{\Sigma} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)dS.$$

并且注意到这两类曲面积分的关系式中满足

$$dS = \frac{dydz}{\cos\alpha} = \frac{dzdx}{\cos\beta} = \frac{dxdy}{\cos\gamma}.$$

例 9

计算曲面积分

$$\iint_{\Sigma} (z^2 + x)dydz - zdxdy,$$

其中Σ为$z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$介于$z = 0$和$z = 2$之间的下侧。

格林公式

牛顿-莱布尼茨公式

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),\quad \text{其中} F'(x) = f(x),\quad x \in [a, b]$$

告诉我们：函数$f(x)$在区间$[a, b]$上的积分可以通过其原函数F'在此区间两个端点的函数值来表示。

课前导读

牛顿-莱布尼茨公式

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),\quad \text{其中} F'(x) = f(x),\quad x \in [a,b]$$

告诉我们：函数$f(x)$在区间$[a,b]$上的积分可以通过其原函数F'在此区间两个端点的函数值来表示。

伴随积分概念的推广，我们可以将微积分基本定理推广至重积分、曲线积分、曲面积分等概念。

牛顿-莱布尼茨公式

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a), \quad 其中 F'(x) = f(x), \quad x \in [a, b]$$

告诉我们：函数$f(x)$在区间$[a, b]$上的积分可以通过其原函数F'在此区间两个端点的函数值来表示。

伴随积分概念的推广，我们可以将微积分基本定理推广至重积分、曲线积分、曲面积分等概念。其中

- 格林公式：建立平面区域D上二重积分与区域边界上曲线积分之间的联系；
- 高斯公式：建立空间区域Ω上三重积分与区域边界上曲面积分之间的联系；
- 斯托克斯公式：联系曲面Σ上曲面积分和其边界曲线上曲线积分。

课前导读

牛顿-莱布尼茨公式

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),\quad \text{其中} F'(x) = f(x),\quad x \in [a, b]$$

告诉我们：函数$f(x)$在区间$[a, b]$上的积分可以通过其原函数F'在此区间两个端点的函数值来表示。

伴随积分概念的推广，我们可以将微积分基本定理推广至重积分、曲线积分、曲面积分等概念。其中

- 格林公式：建立平面区域D上二重积分与区域边界上曲线积分之间的联系；
- 高斯公式：建立空间区域Ω上三重积分与区域边界上曲面积分之间的联系；
- 斯托克斯公式：联系曲面Σ上曲面积分和其边界曲线上曲线积分。

本节我们主要讨论格林公式，它不仅可以提供计算第二类曲线积分的新方法，还能够给出定向曲线积分与积分路径无关的条件。

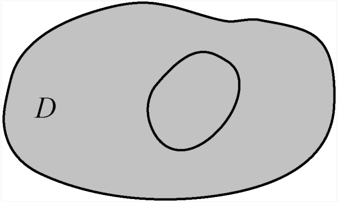
定义

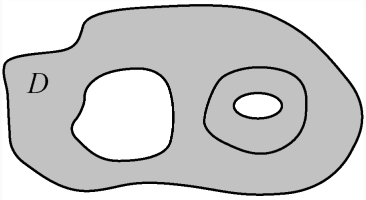
设D为平面区域，若区域D内任意一个封闭曲线所围的部分均属于区域D，则区域D称为单连通区域，否则就称D为复连通区域。

单连通区域及其正向边界

定义

设D为平面区域，若区域D内任意一个封闭曲线所围的部分均属于区域D，则区域D称为单连通区域，否则就称D为复连通区域。

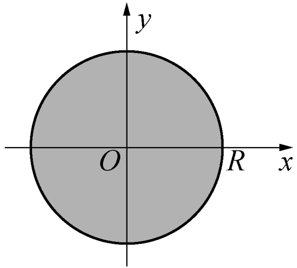


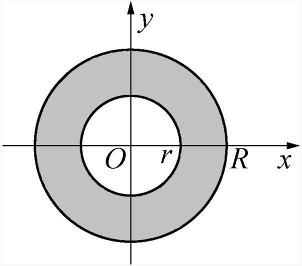


通俗地讲，单连通区域是没有“洞”的区域。

单连通区域及其正向边界

- $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leq R^2\}$是单连通区域；
- $D=\{(x,y)\mid r^2\leq x^2+y^2\leq R^2,\ \ 0<r<R\}$是复连通区域。



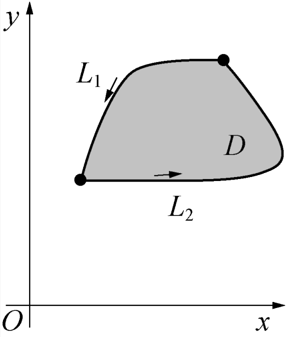


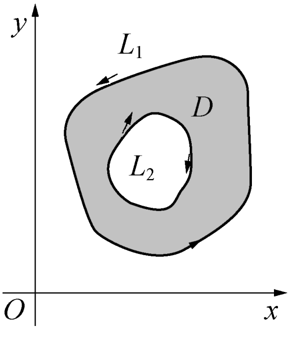
定义

设D为平面区域，$L = L_1 + L_2$是它的边界曲线。我们规定L关于D的正向为：当观察者沿L的这一方向行走时， D内在他邻近处的部分总在他的左侧。

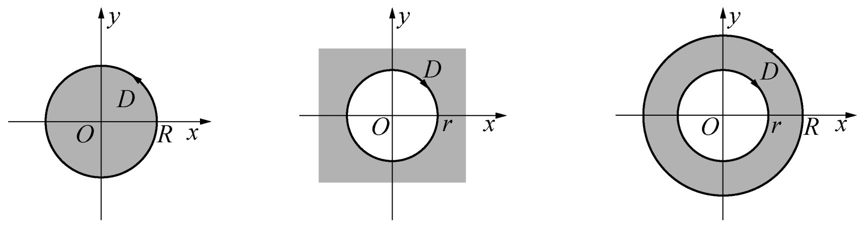
定义

设D为平面区域，$L=L_1+L_2$是它的边界曲线。我们规定L关于D的正向为：当观察者沿L的这一方向行走时， D内在他邻近处的部分总在他的左侧。



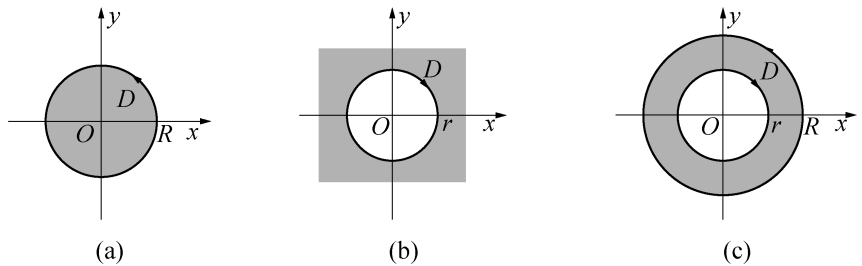


单连通区域及其正向边界



(a) (b) (c)

单连通区域及其正向边界



(a) 对于区域$D = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq R^2\}$，逆时针方向圆周$x^2 + y^2 = R^2$是它的正向边界；

(b) 对于区域$D = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \geq r^2\}$，顺时针方向圆周$x^2 + y^2 = r^2$是它的正向边界；

(c) 对于区域$D = \{(x,y) \mid r^2 \leq x^2 + y^2 \leq R^2, \quad 0 < r < R\}$，逆时针方向圆周$x^2 + y^2 = R^2$和顺时针方向圆周$x^2 + y^2 = r^2$共同组成了它的正向边界。

定理 (格林公式)

设有界闭区域D由分段光滑的曲线L围成，函数$P(x,y),Q(x,y)$在D上具有一阶连续偏导数，那么

$$\iint\limits_{D}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=\oint\limits_{L}Pdx+Qdy.$$

其中L是D的正向边界曲线。

定理 (格林公式)

设有界闭区域D由分段光滑的曲线L围成，函数$P(x,y),Q(x,y)$在D上具有一阶连续偏导数，那么

$$\iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=\oint\limits_L Pdx+Qdy.$$

其中L是D的正向边界曲线。

格林公式告诉我们：平面闭区域D上的二重积分可以通过沿闭区域D的边界曲线L的曲线积分来表达。

我们先考虑闭区域D**既是**X**型区域又是**Y**型区域**。

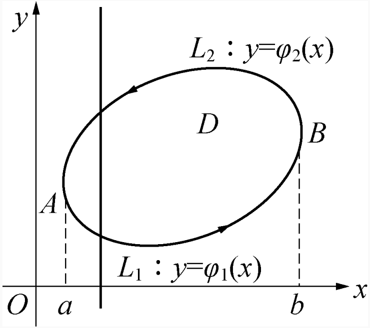
格林公式

我们先考虑闭区域D**既是**X**型区域又是**Y**型区域**。此时穿过区域D内部且平行于坐标轴的直线与D的边界曲线的交点至多为两个。

我们先考虑闭区域D**既是**X**型区域又是**Y**型区域**。此时穿过区域D内部且平行于坐标轴的直线与D的边界曲线的交点至多为两个。

由于区域D是X型的，所以

$$D = \{(x, y) \mid \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x), \quad a \le x \le b\},$$



一方面，由于$\dfrac{\partial P}{\partial y}$在$D$上连续，则

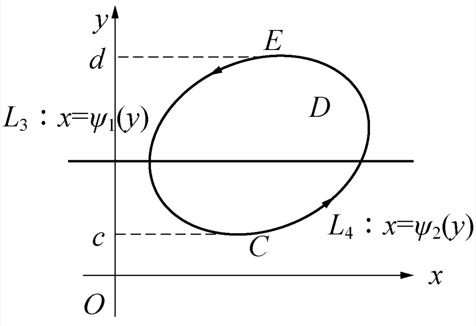
$$\iint\limits_D \frac{\partial P}{\partial y}dxdy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y}dy = \int_a^b [P(x,\varphi_2(x)) - P(x,\varphi_1(x))]dx.$$

另一方面

$$\begin{aligned}
\oint\limits_L P(x,y)dx &= \int\limits_{L_1} P(x,y)dx + \int\limits_{L_2} P(x,y)dx \\
&= \int_a^b P(x,\varphi_1(x))dx + \int_b^a P(x,\varphi_2(x))dx \\
&= -\int_a^b [P(x,\varphi_2(x)) - P(x,\varphi_1(x))]dx.
\end{aligned}$$

又因为区域D是Y型的，所以

$$D = \{(x, y) \mid \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y),\quad c \leq y \leq d\},$$



同样地，由于$\dfrac{\partial Q}{\partial x}$在$D$上连续，则

$$\iint\limits_{D} \frac{\partial Q}{\partial y} dxdy = \int_{c}^{d} dy \int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} \frac{\partial Q}{\partial x} dx = \int_{c}^{d} [Q(\psi_2(y), y) - Q(\psi_1(y), y)] dy.$$

同时

$$\begin{aligned}
\oint\limits_{L} Q(x, y) dy &= \int\limits_{L_4} Q(x, y) dy + \int\limits_{L_3} Q(x, y) dy \\
&= \int_{c}^{d} Q(\psi_2(y), y) dy + \int_{d}^{c} Q(\psi_1(y), y) dy \\
&= \int_{c}^{d} [Q(\psi_2(y), y) - Q(\psi_1(y), y)] dy.
\end{aligned}$$

因此

$$\iint\limits_D \frac{\partial P}{\partial y}dxdy = -\oint\limits_L P(x,y)dx, \quad \iint\limits_D \frac{\partial Q}{\partial x}dxdy = \oint\limits_L Q(x,y)dy.$$

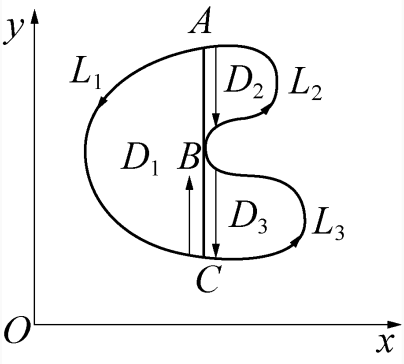
因此

$$\iint\limits_D \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = -\oint\limits_L P(x,y)dx, \quad \iint\limits_D \frac{\partial Q}{\partial x} dxdy = \oint\limits_L Q(x,y)dy.$$

由于区域D既可表示成X型，也可表示成Y型，上述两个等式同时成立，两式相加即得到

$$\iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = \oint\limits_L Pdx + Qdy.$$

如果穿过区域D内部且平行于坐标轴的直线与D的边界曲线的交点**超过两个**，我们可引进辅助曲线，将D分成有限个部分区域，使得每个部分区域都是X型或是Y型，如图所示：



用直线$\overline{ABC}$将区域D分成D_1, D_2, D_3， L_i分别是D_i的边界与L相重合的部分，$i = 1, 2, 3$，且$L_1 + L_2 + L_3 = L$。

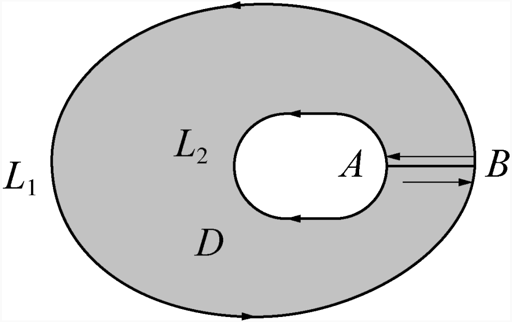
用直线$\overline{ABC}$将区域D分成D_1, D_2, D_3， L_i分别是D_i的边界与L相重合的部分，$i = 1, 2, 3$，且$L_1 + L_2 + L_3 = L$。因此

$$\iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \iint\limits_{D_1} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy + \iint\limits_{D_2} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy + \iint\limits_{D_3} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy$$

$$\xlongequal{\text{单连通区域格林公式}} \oint\limits_{L_1+\overline{CBA}} Pdx + Qdy + \oint\limits_{L_2+\overline{AB}} Pdx + Qdy + \oint\limits_{L_3+\overline{BC}} Pdx + Qdy$$

$$\xlongequal{\text{曲线积分区域可加性}} \oint\limits_{L_1+L_2+L_3} Pdx + Qdy = \oint\limits_L Pdx + Qdy.$$

如果区域D是**复连通区域**，即D由几条闭曲线所围成，我们可以在D内引进一条或几条辅助曲线把D“割开”成单连通区域，如图所示：



此时我们类似可证格林公式$\iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=\oint\limits_L Pdx+Qdy$成立。

在格林公式中取$Q = x, P = -y$，我们得到计算平面区域面积的公式

$$S_D = \iint\limits_D dxdy = \frac{1}{2}\oint\limits_L xdy - ydx.$$

在格林公式中取$Q=x, P=-y$，我们得到计算平面区域面积的公式

$$S_D=\iint\limits_D dxdy=\frac{1}{2}\oint\limits_L xdy-ydx.$$

例 1

求星形线$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}\ (a>0)$所围区域的面积。

在格林公式中取$Q=x, P=-y$，我们得到计算平面区域面积的公式

$$S_D=\iint\limits_D dxdy=\frac{1}{2}\oint\limits_L xdy-ydx.$$

例 1

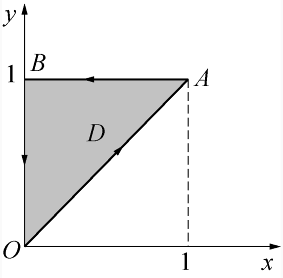
求星形线$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}\ (a>0)$所围区域的面积。

例 2

证明：曲线积分$\oint_L 2ydx+3xdy$的值即为封闭曲线L所围区域D的面积。

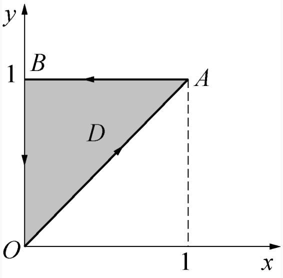
例 3

计算$\iint_D e^{-y^2}dxdy$，其中D是以$O(0,0), A(1,1), B(0,1)$为顶点的三角形区域。



例 3

计算$\displaystyle\iint_D e^{-y^2}dxdy$，其中$D$是以$O(0,0), A(1,1), B(0,1)$为顶点的三角形区域。



例 4

计算$\displaystyle\iint_D xydxdy$，其中$D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 1\}$。

例 5

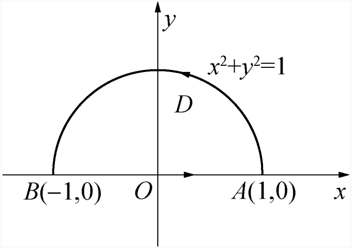
计算$\oint_L xy^2dy - x^2ydx$，其中L为圆周$x^2 + y^2 = R^2$依逆时针方向。

例 5

计算$\oint_L xy^2dy - x^2ydx$，其中L为圆周$x^2+y^2=R^2$依逆时针方向。

例 6

计算$I=\int_{\widehat{AB}}(e^x\sin 2y - y)dx + (2e^x\cos 2y - 100)dy$，其中$\widehat{AB}$ 为单位圆$x^2+y^2=1$上从点$A(1,0)$到点$B(-1,0)$的上半圆周。

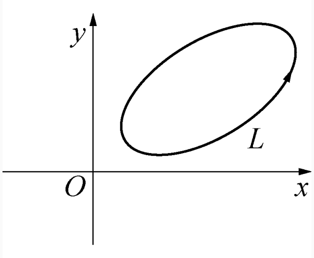


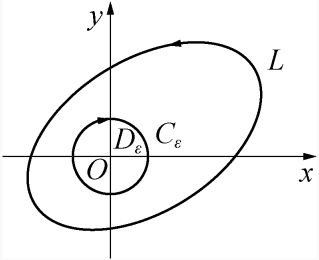
例 7

计算曲线积分$I=\oint_L \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$，其中$L$分别如下：

(1) $x^2+y^2=a^2$的正向边界闭曲线；

(2) 任意不经过原点的正向的简单闭曲线。

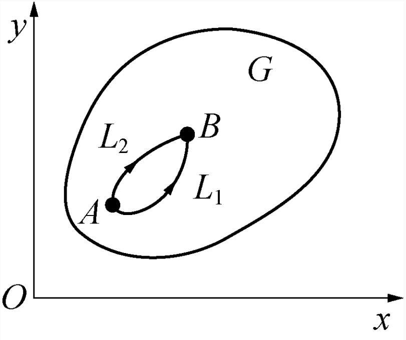




平面上曲线积分与路径无关的等价条件

在研究平面力场的问题时，我们需要了解场力所做的功是否与路径无关。以下我们考察曲线积分是否与路径无关问题。

在研究平面力场的问题时，我们需要了解场力所做的功是否与路径无关。以下我们考察曲线积分是否与路径无关问题。



定义

设函数$P(x,y),Q(x,y)$在区域G内具有一阶连续偏导数。

- 如果对于G内以点A为起始点、以点B为终点的任意两条曲线L_1,L_2，下列等式成立：
$$\int_{L_1} Pdx+Qdy=\int_{L_2} Pdx+Qdy,$$
则称曲线积分$\int_L Pdx+Qdy$在G内与路径无关，否则称与路径有关。
- 如果曲线积分$\int_L Pdx+Qdy$在G内与路径无关，且L的起点为$A(x_1,y_1)$，终点为$B(x_2,y_2)$，那么该曲线积分便可以记为$\int_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} Pdx+Qdy$。

注

- 如果积分$\int_L Pdx + Qdy$与路径无关，那么$\int_{L_1} Pdx + Qdy = \int_{L_2} Pdx + Qdy$，于是

$$\int_{L_1} Pdx + Qdy = -\int_{-L_2} Pdx + Qdy \Rightarrow \int_{L_1} Pdx + Qdy + \int_{-L_2} Pdx + Qdy = 0$$
$$\Rightarrow \oint_{L_1+(-L_2)} Pdx + Qdy = 0,$$

  这里$L_1 + (-L_2)$为有向闭曲线。由点A, B及L_1, L_2的任意性，我们得到对G内的任一有向封闭曲线，沿该闭曲线的曲线积分为零。

- 反之，如果对G内的任一封闭曲线有$\oint_L Pdx + Qdy = 0$，那么也可以推得曲线积分在G内与路径无关。

定理

设区域G为单连通区域，函数$P(x,y),Q(x,y)$在区域G内具有一阶连续偏导数。那么下列三个论断等价：

(1) 曲线积分$\displaystyle\int_L Pdx+Qdy$与路径无关，仅与起始点及终点有关；

(2) 存在函数$u=u(x,y)$，使得$du=Pdx+Qdy$，即$Pdx+Qdy$是某个函数的全微分；

(3) $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$在$G$内恒成立。

$(1) \Rightarrow (2)$.

$(1) \Rightarrow (2)$. 设点$M_0(x_0, y_0), M(x, y) \in G$。由于在$G$内曲线积分$\int_L Pdx + Qdy$与路径无关，那么从起点$M_0(x_0, y_0)$到终点$M(x, y)$的曲线积分可以写成

$$\int_L Pdx + Qdy = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P(x, y)dx + Q(x, y)dy.$$

$(1) \Rightarrow (2)$. 设点$M_0(x_0, y_0), M(x, y) \in G$。由于在$G$内曲线积分$\int_L Pdx + Qdy$与路径无关，那么从起点$M_0(x_0, y_0)$到终点$M(x, y)$的曲线积分可以写成

$$\int_L Pdx + Qdy = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P(x, y)dx + Q(x, y)dy.$$

固定起点$M_0(x_0, y_0)$，该积分只与终点$M(x, y)$有关，即它是x, y的函数，我们记其为

$$u(x, y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P(x, y)dx + Q(x, y)dy.$$

$(1) \Rightarrow (2)$. 设点$M_0(x_0, y_0), M(x, y) \in G$。由于在$G$内曲线积分$\int_L Pdx + Qdy$与路径无关，那么从起点$M_0(x_0, y_0)$到终点$M(x, y)$的曲线积分可以写成

$$\int_L Pdx + Qdy = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P(x, y)dx + Q(x, y)dy.$$

固定起点$M_0(x_0, y_0)$，该积分只与终点$M(x, y)$有关，即它是x, y的函数，我们记其为

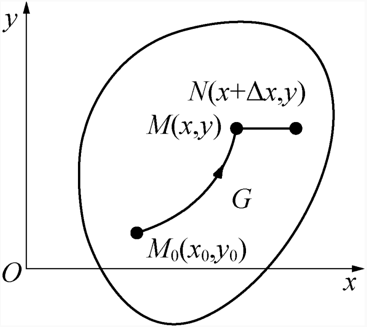
$$u(x, y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P(x, y)dx + Q(x, y)dy.$$

相应地，如果$(x + \Delta x, y) \in G$，那么

$$u(x + \Delta x, y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x+\Delta x,y)} P(x, y)dx + Q(x, y)dy.$$

平面上曲线积分与路径无关的等价条件

由于曲线积分与路径无关，我们可取从点M_0到M，然后沿平行于x轴的直线段从M到$N(x+\Delta x, y)$：



于是

$$u(x+\Delta x, y) = u(x, y) + \int_{(x,y)}^{(x+\Delta x, y)} P(x, y)dx + Q(x, y)dy.$$

直线段MN的方程为$y=$常数，我们使用对坐标的曲线积分的计算法可得到

$$\begin{aligned}
u(x+\Delta x, y) =& u(x,y) + \int_{(x,y)}^{(x+\Delta x, y)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy \\
=& u(x,y) + \int_{x}^{x+\Delta x} P(x,y)dx \\
=& u(x,y) + P(\xi, y)\Delta x, \quad \xi \in (x, x+\Delta x).
\end{aligned}$$

直线段MN的方程为$y=$常数，我们使用对坐标的曲线积分的计算法可得到

$$
\begin{aligned}
u(x+\Delta x,y)=&u(x,y)+\int_{(x,y)}^{(x+\Delta x,y)}P(x,y)dx+Q(x,y)dy\\
=&u(x,y)+\int_{x}^{x+\Delta x}P(x,y)dx\\
=&u(x,y)+P(\xi,y)\Delta x,\quad \xi\in(x,x+\Delta x).
\end{aligned}
$$

因此

$$
\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x,y)-u(x,y)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}P(\xi,y)=P(x,y).
$$

同理可证

$$
\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)=Q(x,y).
$$

$(2) \Rightarrow (3).$

$(2) \Rightarrow (3)$. 如果存在函数$u = u(x, y)$，使得$du = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$，那么

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P(x, y), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = Q(x, y).$$

$(2) \Rightarrow (3)$. 如果存在函数$u = u(x, y)$，使得$du = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$，那么

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P(x, y), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = Q(x, y).$$

而偏导函数

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial P}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

在G内连续，那么

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x},$$

即在G内恒有

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}.$$

$(3) \Rightarrow (1)$.

$(3) \Rightarrow (1)$. 取L为G内的任一封闭曲线。由于G是单连通区域，所以L所围区域$D \subset G$。因此在闭区域D上，函数$P(x,y), Q(x,y)$具有一阶连续偏导数，且

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$$

恒成立。

$(3) \Rightarrow (1)$. 取L为G内的任一封闭曲线。由于G是单连通区域，所以L所围区域$D \subset G$。因此在闭区域D上，函数$P(x, y), Q(x, y)$具有一阶连续偏导数，且

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$$

恒成立。

借助格林公式，我们得到

$$\oint_L P dx + Q dy = \pm \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = 0.$$

于是论断(1)成立。

若$P(x,y)dx+Q(x,y)$是某个函数$u(x,y)$的全微分，则任意固定一个起点(x_0,y_0)，我们可以通过

$$u(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}P(x,y)dx+Q(x,y)dy.$$

得到原函数$u(x,y)$。

若$P(x,y)dx+Q(x,y)$是某个函数$u(x,y)$的全微分，则任意固定一个起点(x_0,y_0)，我们可以通过

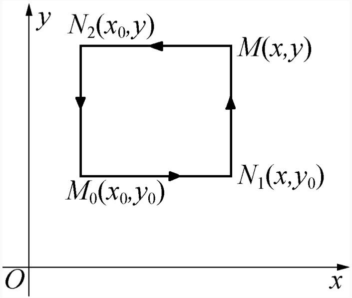
$$u(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P(x,y)dx+Q(x,y)dy.$$

得到原函数$u(x,y)$。

由于此曲线积分与路径无关，因此可选择平行于坐标轴的直线段所连接的折线为积分路径（当然这些折线全属于G）。

如图所示，如果我们沿折线M_0N_1M计算，其中$N_1(x, y_0)$，那么在线段M_0N_1上， $y = y_0, x : x_0 \to x$，因此

$$\int_{\overline{M_0N_1}} Pdx + Qdy = \int_{x_0}^{x} P(x, y_0)dx.$$



而在线段N_1M上， $x = x, y : y_0 \to y$，因此

$$\int_{\overline{N_1M}} Pdx + Qdy = \int_{y_0}^{y} Q(x, y)dy.$$

两者结合得到

$$u(x, y) = \int_{x_0}^{x} P(x, y_0)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x, y)dy.$$

而在线段N_1M上， $x = x, y : y_0 \to y$，因此

$$\int_{\overline{N_1M}} Pdx + Qdy = \int_{y_0}^{y} Q(x, y)dy.$$

两者结合得到

$$u(x, y) = \int_{x_0}^{x} P(x, y_0)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x, y)dy.$$

同理我们也可选择折线M_0N_2M计算，其中$N_2(x_0, y)$ 一样得到

$$u(x, y) = \int_{x_0}^{x} P(x, y_0)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x, y)dy.$$

而在线段N_1M上， $x=x, y: y_0\to y$，因此

$$\int_{\overline{N_1M}} Pdx+Qdy=\int_{y_0}^{y} Q(x,y)dy.$$

两者结合得到

$$u(x,y)=\int_{x_0}^{x} P(x,y_0)dx+\int_{y_0}^{y} Q(x,y)dy.$$

同理我们也可选择折线M_0N_2M计算，其中$N_2(x_0,y)$ 一样得到

$$u(x,y)=\int_{x_0}^{x} P(x,y_0)dx+\int_{y_0}^{y} Q(x,y)dy.$$

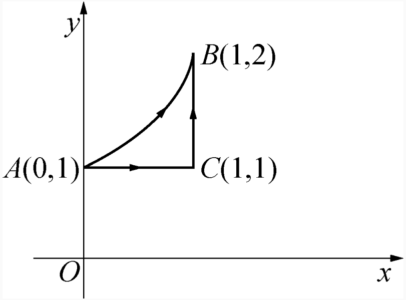
如果$u(x,y)$是所求的原函数，那么$u(x,y)+C$也是所求的原函数，这表明$u(x,y)$不唯一。

例 8

计算曲线积分

$$I = \int_L (6xy^2 - y^3)dx + (6x^2y - 3xy^2)dy,$$

其中$L = \overset{\frown}{AB}$为沿曲线$y = x^2 + 1$从点$A(0,1)$到点$B(1,2)$的一段弧。



高斯公式

高斯公式

格林公式表达出平面区域上的二重积分与其边界曲线上的曲线积分之间的关系，而高斯公式表达出空间区域上的三重积分与其边界曲面上的曲面积分之间的关系。

格林公式表达出平面区域上的二重积分与其边界曲线上的曲线积分之间的关系，而高斯公式表达出空间区域上的三重积分与其边界曲面上的曲面积分之间的关系。

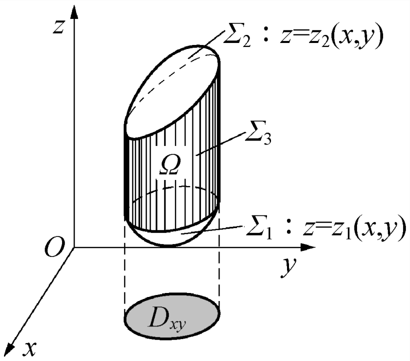
定理 (高斯公式)

设空间闭区域Ω由分段光滑的曲面Σ围成，函数$P(x,y,z),Q(x,y,z)$在Σ上具有一阶连续偏导数，那么

$$\begin{aligned}\iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dV &= \oiint\limits_{\Sigma} Pdydz+Qdzdx+Rdxdy \\ &= \oiint\limits_{\Sigma}(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)dS,\end{aligned}$$

其中Σ取外侧， $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$为$\Sigma$上点$(x,y,z)$处法向量$\mathbf{n}$的方向余弦。

- $\Sigma_1: z = z_1(x,y), (x,y) \in D_{xy}$，取下侧；
- $\Sigma_2: z = z_2(x,y), (x,y) \in D_{xy}$，取上侧；
- Σ_3 :以D_{xy}的边界曲线为准线而母线平行于z轴的柱面的一部分，取外侧。



一方面，由三重积分计算法，

$$\iiint\limits_{\Omega} \frac{\partial R}{\partial z} dV = \iint_{D_{xy}} dxdy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z} dz$$

$$= \iint_{D_{xy}} [R(x, y, z_2(x, y)) - R(x, y, z_1(x, y))] dxdy,$$

一方面，由三重积分计算法，

$$\iiint\limits_{\Omega} \frac{\partial R}{\partial z} dV = \iint_{D_{xy}} dxdy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z} dz$$

$$= \iint_{D_{xy}} [R(x, y, z_2(x, y)) - R(x, y, z_1(x, y))] dxdy,$$

另一方面，由第二类曲面积分公式，

$$\oiint\limits_{\Sigma} R dxdy = \left(\iint\limits_{\Sigma_1} + \iint\limits_{\Sigma_2} + \iint\limits_{\Sigma_3} \right) R dxdy$$

$$= -\iint_{D_{xy}} R(x, y, z_1(x, y)) dxdy + \iint_{D_{xy}} R(x, y, z_2(x, y)) dxdy + 0$$

$$= \iint_{D_{xy}} [R(x, y, z_2(x, y)) - R(x, y, z_1(x, y))] dxdy.$$

综上

$$\iiint\limits_{\Omega} \frac{\partial R}{\partial z} dV = \oiint\limits_{\Sigma} R dx dy.$$

同理我们可得到

$$\iiint\limits_{\Omega} \frac{\partial Q}{\partial y} dV = \oiint\limits_{\Sigma} Q dz dx, \quad \iiint\limits_{\Omega} \frac{\partial P}{\partial x} dV = \oiint\limits_{\Sigma} P dy dz,$$

即

$$\iiint\limits_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dV = \oiint\limits_{\Sigma} P dy dz + Q dz dx + R dx dy.$$

综上

$$\iiint\limits_{\Omega} \frac{\partial R}{\partial z} dV = \oiint\limits_{\Sigma} R dx dy.$$

同理我们可得到

$$\iiint\limits_{\Omega} \frac{\partial Q}{\partial y} dV = \oiint\limits_{\Sigma} Q dz dx, \quad \iiint\limits_{\Omega} \frac{\partial P}{\partial x} dV = \oiint\limits_{\Sigma} P dy dz,$$

即

$$\iiint\limits_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dV = \oiint\limits_{\Sigma} P dy dz + Q dz dx + R dx dy.$$

在上述过程中，穿过Ω内部且平行于坐标轴的直线与Ω的边界曲面Σ的交点恰好是两点。如果Ω不满足这样的条件，那么我们可引进若干个辅助曲面，将Ω分成有限个区域，使得每个区域满足“交点恰好是两点”这样的条件。

综上

$$\iiint\limits_{\Omega} \frac{\partial R}{\partial z} dV = \oiint\limits_{\Sigma} R dx dy.$$

同理我们可得到

$$\iiint\limits_{\Omega} \frac{\partial Q}{\partial y} dV = \oiint\limits_{\Sigma} Q dz dx, \quad \iiint\limits_{\Omega} \frac{\partial P}{\partial x} dV = \oiint\limits_{\Sigma} P dy dz,$$

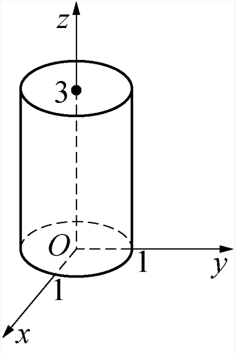
即

$$\iiint\limits_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dV = \oiint\limits_{\Sigma} P dy dz + Q dz dx + R dx dy.$$

在上述过程中，穿过Ω内部且平行于坐标轴的直线与Ω的边界曲面Σ的交点恰好是两点。如果Ω不满足这样的条件，那么我们可引进若干个辅助曲面，将Ω分成有限个区域，使得每个区域满足“交点恰好是两点”这样的条件。注意到沿辅助曲面相反两侧的两个曲面积分的绝对值相等而符号相反，相加时其和为零，那么我们不难证明此时高斯公式仍然正确。

例 1

计算曲面积分 $\oiint\limits_{\Sigma}(x-y)dxdy+(y-z)xdydz$，其中$\Sigma$为柱面$x^2+y^2=1$及平面$z=0,z=3$所围成的空间闭区域$\Omega$的整个边界曲面的外侧。



例 2

计算曲面积分 $I=\oiint_{\Sigma}(x-yz)dydz+(y-xz)dzdx+(z-xy)dxdy,$，其中$\Sigma$是由三个坐标面及平行于坐标面的平面$x=a,y=a,z=a(a>0)$所围成的正方体的外表面。

例 2

计算曲面积分 $I=\oiint_{\Sigma}(x-yz)dydz+(y-xz)dzdx+(z-xy)dxdy,$，其中$\Sigma$是由三个坐标面及平行于坐标面的平面$x=a,y=a,z=a(a>0)$所围成的正方体的外表面。

例 3

计算曲面积分 $\iint_{\Sigma}(x^2-2xy)dydz+(y^2-2yz)dzdx+(1-2xy)dxdy$，其中$\Sigma: z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$，取上侧。

例 2

计算曲面积分 $I = \oiint_{\Sigma} (x-yz)dydz + (y-xz)dzdx + (z-xy)dxdy,$，其中$\Sigma$是由三个坐标面及平行于坐标面的平面$x=a, y=a, z=a(a>0)$所围成的正方体的外表面。

例 3

计算曲面积分 $\iint_{\Sigma} (x^2-2xy)dydz + (y^2-2yz)dzdx + (1-2xy)dxdy$，其中$\Sigma: z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$，取上侧。

例 4

计算曲面积分 $\iint_{\Sigma} (x^2\cos\alpha + y^2\cos\beta + z^2\cos\gamma)dS$，其中$\Sigma: z=\sqrt{x^2+y^2}$取下侧， $0\le z\le h$， $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$为$\Sigma$上点$(x,y,z)$处法向量$\mathbf{n}$的方向余弦。

定义

给定一向量场$\mathbf{A}(x,y,z)=P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k}$，其中函数$P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)$具有一阶连续偏导数。

- $\left.\dfrac{\partial P}{\partial x}+\dfrac{\partial Q}{\partial y}+\dfrac{\partial R}{\partial z}\right|_{(x_0,y_0,z_0)}$称为向量场$\mathbf{A}$在点$(x_0,y_0,z_0)$处的散度，记作$\mathrm{div}\mathbf{A}(x_0,y_0,z_0)$； $\mathrm{div}\mathbf{A}=\dfrac{\partial P}{\partial x}+\dfrac{\partial Q}{\partial y}+\dfrac{\partial R}{\partial z}$就表示$\mathbf{A}$在场中任一点$(x,y,z)$处的散度；
- 第二类曲面积分$\displaystyle\iint_{\Sigma}Pdydz+Qdzdx+Rdxdy$称为向量场$\mathbf{A}$向$\Sigma$那一侧穿过曲面$S$的通量；

高斯公式的应用：通量与散度

如果我们设$\mathbf{n}$表示Σ一侧的单位法向量， A_n表示向量场$\mathbf{A}$在曲面Σ的外法线上的投影，那么$\iint_\Sigma \mathbf{A}\cdot\mathbf{n}dS=\iint_\Sigma A_n dS$称为**通量的向量形式**。

如果我们设$\mathbf{n}$表示Σ一侧的单位法向量， A_n表示向量场$\mathbf{A}$在曲面Σ的外法线上的投影，那么$\iint_{\Sigma} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS = \iint_{\Sigma} A_n dS$称为**通量的向量形式**。

对于向量场$\mathbf{A}$，如果我们将这里的Σ看作是高斯公式中区域Ω的边界（闭）曲面，且按高斯公式， Σ取外侧，那么

$$\iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dV = \oiint_{\Sigma} P dydz + Q dzdx + R dxdy = \oiint_{\Sigma} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS,$$

而右端表示在单位时间内离开区域Ω的流量。

高斯公式的应用：通量与散度

如果我们设n表示Σ一侧的单位法向量， A_n表示向量场A在曲面Σ的外法线上的投影，那么$\iint_{\Sigma}\mathbf{A}\cdot\mathbf{n}dS=\iint_{\Sigma}A_n dS$称为**通量的向量形式**。

对于向量场A，如果我们将这里的Σ看作是高斯公式中区域Ω的边界（闭）曲面，且按高斯公式， Σ取外侧，那么

$$\iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dV=\oiint\limits_{\Sigma}Pdydz+Qdzdx+Rdxdy=\oiint_{\Sigma}\mathbf{A}\cdot\mathbf{n}dS,$$

而右端表示在单位时间内离开区域Ω的流量。我们假设流体是稳定流动且不可压缩的，因此在流体离开区域Ω的同时，在Ω内部就应该有流体的“源头”产生出同样多的流体来补充，所以高斯公式的左端可解释为分布在Ω内的源头在单位时间内所产生的流量。

高斯公式的应用：通量与散度

记$\mathbf{A}=(P,Q,R)$，$\nabla=\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)$，那么

$$\mathrm{div}\mathbf{A}=\nabla\cdot\mathrm{A}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}.$$

高斯公式的应用：通量与散度

记$\mathbf{A} = (P, Q, R)$， $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$，那么

$$\mathrm{div}\mathbf{A} = \nabla \cdot \mathrm{A} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$$

此时高斯公式可以表示为

$$\iiint\limits_{\Omega} \mathrm{div}\mathbf{A} dV = \oiint_{\Sigma} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS = \oiint_{\Sigma} A_n dS.$$

记$\mathbf{A}=(P,Q,R)$， $\nabla=\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)$，那么

$$\mathrm{div}\,\mathbf{A}=\nabla\cdot\mathrm{A}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}.$$

此时高斯公式可以表示为

$$\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{div}\,\mathbf{A}dV=\oiint_{\Sigma}\mathbf{A}\cdot\mathbf{n}dS=\oiint_{\Sigma}A_n dS.$$

例 5

求向量场$\mathrm{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$的通量，其中的曲面分别为：

(1) 穿过圆锥$x^2+y^2\leq z^2\,(0\leq z\leq h)$的底（向上）；

(2) 穿过圆锥$x^2+y^2\leq z^2\,(0\leq z\leq h)$的侧表面（向外）；

斯托克斯公式

格林公式给出了平面区域上的二重积分与其边界闭曲线上的曲线积分之间的关系；高斯公式（类似地）表达了空间区域上的三重积分与其边界闭曲面上的曲面积分之间的关系。

格林公式给出了平面区域上的二重积分与其边界闭曲线上的曲线积分之间的关系；高斯公式（类似地）表达了空间区域上的三重积分与其边界闭曲面上的曲面积分之间的关系。而斯托克斯公式是格林公式的推广：平面区域推广到空间曲面（块）上，平面上的边界闭曲线相应地推广到空间闭曲线，即斯托克斯公式给出了空间曲面上的曲面积分与沿着边界曲线所得到的空间闭曲线上的曲线积分之间的关系。

课前导读

格林公式给出了平面区域上的二重积分与其边界闭曲线上的曲线积分之间的关系；高斯公式（类似地）表达了空间区域上的三重积分与其边界闭曲面上的曲面积分之间的关系。而斯托克斯公式是格林公式的推广：平面区域推广到空间曲面（块）上，平面上的边界闭曲线相应地推广到空间闭曲线，即斯托克斯公式给出了空间曲面上的曲面积分与沿着边界曲线所得到的空间闭曲线上的曲线积分之间的关系。

由于闭曲线有方向问题，而曲面又有侧的问题，因此在讨论斯托克斯公式以前，我们先对曲面Σ及其边界曲线Γ的方向作如下规定：Γ的正向与Σ的侧符合右手规则，即四指方向指向Γ的方向，相应地拇指的方向代表曲面的法线方向。一旦确定法线方向，则对应也可以确定曲面的侧。

定理 (斯托克斯公式)

设Γ由分段光滑的空间有向闭曲线，Σ是以Γ为边界的分片光滑的有向曲面，Γ的正向与Σ的侧符合右手规则。函数$P(x,y,z),Q(x,y,z)$在包含Σ在内的一个空间闭区域Ω上具有一阶连续偏导数，那么

$$\iint_{\Sigma}\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)dydz+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)dzdx+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$$

$$=\oint_{\Gamma}Pdydz+Qdzdx+Rdxdy.$$

斯托克斯公式也可以表示成如下形式：

$$\iint_{\Sigma}\begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \iint_{\Sigma}\begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} dS$$

$$= \oint_{\Gamma} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy.$$

其中$\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$为$\Sigma$上点$(x, y, z)$处法向量$\mathbf{n}$的方向余弦。

斯托克斯公式也可以表示成如下形式：

$$\iint_{\Sigma}\begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \iint_{\Sigma}\begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} dS$$

$$= \oint_{\Gamma} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy.$$

其中$\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$为$\Sigma$上点$(x, y, z)$处法向量$\mathbf{n}$的方向余弦。

我们可以将曲面Σ上的曲面积分化为其在坐标面上投影区域D上的二重积分，将空间曲线Γ上的曲线积分化为其在坐标面上投影曲线C上的曲线积分（C也是D的边界曲线），此时我们可以使用格林公式建立二重积分与平面曲线积分的联系来验证斯托克斯公式。

例 1

计算曲线积分 $\oint_{\Gamma} zdx + xdy + ydz,$，其中$\Gamma : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1, \\ x + y + z = 0. \end{cases}$，从$z$轴的正向朝下看去， Γ取逆时针方向。

引例

例 1

计算曲线积分 $\oint_\Gamma zdx + xdy + ydz,$，其中$\Gamma : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1, \\ x + y + z = 0. \end{cases}$，从$z$轴的正向朝下看去，$\Gamma$取逆时针方向。

例 2

计算 $I = \oint_L (z-y)dx + (x-z)dy + (x-y)dz$，其中$L : \begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ x - y + z = 2. \end{cases}$，从$z$轴的正向朝下看去，$L$取顺时针方向。

定义

设有向量场$\mathbf{A}(x,y,z)=P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k}$，其中函数$P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)$具有一阶连续偏导数。

- 向量
$$\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i}+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{j}+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k}$$
称为向量场$\mathbf{A}$的**旋度**，记作 $\mathbf{rot}\,\mathbf{A}$；
- 如果Γ是$\mathbf{A}$定义域内的一条分段光滑的有向闭曲线，τ是Γ在点(x,y,z)处的单位切向量，那么
$$\oint_\Gamma Pdx+Qdy+Rdz=\oint_\Gamma \mathbf{A}_\tau ds$$
称为向量场$\mathbf{A}$沿有向闭曲线Γ的**环流量**。

例 3

计算向量场 $\mathbf{A} = x^2\vec{i} - 2xy\vec{j} + z^2\vec{k}$在点$M_0(1,1,2)$处的处的散度及旋度。

引例

例 3

计算向量场 $\mathbf{A} = x^2\vec{i} - 2xy\vec{j} + z^2\vec{k}$在点$M_0(1,1,2)$处的处的散度及旋度。

例 4

计算向量场 $\mathbf{A} = (-y, z, c)$ 沿圆周 $\begin{cases} x^2 + y^2 = R^2, \\ z = 0. \end{cases}$ 的环流量，其中c为常数。

The End