

习题 1 请计算下列定积分, 其中 $n, m \in \mathbb{N}$:

$$(1) \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx dx; \quad (2) \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \sin mx dx; \quad (3) \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx dx.$$

习题 2** 请计算下列定积分, 其中 $n, m \in \mathbb{N}$:

$$(1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2m-1)x}{\sin x} dx; \quad (2) (\text{L.Fejér}) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin nx}{\sin x} \right)^2 dx.$$

习题 3* 请计算下列极限:

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n^4 \int_n^{n+1} \frac{x dx}{x^5 + 1} \right); \quad (2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n^3 \int_n^{2n} \frac{x dx}{x^5 + 1} \right).$$

习题 4 请计算下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x^3} \int_0^{x^2} \sin \sqrt{t} dt \right); \quad (2) \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x^2} \int_0^x t^{1+t} dt \right); \quad (3) \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} \int_0^x (1 + \sin t)^{\frac{1}{t}} dt \right).$$

习题 5* 设周期函数 $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 连续且具有周期 $T > 0$, 证明对任意实数 $a < b$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(nx) dx = \frac{b-a}{T} \int_0^T f(x) dx.$$

并使用该结论计算下列极限, 其中 f 是 $[-1, 1]$ 上的连续函数:

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \int_0^n f(\sin x) dx; \quad (2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \int_0^n f(|\sin x|) dx; \quad (3) \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 x f(\sin(2\pi nx)) dx.$$

习题 6 设函数 f 在 $[0, \infty)$ 上连续且 $a_n = \int_0^1 f(n+x) dx$, $n = 0, 1, \dots$, 如果 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, 请计算极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f(nx) dx$.

习题 7* 设 $n \in \mathbb{N}$, 请你使用积分 $\int_0^1 (1-x^2)^n dx$ 计算

$$\frac{1}{1} \binom{n}{0} - \frac{1}{3} \binom{n}{1} + \frac{1}{5} \binom{n}{2} - \dots + (-1)^n \frac{1}{2n+1} \binom{n}{n}.$$

习题 8 设函数 f 在 \mathbb{R} 上连续, 计算 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_a^b (f(x+h) - f(x)) dx$.

习题 9 设函数 f 在 \mathbb{R} 上连续且 $a < b$, 定义 $g(x) = \int_a^b f(x+t) dt$, 请计算 g 的导函数.

姓名:

学号:

专业:

高等数学 定积分的计算
