极限与连续

集合与函数

集合：具有某种确定性质对象的全体称为集合，其对象被称为集合的元素。

集合：具有某种确定性质对象的全体称为集合，其对象被称为集合的元素。我们习惯使用大写字母$A, B, C, \cdots$表示集合，用小写字母$a, b, c, \cdots$表示元素；

集合：具有某种确定性质对象的全体称为集合，其对象被称为集合的元素。我们习惯使用大写字母$A, B, C, \cdots$表示集合，用小写字母$a, b, c, \cdots$表示元素；

a是A的元素记为$a \in A$，a不是A的元素记为$a \notin A$；

课前导读

集合：具有某种确定性质对象的全体称为集合，其对象被称为集合的元素。我们习惯使用大写字母$A, B, C, \cdots$表示集合，用小写字母$a, b, c, \cdots$表示元素；

a是A的元素记为$a \in A$，a不是A的元素记为$a \notin A$；

集合按元素个数可以分为有限集和无限集，不含任何元素的集合称为空集，记作$\varnothing$。

课前导读

集合：具有某种确定性质对象的全体称为集合，其对象被称为集合的元素。我们习惯使用大写字母$A, B, C, \cdots$表示集合，用小写字母$a, b, c, \cdots$表示元素；

a是A的元素记为$a \in A$，a不是A的元素记为$a \notin A$；

集合按元素个数可以分为有限集和无限集，不含任何元素的集合称为空集，记作$\varnothing$。

初等数学的研究对象基本上是不变的量，而高等数学的研究对象则是变动的量。所谓函数关系就是变量之间的依赖关系，极限方法是研究变量的一种基本方法。本章将介绍映射、函数、极限和函数的连续性等基本概念以及它们的一些性质。

集合：具有某种确定性质对象的全体称为集合，其对象被称为集合的元素。我们习惯使用大写字母$A, B, C, \cdots$表示集合，用小写字母$a, b, c, \cdots$表示元素；

a是A的元素记为$a \in A$，a不是A的元素记为$a \notin A$；

集合按元素个数可以分为有限集和无限集，不含任何元素的集合称为空集，记作$\varnothing$。

初等数学的研究对象基本上是不变的量，而高等数学的研究对象则是变动的量。所谓函数关系就是变量之间的依赖关系，极限方法是研究变量的一种基本方法。本章将介绍映射、函数、极限和函数的连续性等基本概念以及它们的一些性质。

映射是现代数学中的一个基本概念，而函数是微积分的研究对象，也是映射的一种。

集合：具有某种确定性质对象的全体称为集合，其对象被称为集合的元素。我们习惯使用大写字母$A, B, C, \cdots$表示集合，用小写字母$a, b, c, \cdots$表示元素；

a是A的元素记为$a \in A$，a不是A的元素记为$a \notin A$；

集合按元素个数可以分为有限集和无限集，不含任何元素的集合称为空集，记作$\varnothing$。

初等数学的研究对象基本上是不变的量，而高等数学的研究对象则是变动的量。所谓函数关系就是变量之间的依赖关系，极限方法是研究变量的一种基本方法。本章将介绍映射、函数、极限和函数的连续性等基本概念以及它们的一些性质。

映射是现代数学中的一个基本概念，而函数是微积分的研究对象，也是映射的一种。

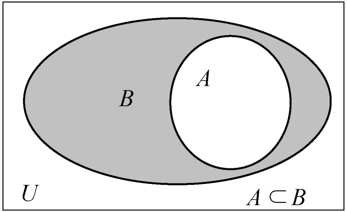
本节主要介绍映射、函数及有关概念、函数的性质与运算等。

定义

设A, B是两个集合。称集合A是集合B的子集，记作$A \subset B$，如果A中每个元素都是B中元素。我们可以读作A**包含于**B。

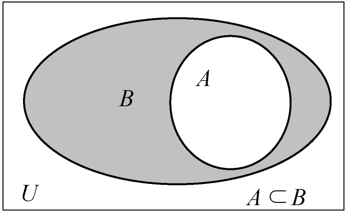
定义

设A, B是两个集合。称集合A是集合B的子集，记作$A \subset B$，如果A中每个元素都是B中元素。我们可以读作A**包含于**B。



定义

设A, B是两个集合。称集合A是集合B的子集，记作$A \subset B$，如果A中每个元素都是B中元素。我们可以读作A包含于B。

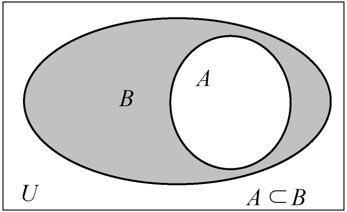


一般地，我们会使用如下数集之间的关系：

$$\underbrace{\mathbb{N}}_{\text{自然数集}} \subset \underbrace{\mathbb{Z}}_{\text{整数集}} \subset \underbrace{\mathbb{Q}}_{\text{有理数集}} \subset \underbrace{\mathbb{R}}_{\text{实数集}} \subset \underbrace{\mathbb{C}}_{\text{复数集}},$$

定义

设A, B是两个集合。称集合A是集合B的子集，记作$A \subset B$，如果A中每个元素都是B中元素。我们可以读作A包含于B。



一般地，我们会使用如下数集之间的关系：

$$\underbrace{\mathbb{N}}_{\text{自然数集}} \subset \underbrace{\mathbb{Z}}_{\text{整数集}} \subset \underbrace{\mathbb{Q}}_{\text{有理数集}} \subset \underbrace{\mathbb{R}}_{\text{实数集}} \subset \underbrace{\mathbb{C}}_{\text{复数集}}, \quad \mathbb{Z}^+ : \text{正整数集}; \quad \mathbb{Z}^- : \text{负整数集}.$$

定义

- 设集合A, B，同时包含于A与B的元素构成的集合称为A与B的**交集**，记作
$$A \cap B := \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \in B\}.$$
- 设集合A, B，由包含于A或包含于B的所有元素构成的集合称为A与B的**并集**，记作
$$A \cup B := \{x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B\}.$$

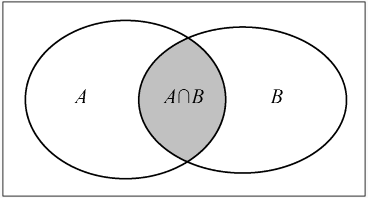
定义

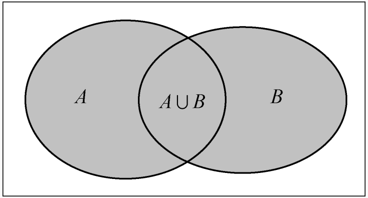
- 设集合A, B，同时包含于A与B的元素构成的集合称为A与B的**交集**，记作

$$A \cap B := \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \in B\}.$$

- 设集合A, B，由包含于A或包含于B的所有元素构成的集合称为A与B的**并集**，记作

$$A \cup B := \{x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B\}.$$





定义

- 设集合A, B，包含于A但不包含于B的元素构成的集合称为A与B的**差集**，记作

$$A\backslash B := \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \notin B\}.$$

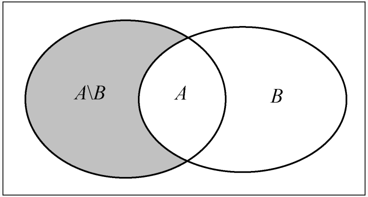
- 若我们所讨论的问题在某个集合(称为全集，记为U)中进行，集合A是U的子集，那么称$U\backslash A$为A的**补集**，记作$C_U A$或A^c。

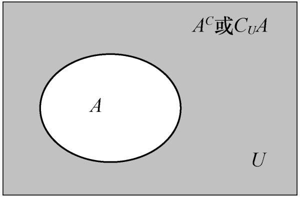
定义

- 设集合A, B，包含于A但不包含于B的元素构成的集合称为A与B的**差集**，记作

$$A\backslash B := \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \notin B\}.$$

- 若我们所讨论的问题在某个集合(称为全集，记为U)中进行，集合A是U的子集，那么称$U\backslash A$为A的**补集**，记作$C_U A$或A^c。





上述定义中使用图像进行集合间关系的表示称作**韦恩图**。

上述定义中使用图像进行集合间关系的表示称作**韦恩图**。

性质（对偶性质）

设U为一个全集，A, B是它的两个子集，那么

(1) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$;

(2) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$;

上述定义中使用图像进行集合间关系的表示称作韦恩图。

性质（对偶性质）

设U为一个全集，A, B是它的两个子集，那么

(1) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$;

(2) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$;

定义

设A, B是两个非空的集合，则

$$A \times B := \{(x, y) \mid x \in A,\ y \in B\}$$

称为A与B的直积。一般地，$\mathbb{R} \times \mathbb{R}$即为$xOy$面上全体点的集合，常记作$\mathbb{R}^2$。

区间

定义

设$a < b$为两个实数。$\mathbb{R}$中数集$\{x \mid a < x < b\}$、$\{x \mid a \leq x \leq b\}$**分别称为开区间、闭区间**，分别记作$(a, b)$和$[a, b]$；

区间

定义

设$a < b$为两个实数。$\mathbb{R}$中数集$\{x \mid a < x < b\}$、$\{x \mid a \leq x \leq b\}$分别称为**开区间**、**闭区间**，分别记作$(a, b)$和$[a, b]$；数集$\{x \mid a \leq x < b\}$、$\{x \mid a < x \leq b\}$分别称为**半开区间**，分别记作$[a, b)$和$(a, b]$；

区间

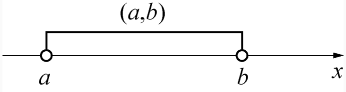
定义

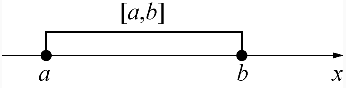
设$a < b$为两个实数。$\mathbb{R}$中数集$\{x \mid a < x < b\}$、$\{x \mid a \le x \le b\}$分别称为**开区间**、**闭区间**，分别记作(a, b)和$[a, b]$；数集$\{x \mid a \le x < b\}$、$\{x \mid a < x \le b\}$分别称为**半开区间**，分别记作$[a, b)$和$(a, b]$；当我们使用$[a, b]$表示一个有限区间时，记$b - a$为该区间长度。

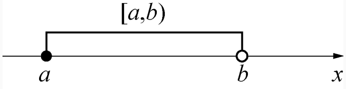
区间

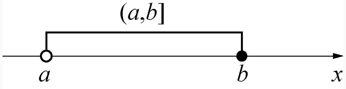
定义

设$a < b$为两个实数。$\mathbb{R}$中数集$\{x \mid a < x < b\}$、$\{x \mid a \le x \le b\}$分别称为开区间、闭区间，分别记作(a, b)和$[a, b]$；数集$\{x \mid a \le x < b\}$、$\{x \mid a < x \le b\}$分别称为半开区间，分别记作$[a, b)$和$(a, b]$；当我们使用$[a, b]$表示一个有限区间时，记$b - a$为该区间长度。









定义

对于集合$\{x \mid x \geq a\}, \{x \mid x > a\}, \{x \mid x \leq b\}, \{x \mid x < b\}$，在$\mathbb{R}$中引入正无穷$+\infty$及负无穷$-\infty$，上述集合可以用有限区间记号进行表示：

$$[a, +\infty) := \{x \mid x \geq a\},\ (a, +\infty) := \{x \mid x > a\},$$
$$(-\infty, b] := \{x \mid x \leq b\},\ (-\infty, b) := \{x \mid x < b\}.$$

区间

定义

对于集合$\{x \mid x \geq a\}, \{x \mid x > a\}, \{x \mid x \leq b\}, \{x \mid x < b\}$，在$\mathbb{R}$中引入正无穷$+\infty$及负无穷$-\infty$，上述集合可以用有限区间记号进行表示：

$$[a, +\infty) := \{x \mid x \geq a\}, \ (a, +\infty) := \{x \mid x > a\},$$
$$(-\infty, b] := \{x \mid x \leq b\}, \ (-\infty, b) := \{x \mid x < b\}.$$

未来不区分有限区间还是无限区间，我们统一使用I来简单表示区间。

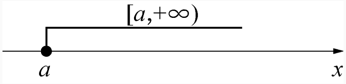
区间

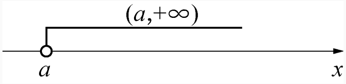
定义

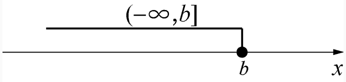
对于集合$\{x \mid x \geq a\}, \{x \mid x > a\}, \{x \mid x \leq b\}, \{x \mid x < b\}$，在$\mathbb{R}$中引入正无穷$+\infty$及负无穷$-\infty$，上述集合可以用有限区间记号进行表示：

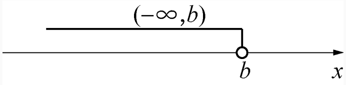
$$[a, +\infty) := \{x \mid x \geq a\},\ (a, +\infty) := \{x \mid x > a\},$$
$$(-\infty, b] := \{x \mid x \leq b\},\ (-\infty, b) := \{x \mid x < b\}.$$

未来不区分有限区间还是无限区间，我们统一使用I来简单表示区间。









邻域

定义

设$a, \delta \in \mathbb{R}$，$\delta > 0$，集合 $U(a, \delta) := \{x \mid |x - a| < \delta\}$ 称作以a**为中心**，δ**为半径的邻域**；当去掉中心a后，称集合$\mathring{U}(a, \delta) := \{x \mid |x - a| < \delta\}$为点$a$**的去心**$\delta$**邻域**；开区间$(a - \delta, a)$，$(a, a + \delta)$分别称为点$a$的**左邻域**，**右邻域**。

邻域

定义

设$a,\delta\in\mathbb{R}$，$\delta>0$，集合 $U(a,\delta):=\{x\mid |x-a|<\delta\}$ **称作以a为中心，δ为半径的邻域**；当去掉中心a后，称集合$\mathring{U}(a,\delta):=\{x\mid |x-a|<\delta\}$为点$a$**的去心$\delta$邻域**；开区间$(a-\delta,a)$，$(a,a+\delta)$分别称为点$a$**的左邻域，右邻域**。

在数轴上，$|x-a|$表示点x与点a的距离，那么邻域$U(a,\delta)$ 在数轴上就表示与点a的距离小于δ的点x全体，即

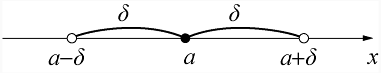
$$U(a,\delta):=\{x\mid a-\delta<x<a+\delta\}.$$

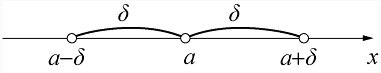
定义

设$a,\delta\in\mathbb{R}$，$\delta>0$，集合 $U(a,\delta):=\{x\mid |x-a|<\delta\}$ **称作以a为中心，δ为半径的邻域**；当去掉中心a后，称集合$\mathring{U}(a,\delta):=\{x\mid |x-a|<\delta\}$**为点$a$的去心$\delta$邻域**；开区间$(a-\delta,a)$，$(a,a+\delta)$**分别称为点$a$的左邻域，右邻域。**

在数轴上，$|x-a|$表示点x与点a的距离，那么邻域$U(a,\delta)$ 在数轴上就表示与点a的距离小于δ的点x全体，即

$$U(a,\delta):=\{x\mid a-\delta<x<a+\delta\}.$$





定义 (集合之间的映射)

设X, Y是两个非空集合。如果存在一个法则f，使得对X中每个元素x，按法则f在Y中有唯一确定的元素y与之对应，那么我们称f为从X到Y的映射，记作

$$f : X \to Y,$$

其中

- y称为元素x(在映射f下)的**像**，记作$y = f(x)$；元素x称为元素y(在映射f下)的**一个原像**；
- 集合X称为映射f的**定义域**，记作D_f, 即$D_f = X$；
- X中所有元素的像所组成的集合称为映射f的**值域**，记作R_f或$f(X)$，即

$$R_f = f(X) = \{f(x) \mid x \in X\}.$$

注

根据上述映射的定义，我们需要注意:

注

根据上述映射的定义，我们需要注意：

- 构成一个映射必须具备以下三个要素：定义域$D_f = X$；值域的范围：$R_f \subset Y$；对应法则f：使得对每个$x \in X$，有唯一确定的$y = f(x)$与之对应。

注

根据上述映射的定义，我们需要注意：

- 构成一个映射必须具备以下三个要素：定义域$D_f = X$；值域的范围：$R_f \subset Y$；对应法则f：使得对每个$x \in X$，有唯一确定的$y = f(x)$与之对应。
- 对每个$x \in X$，元素x的像y是唯一的；而对每个$y \in R_f$，元素y的原像不一定是唯一的。

映射的概念

注

根据上述映射的定义，我们需要注意：

- 构成一个映射必须具备以下三个要素：定义域$D_f = X$；值域的范围：$R_f \subset Y$；对应法则f：使得对每个$x \in X$，有唯一确定的$y = f(x)$与之对应。
- 对每个$x \in X$，元素x的像y是唯一的；而对每个$y \in R_f$，元素y的原像不一定是唯一的。
- 映射f的值域R_f是Y的一个子集，即$R_f \subset Y$， $R_f = Y$不一定成立。

注

根据上述映射的定义，我们需要注意：

- 构成一个映射必须具备以下三个要素：定义域$D_f = X$；值域的范围：$R_f \subset Y$；对应法则f：使得对每个$x \in X$，有唯一确定的$y = f(x)$与之对应。
- 对每个$x \in X$，元素x的像y是唯一的；而对每个$y \in R_f$，元素y的原像不一定是唯一的。
- 映射f的值域R_f是Y的一个子集，即$R_f \subset Y$， $R_f = Y$不一定成立。

定义

设f是从集合X到集合Y的映射。

- 若$R_f = Y$，即Y中任一元素y都是X中某元素的像，则称f为**满射**；
- 若对任意$x_1, x_2 \in X$，$x_1 \neq x_2$，它们的像$f(x_1) \neq f(x_2)$，则称f为**单射**；
- 若映射f既是单射又是满射，则称f为**一一对应映射(或双射)**。

逆映射与复合映射

映射有时又称为算子。根据集合X、Y的不同情形，在不同的数学分支中，映射又有不同的惯用名称。

映射有时又称为算子。根据集合X、Y的不同情形，在不同的数学分支中，映射又有不同的惯用名称。

- 从非空集X到数集Y的映射又称为X上的**泛函数**；
- 从非空集X到它自身的映射又称为X上的**变换**；
- 从实数集(或其子集)X到实数集Y的映射通常称为定义在X上的**函数**。

映射有时又称为算子。根据集合X、Y的不同情形，在不同的数学分支中，映射又有不同的惯用名称。

- 从非空集X到数集Y的映射又称为X上的**泛函数**；
- 从非空集X到它自身的映射又称为X上的**变换**；
- 从实数集(或其子集)X到实数集Y的映射通常称为定义在X上的**函数**。

定义 (逆映射)

设f是X到Y的单射，那么对每个$y \in R_f$，有唯一的$x \in X$，适合$f(x) = y$。因此，我们可定义一个从R_f到x的新映射g，即

$$g : R_f \to X.$$

我们规定：对每个$y \in R_f$，设置$g(y) = x$， x满足$f(x) = y$。我们称这个映射g称为f的**逆映射**，记作f^{-1}，其定义域$D_{f^{-1}} = R_f$，值域$R_{f^{-1}} = X$。

定义 (复合映射)

设有两个映射 $g: X \to Y_1, \quad f: Y_2 \to Z$，其中$Y_1 \subset Y_2$，那么由映射$g$和$f$可以定出一个从$X$到$Z$的对应法则，它将每个$x \in X$映成$f[g(x)] \in Z$。显然这个对应法则确定了一个从$X$到$Z$的映射，我们称这个映射为映射$g$和$f$构成的复合映射，记作

$$f \circ g: X \to Z, \quad (f \circ g)(x) = f[g(x)], \quad x \in X.$$

定义 (复合映射)

设有两个映射 $g: X \to Y_1$, $f: Y_2 \to Z$，其中$Y_1 \subset Y_2$，那么由映射g和f可以定出一个从X到Z的对应法则，它将每个$x \in X$映成$f[g(x)] \in Z$。显然这个对应法则确定了一个从X到Z的映射，我们称这个映射为映射g和f构成的复合映射，记作

$$f \circ g : X \to Z, \quad (f \circ g)(x) = f[g(x)], \quad x \in X.$$

注

- 由复合映射的定义可知，映射g和f构成复合映射的条件是：g的值域R_g必须包含在f的定义域内，即$R_g \subset D_f$。
- 映射g和f的复合是有顺序的，$f \circ g$有意义并不表示$g \circ f$也有意义；
- 即使$f \circ g$与$g \circ f$都有意义，复合映射$f \circ g$与$g \circ f$也未必相同。

定义 ((实变量)函数)

设数集$D \subset \mathbb{R}$，我们称映射$f : D \to \mathbb{R}$为定义在D上的函数，通常简记为

$$y = f(x), x \in D,$$

其中

- x称为自变量，y称为因变量，D称为定义域，记作D_f，即$D_f = D$；
- 对每个$x \in D$，按对应法则f，总有唯一确定的值y与之对应，这个值称为函数f在x处的函数值，记作$f(x)$，即$y = f(x)$；
- 函数值$f(x)$的全体所构成的集合称为函数f的值域，记作R_f或$f(D)$，即

$$R_f = f(D) = \{y \mid y = f(x), x \in D\}.$$

- 因变量y与自变量x之间的这种依赖关系，通常称为函数关系。

注

- 需要指出的是，记号f和$f(x)$的含义是有区别的：f表示自变量x和因变量y之间的对就法则，而$f(x)$表示自变x对应的函数值。通常我们用记号“$f(x), x \in D$”或“$y = f(x), x \in D$”来表示定义在D上的函数。
- 除了常用的f外，我们可以任意选取其他的英文字母或希腊之母来表示函数，例如“g”“F”“φ”等，对应函数可记作$y = g(x)$，$y = F(x)$，$y = \varphi(x)$等；
- 有时还直接用因变量的记号来表示函数，即把函数记作$y = y(x)$。但在同一个问题中区别几个不同的函数时，我们需用不同的记号来表示它们。
- 函数是从实数集到实数集的映射，其值域总在$\mathbb{R}$内，因此构成函数的要素是：定义域D_f及对应法则f。
- 如果两个函数的定义域相同，对应法则也相同，那么这两个函数就是相同的，否则就是不同的。

函数的概念

函数的定义域通常按以下两种情形来确定：

函数的定义域通常按以下两种情形来确定：

- 一种是对有实际背景的函数，根据实际背景中变量的实际意义确定。

函数的定义域通常按以下两种情形来确定：

- 一种是对有实际背景的函数，根据实际背景中变量的实际意义确定。
  例如在自由落体运动中，设物体下落的时间为t，下落的距离为s，初始下落时刻$t=0$，落地的时刻$t=T$，则s与t之间的函数关系是
  $$s=\frac{1}{2}gt^2, t\in[0,T].$$
  这个函数的定义域就是区间$[0,T]$；

函数的定义域通常按以下两种情形来确定:

- 一种是对有实际背景的函数，根据实际背景中变量的实际意义确定。
  例如在自由落体运动中，设物体下落的时间为t，下落的距离为s，初始下落时刻$t=0$，落地的时刻$t=T$，则s与t之间的函数关系是
  $$s=\frac{1}{2}gt^2, t\in[0,T].$$
  这个函数的定义域就是区间$[0,T]$;
- 另一种是抽象地用算式表达的函数，通常约定这种函数的定义域是使得算式有意义的一切实数组成的集合，这种定义域称为函数的自然定义域。在这种约定之下，一般的用算式表达的函数可用“$y=f(x)$”表达，而不必再表出D_f。

函数的概念

函数的定义域通常按以下两种情形来确定：

- 一种是对有实际背景的函数，根据实际背景中变量的实际意义确定。
  例如在自由落体运动中，设物体下落的时间为t，下落的距离为s，初始下落时刻$t=0$，落地的时刻$t=T$，则s与t之间的函数关系是

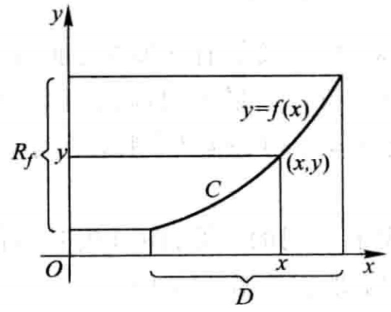
$$s=\frac{1}{2}gt^2, t\in[0,T].$$

  这个函数的定义域就是区间$[0,T]$；
- 另一种是抽象地用算式表达的函数，通常约定这种函数的定义域是使得算式有意义的一切实数组成的集合，这种定义域称为函数的自然定义域。在这种约定之下，一般的用算式表达的函数可用“$y=f(x)$”表达，而不必再表出D_f。
  - 函数$y=\sqrt{1-x^2}$的定义域是闭区间$[-1,1]$；
  - 函数$y=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$的定义域是开区间$(-1,1)$。

表示函数的主要方法有三种：表格法、图形法、解析法(公式法)。用图形法表示函数是基于函数图形的概念，即坐标平面上的点集

$$\{P(x,y) \mid y=f(x), x\in D\}$$

称为函数$y=f(x), x\in D$的图形，下图中的R_f表示函数$y=f(x)$的值域。



定义 (函数的有界性)

设函数$f(x)$的定义域为D，数集$X \subset D$。

- 如果存在数K_1，使得$f(x) \leq K_1$ 对任一$x \in X$都成立，那么称函数$f(x)$在X上有上界，而K_1称为函数$f(x)$在X上的一个上界。
- 如果存在数K_2，使得$f(x) \geq K_2$ 对任一$x \in X$都成立，那么称函数$f(x)$在X上有下界，而K_2称为函数$f(x)$在X上的一个下界。
- 如果存在正数M，使得
$$|f(x)| \leq M$$
对任一$x \in X$都成立，那么称函数$f(x)$在X上有界；如果这样的M不存在，就称函数$f(x)$在X上无界：即对于任何正数M，总存在$x^* \in X$，使得
$$|f(x^*)| > M.$$

定义 (函数的单调性)

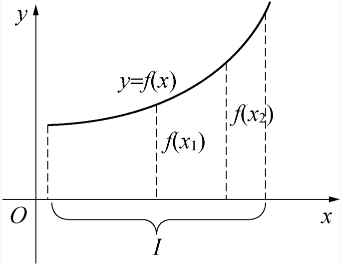
设函数$f(x)$的定义域为D，区间$I \subset D$。如果对任意$x_1, x_2 \in I$，

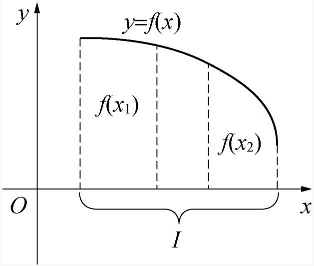
- 当$x_1 \leq x_2$时恒有$f(x_1) \leq f(x_2)$，那么称函数$f(x)$在区间I上**单调递增**；
- 当$x_1 \leq x_2$时恒有$f(x_1) \geq f(x_2)$，那么称函数$f(x)$在区间I上**单调递减**；
- 单调递增或单调递减的函数统称**单调函数**。

定义 (函数的单调性)

设函数$f(x)$的定义域为D，区间$I \subset D$。如果对任意$x_1, x_2 \in I$，

- 当$x_1 \leq x_2$时恒有$f(x_1) \leq f(x_2)$，那么称函数$f(x)$在区间I上**单调递增**；
- 当$x_1 \leq x_2$时恒有$f(x_1) \geq f(x_2)$，那么称函数$f(x)$在区间I上**单调递减**；
- 单调递增或单调递减的函数统称**单调函数**。





定义 (函数的奇偶性)

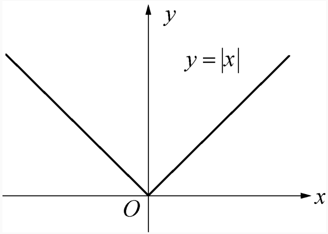
设函数$f(x)$的定义域D关于原点对称。

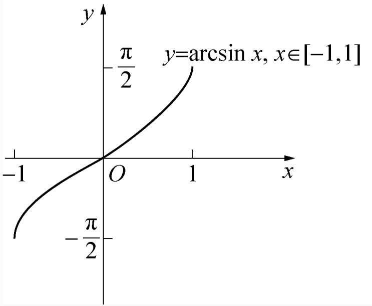
- 如果对任意$x \in D$有$f(-x) = f(x)$恒成立，那么$f(x)$为**偶函数**；
- 如果对任意$x \in D$有$f(-x) = -f(x)$恒成立，那么$f(x)$为**奇函数**。

定义 (函数的奇偶性)

设函数$f(x)$的定义域D关于原点对称。

- 如果对任意$x \in D$有$f(-x) = f(x)$恒成立，那么$f(x)$为**偶函数**；
- 如果对任意$x \in D$有$f(-x) = -f(x)$恒成立，那么$f(x)$为**奇函数**。



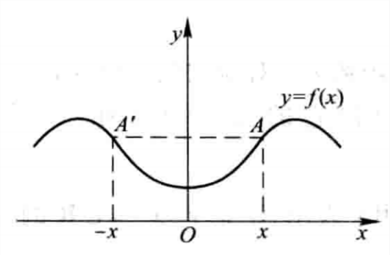


注

偶函数的图形关于y轴是对称的：若$f(x)$是偶函数，则$f(-x)=f(x)$，所以如果$A(x,f(x))$是图形上的点，那么它关于y轴对称的点$A'(-x,f(x))$也在图形上。

注

偶函数的图形关于y轴是对称的：若$f(x)$是偶函数，则$f(-x)=f(x)$，所以如果$A(x,f(x))$是图形上的点，那么它关于y轴对称的点$A'(-x,f(x))$也在图形上。

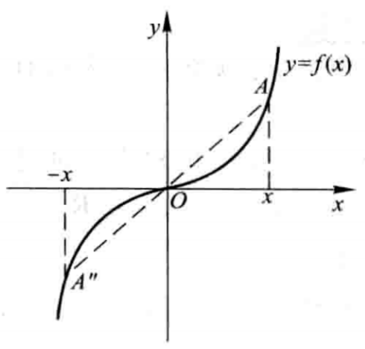


注

奇函数的图形关于原点是对称的：若$f(x)$是奇函数，则$f(-x)=-f(x)$，所以如果$A(x,f(x))$是图形上的点，那么它关于原点对称的点$A''(-x,-f(x))$也在图形上。

注

奇函数的图形关于原点是对称的：若$f(x)$是奇函数，则$f(-x) = -f(x)$，所以如果$A(x, f(x))$是图形上的点，那么它关于原点对称的点$A''(-x, -f(x))$也在图形上。



定义 (函数的周期性)

设函数$f(x)$的定义域为D。如果存在$T > 0$，使得对任意$x \in D$，有$(x \pm T) \in D$，且

$$f(x+T) = f(x)$$

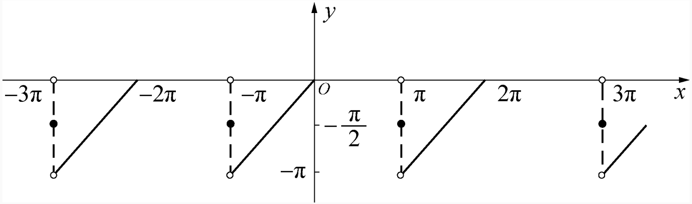
恒成立，那么称$f(x)$为**周期函数**， T称为$f(x)$的**一个周期**，

定义 (函数的周期性)

设函数$f(x)$的定义域为D。如果存在$T>0$，使得对任意$x\in D$，有$(x\pm T)\in D$，且

$$f(x+T)=f(x)$$

恒成立，那么称$f(x)$为**周期函数**，T称为$f(x)$的**一个周期**，

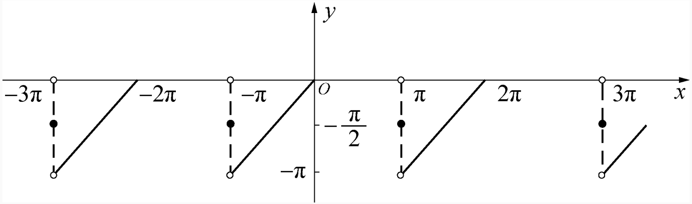


定义 (函数的周期性)

设函数$f(x)$的定义域为D。如果存在$T>0$，使得对任意$x \in D$，有$(x \pm T) \in D$，且

$$f(x+T)=f(x)$$

恒成立，那么称$f(x)$为**周期函数**， T称为$f(x)$的**一个周期**，



我们说周期函数的周期是指其所有周期当中的**最小正周期**；并非每个周期函数都有最小正周期。

定义 (函数的反函数)

设函数$f : D \to f(D)$是单射，那么它存在逆映射

$$f^{-1} : f(D) \to D,$$

我们称此映射f^{-1}为函数f的反函数。

定义 (函数的反函数)

设函数$f: D \to f(D)$是单射，那么它存在逆映射

$$f^{-1}: f(D) \to D,$$

我们称此映射f^{-1}为函数f的反函数。

注

- 按反函数定义，对每个$y \in f(D)$，有唯一的$x \in D$，使得$f(x) = y$，于是$f^{-1}(y) = x$，这说明反函数f^{-1}的对应法完全由函数f对应法则所确定的；
- 一般地，$y = f(x), x \in D$的反函数记成$y = f^{-1}(x), x \in D$；
- 若f是定义在D上的单调函数，则$f: D \to f(D)$是单射，于是f的反函数f^{-1}必定存在，而且容易证明f^{-1}也是$f(D)$上的单调函数。

现在不妨设f在D上单调增加，我们验证f^{-1}在$f(D)$上也是单调增加的。

现在不妨设f在D上单调增加，我们验证f^{-1}在$f(D)$上也是单调增加的。

任取$y_1, y_2 \in f(D)$，且$y_1 < y_2$。

- y_1在D内存在唯一的原像x_1，使得$f(x_1) = y_1$，于是$f^{-1}(y_1) = x_1$；
- y_2在D内存在唯一的原像x_2，使得$f(x_2) = y_2$，于是$f^{-1}(y_2) = x_2$。

现在不妨设f在D上单调增加，我们验证f^{-1}在$f(D)$上也是单调增加的。

任取$y_1, y_2 \in f(D)$，且$y_1 < y_2$。

- y_1在D内存在唯一的原像x_1，使得$f(x_1) = y_1$，于是$f^{-1}(y_1) = x_1$；
- y_2在D内存在唯一的原像x_2，使得$f(x_2) = y_2$，于是$f^{-1}(y_2) = x_2$。

注意到：

(1) 如果$x_1 > x_2$，那么由$f(x)$单调增加，必有$y_1 > y_2$；

(2) 如果$x_1 = x_2$，那么显然有$y_1 = y_2$。

现在不妨设f在D上单调增加，我们验证f^{-1}在$f(D)$上也是单调增加的。

任取$y_1, y_2 \in f(D)$，且$y_1 < y_2$。

- y_1在D内存在唯一的原像x_1，使得$f(x_1) = y_1$，于是$f^{-1}(y_1) = x_1$；
- y_2在D内存在唯一的原像x_2，使得$f(x_2) = y_2$，于是$f^{-1}(y_2) = x_2$。

注意到：

(1) 如果$x_1 > x_2$，那么由$f(x)$单调增加，必有$y_1 > y_2$；

(2) 如果$x_1 = x_2$，那么显然有$y_1 = y_2$。

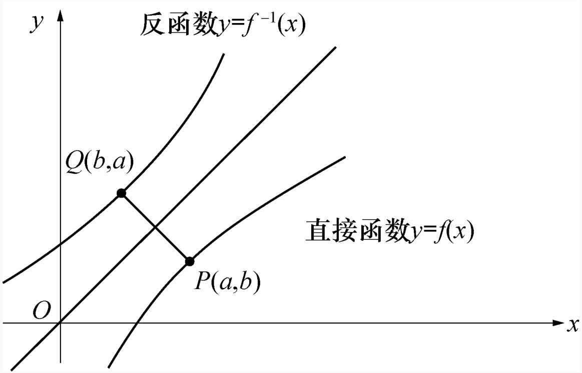
这两种情形都与假设$y_1 < y_2$不符，因此必有$x_1 < x_2$，即$f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$。这就证明了$f^{-1}$在$f(D)$上是单调增加的。

相对于反函数$y = f^{-1}(x)$来说，原来的函数$y = f(x)$称为**直接函数**。

反函数

相对于反函数$y = f^{-1}(x)$来说，原来的函数$y = f(x)$称为**直接函数**。

把直接函数$y = f(x)$和它的反函数$y = f^{-1}(x)$的图形画在同一坐标平面上，这两个图形关于直线$y = x$是对称的。



复合函数

定义 (复合函数)

设函数$y=f(u)$的定义域为D_f，函数$u=g(x)$的定义域为D_g，值域$R_g\subset D_f$，那么由下式确定的函数

$$y=f[g(x)],x\in D_g$$

称为由函数$u=g(x)$与函数$y=f(u)$构成的**复合函数**，它的定义域为D_g，变量u称为**中间变量**。

定义 (复合函数)

设函数$y = f(u)$的定义域为D_f，函数$u = g(x)$的定义域为D_g，值域$R_g \subset D_f$，那么由下式确定的函数

$$y = f[g(x)], x \in D_g$$

称为由函数$u = g(x)$与函数$y = f(u)$构成的**复合函数**，它的定义域为D_g，变量u称为**中间变量**。

注

- 函数g与函数f构成的复合函数，即按“先g后f”的次序复合的函数，通过记为$f \circ g$，即 $(f \circ g)(x) = f[g(x)]$；
- 与复合映射一样，g与f能构成复合函数$f \circ g$的条件是：函数g的值域R_g必须包含于函数f的定义域D_f，即$R_g \subset D_f$。

定义 (函数的点态四则运算)

设函数$f(x), g(x)$的定义域依次为$D_f, D_g, D = D_f \cap D_g \neq \varnothing$，我们可以定义这两个函数的下列点态四则运算：

- 点态加减法：$(f \pm g)(x) := f(x) \pm g(x), \quad x \in D$；
- 点态乘法：$(f \cdot g)(x) := f(x) \cdot g(x), \quad x \in D$；
- 点态除法：$\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) := \dfrac{f(x)}{g(x)}, \quad x \in D \backslash \{x \mid g(x) = 0, x \in D\}$。

定义 (初等函数)

- 我们称以下五类函数为**基本初等函数**：

  (1) 幂函数：$y = x^{\alpha}(\alpha \in \mathbb{R})$；
  (2) 指数函数：$y = a^{x}(a > 0$且$a \neq 1)$；
  (3) 对数函数：$y = \log_a x(a > 0$且$a \neq 1,$特别当$a = e$时，记为$y = \ln x)$；
  (4) 三角函数：如$y = \sin x, y = \cos x, y = \tan x$等；
  (5) 反三角函数：如$y = \arcsin x, y = \arccos x, y = \arctan x$等。

定义 (初等函数)

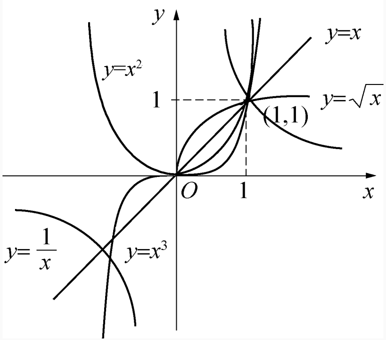
- 我们称以下五类函数为**基本初等函数**：
  (1) 幂函数：$y = x^{\alpha}(\alpha \in \mathbb{R})$；
  (2) 指数函数：$y = a^{x}(a > 0$且$a \neq 1)$；
  (3) 对数函数：$y = \log_a x(a > 0$且$a \neq 1,$特别当$a = e$时，记为$y = \ln x)$；
  (4) 三角函数：如$y = \sin x, y = \cos x, y = \tan x$等；
  (5) 反三角函数：如$y = \arcsin x, y = \arccos x, y = \arctan x$等。
- 由常数和基本初等函数经过有限次的四则运算和函数复合所构成的函数称为**初等函数**。

幂函数： $y = x^{\alpha}\ (\alpha \in \mathbb{R})$。

- $\alpha \in \mathbb{Z}^{+}$时，$y = x^{\alpha}$定义域为$\mathbb{R}$；$\alpha \in \mathbb{Z}^{-}$时，$y = x^{\alpha}$定义域为$\mathbb{R}\backslash\{0\}$。
- $\alpha = \dfrac{1}{2}$时，$y = x^{\alpha}$定义域为$[0, +\infty)$；$\alpha = -\dfrac{1}{2}$时，$y = x^{\alpha}$定义域为$(0, +\infty)$；

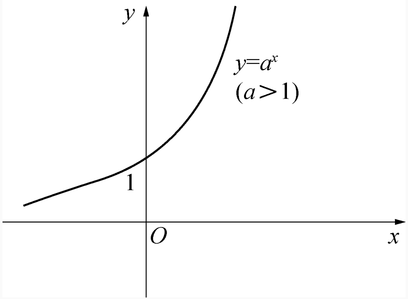
幂函数： $y = x^\alpha\ (\alpha \in \mathbb{R})$。

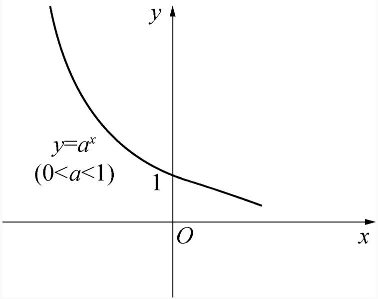
- $\alpha \in \mathbb{Z}^+$时，$y = x^\alpha$定义域为$\mathbb{R}$；$\alpha \in \mathbb{Z}^-$时，$y = x^\alpha$定义域为$\mathbb{R}\backslash\{0\}$。
- $\alpha = \dfrac{1}{2}$时，$y = x^\alpha$定义域为$[0, +\infty)$；$\alpha = -\dfrac{1}{2}$时，$y = x^\alpha$定义域为$(0, +\infty)$；幂函数的最小定义域是$(0, +\infty)$。



指数函数： $y = a^x\ (a > 0,\ a \neq 1)$。

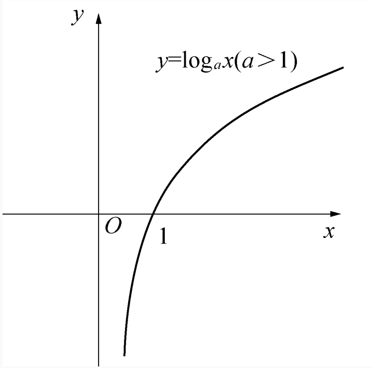
- 对任意x，$a^x > 0$；
- 当$a > 1$时，$y = a^x$单调递增；当$0 < a < 1$时，$y = a^x$单调递减；
- $y = e^x$为以自然底数$e = 2.7182818\cdots$的指数函数。

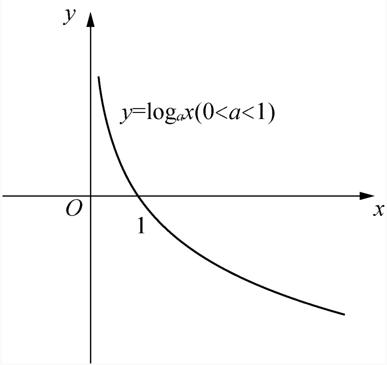




对数函数： $y = \log_a x\,(a > 0,\ a \neq 1)$。

- 对数函数$y = \log_a x\,(a > 0,\ a \neq 1)$的定义域是$(0, +\infty)$；
- 当$a > 1$时，$y = \log_a x$单调递增；当$0 < a < 1$时，$y = \log_a x$单调递减；
- 当$a = e$时，$y = \ln x$**称为自然对数函数**。





性质 (对数函数)

对任意的$x, y \in \mathbb{R}^+, a > 0, a \neq 1, b \in \mathbb{R}$，

(1) $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$；

(2) $\log_a \dfrac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$；

(3) $\log_a x^b = b \log_a x$。

性质 (对数函数)

对任意的$x, y \in \mathbb{R}^+, a > 0, a \neq 1, b \in \mathbb{R}$,

(1) $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$;

(2) $\log_a \dfrac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$;

(3) $\log_a x^b = b \log_a x$。

$y = \log_a x$和$y = a^x$互为反函数，它们的图像关于直线$y = x$对称，且满足

$$e^{\ln x} = x, \quad e^{a \ln x} = e^{\ln x^a} = x^a.$$

三角函数： 正弦函数$y=\sin x$，余弦函数$y=\cos x$，正切函数$y=\tan x$，余切函数$y=\cot x$，正割函数$y=\sec x$和余割函数$y=\csc x$统称为三角函数。

三角函数： 正弦函数$y=\sin x$，余弦函数$y=\cos x$，正切函数$y=\tan x$，余切函数$y=\cot x$，正割函数$y=\sec x$和余割函数$y=\csc x$统称为三角函数。

- $y=\sin x$的定义域是$\mathbb{R}$，值域是$[-1,1]$，最小正周期为2π，它是奇函数；

三角函数： 正弦函数$y=\sin x$，余弦函数$y=\cos x$，正切函数$y=\tan x$，余切函数$y=\cot x$，正割函数$y=\sec x$和余割函数$y=\csc x$统称为三角函数。

- $y=\sin x$的定义域是$\mathbb{R}$，值域是$[-1,1]$，最小正周期为2π，它是奇函数；
- $y=\cos x$的定义域是$\mathbb{R}$，值域是$[-1,1]$，最小正周期为2π，它是偶函数；

三角函数： 正弦函数$y=\sin x$，余弦函数$y=\cos x$，正切函数$y=\tan x$，余切函数$y=\cot x$，正割函数$y=\sec x$和余割函数$y=\csc x$统称为三角函数。

- $y=\sin x$的定义域是$\mathbb{R}$，值域是$[-1,1]$，最小正周期为2π，它是奇函数；
- $y=\cos x$的定义域是$\mathbb{R}$，值域是$[-1,1]$，最小正周期为2π，它是偶函数；
- $y=\tan x$的定义域是$\left\{x \mid x\neq \dfrac{\pi}{2}+k\pi,\ k=0,\pm1,\pm2,\cdots\right\}$，值域是$\mathbb{R}$，最小正周期为$\pi$，它是奇函数；

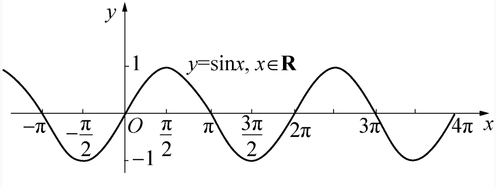
三角函数： 正弦函数$y=\sin x$，余弦函数$y=\cos x$，正切函数$y=\tan x$，余切函数$y=\cot x$，正割函数$y=\sec x$和余割函数$y=\csc x$统称为三角函数。

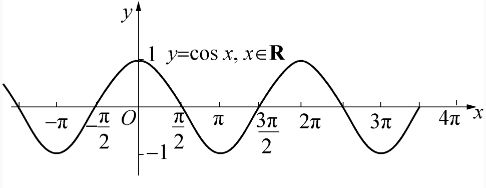
- $y=\sin x$的定义域是$\mathbb{R}$，值域是$[-1,1]$，最小正周期为2π，它是奇函数；
- $y=\cos x$的定义域是$\mathbb{R}$，值域是$[-1,1]$，最小正周期为2π，它是偶函数；
- $y=\tan x$的定义域是$\left\{x \mid x\neq \dfrac{\pi}{2}+k\pi,\ k=0,\pm1,\pm2,\cdots\right\}$，值域是$\mathbb{R}$，最小正周期为$\pi$，它是奇函数；
- $y=\cot x$的定义域是$\{x \mid x\neq k\pi,\ k=0,\pm1,\pm2,\cdots\}$，值域是$\mathbb{R}$，最小正周期为$\pi$，它是奇函数；

三角函数： 正弦函数$y = \sin x$，余弦函数$y = \cos x$，正切函数$y = \tan x$，余切函数$y = \cot x$，正割函数$y = \sec x$和余割函数$y = \csc x$统称为三角函数。

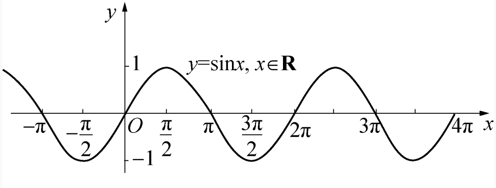
- $y = \sin x$的定义域是$\mathbb{R}$，值域是$[-1, 1]$，最小正周期为2π，它是奇函数；
- $y = \cos x$的定义域是$\mathbb{R}$，值域是$[-1, 1]$，最小正周期为2π，它是偶函数；
- $y = \tan x$的定义域是$\left\{x \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots\right\}$，值域是$\mathbb{R}$，最小正周期为$\pi$，它是奇函数；
- $y = \cot x$的定义域是$\{x \mid x \neq k\pi,\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots\}$，值域是$\mathbb{R}$，最小正周期为$\pi$，它是奇函数；
- 正割、余割函数与余弦、正弦函数的关系式为$\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$，$\csc x = \dfrac{1}{\sin x}$。

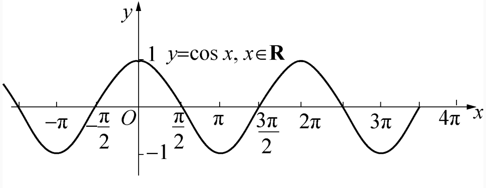
五大基本初等函数

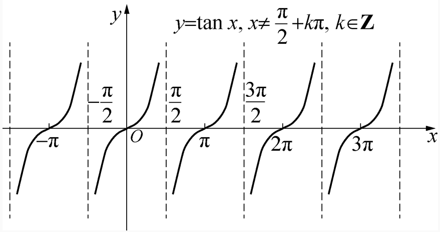

y
1
y=sinx, x∈R
−π
−π/2
O
π/2
π
3π/2
2π
3π
4π
x
−1

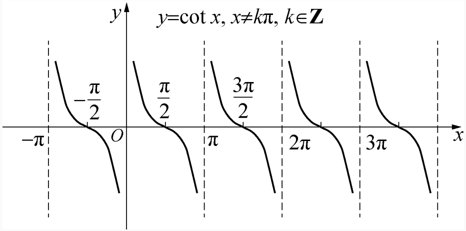

y
1
y=cos x, x∈R
−π
−π/2
O
π/2
π
3π/2
2π
3π
4π
x
−1

五大基本初等函数









反三角函数：三角函数的反函数统称为**反三角函数**：

- 正弦函数在区间$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$上的反函数记作$y = \arcsin x$，其定义域为$[-1, 1]$，值域为$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$，称为**反三角正弦函数**；

反三角函数：三角函数的反函数统称为**反三角函数**：

- 正弦函数在区间$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$上的反函数记作$y = \arcsin x$，其定义域为$[-1, 1]$，值域为$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$，称为**反三角正弦函数**；
- 余弦函数在区间$[0, \pi]$上的反函数记作$y = \arccos x$，其定义域为$[-1, 1]$，值域为$[0, \pi]$，称为**反三角余弦函数**；

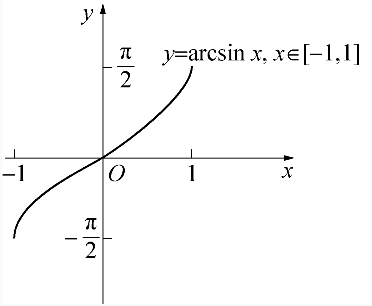
反三角函数：三角函数的反函数统称为**反三角函数**：

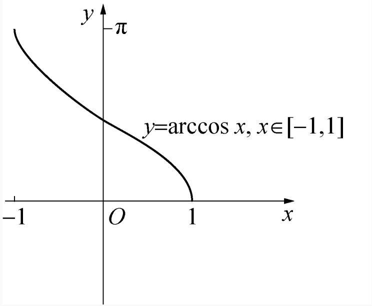
- 正弦函数在区间$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$上的反函数记作$y=\arcsin x$，其定义域为$[-1,1]$，值域为$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$，称为**反三角正弦函数**；
- 余弦函数在区间$[0,\pi]$上的反函数记作$y=\arccos x$，其定义域为$[-1,1]$，值域为$[0,\pi]$，称为**反三角余弦函数**；
- 正切函数在区间$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$上的反函数记作$y=\arctan x$，其定义域为$\mathbb{R}$，值域为$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$，称为**反三角正切函数**；

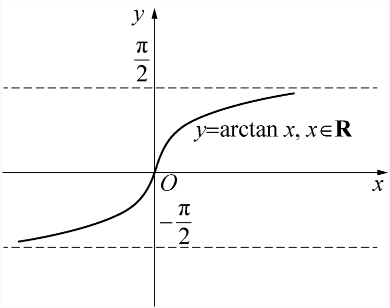
反三角函数：三角函数的反函数统称为**反三角函数**：

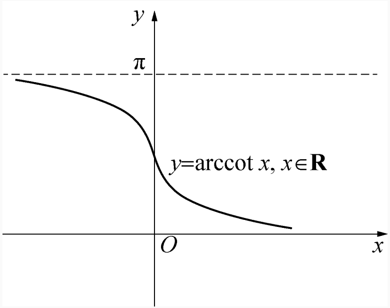
- 正弦函数在区间$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$上的反函数记作$y=\arcsin x$，其定义域为$[-1,1]$，值域为$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$，称为**反三角正弦函数**；
- 余弦函数在区间$[0,\pi]$上的反函数记作$y=\arccos x$，其定义域为$[-1,1]$，值域为$[0,\pi]$，称为**反三角余弦函数**；
- 正切函数在区间$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$上的反函数记作$y=\arctan x$，其定义域为$\mathbb{R}$，值域为$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$，称为**反三角正切函数**；
- 余切函数在区间$(0,\pi)$上的反函数记作$y=\operatorname{arccot} x$，其定义域为$\mathbb{R}$，值域为$(0,\pi)$，称为**反三角余切函数**。

五大基本初等函数






y
π/2
y=arctan x, x∈R
O
x
−π/2


y
π
y=arccot x, x∈R
O
x

定义 (双曲函数及反双曲函数)

- 我们定义以e为底的双曲函数，其中

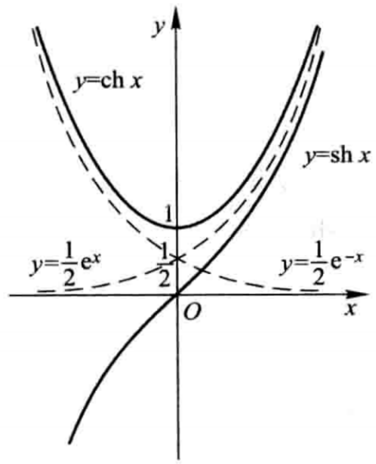
$$\text{双曲正弦：}\quad \sinh x := \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \text{双曲余弦：}\quad \cosh x := \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

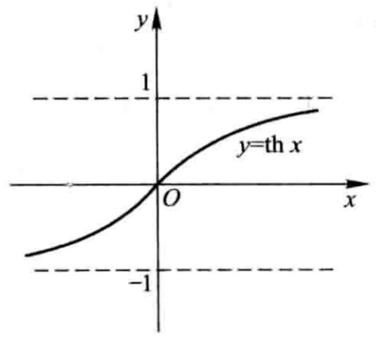
$$\text{双曲正切：}\quad \tanh x := \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

- 双曲函数$y = \sinh x, y = \cosh x, y = \tanh x \ (x \geq 0)$的反函数依次记为

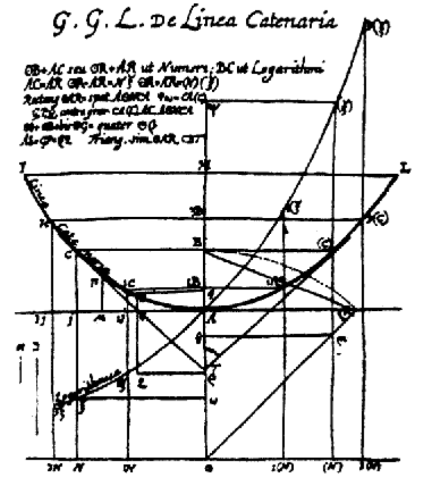
$$y = \sinh^{-1} x, \quad y = \cosh^{-1} x, \quad y = \tanh^{-1} x.$$

双曲函数*





双曲函数*



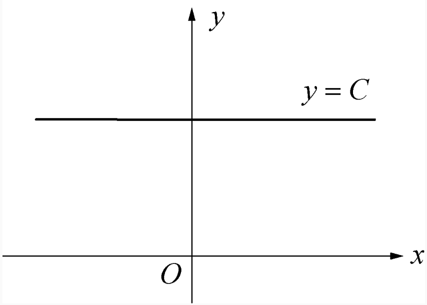
密苏里州圣路易斯大拱门(杰弗逊国土拓展纪念碑):

定义

函数$y = C$， $C \in \mathbb{R}$，它的定义域为$\mathbb{R}$，值域为$R = \{C\}$。它的图形是一条平行于x轴的直线，我们称这个函数为**常值函数**。

定义

函数$y = C$， $C \in \mathbb{R}$，它的定义域为$\mathbb{R}$，值域为$R = \{C\}$。它的图形是一条平行于x轴的直线，我们称这个函数为**常值函数**。



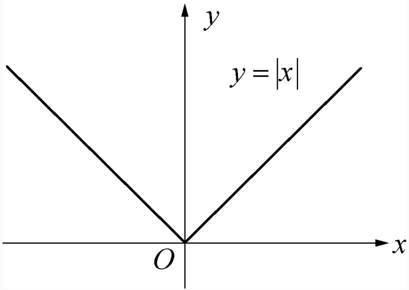
几类特殊的函数

定义

函数$y=|x|=\begin{cases} x, & x\geq 0, \\ -x, & x<0 \end{cases}$，它的定义域为$\mathbb{R}$，值域为$R=[0,+\infty)$，我们称这个函数为**绝对值函数**。

定义

函数$y=|x|=\begin{cases} x, & x\geq 0, \\ -x, & x<0 \end{cases}$，它的定义域为$\mathbb{R}$，值域为$R=[0,+\infty)$，我们称这个函数为绝对值函数。



定义

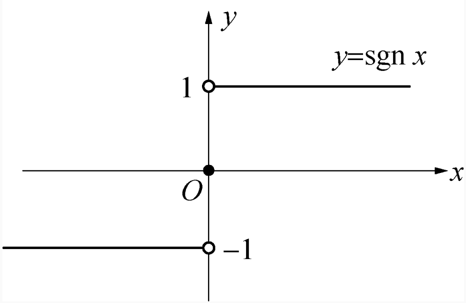
函数$y = \mathrm{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0 \end{cases}$，它的定义域为$\mathbb{R}$，值域为$R = \{-1, 0, 1\}$，我们称这个函数为**符号函数**。

定义

函数$y = \text{sgn}x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0 \end{cases}$，它的定义域为$\mathbb{R}$，值域为$R = \{-1, 0, 1\}$，我们称这个函数为**符号函数**。对于任何实数$x$，关系式$x = \text{sgn}x \cdot |x|$恒成立。

定义

函数$y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0 \end{cases}$，它的定义域为$\mathbb{R}$，值域为$R = \{-1, 0, 1\}$，我们称这个函数为**符号函数**。对于任何实数$x$，关系式$x = \operatorname{sgn} x \cdot |x|$恒成立。

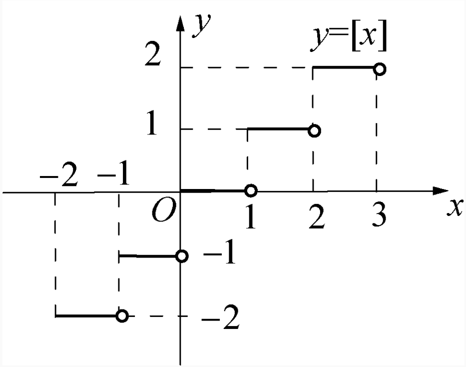


定义

设x为任一实数，不超过x的最大整数称为x的整数部分，记作$[x]$。函数$y=[x]$的定义域为$\mathbb{R}$，值域为$R=\mathbb{Z}$，我们称这个函数为**取整函数**。

定义

设x为任一实数，不超过x的最大整数称为x的整数部分，记作$[x]$。函数$y=[x]$的定义域为$\mathbb{R}$，值域为$R=\mathbb{Z}$，我们称这个函数为**取整函数**。



有时一个函数要用几个解析式表示，我们称这种自变量在不同变化范围中对应法则用不同的式子来表示的函数称为**分段函数**。

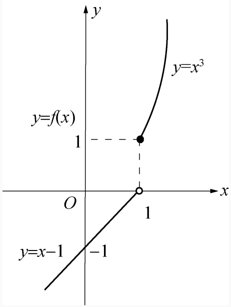
例 1

函数$f(x)=\begin{cases} x^3, & x\geq 1, \\ x-1, & x<1 \end{cases}$是一个分段函数。

有时一个函数要用几个解析式表示，我们称这种自变量在不同变化范围中对应法则用不同的式子来表示的函数称为**分段函数**。

例 1

函数$f(x)=\begin{cases} x^3, & x \geq 1, \\ x-1, & x<1 \end{cases}$是一个分段函数。



例 2

设$f(x)=2^x$，$g(x)=\dfrac{1}{1-x}$，$x\neq 0,1$，求$f[g(x)], g[f(x)]$和$f[f(x)]$。

例 2

设$f(x)=2^x$，$g(x)=\dfrac{1}{1-x}$，$x\neq 0,1$，求$f[g(x)],g[f(x)]$和$f[f(x)]$。

例 3

求函数$y=\sqrt{\ln(x^2-3)}$的定义域。

例 2

设$f(x)=2^x$，$g(x)=\dfrac{1}{1-x}$，$x\neq 0,1$，求$f[g(x)],g[f(x)]$和$f[f(x)]$。

例 3

求函数$y=\sqrt{\ln(x^2-3)}$的定义域。

例 4

设$f(x)$的定义域是$(0,1)$，求$f(\sin x)$的定义域。

数列极限的定义与计算

课前导读

数列： 无穷多个数$x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$排成的序列称为数列；其第$n$项$x_n$称为数列的通项，我们可以把数列看成是某个函数$f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$，记作$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$。

数列：无穷多个数$x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$排成的序列称为数列；其第$n$项$x_n$称为数列的通项，我们可以把数列看成是某个函数$f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$，记作$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$。

等差数列：公差$d = x_n - x_{n-1} \in \mathbb{R}$，通项公式为$x_n = x_1 + (n-1)d$，前$n$项和为

$$S_n = \frac{n(x_1 + x_n)}{2} = nx_1 + \frac{n(n-1)d}{2}.$$

数列： 无穷多个数$x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$排成的序列称为数列；其第$n$项$x_n$称为数列的通项，我们可以把数列看成是某个函数$f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$，记作$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$。

等差数列： 公差$d = x_n - x_{n-1} \in \mathbb{R}$，通项公式为$x_n = x_1 + (n-1)d$，前$n$项和为

$$S_n = \frac{n(x_1 + x_n)}{2} = nx_1 + \frac{n(n-1)d}{2}.$$

等比数列： 公比$q = \dfrac{x_n}{x_{n-1}} \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$，通项公式为$x_n = x_1 \cdot q^{(n-1)}$，前$n$项和为

$$S_n = \frac{x_1(1-q^n)}{1-q}.$$

数列：无穷多个数$x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$排成的序列称为数列；其第$n$项$x_n$称为数列的通项，我们可以把数列看成是某个函数$f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$，记作$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$。

等差数列：公差$d = x_n - x_{n-1} \in \mathbb{R}$，通项公式为$x_n = x_1 + (n-1)d$，前$n$项和为

$$S_n = \frac{n(x_1 + x_n)}{2} = nx_1 + \frac{n(n-1)d}{2}.$$

等比数列：公比$q = \dfrac{x_n}{x_{n-1}} \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$，通项公式为$x_n = x_1 \cdot q^{(n-1)}$，前$n$项和为

$$S_n = \frac{x_1(1-q^n)}{1-q}.$$

给定一个数列$\{x_n\}$后，该数列的变化趋势如何？随着n的无限增大，x_n能否无限接近某个常数？如果x_n能无限接近某个确定的数，则该常数是多少？

数列极限的概念

我们观察如下例子：

(1) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots$，当$n \to \infty$时，$x_n$无限接近于常数0；

(2) $1, 3, 3^2, \cdots, 3^n, \cdots$，当$n \to \infty$时，$x_n$无限增大，它不接近于任何一个确定数值；

(3) $1, -1, 1, \cdots, (-1)^{n-1}, \cdots$，当$n \to \infty$时，$x_n$交替取1和$-1$，不接近于任何确定数值；

(4) $2, \frac{1}{2}, \frac{4}{3}, \cdots, \frac{n+(-1)^{n+1}}{n}, \cdots$，当$n \to \infty$时，$x_n$无限接近于常数1。

我们观察如下例子：

(1) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots$，当$n \to \infty$时，$x_n$无限接近于常数$0$；

(2) $1, 3, 3^2, \cdots, 3^n, \cdots$，当$n \to \infty$时，$x_n$无限增大，它不接近于任何一个确定数值；

(3) $1, -1, 1, \cdots, (-1)^{n-1}, \cdots$，当$n \to \infty$时，$x_n$交替取$1$和$-1$，不接近于任何确定数值；

(4) $2, \frac{1}{2}, \frac{4}{3}, \cdots, \frac{n+(-1)^{n+1}}{n}, \cdots$，当$n \to \infty$时，$x_n$无限接近于常数$1$。

从上述各例可知：数列(1)，(4)是“有极限的”，数列(2)，(3)是无极限的。即数列的一般项变化趋势有两种情况: 无限接近于某个确定常数和不接近于任何确定常数。我们称这样的叙述为数列极限的**描述性定义**。

定义 (数列极限的描述性定义)

- 如果当数列$\{x_n\}$的项数n无限增大时， x_n无限接近于一个确定常数a，那么称a为数列$\{x_n\}$的极限，此时也称数列$\{x_n\}$收敛于a，记作

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \text{ 或 } x_n \to a\,(n \to \infty).$$

- 如果当数列$\{x_n\}$的项数n无限增大时， x_n不接近于任何确定常数，那么称数列$\{x_n\}$没有极限，此时也称数列$\{x_n\}$发散，记作$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$不存在。
- 如果当数列$\{x_n\}$的项数n无限增大时， x_n也无限增大，那么称数列$\{x_n\}$的极限是无穷大，记作$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$。

数列极限的动态数学定义

为了将上述描述性定义翻译成数学语言的精确定义，我们需要给予“无限增大”和“无限接近”一个动态的数学语言描述。

我们考虑数列$x_n = 1 + \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$。

数列极限的动态数学定义

为了将上述描述性定义翻译成数学语言的精确定义，我们需要给予“无限增大”和“无限接近”一个动态的数学语言描述。

我们考虑数列$x_n = 1 + \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$。一般两个数$a, b$的接近程度可用$|b-a|$来刻画，注意到

$$|x_n - 1| = \left|\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right| = \frac{1}{n},$$

数列极限的动态数学定义

为了将上述描述性定义翻译成数学语言的精确定义，我们需要给予“无限增大”和“无限接近”一个动态的数学语言描述。

我们考虑数列$x_n = 1 + \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$。一般两个数$a, b$的接近程度可用$|b-a|$来刻画，注意到

$$|x_n - 1| = \left|\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right| = \frac{1}{n},$$

那么

- 若$|x_n - 1| < \dfrac{1}{100}$，即$\dfrac{1}{n} < \dfrac{1}{100}$，只要$n > 100$；
- 若$|x_n - 1| < \dfrac{1}{10000}$，即$\dfrac{1}{n} < \dfrac{1}{10000}$，只要$n > 10000$。

这个动态过程可以随着取值的不同而继续下去。

数列极限的动态数学定义

为了将上述描述性定义翻译成数学语言的精确定义，我们需要给予“无限增大”和“无限接近”一个动态的数学语言描述。

我们考虑数列$x_n = 1 + \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$。一般两个数$a, b$的接近程度可用$|b-a|$来刻画，注意到

$$|x_n - 1| = \left|\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right| = \frac{1}{n},$$

那么

- 若$|x_n - 1| < \dfrac{1}{100}$，即$\dfrac{1}{n} < \dfrac{1}{100}$，只要$n > 100$；
- 若$|x_n - 1| < \dfrac{1}{10000}$，即$\dfrac{1}{n} < \dfrac{1}{10000}$，只要$n > 10000$。

这个动态过程可以随着取值的不同而继续下去。因此，无论给定多么小的一个正数ε，总是存在一个正整数（指标）N，只要$n > N$，就可以做到$|x_n - 1| < \varepsilon$，我们使用了这个有序实数对(ε, N)来精确的刻画了这个极限的动态过程。

定义 (数列极限的精确定义)

设$\{x_n\}$为一数列。如果存在一个常数$a \in \mathbb{R}$，使得对于任意给定的正数ε，总存在一个正整数N，使得对于所有的$n > N$，不等式$|x_n - a| < \varepsilon$成立，那么称a为数列$\{x_n\}$的极限，或此时也称数列$\{x_n\}$收敛于a，记作

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \text{ 或 } x_n \to a \, (n \to \infty).$$

如果这样的常数a不存在，我们就称数列$\{x_n\}$没有极限或称数列$\{x_n\}$发散。

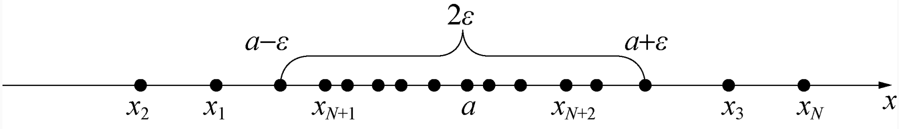
我们使用符号“$\forall$”为“任意给定”，“$\exists$”为“存在”，则上述定义可以重塑为：

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{Z}^+, \, s.t., \text{ 当 } n > N, \text{ 有 } |x_n - a| < \varepsilon.$$

数列极限的几何解释

我们在数轴上标出数列$x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$，再作以$a$为中心、$\varepsilon$为半径的邻域$U(a,\varepsilon)$。根据上述数列极限的精确定义，我们可知：

- 当$n > N$时，x_n均落在$U(a,\varepsilon)$内；
- 至多有限个(N个)点落在$U(a,\varepsilon)$之外。



当然，数列极限的精确定义可以验证实数a为数列$\{x_n\}$的极限，但是却没有提供计算方法。

例 1

已知$x_n = \dfrac{1}{n}$，证明$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$。

引例

例 1

已知$x_n = \frac{1}{n}$，证明$\lim_{n\to\infty} x_n = 0$。

例 2

已知$x_n = \frac{1}{2^n}$，证明$\lim_{n\to\infty} x_n = 0$。

定理 (数列极限的运算法则)

若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$，$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$，则

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} y_n = a \pm b$（加减法则）；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} y_n = a \cdot b$（乘法法则）；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n} = \dfrac{a}{b}\ (b \neq 0)$（除法法则）；

(4) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{x_n} = \sqrt{\lim\limits_{n\to\infty} x_n} = \sqrt{a}$（根式交换法则）。

例 3

计算下列极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4-7n^2}{n^2+3}$;　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+3+\cdots+n}{n^2}$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\dfrac{n+1}{n}}$;　(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\dfrac{1}{(n-1)\cdot n}\right)$;

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$;　(6) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3^2}+\cdots+\dfrac{1}{3^{n-1}}\right)$.

函数极限的定义与计算

我们可以把数列看成是某个函数$f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$，记作$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$，那么数列极限就变成了

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} f(n) = a, \quad n\in\mathbb{Z}^+.$$

课前导读

我们可以把数列看成是某个函数$f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$，记作$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$，那么数列极限就变成了

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} f(n) = a, \quad n \in \mathbb{Z}^+.$$

本节我们将该函数定义域扩充到$\mathbb{R}$来讨论函数极限的定义和计算，其中我们会具体讨论自变量趋于无穷大（$x \to \infty$）和自变量趋于某一个固定的点（$x \to x_0$）时的两种函数极限。

定义

我们称以下情形为自变量趋于无穷大:

- 称$x \to +\infty$，如果$x > 0$且$|x|$无限增大;
- 称$x \to -\infty$，如果$x < 0$且$|x|$无限增大;
- 称$x \to \infty$，如果x可正可负且$|x|$无限增大。

定义

我们称以下情形为自变量趋于无穷大:

- 称$x \to +\infty$，如果$x > 0$且$|x|$无限增大;
- 称$x \to -\infty$，如果$x < 0$且$|x|$无限增大;
- 称$x \to \infty$，如果x可正可负且$|x|$无限增大。

考虑如下函数的例子:

定义

我们称以下情形为自变量趋于无穷大：

- 称$x \to +\infty$，如果$x > 0$且$|x|$无限增大；
- 称$x \to -\infty$，如果$x < 0$且$|x|$无限增大；
- 称$x \to \infty$，如果x可正可负且$|x|$无限增大。

考虑如下函数的例子：

- 对于函数$y = \dfrac{1}{x}$，$|x|$无限增大时，函数图像无限接近于x轴，即$y = 0$；

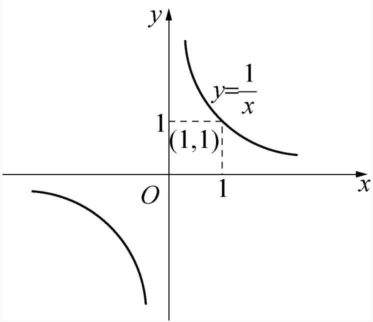
定义

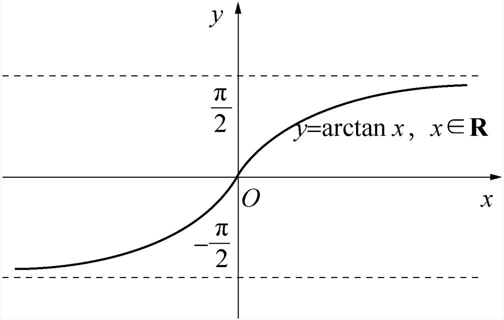
我们称以下情形为自变量趋于无穷大:

- 称$x \to +\infty$，如果$x > 0$且$|x|$无限增大;
- 称$x \to -\infty$，如果$x < 0$且$|x|$无限增大;
- 称$x \to \infty$，如果x可正可负且$|x|$无限增大。

考虑如下函数的例子:

- 对于函数$y = \dfrac{1}{x}$，$|x|$无限增大时，函数图像无限接近于x轴，即$y = 0$;
- 对于函数$y = \arctan x$，当$x > 0$且$|x|$无限增大时，函数图像无限接近于$x = \dfrac{\pi}{2}$，当$x < 0$且$|x|$无限增大时，函数图像无限接近于$x = -\dfrac{\pi}{2}$。


y
$y=\frac{1}{x}$
1
(1,1)
O
1
x


y
$\frac{\pi}{2}$
$y=\arctan x$，$x \in \mathbf{R}$
O
x
$-\frac{\pi}{2}$

定义 (无穷远处函数极限的描述性定义)

设函数$f(x)$在$x > X$上有定义（$X \in \mathbb{R}^+$）。如果$x \to +\infty$时， $f(x)$无限接近于一个确定常数A，则称a为函数$f(x)$当$x \to +\infty$时的极限。

定义 (无穷远处函数极限的描述性定义)

设函数$f(x)$在$x > X$上有定义（$X \in \mathbb{R}^+$）。如果$x \to +\infty$时，$f(x)$无限接近于一个确定常数A，则称a为函数$f(x)$当$x \to +\infty$时的极限。

定义 (无穷远处函数极限的精确定义)

设函数$f(x)$在x大于某一个正数上有定义。如果存在一个常数$A \in \mathbb{R}$，使得对于任意给定的正数ε，总存在一个正数X，使得对于所有的$x > X$，不等式

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

成立，则称A为函数$f(x)$在正无穷处的极限，记作

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = A, \text{ 或 } f(x) \to A \, (x \to +\infty).$$

注

- 上述定义也可以描述为

$$\forall \varepsilon > 0,\quad \exists X > 0,\quad s.t.,\quad \text{当}\, x > X,\quad \text{恒有}\, |f(x) - A| < \varepsilon.$$

- 对于自变量趋于负无穷的情形，我们有

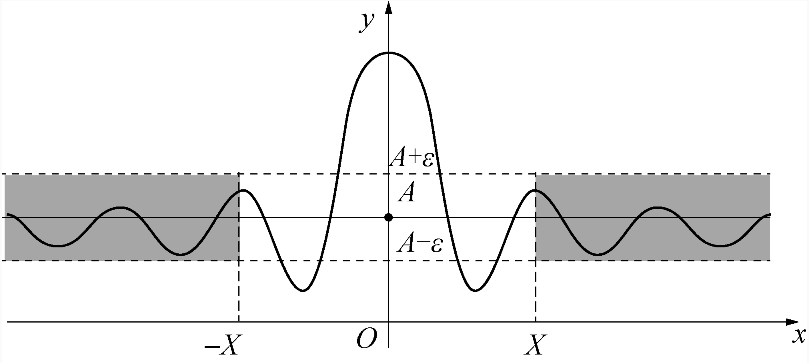
$$\text{若}\, x \to -\infty,\quad \text{有}\, f(x) \to A,\quad \text{则}\, \lim_{x\to-\infty} f(x) = A.$$

- 当 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$且 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = A$时，我们就称 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$，这等价于

$$\forall \varepsilon > 0,\quad \exists X > 0,\quad s.t.,\quad \text{当}\, |x| > X,\quad \text{恒有}\, |f(x) - A| < \varepsilon.$$

无穷远处函数极限的几何解释

对任意给定的$\varepsilon > 0$，作直线$y = A - \varepsilon$及$y = A + \varepsilon$，总存在$X > 0$，使得当$|x| > X$时， $y = f(x)$的图形必位于这两直线之间：



注

- 由上述定义，我们马上得到

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = A \text{ 且 } \lim_{x\to-\infty} f(x) = A.$$

- **一般地**，$\lim_{x\to+\infty} f(x) = A$且$\lim_{x\to-\infty} f(x) = A$，那么称直线$y = A$为函数$y = f(x)$图形的**水平渐近线**。

无穷远处函数极限的定义

注

- 由上述定义，我们马上得到

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = A \text{ 且 } \lim_{x\to-\infty} f(x) = A.$$

- 一般地，$\lim_{x\to+\infty} f(x) = A$且$\lim_{x\to-\infty} f(x) = A$，那么称直线$y = A$为函数$y = f(x)$图形的**水平渐近线**。

例 1

证明 $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\sin x}{x} = 0$。

考虑如下函数的例子：

自变量趋于有限值时的函数极限

考虑如下函数的例子：

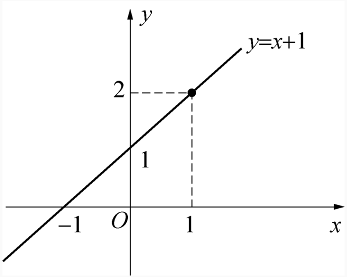
- 对于函数$y = x + 1$，$|x|$无限趋于1时，函数值$f(x)$无限接近于2，即当x从1的左侧或右侧趋向于1时，$|(x+1)-2|$可以无限接近于0；

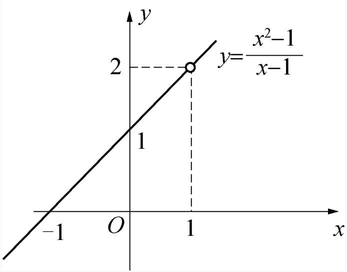
考虑如下函数的例子：

- 对于函数$y = x + 1$，$|x|$无限趋于1时，函数值$f(x)$无限接近于2，即当x从1的左侧或右侧趋向于1时，$|(x+1)-2|$可以无限接近于0；
- 对于函数$y = \dfrac{x^2-1}{x-1}$，尽管该函数在$x = 1$处没有定义，但是当x从1的左侧或右侧趋向于1时，函数值$f(x)$无限接近于2，即$\left|\dfrac{x^2-1}{x-1} - 2\right|$可以无限接近于0。

考虑如下函数的例子：

- 对于函数$y = x + 1$，$|x|$无限趋于1时，函数值$f(x)$无限接近于2，即当x从1的左侧或右侧趋向于1时，$|(x+1)-2|$可以无限接近于0；
- 对于函数$y = \dfrac{x^2-1}{x-1}$，尽管该函数在$x=1$处没有定义，但是当x从1的左侧或右侧趋向于1时，函数值$f(x)$无限接近于2，即$\left|\dfrac{x^2-1}{x-1} - 2\right|$可以无限接近于0。





定义 (自变量趋于有限值时函数极限的描述性定义)

设函数$f(x)$在x_0处的一个去心邻域内有定义。如果$x \to x_0$时， $f(x)$无限接近于一个确定常数A，额我们称A为函数$f(x)$当$x \to x_0$时的极限。

定义 (自变量趋于有限值时函数极限的描述性定义)

设函数$f(x)$在x_0处的一个去心邻域内有定义。如果$x \to x_0$时， $f(x)$无限接近于一个确定常数A，额我们称A为函数$f(x)$当$x \to x_0$时的极限。

定义 (自变量趋于有限值时函数极限的精确定义)

设函数$f(x)$在x_0处的一个去心邻域内有定义。如果存在一个常数$A \in \mathbb{R}$，使得对于任意给定的正数ε，总存在一个正数δ，使得对于所有的$0 < |x - x_0| < \delta$，不等式

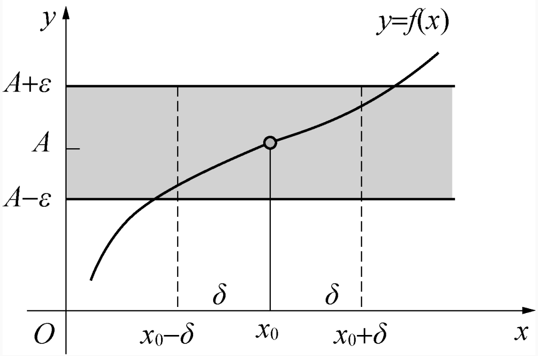
$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

成立，那么我们称A为函数$f(x)$在x_0处的极限，记作

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A, \text{ 或 } f(x) \to A \, (x \to x_0).$$

自变量趋于有限值时函数极限的几何解释

对任意给定的$\varepsilon > 0$，作直线$y = A - \varepsilon$及$y = A + \varepsilon$，总存在$\delta > 0$，使得当$x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)\ (x \neq x_0)$内时，$y = f(x)$的图形必位于这两直线之间：



引例

自变量趋于有限值时函数极限的精确定义也可以描述如下：

$$\forall\, \varepsilon > 0,\quad \exists\, \delta > 0,\quad s.t.,\quad \text{当}\, 0 < |x - x_0| < \delta,\quad \text{恒有}\, |f(x) - A| < \varepsilon.$$

自变量趋于有限值时函数极限的精确定义也可以描述如下：

$$\forall\, \varepsilon > 0, \quad \exists\, \delta > 0, \quad s.t., \quad \text{当}\, 0 < |x - x_0| < \delta, \quad \text{恒有}\, |f(x) - A| < \varepsilon.$$

例 2

证明：当$a > 1$时，$\lim\limits_{x \to 0} a^x = 1$。

自变量趋于有限值时函数极限的精确定义也可以描述如下：

$$\forall\, \varepsilon > 0,\quad \exists\, \delta > 0,\quad s.t.,\quad \text{当}\, 0 < |x - x_0| < \delta,\quad \text{恒有}\, |f(x) - A| < \varepsilon.$$

例 2

证明：当$a > 1$时，$\lim\limits_{x\to 0} a^x = 1$。

例 3

证明：$\lim\limits_{x\to x_0} \sqrt{x} = \sqrt{x_0}$。

自变量趋于有限值时函数极限的定义

有时我们只需考虑x从x_0的一侧(左侧或右侧)趋于x_0：

有时我们只需考虑x从x_0的一侧(左侧或右侧)趋于x_0：

定义 (自变量趋于有限值时函数左、右极限的定义)

- 如果x从x_0的右侧趋于x_0，即$x \to x_0^+$时，有$f(x) \to A$，则称A为$f(x)$在x_0处的右极限，记为 $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = A$；
- 如果x从x_0的左侧趋于x_0，即$x \to x_0^-$时，有$f(x) \to A$，则称A为$f(x)$在x_0处的左极限，记为 $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = A$。

有时我们只需考虑x从x_0的一侧(左侧或右侧)趋于x_0:

定义 (自变量趋于有限值时函数左、右极限的定义)

- 如果x从x_0的右侧趋于x_0，即$x \to x_0^+$时，有$f(x) \to A$，则称A为$f(x)$在x_0处的右极限，记为 $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = A$;
- 如果x从x_0的左侧趋于x_0，即$x \to x_0^-$时，有$f(x) \to A$，则称A为$f(x)$在x_0处的左极限，记为 $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = A$。

由上述定义，我们立即得到:

定理

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0^-} f(x) = A \text{ 且 } \lim_{x \to x_0^+} f(x) = A.$$

引例

例 4

证明：$f(x)=\begin{cases} x-1, & x<0, \\ 0, & x=0, \\ x+1, & x>0. \end{cases}$在$x=0$处极限不存在。

例 4

证明：$f(x)=\begin{cases} x-1, & x<0, \\ 0, & x=0, \\ x+1, & x>0. \end{cases}$ 在$x=0$处极限不存在。

例 5

证明：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{|x|}$不存在。

定理 (函数极限的四则运算)

若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a$，$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=b$存在，则

(1) $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\pm g(x))=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\pm\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=a\pm b$（加减法则）；

(2) $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\cdot g(x))=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\cdot\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=a\cdot b$（乘法法则）；

(3) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}=\dfrac{a}{b}\,(b\neq 0)$（除法法则）。

上述极限过程对自变量趋于无穷远处时的情形仍然成立。

推论（函数极限的运算规律）

若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a$，$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=b$存在，则

(1) $\lim\limits_{x\to x_0}[\alpha f(x)\pm\beta g(x)]=\alpha a\pm\beta b,\quad \alpha,\beta\in\mathbb{R}$；

(2) $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)]^n=\left[\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\right]^n,\ (n\in\mathbb{Z}^+)$；

(3) 若$f(x)\geq 0$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt{f(x)}=\sqrt{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}$。

上述极限过程对自变量趋于无穷远处时的情形仍然成立。

定理 (复合函数的极限运算法则)

设函数$y=f[g(x)]$是由函数$u=g(x)$和$y=f(u)$复合而成，且$f[g(x)]$在x_0处的某个去心邻域内有定义。若$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=u_0$，$\lim\limits_{u\to u_0} f(u)=A$存在，且有$\delta_0>0$，使得当$x\in \mathring{U}(x_0,\delta_0)$时有$g(x)\neq u_0$ 则

$$\lim_{x\to x_0} f[g(x)]=\lim_{u\to u_0} f(u)=A.$$

例 6

计算极限$\lim\limits_{x\to 0} e^{x+1}$。

例 6

计算极限$\lim\limits_{x\to 0} e^{x+1}$。

例 7

计算极限$\lim\limits_{x\to 0}(\sqrt{x^2+4}+2)$。

引例

例 6

计算极限$\lim\limits_{x\to 0} e^{x+1}$。

例 7

计算极限$\lim\limits_{x\to 0}(\sqrt{x^2+4}+2)$。

例 8

计算极限$\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{\dfrac{x^2-1}{2(x-1)}}$。

例 9

计算极限(1) $\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\sqrt{x^2+4}-2}$；(2) $\lim_{x\to +\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+4}-2}$。

例 9

计算极限(1) $\lim_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+4}-2}$；(2) $\lim_{x\to +\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+4}-2}$。

例 10

已知 $\lim_{x\to +\infty}(5x-\sqrt{ax^2+bx+c})=2$，求$a, b$的值。

极限性质

定理 (收敛数列极限的唯一性)

如果数列$\{x_n\}$收敛，那么该极限值只有一个。

数列极限的性质

定理 (收敛数列极限的唯一性)

如果数列$\{x_n\}$收敛，那么该极限值只有一个。

定义

我们称数列$\{x_n\}$**有界**，如果存在$M > 0$，使得对所有的x_n， $|x_n| \leq M$。

定理 (收敛数列极限的唯一性)

如果数列$\{x_n\}$收敛，那么该极限值只有一个。

定义

我们称数列$\{x_n\}$**有界**，如果存在$M > 0$，使得对所有的x_n，$|x_n| \leq M$。

定理 (收敛数列的有界性)

如果数列$\{x_n\}$收敛，那么该数列一定有界。

定理 (收敛数列的保号性)

如果$x_n \to a\,(n \to \infty)$且$a > 0\,(a < 0)$，那么存在$N > 0$，使得当$n > N$时，$x_n > 0\,(x_n < 0)$。

定理 (收敛数列的保号性)

如果$x_n \to a\,(n \to \infty)$且$a > 0\,(a < 0)$，那么存在$N > 0$，使得当$n > N$时，$x_n > 0\,(x_n < 0)$。

定义

在数列$\{x_n\}$中任意抽取无限项并保持这些项在原数列$\{x_n\}$中的先后次序而得到的一个新数列称为$\{x_n\}$的**子数列（子列）**，记作$\{x_{n_k}\}\,(n_k \geq k)$。

定理 (收敛数列的保号性)

如果$x_n \to a\,(n \to \infty)$且$a > 0\,(a < 0)$，那么存在$N > 0$，使得当$n > N$时，$x_n > 0\,(x_n < 0)$。

定义

在数列$\{x_n\}$中任意抽取无限项并保持这些项在原数列$\{x_n\}$中的先后次序而得到的一个新数列称为$\{x_n\}$的**子数列（子列）**，记作$\{x_{n_k}\}\,(n_k \geq k)$。

定理

如果数列$\{x_n\}$收敛于a，那么它的任一子数列$\{x_{n_k}\}$也收敛于a。

定理 (收敛数列的保号性)

如果$x_n \to a\,(n \to \infty)$且$a > 0\,(a < 0)$，那么存在$N > 0$，使得当$n > N$时，$x_n > 0\,(x_n < 0)$。

定义

在数列$\{x_n\}$中任意抽取无限项并保持这些项在原数列$\{x_n\}$中的先后次序而得到的一个新数列称为$\{x_n\}$的**子数列（子列）**，记作$\{x_{n_k}\}\,(n_k \geq k)$。

定理

如果数列$\{x_n\}$收敛于a，那么它的任一子数列$\{x_{n_k}\}$也收敛于a。

上述定理的逆否命题告诉我们：若数列$\{x_n\}$的某个子列发散或某两个子列收敛于两个不同的数值，则数列$\{x_n\}$必发散。

推论

(1) 如果$\{x_n\}$满足：存在$N_1 > 0$，使得当$n > N_1$时，$x_n \geq 0\,(x_n \leq 0)$，且$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$，则$a \geq 0\,(a \leq 0)$。

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_{2n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} x_{2n} = a.$

(3) 数列$\{x_n\}$收敛$\Leftrightarrow$子数列$\{x_{2n}\}$、$\{x_{2n+1}\}$及$\{x_{3n}\}$均收敛。

函数极限的性质

我们仅就$x \to x_0$的情况给出函数极限的若干性质。

函数极限的性质

我们仅就$x \to x_0$的情况给出函数极限的若干性质。

定理 (函数极限的唯一性)

如果 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$存在，那么该极限唯一。

我们仅就$x \to x_0$的情况给出函数极限的若干性质。

定理 (函数极限的唯一性)

如果$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$存在，那么该极限唯一。

定义

我们称函数f在x_0处有界，如果存在$M > 0$，对所有定义域内的x，有$|f(x)| \le M$。

函数极限的性质

我们仅就$x \to x_0$的情况给出函数极限的若干性质。

定理 (函数极限的唯一性)

如果$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$存在，那么该极限唯一。

定义

我们称函数f在x_0处有界，如果存在$M > 0$，对所有定义域内的x，有$|f(x)| \leq M$。

定理 (函数极限的局部有界性)

如果$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$存在，那么存在$M > 0$及$\delta > 0$，使得

$$\text{当}\, 0 < |x - x_0| < \delta\, \text{时，有}\, |f(x)| \leq M.$$

定理 (函数极限的局部保号性)

如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$且$A > 0\,(A < 0)$，则存在$\delta > 0$，使得

$$\text{当}\, 0 < |x - x_0| < \delta\,\text{时, 有}\, f(x) > 0\,(\text{或}\, f(x) < 0).$$

定理 (函数极限的局部保号性)

如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$且$A > 0\,(A < 0)$，则存在$\delta > 0$，使得

$$当\,0 < |x - x_0| < \delta\,时，有\,f(x) > 0\,(或\,f(x) < 0).$$

推论

(1) 如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A\,(A \neq 0)$，则存在$\delta > 0$，使得当$0 < |x - x_0| < \delta$时，有$|f(x)| > \dfrac{|A|}{2}$。

(2) 如果函数$f(x)$满足：存在$\delta > 0$，使得

$$当\,0 < |x - x_0| < \delta\,时，有\,f(x) > 0\,(或\,f(x) < 0),$$

且 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$，则$A \geq 0\,(A \leq 0)$。

定理 (海涅定理*)

如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$存在，$\{x_n\}$为函数$f$定义域内任一收敛于$x_0$的数列，且满足$x_n \neq x_0\,(n\in\mathbb{N})$，那么$\{f(x_n)\}$收敛，且$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$。

定理 (海涅定理*)

如果$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$存在，$\{x_n\}$为函数$f$定义域内任一收敛于$x_0$的数列，且满足$x_n \neq x_0\ (n \in \mathbb{N})$，那么$\{f(x_n)\}$收敛，且$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$。

根据海涅定理的逆否命题：

- 如果取某一个数列$\{x_n\}$满足$x_n \to x_0 (n \to \infty)$，$f(x_n)$的极限不存在，那么$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$不存在；

定理 (海涅定理*)

如果$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$存在，$\{x_n\}$为函数$f$定义域内任一收敛于$x_0$的数列，且满足$x_n \neq x_0\ (n \in \mathbb{N})$，那么$\{f(x_n)\}$收敛，且$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$。

根据海涅定理的逆否命题：

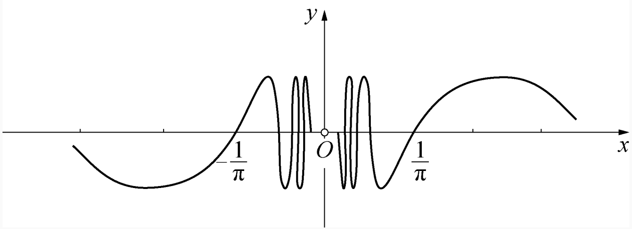
- 如果取某一个数列$\{x_n\}$满足$x_n \to x_0 (n \to \infty)$，$f(x_n)$的极限不存在，那么$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$不存在；
- 取某两个数列$\{x_n\}, \{x'_n\}$满足$x_n \to x_0$，$x'_n \to x_0 (n \to \infty)$，数列$f(x_n)$，$f(x'_n)$的极限存在但不相等，那么$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$不存在。

例 4

证明函数$f(x)=\sin\dfrac{1}{x}$在$x=0$处的极限不存在。

例 4

证明函数$f(x)=\sin\dfrac{1}{x}$在$x=0$处的极限不存在。



两个重要极限

三角函数和差化积公式:

三角函数和差化积公式:

$$\begin{aligned}
\sin x + \sin y &= 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}, \\
\sin x - \sin y &= 2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}, \\
\cos x + \cos y &= 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}, \\
\cos x - \cos y &= -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}.
\end{aligned}$$

三角函数和差化积公式：

$$
\begin{aligned}
\sin x+\sin y&=2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2},\\
\sin x-\sin y&=2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2},\\
\cos x+\cos y&=2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2},\\
\cos x-\cos y&=-2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}.
\end{aligned}
$$

二项式定理：

三角函数和差化积公式:

$$\begin{aligned}
\sin x + \sin y &= 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2},\\
\sin x - \sin y &= 2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2},\\
\cos x + \cos y &= 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2},\\
\cos x - \cos y &= -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}.
\end{aligned}$$

二项式定理:

$$\begin{aligned}
(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k &= C_n^0 a^n b^0 + C_n^1 a^{n-1} b^1 + \cdots + C_n^n a^0 b^n\\
&:= \binom{n}{0} a^n b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \cdots + \binom{n}{n} a^0 b^n.
\end{aligned}$$

定理 (数列极限的两边夹法则)

如果数列$\{x_n\}$、$\{y_n\}$、$\{z_n\}$满足：

- $\exists\, N_0 \in \mathbb{N}$，当$n > N_0$时，$y_n \le x_n \le z_n$；
- $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$。

那么数列$\{x_n\}$极限存在且$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$。

定理 (数列极限的两边夹法则)

如果数列$\{x_n\}$、$\{y_n\}$、$\{z_n\}$满足：

- $\exists\, N_0 \in \mathbb{N}$，当$n > N_0$时，$y_n \leq x_n \leq z_n$；
- $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$。

那么数列$\{x_n\}$极限存在且$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$。

定理 (函数极限的两边夹法则)

如果函数$f(x), g(x), h(x)$满足：

- 当$x \in \mathring{U}(x_0, \delta)$时（或者$|x| > X$），$g(x) \leq f(x) \leq h(x)$；
- $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \lim\limits_{x\to x_0} h(x) = A$（或$\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to\infty} h(x) = A$）。

那么极限$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$（或$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$）存在且$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$（或$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$）。

例 1

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}+\cdots+\frac{1}{(n+n)^2}\right]。$$

引例

例 1

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}+\cdots+\frac{1}{(n+n)^2}\right]。$$

例 2

已知 $\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|=0$，证明 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$。

例 1

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}+\cdots+\frac{1}{(n+n)^2}\right]。$$

例 2

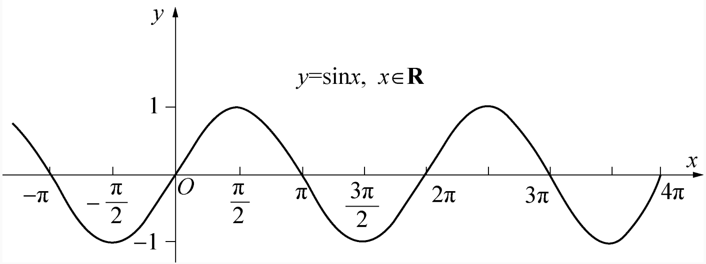
已知 $\lim_{x\to x_0}|f(x)|=0$，证明 $\lim_{x\to x_0}f(x)=0$。

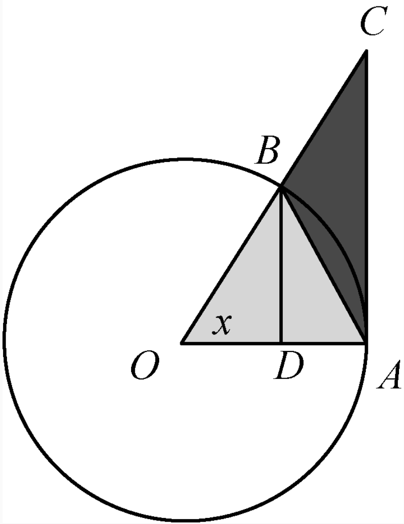
例 3

计算极限 $\lim_{x\to 0}x\left[\frac{1}{x}\right]$。

定理 (第一重要极限)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$




C
B
x
O
D
A

例 4

计算极限：$(1)\ \lim\limits_{x\to\infty} x\sin\dfrac{1}{x}$；$(2)\ \lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sin(x^2-9)}{x-3}$。

引例

例 4

计算极限：(1) $\lim\limits_{x\to\infty} x\sin\dfrac{1}{x}$；(2) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sin(x^2-9)}{x-3}$。

例 5

计算极限：(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin x-\sin 2x}{x^3}$；(2) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin x-\sin a}{x-a}$。

定义

- 如果数列$\{x_n\}$满足
$$x_1 \le x_2 \le \cdots \le x_n \le x_{n+1} \le \cdots$$
那么称数列$\{x_n\}$是单调递增的；
- 如果数列$\{x_n\}$满足
$$x_1 \ge x_2 \ge \cdots \ge x_n \ge x_{n+1} \ge \cdots$$
那么称数列$\{x_n\}$是单调递减的。

定义

- 如果数列$\{x_n\}$满足
$$x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n \leq x_{n+1} \leq \cdots$$
那么称数列$\{x_n\}$是单调递增的；
- 如果数列$\{x_n\}$满足
$$x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_n \geq x_{n+1} \geq \cdots$$
那么称数列$\{x_n\}$是单调递减的。

收敛数列必有界，但有界数列未必收敛；结合数列单调性，我们得到数列的单调有界收敛准则。

定理 (单调有界收敛准则)

单调有界数列必有极限:

(1) 如果数列$\{x_n\}$单调递增且有上界M，那么$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$存在且该极限小于等于$M$;

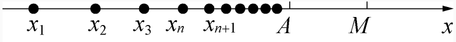
(2) 如果数列$\{x_n\}$单调递减且有下界m，那么$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$存在且该极限大于等于$m$。

定理 (单调有界收敛准则)

单调有界数列必有极限:

(1) 如果数列$\{x_n\}$单调递增且有上界M，那么$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$存在且该极限小于等于$M$;

(2) 如果数列$\{x_n\}$单调递减且有下界m，那么$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$存在且该极限大于等于$m$。

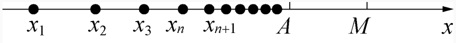


定理 (单调有界收敛准则)

单调有界数列必有极限:

(1) 如果数列$\{x_n\}$单调递增且有上界M，那么$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$存在且该极限小于等于$M$；

(2) 如果数列$\{x_n\}$单调递减且有下界m，那么$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$存在且该极限大于等于$m$。



例 6

设$x_n = \sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{\cdots+\sqrt{3}}}}$，证明数列$\{x_n\}$极限存在并计算该极限值。

定理 (第二重要极限（离散情形）)

极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ 存在.

定理 (第二重要极限（连续情形）)

极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$ 存在.

例 6

计算极限：(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{x}$；(2) $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}$。

例 6

计算极限：(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{x}$；(2) $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}$。

例 7

计算极限：(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{n}\right)^{n+2}$；(2) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{x}}$。

例 6

计算极限：(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{x}$；(2) $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}$。

例 7

计算极限：(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{n}\right)^{n+2}$；(2) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{x}}$。

例 8

计算极限：(1) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$；(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x+4}{3x-1}\right)^{x+1}$。

无穷小与无穷大

自变量在某一变化过程中以零为极限的变量统称为无穷小量；我们以$x \to x_0$为例，定义函数$f(x)$无穷小。

定义

设$f(x)$在$\mathring{U}(x_0)$内有定义，若$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$，则称$f(x)$为$x \to x_0$时的无穷小。

该定义也等价于：

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \text{当}\, 0 < |x - x_0| < \delta, \text{有}\, |f(x)| < \varepsilon.$$

此时也称$f(x)$为$x \to x_0$时的无穷小。

注

(1) 无穷小与一个很小的确定的常数不能混为一谈。因为无穷小是个变量（函数），自变量在某一变化过程中，其绝对值能小于任意给定的正数；

(2) 讨论无穷小需要注意自变量$x \to x_0$的变化过程；

(3) 零是无穷小中唯一的常数；

(4) 由数列和函数四则运算性质可知，在自变量的同一变化过程中，有限个无穷小的和、差、积都是无穷小。

定理 (无穷小运算性质)

在自变量的同一变化过程中，有界函数与无穷小的乘积是无穷小。

定理 (无穷小运算性质)

在自变量的同一变化过程中，有界函数与无穷小的乘积是无穷小。

我们给出几个无穷小的例子：

- $\lim\limits_{x\to 1}(x^2-1)=0$，即$f(x)=x^2-1$为$x\to 1$时的无穷小；
- $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$，即$f(x)=\dfrac{1}{x}$为$x\to\infty$时的无穷小；
- $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[3]{n}}=0$，即$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{n}}$为$n\to\infty$时的无穷小。

例 1

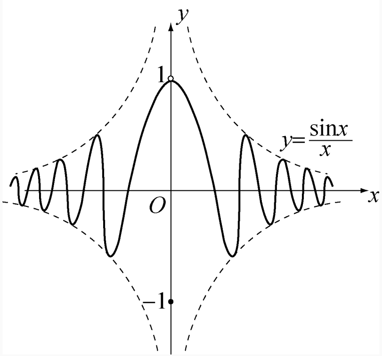
计算极限

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}.$$

例 1

计算极限

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}.$$



我们以$x \to x_0$的情形来定义无穷大。

定义

设$f(x)$在$\mathring{U}(x_0)$内有定义，当$x \to x_0$时，对应的函数的绝对值$|f(x)|$无限增大，则称$f(x)$为$x \to x_0$时的**无穷大量**。

该定义也等价于：

$$\forall\, M > 0, \quad \exists \delta > 0, \text{ 当 } 0 < |x - x_0| < \delta, \text{ 有 } |f(x)| > M.$$

此时也称$f(x)$为$x \to x_0$时的无穷大量，记作$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$。

注

(1) 无穷大是绝对值无限增大的变量，这里只是借用了极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$的符号，并不意味着函数$f(x)$存在极限，因为无穷大$\infty$不是数；自变量在某一变化过程中，其绝对值能小于任意给定的正数；

(2) 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$，则称$f(x)$为当$x\to x_0$时的正无穷大；

(3) 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=-\infty$，则称$f(x)$为当$x\to x_0$时的负无穷大；

(4) 若 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\infty$或 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\infty$，则直线$x=x_0$称为函数$y=f(x)$图形的铅直渐近线。

例 2

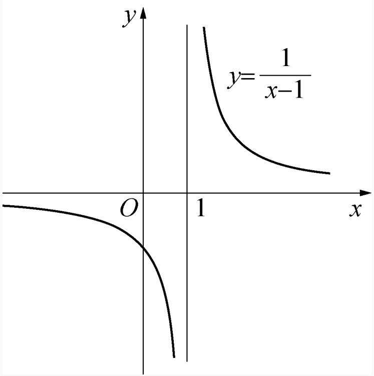
计算极限

$$\lim_{x\to 1} \frac{1}{x-1}.$$

例 2

计算极限

$$\lim_{x \to 1} \frac{1}{x-1}.$$



无穷小和无穷大之间存在如下关系：

定理

在自变量的同一变化过程中：

(1) 如果$f(x)$为无穷大，那么$\dfrac{1}{f(x)}$为无穷小；

(2) 如果$f(x)$为无穷小，且$f(x) \neq 0$，那么$\dfrac{1}{f(x)}$为无穷大。

无穷小和无穷大之间存在如下关系：

定理

在自变量的同一变化过程中：

(1) 如果$f(x)$为无穷大，那么$\dfrac{1}{f(x)}$为无穷小；

(2) 如果$f(x)$为无穷小，且$f(x) \neq 0$，那么$\dfrac{1}{f(x)}$为无穷大。

例 3

计算极限 $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{2x+5}{3x^2-2x-1}$。

无穷小的比较

一般情况下，两个无穷小的商的极限由于不遵循极限的运算法则，且不能立刻判断其极限是否存在。我们称这类极限通常称为“$\frac{0}{0}$”型不定式极限。

一般情况下，两个无穷小的商的极限由于不遵循极限的运算法则，且不能立刻判断其极限是否存在。我们称这类极限通常称为“$\dfrac{0}{0}$”型不定式极限。不定式极限各不相同，反映了作为分子、分母的两个无穷小趋于零的“快慢”程度不同。

无穷小的比较

一般情况下，两个无穷小的商的极限由于不遵循极限的运算法则，且不能立刻判断其极限是否存在。我们称这类极限通常称为“$\frac{0}{0}$”型不定式极限。不定式极限各不相同，反映了作为分子、分母的两个无穷小趋于零的“快慢”程度不同。

定义

设α,β为自变量的同一变化过程中的无穷小，$\alpha\neq 0$。

- 若$\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=0$，则称$\beta$是比$\alpha$高阶的无穷小，记作$\beta=o(\alpha)$；
- 若$\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=\infty$，则称$\beta$是比$\alpha$低阶的无穷小；
- 若$\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=C\neq 0$，则称$\beta$是比$\alpha$同阶的无穷小；当$C=1$时，则称$\beta$是比$\alpha$等价无穷小，记作$\alpha\sim\beta$；
- 若$\lim\dfrac{\beta}{\alpha^k}=C\neq 0\,(k>0)$，则称$\beta$是比$\alpha$的$k$价无穷小。

例如：

- 由$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{3x}=0$，$x^2$是比$3x$高阶的无穷小，记作$x^2=o(3x)\,(x\to 0)$；
- 由$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$，$\sin x$与$x$是等价无穷小，记作$\sin x\sim x\,(x\to 0)$；
- 由$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}}=\infty$，则当$n\to\infty$时，$\dfrac{1}{n}$是比$\dfrac{1}{n^2}$低阶的无穷小；
- 由$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\dfrac{1}{2}$，$1-\cos x$是$x$的二阶无穷小，也称$1-\cos x$和$x^2$是同阶无穷小。

定理

设α, β为自变量的同一变化过程中的无穷小，则β与α是等价无穷小的充分必要条件为$\beta = \alpha + o(\alpha)$。

定理

设α, β，α', β'为自变量的同一变化过程中的无穷小，又$\alpha \sim \alpha'$，$\beta \sim \beta'$，且$\lim \dfrac{\beta'}{\alpha'}$，则

$$\lim \frac{\beta}{\alpha} = \lim \frac{\beta'}{\alpha'}.$$

我们总结以下等价无穷小：

我们总结以下等价无穷小：当$x \to 0$时，

$$x \sim \sin x \sim \tan x \sim \arcsin x \sim \arctan x;$$

$$1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}, \quad (1+x)^{\alpha} - 1 \sim \alpha x \, (\alpha \neq 0).$$

等价无穷小的应用

我们总结以下等价无穷小：当$x \to 0$时，

$$x \sim \sin x \sim \tan x \sim \arcsin x \sim \arctan x;$$

$$1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}, \quad (1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x \, (\alpha \neq 0).$$

除了以上等价无穷小外，我们还可以得到：

我们总结以下等价无穷小：当$x \to 0$时，

$$x \sim \sin x \sim \tan x \sim \arcsin x \sim \arctan x;$$

$$1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}, \quad (1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x \, (\alpha \neq 0).$$

除了以上等价无穷小外，我们还可以得到：当$x \to 0$时，

$$x \sim \ln(1+x) \sim e^x - 1, \quad a^x - 1 \sim x \ln a \, (a > 0, \ a \neq 1).$$

例 4

计算极限：(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 2x}{\tan 5x}$；(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x^2+2x}$。

引例

例 4

计算极限：(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 2x}{\tan 5x}$；(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x^2+2x}$。

例 5

计算极限：(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln^2(1+x)}{1-\cos x}$；(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\arctan x}$。

例 4

计算极限：(1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan 2x}{\tan 5x}$；(2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x^2+2x}$。

例 5

计算极限：(1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln^2(1+x)}{1-\cos x}$；(2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\arctan x}$。

例 6

计算极限 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{e^x-e^a}{x-a}$。

例 4

计算极限：(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 2x}{\tan 5x}$；(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x^2+2x}$。

例 5

计算极限：(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln^2(1+x)}{1-\cos x}$；(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\arctan x}$。

例 6

计算极限 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{e^x-e^a}{x-a}$。

例 7

当$x\to 0$时，$(1+\alpha x^2)^{\frac{1}{3}}-1$与$\cos x-1$为等价无穷小，求常数$\alpha$的值。

函数的连续性及其性质

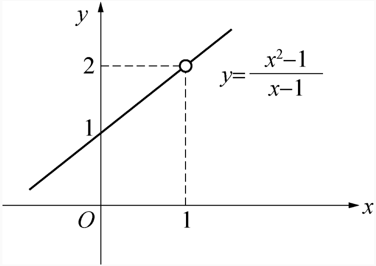
函数$y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$在$x=1$处的极限存在，但是该函数在$x=1$处没有定义，即函数曲线在$x=1$是“断开”的；

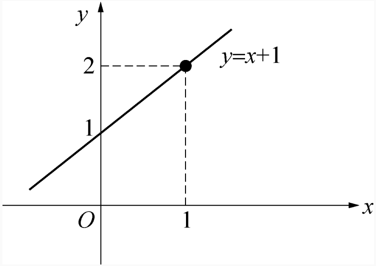
函数$y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$在$x=1$处的极限存在，但是该函数在$x=1$处没有定义，即函数曲线在$x=1$是“断开”的；

函数$y=x+1$，$\lim\limits_{x\to 1}(x+1)=2$，且函数在$x=1$处有定义，即曲线在$x=1$是“不断开”的。

函数$y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$在$x=1$处的极限存在，但是该函数在$x=1$处没有定义，即函数曲线在$x=1$是“断开”的；

函数$y=x+1$，$\lim\limits_{x\to1}(x+1)=2$，且函数在$x=1$处有定义，即曲线在$x=1$是“不断开”的。





定义 (函数的点态连续)

设函数$y = f(x)$在点x_0的某个邻域内有定义，如果 $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$，那么称$y = f(x)$在点$x_0$处连续。

定义 (函数的点态连续)

设函数$y = f(x)$在点x_0的某个邻域内有定义，如果 $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$，那么称$y = f(x)$在点$x_0$处连续。

函数的点态连续也等价于:

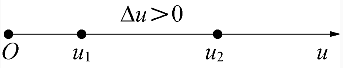
$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{当} |x - x_0| < \delta \text{时, 有} |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

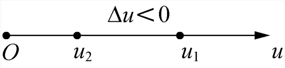
我们也可用增量来定义点态连续：设变量u从u_1变化至u_2，定义变化量$\Delta u := u_2 - u_1$。

函数连续的概念

我们也可用增量来定义点态连续：设变量u从u_1变化至u_2，定义变化量$\Delta u := u_2 - u_1$。Δu可正可负，那么

- $\Delta u > 0$时，我们定义变量u增加；
- $\Delta u < 0$时，我们定义变量u减少；





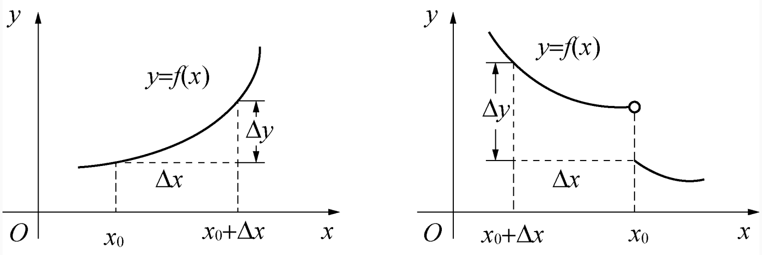
当自变量x从x_0变化到$x_0+\Delta x$时，固定x_0，此时函数y的对应增量为

$$\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0).$$

函数连续的概念

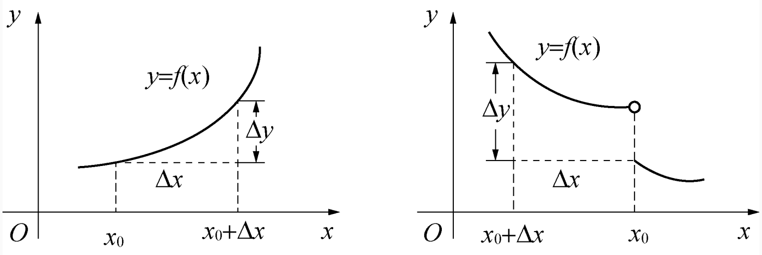
当自变量x从x_0变化到$x_0+\Delta x$时，固定x_0，此时函数y的对应增量为

$$\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0).$$



当自变量x从x_0变化到$x_0+\Delta x$时，固定x_0，此时函数y的对应增量为

$$\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0).$$



上述函数的点态连续定义可以简化为：

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0.$$

定义

设函数$y=f(x)$在点x_0的某个邻域内有定义。

- 如果 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim\limits_{\Delta x\to 0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=0$，那么称$y=f(x)$在点$x_0$处连续；
- 若$f(x_0^+):=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0)$，则称$f(x)$在点$x_0$处右连续；
- 若$f(x_0^-):=\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0)$，则称$f(x)$在点$x_0$处左连续。

函数连续的概念

定义

设函数$y = f(x)$在点x_0的某个邻域内有定义。

- 如果 $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim\limits_{\Delta x \to 0} [f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)] = 0$，那么称$y = f(x)$在点$x_0$处连续；
- 若$f(x_0^+) := \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$，则称$f(x)$在点$x_0$处右连续；
- 若$f(x_0^-) := \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$，则称$f(x)$在点$x_0$处左连续。

定理 (函数点态连续的充要条件)

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \iff f(x_0^+) = f(x_0^-) = f(x_0).$$

区间上的连续函数

定义

- 称f在开区间(a,b)(或$\mathbb{R}$)上连续，如果f在(a,b)(或$\mathbb{R}$)上处处连续；
- 称f在闭区间$[a,b]$上连续，如果f在(a,b)上处处连续、在a点处右连续且在b处左连续。

区间上的连续函数

定义

- 称f在开区间(a, b)(或$\mathbb{R}$)上连续，如果f在(a, b)(或$\mathbb{R}$)上处处连续；
- 称f在闭区间$[a, b]$上连续，如果f在(a, b)上处处连续、在a点处右连续且在b处左连续。

注

- 连续函数$y = f(x)$的图形是一条连续不断的曲线；
- 由于基本初等函数在其各自定义域内每点处的极限都存在，且等于该点处的函数值，因此**基本初等函数都是各自定义域内的连续函数**。
- n阶多项式$P_n(x) := a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$在$\mathbb{R}$上是连续的；
- 若多项式$P(x), Q(x)$满足$Q(x_0) \neq 0$，那么$F(x) := \dfrac{P(x)}{Q(x)}$在其定义域内的每个点都连续。

例 1

用连续性定义证明$y = x^2$在x_0处连续。

引例

例 1

用连续性定义证明$y = x^2$在x_0处连续。

例 2

证明函数$y = \sin x$在$(-\infty, \infty)$上连续。

考虑 $\lim_{x\to x_0} f(x)$，需要满足函数$y=f(x)$在点x_0的某个邻域内有定义为前提。

定义 (函数的间断点)

设函数$y=f(x)$在点x_0的某个邻域内有定义，且函数$f(x)$有下列三种情形之一：

考虑$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$，需要满足函数$y=f(x)$在点$x_0$的某个邻域内有定义为前提。

定义 (函数的间断点)

设函数$y=f(x)$在点x_0的某个邻域内有定义，且函数$f(x)$有下列三种情形之一：

(1) f在$x=x_0$处没有定义；

考虑$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$，需要满足函数$y=f(x)$在点$x_0$的某个邻域内有定义为前提。

定义 (函数的间断点)

设函数$y=f(x)$在点x_0的某个邻域内有定义，且函数$f(x)$有下列三种情形之一：

(1) f在$x=x_0$处没有定义；

(2) f在$x=x_0$处有定义，但$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$不存在（或者$f(x_0^+), f(x_0^-)$有一个不存在，或者二者存在但是不相等）；

考虑$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$，需要满足函数$y=f(x)$在点$x_0$的某个邻域内有定义为前提。

定义 (函数的间断点)

设函数$y=f(x)$在点x_0的某个邻域内有定义，且函数$f(x)$有下列三种情形之一：

(1) f在$x=x_0$处没有定义；

(2) f在$x=x_0$处有定义，但$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$不存在（或者$f(x_0^+), f(x_0^-)$有一个不存在，或者二者存在但是不相等）；

(3) f在$x=x_0$处有定义，$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$存在，但$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\neq f(x_0)$。

考虑$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$，需要满足函数$y = f(x)$在点$x_0$的某个邻域内有定义为前提。

定义 (函数的间断点)

设函数$y = f(x)$在点x_0的某个邻域内有定义，且函数$f(x)$有下列三种情形之一：

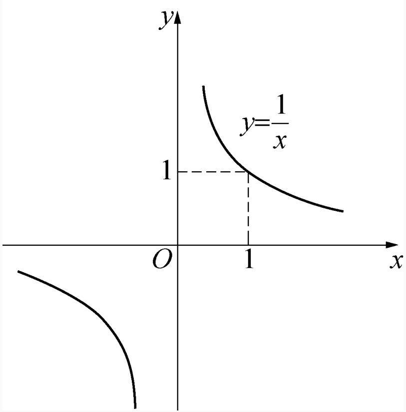
(1) f在$x = x_0$处没有定义；

(2) f在$x = x_0$处有定义，但$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$不存在（或者$f(x_0^+), f(x_0^-)$有一个不存在，或者二者存在但是不相等）；

(3) f在$x = x_0$处有定义，$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$存在，但$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$。

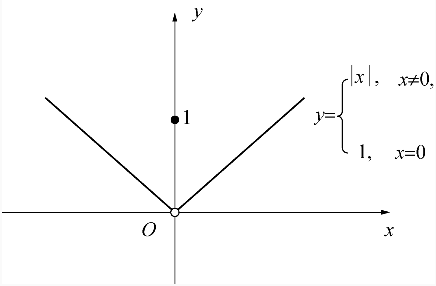
称函数$f(x)$在$x = x_0$处**间断（不连续）**，称x_0为f的**间断点（不连续点）**。

函数$f(x) = \dfrac{1}{x}$在$x = 0$处没有定义，那么$x = 0$是它的间断点：



函数$f(x)=\begin{cases}|x|, & x\neq 0,\\ 1, & x=0.\end{cases}$在$x=0$处满足

$$\lim_{x\to 0}|x|=0\neq f(0),$$



则$x=0$是它的间断点。

定义

设x_0为函数f的一个间断点，

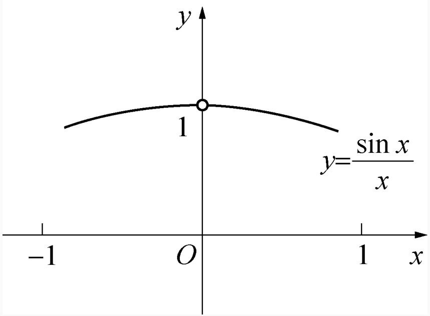
(1) 若$f(x_0^+), f(x_0^-)$存在，则称x_0为函数f的**第一类间断点**；

- 若$f(x_0^+) = f(x_0^-)$（$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$存在），则称$x_0$为函数$f$的**可去间断点**；
- 若$f(x_0^+) \neq f(x_0^-)$，则称x_0为函数f的**跳跃间断点**；

(2) 若$f(x_0^+), f(x_0^-)$至少有一个不存在，则称x_0为函数f的**第二类间断点**（不是第一类间断点的均是第二类间断点）；

(3) 若$f(x_0^+) = \infty$或$f(x_0^-) = \infty$，则称x_0为函数f的**无穷间断点**。

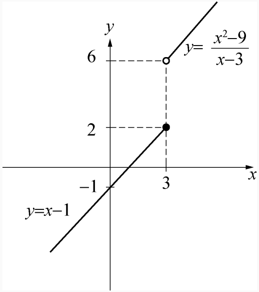
函数$f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$在$x=0$处没有定义，但是$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$，那么$x=0$是它的第一类间断点，也是可去间断点。



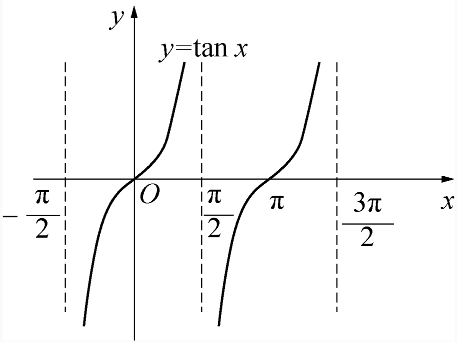
函数$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-9}{x-3}, & x>3,\\ x-1, & x\le 3.\end{cases}$在$x=3$处有定义，但是

$$\lim_{x\to3^+}f(x)=\lim_{x\to3^+}\frac{x^2-9}{x-3}=\lim_{x\to3^+}(x+3)=6,\quad \lim_{x\to3^+}f(x)=\lim_{x\to3^+}(x-1)=2,$$

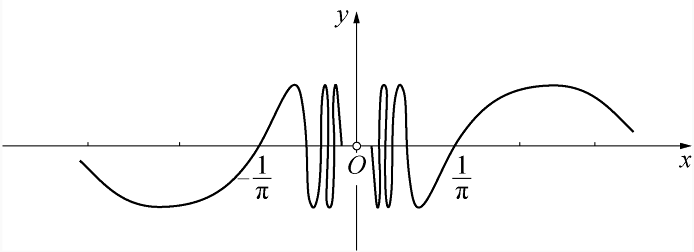
于是$f(3^+)\neq f(3^-)$，即$x=3$是它的第一类间断点，也是跳跃间断点。



函数$f(x) = \tan x$在$x = \dfrac{\pi}{2}$处没有定义，且$\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} f(x) = \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \tan x = \infty$，那么$x = \dfrac{\pi}{2}$是它的第二类间断点，也是无穷间断点。



函数$f(x) = \sin\frac{1}{x}$在$x = 0$处没有定义，且$x \to 0$时，$\sin\frac{1}{x}$在$[-1, 1]$之间变动无限多次，那么$x = 0$是它的第二类间断点，我们称这个间断点是它的**振荡间断点**。



例 3

讨论$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{1+x^n}\ (x \geq 0)$的连续性。

例 3

讨论$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^n}{1+x^n}\ (x\geq 0)$的连续性。

例 4

讨论$f(x)=\begin{cases}\cos\frac{\pi}{2}x, & |x|\leq 1,\\ |x-1|, & |x|>1.\end{cases}$的间断点。

定理 (连续函数的四则运算)

设函数$(x), g(x)$在点x_0处连续，则

(1) $f(x) \pm g(x)$在点$x = x_0$处连续；

(2) $f(x) \cdot g(x)$，$\dfrac{f(x)}{g(x)}\,(g(x_0) \neq 0)$在点$x = x_0$处连续。

初等函数的连续性

定理 (连续函数的四则运算)

设函数$(x), g(x)$在点x_0处连续，则

(1) $f(x) \pm g(x)$在点$x = x_0$处连续；

(2) $f(x) \cdot g(x)$，$\dfrac{f(x)}{g(x)}\,(g(x_0) \neq 0)$在点$x = x_0$处连续。

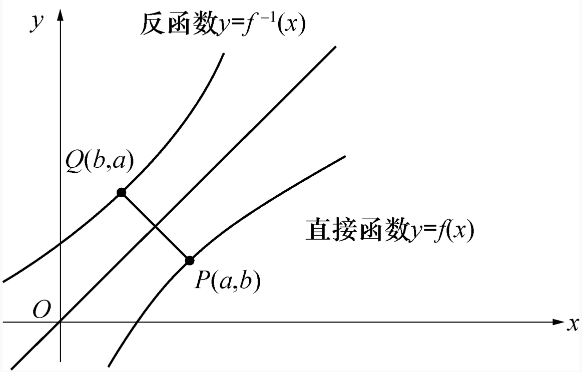
定理 (反函数的连续性)

如果函数$y = f(x)$在区间I_x上单调增加（或单调减少）且连续，那么它的反函数$x = f^{-1}(y)$也在对应的区间

$$I_y = \{y \mid y = f(x),\, x \in I_x\}$$

上单调增加（或单调减少）且连续。

从几何上看，原函数与反函数之间关于直线$y=x$对称，因此若原函数连续，则反函数也连续：



定理 (复合函数的连续性（一）)

设函数$y=f[g(x)]$由函数$u=g(x)$与函数$y=f(u)$复合而成，$\mathring{U}(x_0)\subset D_{f\circ g}$，若$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=u_0$而函数$y=f(u)$在$u=u_0$处连续，则

$$\lim_{x\to x_0} f[g(x)]=f\left[\lim_{x\to x_0} g(x)\right].$$

定理 (复合函数的连续性（一））

设函数$y = f[g(x)]$由函数$u = g(x)$与函数$y = f(u)$复合而成， $\mathring{U}(x_0) \subset D_{f \circ g}$，若$\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = u_0$而函数$y = f(u)$在$u = u_0$处连续，则

$$\lim_{x \to x_0} f[g(x)] = f\left[\lim_{x \to x_0} g(x)\right].$$

定理 (复合函数的连续性（二））

设函数$y = f[g(x)]$由函数$u = g(x)$与函数$y = f(u)$复合而成， $\mathring{U}(x_0) \subset D_{f \circ g}$。若函数$u = g(x)$在$x = x_0$处连续，$g(x_0) = u_0$，而函数$y = f(u)$在$u = u_0$处连续，则复合函数$y = f[g(x)]$在$x = x_0$处连续。

注

- 函数的定义区间是指包含在定义域内的区间；
- 基本初等函数在其定义域内是连续的；
- 由初等函数的定义及连续函数四则运算、复合函数的连续性的相关结论可以得到：一切初等函数在其定义区间内是连续的；
- 分段函数在分界点的连续性一般需按定义加以讨论；
- 若函数$f(x)$在$x = x_0$处连续，按定义有$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$。因此，若求$\lim_{x \to x_0} f(x)$，只需求出函数值$f(x_0)$即可。

例 5

计算极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(x+1)}{x}$。

例 5

计算极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(x+1)}{x}$。

例 6

计算极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}$。

例 5

计算极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(x+1)}{x}$。

例 6

计算极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}$。

例 7

计算极限$\lim\limits_{x\to\infty}\cos(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})$。

定义

设函数$f(x)$在区间I上有定义。

- 若存在$x_0 \in I$，使得

$$f(x) \le f(x_0), \quad \forall\, x \in I, \quad x \ne x_0.$$

  则称$f(x_0)$为$f(x)$在区间I上的最大值；
- 若存在$x_0' \in I$，使得

$$f(x) \ge f(x_0'), \quad \forall\, x \in I, \quad x \ne x_0'.$$

  则称$f(x_0')$为$f(x)$在区间I上的最小值；

闭区间上连续函数最值定理

定理 (最大值最小值定理)

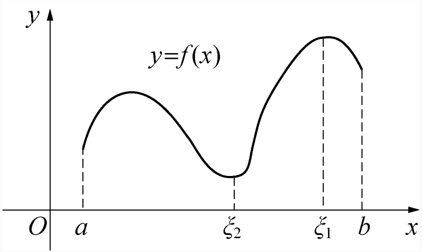
闭区间上连续函数在该闭区间上必有界，且有最大值和最小值：

$$\text{若 } f \in C([a,b]),\ \text{则有 } \xi_1, \xi_2 \in [a,b],\ s.t.,\ f(\xi_1) = \max_{x\in[a,b]} f(x),\ f(\xi_2) = \min_{x\in[a,b]} f(x).$$

定理 (最大值最小值定理)

闭区间上连续函数在该闭区间上必有界，且有最大值和最小值：

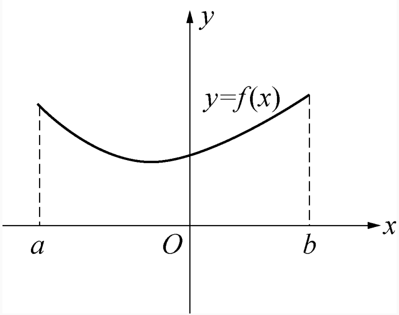
$$\text{若 } f \in C([a,b]), \text{ 则有 } \xi_1, \xi_2 \in [a,b],\ s.t.,\ f(\xi_1) = \max_{x\in[a,b]} f(x),\ f(\xi_2) = \min_{x\in[a,b]} f(x).$$

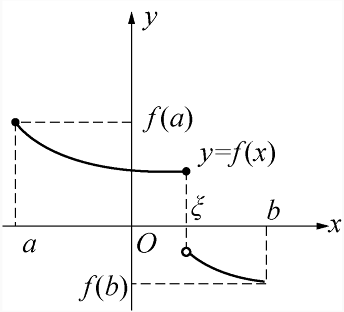


方程$f(x) = 0$的根称为函数$f(x)$的**零点**。

方程$f(x)=0$的根称为函数$f(x)$的**零点**。并非所有的函数都有零点：

方程$f(x) = 0$的根称为函数$f(x)$的零点。并非所有的函数都有零点：





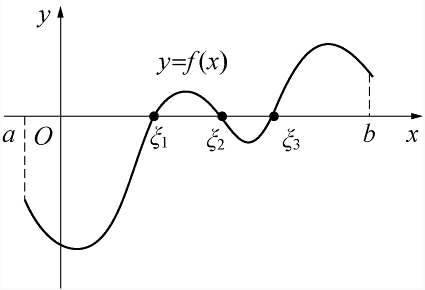
定理 (零点定理)

若函数$f(x)$在$[a,b]$上连续，且$f(a)\cdot f(b)<0$，则至少存在一点$\xi\in(a,b)$，使得$f(\xi)=0$。

闭区间上连续函数介值定理

定理 (零点定理)

若函数$f(x)$在$[a,b]$上连续，且$f(a)\cdot f(b)<0$，则至少存在一点$\xi\in(a,b)$，使得$f(\xi)=0$。



闭区间上连续函数介值定理

定理 (介值定理)

- 若函数$f(x)$在$[a,b]$上连续，且$f(a)=A\neq B=f(b)$，则对于A,B之间的任意一个数C，在(a,b)内至少存在一点ξ，使得$f(\xi)=C$；

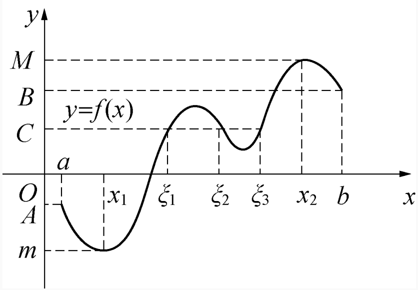
闭区间上连续函数介值定理

定理 (介值定理)

- 若函数$f(x)$在$[a,b]$上连续，且$f(a)=A\neq B=f(b)$，则对于A,B之间的任意一个数C，在(a,b)内至少存在一点ξ，使得$f(\xi)=C$；
- 闭区间连续函数必取得介于最小值m和最大值M之间的任何值。

定理 (介值定理)

- 若函数$f(x)$在$[a,b]$上连续，且$f(a)=A\neq B=f(b)$，则对于A,B之间的任意一个数C，在(a,b)内至少存在一点ξ，使得$f(\xi)=C$；
- 闭区间连续函数必取得介于最小值m和最大值M之间的任何值。



例 8

试证方程$x \cdot 2^x = 1$至少有一个小于1的正根。

例 8

试证方程$x\cdot 2^x=1$至少有一个小于1的正根。

例 9

估计方程$x^3-6x+2=0$的根的位置。

引例

例 8

试证方程$x \cdot 2^x = 1$至少有一个小于1的正根。

例 9

估计方程$x^3 - 6x + 2 = 0$的根的位置。

例 10

如果函数$f(x)$在$[a, b]$上连续，且$f(a) < a, f(b) > b$，证明在(a, b)内至少有一点c，使得$f(c) = c$。

The End