

习题 1 请计算下列定积分:

$$(1) \int_0^4 \frac{|x-1|}{|x-2|+|x-3|} dx; \quad (2) \int_{\frac{1}{e}}^e |\ln x| dx.$$

习题 2 请计算下列定积分:

$$(1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx; \quad (2) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{2n} x dx.$$

习题 3 请计算下列定积分:

$$(1) \int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx; \quad (2) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx; \quad (3) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^n x}{\sin^n x + \cos^n x} dx.$$

习题 4 设函数 f 在 $[0, 1]$ 上连续, 证明 $\int_0^{\pi} xf(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\sin x) dx$, 并使用这一结论计算 $\int_0^{\pi} \frac{x \sin^{2n} x}{\sin^{2n} x + \cos^{2n} x} dx$, $n \in \mathbb{N}$.

习题 5 设周期函数 $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 连续且具有周期 $T > 0$, 证明对任意实数 a ,

$$\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_0^T f(x) dx.$$

习题 6 设正函数 f 在 $[0, 1]$ 上连续, 计算 $\int_0^1 \frac{f(x)}{f(x) + f(1-x)} dx$.

习题 7 设偶函数 f 在 $[-a, a]$ 上连续, $a > 0$, 证明 $\int_{-a}^a \frac{f(x)}{1 + e^x} dx = \int_0^a f(x) dx$.

习题 8 设正函数 f 在 $[a, b]$ 上连续, 且 $\int_a^b f(x) dx = 0$, 证明函数 f 在区间 $[a, b]$ 上是零函数.

习题 9* 设函数 f 在 $[a, b]$ 上连续, 且对每个 α, β , $a \leq \alpha \leq \beta \leq b$, $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = 0$, 证明函数 f 在区间 $[a, b]$ 上是零函数.

姓名:

学号:

专业:

高等数学 定积分的计算
