习题 1 请叙述二元函数$f(x,y)$在有界闭区域D上的二重积分的定义, 其中你需要详细描述四个主要步骤.

习题 2 请计算下列累次积分:

(1) $\displaystyle\int_{-3}^{3}\left[\int_{0}^{\pi/2}(y+y^2\cos x)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y.$

(2) $\displaystyle\int_{1}^{3}\left[\int_{1}^{5}\frac{\ln y}{xy}\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x.$

(3) $\displaystyle\int_{1}^{4}\left[\int_{1}^{2}\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x.$

(4) $\displaystyle\int_{0}^{1}\left[\int_{0}^{1}\left(xy\sqrt{x^2+y^2}\right)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x.$

习题 3 请计算下列矩形区域上的重积分:

(1) $\iint\limits_D (y+xy^{-2})\mathrm{d}\sigma,\ \ D=\{(x,y)\mid 0\le x\le 2, 1\le y\le 2\}.$

(2) $\iint\limits_D \frac{xy^2}{x^2+1}\mathrm{d}\sigma,\ \ D=\{(x,y)\mid 0\le x\le 1, -3\le y\le 3\}.$

(3) $\iint\limits_D x\sin(x+y)\mathrm{d}\sigma,\ \ D=[0,\pi/6]\times[0.\pi/3].$

(4) $\iint\limits_D \frac{1}{1+x+y}\mathrm{d}\sigma,\ \ D=[1,3]\times[1,2].$

(5) $\iint\limits_D \frac{xy}{1+x^4}\mathrm{d}\sigma,\ \ D=[-1,1]\times[0,1].$

(6) $\iint\limits_D (1+x^2\sin y+y^2\sin x)\mathrm{d}\sigma,\ \ D=[-\pi,\pi]\times[-\pi,\pi].$

习题 4 请计算下列累次积分:

(1) $\int_0^4 \left[\int_0^{\sqrt{y}} xy^2 \mathrm{d}x\right] \mathrm{d}y.$

(2) $\int_0^2 \left[\int_y^{2y} xy \mathrm{d}x\right] \mathrm{d}y.$

(3) $\int_0^1 \left[\int_0^{x^2} \cos(x^3) \mathrm{d}y\right] \mathrm{d}x.$

(4) $\int_0^1 \left[\int_0^{e^x} \sqrt{1+e^x} \mathrm{d}y\right] \mathrm{d}x.$

习题 5 请改变积分顺序计算下列累次积分:

(1) $\int_0^1 \left[\int_{3y}^{3} e^{x^2} \mathrm{d}x\right] \mathrm{d}y.$

(2) $\int_0^{\sqrt{\pi}} \left[\int_y^{\sqrt{\pi}} \cos(x^2) \mathrm{d}x\right] \mathrm{d}y.$

(3) $\int_0^1 \left[\int_{\arcsin y}^{\pi/2} \cos x \sqrt{1+\cos^2 x} \mathrm{d}x\right] \mathrm{d}y.$

(4) $\int_0^8 \left[\int_{\sqrt[3]{y}}^{2} e^{x^4} \mathrm{d}x\right] \mathrm{d}y.$

(5) $\int_0^4 \left[\int_{\sqrt{x}}^{2} \frac{1}{y^3+1} \mathrm{d}y\right] \mathrm{d}x.$

(6) $\int_0^1 \left[\int_x^1 e^{x/y} \mathrm{d}y\right] \mathrm{d}x.$

习题 6 请计算下列一般有界闭区域上的重积分:

(1) $\iint\limits_D y^2 e^{xy}\mathrm{d}\sigma$, D为由$y=x, y=4, x=0$围成的有界闭区域.

(2) $\iint\limits_D x\cos y\mathrm{d}\sigma$, D为由$y=0, y=x^2, x=1$围成的有界闭区域.

(3) $\iint\limits_D xy^2\mathrm{d}\sigma$, D为由$x=0, x=\sqrt{1-y^2}$围成的有界闭区域.

(4) $\iint\limits_D (x+2)\mathrm{d}\sigma$, $D=\{(x,y)\mid 0\le y\le\sqrt{9-x^2}\}$.

(5) $\iint\limits_D (2+x^2y^3-y^2\sin x)\mathrm{d}\sigma$, $D=\{(x,y)\mid |x|+|y|\le 1\}$.

(6) $\iint\limits_D (ax^3+by^3+\sqrt{a^2-x^2})\mathrm{d}\sigma$, $D=[-a,a]\times[-b,b]$.

习题 7 请使用极坐标变换计算下列一般有界闭区域上的重积分:

(1) $\iint\limits_D x^2y\mathrm{d}\sigma$, D为圆心为原点且半径为5的圆盘.

(2) $\iint\limits_D \sin(x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma$, D为第一象限内圆心为原点且半径分别为1和3的圆环内.

(3) $\iint\limits_D \dfrac{y^2}{x^2+y^2}\mathrm{d}\sigma$, D为$x^2+y^2=a^2$和$x^2+y^2=b^2$围成的圆环, $0<a<b$.

(4) $\iint\limits_D \cos(\sqrt{x^2+y^2})\mathrm{d}\sigma$, D为圆心为原点且半径为2的圆盘.

(5) $\iint\limits_D e^{-x^2-y^2}\mathrm{d}\sigma$, D为半圆盘$x=\sqrt{4-y^2}$与y轴围成的区域.

(6) $\iint\limits_D \arctan(y/x)\mathrm{d}\sigma$, $D=\{(x,y)\mid 1\le x^2+y^2\le 4,\ 0\le y\le x\}$.

习题 8 请将下列累次积分转化为极坐标形式下的累次积分:

(1) $\displaystyle\int_{-3}^{3}\left[\int_{0}^{\sqrt{9-x^2}}\sin(x^2+y^2)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x.$ (2) $\displaystyle\int_{0}^{a}\left[\int_{-\sqrt{a^2-y^2}}^{0}x^2y\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y.$

(3) $\displaystyle\int_{0}^{1}\left[\int_{0}^{\sqrt{2-y^2}}(x+y)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y.$ (4) $\displaystyle\int_{0}^{2}\left[\int_{0}^{\sqrt{2x-x^2}}\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x.$

习题 9 请将下列累次积分转化为极坐标形式下的累次积分并计算:

$$\int_{1/\sqrt{2}}^{1}\left[\int_{\sqrt{1-x^2}}^{x}xy\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x+\int_{1}^{\sqrt{2}}\left[\int_{0}^{x}xy\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x+\int_{\sqrt{2}}^{2}\left[\int_{0}^{\sqrt{4-x^2}}xy\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x.$$

习题 10 请计算下列曲面围成几何体的体积:

(1) 曲面$z = x\sec^2 y$与平面$z = 0, x = 0, x = 2, y = 0$及$y = \pi/4$.

(2) 曲面$z = 2 + x^2 + (y-2)^2$与平面$z = 1, x = 1, x = -1, y = 0$及$y = 4$.

(3) 三个坐标面与平面$3x + 2y + z = 6$.

(4) 在第一象限内由柱面$z = x^2, y = x^2$及平面$z = 0, y = 4$.

(5) 柱面$x^2 + y^2 = r^2$及$y^2 + z^2 = r^2$.

(6) 在平面$x - 2y + z = 1$下且在由$x + y = 1$和$x^2 + y = 1$围成有界闭区域上.

(7) 在曲面$z = 1 + x^2y^2$下且在由$x = y^2$和$x = 4$围成有界闭区域上.

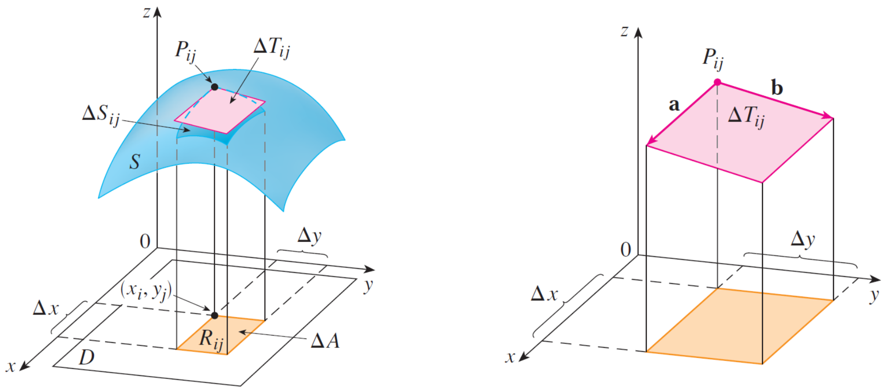
(8) 曲面$x = 1 - x^2 - y^2$与平面$z = 0$.

(9) 在曲面$z = x^2 + y^2$之下, 平面$z = 0$之上, 柱面$x^2 + y^2 = 2x$内.

习题 11 阅读以下内容并回答下列问题.

应用二重积分我们可以计算空间曲面的表面积.

具体地，设S表示定义在矩形区域D上的二元函数$z = f(x,y)$所对应的曲面，其中$f(x,y)$具有连续的偏导函数且$f(x,y) \geq 0$, $(x,y) \in D$. 如左图所示:



我们设定:

(1) (x_i, y_j)为小矩形R_{ij}内靠近坐标原点最近的点;

(2) $P(x_i, y_j, f(x_i, y_j))$为(x_i, y_j)在S上对应的点;

于是S在$P_{ij}(x_i, y_j, f(x_i, y_j))$位置的切平面可以看成是$S$在$P_{ij}$处的线性逼近，而切平面的每个切片$\Delta T_{ij}$在坐标面$xOy$上的投影落在$R_{ij}$上并且其面积可以近似地看成是$R_{ij}$上部分曲面$\Delta S_{ij}$的面积. 因此所有切片$\Delta T_{ij}$的面积总和可以看成是曲面$S$的表面积. 当切割矩形区域$D$足够细时，我们可以定义曲面$S$的表面积为

$$\mathrm{Area}(S) := \lim_{m,n \to} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \mathrm{Area}(\Delta T_{ij}).$$

为了更精确地计算曲面S的表面积，如右图所示，我们从点P_{ij}出发沿着切片ΔT_{ij}的边长长度取向量$\boldsymbol{a}$及$\boldsymbol{b}$，那么ΔT_{ij}的面积为$|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}|$. 另一方面，注意到曲面$S$上过点$P_{ij}$沿着向量$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$方向的曲线对应的切线斜率分别是$f_x(x_i, y_j)$和$f_y(x_i, y_j)$，因此

$$\boldsymbol{a} = \Delta x \boldsymbol{i} + (f_x(x_i, y_j)\Delta x)\boldsymbol{k}, \quad \boldsymbol{b} = \Delta y \boldsymbol{j} + (f_y(x_i, y_j)\Delta y)\boldsymbol{k}, \ (\text{为什么?})$$

于是

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \Delta x & 0 & f_x(x_i, y_j)\Delta x \\ 0 & \Delta y & f_y(x_i, y_j)\Delta y \end{vmatrix} = (-f_x(x_i, y_j)\boldsymbol{i} - f_y(x_i, y_j)\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k})\Delta x \Delta y,$$

所以

$$\text{Area}(\Delta T_{ij}) = |\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}| = \sqrt{[f_x(x_i, y_j)]^2 + [f_y(x_i, y_j)]^2 + 1}\Delta x \Delta y.$$

综上, 按照上述表面积的定义及二重积分的定义, 我们有

$$\begin{aligned}
\text{Area}(S) &= \lim_{m,n\to} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \text{Area}(\Delta T_{ij}) \\
&= \lim_{m,n\to} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \sqrt{[f_x(x_i, y_j)]^2 + [f_y(x_i, y_j)]^2 + 1} \qquad \underbrace{\Delta x \Delta y}_{\text{回忆面积微元 } \mathrm{d}\sigma = ddx\mathrm{d}y} \\
&= \iint\limits_{D} \sqrt{[f_x(x, y)]^2 + [f_y(x, y)]^2 + 1}\mathrm{d}\sigma.
\end{aligned}$$

类似地, 对于一般的有界闭区域D, 当$f(x, y)$在D上有连续的偏导函数f_x, f_y, 我们有

$$\text{Area}(S) = \iint\limits_{D} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\mathrm{d}\sigma.$$

请根据上述表面积计算表达式, 计算下列曲面的表面积:

(1) 计算平面$z = 9$截取曲面$z = x^2 + y^2$的部分.

(2) 矩形区域$[0, 5] \times [1, 4]$上方的平面$z = 2 + 3x + 4y$.

(3) 曲面$z = 1 + 3x + 2y^2$对应坐标面xOy内$(0, 0), (0, 1), (2, 1)$三个点围成三角形区域的部分曲面.

(4) 球面$x^2 + y^2 + z^2 = 4$在平面$z = 1$上方的部分.