

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
CENTRO TECNOLÓGICO
DEPARTAMENTO DE INFORMÁTICA**

**4º Exercício Computacional de Algoritmos Numéricos II
Relatório**

**Matheus Gomes Arante de Souza
Vinícius Lucas dos Reis**

**Vitória
Maio de 2019**

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
CENTRO TECNOLÓGICO
DEPARTAMENTO DE INFORMÁTICA**

**Matheus Gomes Arante de Souza
Vinícius Lucas dos Reis**

**4º Exercício Computacional de Algoritmos Numéricos II
Relatório**

Neste relatório analisaremos o comportamento do método das diferenças finitas para resolver problemas unidimensionais de valor de contorno utilizando o ambiente de programação Octave.

**Vitória
Maio de 2019**

Sumário

1	Introdução	1
2	Análise Assintótica do Erro Cometido	2
3	Aplicações	3
3.1	Conservação de Calor em uma haste longa e fina	3
3.2	Resfriador unidimensional	4
4	Conclusão	7
5	Referências	8

1 Introdução

Problemas de valor de contorno (PVC) são caracterizados por um sistema de equações diferenciais e um conjunto de condições que são fornecidas para determinados pontos, conhecidas como condições de contorno.

Para resolver estes problemas, ao invés de encontrar a função que resolve seu sistema de equações diferenciais, podemos utilizar o Método de Diferenças Finitas. Neste, buscamos aproximações da função em um domínio de pontos, que será discretizado. Entretanto, para lidar com as derivadas que aparecem na equação diferencial, as substituímos por aproximações provenientes do polinômio de Taylor, de modo que envolvam apenas os valores da função (diferença atrasada, diferença adiantada e diferença central).

Neste exercício computacional, analisaremos o uso do Método de Diferenças Finitas para solucionar problemas de valor de contorno.

2 Análise Assintótica do Erro Cometido

A solução exata do PVC é $u(x) = x^2 + x - 1$

Condições de contorno:

$$u'' - \frac{1}{2}u' + u = x^2 + \frac{1}{2} \text{ para } x \in (0, 1)$$

$$u(0) = -1$$

$$u(1) = 1$$

ou

$$u'(0) = 1$$

$$u(1) = 1$$

ou

$$u(0) = -1$$

$$-u'(1) + 2u(1) = -1$$

Caso	Condição de Contorno	a
1	0: Valor prescrito 1: Valor prescrito	-0.87914
2	0: Fluxo prescrito 1: Valor prescrito	0.46355
3	0: Valor prescrito 1: Condição mista	0.429316

Tabela 1: Valores da inclinação das retas de erro

Nota-se que dependendo da condição de contorno que é fornecido, o método das diferenças finitas (MDF) apresentou diferentes ordens de aproximação. No caso 1, onde foram informados os valores exatos das extremidades, o método conseguiu uma ótima aproximação. Mas nos demais casos esse desempenho foi afetado pela baixa precisão das informações que lhe foi concedidas. Ao se definir a derivada da função em determinado ponto, é dado um norte para o algoritmo encontrar a solução, porém não consegue restringir da mesma forma o conjunto de possibilidades. E este fato é acentuado quando é informado apenas uma combinação linear da função com sua derivada, num dado ponto.

Ao observar a tabela de inclinações, identificamos que no caso 1 a inclinação da reta do erro era decrescente ($a = -0.87914$), sendo que o esperado era que o valor da inclinação de cada reta crescesse a medida que aumentássemos a discretização do domínio, uma vez que para os eixos utilizados, a inclinação positiva da reta representa um decremento no valor que está sendo considerado (no caso, o erro da solução encontrada). Um dos fatores que podem ter culminado nesse imprevisto é o acúmulo de erros provenientes das operações de ponto flutuante que foram realizadas no decorrer do processo.

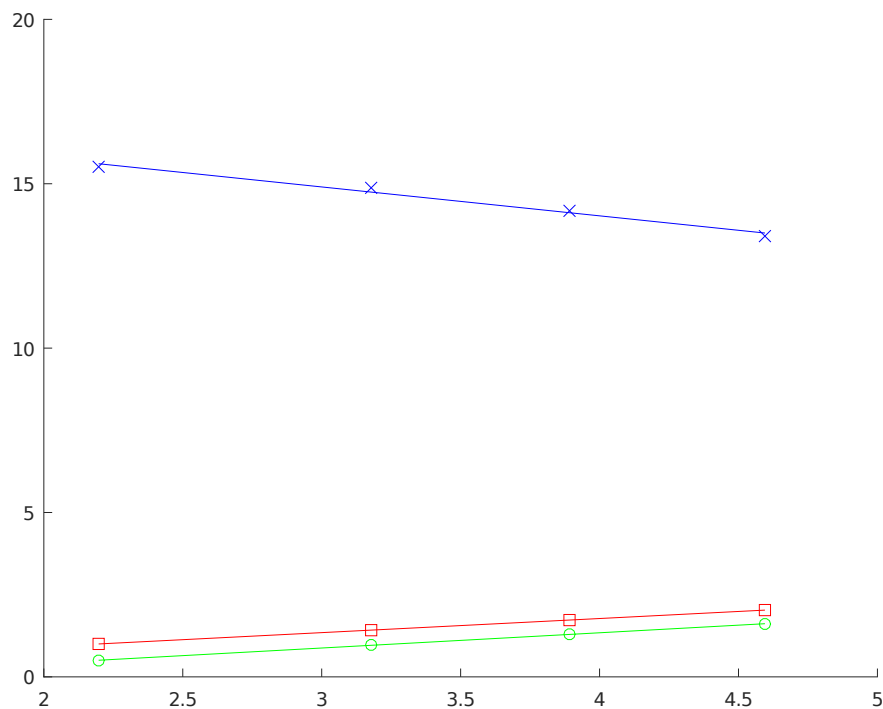


Figura 1: Reta do erro do PVC em cada caso ($-\log h \times -\log ||E||$)
Azul - Caso 1, Vermelho - Caso 2 e Verde - Caso 3

3 Aplicações

3.1 Conservação de Calor em uma haste longa e fina

Condições de contorno:

$$\frac{d^2 T}{dx^2} + K(T_a - T) = 0 \text{ em } (0, L)$$

$$T(0) = T_1$$

$$T(L) = T_2$$

O problema trata de uma haste longa e fina que está conectada por seus extremos em dois locais com temperaturas distintas. A primeira extremidade encontra-se com $40^\circ C$ e a última com $200^\circ C$.

Neste caso, o PVC calcula a temperatura da haste em cada ponto de sua extensão, sendo N o número de pontos considerados. Pelo gráfico a seguir pode-se concluir que a temperatura ao longo da haste é distribuída aproximadamente de forma linear.

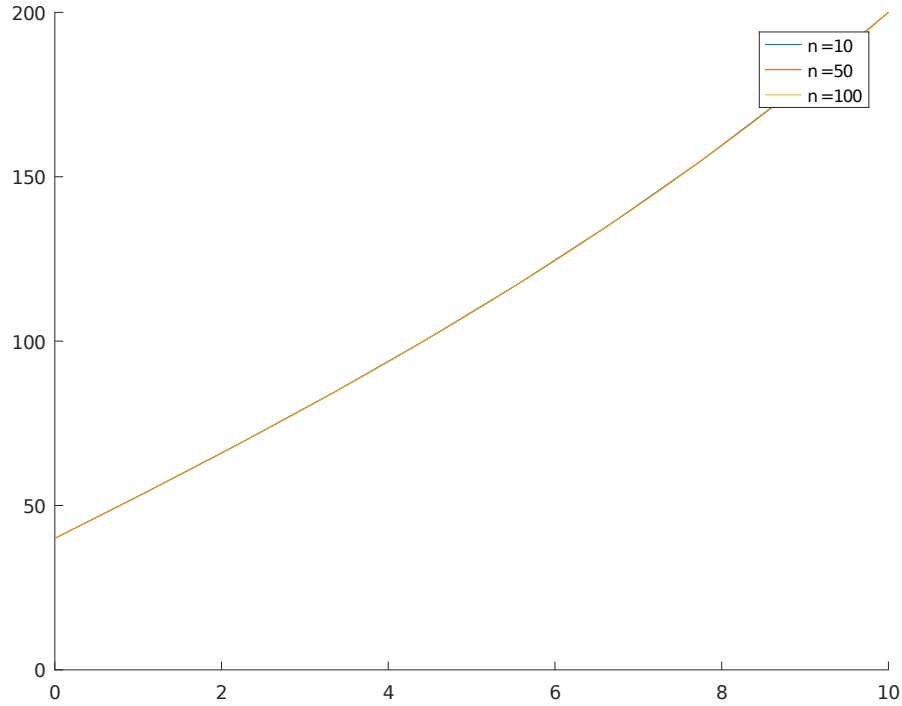


Figura 2

3.2 Resfriador unidimensional

Condições de contorno:

$$u(0) = u_0$$

$$c_{ref}u(L) + K \frac{du(L)}{dx} = c_{ref}u_{ref}$$

K é a condutividade térmica, u_{ref} é uma temperatura de referência, u_0 é a temperatura inicial da massa e c_{ref} é a habilidade da superfície do resfriador de transmitir calor na região. A constante C e o termo fonte f são funções da geometria do resfriador dados por:

$$C \equiv \left(\frac{2W + 2T}{TW} \right) c_{ref} \text{ e } f \equiv Cu_{ref}$$

A temperatura inicial da massa $u_0 = 160$, a temperatura de referência $u_{ref} = 70$, $K = 0.001$, $T = 0.1$, $W = 10$ e $L = 1$. Podemos considerar diferentes possibilidades para o coeficiente c_{ref} , por exemplo, $c_{ref} = 0.0001$, $c_{ref} = 0.001$, $c_{ref} = 0.01$, $c_{ref} = 0.1$.

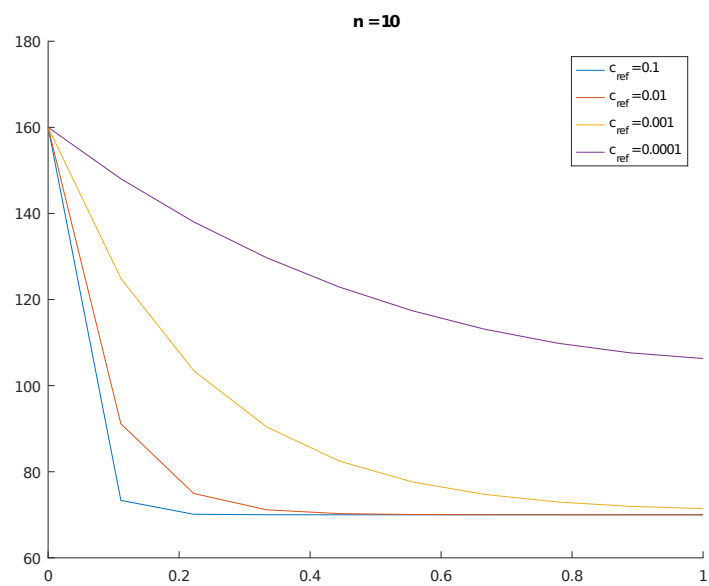


Figura 3: Gráfico da solução aproximada para $n = 10$

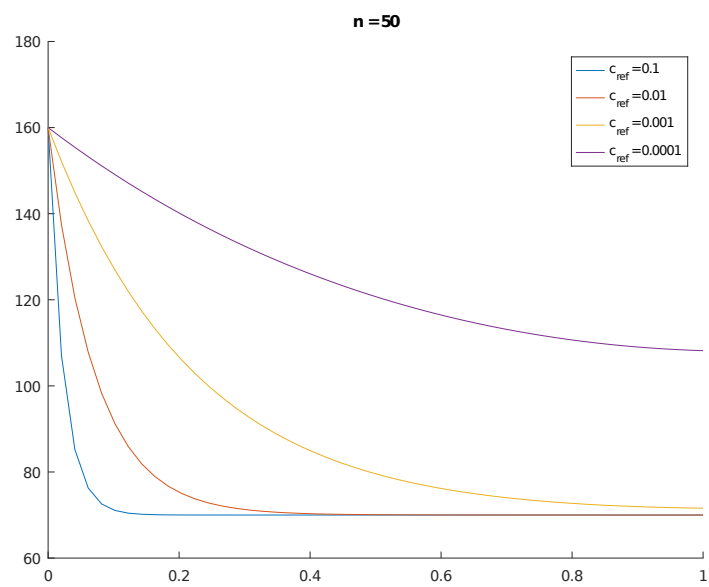


Figura 4: Gráfico da solução aproximada para $n = 50$

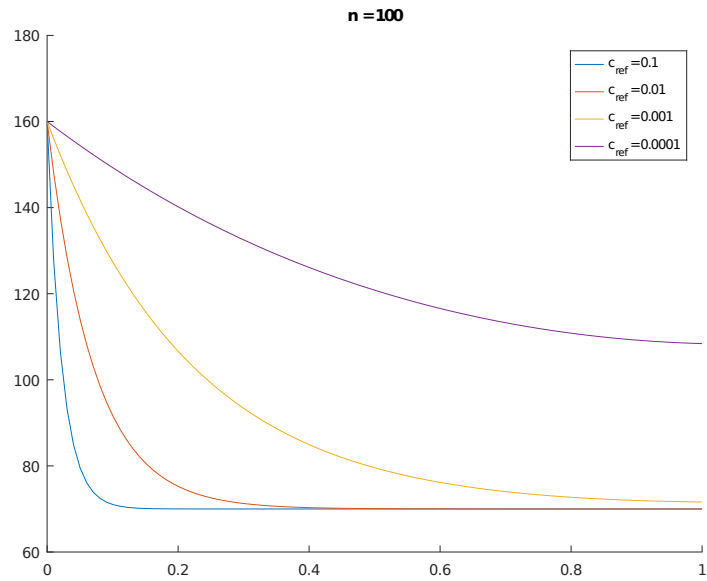


Figura 5: Gráfico da solução aproximada para $n = 100$

Analisando o gráfico da solução para $N = 10, 50, 100$, é possível notar que a medida que N aumentava, a resposta possuía maior refinamento na curva. Para os diferentes valores de c_{ref} , identificamos que o esperado aconteceu, ou seja, quanto maior o valor da habilidade da superfície do resfriador de transmitir calor na região (c_{ref}), mais rápido ocorria o resfriamento da massa.

Pode-se dizer que para qualquer valor não nulo de c_{ref} , em algum instante de tempo ele atinge uma temperatura de equilíbrio e esta última permanece em repouso.

4 Conclusão

A partir dos problemas abordados, podemos concluir algumas coisas relacionadas a precisão do método PVC. Na primeira avaliação, foi feita uma análise do erro para diferentes condições de contorno e intervalos de discretização. Observando o caso 1, verifica-se um valor de erro significativamente inferior aos dois outros casos, demonstrando que ao informar o valor exato da solução num ponto específico, a resposta do algoritmo aproxima-se muito mais da solução exata.

Com a utilização do Método das Diferenças Finitas nas aplicações, foi possível notar que dadas as respectivas condições de contorno de cada problema, obtemos resultados muito semelhantes ao variar a discretização do domínio. Este evento mostra que este método é uma boa modelagem para problemas nos quais deseja-se saber o comportamento ou propriedade de um ponto arbitrário em uma região avaliada.

5 Referências

EATON, John W. Octave Documentation, 1996.
Disponível em: <<https://octave.org/doc/v4.2.2/>>.

COMMUNITY, Octave Forge. Octave Forge, 2002.
Disponível em: <<https://octave.sourceforge.io/docs.php>>.

CATABRIGA, Lucia. Problemas de Valor no Contorno (PVC), 2019. Disponível em:
<https://inf.ufes.br/~luciac/mn1/191-PVC_AlgoII.pdf>.

BILOTI, Ricardo. Métodos para PVC, 2019. Disponível em:
<<http://www.ime.unicamp.br/~biloti/an/pvc>>.