

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
CENTRO TECNOLÓGICO
DEPARTAMENTO DE INFORMÁTICA**

**2º Exercício Computacional de Algoritmos Numéricos II
Relatório**

**Matheus Gomes Arante de Souza
Vinícius Lucas dos Reis**

**Vitória
Abril de 2019**

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
CENTRO TECNOLÓGICO
DEPARTAMENTO DE INFORMÁTICA**

**Matheus Gomes Arante de Souza
Vinícius Lucas dos Reis**

**2º Exercício Computacional de Algoritmos Numéricos II
Relatório**

Neste relatório analisaremos o comportamento de um conjunto de matrizes esparsas em métodos iterativos não estacionários, utilizando o ambiente de programação Octave.

**Vitória
Abril de 2019**

Sumário

1	Introdução	1
2	Exercício 1	2
2.1	Matriz bcsstk01	2
2.2	Matriz 1138_bus	3
2.3	Matriz pwtk	4
2.4	Matriz G3_circuit	5
3	Exercício 2	6
3.1	Matriz curtis54	6
3.2	Matriz dw1024	7
3.3	Matriz trans4	8
3.4	Matriz Hamrle3	9
4	Conclusão	10
4.1	Exercício 1: Método dos Gradientes Conjugados	10
4.2	Exercício 2: Método GMRES com Restart	10
5	Referências	12

1 Introdução

O Método dos Gradientes Conjugados é um dos mais eficientes para solução de sistemas lineares com matrizes simétricas e definidas positivas. De modo geral, este método consiste em aproximar-se da solução exata a partir da direção do resíduo gerado em cada iteração, de modo que a direção do próximo resíduo seja ortogonal à atual.

O Método GMRES com restart é projetado para resolver sistemas lineares com matrizes não-simétricas. Este método busca minimizar o resíduo da solução, e para isso utiliza o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt para formar uma base ortonormal, além de reinicializações da base. Depois de uma determinada quantidade de iterações, os resultados intermediários são utilizados como dados iniciais para as próximas iterações. Este processo é realizado até que se consiga convergência ou outro critério de parada seja atingido.

Neste exercício computacional avaliaremos o comportamento de matrizes de ordem 10^p para $p = 1, 3, 5, 6$ quando submetidas à estes métodos. Para este experimento, tomamos a tolerância $tol = 10^{-5}$ e o número máximo de iterações $maxit = 10^4$ em ambos os casos.

2 Exercício 1

2.1 Matriz bcsstk01

Ordem da matriz: 48

Quantidade de elementos não nulos: 400

Condicionamento: $8.823363e+05$

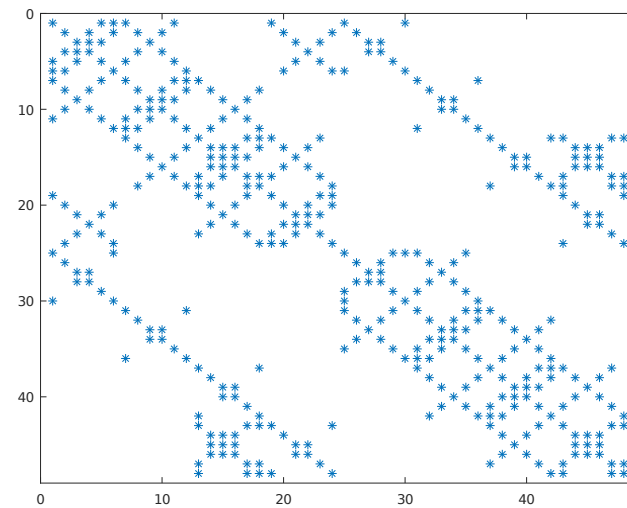


Figura 1: Matriz bcsstk01

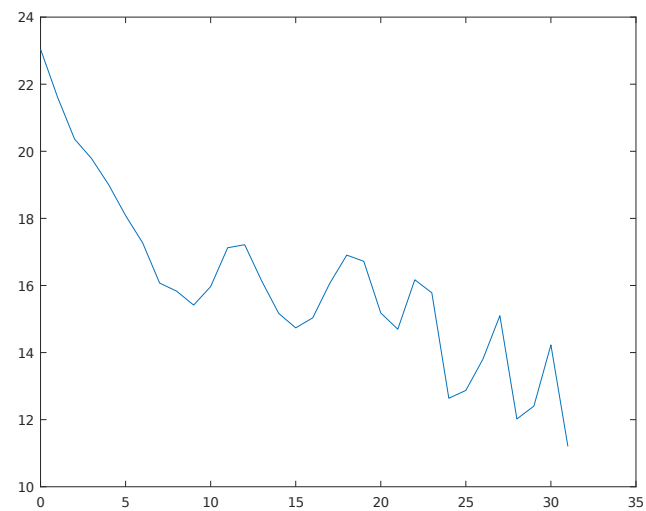


Figura 2: Iterações x log(Resíduo Relativo)

2.2 Matriz 1138_bus

Ordem da matriz: 1,138

Quantidade de elementos não nulos: 4,054

Condicionamento: $8.572646e+06$

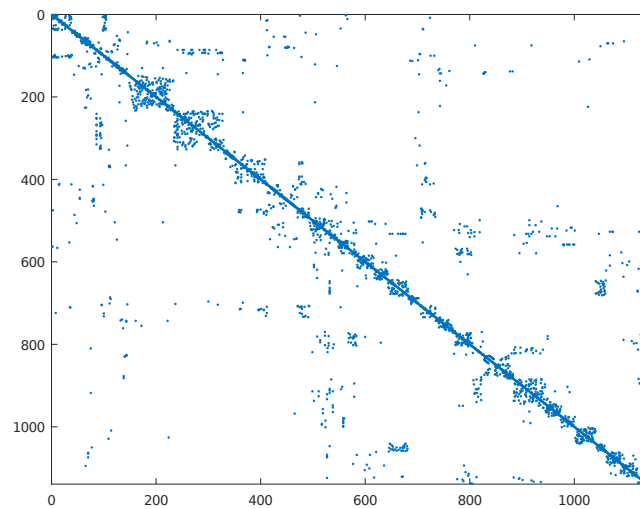


Figura 3: Matriz 1138_bus

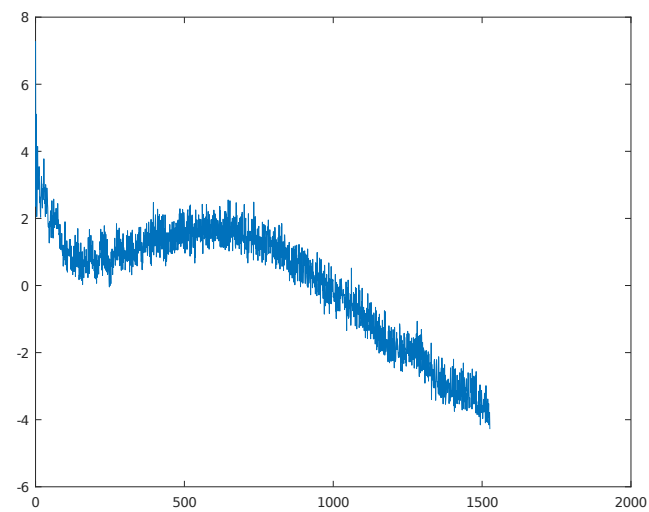


Figura 4: Iterações x log(Resíduo Relativo)

2.3 Matriz pwtk

Ordem da matriz: 217,918

Quantidade de elementos não nulos: 11,524,432

Condicionamento: †

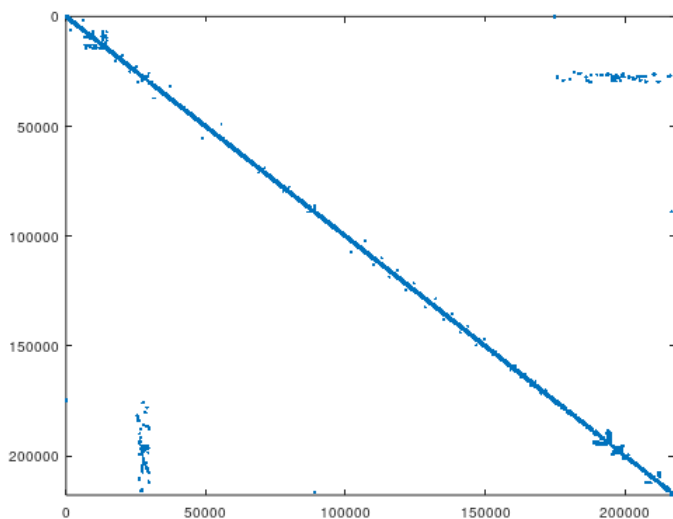


Figura 5: Matriz pwtk

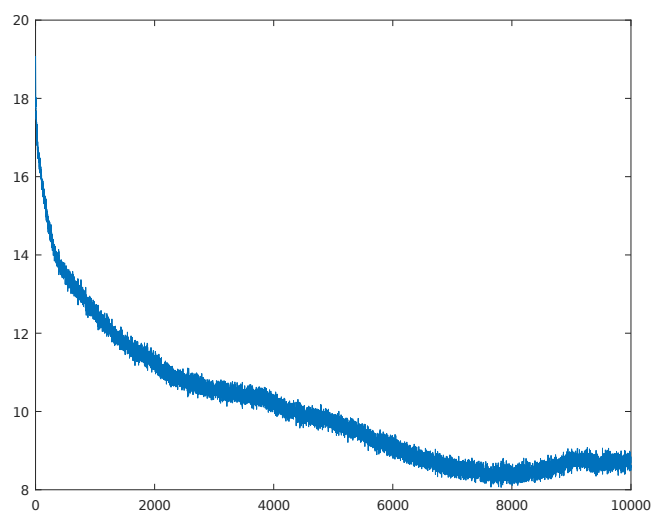


Figura 6: Iterações x log(Resíduo Relativo)

2.4 Matriz G3_circuit

Ordem da matriz: 1,585,478

Quantidade de elementos não nulos: 7,660,826

Condicionamento: †

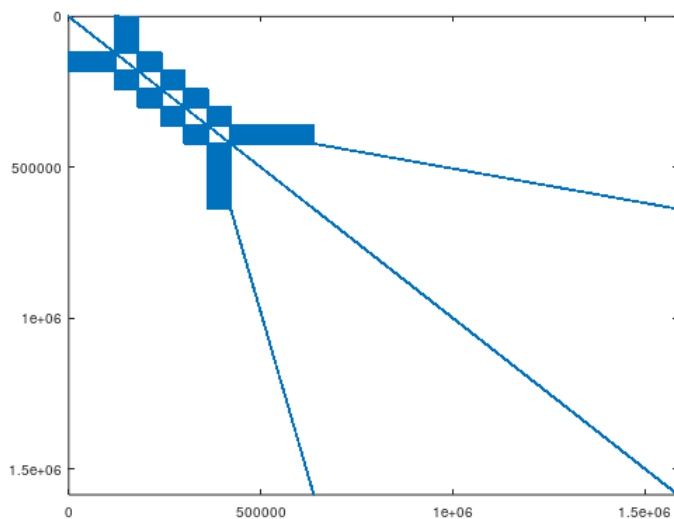


Figura 7: Matriz G3_circuit

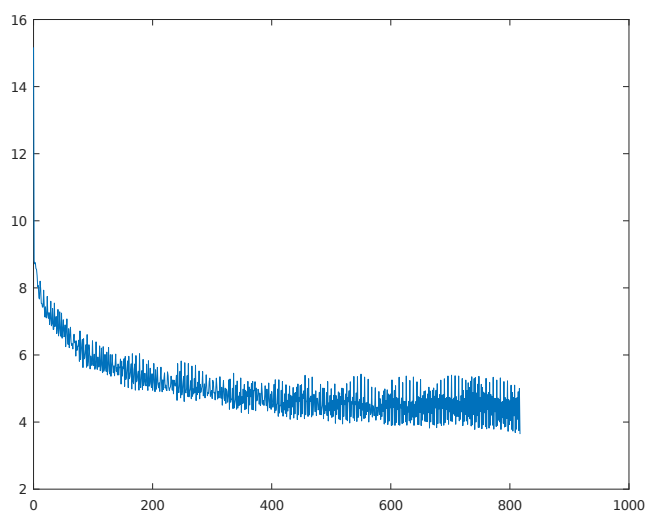


Figura 8: Iterações x log(Resíduo Relativo)

3 Exercício 2

3.1 Matriz curtis54

Ordem da matriz: 54

Quantidade de elementos não nulos: 291

Condicionamento: 4.100246e+17

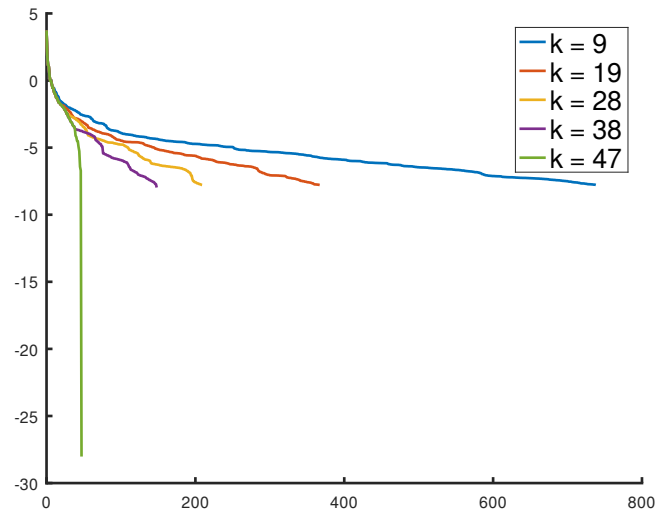


Figura 9: Iterações x log(Resíduo Relativo)

$Dim(K)$	Convergência	Número de Iterações	Resíduo Rel.	$\ x\ _{\infty}$	ΔT_{seg}
9	Sim (flag 0)	738 (81 ciclos + 9 iter.)	9.968e-06	1.002	0.5503
19	Sim (flag 0)	367 (19 ciclos + 6 iter.)	9.911e-06	1.002	0.2289
28	Sim (flag 0)	209 (7 ciclos + 13 iter.)	9.933e-06	1.003	0.1592
38	Sim (flag 0)	148 (3 ciclos + 34 iter.)	8.222e-06	1.002	0.1305
47	Sim (flag 0)	47 (0 ciclos + 47 iter.)	1.611e-14	1	0.05987

Tabela 1: Método GMRES com Restart

3.2 Matriz dw1024

Ordem da matriz: 2,048

Quantidade de elementos não nulos: 10,114

Condicionamento: 2.093210e+03

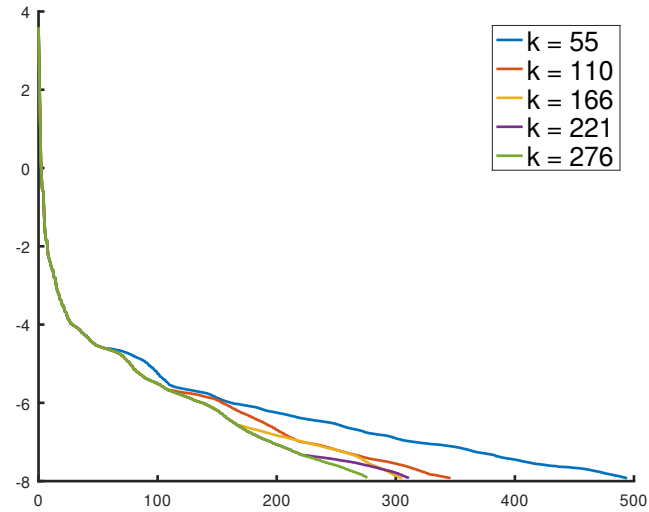


Figura 10: Iterações x log(Resíduo Relativo)

$Dim(K)$	Convergência	Número de Iterações	Resíduo Rel.	$\ x\ _{\infty}$	ΔT_{seg}
55	Sim (flag 0)	494 (8 ciclos + 54 iter.)	9.772e-06	1.006	1.063
110	Sim (flag 0)	346 (3 ciclos + 16 iter.)	9.937e-06	1.006	1.264
166	Sim (flag 0)	305 (1 ciclos + 139 iter.)	9.788e-06	1.005	2.177
221	Sim (flag 0)	311 (1 ciclos + 90 iter.)	9.937e-06	1.006	3.082
276	Sim (flag 0)	276 (0 ciclos + 276 iter.)	9.985e-06	1.005	4.989

Tabela 2: Método GMRES com Restart

3.3 Matriz trans4

Ordem da matriz: 116,835

Quantidade de elementos não nulos: 749,800

Condicionamento: †

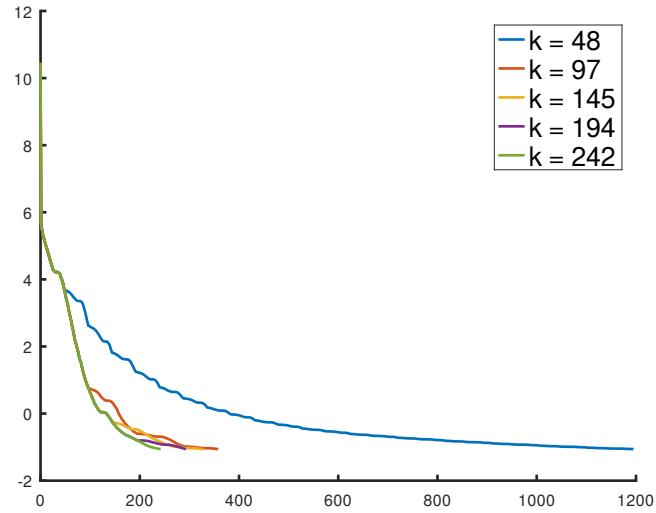


Figura 11: Iterações x log(Resíduo Relativo)

$Dim(K)$	Convergência	Número de Iterações	Resíduo Rel.	$\ x\ _{\infty}$	ΔT_{seg}
48	Sim (flag 0)	1195 (24 ciclos + 43 iter.)	9.999e-06	16.02	36.69
97	Sim (flag 0)	358 (3 ciclos + 67 iter.)	9.981e-06	19.19	19.37
145	Sim (flag 0)	328 (2 ciclos + 38 iter.)	9.992e-06	19.77	23.64
194	Sim (flag 0)	293 (1 ciclos + 99 iter.)	9.975e-06	21.82	24.94
242	Sim (flag 0)	242 (0 ciclos + 242 iter.)	9.991e-06	19.7	29.11

Tabela 3: Método GMRES com Restart

3.4 Matriz Hamrle3

Ordem da matriz: 1,447,360

Quantidade de elementos não nulos: 5,514,242

Condicionamento: †

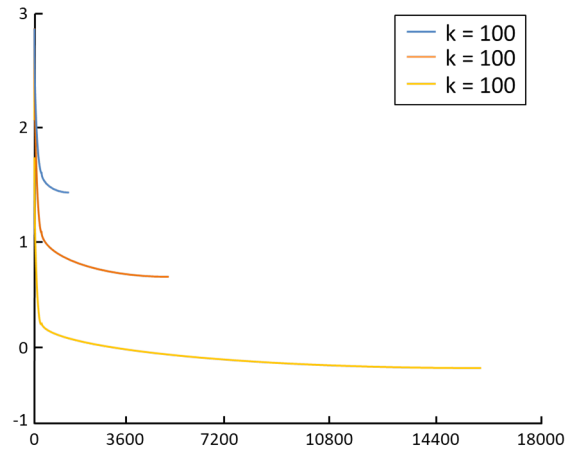


Figura 12: Iterações x log(Resíduo Relativo)

$Dim(K)$	Convergência	Número de Iterações	Resíduo Rel.	$ x _{\infty}$	ΔT_{seg}
100	Não (flag 3)	1902 (19 ciclos + 2 iter.)	0.9899	0.5702	2139
200	Não (flag 3)	5802 (29 ciclos + 2 iter.)	0.9897	0.5699	1.151e+04
400	Não (flag 3)	15600 (39 ciclos + 0 iter.)	0.9892	0.5704	6.229e+04
750	†	†	†	†	†
1000	†	†	†	†	†

Tabela 4: Método GMRES com Restart

4 Conclusão

4.1 Exercício 1: Método dos Gradientes Conjugados

Matriz	bcsstk01	1138_bus	pwtk	G3_circuit
Flag	0	0	0	0
N_{iter}	24	1148	4151	77
Resíduo Rel.	3.0201e-05	8.6584e-05	9.3419e-05	8.6166e-05
$\ x\ _{\infty}$	1.02	1.0064	1.7044	1.0079
$Tempo_{seg}$	0.005787849	0.269172	172.0423	8.482989

Tabela 5: Método dos Gradientes Conjugados para $tol = 10^{-4}$

Matriz	bcsstk01	1138_bus	pwtk	G3_circuit
Flag	0	0	1	0
N_{iter}	31	1526	10000	817
Resíduo Rel.	7.1771e-06	9.481e-06	1.6317e-05	9.8539e-06
$\ x\ _{\infty}$	1.0099	1.0009	1.5094	1.3639
$Tempo_{seg}$	0.0084	0.4355	524.8506	122.0181

Tabela 6: Método dos Gradientes Conjugados para $tol = 10^{-5}$

A partir das duas tabelas comparativas acima, podemos perceber alguns eventos interessantes. Primeiramente, percebe-se a proporcionalidade entre a tolerância e o número de iterações que segue a ordem intuitiva de crescimento, apesar de que há casos em que essa regra não é válida, fazendo com que o número de iterações varie conforme a ordem da matriz e não mais conforme a tolerância estabelecida.

Um fato que se destaca nas duas tabelas é a norma da solução da matriz *G3_circuit* ao final de cada execução que, mesmo com a redução da tolerância, apresentou um aumento significativo na norma. Além disso, a matriz *pwtk*, que tem uma ordem muito menor, não convergiu com tolerância de 10^{-5} no número de iterações permitido.

Essas situações ocorrem neste método, pois este varia seu resultado não apenas em função da ordem da matriz ou da quantidade de coeficientes não nulos, mas também do condicionamento da matriz e suas características, como ser diagonal dominante.

4.2 Exercício 2: Método GMRES com Restart

Matriz	k	Execução	Número de Iterações	Resíduo Rel.	$\ x\ _{\infty}$	ΔT_{seg}
curtis54	47	5	47 (0 ciclos + 47 iter.)	1.611e-14	1.000	0.05987
dw1024	55	1	494 (8 ciclos + 54 iter.)	9.772e-06	1.006	1.063
trans4	97	2	358 (3 ciclos + 67 iter.)	9.981e-06	19.79	19.37

Tabela 7: Execução mais rápida com o método GMRES com Restart

A tabela acima sintetiza as execuções mais rápidas (com convergência) para cada matriz avaliada. Pode-se perceber que em cada caso, o k que conduziu a execução

mais rápida ora era o menor ora era o maior que foi utilizado. Essa variação ocorre devido ao balanceamento que existe nesse método, entre tamanho da base em cada ciclo e o gasto para gerar seus elementos. Se o aumento da base for muito barato computacionalmente, então prefere-se utilizar um k maior para obter um total menor de iterações com um resíduo mais refinado, mas se esse aumento for muito custoso, então opta-se por um valor menor de k para que sejam feitos mais ciclos com bases menores para que se alcance a convergência mais rapidamente.

5 Referências

EATON, John W. Octave Documentation, 1996.
Disponível em: <<https://octave.org/doc/v4.2.2/>>.

COMMUNITY, Octave Forge. Octave Forge, 2002.
Disponível em: <<https://octave.sourceforge.io/docs.php>>.

CATABRIGA, Lucia. Sistemas Lineares Métodos Diretos e Métodos Iterativos Estacionários, 2019. Disponível em:
<https://inf.ufes.br/~luciac/mn1/191-SL_MD_MIE_AlgoII.pdf>.

SuiteSparse Matrix Collection.
Disponível em: <<https://sparse.tamu.edu/>>.