UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
CENTRO TECNOLÓGICO
DEPARTAMENTO DE INFORMÁTICA

5º Exercício Computacional de Algoritmos Numéricos II
Relatório

Matheus Gomes Arante de Souza
Vinícius Lucas dos Reis

Vitória
Maio de 2019

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
CENTRO TECNOLÓGICO
DEPARTAMENTO DE INFORMÁTICA

Matheus Gomes Arante de Souza
Vinícius Lucas dos Reis

5º Exercício Computacional de Algoritmos Numéricos II
Relatório

Neste relatório compararemos 3 algoritmos de discretização via diferenças finitas para resolver o problema de valor inicial unidimensional referente a equação do calor. Os testes foram realizados com o Octave.

Vitória
Maio de 2019

Sumário

1 Introdução

Os Problemas de Valor Inicial, ou PVI, são problemas nos quais são considerados tanto um domínio físico quanto um domínio temporal. Através da discretização desses dois domínios é possível fazer uma aproximação das derivadas (em cada domínio) por diferenças finitas e, assim, obter-se uma equação matricial na qual é possível calcular a solução do problema num próximo instante t de tempo e ir se aproximando da solução estacionária.

Neste relatório irá ser feito um comparativo entre 3 métodos de resolução de PVI: o método explícito que calcula a próxima solução através de um produto matriz-vetor, o método implícito que resolve um sistema linear para achar a próxima solução e o método de Crank-Nicolson que mescla os métodos anteriores para alcançar seu resultado.

2 Exercício 1

Equação do calor com condutividade térmica constante, fonte de calor nula e

- Parâmetros básicos:
  $\kappa = 0.835cm^2/s$, $f(x,t) = 0$ e $(0,l) = (0,10)$
- Condições de contorno e iniciais:
  $u(0,t) = 100°C$, $u(10,t) = 50°C$ e $u(x,0) = 0$, para $x \in (0,10)$
- Parâmetros da aproximação por Diferenças finitas considerando a condição de estabilidade:
  - $\Delta x = 1$, $\Delta t_1 = 0.538922 < \frac{(\Delta x)^2}{2\kappa}$ e $\Delta t_2 = 0.778443 > \frac{(\Delta x)^2}{2\kappa}$
  - $\Delta x = 0.1$, $\Delta t_1 = 0.00538922 < \frac{(\Delta x)^2}{2\kappa}$ e $\Delta t_2 = 0.00778443 > \frac{(\Delta x)^2}{2\kappa}$
  - $\Delta x = 0.01$, $\Delta t_1 = 5.38922e^{-5} < \frac{(\Delta x)^2}{2\kappa}$ e $\Delta t_2 = 7.78443e^{-5} > \frac{(\Delta x)^2}{2\kappa}$

Nas tabelas, k = número de passos necessários para obter convergência; t = k*dt; T_{Comp} = tempo computacional.

2.1 Explícito

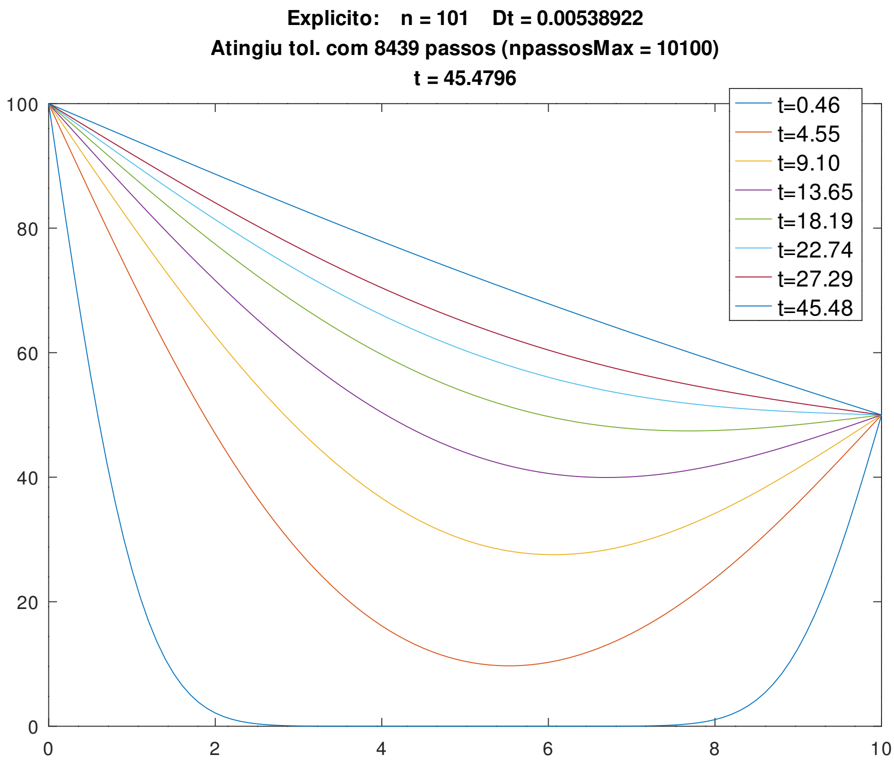
		Δt_1				Δt_2			
Δx	n	k	t	T_{Comp}	Atingiu Tol.?	k	t	T_{Comp}	Atingiu Tol.?
1	11	188	101.317	0.87s	Sim	1100	†	1.19s	Não
0.1	101	8439	45.4796	1.57s	Sim	10100	†	1.80s	Não
0.01	1001	15000	†	2.45s	Não	15000	†	2.57s	Não

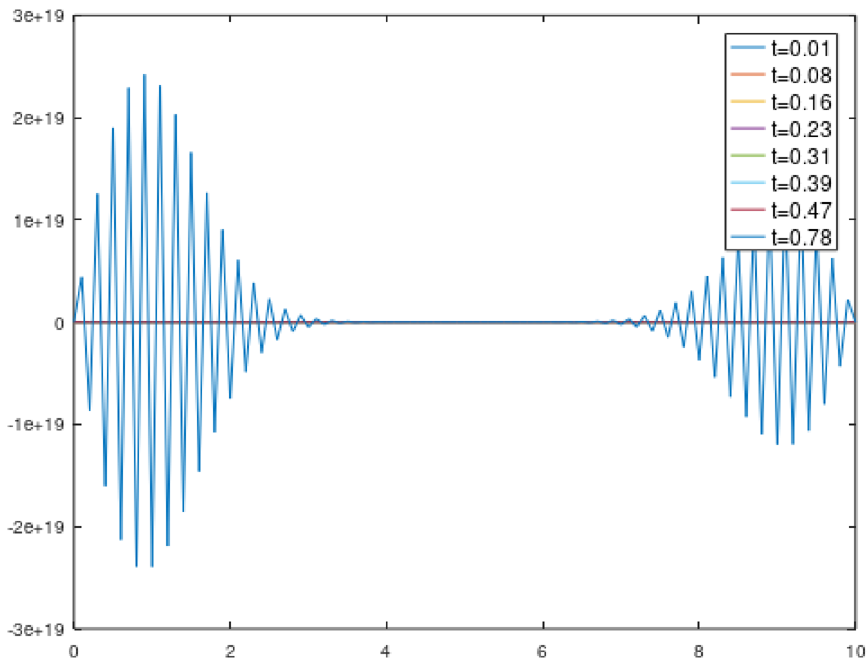
2.2 Implícito

		Δt_1				Δt_2			
Δx	n	k	t	T_{Comp}	Atingiu Tol.?	k	t	T_{Comp}	Atingiu Tol.?
1	11	195	105.09	1.13s	Sim	143	111.317	1.12s	Sim
0.1	101	8441	45.4904	1.79s	Sim	6418	49.9605	1.63s	Sim
0.01	1001	15000	†	2.82s	Não	15000	†	2.70s	Não

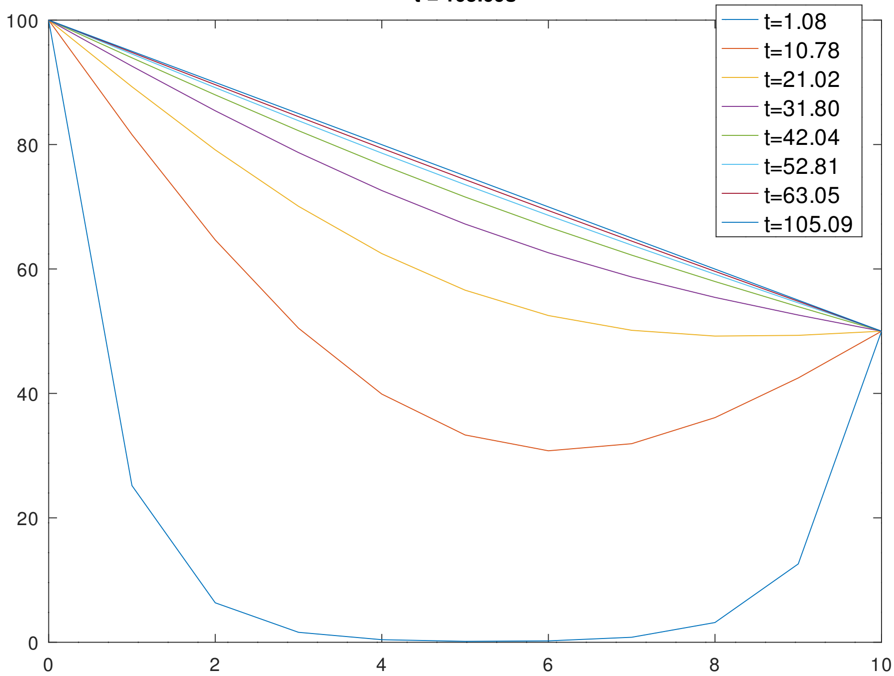
2.3 Crank-Nicolson

		Δt_1				Δt_2			
Δx	n	k	t	T_{Comp}	Atingiu Tol.?	k	t	T_{Comp}	Atingiu Tol.?
1	11	104	56.0479	1.07s	Sim	76	59.1617	1.26s	Sim
0.1	101	5001	26.9515	1.48s	Sim	3750	29.1916	1.31s	Sim
0.01	1001	15000	†	2.62s	Não	15000	†	2.61s	Não

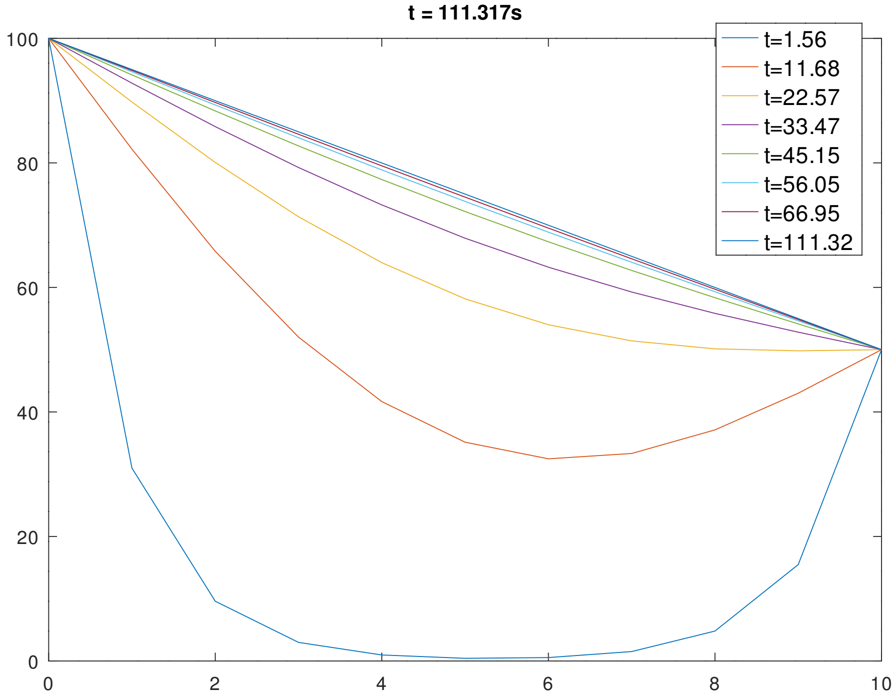

Explicito: n = 101 Dt = 0.00538922
Atingiu tol. com 8439 passos (npassosMax = 10100)
t = 45.4796
t=0.46
t=4.55
t=9.10
t=13.65
t=18.19
t=22.74
t=27.29
t=45.48
0
2
4
6
8
10
0
20
40
60
80
100

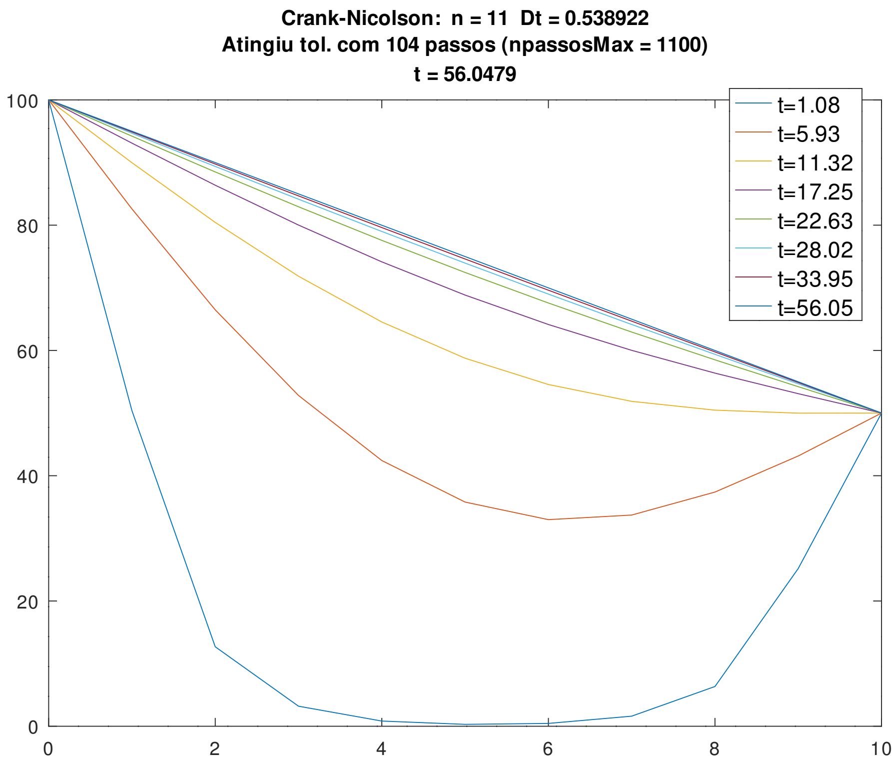

t=0.01
t=0.08
t=0.16
t=0.23
t=0.31
t=0.39
t=0.47
t=0.78
3e+19
2e+19
1e+19
0
-1e+19
-2e+19
-3e+19
0
2
4
6
8
10

Implicito: n = 11 Dt = 0.538922
Atingiu tol. com 195 passos (npassosMax = 1100)
t = 105.09s



Implicito: n = 11 Dt = 0.778443
Atingiu tol. com 143 passos (npassosMax = 1100)
t = 111.317s




Crank-Nicolson: n = 11 Dt = 0.538922
Atingiu tol. com 104 passos (npassosMax = 1100)
t = 56.0479
t=1.08
t=5.93
t=11.32
t=17.25
t=22.63
t=28.02
t=33.95
t=56.05
100
80
60
40
20
0
0
2
4
6
8
10

3 Exercício 2

Equação do calor com condutividade térmica constante, fonte de calor nula e

- Parâmetros básicos:
  $a = 0.835cm^2/s$, $f(x,t) = 0$ e $(0,l) = (0,10)$
- Condições de contorno e iniciais:
  $u(0,t) = 100°C$, $\frac{\partial(10,t)}{\partial x} = 0$ e $u(x,0) = 0$, para $x \in (0,10]$
- Parâmetros da aproximação por Diferenças finitas considerando a condição de estabilidade:
  - $\Delta x = 1$, $\Delta t_1 = 0.538922 < \frac{(\Delta x)^2}{2\kappa}$ e $\Delta t_2 = 0.778443 > \frac{(\Delta x)^2}{2\kappa}$
  - $\Delta x = 0.1$, $\Delta t_1 = 0.00538922 < \frac{(\Delta x)^2}{2\kappa}$ e $\Delta t_2 = 0.00778443 > \frac{(\Delta x)^2}{2\kappa}$
  - $\Delta x = 0.01$, $\Delta t_1 = 5.38922e^{-5} < \frac{(\Delta x)^2}{2\kappa}$ e $\Delta t_2 = 7.78443e^{-5} > \frac{(\Delta x)^2}{2\kappa}$

Nas tabelas, k = número de passos necessários para obter convergência; t = k*dt; T_{Comp} = tempo computacional.

3.1 Explícito

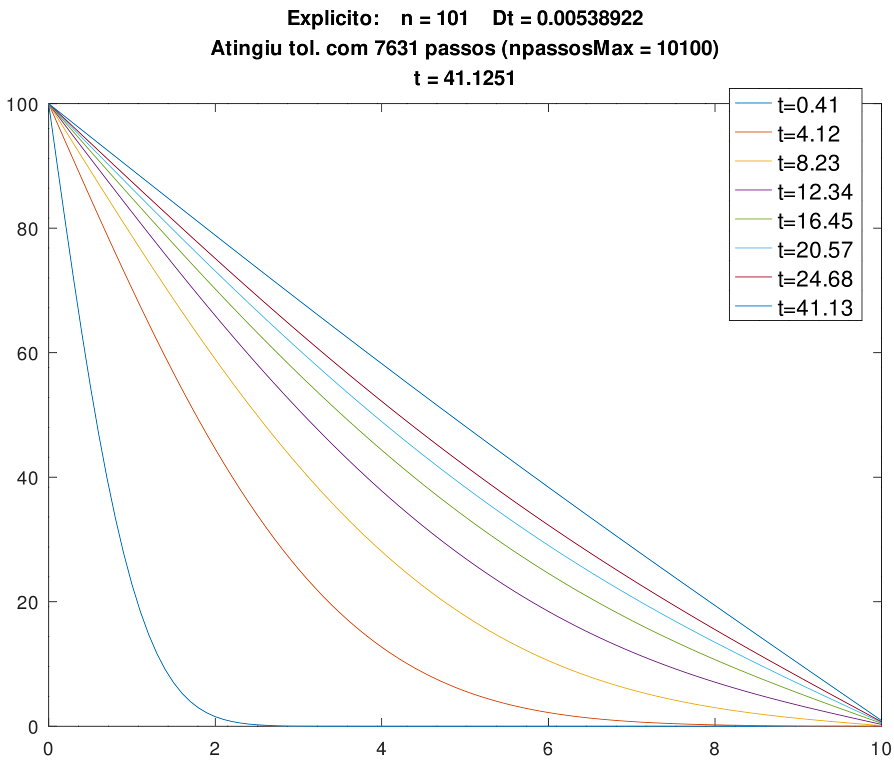
		Δt_1				Δt_2			
Δx	n	k	t	T_{Comp}	Atingiu Tol.	k	t	T_{Comp}	Atingiu Tol.
1	11	211	113.713	1.39s	Sim	1100	†	1.58s	Não
0.1	101	7631	41.1251	1.98s	Sim	10100	†	2.09s	Não
0.01	1001	15000	†	2.84s	Não	15000	†	2.85s	Não

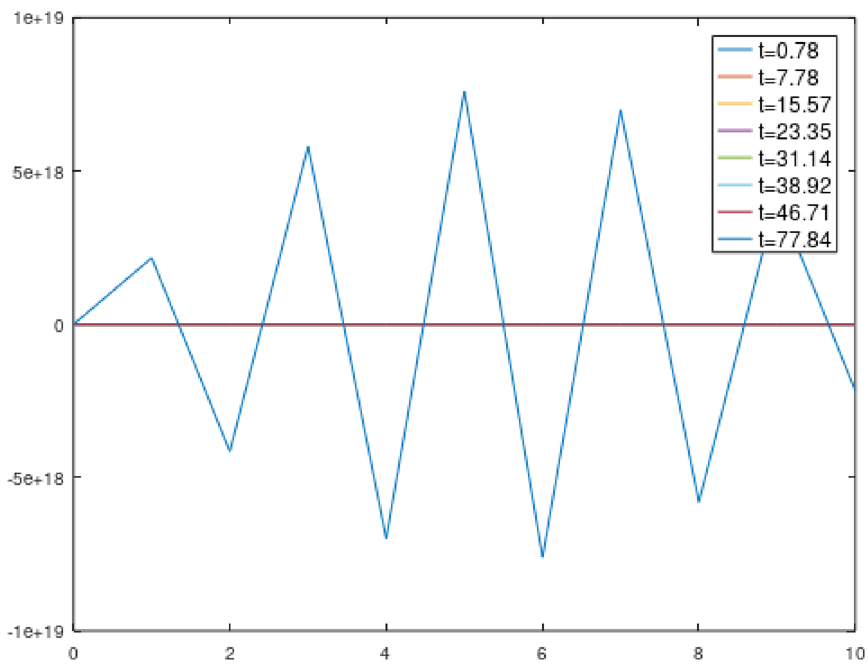
3.2 Implícito

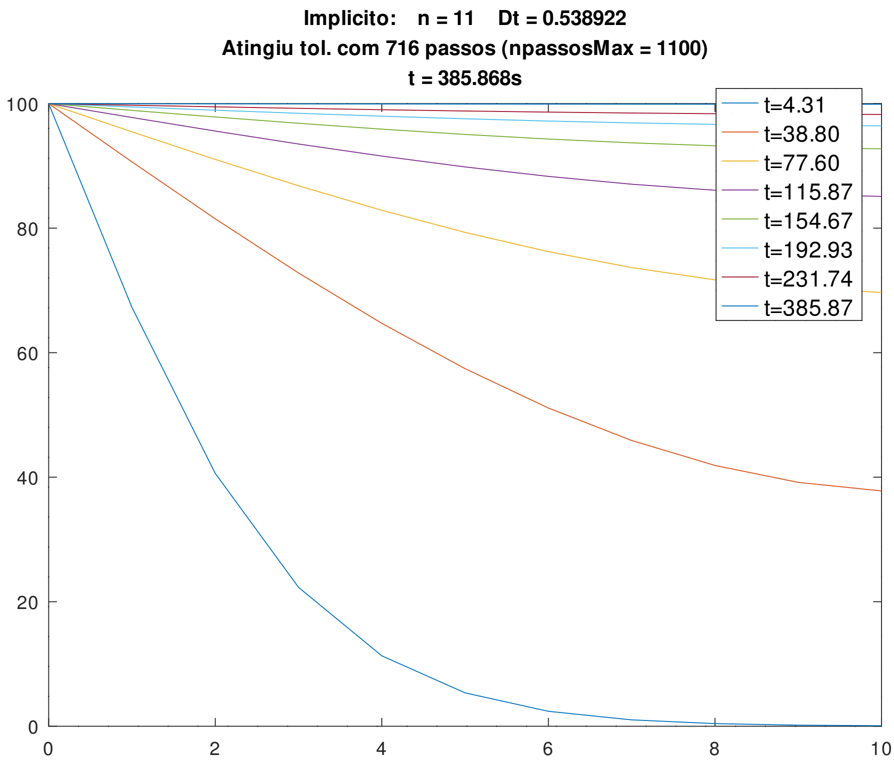
		Δt_1				Δt_2			
Δx	n	k	t	T_{Comp}	Atingiu Tol.	k	t	T_{Comp}	Atingiu Tol.
1	11	716	385.868	1.26s	Sim	523	407.126	1.14s	Sim
0.1	101	10100	†	1.74s	Não	10100	†	1.74s	Não
0.01	1001	15000	†	2.61s	Não	15000	†	2.63s	Não

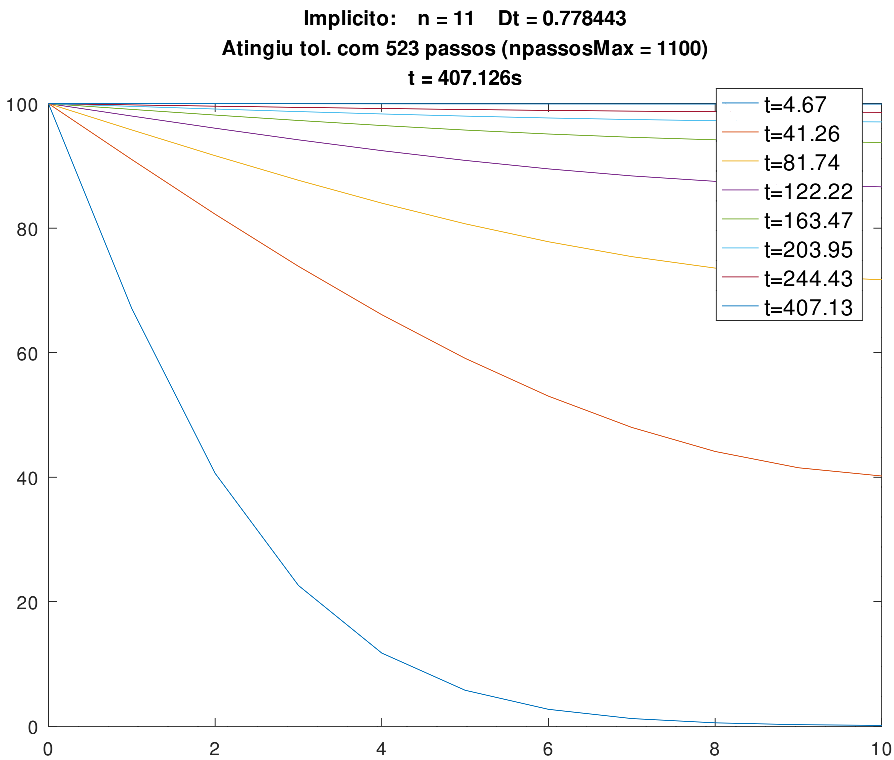
3.3 Crank-Nicolson

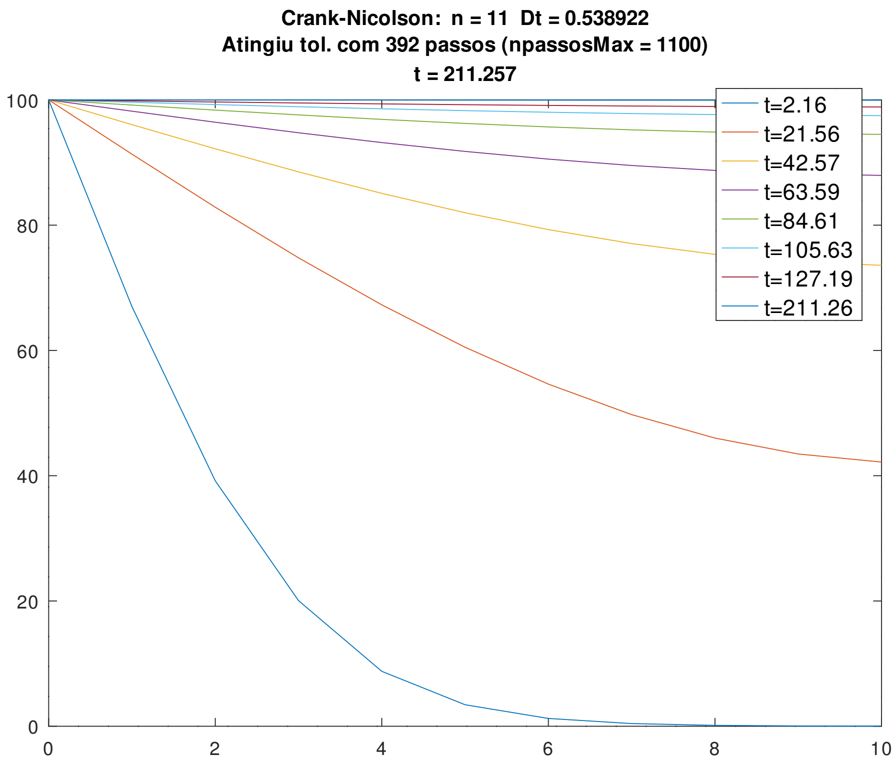
		Δt_1				Δt_2			
Δx	n	k	t	T_{Comp}	Atingiu Tol.	k	t	T_{Comp}	Atingiu Tol.
1	11	392	211.257	1.13s	Sim	285	221.856	1.35s	Sim
0.1	101	10100	†	1.67s	Não	10100	†	1.64s	Não
0.01	1001	15000	†	2.73s	Não	15000	†	2.85s	Não


Explicito: n = 101 Dt = 0.00538922
Atingiu tol. com 7631 passos (npassosMax = 10100)
t = 41.1251
t=0.41
t=4.12
t=8.23
t=12.34
t=16.45
t=20.57
t=24.68
t=41.13


t=0.78
t=7.78
t=15.57
t=23.35
t=31.14
t=38.92
t=46.71
t=77.84


Implicito: n = 11 Dt = 0.538922
Atingiu tol. com 716 passos (npassosMax = 1100)
t = 385.868s
t=4.31
t=38.80
t=77.60
t=115.87
t=154.67
t=192.93
t=231.74
t=385.87
100
80
60
40
20
0
0
2
4
6
8
10


Implicito: n = 11 Dt = 0.778443
Atingiu tol. com 523 passos (npassosMax = 1100)
t = 407.126s
t=4.67
t=41.26
t=81.74
t=122.22
t=163.47
t=203.95
t=244.43
t=407.13
100
80
60
40
20
0
0
2
4
6
8
10



Crank-Nicolson: n = 11 Dt = 0.538922
Atingiu tol. com 392 passos (npassosMax = 1100)
t = 211.257
t=2.16
t=21.56
t=42.57
t=63.59
t=84.61
t=105.63
t=127.19
t=211.26
100
80
60
40
20
0
0
2
4
6
8
10

4 Exercício 3

Equação do calor com condutividade térmica constante, fonte de calor unitária e

- Parâmetros básicos:
  $a(x,t) = 0.835cm^2/s$, $f(x,t) = 1$ e $(0,l) = (0,10)$
- Condições de contorno e iniciais:
  $u(0,t) = 100°C$, $\frac{\partial(10,t)}{\partial x} = 0$ e $u(x,0) = 0$, para $x \in (0,10]$
- Parâmetros da aproximação por Diferenças finitas considerando a condição de estabilidade:
  - $\Delta x = 1$, $\Delta t_1 = 0.538922 < \frac{(\Delta x)^2}{2\kappa}$ e $\Delta t_2 = 0.778443 > \frac{(\Delta x)^2}{2\kappa}$
  - $\Delta x = 0.1$, $\Delta t_1 = 0.00538922 < \frac{(\Delta x)^2}{2\kappa}$ e $\Delta t_2 = 0.00778443 > \frac{(\Delta x)^2}{2\kappa}$
  - $\Delta x = 0.01$, $\Delta t_1 = 5.38922e^{-5} < \frac{(\Delta x)^2}{2\kappa}$ e $\Delta t_2 = 7.78443e^{-5} > \frac{(\Delta x)^2}{2\kappa}$

Nas tabelas, k = número de passos necessários para obter convergência; t = k*dt; T_{Comp} = tempo computacional.

4.1 Explícito

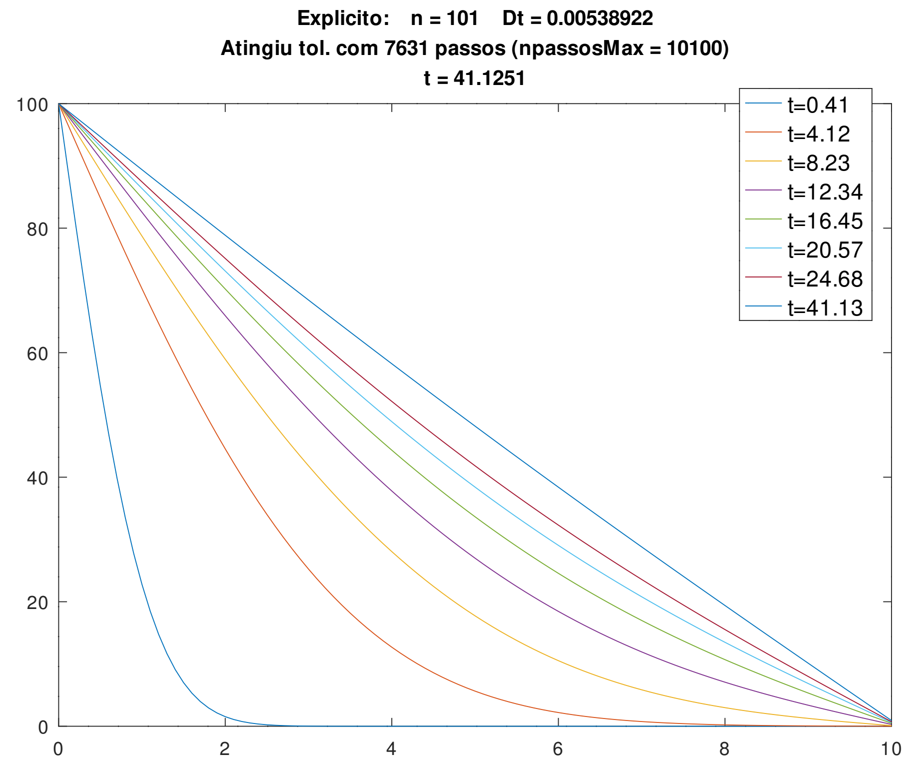
		Δt_1				Δt_2			
Δx	n	k	t	T_{Comp}	Atingiu Tol.	k	t	T_{Comp}	Atingiu Tol.
1	11	211	13.713	1.37s	Sim	1100	†	1.58s	Não
0.1	101	7631	41.1251	1.96s	Sim	10100	†	2.01s	Não
0.01	1001	15000	†	3.20s	Não	15000	†	2.95s	Não

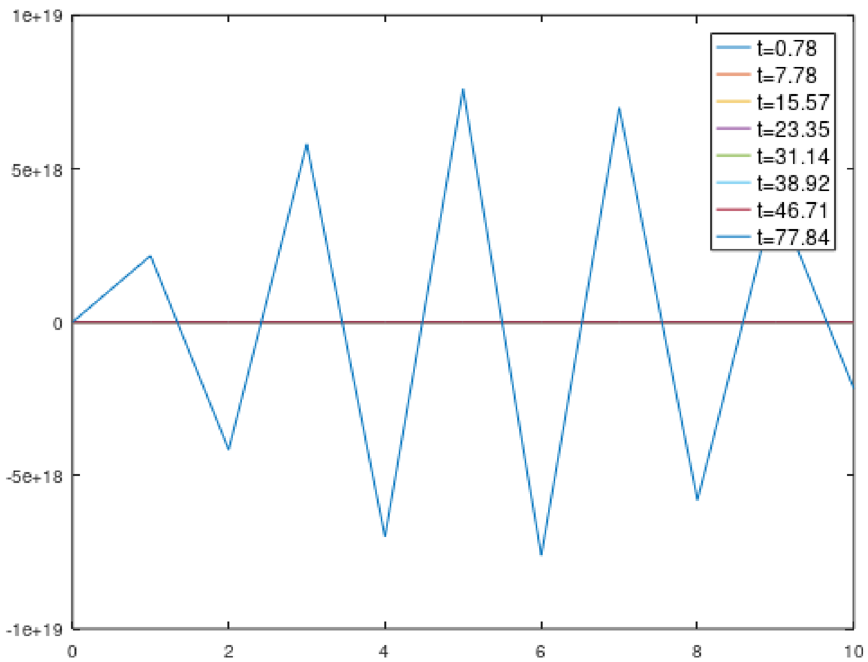
4.2 Implícito

		Δt_1				Δt_2			
Δx	n	k	t	T_{Comp}	Atingiu Tol.	k	t	T_{Comp}	Atingiu Tol.
1	11	760	409.581	1.21s	Sim	553	430.479	1.14s	Sim
0.1	101	10100	†	1.76s	Não	10100	†	1.85s	Não
0.01	1001	15000	†	2.83s	Não	15000	†	2.69s	Não

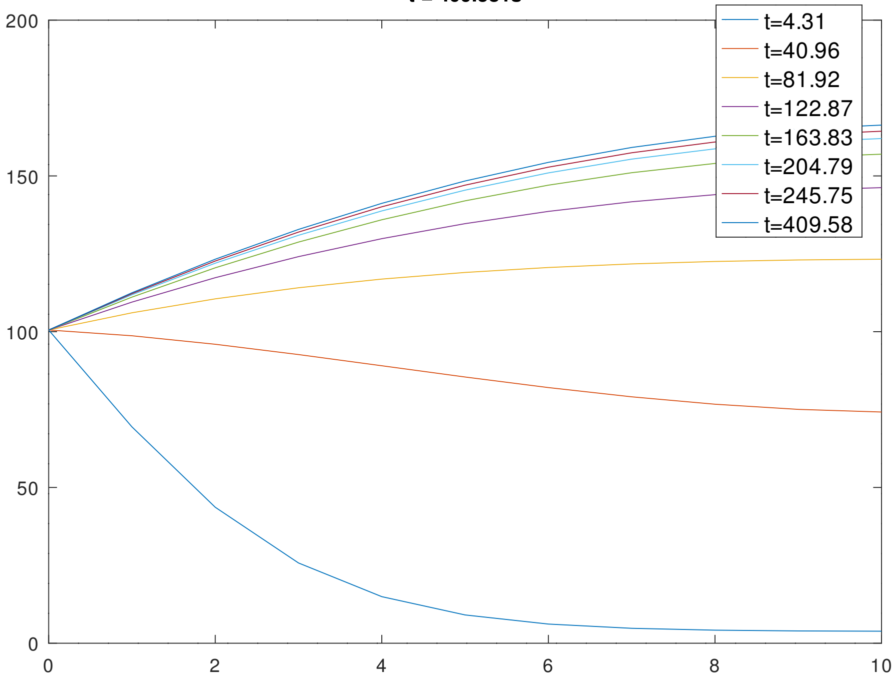
4.3 Crank-Nicolson

		Δt_1				Δt_2			
Δx	n	k	t	T_{Comp}	Atingiu Tol.	k	t	T_{Comp}	Atingiu Tol.
1	11	1100	†	1.15s	Não	1100	†	1.19s	Não
0.1	101	10100	†	1.86s	Não	10100	†	1.74s	Não
0.01	1001	15000	†	2.63s	Não	15000	†	2.67s	Não

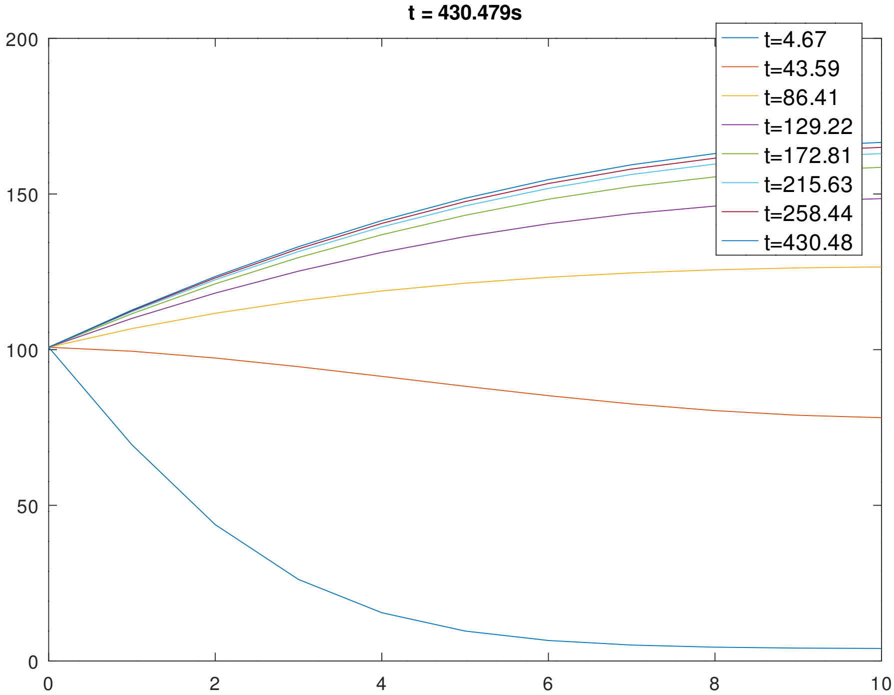

Explicito: n = 101 Dt = 0.00538922
Atingiu tol. com 7631 passos (npassosMax = 10100)
t = 41.1251
t=0.41
t=4.12
t=8.23
t=12.34
t=16.45
t=20.57
t=24.68
t=41.13

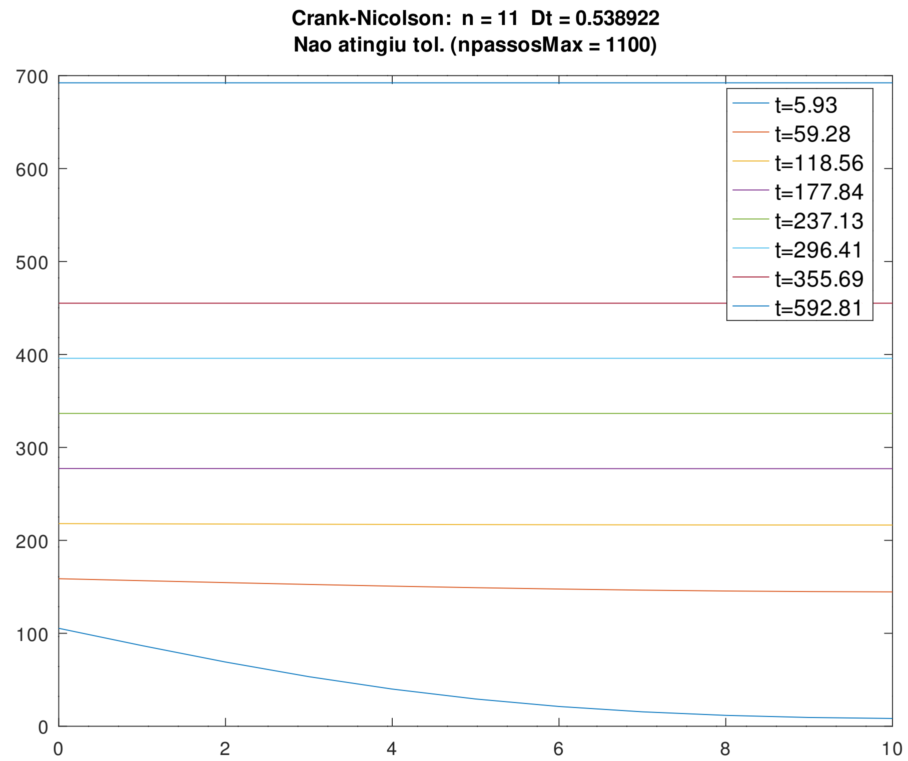

t=0.78
t=7.78
t=15.57
t=23.35
t=31.14
t=38.92
t=46.71
t=77.84

Implicito: n = 11 Dt = 0.538922
Atingiu tol. com 760 passos (npassosMax = 1100)
t = 409.581s



Implicito: n = 11 Dt = 0.778443
Atingiu tol. com 553 passos (npassosMax = 1100)
t = 430.479s




Crank-Nicolson: n = 11 Dt = 0.538922
Nao atingiu tol. (npassosMax = 1100)
t=5.93
t=59.28
t=118.56
t=177.84
t=237.13
t=296.41
t=355.69
t=592.81
0
100
200
300
400
500
600
700
0
2
4
6
8
10

5 Conclusão

5.1 Comparativo entre métodos

Primeiramente é preciso ter em mente que dentre todos os métodos utilizados neste comparativo, o método explícito é o único que possui um fator de estabilidade que precisa ser atendido. O fator de estabilidade é definido como:

$$\lambda = \frac{(\Delta t * k)}{\Delta x^2} < \frac{1}{2}$$

Caso esta condição não seja atendida, isso poderá resultar em uma inconsistência na aproximação e fazendo com que está não convirja para uma solução estacionária. Este evento é demonstrado pelos 2 primeiros gráficos de cada exercício.

Já o método Crank-Nicolson, apesar de possuir um caráter estável, ao contrário do método implícito, pode vir a apresentar pequenos graus de instabilidade nos valores iniciais e finais de suas soluções devido ao acúmulo de erro de operações com números de ponto flutuante provenientes das operações que o algoritmo realiza.

5.2 Comparativo entre Condições de Contorno

Ao se observar as diferentes curvas em cada gráfico, comparando a diferença entre seus valores iniciais e finais, respectivamente, é possível perceber que quando se tem um valor prescrito as curvas convergem para tal, como é o caso de todos para o valor inicial e o caso do exercício 1 para o valor final.

Entretanto, quando só é fornecido o fluxo prescrito para o problema, os algoritmos apresentam variações nestes locais, como é possível observar no lado direito dos gráficos dos exercícios 2 e 3. Isso é devido a baixa precisão que o fluxo prescrito tem com relação ao valor prescito, uma vez que o valor de uma função no ponto é mais preciso que o valor de sua derivada neste mesmo ponto.

Por fim, temos o caso (exercício 3) em que além do valor prescrito para o primeiro ponto e o fluxo prescrito no último ponto, também temos que considerar o seguinte resultado:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \kappa * \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t) = 1$$

Essa condição cria uma distorção ainda maior nos resultados, uma vez que o valor de f acaba por alterar a resultado da expressão de iteração dos algoritmos, fazendo com que estes tenham uma dificuldade maior para achar uma solução estacionária.

6 Referências

EATON, John W. Octave Documentation, 1996.
Disponível em: <https://octave.org/doc/v4.2.2/>.

COMMUNITY, Octave Forge. Octave Forge, 2002.
Disponível em: <https://octave.sourceforge.io/docs.php>.

CATABRIGA, Lucia. Problemas de Valor Inicial (PVI), 2019.
Disponível em: <http://inf.ufes.br/~luciac/mn1/191-PVI_AlgoII.pdf>.