

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
CENTRO TECNOLÓGICO
DEPARTAMENTO DE INFORMÁTICA**

Q1: 3,0
Q2: 3,0
Q3: 3,0
Nota: 9,0

**5º Exercício Computacional de Algoritmos Numéricos II
Relatório**

**Matheus Gomes Arante de Souza
Vinícius Lucas dos Reis**

**Vitória
Maio de 2019**

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
CENTRO TECNOLÓGICO
DEPARTAMENTO DE INFORMÁTICA**

**Matheus Gomes Arante de Souza
Vinícius Lucas dos Reis**

**5º Exercício Computacional de Algoritmos Numéricos II
Relatório**

Neste relatório compararemos 3 algoritmos de discretização via diferenças finitas para resolver o problema de valor inicial unidimensional referente a equação do calor. Os testes foram realizados com o Octave.

**Vitória
Maio de 2019**

Sumário

1	Introdução	1
2	Exercício 1	2
2.1	Explícito	2
2.2	Implícito	2
2.3	Crank-Nicolson	2
3	Exercício 2	6
3.1	Explícito	6
3.2	Implícito	6
3.3	Crank-Nicolson	6
4	Exercício 3	10
4.1	Explícito	10
4.2	Implícito	10
4.3	Crank-Nicolson	10
5	Conclusão	14
5.1	Comparativo entre métodos	14
5.2	Comparativo entre Condições de Contorno	14
6	Referências	15

1 Introdução

Os Problemas de Valor Inicial, ou PVI, são problemas nos quais são considerados tanto um domínio físico quanto um domínio temporal. Através da discretização desses dois domínios é possível fazer uma aproximação das derivadas (em cada domínio) por diferenças finitas e, assim, obter-se uma equação matricial na qual é possível calcular a solução do problema num próximo instante t de tempo e ir se aproximando da solução estacionária.

Neste relatório irá ser feito um comparativo entre 3 métodos de resolução de PVI: o método explícito que calcula a próxima solução através de um produto matriz-vetor, o método implícito que resolve um sistema linear para achar a próxima solução e o método de Crank-Nicolson que mescla os métodos anteriores para alcançar seu resultado.

2 Exercício 1

Equação do calor com condutividade térmica constante, fonte de calor nula e

- Parâmetros básicos:

$$\kappa = 0.835 \text{ cm}^2/\text{s}, f(x, t) = 0 \text{ e } (0, l) = (0, 10)$$

- Condições de contorno e iniciais:

$$u(0, t) = 100^\circ\text{C}, u(10, t) = 50^\circ\text{C} \text{ e } u(x, 0) = 0, \text{ para } x \in (0, 10)$$

- Parâmetros da aproximação por Diferenças finitas considerando a condição de estabilidade:

$$- \Delta x = 1, \Delta t_1 = 0.538922 < \frac{(\Delta x)^2}{2\kappa} \text{ e } \Delta t_2 = 0.778443 > \frac{(\Delta x)^2}{2\kappa}$$

$$- \Delta x = 0.1, \Delta t_1 = 0.00538922 < \frac{(\Delta x)^2}{2\kappa} \text{ e } \Delta t_2 = 0.00778443 > \frac{(\Delta x)^2}{2\kappa}$$

$$- \Delta x = 0.01, \Delta t_1 = 5.38922e^{-5} < \frac{(\Delta x)^2}{2\kappa} \text{ e } \Delta t_2 = 7.78443e^{-5} > \frac{(\Delta x)^2}{2\kappa}$$

Nas tabelas, k = número de passos necessários para obter convergência; t = k*dt; T_{Comp} = tempo computacional.

2.1 Explícito

Δx	n	Δt_1				Δt_2			
		k	t	T_{Comp}	Atingiu Tol.?	k	t	T_{Comp}	Atingiu Tol.?
1	11	188	101.317	0.87s	Sim	1100	†	1.19s	Não
0.1	101	8439	45.4796	1.57s	Sim	10100	†	1.80s	Não
0.01	1001	15000	†	2.45s	Não	15000	†	2.57s	Não

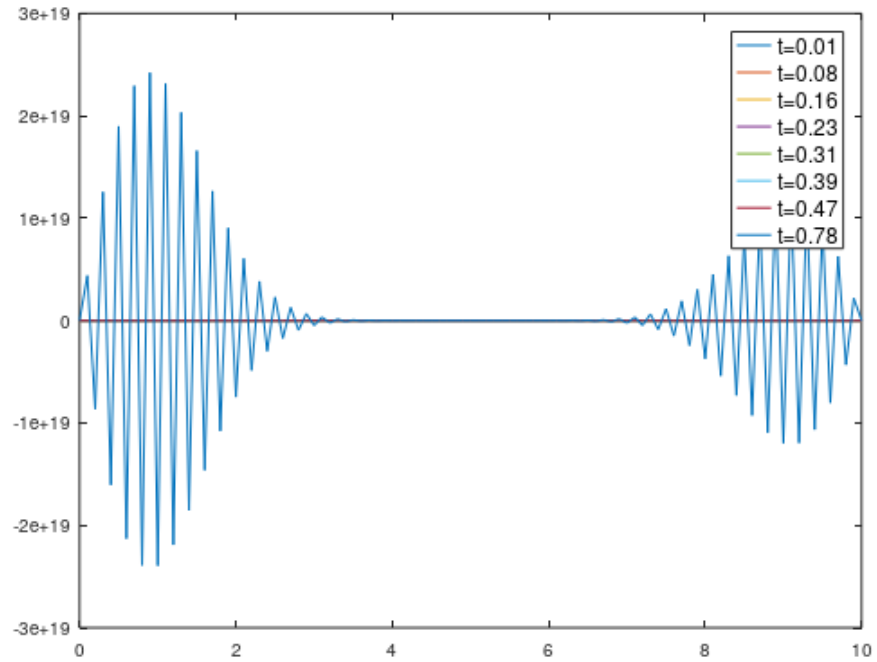
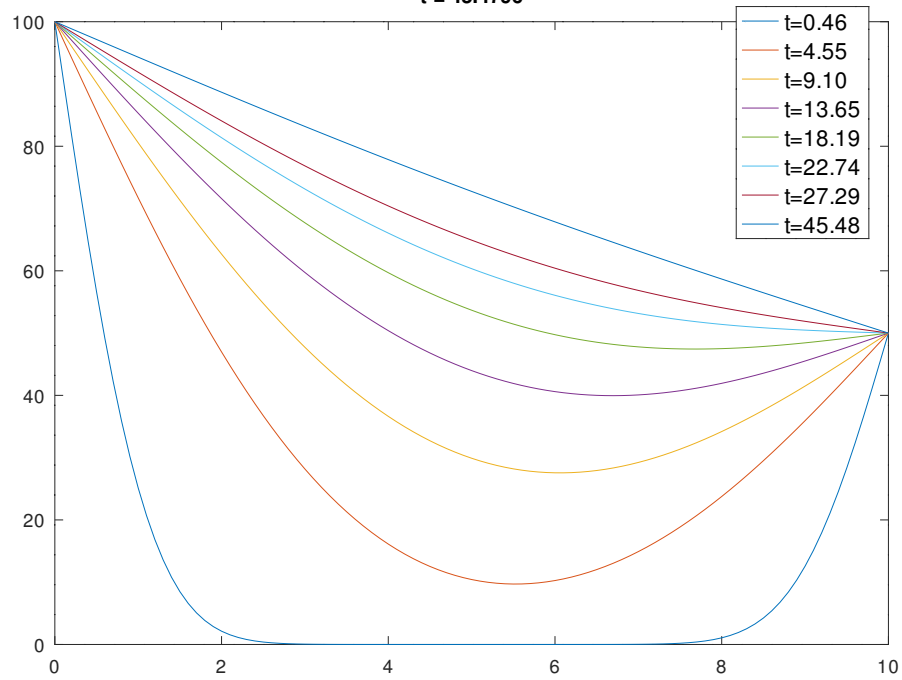
2.2 Implícito

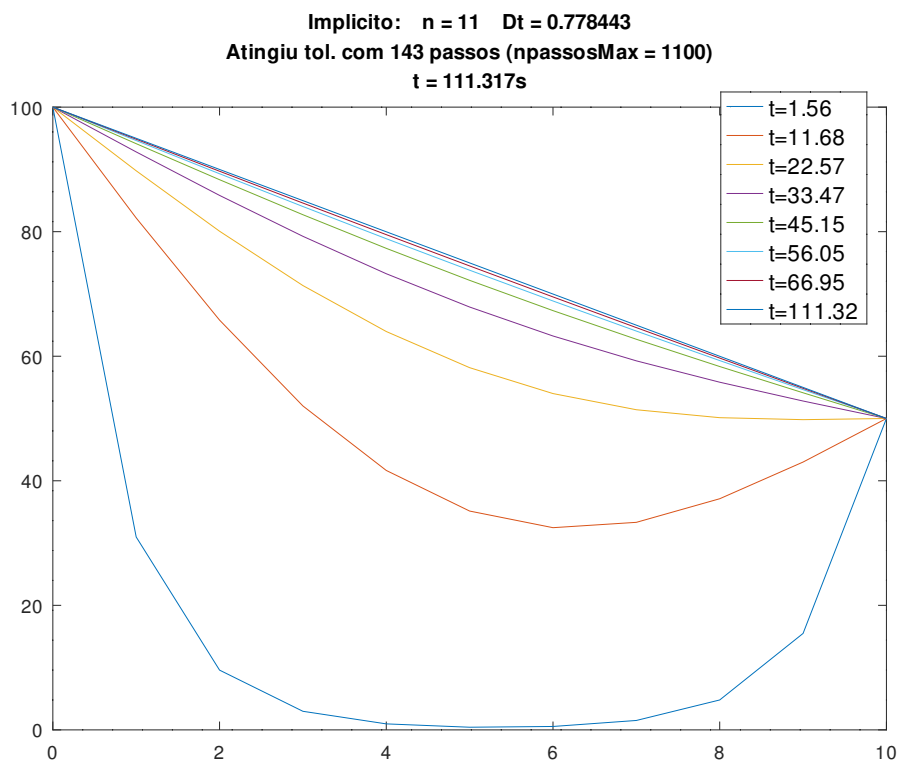
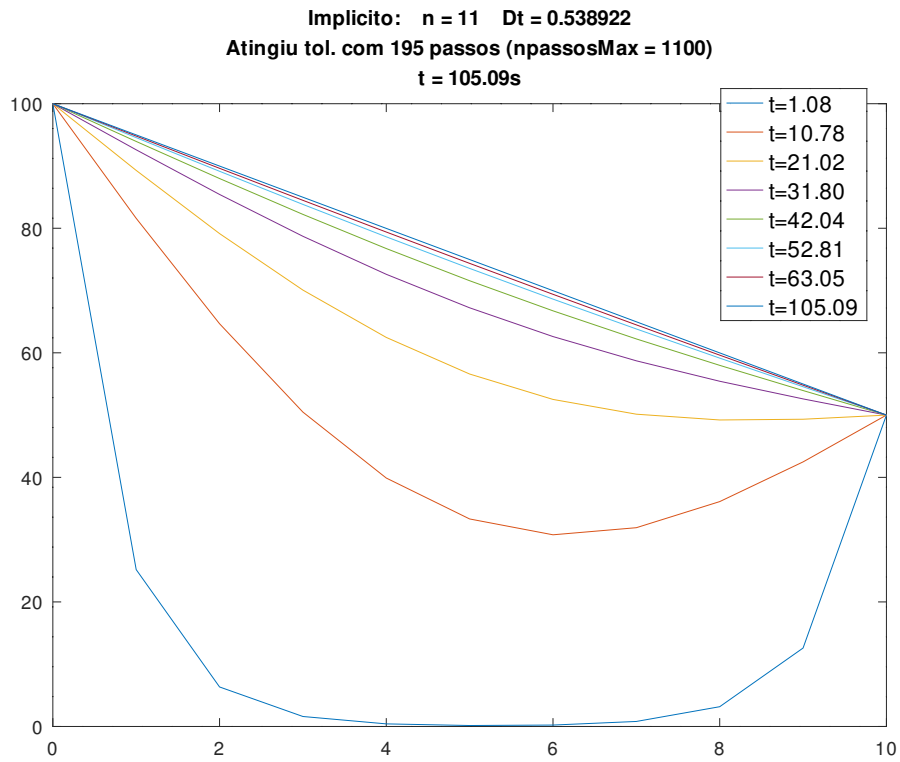
Δx	n	Δt_1				Δt_2			
		k	t	T_{Comp}	Atingiu Tol.?	k	t	T_{Comp}	Atingiu Tol.?
1	11	195	105.09	1.13s	Sim	143	111.317	1.12s	Sim
0.1	101	8441	45.4904	1.79s	Sim	6418	49.9605	1.63s	Sim
0.01	1001	15000	†	2.82s	Não	15000	†	2.70s	Não

2.3 Crank-Nicolson

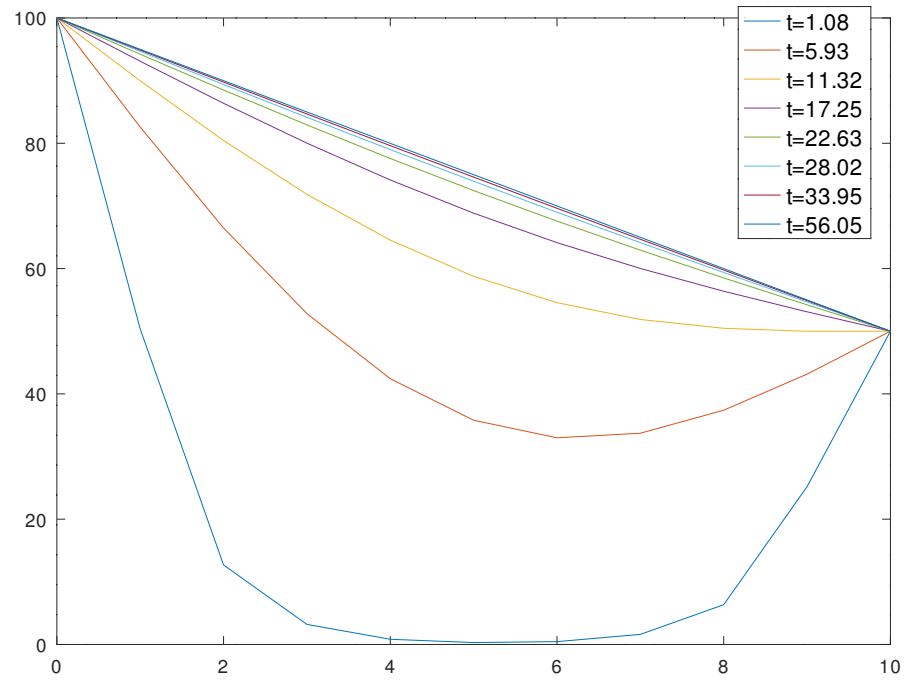
Δx	n	Δt_1				Δt_2			
		k	t	T_{Comp}	Atingiu Tol.?	k	t	T_{Comp}	Atingiu Tol.?
1	11	104	56.0479	1.07s	Sim	76	59.1617	1.26s	Sim
0.1	101	5001	26.9515	1.48s	Sim	3750	29.1916	1.31s	Sim
0.01	1001	15000	†	2.62s	Não	15000	†	2.61s	Não

Explicito: $n = 101$ $\Delta t = 0.00538922$
Atingiu tol. com 8439 passos (npassosMax = 10100)
 $t = 45.4796$





Crank-Nicolson: $n = 11$ $\Delta t = 0.538922$
Atingiu tol. com 104 passos (npassosMax = 1100)
 $t = 56.0479$



3 Exercício 2

Equação do calor com condutividade térmica constante, fonte de calor nula e

- Parâmetros básicos:
 $a = 0.835 \text{ cm}^2/\text{s}$, $f(x, t) = 0$ e $(0, l) = (0, 10)$
- Condições de contorno e iniciais:
 $u(0, t) = 100^\circ\text{C}$, $\frac{\partial u(10, t)}{\partial x} = 0$ e $u(x, 0) = 0$, para $x \in (0, 10]$
- Parâmetros da aproximação por Diferenças finitas considerando a condição de estabilidade:
 - $\Delta x = 1$, $\Delta t_1 = 0.538922 < \frac{(\Delta x)^2}{2\kappa}$ e $\Delta t_2 = 0.778443 > \frac{(\Delta x)^2}{2\kappa}$
 - $\Delta x = 0.1$, $\Delta t_1 = 0.00538922 < \frac{(\Delta x)^2}{2\kappa}$ e $\Delta t_2 = 0.00778443 > \frac{(\Delta x)^2}{2\kappa}$
 - $\Delta x = 0.01$, $\Delta t_1 = 5.38922e^{-5} < \frac{(\Delta x)^2}{2\kappa}$ e $\Delta t_2 = 7.78443e^{-5} > \frac{(\Delta x)^2}{2\kappa}$

Nas tabelas, k = número de passos necessários para obter convergência; t = k*dt; T_{Comp} = tempo computacional.

3.1 Explícito

Δx	n	Δt_1				Δt_2			
		k	t	T_{Comp}	Atingiu Tol.	k	t	T_{Comp}	Atingiu Tol.
1	11	211	113.713	1.39s	Sim	1100	†	1.58s	Não
0.1	101	7631	41.1251	1.98s	Sim	10100	†	2.09s	Não
0.01	1001	15000	†	2.84s	Não	15000	†	2.85s	Não

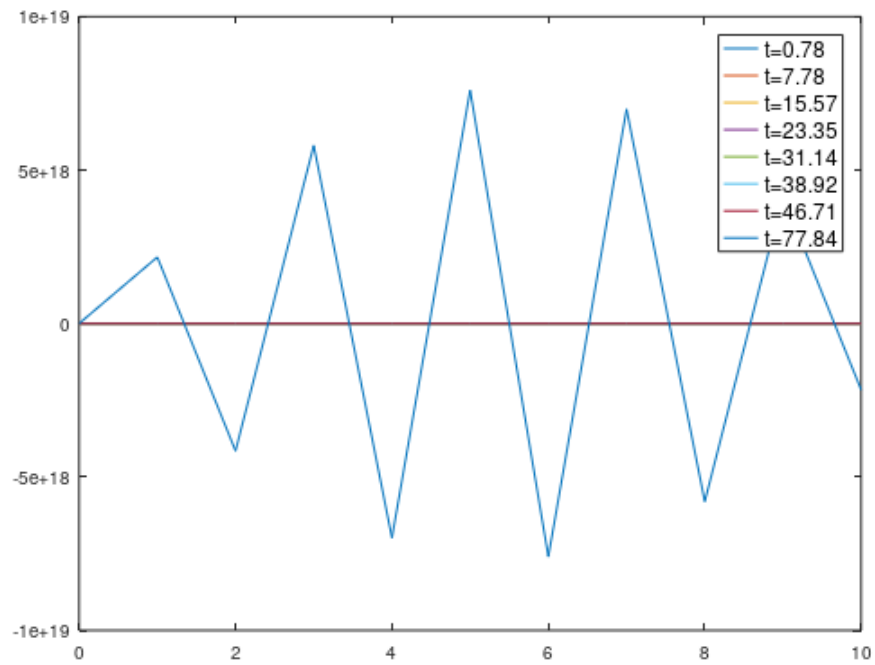
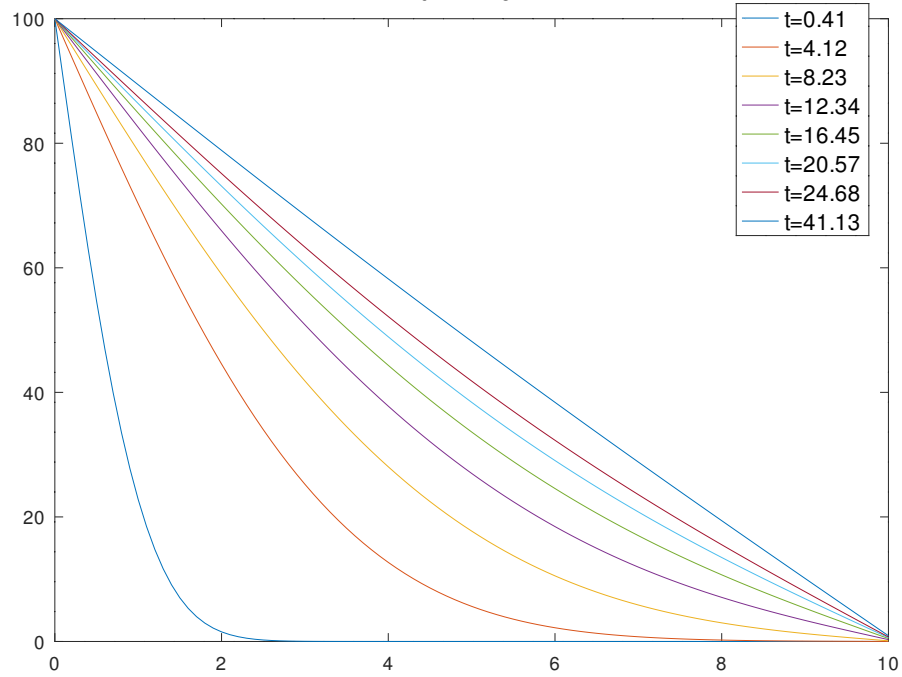
3.2 Implícito

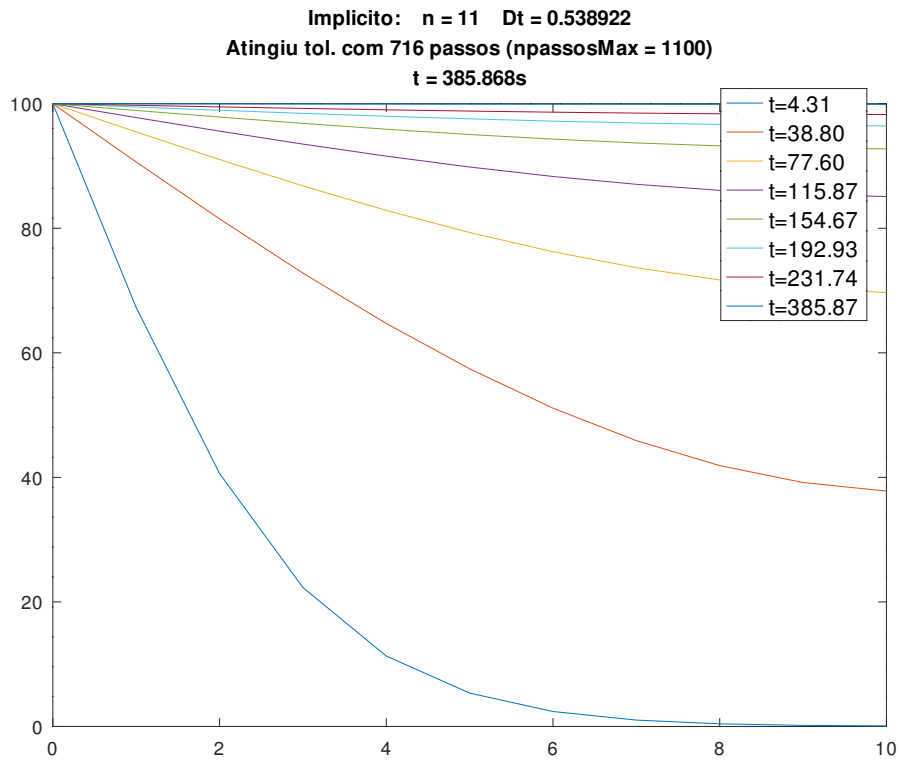
Δx	n	Δt_1				Δt_2			
		k	t	T_{Comp}	Atingiu Tol.	k	t	T_{Comp}	Atingiu Tol.
1	11	716	385.868	1.26s	Sim	523	407.126	1.14s	Sim
0.1	101	10100	†	1.74s	Não	10100	†	1.74s	Não
0.01	1001	15000	†	2.61s	Não	15000	†	2.63s	Não

3.3 Crank-Nicolson

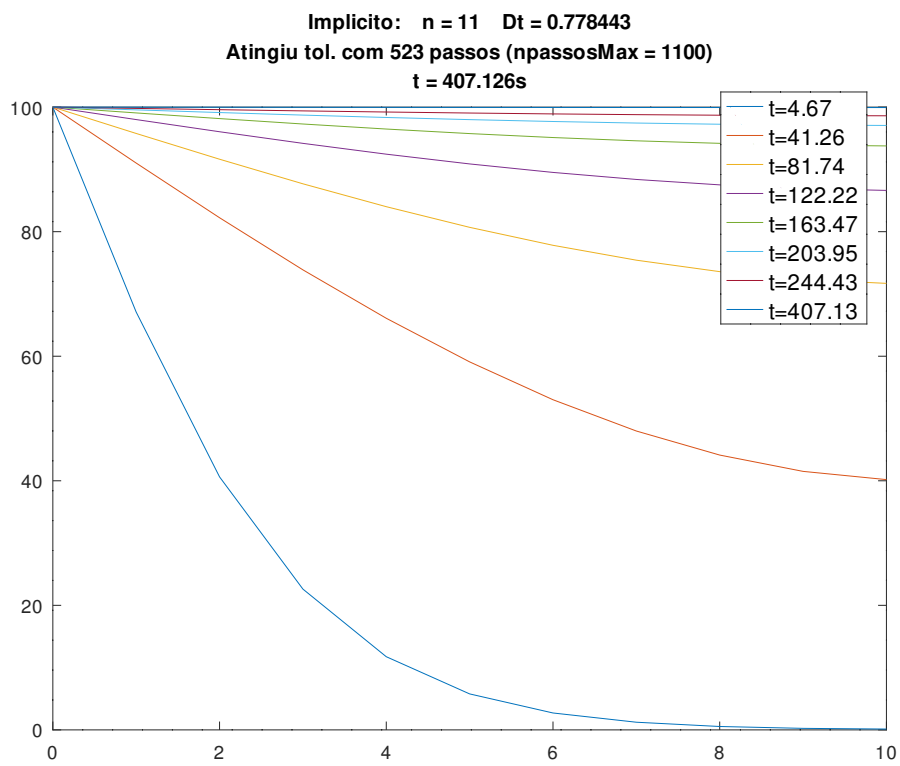
Δx	n	Δt_1				Δt_2			
		k	t	T_{Comp}	Atingiu Tol.	k	t	T_{Comp}	Atingiu Tol.
1	11	392	211.257	1.13s	Sim	285	221.856	1.35s	Sim
0.1	101	10100	†	1.67s	Não	10100	†	1.64s	Não
0.01	1001	15000	†	2.73s	Não	15000	†	2.85s	Não

Explicito: $n = 101$ $Dt = 0.00538922$
 Atingiu tol. com 7631 passos (npassosMax = 10100)
 $t = 41.1251$



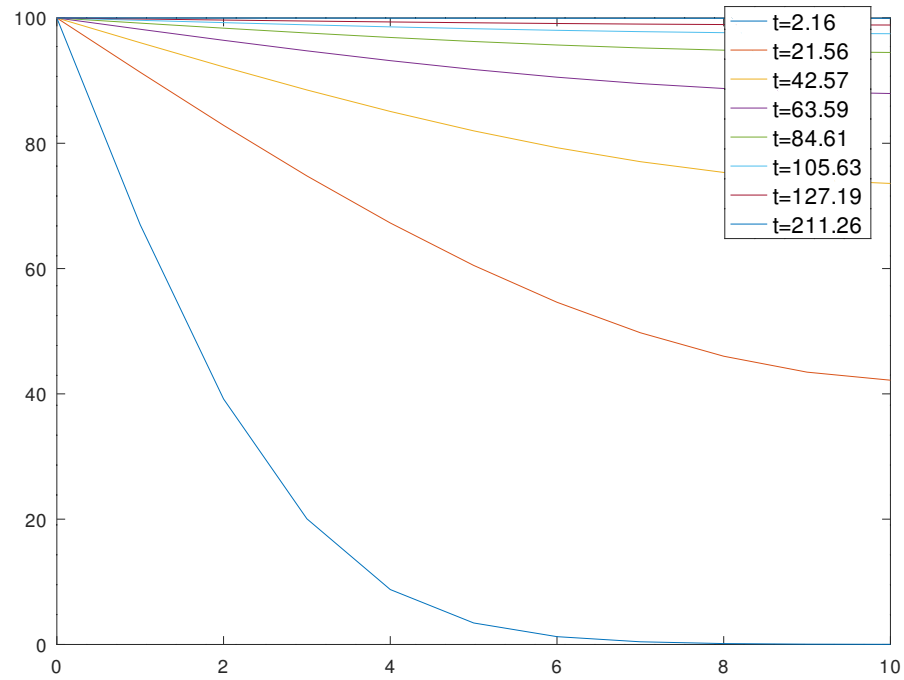


Solução Errada!!!



Solução Errada!!

Crank-Nicolson: $n = 11$ $\Delta t = 0.538922$
Atingiu tol. com 392 passos (npassosMax = 1100)
 $t = 211.257$



Solução Errada!

4 Exercício 3

Equação do calor com condutividade térmica constante, fonte de calor unitária e

- Parâmetros básicos:

$$a(x, t) = 0.835 \text{ cm}^2/\text{s}, f(x, t) = 1 \text{ e } (0, l) = (0, 10)$$

- Condições de contorno e iniciais:

$$u(0, t) = 100^\circ\text{C}, \frac{\partial u(10, t)}{\partial x} = 0 \text{ e } u(x, 0) = 0, \text{ para } x \in (0, 10]$$

- Parâmetros da aproximação por Diferenças finitas considerando a condição de estabilidade:

$$- \Delta x = 1, \Delta t_1 = 0.538922 < \frac{(\Delta x)^2}{2\kappa} \text{ e } \Delta t_2 = 0.778443 > \frac{(\Delta x)^2}{2\kappa}$$

$$- \Delta x = 0.1, \Delta t_1 = 0.00538922 < \frac{(\Delta x)^2}{2\kappa} \text{ e } \Delta t_2 = 0.00778443 > \frac{(\Delta x)^2}{2\kappa}$$

$$- \Delta x = 0.01, \Delta t_1 = 5.38922e^{-5} < \frac{(\Delta x)^2}{2\kappa} \text{ e } \Delta t_2 = 7.78443e^{-5} > \frac{(\Delta x)^2}{2\kappa}$$

Nas tabelas, k = número de passos necessários para obter convergência; t = k*dt; T_{Comp} = tempo computacional.

4.1 Explícito

Δx	n	Δt_1				Δt_2			
		k	t	T_{Comp}	Atingiu Tol.	k	t	T_{Comp}	Atingiu Tol.
1	11	211	13.713	1.37s	Sim	1100	†	1.58s	Não
0.1	101	7631	41.1251	1.96s	Sim	10100	†	2.01s	Não
0.01	1001	15000	†	3.20s	Não	15000	†	2.95s	Não

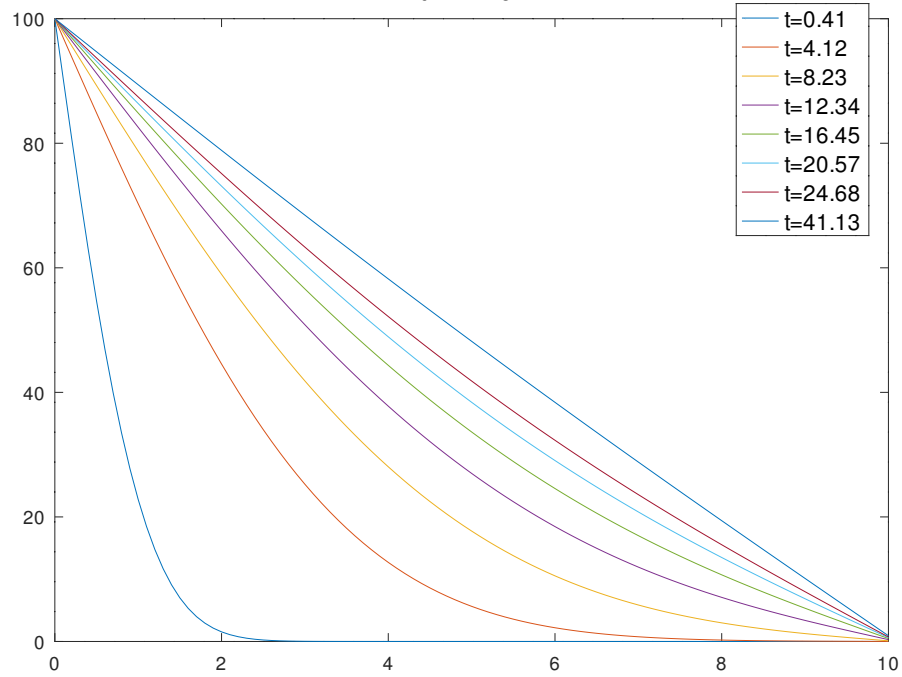
4.2 Implícito

Δx	n	Δt_1				Δt_2			
		k	t	T_{Comp}	Atingiu Tol.	k	t	T_{Comp}	Atingiu Tol.
1	11	760	409.581	1.21s	Sim	553	430.479	1.14s	Sim
0.1	101	10100	†	1.76s	Não	10100	†	1.85s	Não
0.01	1001	15000	†	2.83s	Não	15000	†	2.69s	Não

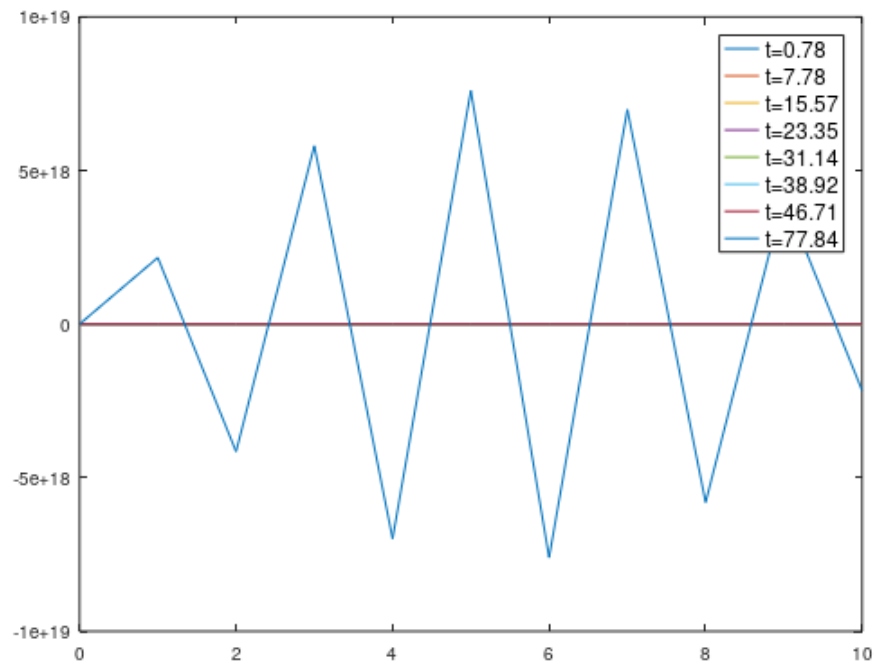
4.3 Crank-Nicolson

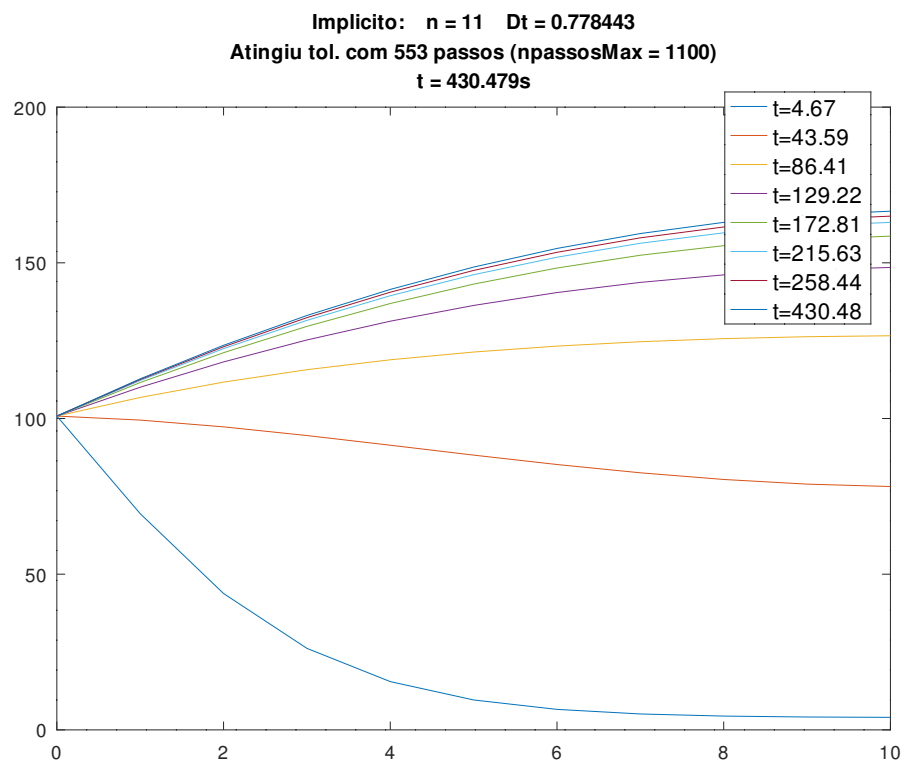
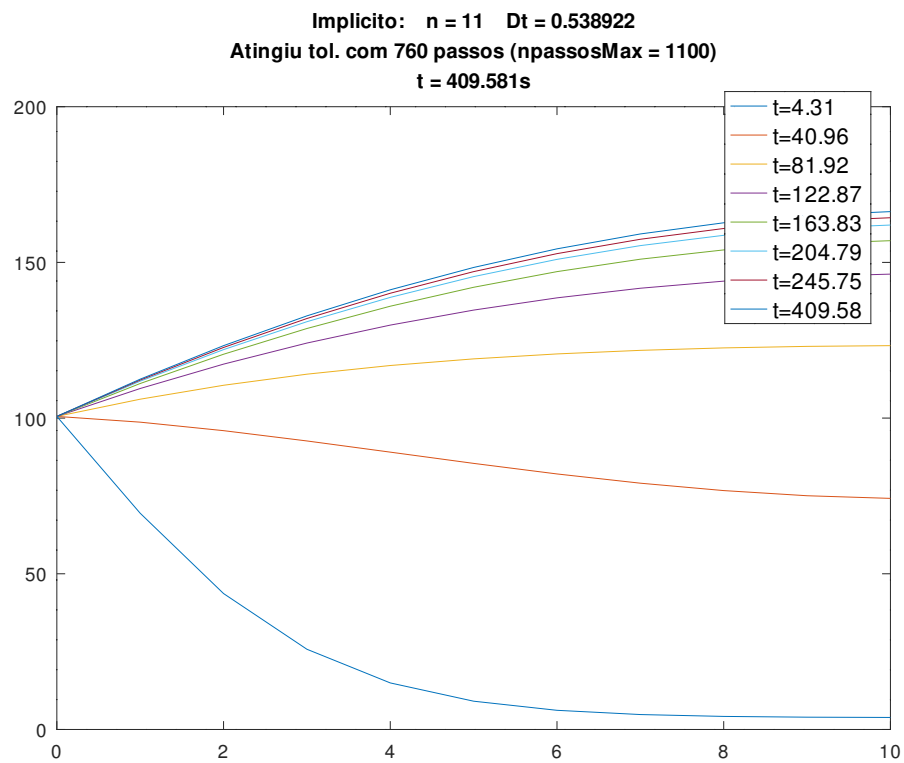
Δx	n	Δt_1				Δt_2			
		k	t	T_{Comp}	Atingiu Tol.	k	t	T_{Comp}	Atingiu Tol.
1	11	1100	†	1.15s	Não	1100	†	1.19s	Não
0.1	101	10100	†	1.86s	Não	10100	†	1.74s	Não
0.01	1001	15000	†	2.63s	Não	15000	†	2.67s	Não

Explicito: $n = 101$ $Dt = 0.00538922$
 Atingiu tol. com 7631 passos (npassosMax = 10100)
 $t = 41.1251$

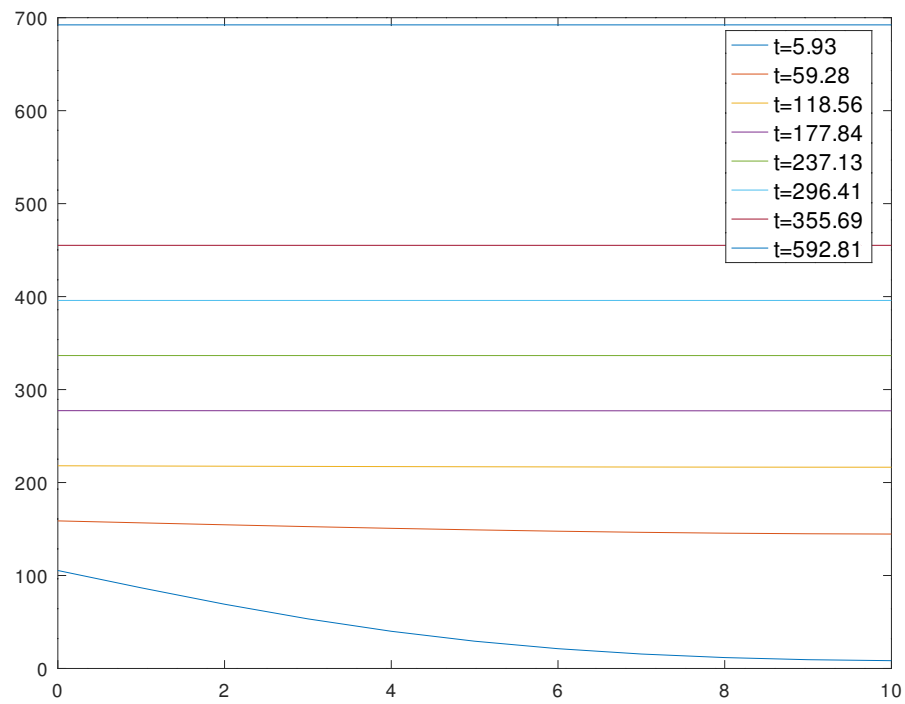


Solução Errada!





Crank-Nicolson: $n = 11$ $\Delta t = 0.538922$
Nao atingiu tol. (npassosMax = 1100)



Solução errada!

5 Conclusão

5.1 Comparativo entre métodos

Primeiramente é preciso ter em mente que dentre todos os métodos utilizados neste comparativo, o método explícito é o único que possui um fator de estabilidade que precisa ser atendido. O fator de estabilidade é definido como:

$$\lambda = \frac{(\Delta t * k)}{\Delta x^2} < \frac{1}{2}$$

Caso esta condição não seja atendida, isso poderá resultar em uma inconsistência na aproximação e fazendo com que está não convirja para uma solução estacionária. Este evento é demonstrado pelos 2 primeiros gráficos de cada exercício.

Já o método Crank-Nicolson, apesar de possuir um caráter estável, ao contrário do método implícito, pode vir a apresentar pequenos graus de instabilidade nos valores iniciais e finais de suas soluções devido ao acúmulo de erro de operações com números de ponto flutuante provenientes das operações que o algoritmo realiza.

5.2 Comparativo entre Condições de Contorno

Ao se observar as diferentes curvas em cada gráfico, comparando a diferença entre seus valores iniciais e finais, respectivamente, é possível perceber que quando se tem um valor prescrito as curvas convergem para tal, como é o caso de todos para o valor inicial e o caso do exercício 1 para o valor final.

Entretanto, quando só é fornecido o fluxo prescrito para o problema, os algoritmos apresentam variações nestes locais, como é possível observar no lado direito dos gráficos dos exercícios 2 e 3. Isso é devido a baixa precisão que o fluxo prescrito tem com relação ao valor prescrito, uma vez que o valor de uma função no ponto é mais preciso que o valor de sua derivada neste mesmo ponto.

Por fim, temos o caso (exercício 3) em que além do valor prescrito para o primeiro ponto e o fluxo prescrito no último ponto, também temos que considerar o seguinte resultado:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \kappa * \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t) = 1$$

Essa condição cria uma distorção ainda maior nos resultados, uma vez que o valor de f acaba por alterar a resultado da expressão de iteração dos algoritmos, fazendo com que estes tenham uma dificuldade maior para achar uma solução estacionária.

6 Referências

EATON, John W. Octave Documentation, 1996.
Disponível em: <<https://octave.org/doc/v4.2.2/>>.

COMMUNITY, Octave Forge. Octave Forge, 2002.
Disponível em: <<https://octave.sourceforge.io/docs.php>>.

CATABRIGA, Lucia. Problemas de Valor Inicial (PVI), 2019.
Disponível em: <http://inf.ufes.br/~luciac/mn1/191-PVI_AlgoII.pdf>.