Билет 2

Необходимое условие интегрируемости ф-ии по Риману.

В предыдущих сериях:

$f(x)$ - определена на $[a,b]$.

Разбиение отрезка $\tau = \{x_i\}_{i=0}^{n}$; $x_0 = a < x_1 < \ldots < x_n = b$.

$$d = \max_{i=\overline{0,n-1}} \Delta x_i$$

d — диаметр τ; $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$

$$\forall i = \overline{0,n-1},\ \forall \xi_i \in [x_i; x_{i+1}] : \sigma(\tau, \{\xi_i\}) = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i$$

$$\lim_{d \to 0} \sigma(\tau, \{\xi_i\}) = I \in \mathbb{R}.$$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall \tau,\ d < \delta,\ \forall \{\xi_i\} :$$

$$|\sigma(\tau, \{\xi_i\}) - I| < \varepsilon.$$

Теорема: необходимое условие интегрируемости по Риману.

Если $f(x)$ - инт. на $[a,b]$, то $f(x)$ - ограничена на $[a,b]$.

Док-во: О/П:

Пусть $f(x)$ - инт. и неогр. на $[a,b]$

$$\exists I \in \mathbb{R}: \forall \varepsilon>0\ \exists \delta=\delta(\varepsilon)>0: \forall \tau, d<\delta, \forall\{\xi_i\}:$$
$$|\sigma(\tau,\{\xi_i\})-I|<\varepsilon.$$

$\varepsilon=1;\ \exists\delta_1>0;\ \forall\tau, d<\delta_1, \forall\{\xi_i\}$

Тогда $f(x)$ будет неогр. на каком-то частичном отрезке. Б.О.О. положим что на $[x_0, x_1]$.

$$\sigma(\tau,\{\xi_i\}) = f(\xi_0)\Delta x_0 + \sum_{i=1}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i$$

$$|\sigma(\tau,\{\xi_i\})-I| = \Big|f(\xi_0)\Delta x_0 + \underbrace{\sum_{i=1}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i}_{\sigma_1} - I\Big| < 1 \overset{\varepsilon}{=}$$

Раскроем модуль: $I-1-\sigma_1 < f(\xi_0)\Delta x_0 < I+1-\sigma_1$

$$\frac{I-1-\sigma_1}{\Delta x_0} < f(\xi_0) < \frac{I+1-\sigma_1}{\Delta x_0}$$

и так $\forall \xi_0 \in [x_0, x_1]$.

Мы ограничим f на $[x_0, x_1]$