Universidade Federal de Juiz de Fora

Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional


# Introdução à Modelagem Matemática
# Trabalho Final - Módulo EDO


Gustavo Ribeiro de Oliveira Roque

Matheus Muniz Damasco

# 1 Introdução

Lobos e coiotes são animais selvagens que habitam a América do Norte. Ambos são carnívoros e possuem uma forte presença na cadeia alimentar de seus respectivos ecossistemas. Os lobos são animais carnívoros e bem sociais que vivem em grupos chamados alcateias, liderados por um macho e uma fêmea dominantes. Eles são conhecidos por sua habilidade de caçar em grupo, o que lhes permite derrubar presas grandes, como veados e alces.
Já os coiotes, por outro lado, são mais solitários ou vivem em pequenos grupos familiares. Eles são altamente adaptáveis, são onívoros e podem se alimentar de uma ampla variedade de alimentos, incluindo pequenos mamíferos, aves, frutas e vegetais e até mesmo carniça. Os coiotes são menores e mais rápidos que os lobos, o que lhes permite caçar presas menores e ser mais oportunistas em suas estratégias de alimentação.
Apesar das diferenças, tanto lobos quanto coiotes têm um papel importante na manutenção do equilíbrio dos ecossistemas norte-americanos. Há uma longa história de disputa por alimentos entre lobos e coiotes em habitats sobrepostos. Como ambos são carnívoros, eles competem pelos mesmos recursos alimentares, o que pode levar a conflitos intensos.
Os lobos geralmente caçam em grupo e podem derrubar presas maiores, usando sua força e cooperação. Os coiotes, por outro lado, são mais ágeis e se especializam em capturar presas menores e se alimentar de carcaças abandonadas. Os lobos possuem a vantagem no confronto direto devido ao seu tamanho e força, mas os coiotes são mais adaptáveis e podem se alimentar de uma gama mais ampla de recursos. A competição por alimento faz parte da natureza desses animais e é um importante fator de seleção natural.
Os lobos têm uma taxa reprodutiva mais baixa em comparação com os coiotes. As fêmeas de lobo geralmente têm de 1 a 9 crias por ninhada, mas em média são 5 crias por ninhada e podem ter uma ninhada por ano. Além disso, apenas os líderes da alcateia geralmente se reproduzem, limitando assim a quantidade de filhotes que são produzidos.
Já os coiotes têm uma taxa de reprodução mais alta. As fêmeas de coiote podem ter de 1 a 19 crias por ninhada, em média são 6 crias por ninhada e também geralmente têm uma ninhada por ano, assim como os lobos. A alta taxa de reprodução permite que os coiotes aumentem rapidamente sua população, compensando sua menor longevidade e maior mortalidade juvenil.
Os lobos se beneficiam de sua maior força e capacidade de caçar em grupo, enquanto os coiotes priorizam a quantidade sobre a qualidade, produzindo muitos filhotes com a esperança de que alguns sobrevivam. Nesse contexto, faremos o trabalho adotando os lobos e coiotes como os predadores e pequenos mamíferos e aves como alimento. Considerando dessa forma os lobos em vantagem pela sua capacidade de caça em grupo e força enquanto os coiotes em vantagem na taxa de reprodução e adaptabilidade.
Além disso, é importante destacar que os crescimentos das populações serão baseados no modelo logístico devido às limitações de alimento. De forma geral, será utilizado o modelo predador-presa de Lotka-Volterra.

# 2 Modelo Lotka-Volterra de Competição

Diversos modelos têm sido propostos para explicar a competição entre os organismos. Um modelo considerado clássico foi proposto por Lotka (1925) nos Estados Unidos quase que simultaneamente por Volterra (1926) na Itália. Tal modelo ficou portanto reconhecido como sendo o modelo de Lotka-Volterra. O modelo de Lotka-Volterra é um modelo determinístico baseado em equações diferenciais relacionando a taxa de crescimento dos organismos competidores a dois coeficientes de competição.

**Como funciona o modelo?**

Vamos usar o exemplo dos lobos e coiotes que é o nosso tema do trabalho então em uma floresta em que ambos estão competindo por coelhos.
Crescimento sem competição: Se não houvesse competição, os lobos e os coiotes poderiam se reproduzir livremente. A quantidade de cada espécie aumentaria de acordo com suas taxas de crescimento.
Competição por recursos: Como ambos caçam coelhos, eles competem entre si. Se houver muitos lobos, haverá menos coelhos para os coiotes, e vice-versa. Essa competição afeta a taxa de crescimento de ambas as populações.

**Resumindo:**

Se houver muitos lobos, haverá menos comida para os coiotes, e a população de coiotes diminuirá. Se houver muitos coiotes, haverá menos comida para os lobos, e a população de lobos diminuirá. As equações de Lotka-Volterra são ferramentas poderosas para entender como duas espécies competem por recursos limitados. Elas ajudam a prever como as populações mudam e se ajustam ao longo do tempo, levando em conta a competição entre elas. Em nosso exemplo simples, elas mostram como lobos e coiotes competem por coelhos e como essa competição afeta suas populações.

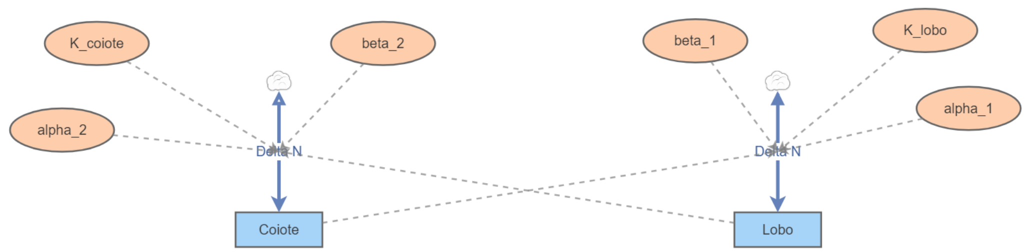
## 2.1 Formulação Matemática

A formulação matemática do modelo de Lotka-Volterra de competição descrito acima, considerando $A_1$ a população de lobos e $A_2$ a população de coiotes, é a seguinte:

$$\frac{dA_1}{dt} = \alpha_1 A_1 \left(1 - \frac{A_1 + \beta_1 A_2}{K_1}\right)$$
$$\frac{dA_2}{dt} = \alpha_2 A_2 \left(1 - \frac{A_2 + \beta_2 A_1}{K_2}\right)$$

onde $K_i$ representa a capacidade suporte, $\alpha_i$ a taxa de natalidade, $\beta_i$ é um parâmetro que representa a competição.
Tal modelo foi representado no Insight Maker da seguinte forma:

## Coiote vs Lobos Lotka-Volterra Competition Model




Aqui, iremos definir que $\alpha_2 > \alpha_1$, pois a taxa de natalidade dos coiotes é maior, $K_2 > K_1$, pois a capacidade suporte dos coiotes é maior, e $\beta_2 < \beta_1$ pois os coiotes são mais afetados na competição com os lobos. Mais para frente iremos definir os parâmetros.
Vamos determinar os $A_1$-nullclines, que ocorrem quando $dA_1/dt = 0$:

$$\begin{aligned} A_1 &= 0 \\ A_2 &= \frac{K_1 - A_1}{\beta_1} \end{aligned}$$

Os $A_2$-nullclines são dados por:

$$\begin{aligned} A_2 &= 0 \\ A_2 &= K_2 - \beta_2 A_1 \end{aligned}$$

Os pontos de equilíbrio são as interseções das nullclines, que são dadas por:

- $(0, 0)$, $(K_1, 0)$ e $(0, K_2)$,
- $\left(\frac{K_1 - \beta_1 K_2}{1 - \beta_1 \beta_2}, \frac{K_2 - \beta_2 K_1}{1 - \beta_1 \beta_2}\right)$,

A fim de analisarmos o comportamento dos pontos de equilíbrio, devemos calcular a matriz jacobiana:

$$J(A_1, A_2) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial A_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial A_2} \\ \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial A_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial A_2} \end{pmatrix}$$

Fazendo as contas, obtemos:

$$J(A_1, A_2) = \begin{pmatrix} \alpha_1 \left(1 - \dfrac{2A_1 + \beta_1 A_2}{K_1}\right) & -\dfrac{\alpha_1 \beta_1 A_1}{K_1} \\ \\ -\dfrac{\alpha_2 \beta_2 A_2}{K_2} & \alpha_2 \left(1 - \dfrac{2A_2 + \beta_2 A_1}{K_2}\right) \end{pmatrix}$$

## 2.2 Análise Qualitativa

Vamos definir os parâmetros como:

$$\alpha_1 = 0.4$$
$$\alpha_2 = 0.6$$
$$\beta_1 = 0.25$$
$$\beta_2 = 0.5$$

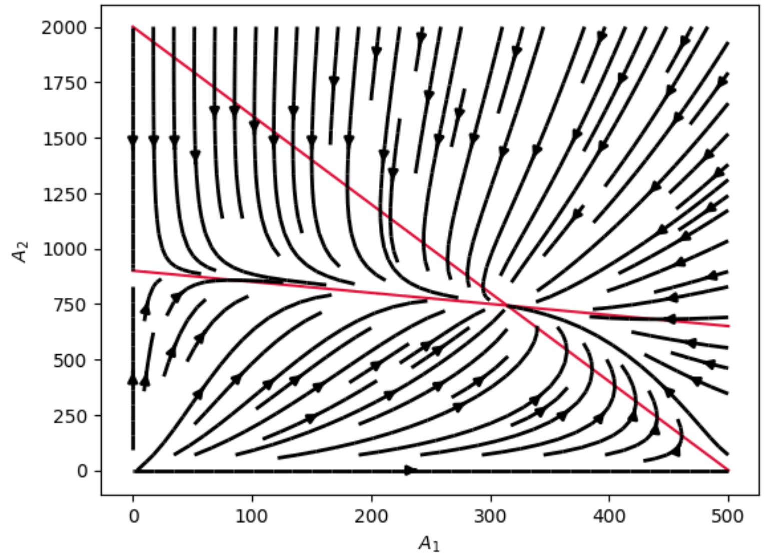
Note que a taxa de natalidade dos lobos é menor que a dos coiotes, e que como $\beta_2 > \beta_1$, os coiotes são mais afetados pela competição do que os lobos.
Pelo ponto de equilíbrio em que nenhuma das duas populações é nula, podemos tirar a condição para que as nullclines se cruzem no primeiro quadrante, quando $A_1, A_2 > 0$. A condição para que isso ocorra é $0.5K_1 < K_2 < 4K_1$. Então, aqui vamos avaliar quatro casos:

- $0.5K_1 < K_2 < 4K_1$
- $K_2 < 0.5K_1$
- $K_2 > 4K_1$
- $K_1 = K_2$

**Caso I:**
Aqui, consideramos $K_1 = 500$ e $K_2 = 900$. Neste caso, os pontos de equilíbrio são $(0, 0)$, $(500, 0)$, $(0, 900)$ e $(314.28, 742.86)$.

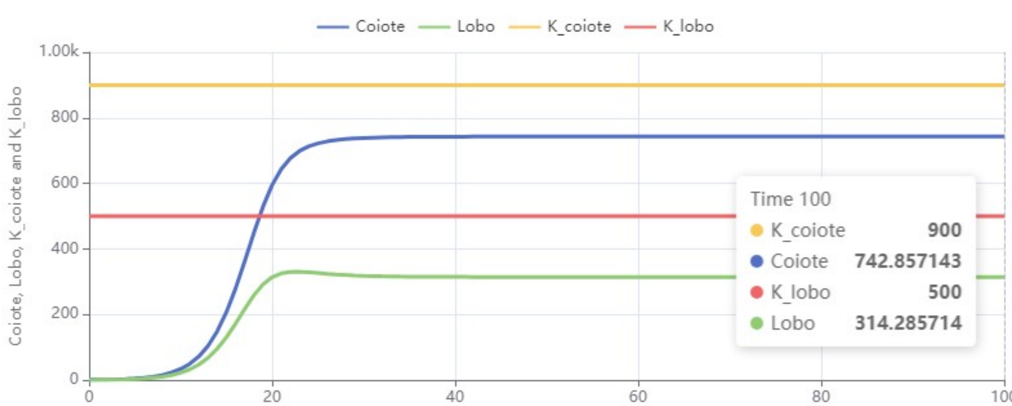
- $J(0, 0)$ tem os autovalores: 0.4 e 0.6. Como são dois autovalores reais positivos, o ponto $(0, 0)$ é uma fonte.
- $J(500, 0)$ tem os autovalores: $-0.4$ e $0.4333$, e $J(0, 900)$ tem os autovalores: $-0.6$ e $0.22$, sendo assim, cada ponto tem dois autovalores reais de sinais distintos, e os dois são pontos de sela.
- $J(314.28, 742.86)$ tem os autovalores iguais à $-0.19890456$ e $-0.54776211$, logo, é um ponto de sumidouro.

Figura 1: Retrato de Fases do Caso I, com as Nullclines em rosa.




Como temos o ponto de equilíbrio estável $(314.28, 742.86)$, esperamos que, ao simularmos no Insight Maker as populações tendam para estes valores, o que representa uma coexistência das duas espécies, onde cada uma fica um pouco abaixo de sua capacidade limite devido à competição que existe entre elas. Podemos observar exatamente esse comportamento esperado no gráfico gerado pela simulação abaixo.

Figura 2: Caso I: $K_1 = 500$ e $K_2 = 900$

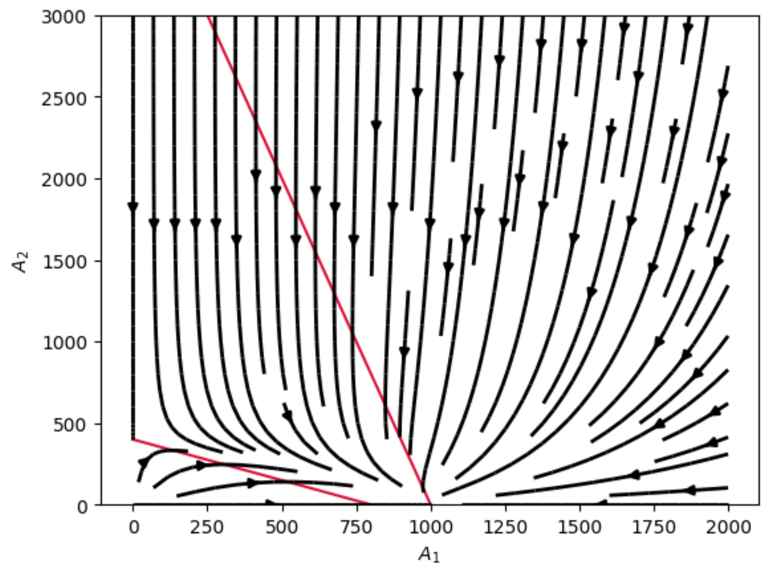



**Caso II:**
Aqui, consideramos $K_1 = 1000$ e $K_2 = 400$. Neste caso, os pontos de equilíbrio são $(0, 0)$, $(1000, 0)$, $(0, 400)$. O ponto de encontro das nullclines ocorre em $(1028.57, -114.28)$, o que não é factível para nossa análise, pois há um dado de população negativa. Portanto, iremos desconsiderá-lo.

- $J(0, 0)$ tem os autovalores: 0.4 e 0.6. Como são dois autovalores reais positivos, o ponto $(0, 0)$ é uma fonte.

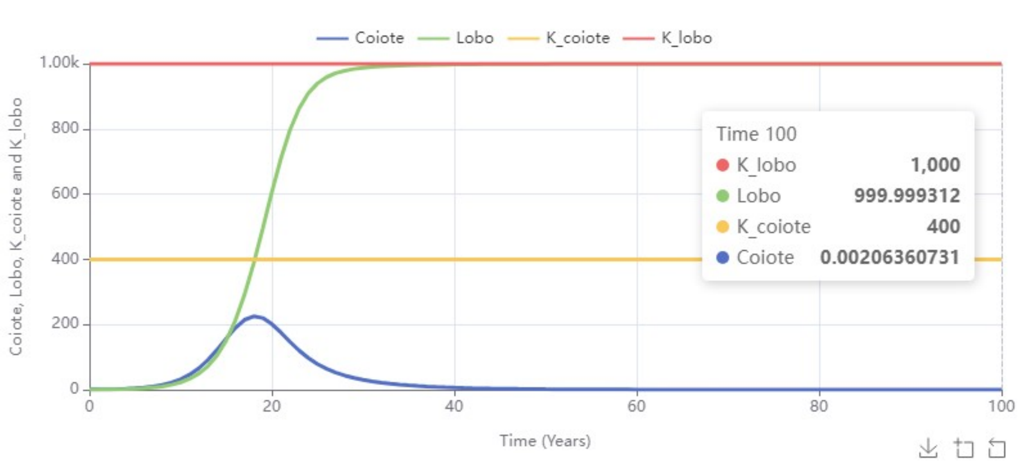
- $J(1000, 0)$ tem os autovalores: $-0.4$ e $-0.15$, sendo portanto um ponto de sumidouro.
- $J(0, 400)$ tem os autovalores: $-0.6$ e $0.36$, sendo um ponto de sela.

Figura 3: Retrato de Fases do Caso II, com as Nullclines em rosa.




Como temos o ponto de equilíbrio estável $(1000, 0)$, esperamos que, ao simularmos no Insight Maker as populações tendam para estes valores, o que representa o triundo dos lobos sobre os coiotes, que tendem a desaparecer. Sem a competição por alimentos com os coiotes, os lobos chegariam na sua capacidade suporte. Podemos observar exatamente esse comportamento esperado no gráfico gerado pela simulação abaixo.

Figura 4: Caso II: $K_1 = 1000$ e $K_2 = 400$

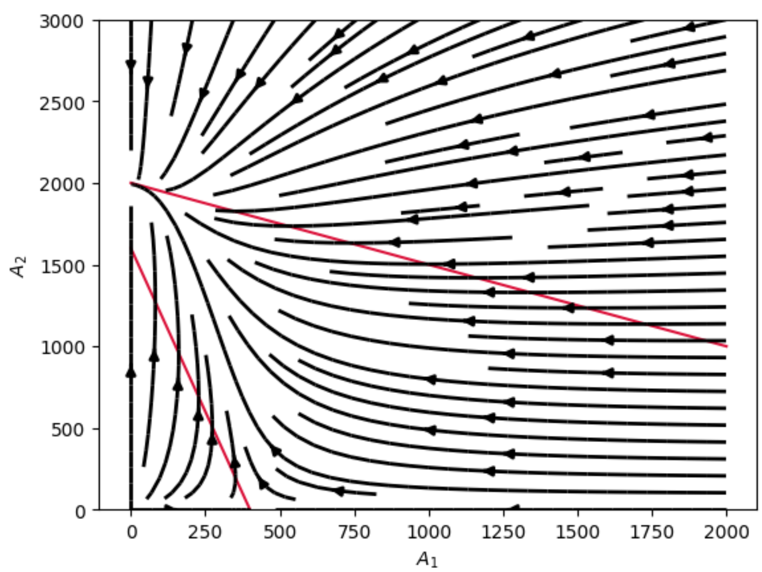



**Caso III:**

Aqui, consideramos $K_1 = 400$ e $K_2 = 2000$. Neste caso, os pontos de equilíbrio são $(0,0)$, $(400,0)$, $(0,2000)$. O ponto de encontro das nullclines ocorre em $(-114.28, 2057.14)$, o que não é factível para nossa análise, pois há um dado de população negativa. Portanto, iremos desconsiderá-lo.

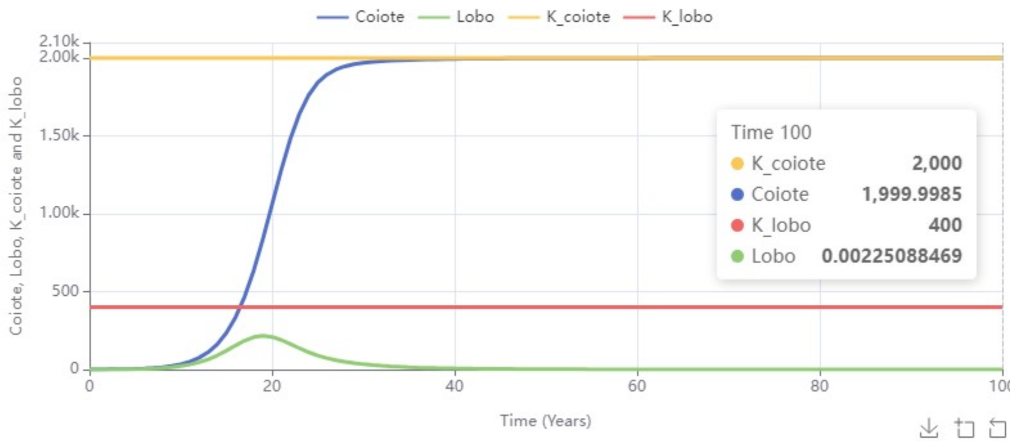
- $J(0,0)$ tem os autovalores: 0.4 e 0.6. Como são dois autovalores reais positivos, o ponto $(0,0)$ é uma fonte.
- $J(400,0)$ tem os autovalores: $-0.4$ e $0.54$, sendo um ponto de sela.
- $J(0,2000)$ tem os autovalores: $-0.6$ e $-0.1$, sendo um ponto de sumidouro.

Figura 5: Retrato de Fases do Caso III, com as Nullclines em rosa.




Como temos o ponto de equilíbrio estável $(0,2000)$, esperamos que, ao simularmos no Insight Maker as populações tendam para estes valores, o que representa o triunfo dos coiotes sobre os lobos, mesmo com a competição por alimentos afetando mais os coiotes. Isso ocorre devido à uma capacidade suporte muito maior dos coiotes, que acabam conseguindo superar a competição pela quantidade de indivíduos, enquanto os lobos desaparecem. Sem a competição por alimentos com os lobos, os coiotes chegariam na sua capacidade suporte. Podemos observar exatamente esse comportamento esperado no gráfico gerado pela simulação abaixo.

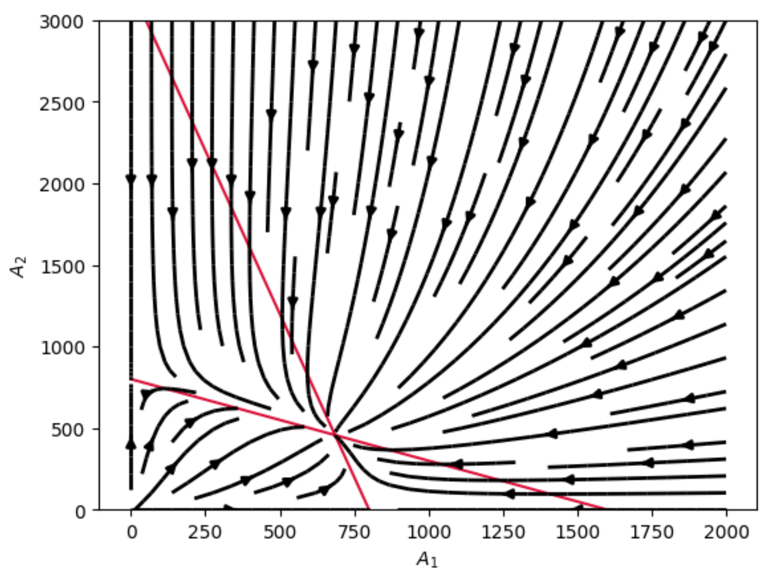
Figura 6: Caso III: $K_1 = 400$ e $K_2 = 2000$




**Caso IV:**
Aqui, consideramos $K_1 = K_2 = 800$. Neste caso, os pontos de equilíbrio são $(0, 0)$, $(800, 0)$, $(0, 800)$ e $(685.71, 457.14)$

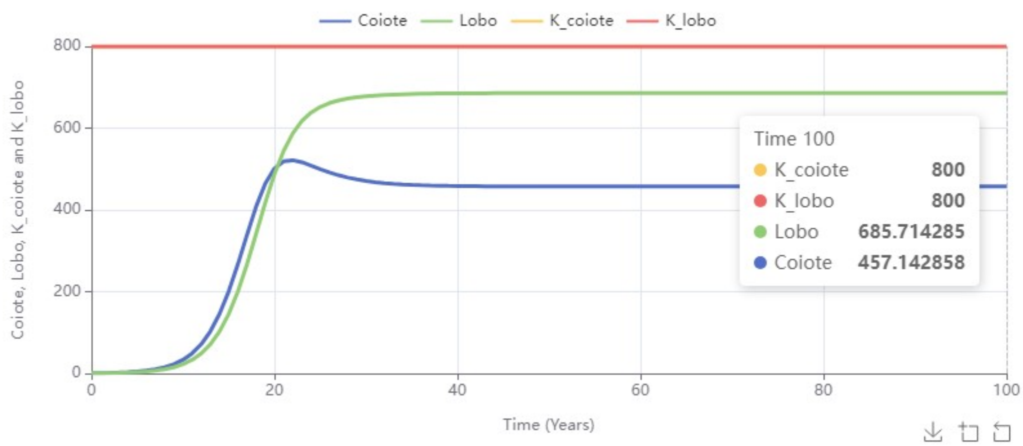
- $J(0, 0)$ tem os autovalores: 0.4 e 0.6. Como são dois autovalores reais positivos, o ponto $(0, 0)$ é uma fonte.
- $J(800, 0)$ tem os autovalores: $-0.4$ e $0.3$, e $J(0, 800)$ tem os autovalores: $-0.6$ e $0.3$, sendo assim, cada ponto tem dois autovalores reais de sinais distintos, e os dois são pontos de sela.
- $J(685.71, 457.14)$ tem os autovalores iguais à $-0.22163884$ e $-0.46407545$, logo, é um ponto de sumidouro.

Figura 7: Retrato de Fases do Caso IV, com as Nullclines em rosa.



O Caso IV terá um comportamento idêntico ao Caso I, pois, na verdade, simbolizam o mesmo caso: em que $0.5K_1 < K_2 < 4K_1$, mas aqui em vez de colocarmos valores distintos para as capacidades suportes, quisemos avaliar como se comportam caso sejam iguais. Novamente, teremos as duas populações coexistindo em número de indivíduos menor que a capacidade suporte, devido à competição existente entre elas. Podemos ver tal comportamento no gráfico gerado no Insight Maker.

Figura 8: Caso IV: $K_1 = K_2 = 800$




Insight Maker Model: https://insightmaker.com/insight/5CFAmxcOhOgxw2x2cOlSwJ