Capítulo 3.1:
Equações homogêneas lineares de segunda ordem com coeficientes constantes

- Uma **equação diferencial ordinária de segunda ordem** tem a forma geral

$$y'' = f(t, y, y')$$

onde f é uma função dada.

- Esta equação é dita **linear** se f é linear em y e y':

$$y'' = g(t) - p(t)y' - q(t)y$$

caso contrário dizemos que é **não linear**.

- Uma equação linear de segunda ordem aparece como

$$P(t)y'' + Q(t)y' + R(t)y = G(t)$$

- Se $G(t) = 0$ para todo t, então esta equação é dita **homogênea**. caso contrário dizemos que é **não homogênea**.

Capítulo 3.1:

Equações Homogêneas, Valores Iniciais

- Nas seções 3.6 e 3.7, nós veremos que uma vez que encontramos uma solução para a equação homogênea, isto possibilita resolver uma equação não homogênea associada ou correspondente à homogênea, ou no mínimo expressar a solução em termos de uma integral.
- O foco deste capítulo são as equações Homogêneas e em particular, as de coeficientes constantes:

$$ay'' + by' + cy = 0$$

  O caso com coeficientes variáveis será vista mais adiante.
- Condição Inicial é dada da seguinte forma

$$y(t_0) = y_0, \quad y'(t_0) = y_0'$$

- Portanto a solução passa por (t_0, y_0), e a inclinação da solução em (t_0, y_0) é igual a y_0'.

Capítulo 3.1:
Exemplo 1
Infinidades de Soluções

- Considere a EDO 2ª

$$y'' - y = 0$$

- As duas soluções desta equação são

$$y_1(t) = e^t, \quad y_2(t) = e^{-t}$$

- Outras soluções são

$$y_3(t) = 3e^t, \quad y_4(t) = 5e^{-t}, \quad y_5(t) = 3e^t + 5e^{-t}$$

- Baseado nesta observação, nós vimos que existem uma infinidades de soluções e são da forma

$$y(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t}$$

- Mostraremos na seção 3.2 que todas as soluções da equação diferencial acima podem ser dada desta forma.

Capítulo 3.1:
Exemplo 1
Condições Iniciais

- Agora considere o seguinte Problema de Valor Inicial (PVI) para nossa equação:

$$y'' - y = 0, \quad y(0) = 3, \; y'(0) = 1$$

- Nos podemos encontrar uma solução geral da seguinte forma

$$y(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t}$$

- Usando as condições iniciais,

$$\left.\begin{aligned} y(0) = c_1 + c_2 = 3 \\ y'(0) = c_1 - c_2 = 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow c_1 = 2, \; c_2 = 1$$

- temos

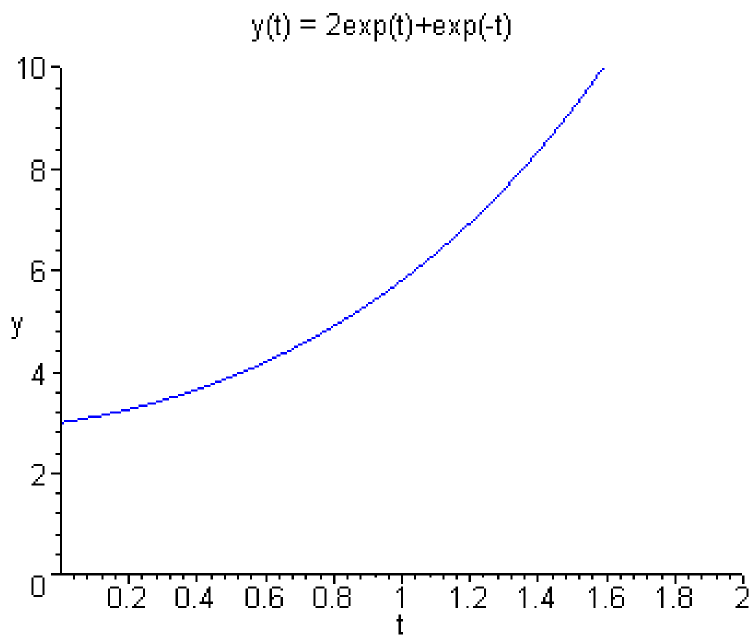
$$y(t) = 2e^t + e^{-t}$$

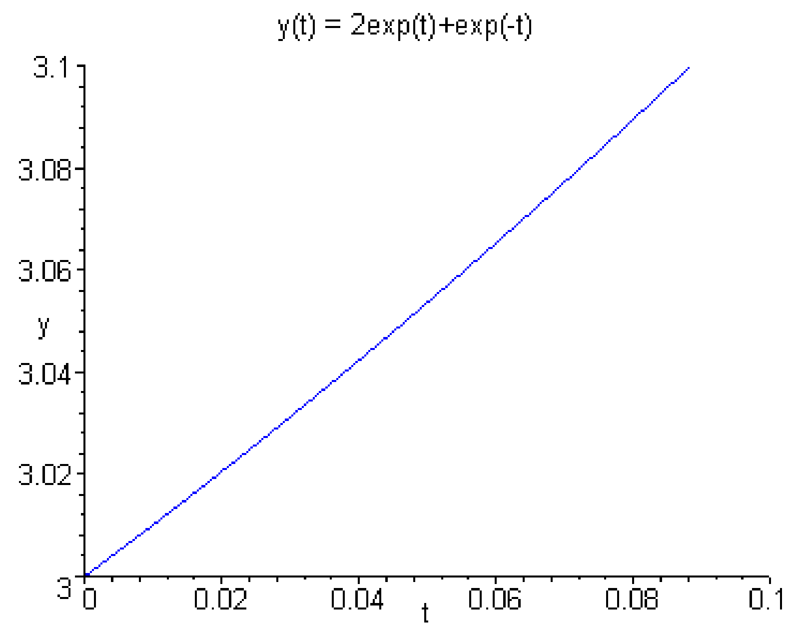
Capítulo 3.1:
Exemplo 1
Gráfico da Solução

- O PVI e a solução são

$$y'' - y = 0, \quad y(0) = 3,\ y'(0) = 1 \ \Rightarrow \ y(t) = 2e^{t} + e^{-t}$$

- O gráfico da solução é dado abaixo. O gráfico da direita sugere que ambas as condições são satisfeita.





Capítulo 3.1:

Equação Característica

- Para resolver uma equação de 2a ordem com coeficientes constantes, $ay'' + by' + cy = 0,$
- começamos assumindo uma solução da forma $y = e^{rt}$.
- Substituindo-a na equação diferencial, obtemos:

$$ar^2 e^{rt} + bre^{rt} + ce^{rt} = 0$$

Simplificando,

$$e^{rt}(ar^2 + br + c) = 0$$

e assim

$$ar^2 + br + c = 0$$

- Esta última equação é chamada **equação característica** da equação diferencial.
- Nos resolvemos esta equação em r por fatoração ou usando a formula quadrática.

Capítulo 3.1:

Solução Geral

- Usando a formula quadrática na **equação característica**

$$ar^2 + br + c = 0,$$

  obtemos duas soluções, r_1 e r_2.
- Existem três possibilidades:
  - As Raízes r_1, r_2 são reais e $r_1 \neq r_2$.
  - As Raízes r_1, r_2 são reais e $r_1 = r_2$.
  - As Raízes r_1, r_2 são complexas.

$$r = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

- Por enquanto, vamos assumir que r_1, r_2 são reais e $r_1 \neq r_2$.
- Neste caso, a solução geral é da forma

$$y(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}$$

Capítulo 3.1:

Condições Iniciais

- Para o PVI

$$ay'' + by' + cy = 0, \quad y(t_0) = y_0, \quad y'(t_0) = y_0',$$

usaremos a solução geral

$$y(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}$$

usando as condições iniciais para encontrar c_1 e c_2. Isto é,

$$\left.\begin{aligned} c_1 e^{r_1 t_0} + c_2 e^{r_2 t_0} &= y_0 \\ c_1 r_1 e^{r_1 t_0} + c_2 r_2 e^{r_2 t_0} &= y_0' \end{aligned}\right\} \Rightarrow c_1 = \frac{y_0' - y_0 r_2}{r_1 - r_2} e^{-r_1 t_0}, \; c_2 = \frac{y_0 r_1 - y_0'}{r_1 - r_2} e^{-r_2 t_0}$$

- Desde que assumindo $r_1 \neq r_2$, segue que uma solução da forma $y = e^{rt}$ para o PVI acima sempre existirá, para qualquer conjunto de condições iniciais.

Capítulo 3.1:

Exemplo 2

- Considere o PVI

$$y'' + y' - 12y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$$

- Tomando a solução exponencial e obtendo a E.C.:

$$y(t) = e^{rt} \quad \Rightarrow \quad r^2 + r - 12 = 0 \iff (r+4)(r-3) = 0$$

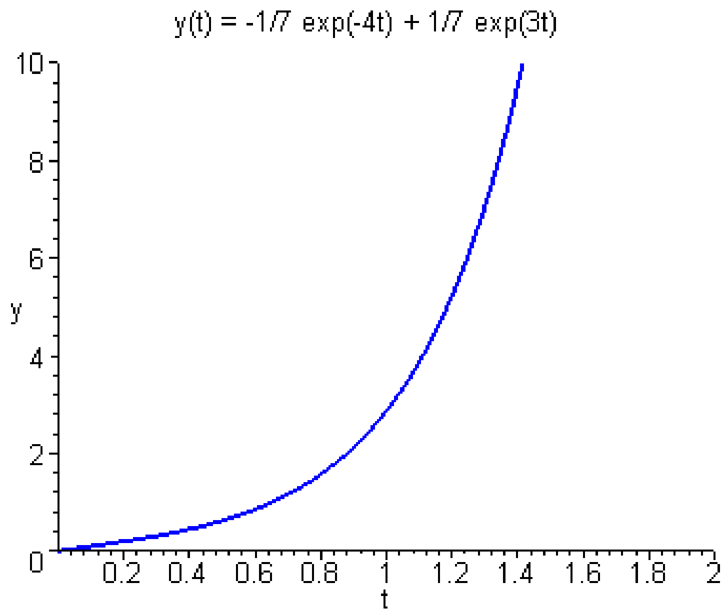
- Resolvendo a E.C. obtemos duas soluções, r_1 = -4 e r_2 = 3
- A solução geral é

$$y(t) = c_1 e^{-4t} + c_2 e^{3t}$$

- Usando as condições iniciais:

$$\left.\begin{aligned} c_1 + c_2 &= 0 \\ -4c_1 + 3c_2 &= 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow c_1 = \frac{-1}{7}, \; c_2 = \frac{1}{7}$$

- Temos $y(t) = \dfrac{-1}{7} e^{-4t} + \dfrac{1}{7} e^{3t}$



Capítulo 3.1:

Exemplo 3

- Considere o PVI

$$2y'' + 3y' = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 3$$

- Então

$$y(t) = e^{rt} \quad \Rightarrow \quad 2r^2 + 3r = 0 \iff r(2r+3) = 0$$

- Obtemos duas soluções, $r_1 = 0$ e $r_2 = -3/2$
- A solução geral é

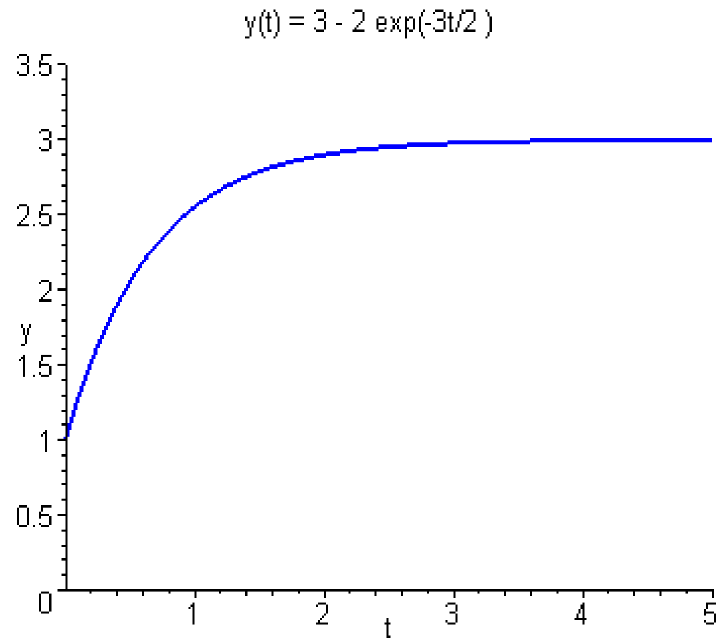
$$y(t) = c_1 e^{0t} + c_2 e^{-3t/2} = c_1 + c_2 e^{-3t/2}$$

- Usando as condições iniciais:

$$\left.\begin{aligned} c_1 + c_2 &= 1 \\ -\frac{3c_2}{2} &= 3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow c_1 = 3,\ c_2 = -2$$

- Temos

$$y(t) = 3 - 2e^{-3t/2}$$



Capítulo 3.1:
Exemplo 4
PVI

- Considere o PVI

$$y'' + 5y' + 6y = 0, \quad y(0) = 2, \;\; y'(0) = 3$$

- Então

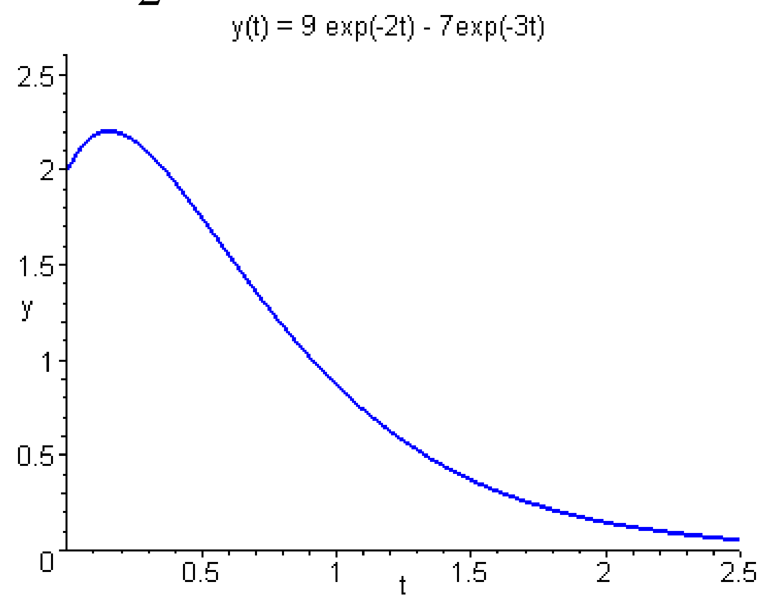
$$y(t) = e^{rt} \quad \Rightarrow \quad r^2 + 5r + 6 = 0 \;\Leftrightarrow\; (r+2)(r+3) = 0$$

- Obtemos duas soluções, r_1 = -2 e r_2 = -3
- A solução geral é

$$y(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-3t}$$

- Usando as condições iniciais:

$$\left.\begin{aligned} c_1 + c_2 &= 2 \\ -2c_1 - 3c_2 &= 3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow c_1 = 9, \; c_2 = -7$$



- Temos $\quad y(t) = 9e^{-2t} - 7e^{-3t}$

Capítulo 3.1:
Exemplo 4
Encontrando o Valor Máximo

- Encontrar o valor máximo alcançado pela solução.

$$y(t) = 9e^{-2t} - 7e^{-3t}$$

$$y'(t) = -18e^{-2t} + 21e^{-3t} = 0$$

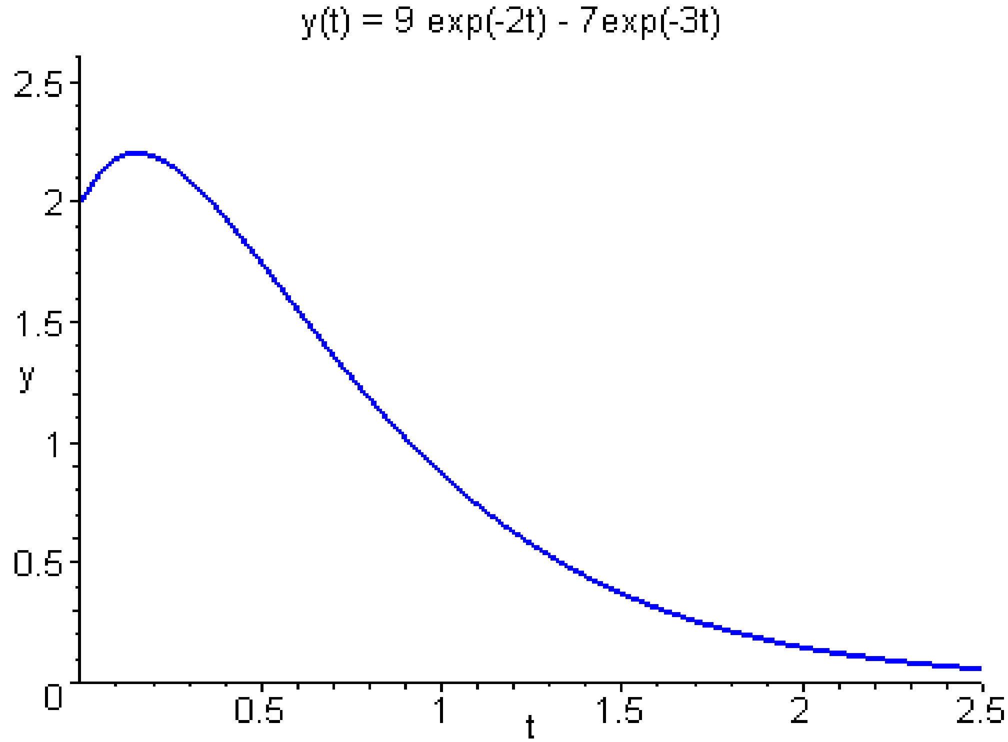
$$6e^{-2t} = 7e^{-3t}$$

$$e^{t} = 7/6$$

$$t = \ln(7/6)$$

$$t \approx 0.1542$$

$$y \approx 2.204$$



Capítulo 3.2: Soluções Fundamentais de Equações Lineares Homogêneas

- Sejam p, q funções contínuas no intervalo $I = (\alpha, \beta)$, o qual poderá ser infinito. Para alguma função y que seja três vezes diferenciável em I, definisse o operador diferencial L por

$$L[y] = y'' + p\, y' + q\, y$$

- Note que $L[y]$ é uma função em I, com valor de saída

$$L[y](t) = y''(t) + p(t)\, y'(t) + q(t)\, y(t)$$

- Por exemplo,

$$p(t) = t^2,\ q(t) = e^{2t},\ y(t) = \sin(t),\ \ I = (0, 2\pi)$$
$$L[y](t) = -\sin(t) + t^2 \cos(t) + 2e^{2t} \sin(t)$$

Capítulo 3.2:

Notação do Operador Diferencial

- Nesta seção nos vamos discutir a equação homogênea linear de 2ª ordem $L[y](t) = 0$, junto com condições iniciais como indicado abaixo:

$$L[y] = y'' + p(t)\,y' + q(t)\,y = 0$$

$$y(t_0) = y_0,\; y'(t_0) = y_1$$

- Gostaríamos de saber se existe solução para este problema de valor inicial, e em caso afirmativo, se é única.
- Também, gostaríamos de saber sobre a forma e a estrutura das soluções, pois, podem ser úteis na hora de encontrar soluções para os problemas particulares.
- Estas perguntas são respondidas nos teoremas a seguir .

Capítulo 3.2:

Teorema 3.2.1

- Considere o PVI

$$y'' + p(t)\, y' + q(t)\, y = g(t)$$
$$y(t_0) = y_0,\ y'(t_0) = y'_0$$

- onde p, q, e g são funções continuas no intervalo aberto I que contém t_0. Então existe uma única solução $y = \phi(t)$ em I.

- Note: Quando este teorema diz que existe uma solução ao problema do valor inicial acima, não é possível escrever a solução por uma expressão. Esta é uma das principais diferenças das equações Lineares de 1ª ordem com as de 2ª ordem.

Capítulo 3.2:

$$y'' + p(t)\,y' + q(t)\,y = g(t)$$
$$y(t_0) = y_0,\; y'(t_0) = y_1$$

Exemplo 1

- Considere a EDO 2ª ordem linear com PVI

$$y'' - y = 0,\; y(0) = 3,\; y'(0) = 1$$

- Na seção 3.1, nós mostramos que este PVI tem a seguinte solução:

$$y(t) = 2e^{t} + e^{-t}$$

- Note que $p(t) = 0$, $q(t) = -1$, $g(t) = 0$ elas são contínuas em $(-\infty, \infty)$, e a solução y está bem definida e é duas vezes diferenciável em $(-\infty, \infty)$.

Capítulo 3.2:

Exemplo 2

- Considere a EDO 2ª ordem linear com PVI

  $$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0,\ \ y(0) = 0,\ \ y'(0) = 0$$

  onde p, q são funções continuas no intervalo aberto I que contém t_0.
- Na luz das circunstâncias iniciais, note que $y = 0$ é uma solução para este problema homogêneo de valor inicial.
- Desde que as hipóteses do Teorema 3.2.1 são satisfeitas, segue que $y = 0$ é a única solução deste problema.

Capítulo 3.2:

Example 3

- Determinar o maior intervalo em que dado o valor inicial, solução do problema existe e é única e ainda é duas vezes diferenciável .

$$(t+1)y'' - (\cos t)y' + 3y = 1, \ \ y(0) = 1, \ \ y'(0) = 0$$

- Primeiramente pôr a equação diferencial na formula padrão:

$$y'' - \frac{\cos t}{t+1} y' + \frac{3}{t+1} y = \frac{1}{t+1}, \ \ y(0) = 1, \ \ y'(0) = 0$$

- O maior intervalo que contem o ponto $t = 0$ em que os coeficiente da função são contínuos é (-1, ∞).
- Segue do Teorema 3.2.1 que o maior intervalo em que este problema de valor inicial terá uma solução duas vezes diferenciável é também (-1, ∞).

Capítulo 3.2:

Teorema 3.2.2 (Princípio da Superposição)

- Se y_1e y_2 são soluções da equação

$$L[y] = y'' + p(t)\, y' + q(t)\, y = 0$$

então a combinação linear delas $c_1 y_1 + y_2 c_2$ é também uma solução, para todas as constantes c_1 e c_2 reais.

- Para provar este Teorema, substitua $c_1 y_1 + y_2 c_2$ no lugar de y na equação abaixo, e use o fato de que y_1 e y_2 são soluções e *L[y]* é linear.

$$L[y_1] = 0 \;e\; L[y_2] = 0 \Rightarrow L[c_1 y_1 + c_2 y_2] = c_1 L[y_1] + c_2 L[y_2] = 0$$

- Assim para todas as duas soluções y_1 e y_2, nós podemos construir uma família infinita de soluções, para cada $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$.
- Pode todas as soluções ser escrita desta maneira, ou têm alguma outra solução completamente diferente? Para responder a esta pergunta, nós usaremos o **determinante Wronskiano**.

Capítulo 3.2:

O Determinante Wronskiano

- Suponha que y_1 e y_2 são soluções para a equação

$$L[y] = y'' + p(t)\,y' + q(t)\,y = 0$$

- Pelo Teorema 3.2.2, nos sabemos que $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ é uma solução desta equação.
- O próximo passo é encontrar os coeficientes c_1 e c_2 tais que $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ satisfazem as condições iniciais

$$y(t_0) = y_0,\; y'(t_0) = y_0'$$

- Para isso, nós necessitamos resolver as seguintes equações:

$$\begin{aligned} c_1 y_1(t_0) + c_2 y_2(t_0) &= y_0 \\ c_1 y_1'(t_0) + c_2 y_2'(t_0) &= y_0' \end{aligned}$$

Capítulo 3.2:

$$c_1 y_1(t_0) + c_2 y_2(t_0) = y_0$$
$$c_1 y_1'(t_0) + c_2 y_2'(t_0) = y_0'$$

O Determinante Wronskiano

- Resolvendo as equações, nos obtemos

$$c_1 = \frac{y_0 y_2'(t_0) - y_0' y_2(t_0)}{y_1(t_0) y_2'(t_0) - y_1'(t_0) y_2(t_0)}$$
$$c_2 = \frac{-y_0 y_1'(t_0) + y_0' y_1(t_0)}{y_1(t_0) y_2'(t_0) - y_1'(t_0) y_2(t_0)}$$

- Em termos de determinantes:

$$c_1 = \frac{\begin{vmatrix} y_0 & y_2(t_0) \\ y_0' & y_2'(t_0) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1(t_0) & y_2(t_0) \\ y_1'(t_0) & y_2'(t_0) \end{vmatrix}}, \quad c_2 = \frac{\begin{vmatrix} y_1(t_0) & y_0 \\ y_1'(t_0) & y_0' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1(t_0) & y_2(t_0) \\ y_1'(t_0) & y_2'(t_0) \end{vmatrix}}$$

Capítulo 3.2:

O Determinante Wronskiano

- Para que estas fórmulas sejam válidas, o determinante W no denominador não pode se anular:

$$c_1 = \frac{\begin{vmatrix} y_0 & y_2(t_0) \\ y_0' & y_2'(t_0) \end{vmatrix}}{W}, \quad c_2 = \frac{\begin{vmatrix} y_1(t_0) & y_0 \\ y_1'(t_0) & y_0' \end{vmatrix}}{W}$$

$$W = \begin{vmatrix} y_1(t_0) & y_2(t_0) \\ y_1'(t_0) & y_2'(t_0) \end{vmatrix} = y_1(t_0)y_2'(t_0) - y_1'(t_0)y_2(t_0)$$

- W é chamado de **Determinante Wronskiano**, ou simplesmente de, o **Wronskiano** das soluções y_1e y_2. Nós usaremos às vezes a notação

$$W(y_1, y_2)(t_0)$$

Capítulo 3.2:

Teorema 3.2.3

- Suponha que y_1 e y_2 são soluções da equação

$$L[y] = y'' + p(t)\, y' + q(t)\, y = 0 \qquad (1)$$

e que o Wronskiano

$$W = y_1 y_2' - y_1' y_2$$

é não nulo no ponto t_0 onde as condições iniciais

$$y(t_0) = y_0, \; y'(t_0) = y_0' \qquad (2)$$

são definidas. Então existe uma escolha das constantes c_1, c_2 para que $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ seja uma solução da equação diferencial (1) e das condições iniciais (2).

Capítulo 3.2:

Exemplo 4

- Observe o seguinte PVI e sua solução:

$$y'' - y = 0,\ \ y(0) = 3,\ \ y'(0) = 1 \ \ \Rightarrow \ \ y(t) = 2e^{t} + e^{-t}$$

- Note que as duas funções exponenciais são soluções da equação diferencial:

$$y_1 = e^{t},\ y_2 = e^{-t}$$

- O Wronskiano de y_1 e y_2 é

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_1' y_2 = -e^{t} e^{-t} - e^{t} e^{-t} = -2e^{0} = -2$$

- Como $W \neq 0$ para todo t, a combinação linear de y_1 e y_2 pode ser usada para construir a solução do PVI para qualquer condição inicial t_0.

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

Capítulo 3.2:

Teorema 3.2.4 (Solução Fundamental)

- Suponha que y_1 e y_2 são soluções da equação
$$L[y] = y'' + p(t)\,y' + q(t)\,y = 0.$$
Se existe um ponto t_0 tal que $W(y_1,y_2)(t_0) \neq 0$, então a família de soluções $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ com coeficientes arbitrários c_1, c_2 incluem todas as soluções da equação diferencial.

- A expressão $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ é chamada de **solução geral** da equação diferencial acima, e neste caso y_1 e y_2 formam o chamado **Conjunto Fundamental das Soluções** para a equação diferencial.

Capítulo 3.2:

Exemplo 5

- Para a equação abaixo, temos duas soluções indicadas:

$$y'' - y = 0, \quad y_1 = e^t, y_2 = e^{-t}$$

- O Wronskiano de y_1 e y_2 é

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = -e^t e^{-t} - e^t e^{-t} = -2e^0 = -2 \neq 0 \text{ para todo } t.$$

- Assim y_1 e y_2 formam o Conjunto Fundamental das Soluções da equação diferencial acima, e podemos usa-las para construir todas as suas soluções.
- A solução Geral é

$$y = c_1 e^t + c_2 e^{-t}$$

Capítulo 3.2:

Example 6

- Considere uma equação linear de 2ª ordem, com duas soluções indicadas:
$$y'' + p(t)\,y' + q(t)\,y = 0$$
- Suponha que as funções abaixo são soluções desta equação:
$$y_1 = e^{r_1 t},\, y_2 = e^{r_2 t}, \quad r_1 \neq r_2$$
- O Wronskiano de y_1 e y_2 é
$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{r_1 t} & e^{r_2 t} \\ r_1 e^{r_1 t} & r_2 e^{r_2 t} \end{vmatrix} = (r_2 - r_1)e^{(r_1 + r_2)t} \neq 0 \text{ para todo } t.$$
- Assim y_1 e y_2 formam o Conjunto Fundamental das Soluções da equação diferencial, e podemos ser usadas para construir todas as soluções.
- A solução Geral é $\quad y = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}$

Capítulo 3.2:

Exemplo 7: Soluções

- Considere a seguinte equação diferencial:

$$2t^2 y'' + 3t\, y' - y = 0, \;\; t > 0$$

- Mostre que as soluções abaixo são soluções fundamentais:

$$y_1 = t^{1/2}, \, y_2 = t^{-1}$$

- Para mostrar isso, primeiro substitua y_1 na equação:

$$2t^2\left(\frac{-t^{-3/2}}{4}\right) + 3t\left(\frac{t^{-1/2}}{2}\right) - t^{1/2} = \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2} - 1\right)t^{1/2} = 0$$

- Assim y_1 é uma solução da equação diferencial.
- Similarmente, y_2 também é uma solução:

$$2t^2\left(2t^{-3}\right) + 3t\left(-t^{-2}\right) - t^{-1} = (4-3-1)t^{-1} = 0$$

Capítulo 3.2:

Exemplo 7: Soluções Fundamentais

- Lembrando que

$$y_1 = t^{1/2},\ y_2 = t^{-1}$$

- Para mostrar que y_1 e y_2 formam um conjunto fundamental de soluções, vamos calcular o Wronskiano de y_1 e y_2:

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t^{1/2} & t^{-1} \\ \frac{1}{2}t^{-1/2} & -t^{-2} \end{vmatrix} = -t^{-3/2} - \frac{1}{2}t^{-3/2} = -\frac{3}{2}t^{-3/2} = -\frac{3}{2\sqrt{t^3}}$$

- Desde que $W \neq 0$ para $t > 0$, y_1, y_2 formam um conjunto fundamental de soluções da equação diferencial

$$2t^2 y'' + 3t\, y' - y = 0,\ \ t > 0$$

Capítulo 3.2:

Teorema 3.2.5: Existencia do Conjunto Fundamental de Soluções

- Considere a equação diferencial abaixo, onde os coeficientes p e q são contínuos em algum intervalo aberto I:

$$L[y] = y'' + p(t)\,y' + q(t)\,y = 0$$

- Seja t_0 um ponto em I, y_1 e y_2 soluções da equação diferencial com y_1 satisfazendo a condição inicial

$$y_1(t_0) = 1,\ \ y_1'(t_0) = 0$$

  e y_2 satisfazendo a condição inicial

$$y_2(t_0) = 0,\ \ y_2'(t_0) = 1$$

- Então y_1, y_2 formam o conjunto fundamental das soluções para a dada equação diferencial.

Capítulo 3.2:

Exemplo 7: Teorema 3.2.5 (1 de 3)

- Encontrar o conjunto fundamental especificado pelo Teorema 3.2.5 para a equação diferencial e o ponto inicial

$$y'' - y = 0, \quad t_0 = 0$$

- É fácil ver que

$$y_1 = e^t, y_2 = e^{-t}$$

são soluções fundamentais, pois $W(y_1, y_2)(t_0) = -2 \neq 0$.

- Mas estas duas soluções não satisfazem às condições iniciais indicadas no Teorema 3.2.5, e assim não formam o conjunto fundamental das soluções mencionadas nesse teorema.
- Sejam y_3 e y_4 as soluções fundamentais do Teorema 3.2.5.

$$y_3(0) = 1, \; y_3'(0) = 0; \quad y_4(0) = 0, \; y_4'(0) = 1$$

Capítulo 3.2:

Exemplo 7: Solução Geral

- Desde que y_1 e y_2 formam o conjunto fundamental de soluções,

$$y_3 = c_1 e^t + c_2 e^{-t}, \quad y_3(0) = 1,\ y_3'(0) = 0$$

$$y_4 = d_1 e^t + d_2 e^{-t}, \quad y_4(0) = 0,\ y_4'(0) = 1$$

- Resolvendo para cada equação, obtemos

$$y_3(t) = \frac{1}{2}e^t + \frac{1}{2}e^{-t} = \cosh(t), \quad y_4(t) = \frac{1}{2}e^t - \frac{1}{2}e^{-t} = \operatorname{senh}(t)$$

- O Wronskiano de y_3 e y_4 é

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cosh t & \operatorname{senh} t \\ \operatorname{senh} t & \cosh t \end{vmatrix} = \cosh^2 t - \operatorname{senh}^2 t = 1 \neq 0$$

- Assim y_3, y_4 formam o conjunto fundamental de soluções indicado no Teorema 3.2.5, com solução geral neste caso

$$y(t) = k_1 \cosh(t) + k_2 \operatorname{senh}(t)$$

Capítulo 3.2:
Exemplo 7:
Vários Conjuntos Fundamentais de Soluções

- Portanto

$$S_1 = \left\{ e^t, e^{-t} \right\}, \quad S_2 = \{ \cosh t, \operatorname{senh} t \}$$

ambos formam o conjunto fundamental de soluções para a equação diferencial e o ponto inicial

$$y'' - y = 0, \quad t_0 = 0$$

- Em geral, uma equação diferencial pode ter uma infinidade de diferentes conjuntos fundamentais de soluções. Geralmente, nós escolhemos aquele que é o mais conveniente ou útil.

Capítulo 3.2:

Resumo

- Para encontrar uma solução geral de uma equação diferencial

$$y'' + p(t)\,y' + q(t)\,y = 0, \quad \alpha < t < \beta$$

  primeiramente encontramos duas soluções y_1 e y_2.
- Certificar-se então que há um ponto t_0 em algum intervalo tal que $W(y_1, y_2)(t_0) \neq 0$.
- Segue que y_1 e y_2 formam o conjunto fundamental de soluções para a equação, com solução geral $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$.
- Se condições iniciais são dadas em um ponto t_0 no intervalo onde $W \neq 0$, então c_1 e c_2 podem ser escolhidas de modo que satisfaçam as condições iniciais.

Capítulo 3.3:

Independência Linear e o Wronskiano

- Duas funções f e g são **Linearmente Dependente (LD)** se existe constantes c_1 e c_2, não nulas simultaneamente, tal que

$$c_1 f(t) + c_2 g(t) = 0$$

  para todo t em I. Note que isto se reduz a determinar se f e g são múltiplas uma da outra.
- Se a única solução a esta equação for $c_1 = c_2 = 0$, então f e g são **Linearmente Independente(LI)**.
- Por exemplo, Sejam $f(x) = \text{sen}2x$ e $g(x) = \text{sen}x.\cos x$, e considerando a combinação linear

$$c_1 \sin 2x + c_2 \sin x \cos x = 0$$

  Esta equação é satisfeita se nós escolhermos $c_1 = 1$, $c_2 = -2$, e daqui f e g são Linearmente Dependente.(LD)

Capítulo 3.3:

Soluções para Equações de Sistemas 2 x 2

- Quando resolvemos

$$c_1 x_1 + c_2 x_2 = a$$
$$c_1 y_1 + c_2 y_2 = b$$

para c_1 e c_2, pode ser mostrado que

$$c_1 = \frac{ay_2 - bx_2}{x_1 y_2 - y_1 x_2} = \frac{ay_2 - bx_2}{D},$$
$$c_2 = \frac{-ay_1 + bx_1}{x_1 y_2 - y_1 x_2} = \frac{-ay_1 + bx_1}{D}, \quad onde\ D = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}$$

- Note que se $a = b = 0$, então a única solução deste sistema de equações é $c_1 = c_2 = 0$, desde que $D \neq 0$.

Capítulo 3.3:

Exemplo 1: Independência Linear

- Mostrar que as seguintes funções são linear independentes em todo o intervalo :

$$f(t) = e^t, \quad g(t) = e^{-t}$$

- Sejam c_1 e c_2 escalares, e suponha

$$c_1 f(t) + c_2 g(t) = 0$$

para todo t em um intervalo arbitrário (α, β).

- Nós queremos mostrar $c_1 = c_2 = 0$. Desde que a equação verifica para todo t em (α, β), escolha t_0 e t_1 em (α, β), onde $t_0 \neq t_1$. Então

$$c_1 e^{t_0} + c_2 e^{-t_0} = 0$$

$$c_1 e^{t_1} + c_2 e^{-t_1} = 0$$

Capítulo 3.3:

Exemplo 1: Independência Linear

- A solução do nosso sistema de equações

$$c_1 e^{t_0} + c_2 e^{-t_0} = 0$$

$$c_1 e^{t_1} + c_2 e^{-t_1} = 0$$

será $c_1 = c_2 = 0$, se provarmos que o determinante D é não nulo:

$$D = \begin{vmatrix} e^{t_0} & e^{-t_0} \\ e^{t_1} & e^{-t_1} \end{vmatrix} = e^{t_0} e^{-t_1} - e^{-t_0} e^{t_1} = e^{t_0 - t_1} - e^{t_1 - t_0}$$

- Então

$$D = 0 \;\Leftrightarrow\; e^{t_0 - t_1} = e^{t_1 - t_0} \;\Leftrightarrow\; e^{t_0 - t_1} = \frac{1}{e^{t_0 - t_1}} \;\Leftrightarrow\; \left(e^{t_0 - t_1}\right)^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow\; e^{t_0 - t_1} = 1 \Leftrightarrow\; t_0 = t_1$$

- Assim sendo $t_0 \neq t_1$, significa que $D \neq 0$, e portanto f e g são Linearmente Independente.(LI)

Capítulo 3.3:

Teorema 3.3.1

- Se f e g são funções diferenciáveis em um intercalo aberto I e se $W(f, g)(t_0) \neq 0$ em algum ponto t_0 em I, então f e g são linearmente independentes em I. Além disso, se f e g são linearmente dependentes em I, então $W(f, g)(t) = 0$ para todo t em I.
- Prova(esboço): Sejam c_1 e c_2 escalares, e suponha

$$c_1 f(t) + c_2 g(t) = 0$$

- Para todo t em I. Em particular, quando $t = t_0$ nos temos

$$c_1 f(t_0) + c_2 g(t_0) = 0$$
$$c_1 f'(t_0) + c_2 g'(t_0) = 0$$

- Sendo $W(f, g)(t_0) \neq 0$, segue que $c_1 = c_2 = 0$, e assim f e g são Linearmente Independentes(LI).

Capítulo 3.3:

Teorema 3.3.2 (Teorema de Abel)

- Suponha que y_1 e y_2 são soluções da equação

$$L[y] = y'' + p(t)\,y' + q(t)\,y = 0$$

  onde p e q são funções contínuas em algum intervalo aberto I.
  Então $W(y_1,y_2)(t)$ é dado por

$$W(y_1, y_2)(t) = ce^{-\int p(t)\,dt}$$

  onde c é uma constante que dependem de y_1 e y_2 mas não de t.

- Note que $W(y_1,y_2)(t)$ ou é zero para todo t em I (se $c = 0$) ou nunca se anula em I (se $c \neq 0$).

Capítulo 3.3:

Exemplo 2: Wronskiano e Teorema de Abel

- Observe a seguinte equação e suas duas soluções:

$$y'' - y = 0, \quad y_1 = e^t, y_2 = e^{-t}$$

- O Wronskiano de y_1 e y_2 é

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = -e^t e^{-t} - e^t e^{-t} = -2e^0 = -2 \neq 0 \text{ para todo } t.$$

- Assim y_1 e y_2 são Linearmente Independentes em qualquer intervalo I, pelo Teorema 3.3.1. Agora compare W com o Teorema de Abel:

$$W(y_1, y_2)(t) = ce^{-\int p(t)dt} = ce^{-\int 0 dt} = c$$

- Escolhendo c = -2, nós encontramos o mesmo valor de W acima.

Capítulo 3.3:

Teorema 3.3.3

- Seja y_1 e y_2 soluções para a equação abaixo, onde p e q são contínuas em um intervalo aberto I:

$$L[y] = y'' + p(t)\, y' + q(t)\, y = 0$$

Então y_1 e y_2 são Linearmente Dependentes em I, se e somente se, $W(y_1, y_2)(t) = 0$ para todo t em I. De outro modo, y_1 e y_2 são Linearmente Independentes em I, se e somente se, $W(y_1, y_2)(t) \neq 0$ para todo t em I.

Capítulo 3.3:

Resumo

- Sejam y_1 e y_2 soluções de
$$y'' + p(t)\,y' + q(t)\,y = 0$$
onde p e q são contínuas em um intervalo aberto I.
- Então as seguintes afirmações são equivalentes :
  - As funções y_1 e y_2 formam um conjunto fundamental de soluções I.
  - As funções y_1 e y_2 são Linearmente Independente em I.
  - $W(y_1,y_2)(t_0) \neq 0$ para algum t_0 em I.
  - $W(y_1,y_2)(t) \neq 0$ para todo t em I.

Capítulo 3.3:

Notas de Algebra Linear

- Seja V o conjunto

$$V = \{y : y'' + p(t)\, y' + q(t)\, y = 0,\ t \in (\alpha, \beta)\}$$

Então V é um espaço vetorial de dimensão dois, com uma base formada pelo conjunto fundamental de y_1 e y_2.

- Por exemplo, o espaço solução V para a equação diferencial

$$y'' - y = 0$$

tem como bases

$$S_1 = \{e^t, e^{-t}\},\quad S_2 = \{\cosh t, \sinh t\}$$

com

$$V = \text{Espaço}\, S_1 = \text{Espaço}\ S_2$$

Capítulo 3.4:

Raízes Complexas da Equação Característica

- Retomando a discussão da equação

$$ay'' + by' + cy = 0$$

onde a, b e c são constantes reais.

- Assumindo soluções exponenciais dada da equação característica:

$$y(t) = e^{rt} \quad \Rightarrow \quad ar^2 + br + c = 0$$

- A fórmula quadrática(ou fatoração) fornece duas soluções, r_1 e r_2:

$$r = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

- Se $b^2 - 4ac < 0$, temos raízes complexas: $r_1 = \lambda + i\mu$, $r_2 = \lambda - i\mu$
- Assim

$$y_1(t) = e^{(\lambda + i\mu)t}, \quad y_2(t) = e^{(\lambda - i\mu)t}$$

Capítulo 3.4:
Formula de Euler:
Soluções Avaliadas nos Complexos

- Substituindo na serie de Taylor de e^t, no obtemos **fórmula de Euler**:

$$e^{it} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n)!} + i\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} t^{2n-1}}{(2n-1)!} = \cos t + i \sin t$$

- Generalizando a fórmula de Euler, obtemos

$$e^{i\mu t} = \cos \mu t + i \sin \mu t$$

- Então

$$e^{(\lambda + i\mu)t} = e^{\lambda t} e^{i\mu t} = e^{\lambda t}\left[\cos \mu t + i \sin \mu t\right] = e^{\lambda t} \cos \mu t + i e^{\lambda t} \sin \mu t$$

- Portanto

$$y_1(t) = e^{(\lambda + i\mu)t} = e^{\lambda t} \cos \mu t + i e^{\lambda t} \sin \mu t$$

$$y_2(t) = e^{(\lambda - i\mu)t} = e^{\lambda t} \cos \mu t - i e^{\lambda t} \sin \mu t$$

Capítulo 3.4:

Soluções Avaliadas nos Reais

- Nossas duas soluções são funções avaliadas nos complexo:

$$y_1(t) = e^{\lambda t}\cos\mu t + ie^{\lambda t}\sin\mu t$$
$$y_2(t) = e^{\lambda t}\cos\mu t - ie^{\lambda t}\sin\mu t$$

- Nós preferiríamos ter soluções avaliadas nos reais, pois nossa equação diferencial tem coeficientes reais .
- Para conseguir isto, recordemos que as combinações lineares das soluções são também soluções :

$$y_1(t) + y_2(t) = 2e^{\lambda t}\cos\mu t$$
$$y_1(t) - y_2(t) = 2ie^{\lambda t}\sin\mu t$$

- Ignorando as constantes, nós obtemos as duas soluções

$$y_3(t) = e^{\lambda t}\cos\mu t, \quad y_4(t) = e^{\lambda t}\sin\mu t$$

Capítulo 3.4:

Soluções Avaliadas nos Reais: O Wronskiano

- Assim nós temos as seguintes funções avaliadas nos reais:

$$y_3(t) = e^{\lambda t} \cos \mu t, \quad y_4(t) = e^{\lambda t} \sin \mu t$$

- Verificando o Wronskiano, nós obtemos

$$W = \begin{vmatrix} e^{\lambda t} \cos \mu t & e^{\lambda t} \sin \mu t \\ e^{\lambda t}(\lambda \cos \mu t - \mu \sin \mu t) & e^{\lambda t}(\lambda \sin \mu t + \mu \cos \mu t) \end{vmatrix}$$

$$= \mu e^{2\lambda t} \neq 0$$

- Assim y_3 e y_4 formam o conjunto fundamental de soluções para nossa EDO, e a solução geral pode ser dada como

$$y(t) = c_1 e^{\lambda t} \cos \mu t + c_2 e^{\lambda t} \sin \mu t$$

Capítulo 3.4:

Exemplo 1

- Considere a equação

$$y'' + y' + y = 0$$

- Então

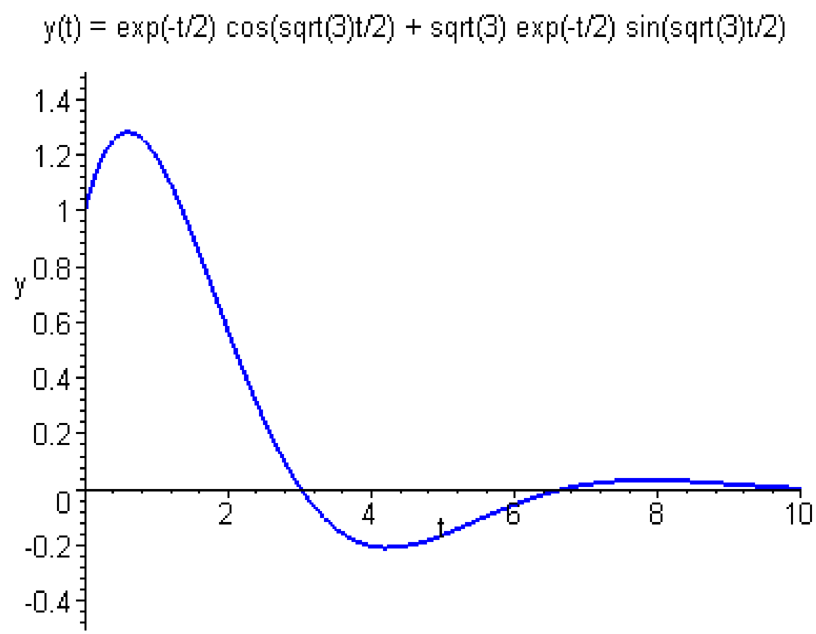
$$y(t) = e^{rt} \Rightarrow r^2 + r + 1 = 0 \Leftrightarrow r = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}\,i}{2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

- Portanto

$$\lambda = -1/2, \; \mu = \sqrt{3}/2$$

e assim a solução geral é

$$y(t) = c_1 e^{-t/2} \cos\left(\sqrt{3}t/2\right) + c_2 e^{-t/2} \sin\left(\sqrt{3}t/2\right)$$



Capítulo 3.4:

Exemplo 2

- Considere a equação

$$y'' + 4y = 0$$

- Então

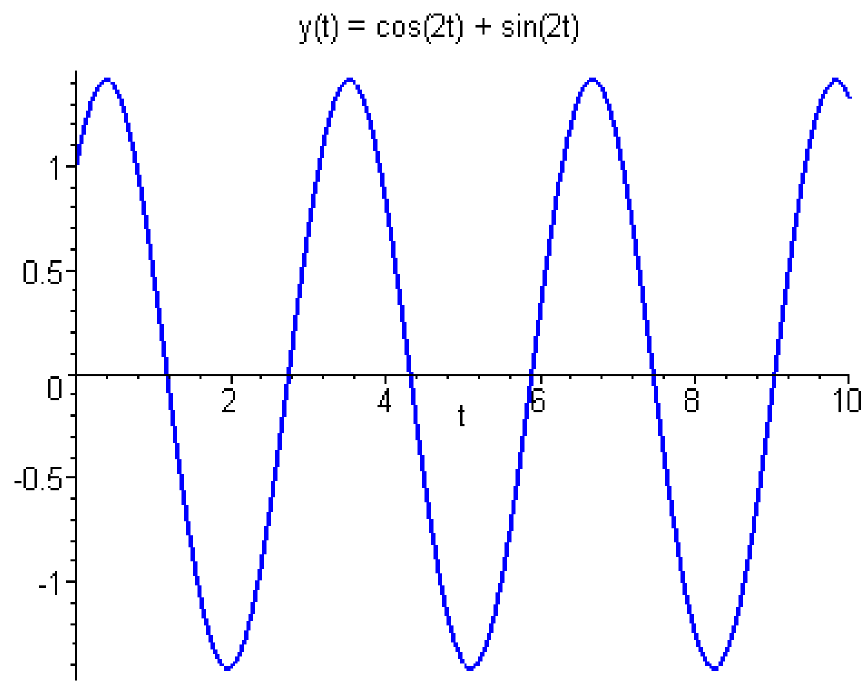
$$y(t) = e^{rt} \quad \Rightarrow \quad r^2 + 4 = 0 \;\Leftrightarrow\; r = \pm 2i$$

- Portanto

$$\lambda = 0,\; \mu = 2$$

e assim a solução geral é

$$y(t) = c_1 \cos(2t) + c_2 \sin(2t)$$



Capítulo 3.4:

Exemplo 3

- Considere a equação

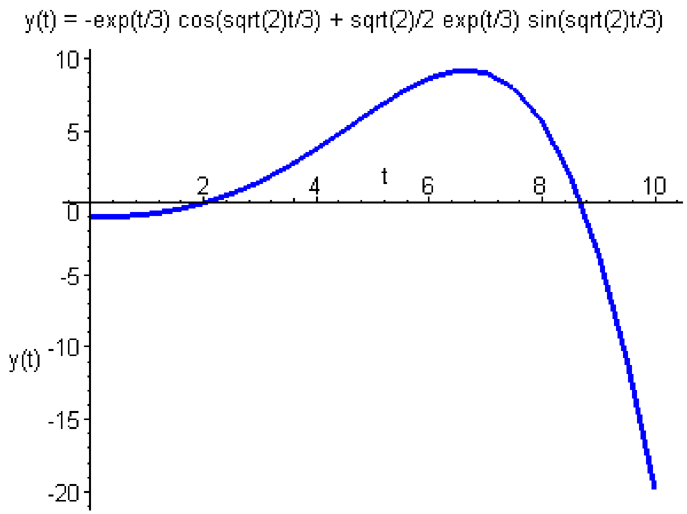
$$3y'' - 2y' + y = 0$$

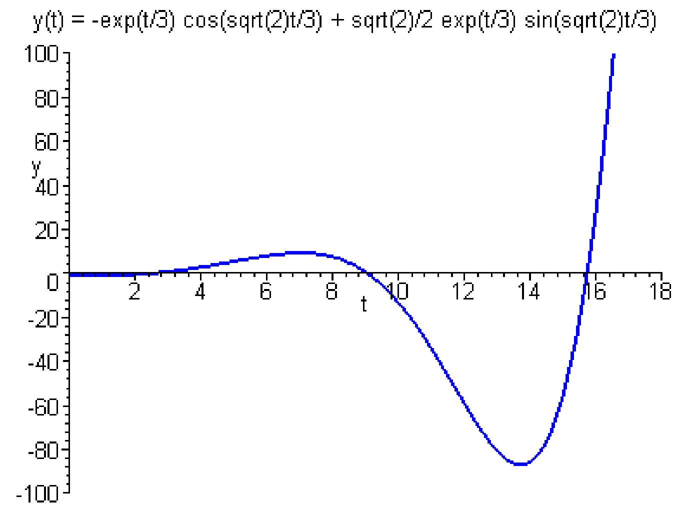
- Então

$$y(t) = e^{rt} \Rightarrow 3r^2 - 2r + 1 = 0 \Leftrightarrow r = \frac{2 \pm \sqrt{4-12}}{6} = \frac{1}{3} \pm \frac{\sqrt{2}}{3} i$$

- Portanto a solução geral é

$$y(t) = c_1 e^{t/3} \cos\left(\sqrt{2}t/3\right) + c_2 e^{t/3} \sin\left(\sqrt{2}t/3\right)$$





Capítulo 3.4:

Exemplo 4: Part (a)

- Para o problema do valor inicial abaixo, encontrar (a) a solução $u(t)$ e (b) o menor tempo T para que $|u(t)| \leq 0.1$

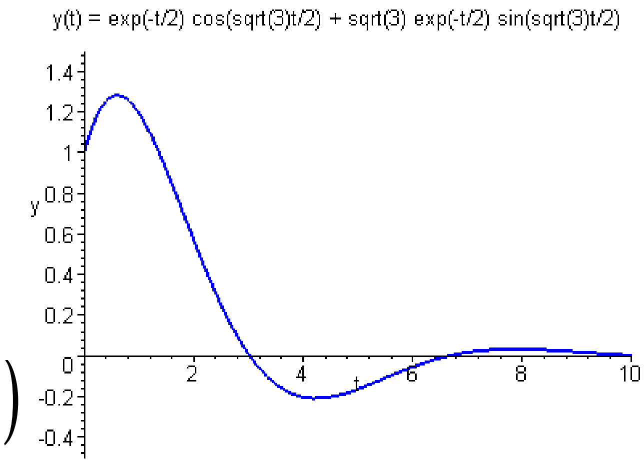
$$y'' + y' + y = 0, \quad y(0) = 1, \;\; y'(0) = 1$$

- Nos sabemos do Exemplo 1 que a solução geral é

$$u(t) = c_1 e^{-t/2} \cos\left(\sqrt{3}t/2\right) + c_2 e^{-t/2} \sin\left(\sqrt{3}t/2\right)$$

- Usando as condições iniciais, obtemos

$$\left.\begin{aligned} c_1 \qquad\qquad &= 1 \\ -\frac{1}{2}c_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}c_2 &= 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow c_1 = 1, \; c_2 = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$



- Assim

$$u(t) = e^{-t/2} \cos\left(\sqrt{3}t/2\right) + \sqrt{3}\, e^{-t/2} \sin\left(\sqrt{3}t/2\right)$$

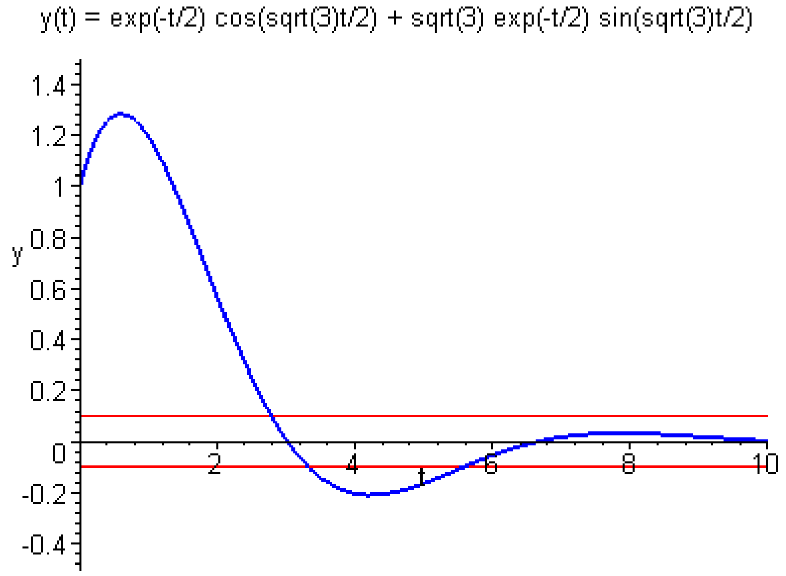
Capítulo 3.4:

Exemplo 4: Part (b)

- Encontrar o menor tempo T para que $|u(t)| \le 0.1$
- A solução é

$$u(t) = e^{-t/2}\cos\left(\sqrt{3}t/2\right) + \sqrt{3}\, e^{-t/2}\sin\left(\sqrt{3}t/2\right)$$

- Com a ajuda da representação gráfica e de uma calculadora ou computador, nós encontramos $T \cong 2.79$. Veja gráfico abaixo.



Capítulo 3.5:

Raízes Repetidas; Redução de Ordem

- Lembrando que uma EDO de 2nd ordem linear homogêneos

$$ay'' + by' + cy = 0$$

- onde a, b e c são constantes reais.
- Usando as soluções exponenciais vinda da equação característica:

$$y(t) = e^{rt} \quad \Rightarrow \quad ar^2 + br + c = 0$$

- A fórmula quadrática nos dá duas soluções , r_1 e r_2:

$$r = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

- Onde $b^2 - 4ac = 0$, $r_1 = r_2 = -b/2a$, assim este método só fornece uma solução:

$$y_1(t) = ce^{-bt/2a}$$

Capítulo 3.5:

Segunda Solução: Fator de Multiplicação *v*(*t*)

- Nos sabemos que se

$$y_1(t) \text{ é uma solução} \Rightarrow y_2(t) = c y_1(t) \text{ é uma solução também}$$

- Só que y_1 e y_2 são linearmente dependente, vamos generalizar esta aproximação e multiplicar por uma função v, e determinar condições para que y_2 seja uma solução:

$$y_1(t) = e^{-bt/2a} \text{ é uma solução} \Rightarrow \text{ faça } \; y_2(t) = v(t)e^{-bt/2a}$$

- Então

$$y_2(t) = v(t)e^{-bt/2a}$$

$$y_2'(t) = v'(t)e^{-bt/2a} - \frac{b}{2a} v(t)e^{-bt/2a}$$

$$y_2''(t) = v''(t)e^{-bt/2a} - \frac{b}{2a} v'(t)e^{-bt/2a} - \frac{b}{2a} v'(t)e^{-bt/2a} + \frac{b^2}{4a^2} v(t)e^{-bt/2a}$$

Capítulo 3.5: $ay'' + by' + cy = 0$

Encontrando o Fator de Multiplicação *v*(*t*)

- Substituindo as derivadas na EDO, chegamos na fórmula para *v*:

$$e^{-bt/2a}\left\{a\left[v''(t) - \frac{b}{a}v'(t) + \frac{b^2}{4a^2}v(t)\right] + b\left[v'(t) - \frac{b}{2a}v(t)\right] + cv(t)\right\} = 0$$

$$av''(t) - bv'(t) + \frac{b^2}{4a}v(t) + bv'(t) - \frac{b^2}{2a}v(t) + cv(t) = 0$$

$$av''(t) + \left(\frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c\right)v(t) = 0$$

$$av''(t) + \left(\frac{b^2}{4a} - \frac{2b^2}{4a} + \frac{4ac}{4a}\right)v(t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad av''(t) + \left(\frac{-b^2}{4a} + \frac{4ac}{4a}\right)v(t) = 0$$

$$av''(t) - \left(\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right)v(t) = 0$$

$$v''(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad v(t) = k_3 t + k_4$$

Capítulo 3.5:

Solução Geral

- Para encontrar nossa solução geral, nós temos:

$$
\begin{aligned}
y(t) &= k_1 e^{-bt/2a} + k_2 v(t) e^{-bt/2a} \\
&= k_1 e^{-bt/2a} + \left(k_3 t + k_4\right) e^{-bt/2a} \\
&= c_1 e^{-bt/2a} + c_2 t e^{-bt/2a}
\end{aligned}
$$

- Assim a solução geral para raízes repetidas é

$$y(t) = c_1 e^{-bt/2a} + c_2 t e^{-bt/2a}$$

Capítulo 3.5:

Wronskiano

- A solução Geral é

$$y(t) = c_1 e^{-bt/2a} + c_2 t e^{-bt/2a}$$

- Assim cada solução é uma combinação linear de

$$y_1(t) = e^{-bt/2a}, \; y_2(t) = t e^{-bt/2a}$$

- O Wronskiano das duas soluções é

$$W(y_1, y_2)(t) = \begin{vmatrix} e^{-bt/2a} & t e^{-bt/2a} \\ -\dfrac{b}{2a} e^{-bt/2a} & \left(1 - \dfrac{bt}{2a}\right) e^{-bt/2a} \end{vmatrix}$$

$$= e^{-bt/a}\left(1 - \frac{bt}{2a}\right) + e^{-bt/a}\left(\frac{bt}{2a}\right)$$

$$= e^{-bt/a} \neq 0 \quad \text{para todo } t$$

- Assim y_1 e y_2 formam o conjunto fundamental das soluções.

Capítulo 3.5:

Exemplo 1

- Considere o PVI

$$y'' + 2y' + y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1$$

- Usando as soluções exponenciais vinda da equação característica:

$$y(t) = e^{rt} \quad \Rightarrow \quad r^2 + 2r + 1 = 0 \iff (r+1)^2 = 0 \iff r = -1$$

- Portanto a solução geral é

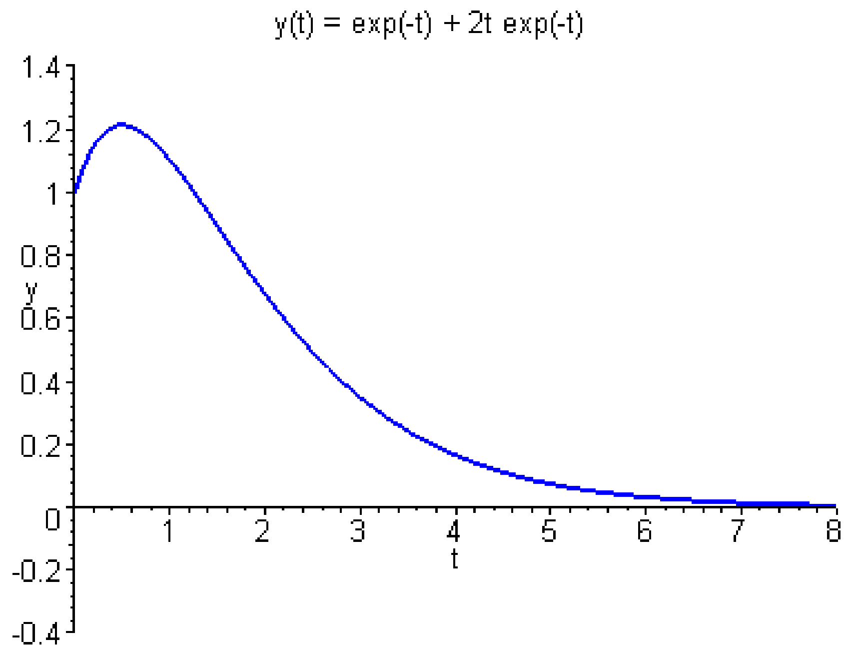
$$y(t) = c_1 e^{-t} + c_2 t e^{-t}$$

- Usando as condições iniciais:

$$\left.\begin{array}{rcl} c_1 & & = 1 \\ -c_1 + c_2 & & = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow c_1 = 1,\ c_2 = 2$$

- Assim

$$y(t) = e^{-t} + 2te^{-t}$$



Capítulo 3.5:

Exemplo 2

- Considere o PVI

$$y'' - y' + 0.25y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 1/2$$

- Usando as soluções exponenciais vinda da equação característica:

$$y(t) = e^{rt} \;\Rightarrow\; r^2 - r + 0.25 = 0 \;\Leftrightarrow\; (r - 1/2)^2 = 0 \;\Leftrightarrow r = 1/2$$

- Portanto a solução geral é

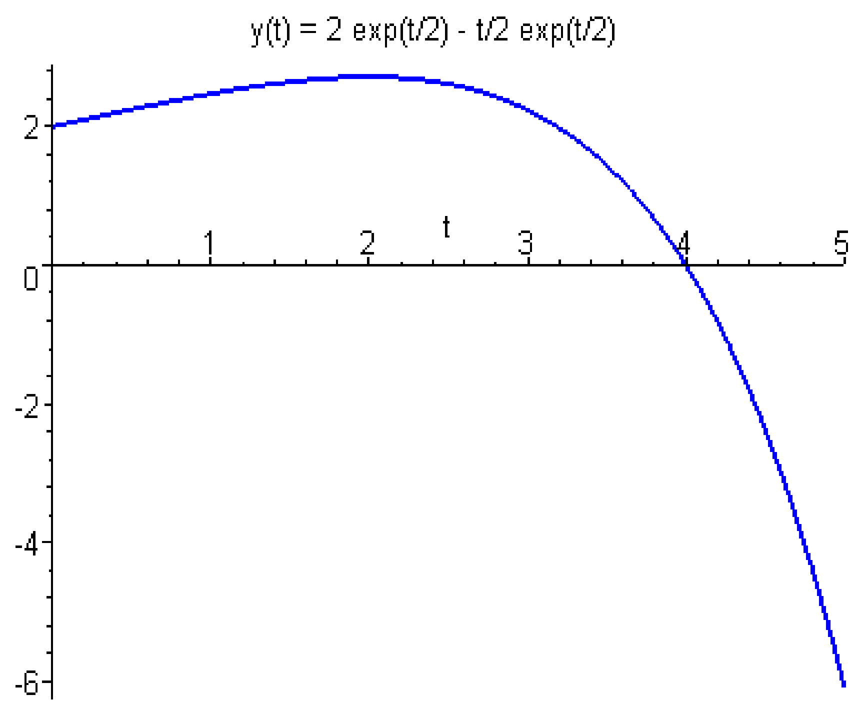
$$y(t) = c_1 e^{t/2} + c_2 t e^{t/2}$$

- Usando as condições iniciais:

$$\left.\begin{array}{rcl} c_1 & = & 2 \\ \frac{1}{2}c_1 + c_2 & = & \frac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow c_1 = 2,\; c_2 = -\frac{1}{2}$$

- Assim

$$y(t) = 2e^{t/2} - \frac{1}{2} t e^{t/2}$$



Capítulo 3.5:

Exemplo 3

- Considere o PVI

$$y'' - y' + 0.25y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 3/2$$

- Usando as soluções exponenciais vinda da equação característica:

$$y(t) = e^{rt} \quad \Rightarrow \quad r^2 - r + 0.25 = 0 \Leftrightarrow (r - 1/2)^2 = 0 \Leftrightarrow r = 1/2$$

- Portanto a solução geral é

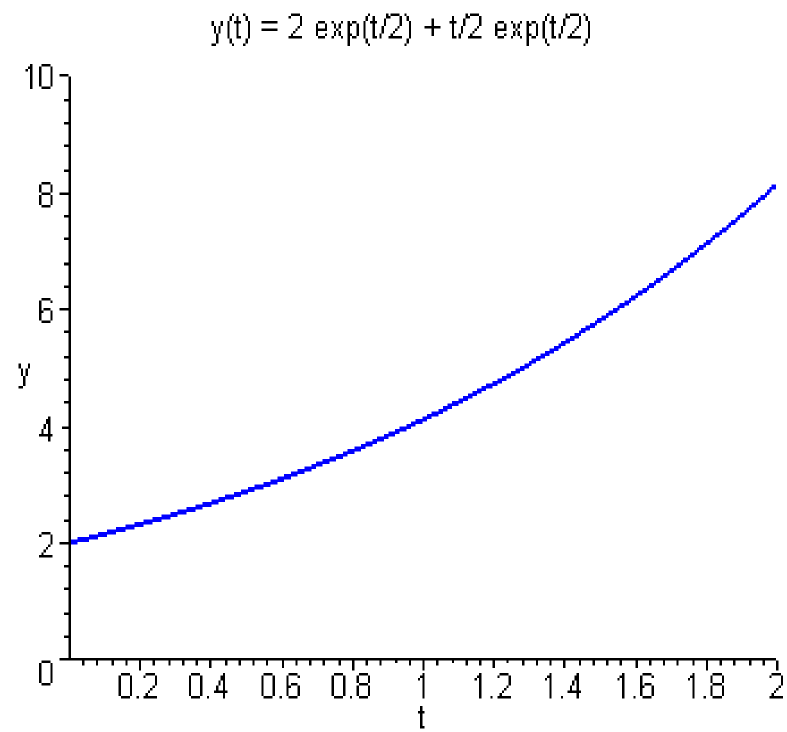
$$y(t) = c_1 e^{t/2} + c_2 t e^{t/2}$$

- Usando as condições iniciais:

$$\left.\begin{array}{rcl} c_1 & = & 2 \\ \frac{1}{2}c_1 + c_2 & = & \frac{3}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow c_1 = 2,\ c_2 = \frac{1}{2}$$

- Assim

$$y(t) = 2e^{t/2} + \frac{1}{2} t e^{t/2}$$



Capítulo 3.5:

Redução de Ordem

- O método usado nesta seção também é utilizado para equações com coeficientes não constantes:

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$$

- Isto é, dado uma solução y_1, faça $y_2 = v(t)y_1$:

$$y_2(t) = v(t)y_1(t)$$
$$y_2'(t) = v'(t)y_1(t) + v(t)y_1'(t)$$
$$y_2''(t) = v''(t)y_1(t) + 2v'(t)y_1'(t) + v(t)y_1''(t)$$

- Substituindo isto na EDO e agrupando termos,

$$y_1 v'' + \left(2y_1' + py_1\right)v' + \left(y_1'' + py_1' + qy_1\right)v = 0$$

- Como y_1 é uma solução da EDO, esta última equação se reduz em uma equação de 1ª ordem em v':

$$y_1 v'' + \left(2y_1' + py_1\right)v' = 0$$

Capítulo 3.5:

Exemplo 4: Redução de Ordem

- Dado a equação de coeficiente variáveis e uma solução y_1,

$$t^2 y'' + 3ty' + y = 0, \quad t > 0; \quad y_1(t) = t^{-1},$$

usando o método de redução de ordem para encontrar uma segunda solução:

$$y_2(t) = v(t)\, t^{-1}$$
$$y_2'(t) = v'(t)\, t^{-1} - v(t)\, t^{-2}$$
$$y_2''(t) = v''(t)\, t^{-1} - 2v'(t)\, t^{-2} + 2v(t)\, t^{-3}$$

- Substituindo isto na EDO e agrupando termos,

$$t^2\left(v''t^{-1} - 2v't^{-2} + 2vt^{-3}\right) + 3t\left(v't^{-1} - vt^{-2}\right) + vt^{-1} = 0$$
$$\Leftrightarrow v''t - 2v' + 2vt^{-1} + 3v' - 3vt^{-1} + vt^{-1} = 0$$
$$\Leftrightarrow \; tv'' + v' = 0$$
$$\Leftrightarrow \; tu' + u = 0, \; onde \; u(t) = v'(t)$$

Capítulo 3.5:

Exemplo 4: Encontrando $v(t)$

- Resolvendo

$$tu' + u = 0, \quad u(t) = v'(t)$$

para u, nos podemos usar o método de separação de variáveis:

$$t\frac{du}{dt} + u = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \int \frac{du}{u} = -\int \frac{1}{t}\,dt \quad \Leftrightarrow \quad \ln|u| = -\ln|t| + C$$

$$\Leftrightarrow \quad |u| = |t|^{-1} e^{C} \quad \Leftrightarrow \quad u = ct^{-1}, \quad desde \ \ que \quad t > 0.$$

- Assim

$$v' = \frac{c}{t}$$

e portanto

$$v(t) = c\ln t + k$$

Capítulo 3.5:

Exemplo 4: Solução Geral

- Nos temos
$$v(t) = c\ln t + k$$
- Assim
$$y_2(t) = \left(c\ln t + k\right)t^{-1} = ct^{-1}\ln t + k\,t^{-1}$$
- Lembrando
$$y_1(t) = t^{-1}$$
e portanto nós podemos concluir o segundo termo y_2
$$y_2(t) = t^{-1}\ln t.$$
- Daqui a solução geral da equação diferencial é
$$y(t) = c_1 t^{-1} + c_2 t^{-1}\ln t$$

Capítulo 3.6: Equações Não Homogêneas Método dos Coeficientes Indeterminados

- Uma equação não homogênea é dada por

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t)$$

  onde p, q, g são funções contínuas em um intervalo aberto I.
- A equação homogênea associada é

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$$

- Nesta seção nós aprenderemos o método dos coeficientes indeterminados para resolver a equação não homogênea, e para isso é necessário saber as soluções da equação homogênea.

Capítulo 3.6:

Teorema 3.6.1

- Se Y_1, Y_2 são as soluções da equação não homogênea

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t)$$

então Y_1 - Y_2 é uma solução da equação homogênea

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$$

- Se y_1, y_2 formam um conjunto fundamental de soluções da equação homogênea, então existem constante c_1, c_2 tal que

$$Y_1(t) - Y_2(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$$

Capítulo 3.6:

Teorema 3.6.2 (Solução Geral)

- A solução geral da equação não homogênea

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t)$$

pode ser escrita na forma

$$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + Y(t)$$

onde y_1, y_2 formam o conjunto fundamental de soluções da equação homogênea, c_1, c_2 são constantes arbitrarias e Y é uma solução particular da equação não homogênea.

$$y_1'' + p(t)y_1' + q(t)y_1 = 0$$

$$y_2'' + p(t)y_2' + q(t)y_2 = 0$$

$$Y'' + p(t)Y' + q(t)Y = g(t)$$

Capítulo 3.6:

Método dos Coeficientes Indeterminados

- Lembrando uma equação não homogênea é dada por

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t)$$

  com solução geral

$$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + Y(t)$$

- Nesta seção usaremos o método dos **coeficientes indeterminados** para encontrar uma solução particular Y para a equação não homogênea, assumindo que podemos encontrar soluções y_1, y_2 para o caso homogêneo.
- O método dos coeficientes indeterminados é usualmente limitado para quando p e q são constantes, e $g(t)$ é uma função polinomial, exponencial, seno ou co-seno.

Capítulo 3.6:

Exemplo 1: $g(t)$, Exponencial

- Considere a equação não homogênea

$$y'' - 3y' - 4y = 3e^{2t}$$

- Nós procuramos Y que satisfaça a esta equação. Sabendo que as exponenciais se repetem com a diferenciação, é um bom ponto de partida para Y supormos uma função exponencial:

$$Y(t) = Ae^{2t} \Rightarrow Y'(t) = 2Ae^{2t}, \; Y''(t) = 4Ae^{2t}$$

- Substituindo ela e suas derivadas na equação,

$$4Ae^{2t} - 6Ae^{2t} - 4Ae^{2t} = 3e^{2t}$$

$$\Leftrightarrow \quad -6Ae^{2t} = 3e^{2t} \quad \Leftrightarrow \quad A = -1/2$$

- Assim uma solução particular para a EDO não homogênea é

$$Y(t) = -\frac{1}{2}e^{2t}$$

Capítulo 3.6:

Exemplo 2: $g(t)$, seno

- Considere a equação não homogênea

$$y'' - 3y' - 4y = 2\,\text{sen}\,t$$

- Nós procuramos Y que satisfaça a esta equação. Sabendo que senos se repete ao longo das derivadas, é um bom ponto de partida para Y:

$$Y(t) = A\,\text{sen}\,t \Rightarrow Y'(t) = A\cos t,\ Y''(t) = -A\,\text{sen}\,t$$

- Substituindo ela e suas derivadas na equação,

$$-A\,\text{sen}\,t - 3A\cos t - 4A\,\text{sen}\,t = 2\,\text{sen}\,t$$

$$\Leftrightarrow\ (2+5A)\,\text{sen}\,t + 3A\cos t = 0$$

$$\Leftrightarrow\ c_1\,\text{sen}\,t + c_2\cos t = 0$$

- Sabendo que sen(x) e cos(x) são LI (não são múltiplos um do outro), nos teríamos $c_1 = c_2 = 0$, e assim $2 + 5A = 3A = 0$, o que é impossível.

Capítulo 3.6:

$$y'' - 3y' - 4y = 2\,\mathrm{sen}\, t$$

Exemplo 2: $g(t)$, seno

- Nossa tentativa agora para Y é

$$Y(t) = A\,\mathrm{sen}\, t + B\cos t$$

$$\Rightarrow Y'(t) = A\cos t - B\,\mathrm{sen}\, t,\; Y''(t) = -A\,\mathrm{sen}\, t - B\cos t$$

- Substituindo ela e suas derivadas na EDO, obtemos

$$\left(-A\,\mathrm{sen}\, t - B\cos t\right) - 3\left(A\cos t - B\,\mathrm{sen}\, t\right) - 4\left(A\,\mathrm{sen}\, t + B\cos t\right) = 2\,\mathrm{sen}\, t$$

$$\Leftrightarrow \left(-5A + 3B\right)\mathrm{sen}\, t + \left(-3A - 5B\right)\cos t = 2\,\mathrm{sen}\, t$$

$$\Leftrightarrow -5A + 3B = 2,\; -3A - 5B = 0$$

$$\Leftrightarrow A = -5/17,\; B = 3/17$$

- Portanto a solução particular para a EDO não homogênea é

$$Y(t) = \frac{-5}{17}\,\mathrm{sen}\, t + \frac{3}{17}\cos t$$

Capítulo 3.6:

Exemplo 3: $g(t)$, Polinomial

- Considere a equação não homogênea

$$y'' - 3y' - 4y = 4t^2 - 1$$

- Procuramos Y que satisfaça a equação. Vamos começar com

$$Y(t) = At^2 + Bt + C \Rightarrow Y'(t) = 2At + B,\ Y''(t) = 2A$$

- Substituindo ela e suas derivadas na EDO, obtemos,

$$\begin{aligned}
&2A - 3(2At + B) - 4\left(At^2 + Bt + C\right) = 4t^2 - 1 \\
&\Leftrightarrow\ -4At^2 - (6A + 4B)t + \left(2A - 3B - 4C\right) = 4t^2 - 1 \\
&\Leftrightarrow\ -4A = 4,\ \ 6A + 4B = 0,\ 2A - 3B - 4C = -1 \\
&\Leftrightarrow\ \ A = -1,\ B = 3/2,\ C = -11/8
\end{aligned}$$

- Portanto a solução particular para a EDO não homogênea é

$$Y(t) = -t^2 + \frac{3}{2}t - \frac{11}{8}$$

Capítulo 3.6:

Exemplo 4: $g(t)$, Produto

- Considere a equação não homogênea

$$y'' - 3y' - 4y = -8e^t \cos 2t$$

- Procuramos Y que satisfaça a equação, como segue:

$$Y(t) = Ae^t \cos 2t + Be^t \,\text{sen}\, 2t$$

$$\begin{aligned} Y'(t) &= Ae^t \cos 2t - 2Ae^t \,\text{sen}\, 2t + Be^t \,\text{sen}\, 2t + 2Be^t \cos 2t \\ &= (A + 2B)e^t \cos 2t + (-2A + B)e^t \,\text{sen}\, 2t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y''(t) &= (A + 2B)e^t \cos 2t - 2(A + 2B)e^t \,\text{sen}\, 2t + (-2A + B)e^t \,\text{sen}\, 2t \\ &\quad + 2(-2A + B)e^t \cos 2t \\ &= (-3A + 4B)e^t \cos 2t + (-4A - 3B)e^t \,\text{sen}\, 2t \end{aligned}$$

- Substituindo na EDO e resolvendo para A e B:

$$A = \frac{10}{13}, \; B = \frac{2}{13} \quad \Rightarrow Y(t) = \frac{10}{13} e^t \cos 2t + \frac{2}{13} e^t \,\text{sen}\, 2t$$

Capítulo 3.6:

Discussão: $g(t)$, Soma

- Considere agora a equação não homogênea

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t)$$

- Suponha que $g(t)$ é a soma de funções:

$$g(t) = g_1(t) + g_2(t)$$

- Se Y_1, Y_2 são soluções de

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = g_1(t)$$
$$y'' + p(t)y' + q(t)y = g_2(t)$$

respectivamente, então $Y_1 + Y_2$ é uma solução da equação não homogênea acima.

Capítulo 3.6:

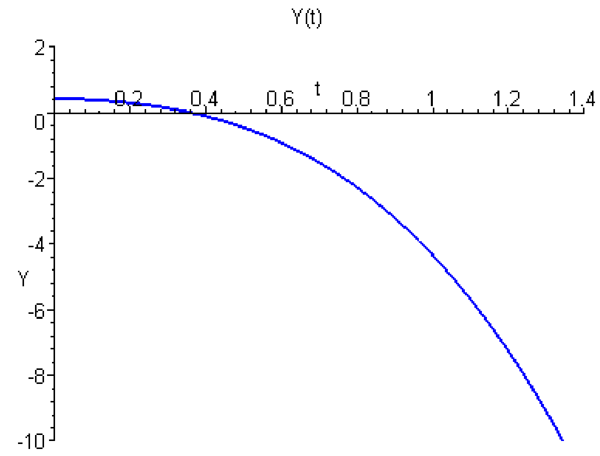
Exemplo 5: Soma $g(t)$

- Considere a equação

$$y'' - 3y' - 4y = 3e^{2t} + 2\sin t - 8e^{t}\cos 2t$$

- Nossas equações para resolver individualmente são

$$y'' - 3y' - 4y = 3e^{2t}$$
$$y'' - 3y' - 4y = 2\sin t$$
$$y'' - 3y' - 4y = -8e^{t}\cos 2t$$



- A solução particular é então

$$Y(t) = -\frac{1}{2}e^{2t} + \frac{3}{17}\cos t - \frac{5}{17}\sin t + \frac{10}{13}e^{t}\cos 2t + \frac{2}{13}e^{t}\sin 2t$$

Capítulo 3.6:

Exemplo 6:

- Considere a equação

$$y'' + 4y = 3\cos 2t$$

- Procuramos Y que satisfaça a equação. Começamos com

$$Y(t) = A\,\mathrm{sen}\,2t + B\cos 2t$$

$$\Rightarrow Y'(t) = 2A\cos 2t - 2B\,\mathrm{sen}\,2t,\ Y''(t) = -4A\,\mathrm{sen}\,2t - 4B\cos 2t$$

- Substituindo na EDO :

$$\begin{aligned}(-4A\,\mathrm{sen}\,2t - 4B\cos 2t) + 4(A\,\mathrm{sen}\,2t + B\cos 2t) &= 3\cos 2t\\ (-4A + 4A)\,\mathrm{sen}\,2t + (-4B + 4B)\cos 2t &= 3\cos 2t\\ 0 &= 3\cos 2t\end{aligned}$$

- Portanto não existe solução particular da forma

$$Y(t) = A\,\mathrm{sen}\,2t + B\cos 2t$$

Capítulo 3.6:

Exemplo 6: Solução Homogênea

- Como não existe solução particular da forma

$$Y(t) = A \operatorname{sen} 2t + B \cos 2t$$

- Para ajudar a compreender porque isso ocorreu, vamos recordar que a solução homogênea correspondente vista na seção 3.4:

$$y'' + 4y = 0 \quad \Rightarrow \quad y(t) = c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t$$

- Assim nossa suposta solução particular resolve a equação homogênea

$$y'' + 4y = 0$$

em vez da equação não homogênea.

$$y'' + 4y = 3 \cos 2t$$

Capítulo 3.6:

$$y'' + 4y = 3\cos 2t$$

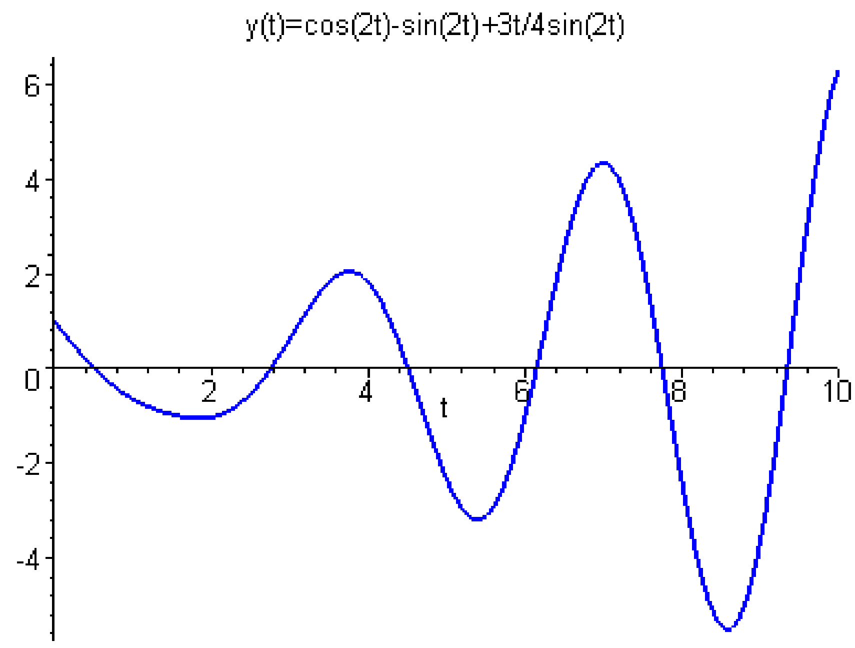
Exemplo 6: Solução Particular

- Nossa próxima tentativa para encontrar um Y é:

$$Y(t) = At\,\text{sen}\,2t + Bt\cos 2t$$
$$Y'(t) = A\,\text{sen}\,2t + 2At\cos 2t + B\cos 2t - 2Bt\,\text{sen}\,2t$$
$$Y''(t) = 2A\cos 2t + 2A\cos 2t - 4At\,\text{sen}\,2t - 2B\,\text{sen}\,2t - 2B\,\text{sen}\,2t - 4Bt\cos 2t$$
$$= 4A\cos 2t - 4B\,\text{sen}\,2t - 4At\,\text{sen}\,2t - 4Bt\cos 2t$$

- Substituindo na EDO,

$$4A\cos 2t - 4B\,\text{sen}\,2t = 3\cos 2t$$
$$\Rightarrow A = 3/4,\ B = 0$$
$$\Rightarrow Y(t) = \frac{3}{4}t\,\text{sen}\,2t$$



Capítulo 3.6:

Tabela: A solução Particular de $ay''+by'+cy=g_i(t)$

$g_i(t)$	$Y_i(t)$
$P_n(t) = a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n$	$t^s(A_0 + A_1 t + \ldots + A_n t^n)$
$P_n(t)e^{\alpha t}$	$t^s(A_0 + A_1 t + \ldots + A_n t^n)e^{\alpha t}$
$P_n(t)e^{\alpha t}\begin{cases}\text{sen } \beta t \\ \cos \beta t\end{cases}$	$t^s[(A_0 + A_1 t + \ldots + A_n t^n)e^{\alpha t}\cos \beta t + (B_0 + B_1 t + \ldots + B_n t^n)e^{\alpha t}\text{sen } \beta t]$

Obs.: Aqui, *s* denota o menor inteiro não-negativo (*s=0,1* ou *2*) que garanta que nenhuma parcela de $Y_i(t)$ seja solução da equação homogênea correspondente.

Capítulo 3.7:

Variação dos Parâmetros

- Uma equação não homogênea é dada por
$$y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t)$$
onde p, q, g são funções contínuas em um intervalo aberto I.
- A equação homogênea associada é
$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$$
- Nesta seção nós aprenderemos o método de **variação dos parâmetros** para resolver a equação não homogênea. Como no método dos coeficientes indeterminados, este procedimento requer o conhecimento das soluções da equação homogênea.
- Variação dos parâmetros é um método geral, e não requer nenhuma suposição detalhada sobre a forma da solução. Entretanto, determinadas integrais necessitam ser avaliadas, e estas pode apresentar dificuldades.

Capítulo 3.7:

Exemplo: Variação dos Parâmetros

- Nós procuramos uma solução particular para equação abaixo.

$$y'' + 4y = 3\csc t$$

- Nós não podemos usar o método de coeficientes indeterminados uma vez que $g(t)$ é um quociente de $\operatorname{sen} t$ ou $\cos t$, em vez de uma soma ou de um produto.
- Lembrando que a solução da EDO homogênea associada é

$$y_h(t) = c_1 \cos 2t + c_2 \operatorname{sen} 2t$$

- Para encontrar uma solução particular para equação não homogênea, nós começamos com o formula

$$y(t) = u_1(t)\cos 2t + u_2(t)\operatorname{sen} 2t$$

- Então

$$y'(t) = u_1'(t)\cos 2t - 2u_1(t)\operatorname{sen} 2t + u_2'(t)\operatorname{sen} 2t + 2u_2(t)\cos 2t$$

- ou

$$y'(t) = -2u_1(t)\operatorname{sen} 2t + 2u_2(t)\cos 2t + u_1'(t)\cos 2t + u_2'(t)\operatorname{sen} 2t$$

Capítulo 3.7:

Exemplo: Derivadas, 2ª Equação

- De resultados anteriores,

$$y'(t) = -2u_1(t)\,\text{sen}\,2t + 2u_2(t)\cos 2t + u_1'(t)\cos 2t + u_2'(t)\,\text{sen}\,2t$$

- Note que nós necessitamos de duas equações para encontrar u_1 e u_2. A primeira equação é a equação diferencial. Para uma segunda equação, tome

$$u_1'(t)\cos 2t + u_2'(t)\,\text{sen}\,2t = 0$$

- Então

$$y'(t) = -2u_1(t)\,\text{sen}\,2t + 2u_2(t)\cos 2t$$

- Segue,

$$y''(t) = -2u_1'(t)\,\text{sen}\,2t - 4u_1(t)\cos 2t + 2u_2'(t)\cos 2t - 4u_2(t)\,\text{sen}\,2t$$

Capítulo 3.7:

Exemplo: Duas equações

- Lembrando que nossa equação diferencial é

$$y'' + 4y = 3\csc t$$

- Substituindo y'' e y na equação, obtemos

$$-2u_1'(t)\,\text{sen}\,2t - 4u_1(t)\cos 2t + 2u_2'(t)\cos 2t - 4u_2(t)\,\text{sen}\,2t$$
$$+4\big(u_1(t)\cos 2t + u_2(t)\,\text{sen}\,2t\big) = 3\csc t$$

- Esta equação simplificada fica

$$-2u_1'(t)\,\text{sen}\,2t + 2u_2'(t)\cos 2t = 3\csc t$$

- Assim, para resolver u_1 e u_2, nos temos duas equações:

$$-2u_1'(t)\,\text{sen}\,2t + 2u_2'(t)\cos 2t = 3\csc t$$
$$u_1'(t)\cos 2t + u_2'(t)\,\text{sen}\,2t = 0$$

Capítulo 3.7:

Exemplo: Resolvendo o $u_1{}'$

- Para encontrar u_1 e u_2 , necessitamos resolver as equações

$$-2u_1'(t)\,\text{sen}\,2t + 2u_2'(t)\cos 2t = 3\csc t$$
$$u_1'(t)\cos 2t + u_2'(t)\,\text{sen}\,2t = 0$$

- Da segunda equação,

$$u_2'(t) = -u_1'(t)\frac{\cos 2t}{\text{sen}\,2t}$$

- Substituindo este valor na primeira equação,

$$-2u_1'(t)\,\text{sen}\,2t + 2\left[-u_1'(t)\frac{\cos 2t}{\text{sen}\,2t}\right]\cos 2t = 3\csc t$$
$$-2u_1'(t)\,\text{sen}^2(2t) - 2u_1'(t)\cos^2(2t) = 3\csc t\,\text{sen}\,2t$$
$$-2u_1'(t)\left[\text{sen}^2(2t) + \cos^2(2t)\right] = 3\left[\frac{2\,\text{sen}\,t\cos t}{\text{sen}\,t}\right]$$
$$u_1'(t) = -3\cos t$$

Capítulo 3.7:

Exemplo : Resolvendo para u_1 e u_2

- De resultados anteriores,

$$u_1'(t) = -3\cos t, \quad u_2'(t) = -u_1'(t)\frac{\cos 2t}{\text{sen } 2t}$$

- Então

$$u_2'(t) = 3\cos t\left[\frac{\cos 2t}{\text{sen } 2t}\right] = 3\cos t\left[\frac{1-2\,\text{sen}^2 t}{2\,\text{sen } t\cos t}\right] = 3\left[\frac{1-2\,\text{sen}^2 t}{2\,\text{sen } t}\right]$$

$$= 3\left[\frac{1}{2\,\text{sen } t} - \frac{2\,\text{sen}^2 t}{2\,\text{sen } t}\right] = \frac{3}{2}\csc t - 3\,\text{sen } t$$

- Assim

$$u_1(t) = \int u_1'(t)dt = \int -3\cos t\,dt = -3\,\text{sen } t + c_1$$

$$u_2(t) = \int u_2'(t)dt = \int\left(\frac{3}{2}\csc t - 3\,\text{sen } t\right)dt = \frac{3}{2}\ln\left|\csc t - \cot t\right| + 3\cos t + c_2$$

Capítulo 3.7:

Exemplo: Solução Geral

- Lembrando nossa equação e a solução homogênea y_C:

$$y'' + 4y = 3\csc t, \quad y_h(t) = c_1 \cos 2t + c_2 sin 2t$$

- Usando as expressões para u_1 e u_2 vista anteriormente, a solução geral para a equação diferencial é

$$\begin{aligned}
y(t) &= u_1(t)\cos 2t + u_2(t)\,\text{sen}\, 2t + y_h(t) \\
&= -3\,\text{sen}\, t \cos 2t + \frac{3}{2}\ln\left|\csc t - \cot t\right| \text{sen}\, 2t + 3\cos t\,\text{sen}\, 2t + y_h(t) \\
&= 3\left[\cos t\,\text{sen}\, 2t - \text{sen}\, t \cos 2t\right] + \frac{3}{2}\ln\left|\csc t - \cot t\right| \text{sen}\, 2t + y_h(t) \\
&= 3\left[2\,\text{sen}\, t \cos^2 t - \text{sen}\, t\left(2\cos^2 t - 1\right)\right] + \frac{3}{2}\ln\left|\csc t - \cot t\right| \text{sen}\, 2t + y_h(t) \\
&= 3\,\text{sen}\, t + \frac{3}{2}\ln\left|\csc t - \cot t\right| \text{sen}\, 2t + c_1 \cos 2t + c_2\,\text{sen}\, 2t
\end{aligned}$$

Capítulo 3.7:

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t)$$

$$y(t) = u_1(t)y_1(t) + u_2(t)y_2(t)$$

Resumo

- Suponha que y_1, y_2 são soluções fundamentais para a equação homogênea associada com a equação não homogênea acima, onde nota-se que o coeficiente em y'' é 1.
- Para encontrar u_1 e u_2, necessitamos resolver a equação

$$u_1'(t)y_1(t) + u_2'(t)y_2(t) = 0$$
$$u_1'(t)y_1'(t) + u_2'(t)y_2'(t) = g(t)$$

- Fazendo assim, e usando o Wronskiano, nós obtemos

$$u_1'(t) = -\frac{y_2(t)g(t)}{W(y_1, y_2)(t)}, \quad u_2'(t) = \frac{y_1(t)g(t)}{W(y_1, y_2)(t)}$$

- Assim

$$u_1(t) = -\int \frac{y_2(t)g(t)}{W(y_1, y_2)(t)}dt + c_1, \quad u_2(t) = \int \frac{y_1(t)g(t)}{W(y_1, y_2)(t)}dt + c_2$$

Capítulo 3.7:

Teorema 3.7.1

- Considere a equação

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t) \qquad (1)$$

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0 \qquad (2)$$

- Se as funções p, q e g são contínuas no intervalo aberto I, e se y_1 e y_2 são soluções fundamentais para a Eq. (2), então uma solução particular da Eq. (1) é

$$Y(t) = -y_1(t)\int \frac{y_2(t)g(t)}{W(y_1, y_2)(t)}dt + y_2(t)\int \frac{y_1(t)g(t)}{W(y_1, y_2)(t)}dt$$

e uma solução geral é

$$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + Y(t)$$