INSTRUÇÕES PARA A REALIZAÇÃO DA AVALIAÇÃO:

- **Esta avaliação possui um valor máximo de 100 pontos.**
- **A interpretação correta das questões faz parte da avaliação.**
- **Após a data/horário de entrega não serão aceitas/recebidas as atividades atrasadas. Organização com o tempo.**
- **O trabalho deve ser escrito à mão e à caneta quando a questão for discursiva ou demonstrativa. Não utilize editores de texto, como Word, Overleaf, etc., caso contrário a questão será desconsiderada mesmo que estiver correta.**
- **Respostas com cópias diretas da internet, como Wikipedia, ChatGPT/IAs etc., ou entre alunos tambem serão desconsideradas. Para responder, pesquise, leia diversas fontes e explique com suas próprias palavras (assim você aprende de maneira genuína).**
- **Quando houverem cálculos, exiba todos os passos com clareza explicando a razão de cada procedimento realizado. Cálculos sem a devida explicação, sem concatenação lógica, sem unidades (quando houverem) também serão desconsiderados.**
- **Nas questões recursivas é permitido o uso de computadores e calculadoras para a resolução desde que os códigos computacionais sejam anexados no trabalho e explicados no corpo do texto. Não envie *links* de Google Colabs, ou códigos-fonte separados do texto.**
- **Capricho será recompensado. Não seja breve em suas respostas, mesmo que a questão valha poucos pontos.**
- **A avaliação deverá ser entregue no Classroom. O trabalho poderá ser feito de maneira individual ou em grupos de no máximo 2 (duas) pessoas. Basta que apenas uma pessoa do grupo entregue a avaliação, a qual deverá conter o nome de todos os integrantes.**

Questão 1 (10 pontos). Existem diversos tipos de variáveis aleatórias contaminando todos os tipos de sistemas em todos os experimentos. Sobre este tema descreva:

a) **(5 pontos)** Uma Função Densidade de Probabilidade (*Probability Density Function*, PDF) representa qual método de identificação? Quais suas condições de existência?
b) **(5 pontos)** Como interpretar corretamente uma PDF? Dê três exemplos conhecidos de PDFs.

Questão 2 (10 pontos). Sobre momentos estatísticos, explique em detalhes o que são, quais os principais e sua importância. Dê ênfase maior aos primeiro e segundo momentos e explique seus funcionamentos.

Questão 3 (10 pontos). Sobre intervalos de confiança, explique em detalhes o que são, quais os principais e qual sua importância.

Questão 4 (10 pontos). Explique em detalhes o Teorema Central do Limite (TCL) e sua importância. Dê um exemplo de como utilizar o TCL para identificar os erros de um determinado sensor.

Questão 5 (10 pontos). Demonstre que $E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$, sabendo que X e Y são variáveis aleatórias contínuas e independentes, $E(\cdot)$ é o operador Esperança Estatística, a e b são constantes, e, $f(X, Y)$ é a função densidade de probabilidade conjunta (bidimensional) de ambas variáveis.

Questão 6 (10 pontos). A empresa *Waymo* está desenvolvendo mais um carro autônomo para navegação em grandes centros como táxi. Durante os testes de distância percorrida (x), os seguintes dados foram obtidos: média de $82{,}5\ km$, variância de $6{,}25\ \ km^2$, tempo médio de testes de $\Delta t = 1h06min$.
Considerando a variável x como sendo Normal, faça:

a) **(3 pontos)** Calcule o intervalo de confiança de 95% para a distância média percorrida.
b) **(3 pontos)** Calcule o intervalo de confiança de 95% para a velocidade média desenvolvida.
c) **(4 pontos)** Faça o esboço da curva que representa os experimentos e marque os valores numéricos dos principais pontos da mesma (pontos de inflexão e tendência central) com seus respectivos valores em ambos os eixos x e y.

Questão 7 (10 pontos). A Volkswagen possui quatro fábricas no Brasil: São Bernardo do Campo/SP, São Carlos/SP, Taubaté/SP e São José dos Pinhais/PR. Em São Carlos são fabricados os motores dos automóveis (70 modelos diferentes de motores), e nas outras os automóveis. Fonte: acesse o link.
A fábrica de São Bernardo do Campo é responsável por 2/3 da produção nacional, e o restante é igualmente dividido entre Taubaté e São José dos Pinhais.
Por questões técnicas eventualmente existem produtos defeituosos produzidos pelas linhas. A ocorrência de produtos defeituosos em São Bernardo do Campo é de 1% enquanto em Taubaté é de 2% e São José dos Pinhais é de 1,5%.
Considere um determinado lote contendo automóveis das três fábricas que será inspecionado. Responda:

a) **(5 pontos)** Qual a probabilidade da equipe de inspeção encontrar um automóvel defeituoso?
b) **(5 pontos)** Dado que a equipe de inspeção encontrou um produto defeituoso no lote, qual a probabilidade de que ele tenha vindo da fábrica de São José dos Pinhais?

Questão 8 (10 pontos). Um investidor *day trade* do mercado de ações de curtíssimo prazo pode estar em quatro estados diferentes: **Rico**, **Classe média**, **Pobre** e **Devendo**. Todo dia ele tem chance de alterar seu estado com base em suas decisões. As mudanças podem ocorrer com as seguintes probabilidades:

- Se o investidor é **Rico**, poderá ser Classe média com chance de 45%, Pobre com chance de 25% e poderá estar Devendo com chance de 10%.
- Se o investidor é **Classe média**, poderá ser Rico com chance de 5%, Classe média com chance de 25%, poderá estar Devendo com chance de 30%.
- Se o investidor é **Pobre**, poderá ser Classe média com chance de 25%, Pobre com chance de 35%, poderá estar Devendo com chance de 35%.
- Se o investidor está **Devendo**, poderá ser Classe média com chance de 10%, Pobre com chance de 30%, e poderá estar Devendo com chance de 60%.

Modele este investidor de acordo com as Cadeias de Markov.

a) **(5 pontos)** Monte a máquina de estados estocástica do problema e a matriz de Markov (M).

b) **(5 pontos)** Suponha que o *daytradder* operou por duas semanas consecutivas (14 dias). Calcule as probabilidades finais para cada um dos estados possíveis (Rico, Classe Média, Pobre e Devendo).

Questão 9 (20 pontos). Seja um sistema linear x unidimensional que é invariante no tempo (seus parâmetros são sempre os mesmos, mesmo com o tempo evoluindo), corrompido por ruído Gaussiano, dado por $x_k = Ax_{k-1} + \xi_k$, em que $\xi \sim N(0, Q)$. Os parâmetros do sistema são: $A = 1{,}25$ e variância $Q = \sigma_x^2 = 0{,}05$. Para obter o estado x deste sistema, tem-se um sensor y igualmente linear, invariante no tempo e corrompido por ruído Gaussiano: $y_k = Cx_k + \vartheta_k$, em que $\vartheta \sim N(0, R)$. Os parâmetros do sensor são: $C = 1$ e variância $R = \sigma_y^2 = 0{,}3$. Foram feitas 10 medidas consecutivas de sensor y, dadas a seguir:

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_t	2,79	3,37	3,32	4,17	6,91	8,27	9,67	13,14	14,13	18,55

Não há informações sobre o estado inicial do sistema x (no tempo $k = 1$), portanto, faça $\hat{x}_1 = y_1$ e $P_1 = Q$.

Deseja-se obter estimativas melhores do estado do sistema do que as dadas pelo sensor. Utilize as equações recursivas do Filtro de Kalman linear unidimensional para calcular uma estimativa melhor que o sensor para o estado x do sistema. Mostre todos os cálculos para todos os instantes de tempo.

a) **(10 pontos)** Formule em detalhes o problema atual utilizando a teoria do filtro de Kalman.

b) **(10 pontos)** Execute os cálculos e forneça para cada um dos passos t: $\hat{x}_{t|t-1}$, $P_{t|t-1}$, K_t , $\hat{x}_{t|t}$ e $P_{t|t}$.

Boa avaliação!