6.1: Transformada de Laplace

- Muitos problemas práticos da engenharia envolvem sistemas mecânicos ou elétricos sob ação de forças descontínuas ou de impulsos.
- Para estes tipos de problemas, os métodos visto em Equações Diferenciais I, são difíceis de serem aplicados.
- Neste capítulo, usaremos a transformada de Laplace para desenvolver um outro método para resolver uma EDO.
- **Transformada Integrais:** Dada uma função conhecida $K(s,t)$, T*ransformada Integrais* de uma função f é uma função da forma

$$F(s)=\int_{\alpha}^{\beta} K(s,t)f(t)dt, \quad -\infty \leq \alpha < \beta \leq +\infty$$

A Transformada de Laplace

Seja f uma função definida para $t \geq 0$ e que f satisfaz certas condições que veremos mais adiante .

- A **Transformada de Laplace de** $\boldsymbol{f}$ é definida por

$$L\{f(t)\} = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\, dt$$

onde, a função $K(s,t) = e^{-st}$ é chamada de núcleo da transformada.

- Como as soluções das EDO lineares com coeficientes constantes são baseada na função exponencial, a transformada de Laplace é particularmente útil para essas equações.
- Note que a Transformada de Laplace é definida por uma integral imprópria, portanto temos que estudar sua convergência.
- Vamos rever alguns exemplos de integrais impróprias e funções contínuas por partes.

Exemplo 1

- Considere a seguinte integral imprópria.

$$\int_0^\infty e^{st}\,dt$$

- Note que para s=0 a integral acima é divergente. Então vamos supor $s \neq 0$.
- Podemos calcular esta integral da seguinte forma:

$$\int_0^\infty e^{st}\,dt = \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{st}\,dt = \lim_{b\to\infty}\frac{e^{st}}{s}\Big|_0^b = \frac{1}{s}\lim_{b\to\infty}\left(e^{sb}-1\right)$$

- Assim, podemos concluir que:

Converge: $\int_0^\infty e^{st}\,dt = -\frac{1}{s}$, se $s<0$; e

Diverge: $\int_0^\infty e^{st}\,dt$, se $s \geq 0$.

Exemplo 2

- Dada a integral imprópria

$$\int_0^{\infty} st\cos t\,dt$$

- Usando integração por partes

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty} st\cos t\,dt &= \lim_{b\to\infty}\int_0^{b} st\cos t\,dt \\
&= \lim_{b\to\infty}\left[\, st\sin t\,\Big|_0^b - \int_0^b s\sin t\,dt\right] \\
&= \lim_{b\to\infty}\left[st\sin t\,\Big|_0^b + s\cos t\,\Big|_0^b\right] \\
&= \lim_{b\to\infty}\left[sb\sin b + s(\cos b - 1)\right]
\end{aligned}$$

- Este limite é divergente, portanto a integral original é divergente.

Função Contínua por Partes

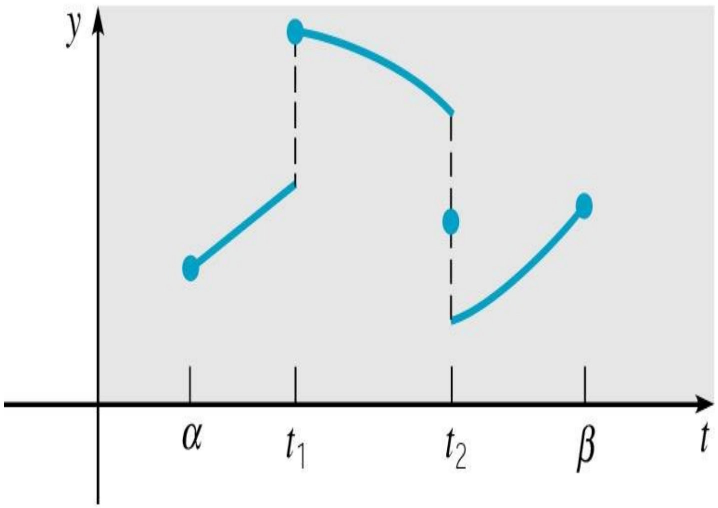
- Uma função f é **contínua por partes** em um intervalo $[a, b]$ se este intervalo pode ser particionado por um número finito de pontos,

$a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ tal que

(1) f é contínua em cada (t_k, t_{k+1})

$$(2)\ \left|\lim_{t \to t_k^+} f(t)\right| < \infty,\quad k = 0, \ldots, n-1$$

$$(3)\ \left|\lim_{t \to t_{k+1}^-} f(t)\right| < \infty,\quad k = 1, \ldots, n$$



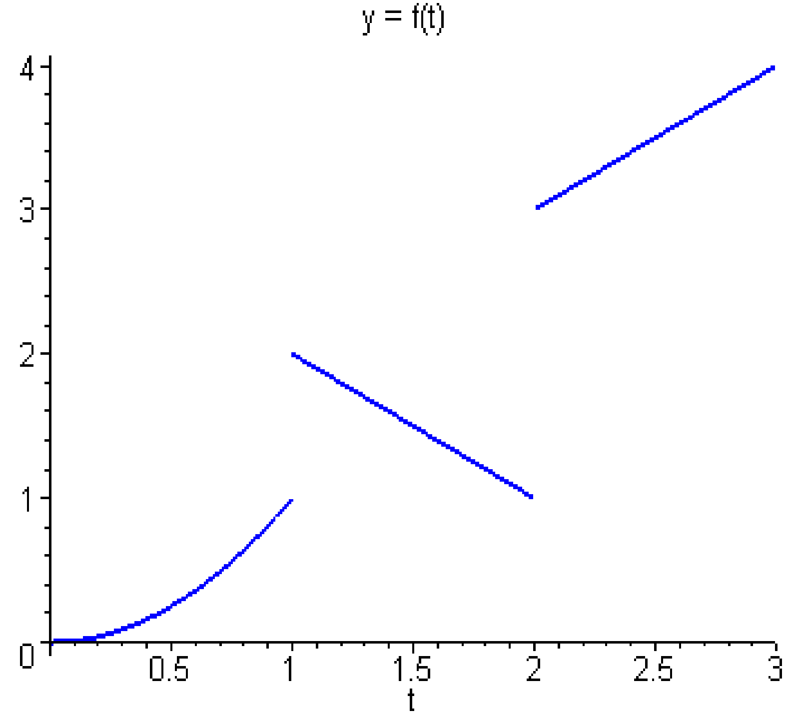
Em outras palavras, f é **contínua por partes** em $[a, b]$, se ela é contínua nesse intervalo exceto por um número finito de saltos.

Exemplo 3

- Considere a seguinte função f definida por partes:

$$f(t) = \begin{cases} t^2, & 0 \le t \le 1 \\ 3 - t, & 1 < t \le 2 \\ t + 1 & 2 < t \le 3 \end{cases}$$

- Pela definição de f e pelo seu gráfico abaixo, vemos que f é contínua por partes em [0, 3].

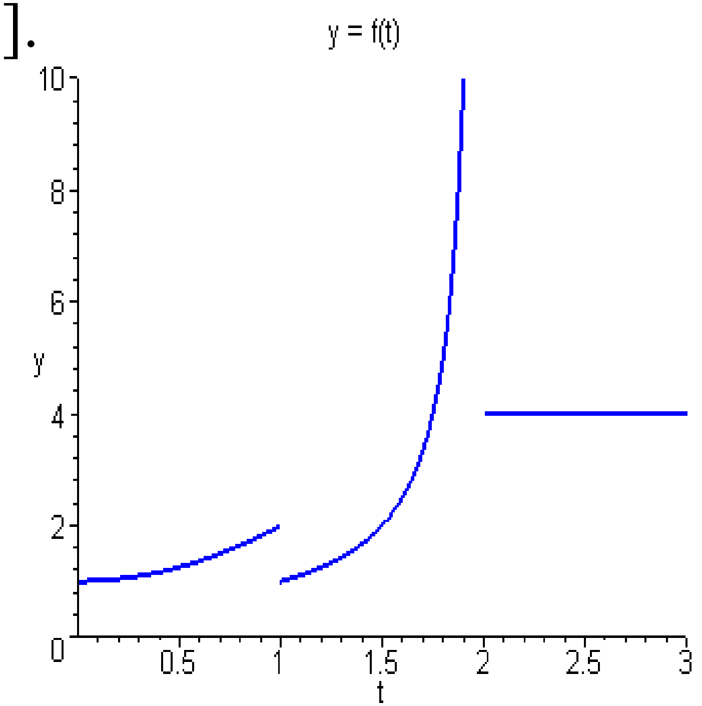


Exemplo 4

- Considere a seguinte função f definida por partes:

$$f(t) = \begin{cases} t^2 + 1, & 0 \le t \le 1 \\ (2-t)^{-1}, & 1 < t \le 2 \\ 4, & 2 < t \le 3 \end{cases}$$

- Pela definição de f e pelo seu gráfico abaixo, vemos que f não é contínua por partes em [0, 3].



Teorema 6.1.2

- Suponha que f é uma função com as seguintes propriedades:

(1) f é contínua por partes em $[0, b]$ para todo $b > 0$.

(2) $|\boldsymbol{f(t)}| \leq \boldsymbol{Ke^{at}}$ quando $\boldsymbol{t \geq M}$, onde $\boldsymbol{a, K, M}$ são constantes, com $K, M > 0$.

- Então a Transformada de Laplace de f existe para $s > a$.

$$L\{f(t)\} = F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt \qquad \text{(finito)}$$

- Obs. Funções, f, que satisfaz a condição (2) acima é dita de **ordem exponencial** quando $t \to \infty$. Esta condição é suficiente mas não necessária para a existência da Transformada de Laplace. Veja os seguintes exemplos, ambos não são de ordem exponencial.

1) $f(t) = e^{t^2}$, não existe a Transformada de Laplace

2) $f(t) = 2te^{t^2}\cos(e^{t^2})$, existe a Transformada de Laplace

Exemplo 5

- Seja $f(t) = 1$ para $t \geq 0$. Então a Transformada de Laplace $F(s)$ de f é:

$$L\{\,1\,\} = \int_0^\infty e^{-st}\,dt =$$

$$= \lim_{b \to \infty} \int_0^b e^{-st}\,dt =$$

$$= -\lim_{b \to \infty} \frac{e^{-st}}{s}\Big|_0^b =$$

$$= \frac{1}{s}, \quad s > 0$$

Assim, $L\{\,1\,\} = \dfrac{1}{s}, \quad s > 0.$

Exemplo 6

- Seja $f(t) = e^{at}$ para $t \geq 0$. Então a Transformada de Laplace $F(s)$ de f é:

$$L\left\{ e^{at} \right\} = \int_0^{\infty} e^{-st} e^{at} \, dt =$$

$$= \lim_{b \to \infty} \int_0^{b} e^{-(s-a)t} \, dt =$$

$$= -\lim_{b \to \infty} \frac{e^{-(s-a)t}}{s-a} \Big|_0^b =$$

$$= \frac{1}{s-a}, \quad s > a$$

Assim, $L\left\{ e^{at} \right\} = \dfrac{1}{s-a}, \quad s > 0.$

Exemplo 7

- Seja $f(t) = \sin(at)$ para $t \geq 0$. Usando integração por partes duas vezes, a Transformada de Laplace $F(s)$ de f é encontrada como se segue:

$$F(s) = L\{\sin(at)\} = \int_0^\infty e^{-st} \sin at dt = \lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{-st} \sin at dt$$

$$= \lim_{b\to\infty} \left[-(e^{-st} \cos at)/a \Big|_0^b - \frac{s}{a} \int_0^b e^{-st} \cos at \right]$$

$$= \frac{1}{a} - \frac{s}{a} \lim_{b\to\infty} \left[\int_0^b e^{-st} \cos at \right]$$

$$= \frac{1}{a} - \frac{s}{a} \lim_{b\to\infty} \left[(e^{-st} \sin at)/a \Big|_0^b + \frac{s}{a} \int_0^b e^{-st} \sin at \right]$$

$$= \frac{1}{a} - \frac{s^2}{a^2} F(s) \Rightarrow \quad F(s) = \frac{a}{s^2 + a^2}, \quad s > 0$$

A Linearidade da Transformada de Laplace

- Vamos supor que para as funções f e g, existam as suas Transformadas de Laplace para $s > a_1$ e $s > a_2$, respectivamente.
- Então, para s maior que o máximo entre a_1 e a_2, a Transformada de Laplace de $c_1 f(t) + c_2 g(t)$ existe. Isto é,

$$L\{c_1 f(t) + c_2 g(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}\left[c_1 f(t) + c_2 g(t)\right] dt \quad \text{é finito}$$

logo

$$\begin{aligned} L\{c_1 f(t) + c_2 g(t)\} &= c_1 \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt + c_2 \int_0^\infty e^{-st} g(t)\,dt \\ &= c_1 L\{f(t)\} + c_2 L\{g(t)\} \end{aligned}$$

Exemplo 8

- Seja $f(t) = 5e^{-2t} - 3\sin(4t)$ para $t \geq 0$.
- Então pela linearidade da Transformada de Laplace, e usando os resultados anteriores dos exemplos(6 e 7), a Transformada de Laplace $F(s)$ de f é:

$$
\begin{aligned}
F(s) &= L\{f(t)\} \\
&= L\left\{5e^{-2t} - 3\sin(4t)\right\} \\
&= 5L\left\{e^{-2t}\right\} - 3L\left\{\sin(4t)\right\} \\
&= \frac{5}{s+2} - \frac{12}{s^2+16}, \quad s > 0
\end{aligned}
$$

6.2: Resolvendo Problema de Valor Inicial

- A Transformada de Laplace tem este nome devido ao matemático franses Laplace, que estudou esta transformada em 1782.
- A técnica descrita aqui foi desenvolvida primeiramente por Oliver Heaviside (1850-1925), um engenheiro elétrico ingles.
- A Transformada de Laplace será usada para resolver PVI de EDO lineares com coeficientes constantes.
- A utilidade da Transformada de Laplace nesse contexto reside no fato de que a transformada de f' está relacionada de maneira simples com à transformada de f, esta relação é dada pelo Teorema 6.2.1 que veremos a seguir.

Teorema 6.2.1

- Suponha que f é uma função que satisfaz as seguintes condições:

(1) f é contínua e f' é contínua por partes em $[0, b]$ para todo $b > 0$.

(2) $|f(t)| \leq Ke^{at}$ quando $t \geq M$, para constantes a, K, M com K, $M > 0$.

- Então a Transformada de Laplace f' exite para $s > a$, além disso

$$L\{f'(t)\} = sL\{f(t)\} - f(0)$$

Prof (idéia): Supondo, f e f' contínua em $[0, b]$, nós temos

$$\lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-st} f'(t)\,dt = \lim_{b\to\infty}\left[e^{-st} f(t)\Big|_0^b - \int_0^b (-s) e^{-st} f(t)\,dt\right]$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left[e^{-sb} f(b) - f(0) + s\int_0^b e^{-st} f(t)\,dt\right]$$

- Sem Perda de Generalidade(SPG), para f' contínua por partes em $[0, b]$, obtemos o mesmo resultado.

A Transformada de Laplace f'

- Portanto se f e f' satisfazem as hipoteses do Teorema 6.2.1, então

$$L\{f'(t)\} = sL\{f(t)\} - f(0)$$

- Agora supondo f' e f'' satisfazendo as condições especificadas para f e f', respequitivamente, do Teorema 6.2.1. Nós obtemos então

$$\begin{aligned} L\{f''(t)\} &= sL\{f'(t)\} - f'(0) \\ &= s\left[sL\{f(t)\} - f(0)\right] - f'(0) \\ &= s^2 L\{f(t)\} - sf(0) - f'(0) \end{aligned}$$

- Analogamente, podemos obter uma expressão para $L\{f^{(n)}\}$, desde que f e suas derivadas satisfação condições similares do teorema 6.2.1. Este resultado é visto no Corolário 6.2.2

Corolário 6.2.2

- Suponha que f é uma função com as seguintes propriedades:

(1) $f, f', f'', \ldots, f^{(n-1)}$ são contínuas, e $f^{(n)}$ contínuas por partes, em $[0, b]$ para todo $b > 0$.

(2) $|f(t)| \leq Ke^{at}$, $|f'(t)| \leq Ke^{at}$, …, $|f^{(n-1)}(t)| \leq Ke^{at}$ para $t \geq M$, e constantes a, K, M, com $K, M > 0$.

Então a Transformada de Laplace $f^{(n)}$ existe para $s > a$, e é dada por

$$L\left\{f^{(n)}(t)\right\} = s^n L\left\{f(t)\right\} - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \cdots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$$

Exemplo 1: (1 de 4)

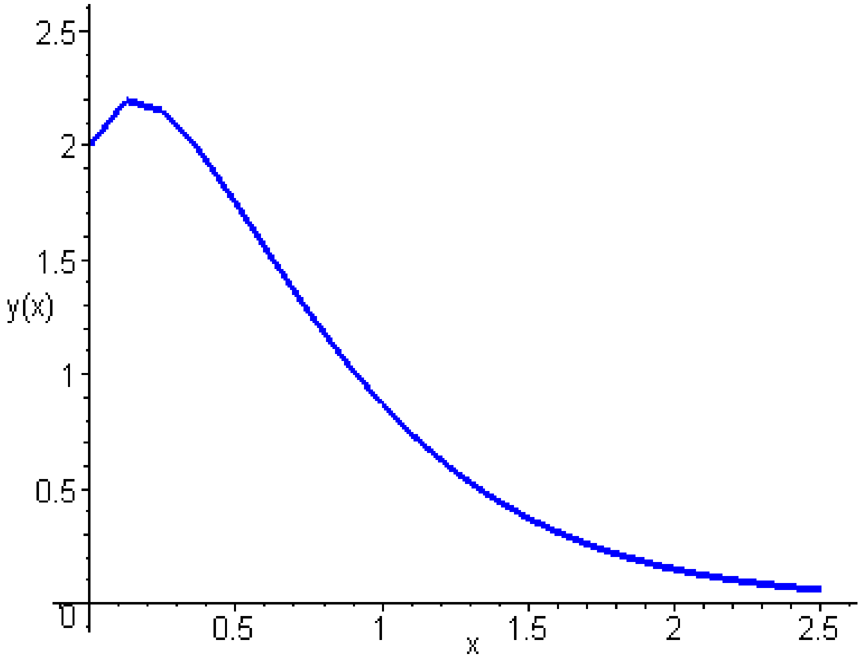
- Considere o PVI $y'' + 5y' + 6y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 3$

- Fazendo: $y(t) = e^{rt} \;\Rightarrow\; r^2 + 5r + 6 = 0 \;\Leftrightarrow\; (r+2)(r+3) = 0$

- Tem-se $r_1 = -2$ e $r_2 = -3$, e a solução é: $y(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-3t}$

- Usandoas Condições Iniciais:

$$\left.\begin{aligned} c_1 + c_2 &= 2 \\ -2c_1 - 3c_2 &= 3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow c_1 = 9, \; c_2 = -7$$



- Portanto, $y(t) = 9e^{-2t} - 7e^{-3t}$

- Agora vamos resolver o Pvi usando a Transformada de Laplace.

$$y'' + 5y' + 6y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 3$$

Exemplo 1:O MetodoTransformada de Laplace (2 de 4)

- Assumindo que o PVI tem uma solução ϕ e que $\phi'(t)$ e $\phi''(t)$ satisfazem as condições do Corolário 6.2.2. Então

$$L\{y'' + 5y' + 6y\} = L\{y''\} + 5L\{y'\} + 6L\{y\} = L\{0\} = 0$$

e onde

$$\left[s^2 L\{y\} - sy(0) - y'(0)\right] + 5\left[sL\{y\} - y(0)\right] + 6L\{y\} = 0$$

- Fazendo $Y(s) = L\{y\}$, nós temos

$$\left(s^2 + 5s + 6\right) Y(s) - (s+5)\,y(0) - y'(0) = 0$$

- Substituindo as condições iniciais, nos obtemos

$$\left(s^2 + 5s + 6\right) Y(s) - 2(s+5) - 3 = 0$$

- Assim

$$L\{y\} = Y(s) = \frac{2s + 13}{(s+3)(s+2)}$$

Exemplo 1: Fração Parcial

- Fazendo a decomposição da fração parcial, $Y(s)$ é reescrita como:

$$\frac{2s+13}{(s+3)(s+2)}=\frac{A}{(s+3)}+\frac{B}{(s+2)}$$

$$2s+13=A(s+2)+B(s+3)$$

$$2s+13=(A+B)s+(2A+3B)$$

$$A+B=2,\;\; 2A+3B=13$$

$$A=-7,\;\; B=9$$

- Portanto

$$L\{y\}=Y(s)=-\frac{7}{(s+3)}+\frac{9}{(s+2)}$$

Exemplo 1: Solução (4 de 4)

- Da sesção 6.1:

$$L\{e^{at}\} = F(s) = \int_0^\infty e^{-st} e^{at} dt = \int_0^\infty e^{-(s-a)t} dt = \frac{1}{s-a}, \quad s > a$$

- Portanto

$$Y(s) = -\frac{7}{(s+3)} + \frac{9}{(s+2)} = -7\mathrm{L}\{e^{-3t}\} + 9\mathrm{L}\{e^{-2t}\}, \quad s > -2,$$

- Reescrevendo $Y(s) = L\{y\}$, obtemos pela linearidade

$$L\{y\} = L\{-7e^{-3t} + 9e^{-2t}\}$$

e assim chegamos a solução do PVI

$$y(t) = -7e^{-3t} + 9e^{-2t}$$

O Método Geral da Transformada de Laplace

- Considere uma EDO de coeficientes constantes

$$a\,y'' + b\,y' + cy = f(t)$$

- Assuma que esta equação tem uma solução $y = \phi(t)$, e que $\phi'(t)$ e $\phi''(t)$ satisfazem as condições do Corolário 6.2.2. Então

$$L\{a\,y'' + b\,y' + cy\} = aL\{y''\} + bL\{y'\} + cL\{y\} = L\{f(t)\}$$

- Faça $Y(s) = L\{y\}$ e $F(s) = L\{f\}$, então

$$a\left[s^2 L\{y\} - sy(0) - y'(0)\right] + b\left[sL\{y\} - y(0)\right] + cL\{y\} = F(s)$$

$$\left(as^2 + bs + c\right)Y(s) - \left(as + b\right)y(0) - a\,y'(0) = F(s)$$

$$Y(s) = \frac{\left(as + b\right)y(0) + a\,y'(0)}{as^2 + bs + c} + \frac{F(s)}{as^2 + bs + c}$$

Problema Algébrico

- Assim a EDO foi transformada na equação algébrica abaixo

$$Y(s) = \frac{(as+b)\,y(0) + a\,y'(0)}{as^2+bs+c} + \frac{F(s)}{as^2+bs+c}$$

portanto devemos encontrar $y = \phi(t)$ tal que $L\{\phi(t)\} = Y(s)$.

- Note que não necessitamos resolver a equação homogênea e a não homogênea separadamente, nem temos um passo a mais em que usamos as condições iniciais para determinar os coeficientes da solução geral.

Polinômio Característico

- Usando a Transformada de Laplace, no PVI

$$a\,y'' + b\,y' + cy = f(t), \quad y(0) = y_0, \quad y'(0) = y_0'$$

Obtemos

$$Y(s) = \frac{(as+b)\,y(0) + a\,y'(0)}{as^2 + bs + c} + \frac{F(s)}{as^2 + bs + c}$$

- O polinômio do denominador é o polinômio característico associado à equação diferencial.
- A expansão em frações parciais de $Y(s)$ usado para determinar ϕ obriga-nos a encontrar as raízes da equação característica.
- Equações de ordem superior, isto pode ser muito difícil, especialmente se as raízes são irracionais ou complexas.

Problema Inverso

- A principal dificuldade em usar o método da transformada de Laplace é determinar a função $y = \phi(t)$ tal que $L\{\phi(t)\} = Y(s)$.
- Este é um problema inverso, em que tentamos encontrar ϕ tal que $\phi(t) = L^{-1}\{Y(s)\}$.
- Existe uma fórmula geral para encontrar L^{-1}, mas requer conhecimentos da teoria das funções complexas de uma variável, e nós não consideraremos aqui.
- Pode ser mostrado que se f é contínua com $L\{f(t)\} = F(s)$, então f é a única função contínua com $f(t) = L^{-1}\{F(s)\}$.
- Tabelas podem ser construídas, onde podemos encontrar muitas das funções que serão tratadas aqui. No nosso texto temos a tabela 6.2.1

Linearidade da Transformada Inversa

- Frequentemente a Transformada de Laplace $F(s)$ pode ser expressada como

$$F(s)=F_1(s)+F_2(s)+\cdots+F_n(s)$$

- Seja $\quad f_1(t)=L^{-1}\{F_1(s)\},\ \ldots,\ f_n(t)=L^{-1}\{F_n(s)\}$

- Então a função $\quad f(t)=f_1(t)+f_2(t)+\cdots+f_n(t)$

  será a Transformada de Laplace $F(s)$, desde que L seja linear.

- Por resultado de unicidade, não existe outra função contínua f que tem a mesma transformada $F(s)$.
- Assim L^{-1} é um operador linear com

$$f(t)=L^{-1}\{F(s)\}=L^{-1}\{F_1(s)\}+\cdots+L^{-1}\{F_n(s)\}$$

TABELA 6.2.1 Transformadas de Laplace Elementares

$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$	$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$
1. 1	$\frac{1}{s}, \quad s > 0$
2. e^{at}	$\frac{1}{s-a}, \quad s > a$
3. t^n; $n =$ inteiro positivo	$\frac{n!}{s^{n+1}}, \quad s > 0$
4. $t^p, \quad p > -1$	$\frac{\Gamma(p+1)}{s^{p+1}}, \quad s > 0$
5. $\operatorname{sen} at$	$\frac{a}{s^2+a^2}, \quad s > 0$
6. $\cos at$	$\frac{s}{s^2+a^2}, \quad s > 0$
7. $\operatorname{senh} at$	$\frac{a}{s^2-a^2}, \quad s > \lvert a \rvert$
8. $\cosh at$	$\frac{s}{s^2-a^2}, \quad s > \lvert a \rvert$
9. $e^{at} \operatorname{sen} bt$	$\frac{b}{(s-a)^2+b^2}, \quad s > a$

$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$	$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$
10. $e^{at} \cos bt$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}, \quad s > a$
11. $t^n e^{at}$, $n =$ inteiro positivo	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}, \quad s > a$
12. $u_c(t)$	$\frac{e^{-cs}}{s}, \quad s > 0$
13. $u_c(t) f(t-c)$	$e^{-cs} F(s)$
14. $e^{ct} f(t)$	$F(s-c)$
15. $f(ct)$	$\frac{1}{c} F\left(\frac{s}{c}\right), \quad c > 0$
16. $\int_0^t f(t-\tau) g(\tau)\, d\tau$	$F(s)G(s)$
17. $\delta(t-c)$	e^{-cs}
18. $(-t)^n f(t)$	$F^{(n)}(s)$
19. $f^{(n)}(t)$	$s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0)$

Exemplo 2

- Encontrar a inversa da Transformada de Laplace da função.

$$Y(s) = \frac{2}{s}$$

- Para encontrar $y(t)$ tal que $y(t) = L^{-1}\{Y(s)\}$, nos primeiro reescrevemos $Y(s)$:

$$Y(s) = \frac{2}{s} = 2\left(\frac{1}{s}\right)$$

- Usando a Tabela 6.2.1,

$$L^{-1}\{Y(s)\} = L^{-1}\left\{\frac{2}{s}\right\} = 2\mathrm{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} = 2(1) = 2$$

- Assim

$$y(t) = 2$$

Exemplo 3

- Encontrar a inversa da Transformada de Laplace da função.

$$Y(s) = \frac{3}{s-5}$$

- Para encontrar $y(t)$ tal que $y(t) = L^{-1}\{Y(s)\}$, nos primeiro reescrevemos $Y(s)$:

$$Y(s) = \frac{3}{s-5} = 3\left(\frac{1}{s-5}\right)$$

- Usando a Tabela 6.2.1,

$$L^{-1}\{Y(s)\} = L^{-1}\left\{\frac{3}{s-5}\right\} = 3\mathrm{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-5}\right\} = 3e^{5t}$$

- Assim

$$y(t) = 3e^{5t}$$

Exemplo 4

- Encontrar a inversa da Transformada de Laplace da função.

$$Y(s) = \frac{6}{s^4}$$

- Para encontrar $y(t)$ tal que $y(t) = L^{-1}\{Y(s)\}$, nos primeiro reescrevemos $Y(s)$:

$$Y(s) = \frac{6}{s^4} = \frac{3\,!}{s^4}$$

- Usando a Tabela 6.2.1,

$$L^{-1}\{Y(s)\} = L^{-1}\left\{\frac{3\,!}{s^4}\right\} = t^3$$

- Assim

$$y(t) = t^3$$

Exemplo 5

- Encontrar a inversa da Transformada de Laplace da função.

$$Y(s)=\frac{8}{s^3}$$

- Para encontrar $y(t)$ tal que $y(t) = L^{-1}\{Y(s)\}$, nos primeiro reescrevemos $Y(s)$:

$$Y(s)=\frac{8}{s^3}=\left(\frac{8}{2!}\right)\left(\frac{2!}{s^3}\right)=4\left(\frac{2!}{s^3}\right)$$

- Usando a Tabela 6.2.1,

$$L^{-1}\{Y(s)\}=L^{-1}\left\{4\left(\frac{2!}{s^3}\right)\right\}=4\mathrm{L}^{-1}\left\{\frac{2!}{s^3}\right\}=4\mathrm{t}^2$$

- Assim

$$y(t)=4\mathrm{t}^2$$

Exemplo 6

- Encontrar a inversa da Transformada de Laplace da função.

$$Y(s) = \frac{4s+1}{s^2+9}$$

- Para encontrar $y(t)$ tal que $y(t) = L^{-1}\{Y(s)\}$, nos primeiro reescrevemos $Y(s)$:

$$Y(s) = \frac{4s+1}{s^2+9} = 4\left[\frac{s}{s^2+9}\right] + \frac{1}{3}\left[\frac{3}{s^2+9}\right]$$

- Usando a Tabela 6.2.1,

$$L^{-1}\{Y(s)\} = 4\mathrm{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+9}\right\} + \frac{1}{3}L^{-1}\left\{\frac{3}{s^2+9}\right\} = 4\cos 3t + \frac{1}{3}\sin 3t$$

- Assim

$$y(t) = 4\cos 3t + \frac{1}{3}\sin 3t$$

Exemplo 7

- Encontrar a inversa da Transformada de Laplace da função.

$$Y(s) = \frac{4s+1}{s^2-9}$$

- Para encontrar $y(t)$ tal que $y(t) = L^{-1}\{Y(s)\}$, nos primeiro reescrevemos $Y(s)$:

$$Y(s) = \frac{4s+1}{s^2-9} = 4\left[\frac{s}{s^2-9}\right] + \frac{1}{3}\left[\frac{3}{s^2-9}\right]$$

- Usando a Tabela 6.2.1,

$$L^{-1}\{Y(s)\} = 4L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2-9}\right\} + \frac{1}{3}L^{-1}\left\{\frac{3}{s^2-9}\right\} = 4\cosh 3t + \frac{1}{3}\sinh 3t$$

- Assim

$$y(t) = 4\cosh 3t + \frac{1}{3}\sinh 3t$$

Exemplo 8

- Encontrar a inversa da Transformada de Laplace da função.

$$Y(s) = -\frac{10}{(s+1)^3}$$

- Para encontrar $y(t)$ tal que $y(t) = L^{-1}\{Y(s)\}$, nos primeiro reescrevemos $Y(s)$:

$$Y(s) = -\frac{10}{(s+1)^3} = -\frac{10}{2\,!}\left[\frac{2\,!}{(s+1)^3}\right] = -5\left[\frac{2\,!}{(s+1)^3}\right]$$

- Usando a Tabela 6.2.1,

$$L^{-1}\{Y(s)\} = -5\mathrm{L}^{-1}\left\{\frac{2\,!}{(s+1)^3}\right\} = -5\mathrm{t}^2 e^{-t}$$

- Assim

$$y(t) = -5\mathrm{t}^2 e^{-t}$$

Exemplo 9

- Para a função $Y(s)$ abaixo, nos encontramos $y(t) = L^{-1}\{Y(s)\}$ usando um expansão em frações parciais, como segue.

$$Y(s) = \frac{3s+1}{s^2+s-12} = \frac{3s+1}{(s+4)(s-3)} = \frac{A}{s+4} + \frac{B}{s-3}$$

$$3s+1 = A(s-3) + B(s+4)$$

$$3s+1 = (A+B)s + (4B-3A)$$

$$A+B=3, \quad 4B-3A=1$$

$$A=11/7, \quad B=10/7$$

$$Y(s) = \frac{11}{7}\left[\frac{1}{s+4}\right] + \frac{10}{7}\left[\frac{1}{s-3}\right] \Rightarrow y(t) = \frac{11}{7}e^{-4t} + \frac{10}{7}e^{3t}$$

Exemplo 10

- Para a função $Y(s)$ abaixo, encontramos $y(t) = L^{-1}\{Y(s)\}$ completando quadrados no denominador e reorganizando o numerador, como segue.

$$Y(s) = \frac{4s - 10}{s^2 - 6s + 10} = \frac{4s - 10}{(s^2 - 6s + 9) + 1} = \frac{4s - 12 + 2}{(s - 3)^2 + 1}$$

$$= \frac{4(s - 3) + 2}{(s - 3)^2 + 1} = 4\left[\frac{s - 3}{(s - 3)^2 + 1}\right] + 2\left[\frac{1}{(s - 3)^2 + 1}\right]$$

- Usando a Tabela 6.2.1, obtemos

$$y(t) = 4e^{3t}\cos t + 2e^{3t}\sin t$$

Exemplo 11: PVI (1 de 2)

- Considere o PVI

$$y'' - 8y' + 25y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 6$$

- Aplicando a transformada de Laplace na equação diferencial, e assumindo que as condições do Corolário 6.2.2 são satisfeitas, temos

$$\left[s^2 L\{y\} - sy(0) - y'(0)\right] - 8\left[sL\{y\} - y(0)\right] + 25L\{y\} = 0$$

- Fazendo $Y(s) = L\{y\}$, temos

$$\left(s^2 - 8s + 25\right) Y(s) - (s-8)\, y(0) - y'(0) = 0$$

- Substituindo as condições iniciais, obtém-se

$$\left(s^2 - 8s + 25\right) Y(s) - 6 = 0$$

- Assim

$$L\{y\} = Y(s) = \frac{6}{s^2 - 8s + 25}$$

Exemplo 11: Solução (2 de 2)

- Completando quadrados, tem-se

$$Y(s) = \frac{6}{s^2 - 8s + 25} = \frac{6}{\left(s^2 - 8s + 16\right) + 9}$$

- Assim

$$Y(s) = 2\left[\frac{3}{\left(s-4\right)^2 + 9}\right]$$

- Usando a Tabela 6.2.1, obtemos

$$L^{-1}\left\{Y(s)\right\} = 2\,e^{4t}\sin 3t$$

- Portanto nossa solução do PVI é

$$y(t) = 2\,e^{4t}\sin 3t$$

Exemplo 12: Ploblema não Homogêneo (1 de 2)

- Considere o PVI

$$y'' + y = \sin 2t, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 1$$

- Aplicando a transformada de Laplace na equação diferencial, e assumindo que as condições do Corolário 6.2.2 são satisfeitas, temos

$$\left[s^2 L\{y\} - sy(0) - y'(0)\right] + L\{y\} = 2/(s^2 + 4)$$

- Fazendo $Y(s) = L\{y\}$, temos

$$\left(s^2 + 1\right) Y(s) - sy(0) - y'(0) = 2/(s^2 + 4)$$

- Substituindo as condições iniciais, obtém-se

$$\left(s^2 + 1\right) Y(s) - 2s - 1 = 2/(s^2 + 4)$$

- Assim

$$Y(s) = \frac{2s^3 + s^2 + 8s + 6}{(s^2 + 1)(s^2 + 4)}$$

Exemplo 12: Solução (2 de 2)

- Usando frações parciais,

$$Y(s) = \frac{2s^3 + s^2 + 8s + 6}{(s^2+1)(s^2+4)} = \frac{As+B}{s^2+1} + \frac{Cs+D}{s^2+4}$$

- Então

$$\begin{aligned} 2s^3 + s^2 + 8s + 6 &= (As+B)(s^2+4) + (Cs+D)(s^2+1) \\ &= (A+C)s^3 + (B+D)s^2 + (4A+C)s + (4B+D) \end{aligned}$$

- Resolvendo, obtemos $A = 2$, $B = 5/3$, $C = 0$, e $D = -2/3$. Então

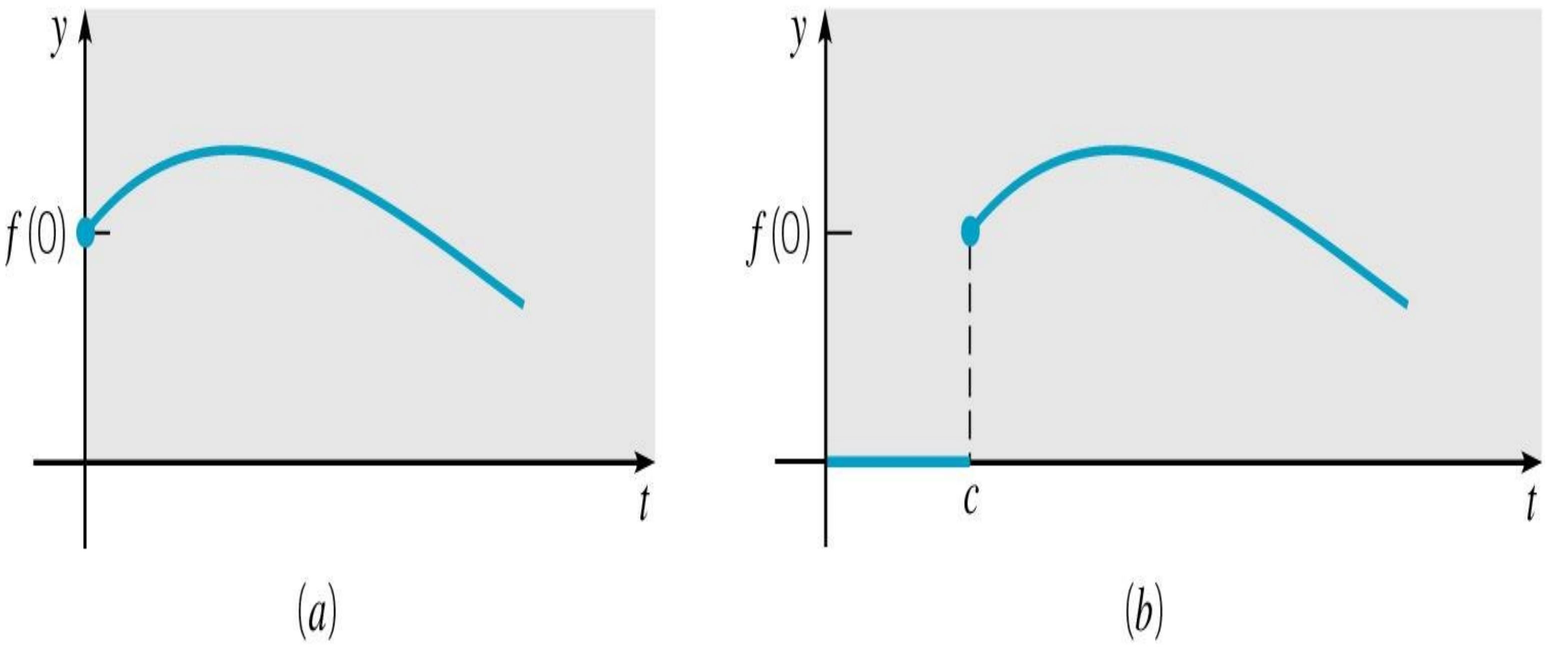
$$Y(s) = \frac{2s}{s^2+1} + \frac{5/3}{s^2+1} - \frac{2/3}{s^2+4}$$

- Onde

$$y(t) = 2\cos t + \frac{5}{3}\sin t - \frac{1}{3}\sin 2t$$

6.3: Função Degrau

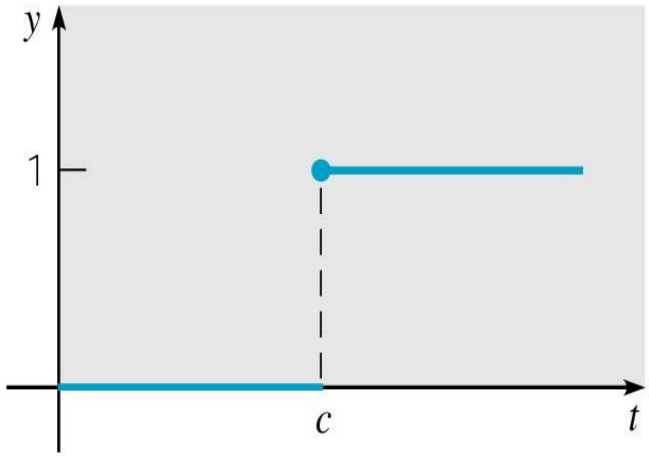
- Algumas das mais interessantes aplicações elementares do método da Transformada de Laplace ocorre em solução de equações lineares descontínuas ou como funções de forças de impulso.
- Nesta seção, assumiremos que todas as funções aqui consideradas são contínuas por partes e de ordem exponencial, e que existe sua Transformada de Laplace, para *s* suficientemente grande.



Definição da função degrau

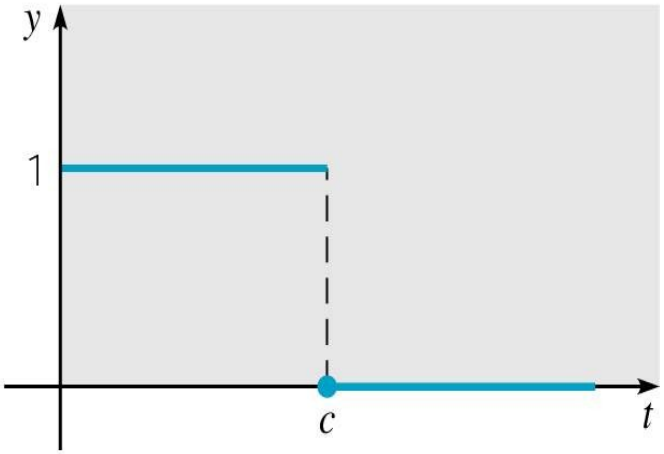
- Seja $c \geq 0$. A **função degrau unitário**, ou função Heaviside, é definido por

$$u_c(t) = \begin{cases} 0, & t < c \\ 1, & t \geq c \end{cases}$$



- Um degrau negativo pode ser representado por

$$y(t) = 1 - u_c(t) = \begin{cases} 1, & t < c \\ 0, & t \geq c \end{cases}$$



Exemplo 1

- Esborçando o gráfico de

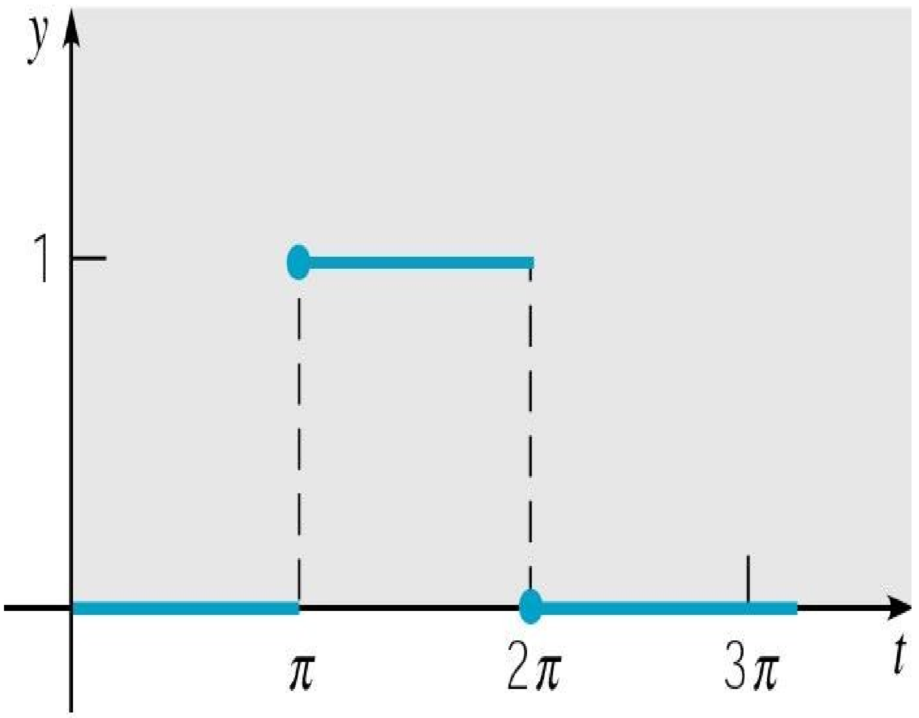
$$h(t) = u_\pi(t) - u_{2\pi}(t), \quad t \geq 0$$

- Lembre que $u_c(t)$ é definido por

$$u_c(t) = \begin{cases} 0, & t < c \\ 1, & t \geq c \end{cases}$$

- Assim

$$h(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < \pi \\ 1, & \pi \leq t < 2\pi \\ 0 & 2\pi \leq t < \infty \end{cases}$$



e portanto o gráfico $h(t)$ é um pulso retangular.

Transformada de Laplace da Função Degrau

- A transformada de Laplace de $u_c(t)$ é

$$L\{u_c(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} u_c(t)\,dt = \int_c^\infty e^{-st}\,dt$$

$$= \lim_{b\to\infty} \int_c^b e^{-st}\,dt = \lim_{b\to\infty} \left[-\frac{1}{s} e^{-st} \Big|_c^b \right]$$

$$= \lim_{b\to\infty} \left[-\frac{e^{-bs}}{s} + \frac{e^{-cs}}{s} \right]$$

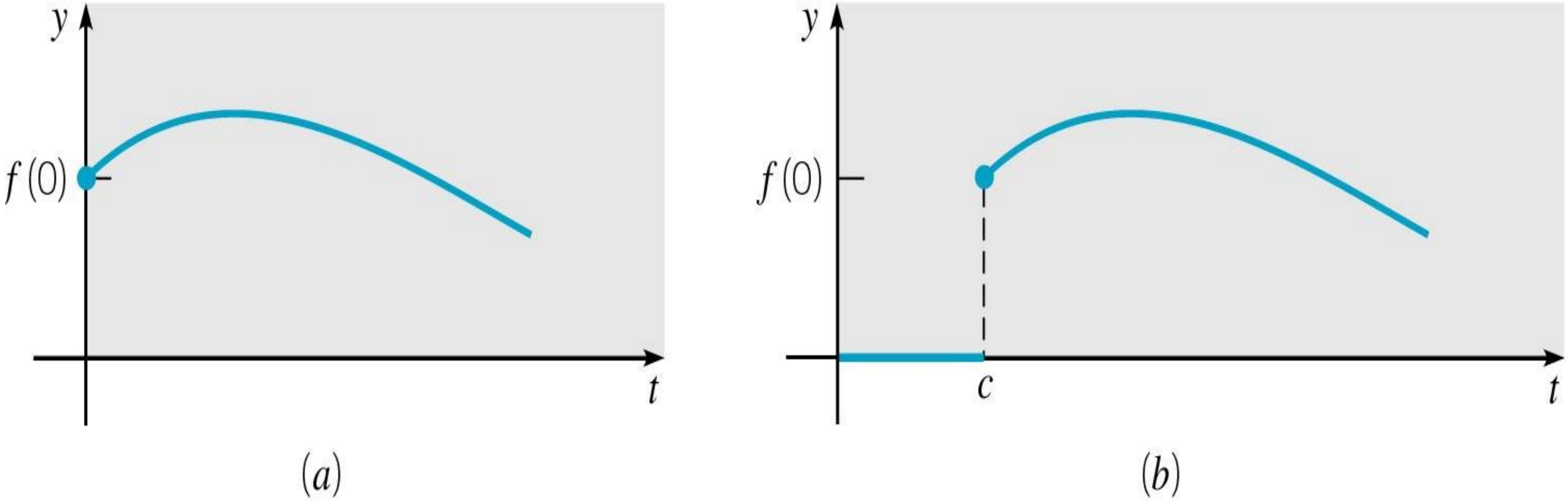
$$= \frac{e^{-cs}}{s}$$

Funções Transladada

- Dada uma função $f(t)$ definida para $t \geq 0$, nós vamos considerar a função transladada na relação: $g(t) = u_c(t)\, f(t - c)$:

$$g(t) = \begin{cases} 0, & t < c \\ f(t-c), & t \geq c \end{cases}$$

- Assim g representa uma translação de f a uma distância c na direção positiva de t.
- Na figura abaixo, o gráfico de f é o da esquerda e o gráfico de g é o da direita.



Exemplo 2

- O esborço do gráfico

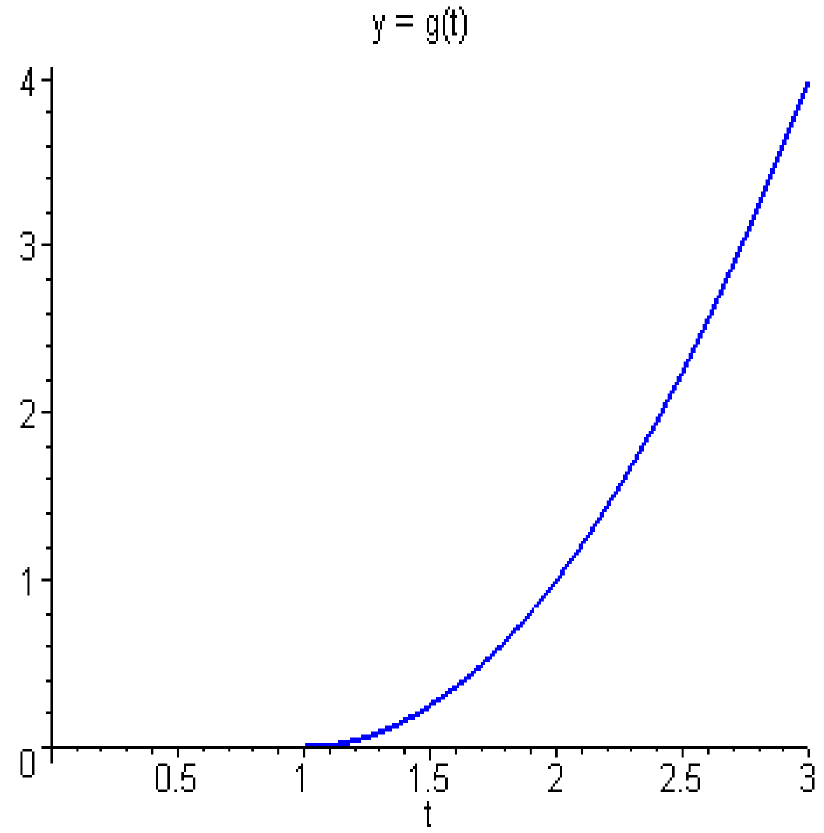
$$g(t) = f(t-1)u_1(t), \quad \text{where } f(t) = t^2, \ t \geq 0.$$

- Como $u_c(t)$ é definido por

$$u_c(t) = \begin{cases} 0, & t < c \\ 1, & t \geq c \end{cases}$$

- Assim

$$g(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < 1 \\ (t-1)^2, & t \geq 1 \end{cases}$$



e portanto o gráfico de $g(t)$ é uma parábola deslocada.

Teorema 6.3.1

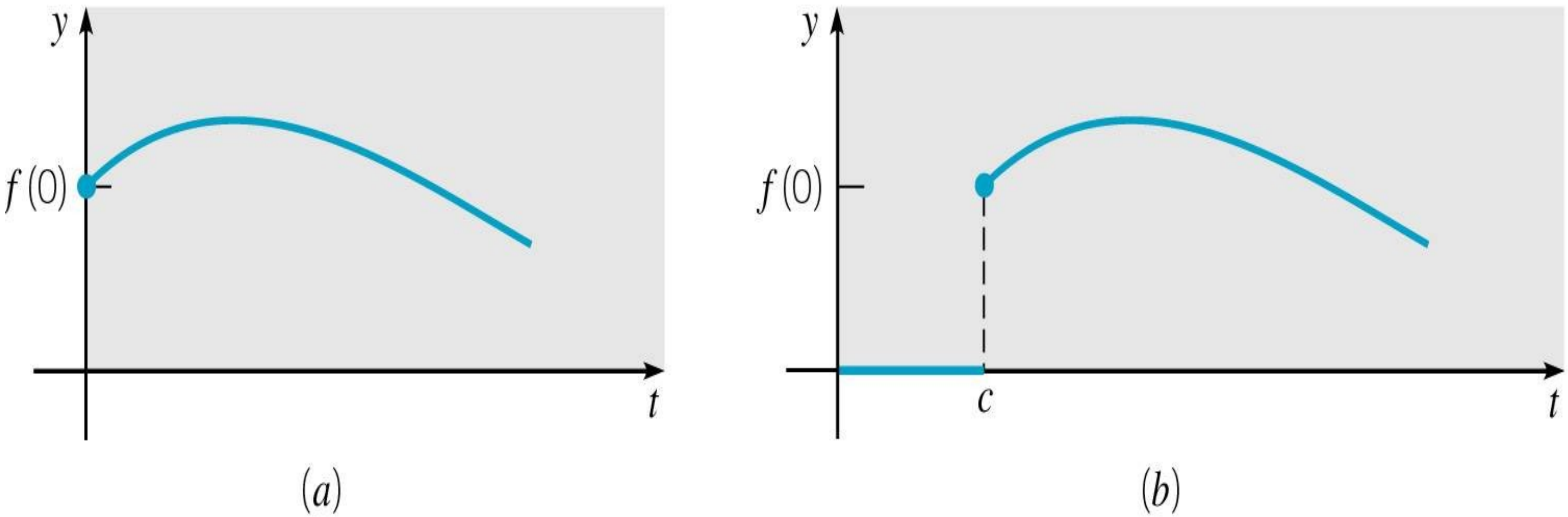
- Se $F(s) = L\{f(t)\}$ existe para $s > a \geq 0$, e se $c > 0$, então

$$L\{u_c(t)\,f(t-c)\} = e^{-cs}L\{f(t)\} = e^{-cs}F(s)$$

- Reciprocamente, se $f(t) = L^{-1}\{F(s)\}$, então

$$u_c(t)\,f(t-c) = L^{-1}\{e^{-cs}F(s)\}$$

- Assim a translação de $f(t)$ a uma distancia c positiva na direção de t corresponde por uma multiplicação de $F(s)$ por e^{-cs}.



Teorema 6.3.1: Ideia da prova

- Nós precisamos mostrar que

$$L\left\{ u_c(t)\, f(t-c) \right\} = e^{-cs} F(s)$$

- Usando a definição da Transformada de Laplace, nós temos

$$\begin{aligned}
L\{u_c(t) f(t-c)\} &= \int_0^\infty e^{-st} u_c(t) f(t-c)\,dt \\
&= \int_c^\infty e^{-st} f(t-c)\,dt \\
&\overset{u=t-c}{=} \int_0^\infty e^{-s(u+c)} f(u)\,du \\
&= e^{-cs} \int_0^\infty e^{-su} f(u)\,du \\
&= e^{-cs} F(s)
\end{aligned}$$

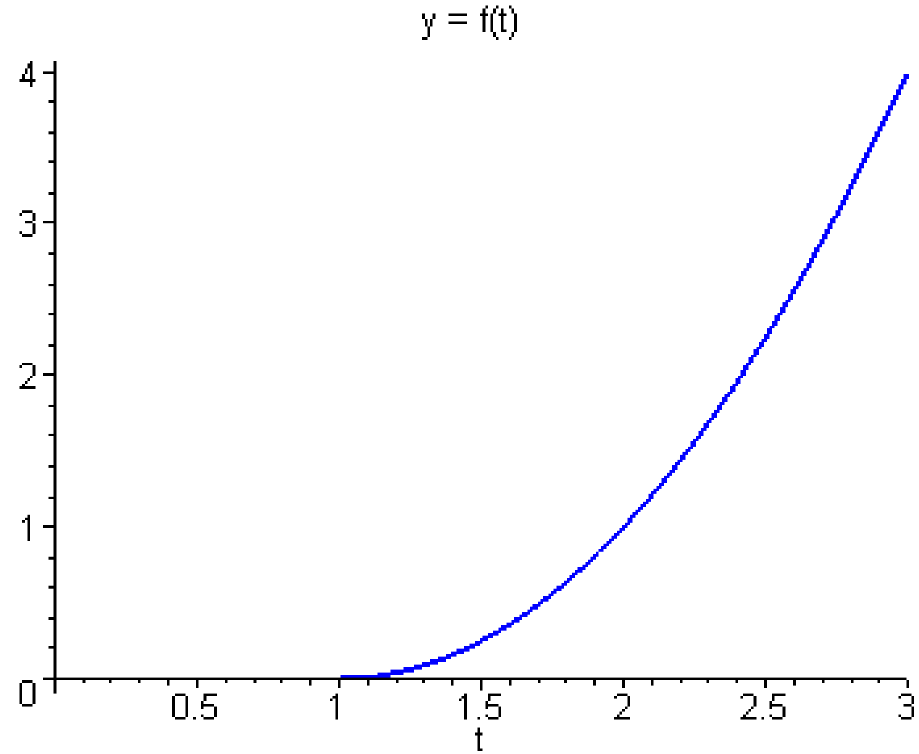
Exemplo 3

- Encontrar a Transformada de Laplace de

$$f(t)=\begin{cases} 0, & 0\le t<1 \\ (t-1)^2, & t\ge 1 \end{cases}$$

- Note que

$$f(t)=(t-1)^2 u_1(t)$$



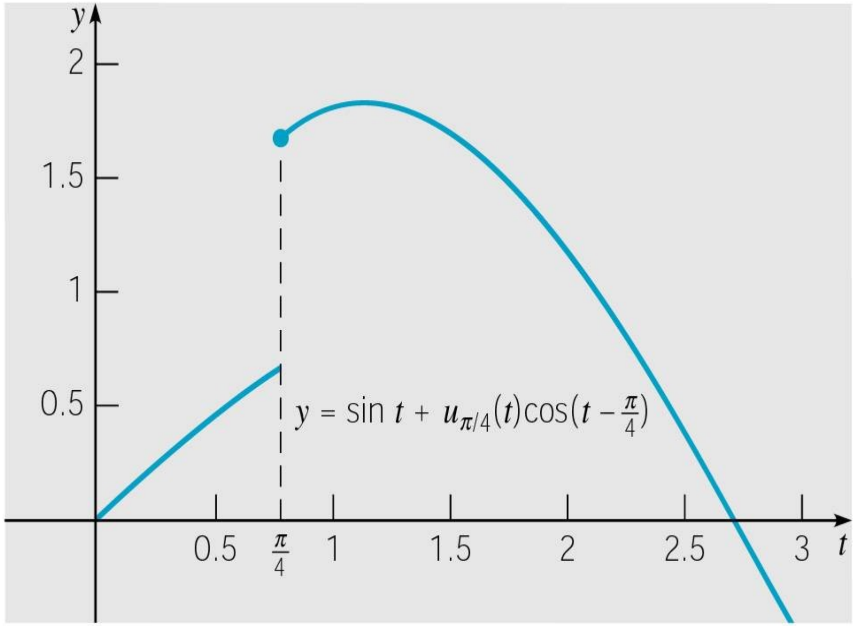
- Assim

$$L\{f(t)\}=L\{u_1(t)(t-1)^2\}=e^{-s}L\{t^2\}=\frac{2e^{-s}}{s^3}$$

Exemplo 4

- Encontrar $L\{f(t)\}$, onde f é

$$f(t)=\begin{cases}\sin t, & 0\le t<\pi/4\\ \sin t+\cos(t-\pi/4), & t\ge\pi/4\end{cases}$$



- Note que $f(t) = \sin(t) + u_{\pi/4}(t)\cos(t - \pi/4)$, e

$$\begin{aligned}L\{f(t)\} &= L\{\sin t\} + L\{u_{\pi/4}(t)\cos(t-\pi/4)\}\\ &= L\{\sin t\} + e^{-\pi s/4}L\{\cos t\}\\ &= \frac{1}{s^2+1} + e^{-\pi s/4}\frac{s}{s^2+1}\\ &= \frac{1+se^{-\pi s/4}}{s^2+1}\end{aligned}$$

Exemplo 5

- Encontrar $L^{-1}\{F(s)\}$, onde

$$F(s) = \frac{3 + e^{-7s}}{s^4}$$

- Solução:

$$f(t) = L^{-1}\left\{\frac{3}{s^4}\right\} + L^{-1}\left\{\frac{e^{-7s}}{s^4}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}L^{-1}\left\{\frac{3!}{s^4}\right\} + \frac{1}{6}L^{-1}\left\{e^{-7s}\cdot\frac{3!}{s^4}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}t^3 + \frac{1}{6}u_7(t)(t-7)^3$$

Teorema 6.3.2

- Se $F(s) = L\{f(t)\}$ existe para $s > a \geq 0$, e se c é uma constante, então
$$L\left\{e^{ct}f(t)\right\} = F(s-c), \quad s > a + c$$
- Reciprocamente, se $f(t) = L^{-1}\{F(s)\}$, então
$$e^{ct}f(t) = L^{-1}\left\{F(s-c)\right\}$$
- Assim multiplicar $f(t)$ por e^{ct} resulta em transladar $F(s)$ a uma distancia c na direção positiva de t, e reciprocamente.
- Ideia da prova:

$$L\left\{e^{ct}f(t)\right\} = \int_0^\infty e^{-st}e^{ct}f(t)\,dt = \int_0^\infty e^{-(s-c)t}f(t)\,dt = F(s-c)$$

Exemplo 4

- Encontrar a Transformada Inversa de

$$G(s) = \frac{s+1}{s^2+2s+5}$$

- Para resolver, primeiramente completaremos quadrados:

$$G(s) = \frac{s+1}{s^2+2s+5} = \frac{s+1}{\left(s^2+2s+1\right)+4} = \frac{\left(s+1\right)}{\left(s+1\right)^2+4}$$

- Desde que

$$f(t) = L^{-1}\{F(s)\} = L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+4}\right\} = \cos(2t)$$

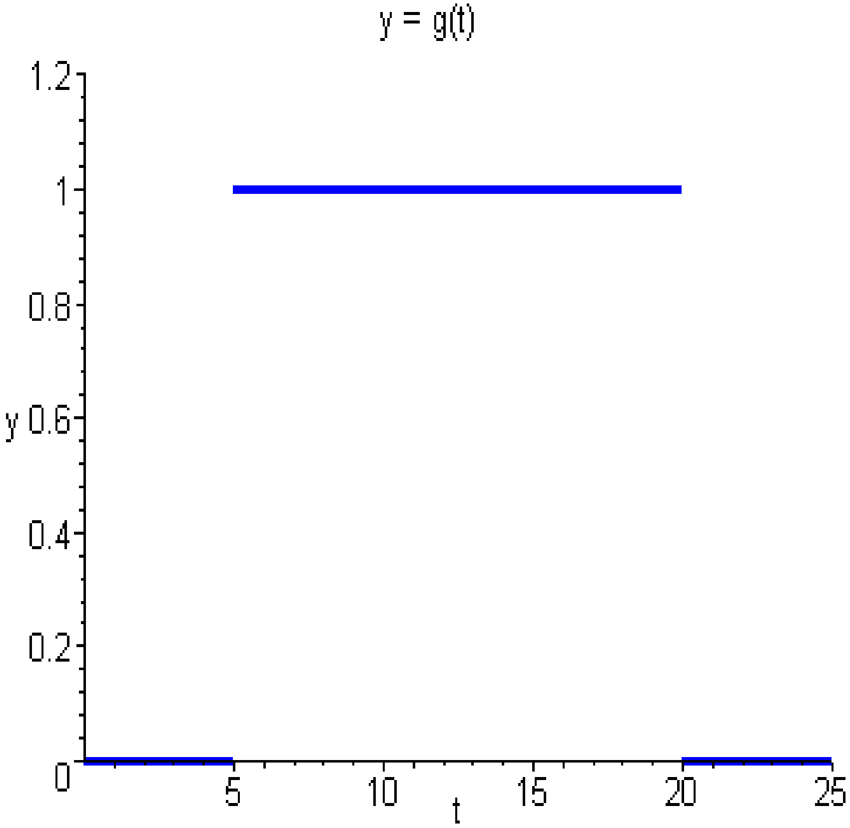
segue que

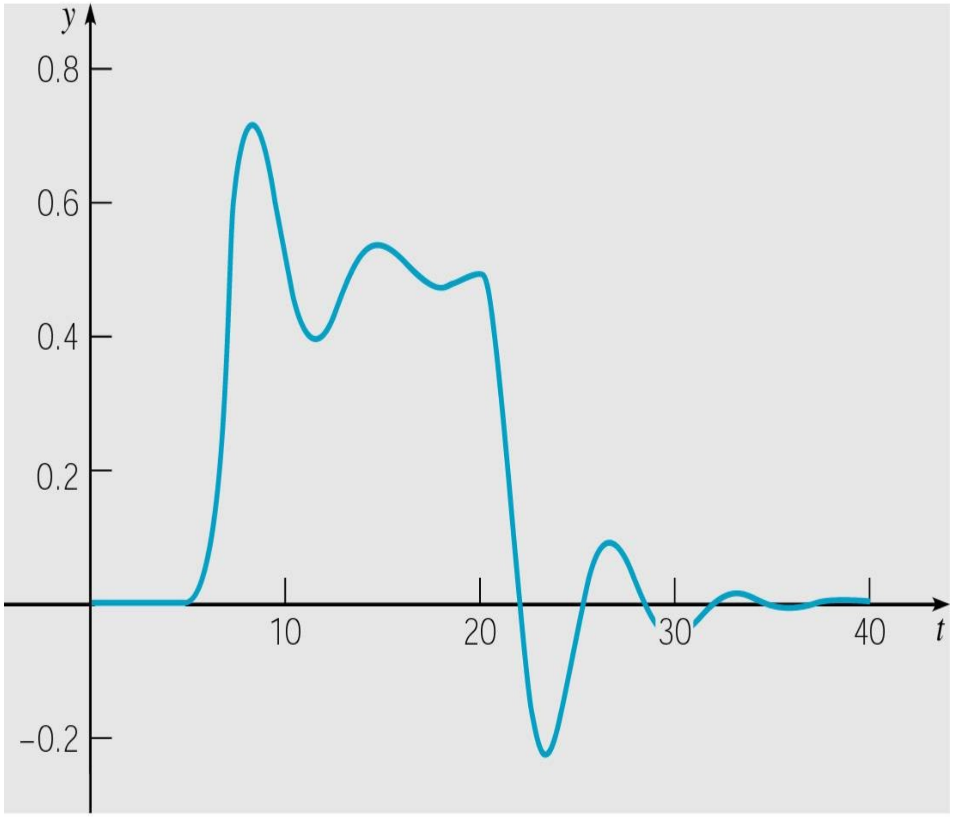
$$L^{-1}\{G(s)\} = L^{-1}\{F(s+1)\} = e^{-t} f(t) = e^{-t}\cos(2t)$$

6.4: Equações Diferenciais com Forçamentos Descontínuos.

- Nesta seção estudaremos casos de PVI no qual a função de forças é descontínuas.

$$a\,y'' + b\,y' + cy = g(t), \quad y(0) = y_0, \quad y'(0) = y_0'$$





Exemplo 1: PVI (1 de 12)

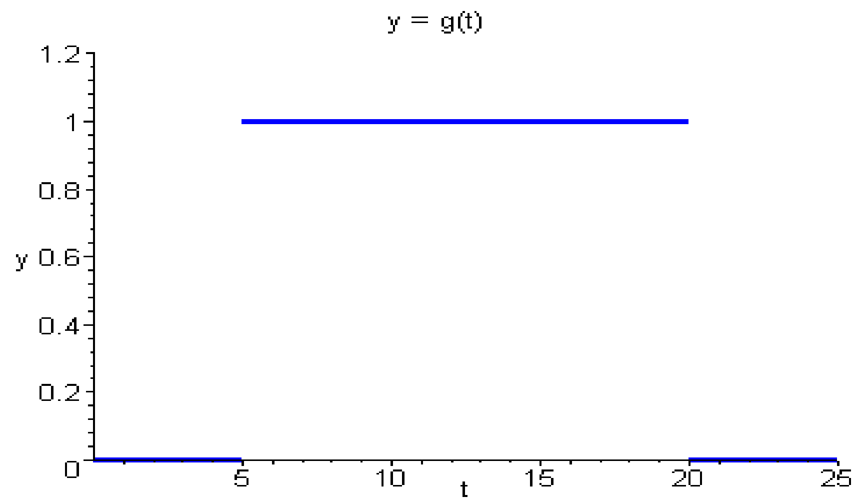
- Encontrar a solução do PVI

$$2y'' + y' + 2y = g(t), \; y(0) = 0, \; y'(0) = 0$$

onde

$$g(t) = u_5(t) - u_{20}(t) = \begin{cases} 1, & 5 \leq t < 20 \\ 0, & 0 \leq t < 5 \text{ and } t \geq 20 \end{cases}$$

- Esse problema representa a carga em um capacitor em um circuito elétrico onde a voltagem é um pulso unitário em [5,20). Pode representar, também, a resposta de um oscilador amortecido sob a ação de uma força $g(t)$.



$$2y'' + y' + 2y = u_5(t) - u_{20}(t), \quad y(0) = 0, \; y'(0) = 0$$

Exemplo 1: Transformada de Laplace (2 de 12)

- Assumindo as condições do Corolário 6.2.2 são satisfeitas. Então

$$2L\{y''\} + L\{y'\} + 2L\{y\} = L\{u_5(t)\} - L\{u_{20}(t)\}$$

ou

$$\left[2s^2 L\{y\} - 2sy(0) - 2y'(0)\right] + \left[sL\{y\} - y(0)\right] + 2L\{y\} = \frac{e^{-5s} - e^{-20s}}{s}$$

- Fazendo $Y(s) = L\{y\}$,

$$\left(2s^2 + s + 2\right) Y(s) - \left(2s + 1\right) y(0) - 2y'(0) = \left(e^{-5s} - e^{-20s}\right)/s$$

- Substituindo as condições iniciais, obtemos

$$\left(2s^2 + s + 2\right) Y(s) = \left(e^{-5s} - e^{-20s}\right)/s$$

- Assim

$$Y(s) = \frac{\left(e^{-5s} - e^{-20s}\right)}{s\left(2s^2 + s + 2\right)}$$

Exemplo 1: Fatorando $Y(s)$ (3 de 12)

- Temos

$$Y(s) = \frac{\left(e^{-5s} - e^{-20s}\right)}{s\left(2s^2 + s + 2\right)} = \left(e^{-5s} - e^{-20s}\right) H(s)$$

onde

$$H(s) = \frac{1}{s\left(2s^2 + s + 2\right)}$$

- Se tomarmos $h(t) = L^{-1}\{H(s)\}$, então

$$y = \varphi(t) = u_5(t)\,h(t-5) - u_{20}(t)\,h(t-20)$$

pelo Teorema 6.3.1.

Exemplo 1: Frações Parciais

- Reescrevendo $H(s)$, como.

$$H(s) = \frac{1}{s\left(2s^2 + s + 2\right)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs + C}{2s^2 + s + 2}$$

- Esta expansão em frações parciais produz as equações

$$\left(2A + B\right)s^2 + \left(A + C\right)s + 2A = 1$$

$$\Rightarrow A = 1/2,\ B = -1,\ C = -1/2$$

- Assim

$$H(s) = \frac{1/2}{s} - \frac{s + 1/2}{2s^2 + s + 2}$$

Exemplo 1: Completando quadrados

- Fazendo as contas,

$$H(s) = \frac{1/2}{s} - \frac{s + 1/2}{2s^2 + s + 2}$$

$$= \frac{1/2}{s} - \frac{1}{2}\left[\frac{s + 1/2}{s^2 + s/2 + 1}\right]$$

$$= \frac{1/2}{s} - \frac{1}{2}\left[\frac{s + 1/2}{s^2 + s/2 + 1/16 + 15/16}\right]$$

$$= \frac{1/2}{s} - \frac{1}{2}\left[\frac{s + 1/2}{(s + 1/4)^2 + 15/16}\right]$$

$$= \frac{1/2}{s} - \frac{1}{2}\left[\frac{(s + 1/4) + 1/4}{(s + 1/4)^2 + 15/16}\right]$$

Exemplo 1: Solução (6 de 12)

- Assim

$$H(s) = \frac{1/2}{s} - \frac{1}{2}\left[\frac{(s+1/4)+1/4}{(s+1/4)^2+15/16}\right]$$

$$= \frac{1/2}{s} - \frac{1}{2}\left[\frac{(s+1/4)}{(s+1/4)^2+15/16}\right] - \frac{1}{2\sqrt{15}}\left[\frac{\sqrt{15}/4}{(s+1/4)^2+15/16}\right]$$

e onde

$$h(t) = L^{-1}\{H(s)\} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-t/4}\cos\left(\frac{\sqrt{15}}{4}t\right) - \frac{1}{2\sqrt{15}}e^{-t/4}\sin\left(\frac{\sqrt{15}}{4}t\right)$$

- Para $h(t)$ como dado acima, e do nosso resultado já determinado em função de $h(t)$, a solução do PVI é então

$$\varphi(t) = u_5(t)h(t-5) - u_{20}(t)h(t-20)$$

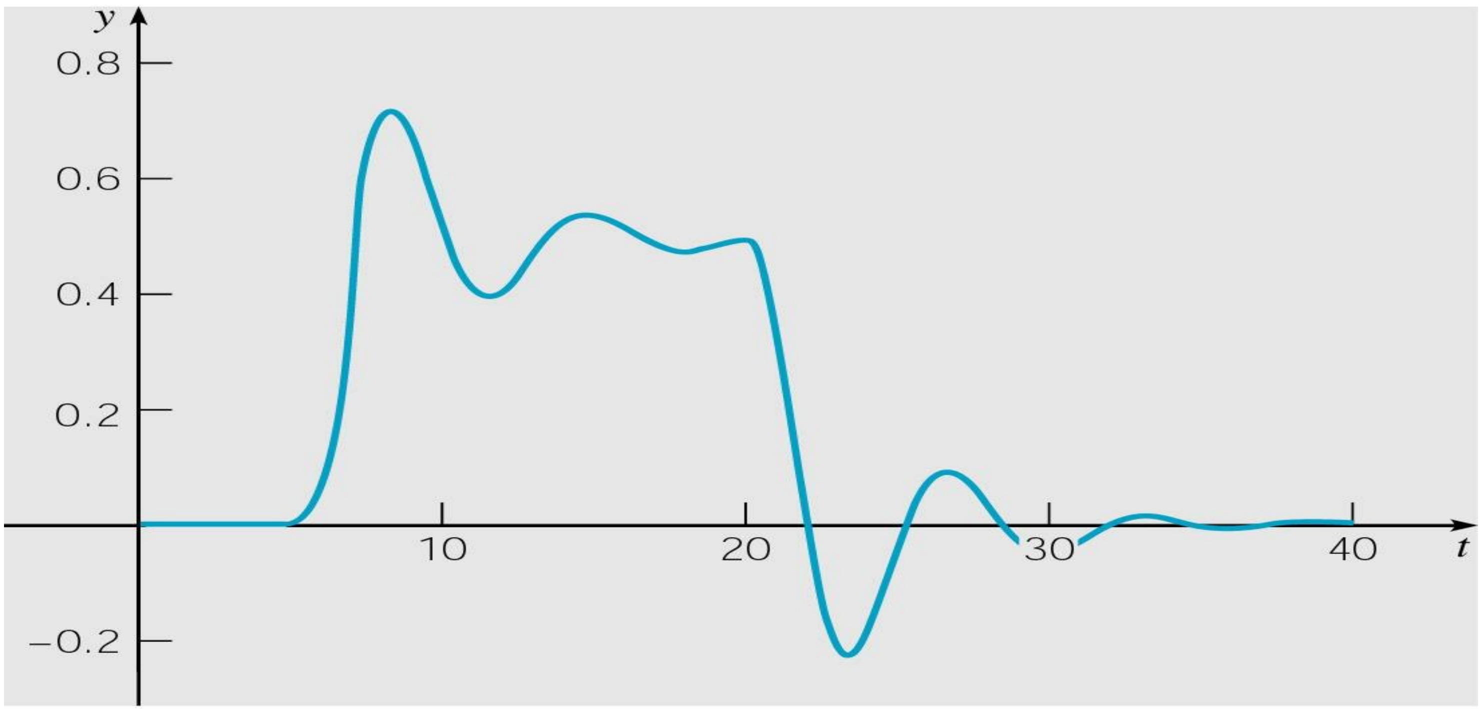
Exemplo 1: Gráfico da Solução

- Assim a solução do PVI é

$$\varphi(t) = u_5(t)h(t-5) - u_{20}(t)h(t-20), \quad \text{onde}$$

$$h(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-t/4}\cos\left(\sqrt{15}\,t/4\right) - \frac{1}{2\sqrt{15}}e^{-t/4}\sin\left(\sqrt{15}\,t/4\right)$$

- E o gráfico desta solução é dado abaixo.



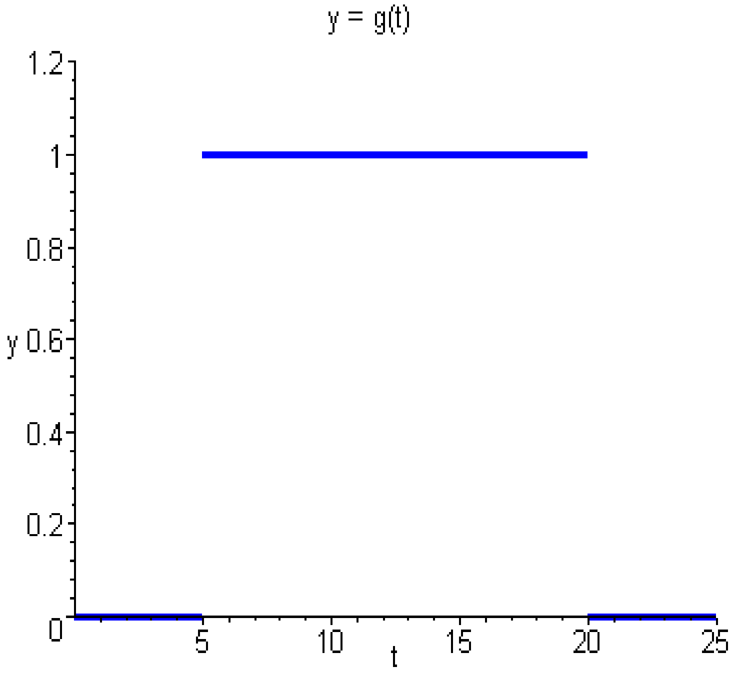
Exemplo 1: Composição dos PVIs (8 de 12)

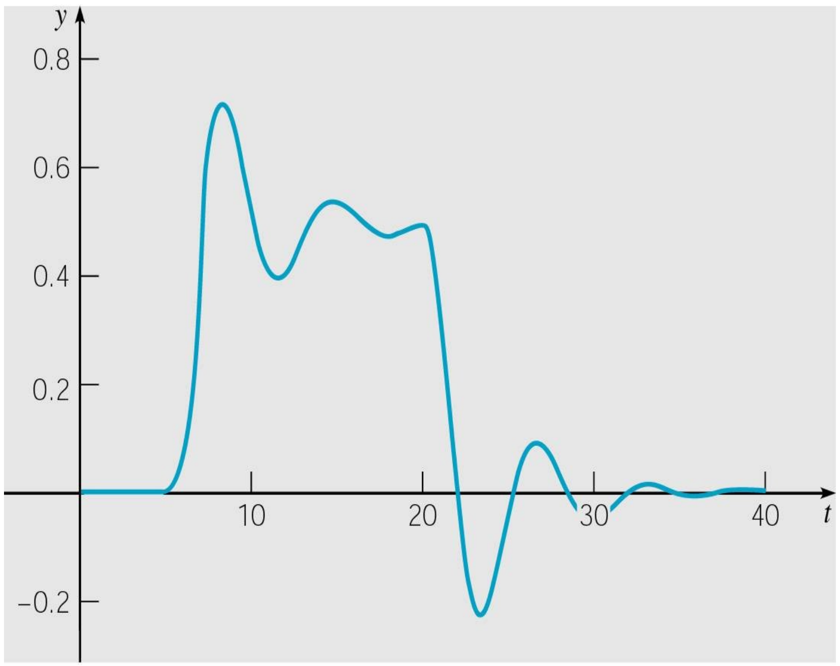
- A solução original do PVI pode ser vista como a composição de três PVIs separados:

$$0 \le t < 5: \quad 2y_1'' + y_1' + 2y_1 = 0, \quad y_1(0) = 0, \; y_1'(0) = 0$$

$$5 < t < 20: \quad 2y_2'' + y_2' + 2y_2 = 1, \quad y_2(5) = 0, \; y_2'(5) = 0$$

$$t > 20: \quad 2y_3'' + y_3' + 2y_3 = 0, \quad y_3(20) = y_2(20), \; y_3'(20) = y_2'(20)$$





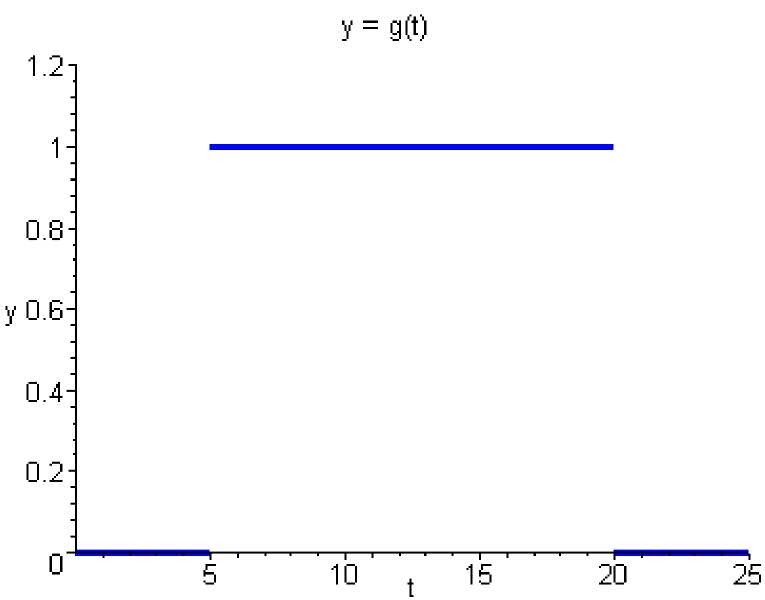
Exemplo 1: Primeiro PVI (9 de 12)

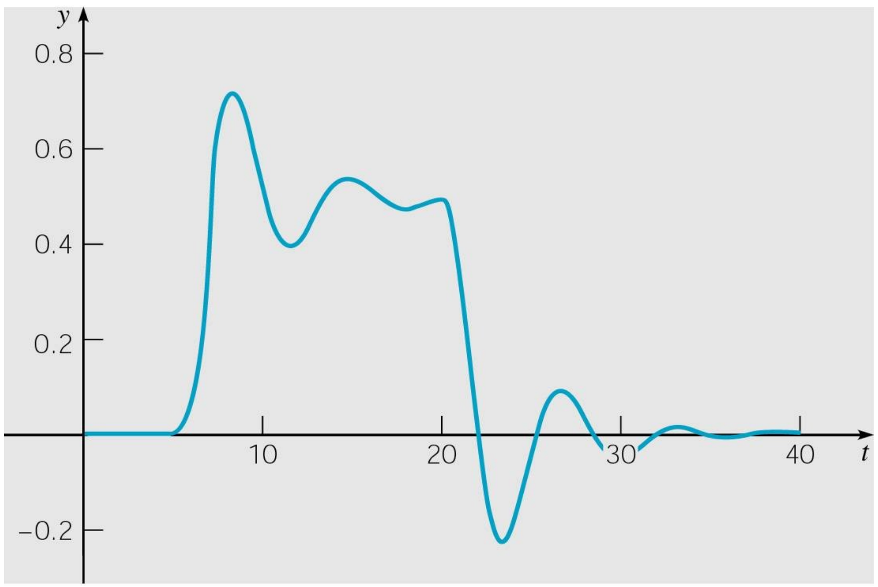
- Considere o primeiro PVI

$$2y_1'' + y_1' + 2y_1 = 0, \quad y_1(0) = 0, \; y_1'(0) = 0; \quad 0 \le t < 5$$

Do ponto de vista físico, o sistema está inicialmente em repouso, e uma vez que não existe nenhuma força externa, ele permanece em repouso.

- Assim a solução sob o intervalo [0, 5) é $y_1 = 0$, e isto pode ser verificado analiticamente.





Exemplo 1: Segundo PVI (10 de 12)

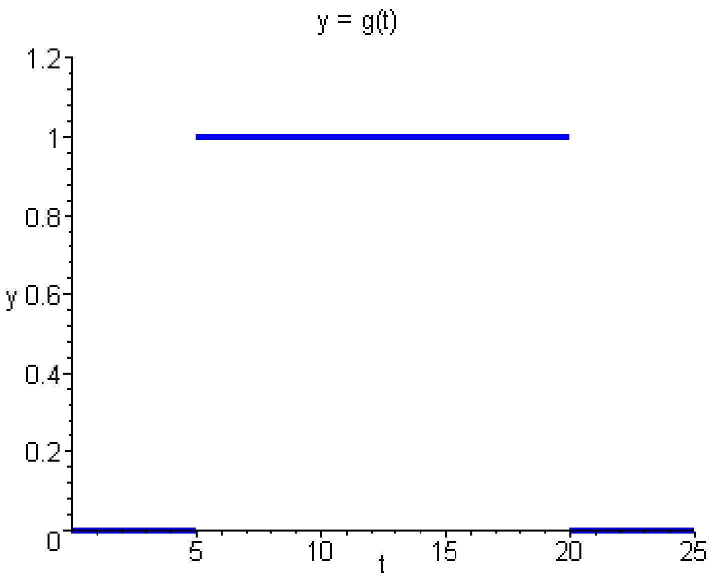
- Considere o segundo PVI

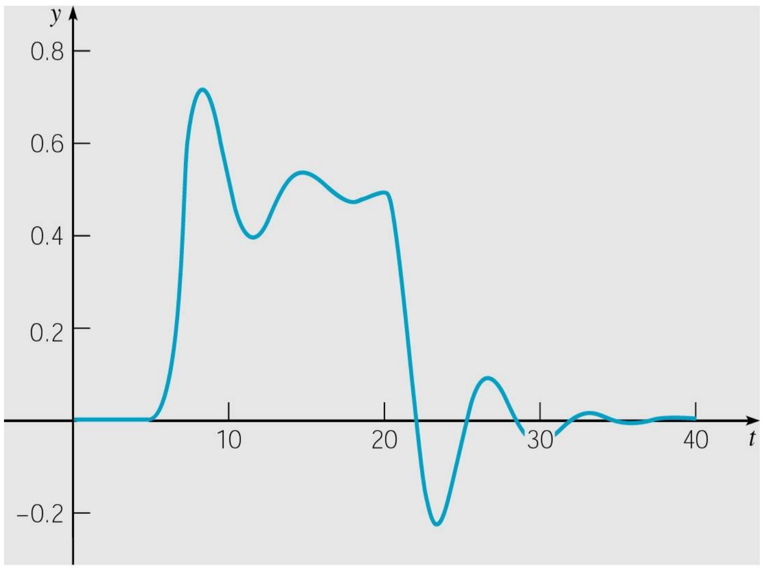
$$2y_2'' + y_2' + 2y_2 = 1, \quad y_2(5) = 0, \; y_2'(5) = 0; \quad 5 < t < 20$$

- Usando métodos do Capítulo 3, a solução é

$$y_2 = c_1 e^{-t/4}\cos\left(\sqrt{15}\,t/4\right) + c_2 e^{-t/4}\sin\left(\sqrt{15}\,t/4\right) + 1/2$$

- Fisicamente, o sistema responde como a soma de uma constante (à resposta a função constante força) e uma oscilação amortecida, durante o intervalo de tempo (5, 20).





Exemplo 1: Terceiro PVI

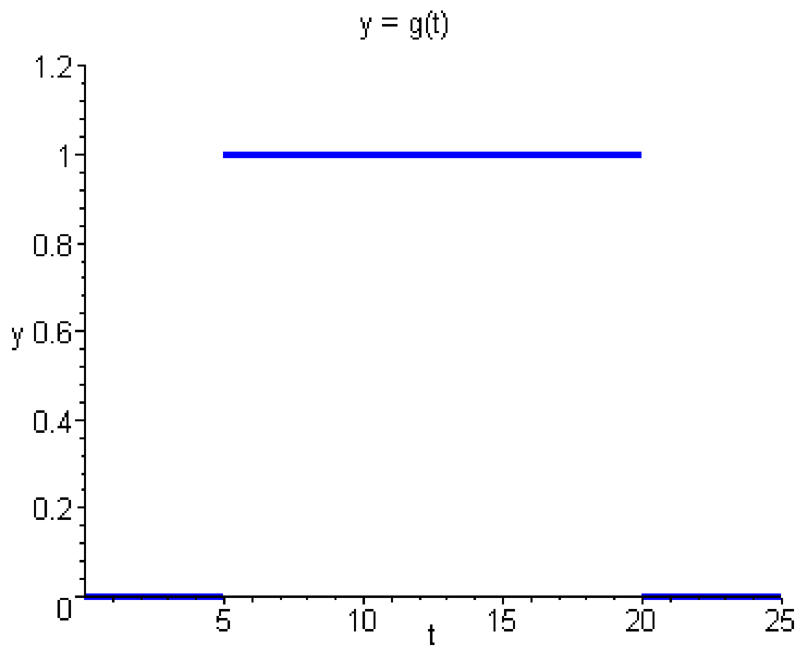
- Considere o terceiro PVI

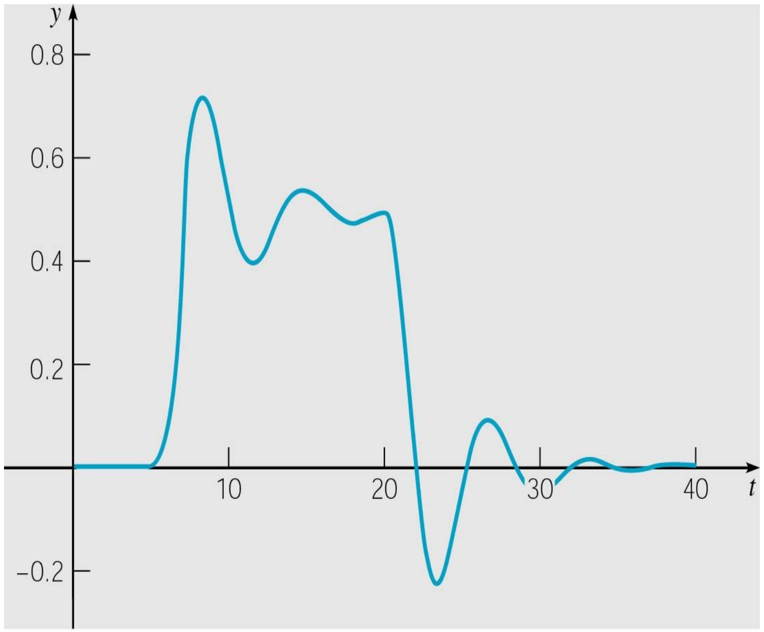
$$2y_3'' + y_3' + 2y_3 = 0, \quad y_3(20) = y_2(20), \; y_3'(20) = y_2'(20); \quad t > 20$$

- Usando o método do Capítulo 3, a solução é

$$y_3 = c_1 e^{-t/4} \cos\left(\sqrt{15}\,t/4\right) + c_2 e^{-t/4} \sin\left(\sqrt{15}\,t/4\right)$$

- Fisicamente, já que não há forças externas, a resposta é uma oscilação amortecida sobre $y = 0$, para $t > 20$.





Exemplo 1: Suavidade da Solução (12 de 12)

- Nossa Solução é

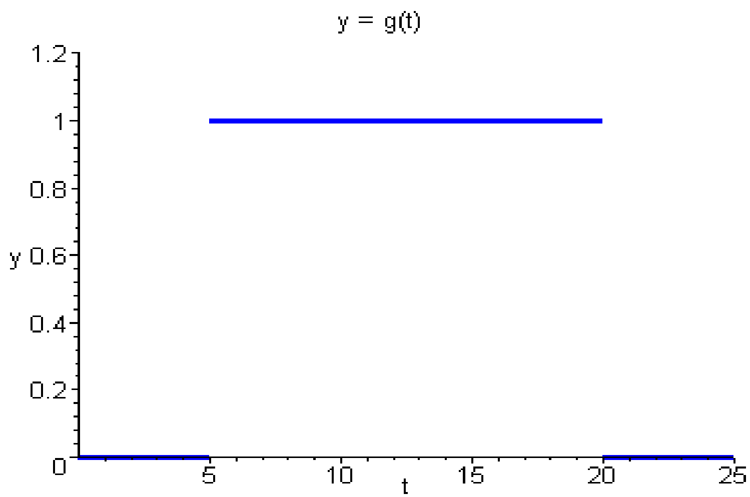
$$\varphi(t) = u_5(t)h(t-5) - u_{20}(t)h(t-20)$$

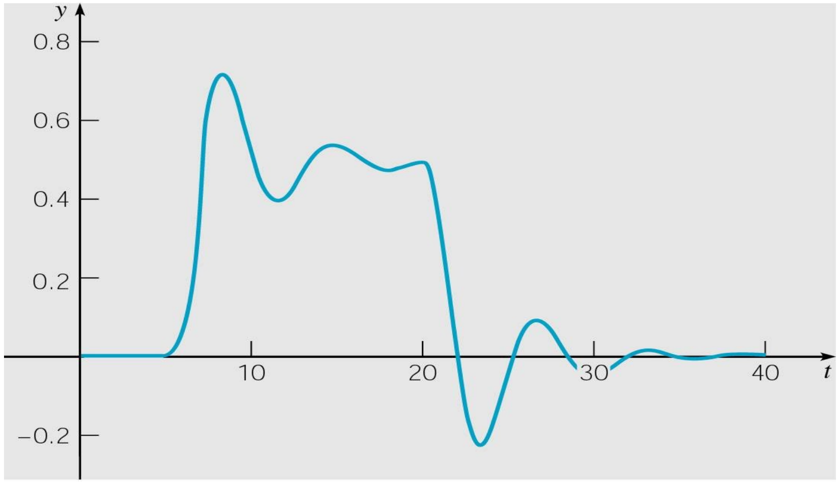
- Podemos mostrar que ϕ e ϕ' são contínuas em $t = 5$ e $t = 20$, e ϕ'' tem um salto de 1/2 em $t = 5$ e um salto de –1/2 em $t = 20$:

$$\lim_{t \to 5^-} \varphi''(t) = 0, \quad \lim_{t \to 5^+} \varphi''(t) = 1/2$$

$$\lim_{t \to 20^-} \varphi''(t) \simeq -.0072, \quad \lim_{t \to 20^+} \varphi''(t) \simeq -.5072$$

- Assim, o salto no termo de força $g(t)$ nestes pontos é equilibrado por um salto no termo, $2y''$, de maior ordem da EDO.





Suavidade da Solução Geral

- Considere uma EDO de segunda ordem linear

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t)$$

onde p e q são contínuas em algum intervalo (a, b) mas g é somente contínua por partes.

- Se $y = \psi(t)$ é uma solução, então ψ e ψ' são contínuas em (a, b) mas ψ'' tem saltos de descontinuidades nos mesmos pontos da g.
- Analogamente para equações de ordem $\boldsymbol{n}$, onde a derivada da solução de ordem $\boldsymbol{n}$ terá saltos de descontinuidades nos mesmos pontos da função força $g(t)$, mas a solução e suas derivadas de ordem menor que $\boldsymbol{n}$ serão contínuas sobre (a, b).

Exemplo 2: PVI (1 de 12)

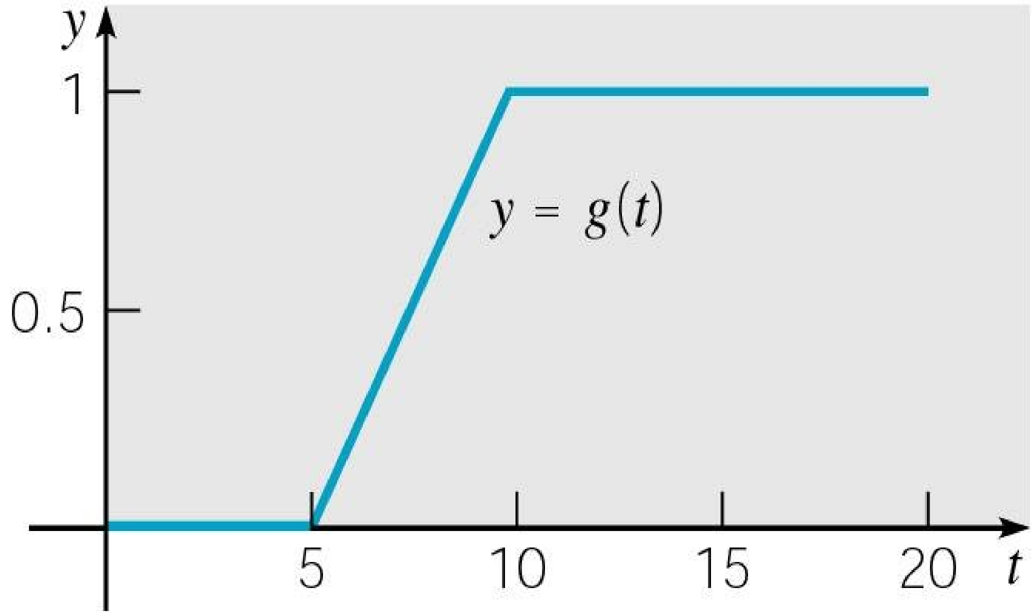
- Encontrar a solução do PVI

$$y'' + 4y = g(t), \; y(0) = 0, \; y'(0) = 0$$

onde

$$g(t) = u_5(t)\frac{t-5}{5} - u_{10}(t)\frac{t-10}{5} = \begin{cases} 0, & 0 \le t < 5 \\ (t-5)/5 & 5 \le t < 10 \\ 1, & t \ge 10 \end{cases}$$

- O gráfico da função força $g(t)$ é dado ao lado, e é conhecido como rampa de carga.



$$y'' + 4y = u_5(t)\frac{t-5}{5} - u_{10}(t)\frac{t-10}{5}, \quad y(0)=0, \; y'(0)=0$$

Exemplo 2: Transformada de Laplace (2 de 12)

- Assumindo que esta EDO possui solução $y = \phi(t)$ e que $\phi'(t)$ e $\phi''(t)$ satisfaz as condições do Corolário 6.2.2. Então

$$L\{y''\} + 4L\{y\} = \left[L\{u_5(t)(t-5)\}\right]/5 - \left[L\{u_{10}(t)(t-10)\}\right]/5$$

ou

$$\left[s^2 L\{y\} - sy(0) - y'(0)\right] + 4L\{y\} = \frac{e^{-5s} - e^{-10s}}{5s^2}$$

- Fazendo $Y(s) = L\{y\}$, e substituindo as condições inicial,

$$\left(s^2+4\right)Y(s) = \left(e^{-5s} - e^{-10s}\right)/5s^2$$

- Assim

$$Y(s) = \frac{\left(e^{-5s} - e^{-10s}\right)}{5s^2\left(s^2+4\right)}$$

Exemplo 2: Fatorando $Y(s)$

- Temos

$$Y(s)=\frac{\left(e^{-5s}-e^{-10s}\right)}{5s^2\left(s^2+4\right)}=\frac{e^{-5s}-e^{-10s}}{5}H(s)$$

onde

$$H(s)=\frac{1}{s^2\left(s^2+4\right)}$$

- Tomando $h(t) = L^{-1}\{H(s)\}$, então

$$y=\varphi(t)=\frac{1}{5}\left[u_5(t)h(t-5)-u_{10}(t)h(t-10)\right]$$

pelo Teorema 6.3.1.

Exemplo 2: Frações Parciais (4 de 12)

- Reescrevendo $H(s)$, como.

$$H(s)=\frac{1}{s^2\left(s^2+4\right)}=\frac{A}{s}+\frac{B}{s^2}+\frac{Cs+D}{s^2+4}$$

- Esta expansão em frações parciais produz as equações

$$\begin{gathered}(A+C)s^3+(B+D)s^2+4As+4B=1\\ \Rightarrow A=0,\ B=1/4,\ C=0,\ D=-1/4\end{gathered}$$

- Assim

$$H(s)=\frac{1/4}{s^2}-\frac{1/4}{s^2+4}$$

Exemplo 2: Solução (5 de 12)

- Assim

$$H(s) = \frac{1/4}{s^2} - \frac{1/4}{s^2+4}$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{1}{s^2}\right] - \frac{1}{8}\left[\frac{2}{s^2+4}\right]$$

e onde

$$h(t) = L^{-1}\{H(s)\} = \frac{1}{4}t - \frac{1}{8}\sin(2t)$$

- Para $h(t)$ como dado acima, e do nosso resultado já determinado em função de *h(t)*, a solução do PVI é então

$$y = \varphi(t) = \frac{1}{5}\left[u_5(t)h(t-5) - u_{10}(t)h(t-10)\right]$$

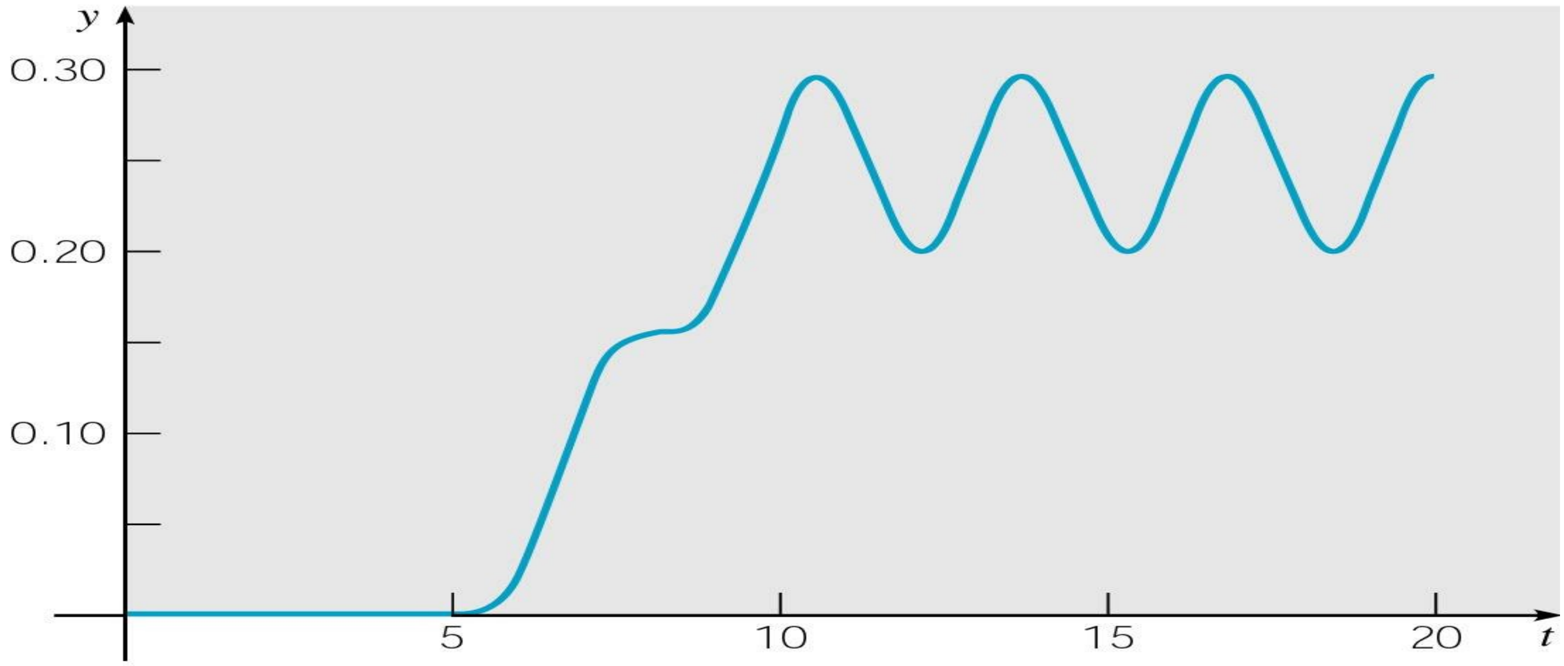
Exemplo 2: Gráfico da Solução

- Assim a solução do PVI é

$$\varphi(t) = \frac{1}{5}\left[u_5(t)h(t-5) - u_{10}(t)h(t-10)\right], \quad \text{onde}$$

$$h(t) = \frac{1}{4}t - \frac{1}{8}\sin(2t)$$

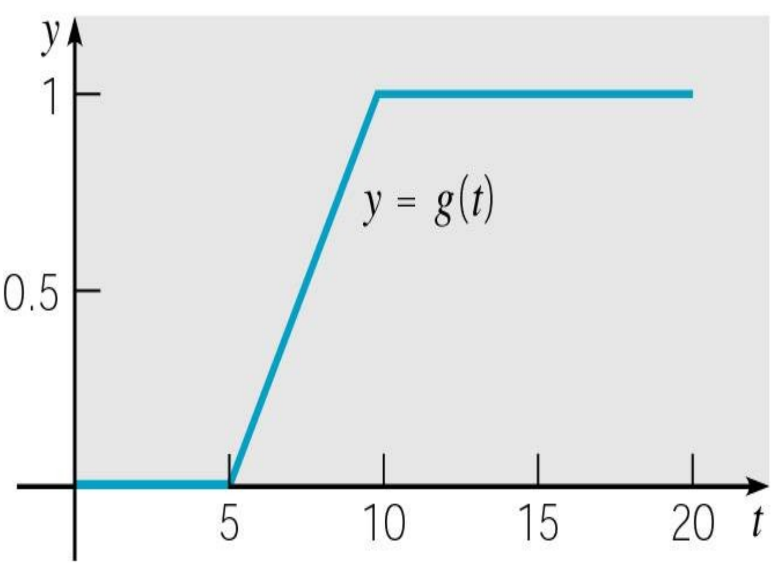
- E o gráfico desta solução é dado abaixo.

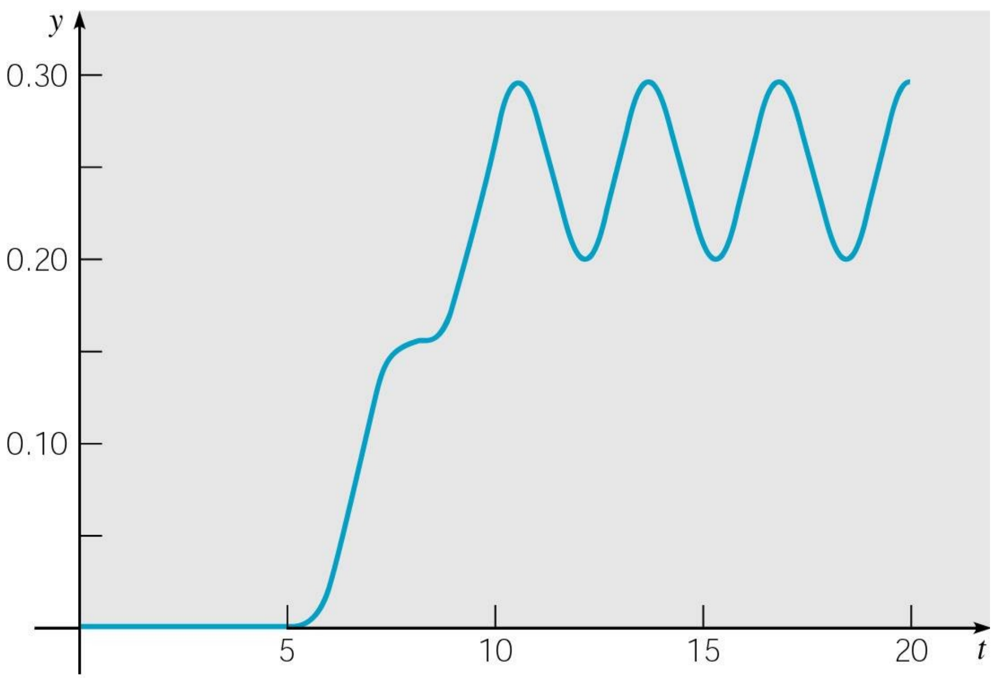


Exemplo 2: Composição em PVIs

- A solução original do PVI pode ser vista como a composição de três PVIs separados:

$$0 \le t < 5: \quad y_1'' + 4y_1 = 0, \qquad y_1(0) = 0, \ y_1'(0) = 0$$
$$5 < t < 10: \quad y_2'' + 4y_2 = (t-5)/5, \qquad y_2(5) = 0, \ y_2'(5) = 0$$
$$t > 10: \quad y_3'' + 4y_3 = 1, \qquad y_3(10) = y_2(10), \ y_3'(10) = y_2'(10)$$





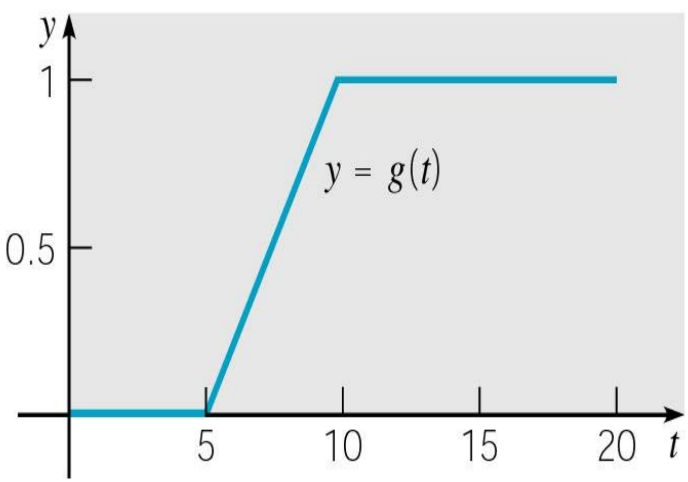
Exemplo 2: Primeiro PVI

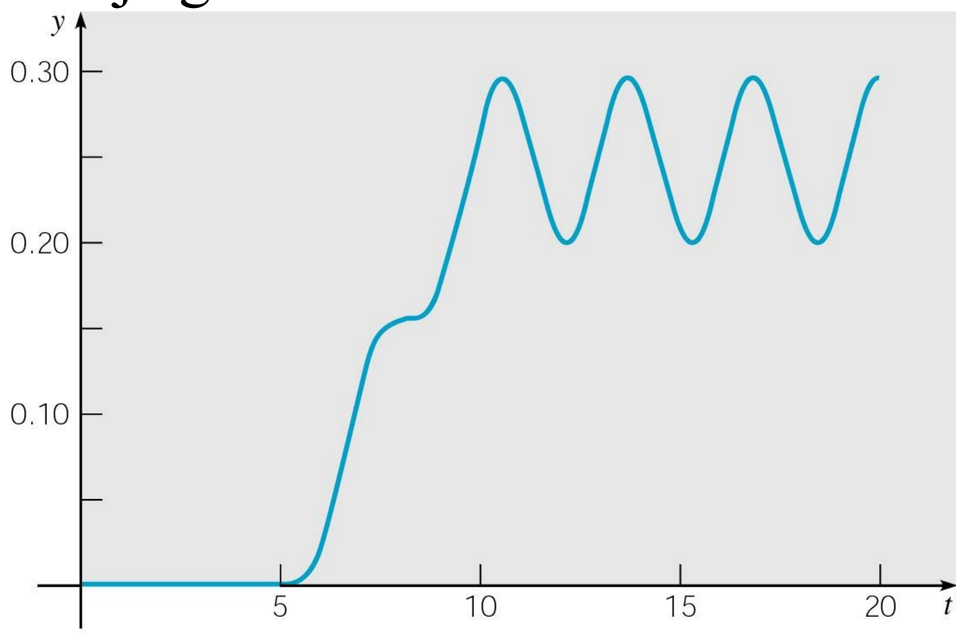
- Considere o primeiro PVI

$$y_1'' + 4y_1 = 0, \quad y_1(0) = 0, \; y_1'(0) = 0\,; \quad 0 \le t < 5$$

Do ponto de vista físico, o sistema está inicialmente em repouso, e uma vez que não existe nenhuma força externa, ele permanece em repouso.

- Assim a solução sob o intervalo [0, 5) é $y_1 = 0$, e isto pode ser verificado analiticamente. Veja gráficos abaixo.





Exemplo 2: Segundo PVI (9 de 12)

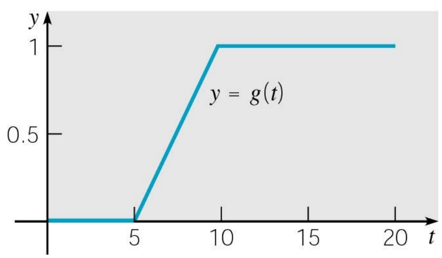
- Considere o segundo PVI

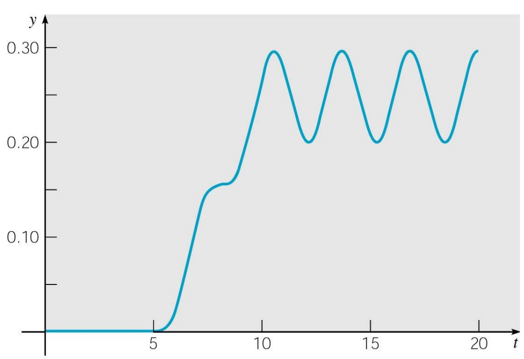
$$y_2'' + 4y_2 = (t-5)/5, \quad y_2(5) = 0, \ y_2'(5) = 0; \quad 5 < t < 10$$

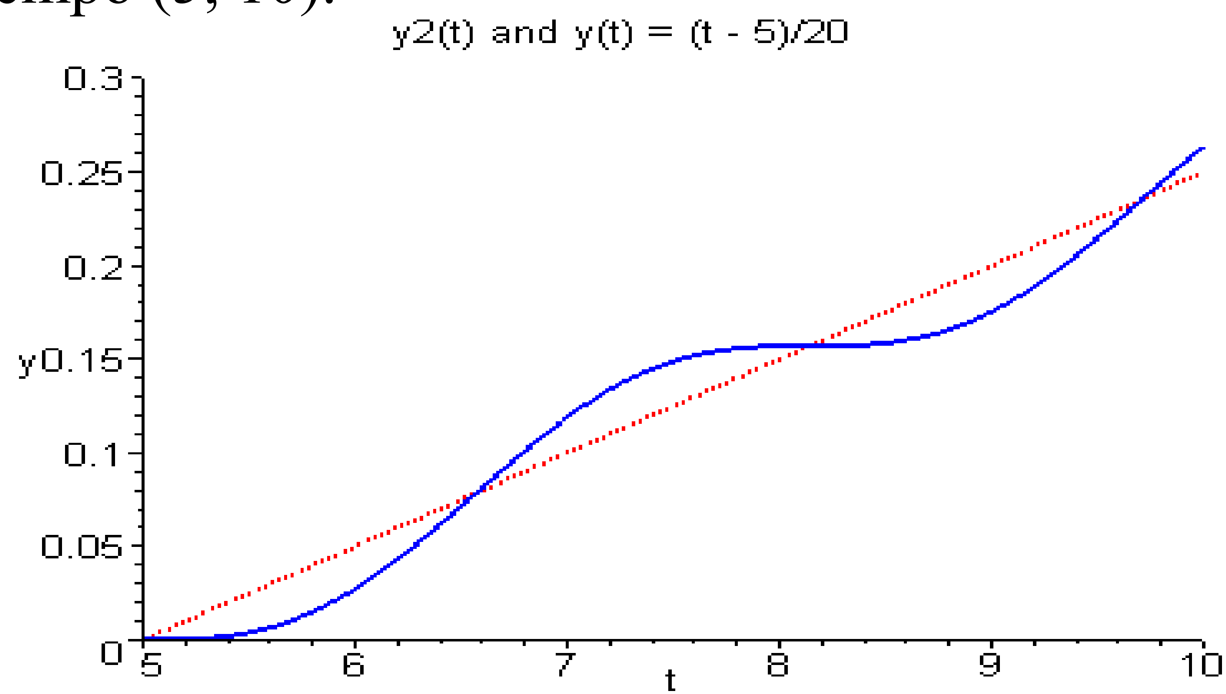
- Usando métodos do Capítulo 3, a solução é da forma

$$y_2 = c_1 \cos(2t) + c_2 \sin(2t) + t/20 - 1/4$$

- Assim a solução é uma oscilação sobre a reta $(t - 5)/20$, sob o intervalo de de tempo (5, 10).







Exemplo 2: Terceiro PVI (10 de 12)

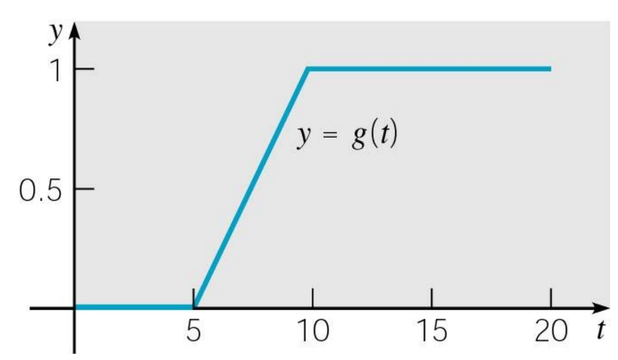
- Considere o terceiro PVI

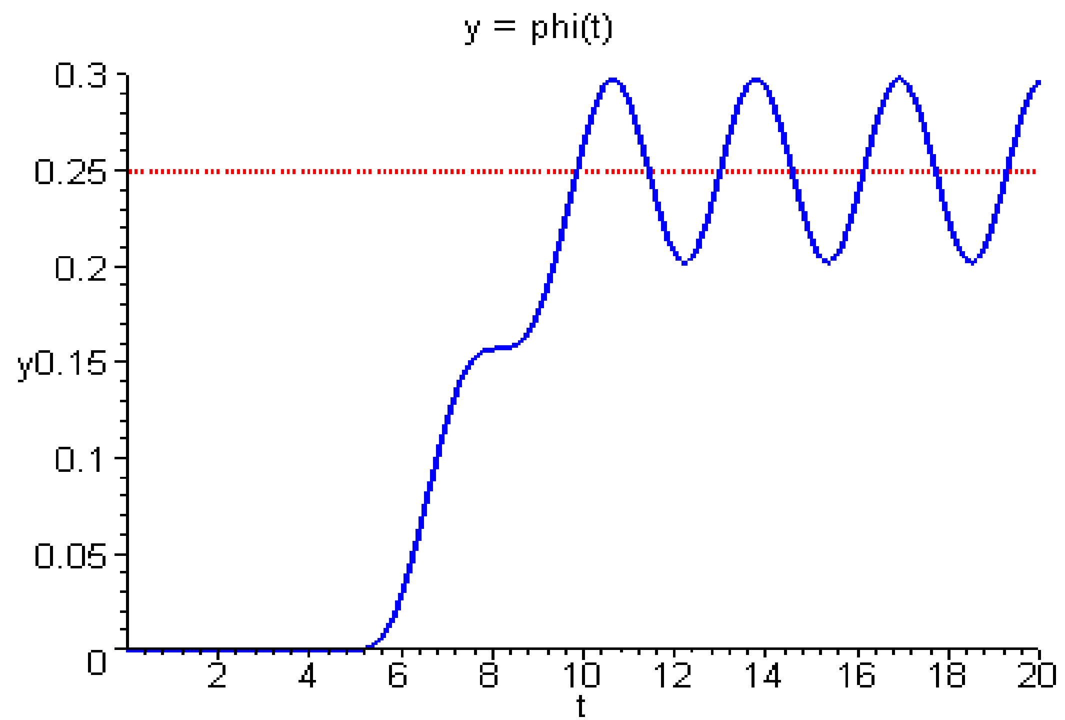
$$y_3'' + 4y_3 = 1, \quad y_3(10) = y_2(10), \; y_3'(10) = y_2'(10); \quad t > 10$$

- Usando métodos do capítulo 3, a solução é da forma

$$y_3 = c_1 \cos(2t) + c_2 \sin(2t) + 1/4$$

- Assim a solução é uma oscilação sobre $y = 1/4$, para $t > 10$.



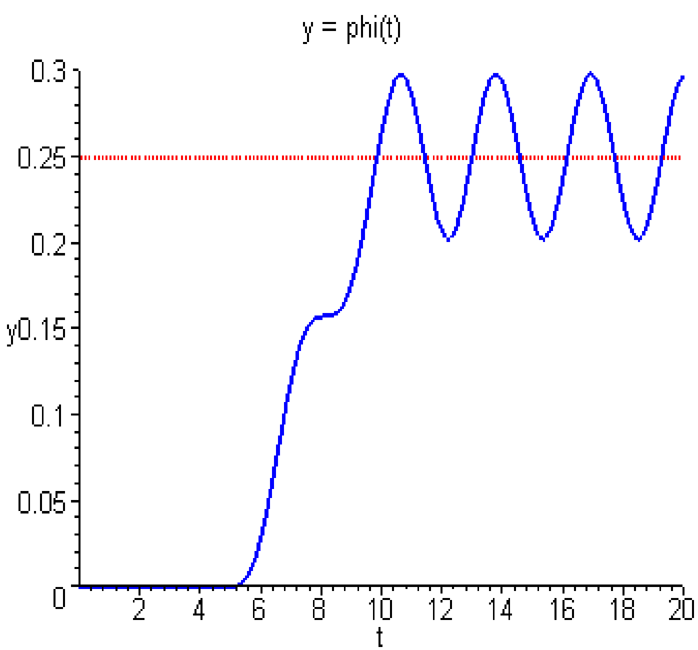


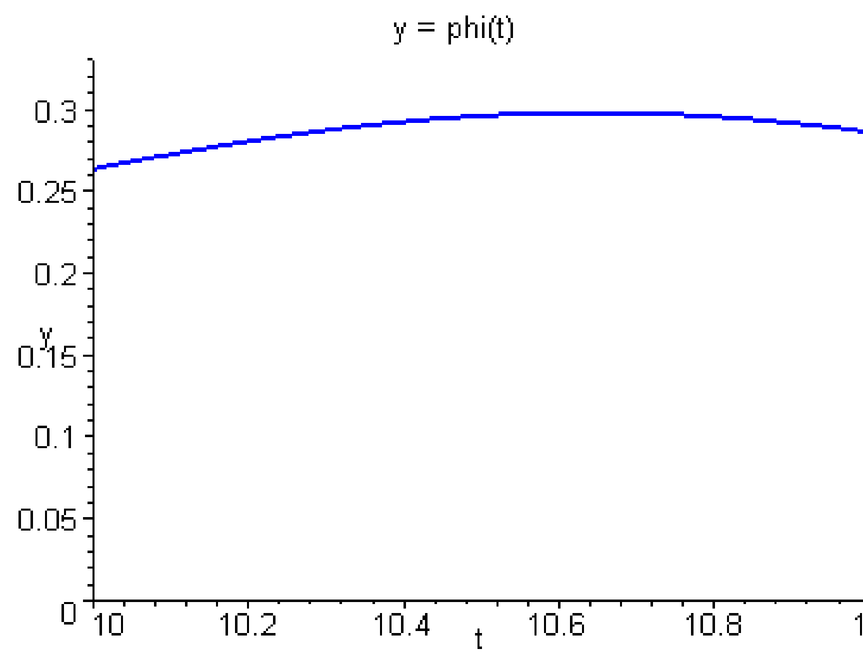
Exemplo 2: Amplitude (11 de 12)

- Portanto a solução do PVI é

$$y=\varphi(t)=\frac{1}{5}\left[u_5(t)h(t-5)-u_{10}(t)h(t-10)\right], \quad h(t)=\frac{1}{4}t-\frac{1}{8}\sin(2t)$$

- Para encontrar a amplitude oscilatória do estado estácionário, devemos localizar um ponto de máximo ou mínimo para $t > 10$.
- Resolvendo $y' = 0$, o primeiro máximo é (10.642, 0.2979).
- Assim a amplitude da oscilação é aprox. 0.0479.



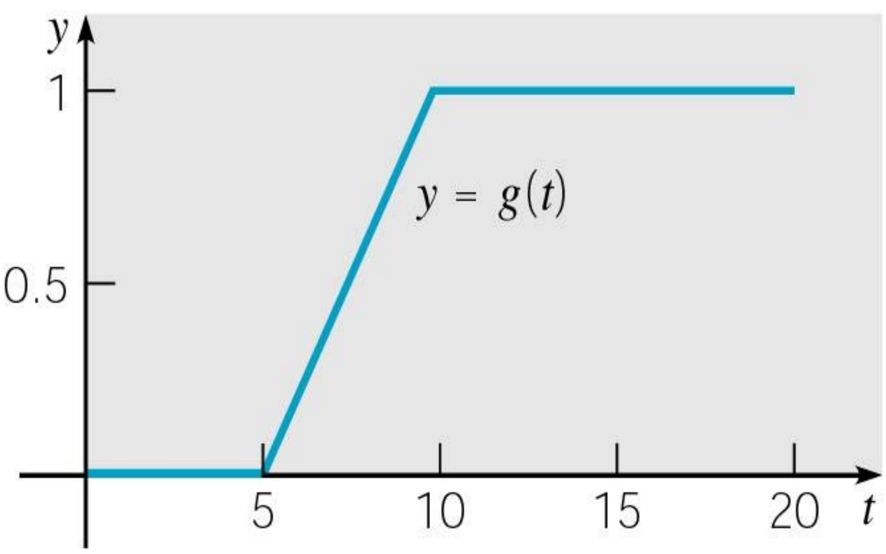


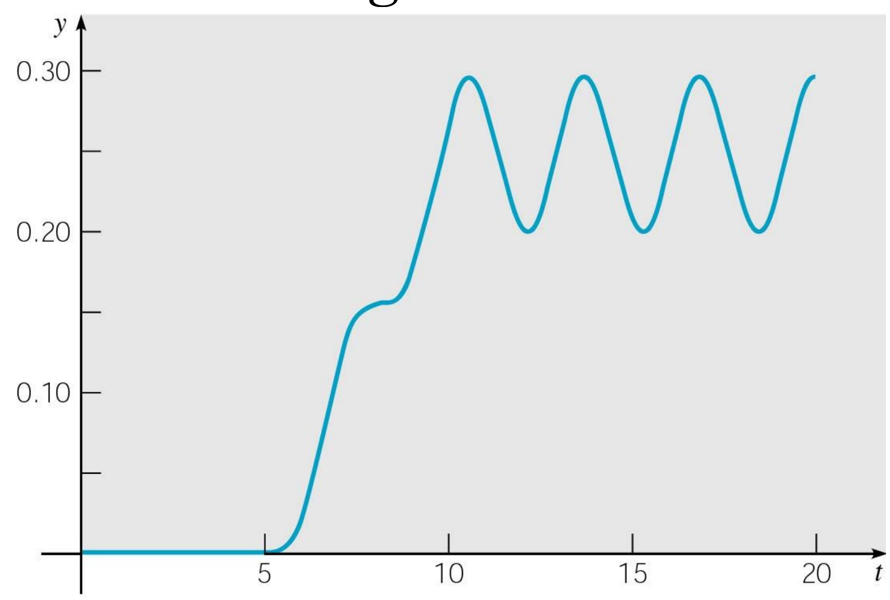
Exemplo 2: Suavidade da Solução (12 de 12)

- Nossa solução é

$$y=\varphi(t)=\frac{1}{5}\left[u_5(t)h(t-5)-u_{10}(t)h(t-10)\right], \quad h(t)=\frac{1}{4}t-\frac{1}{8}\sin(2t)$$

- Neste exemplo, a função força g é contínua mas g' é descontínua em $t = 5$ e $t = 10$.
- Segue que ϕ e sua primeria e segunda derivadas são contínuas em toda parte, mas ϕ''' possui descontinuidade em $t = 5$ e $t = 10$ que são os mesmos pontos de descontinuidade de g' em $t = 5$ e $t = 10$.





6.5: Função Impulso

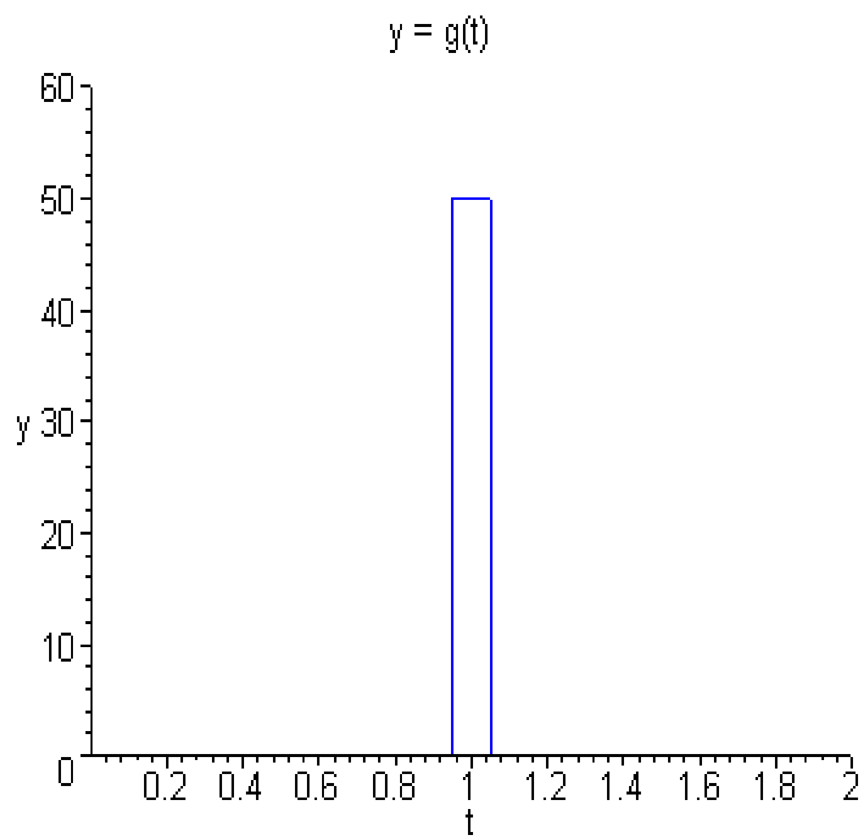
- Em algumas aplicações, é necessário tratar fenômenos de natureza impulsiva.
- Por exemplo, um circuito elétrico ou sistema mecânico sujeitos a uma voltagem ou força $g(t)$ de grande magnitude que agem em um período curto de tempo t_0. Tais problemas levam a equação diferencial da forma

$$ay'' + by' + cy = g(t),$$

onde

$$g(t) = \begin{cases} K, & t_0 - \tau < t < t_0 + \tau \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

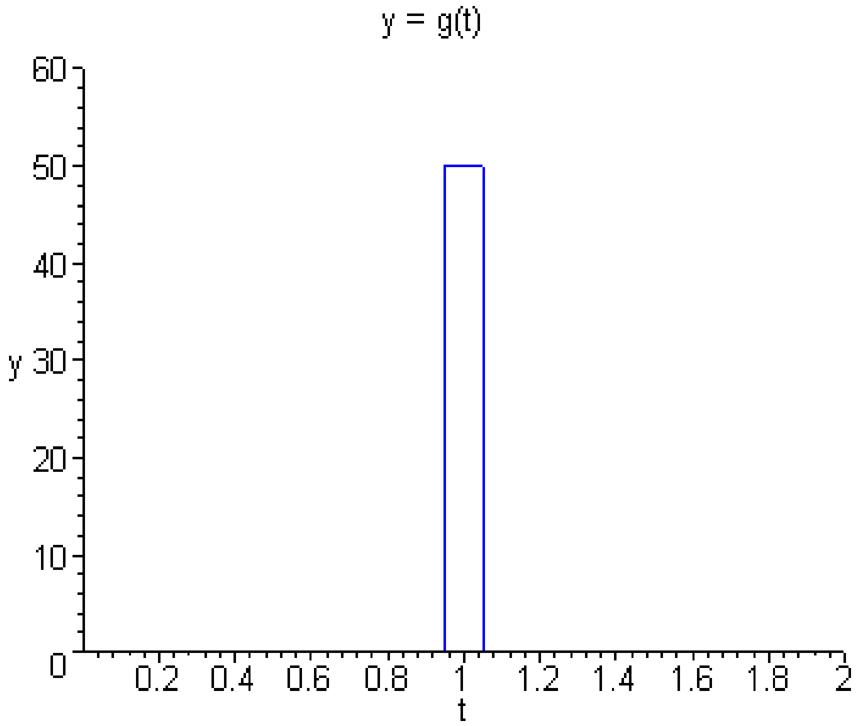
e $\tau > 0$ é pequeno e $K > 0$ grande.



Medindo Impulso

- Em um sistema mecânico, onde $g(t)$ é uma força, o total de **impulso** desta força é medida pela integral

$$I(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\,dt = \int_{t_0-\tau}^{t_0+\tau} g(t)\,dt$$



- Note que se $g(t)$ tem a forma

$$g(t) = \begin{cases} c, & t_0 - \tau < t < t_0 + \tau \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Então

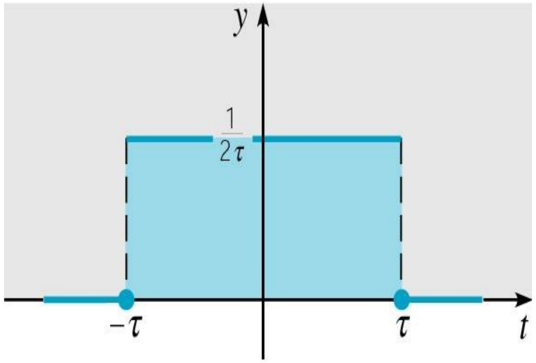
$$I(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\,dt = \int_{t_0-\tau}^{t_0+\tau} g(t)\,dt = 2\tau c, \quad \tau > 0$$

- Em particular, se $c = 1/(2\tau)$, então $I(\tau) = 1$ (independente de τ).

Função Impulso Unitário

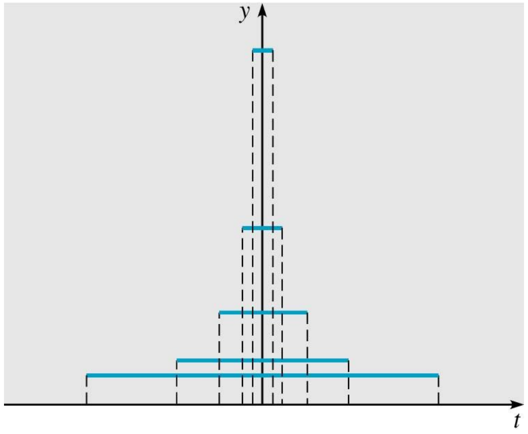
- Suponha a função força $d_\tau(t)$ tenha a forma

$$d_\tau(t) = \begin{cases} 1/2\tau, & -\tau < t < \tau \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$



- Então como já vimos, $I(\tau) = 1$.

- Queremos que $d_\tau(t)$ aja em intervalos de tempo cada vez mais curtos (i.e., $\tau \to 0$). Veja gráfico.



- Note que $d_\tau(t)$ fica mais alto e mais estreito com $\tau \to 0$. Assim para $t \neq 0$, temos

$$\lim_{\tau \to 0} d_\tau(t) = 0, \text{ e } \lim_{\tau \to 0} I(\tau) = 1$$

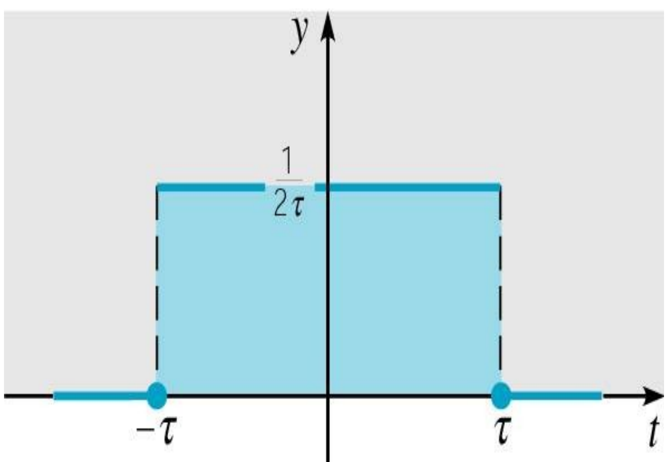
Função Delta de Dirac

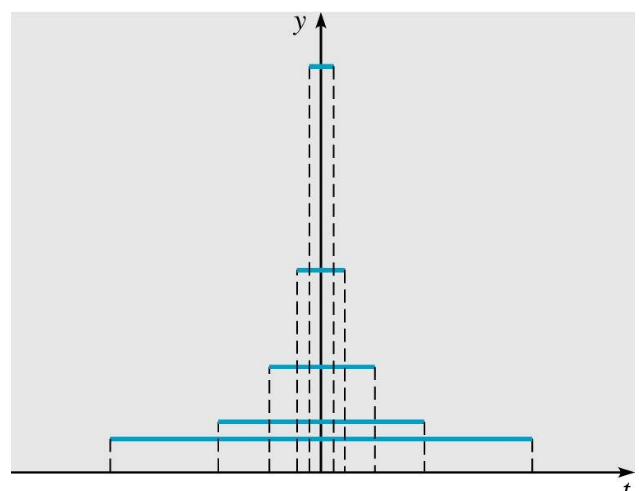
- Assim para $t \neq 0$, temos $\lim_{\tau \to 0} d_\tau(t) = 0$, e $\lim_{\tau \to 0} I(\tau) = 1$
- A **Função impulso unitário** δ é definida com as propriedades

$$\delta(t) = 0 \text{ para } t \neq 0, \text{ e } \int \delta(t)\,dt = 1$$

- A função impulso unitário é um exemplo de uma função generalizada e é usualmente chamada de a **função dela de Dirac**.
- Em geral, para um impulso unitário em um ponto arbitrário t_0,

$$\delta(t - t_0) = 0 \text{ para } t \neq t_0, \text{ e } \int \delta(t - t_0)\,dt = 1$$





Transformada de Laplace de δ

- A transformada de Laplace de δ é definida por

$$L\left\{\delta\left(t-t_0\right)\right\}=\lim_{\tau\to 0} L\left\{d_\tau\left(t-t_0\right)\right\},\quad t_0>0$$

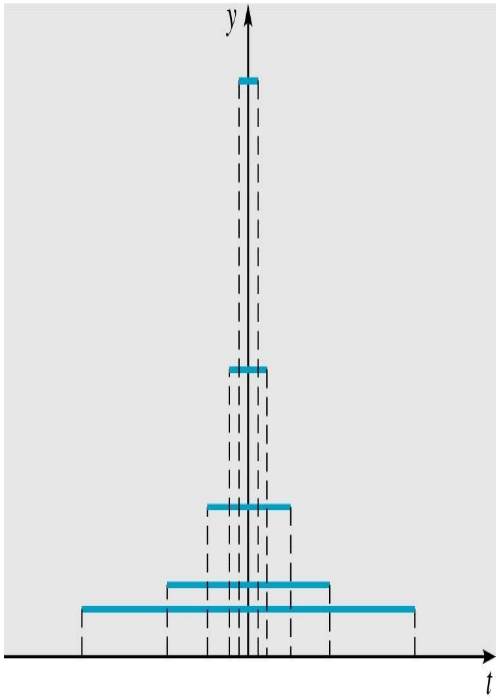
e assim

$$L\left\{\delta\left(t-t_0\right)\right\}=\lim_{\tau\to 0}\int_0^\infty e^{-st}d_\tau\left(t-t_0\right)dt=\lim_{\tau\to 0}\frac{1}{2\tau}\int_{t_0-\tau}^{t_0+\tau}e^{-st}dt$$

$$=\lim_{\tau\to 0}\frac{-e^{-st}}{2s\tau}\Big|_{t_0-\tau}^{t_0+\tau}=\lim_{\tau\to 0}\frac{1}{2s\tau}\left[-e^{-s\left(t_0+\tau\right)}+e^{-s\left(t_0-\tau\right)}\right]$$

$$=\lim_{\tau\to 0}\frac{e^{-st_0}}{s\tau}\left[\frac{e^{s\tau}-e^{-s\tau}}{2}\right]=e^{-st_0}\left[\lim_{\tau\to 0}\frac{\sinh\left(s\tau\right)}{s\tau}\right]$$

$$=e^{-st_0}\left[\lim_{\tau\to 0}\frac{s\cosh\left(s\tau\right)}{s}\right]=e^{-st_0}$$



Transformada de Laplace de δ

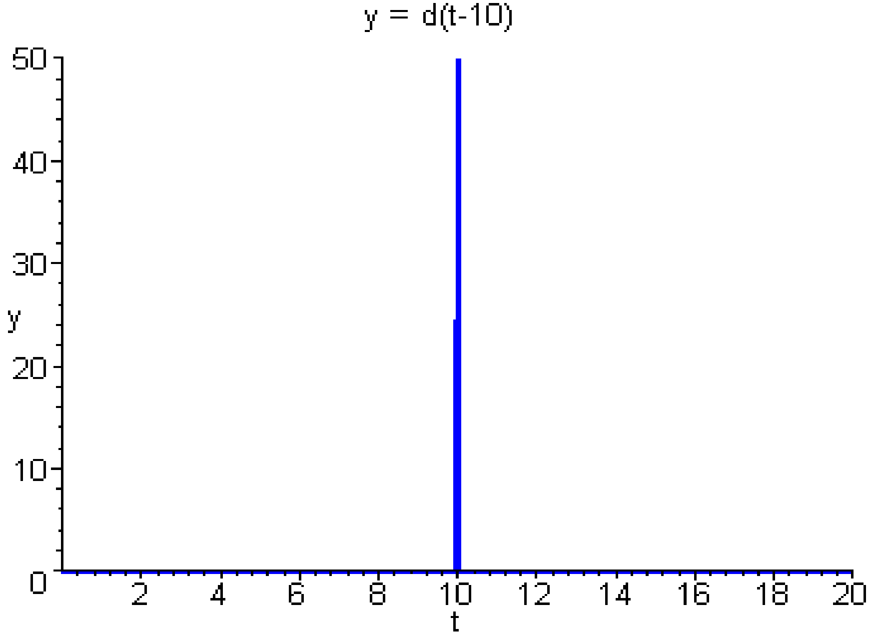
- Assim a Transformada de Laplace de δ é

$$L\{\delta\,(t - t_0)\} = e^{-st_0},\ \ t_0 > 0$$

- Para a Transformada de Laplace de δ em $t_0 = 0$, tome limites da seguinte forma:

$$L\{\delta(t)\} = \lim_{t_0 \to 0} L\{d_\tau(t - t_0)\} = \lim_{\tau_0 \to 0} e^{-st_0} = 1$$

- Por exemplo, quando $t_0 = 10$, temos $L\{\delta(t-10)\} = e^{-10s}$.



Produto de Funções Contínuas por δ

- O produto da função delta e uma função contínua f pode ser integrável, usando o teorema do valor médio para integrais:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0) f(t)\,dt &= \lim_{\tau \to 0} \int_{-\infty}^{\infty} d_\tau(t-t_0) f(t)\,dt \\
&= \lim_{\tau \to 0} \frac{1}{2\tau} \int_{t_0-\tau}^{t_0+\tau} f(t)\,dt \\
&= \lim_{\tau \to 0} \frac{1}{2\tau} \left[2\tau\ f(t^*)\right] \qquad (\text{where } t_0 - \tau < t^* < t_0 + \tau) \\
&= \lim_{\tau \to 0} f(t^*) \\
&= f(t_0)
\end{aligned}$$

- Assim

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0) f(t)\,dt = f(t_0)$$

Exemplo 1: PVI (1 de 3)

- Considere a solução do PVI

$$2y'' + y' + 2y = \delta(t-7), \quad y(0) = 0, \; y'(0) = 0$$

- Então

$$2L\{y''\} + L\{y'\} + 2L\{y\} = L\{\delta(t-7)\}$$

- Seja $Y(s) = L\{y\}$,

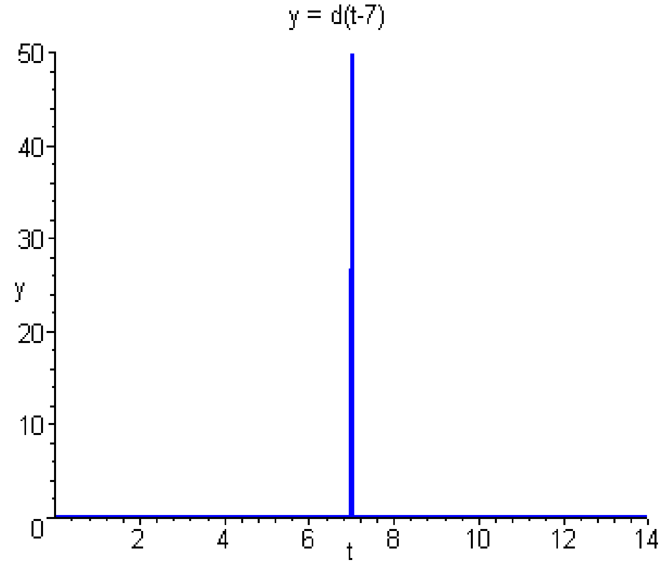
$$\left[2s^2 Y(s) - 2sy(0) - 2y'(0)\right] + \left[sY(s) - y(0)\right] + 2Y(s) = e^{-7s}$$

- Substituindo as condições iniciais, obtemos

$$\left(2s^2 + s + 2\right) Y(s) = e^{-7s}$$

ou

$$Y(s) = \frac{e^{-7s}}{2s^2 + s + 2}$$



Exemplo 1: Solução (2 de 3)

- Nos temos

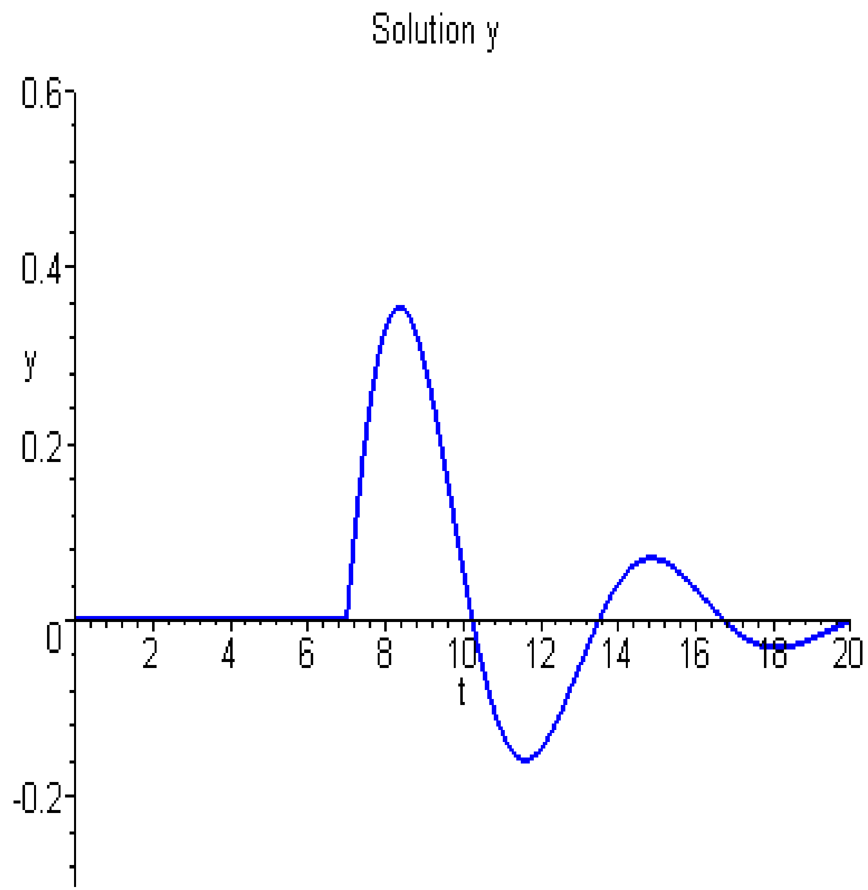
$$Y(s) = \frac{e^{-7s}}{2s^2 + s + 2}$$

- A expansão em frações parcial de $Y(s)$ nos dá

$$Y(s) = \frac{e^{-7s}}{2\sqrt{15}}\left[\frac{\sqrt{15}/4}{(s + 1/4)^2 + 15/16}\right]$$

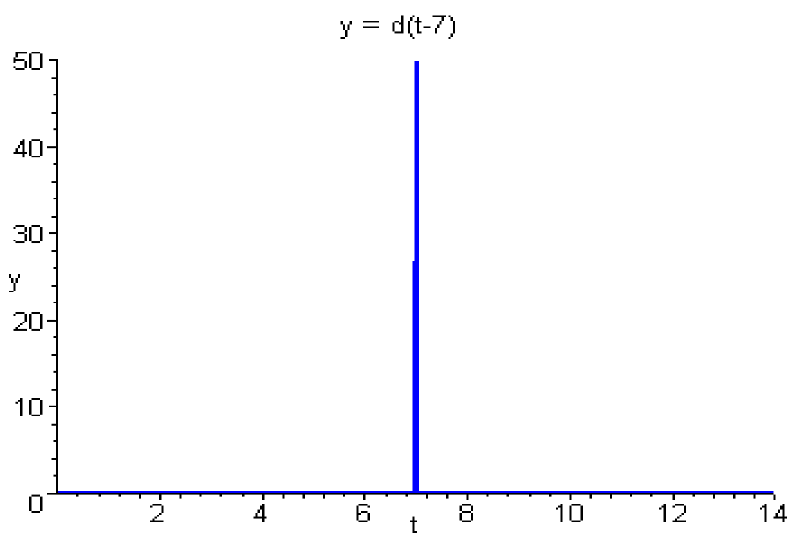
e portanto

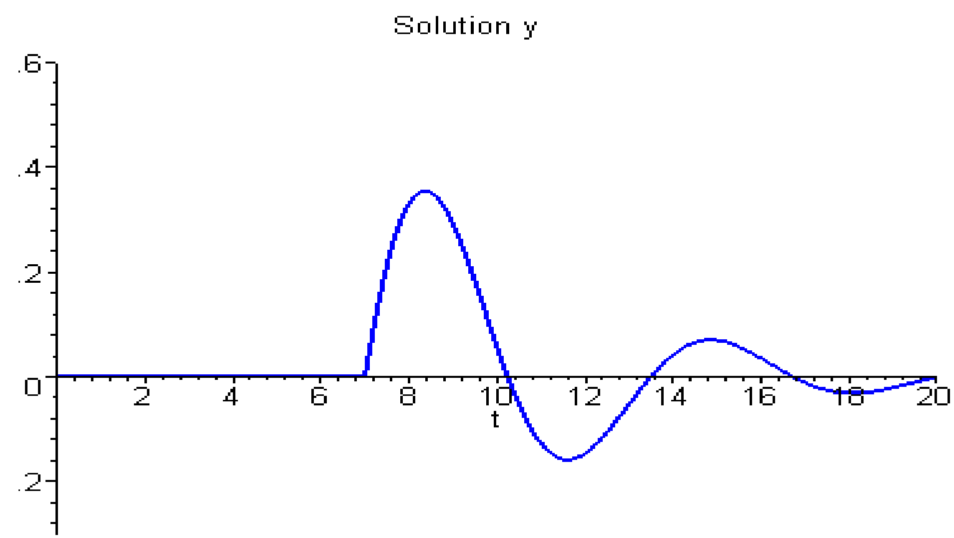
$$y(t) = \frac{1}{2\sqrt{15}} u_7(t) e^{-(t-7)/4} \sin\frac{\sqrt{15}}{4}(t-7)$$



Exemplo 1: Comentários da Solução (3 of 3)

- Como as condições iniciais em t=0 são homogêneas e não existe excitação externa até $t = 7$, não há resposta no intervalo $(0, 7)$.
- O impulso em $t = 7$ produz uma oscilação que decai, mas persiste indefinidamente.
- A Resposta é contínua em $t = 7$, apesar da singularidade do termo não homogêneo. No entanto y' tem uma descontinuidade em salto neste ponto $t = 7$, y'' tem uma descontinuidade infinita ai. Assim singularidade da função força é balanceada por uma singularidade correspondente com em y''.





6.6: A Convolução

- Algumas vezes é possível escrever a Transformada de Laplace $H(s)$ como $H(s) = F(s)G(s)$, onde $F(s)$ e $G(s)$ são as transformadas de funções conhecidas f e g, respectivamente.
- Neste caso podemos esperar que $H(s)$ seja a transformada do produto de f e g. Isto é,

$$H(s) = F(s)G(s) = L\{f\}L\{g\} = L\{f\,g\}?$$

- Veremos a seguir um exemplo que mostra que esta igualdade não é verdadeira, a transformada de Laplace não comuta com a multiplicação usual.
- Nesta seção estudaremos a **convolução** de f e g, o qual pode ser visto como um produto generalizado, e para o qual a Transformada de Laplace faz comutar.

Exemplo 1

- Sejam $f(t) = 1$ e $g(t) = \sin(t)$. Calculando a Transformada de Laplace de f e g

$$L\{f(t)\} = L\{1\} = \frac{1}{s}, \quad L\{g(t)\} = L\{\sin t\} = \frac{1}{s^2+1}$$

- Assim

$$L\{f(t)g(t)\} = L\{\sin t\} = \frac{1}{s^2+1}$$

e

$$L\{f(t)\}\,L\{g(t)\} = \frac{1}{s\left(s^2+1\right)}$$

- Portanto para estas funções não vale a igualdade

$$L\{f(t)g(t)\} \neq L\{f(t)\}\,L\{g(t)\}$$

Teorema 6.6.1

- Suponham $F(s) = L\{f(t)\}$ e $G(s) = L\{g(t)\}$ ambas existem para $s > a \geq 0$. Então $H(s) = F(s)G(s) = L\{h(t)\}$ para $s > a$, onde

$$h(t) = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$$

- A função $h(t)$ é chamada como a **convolução** de f e g e a integral acima são conhecidas como **integrais de convolução**.
- Note que a igualdade das duas integrais de convolução pode ser obtidas fazendo a substituição $u = t - \tau$.
- A integral de convolução é uma definição de um "produto generalizado" e pode ser escrito como $h(t) = (f*g)(t)$.

$f*g \quad = \quad g*f$ (comutatividade)

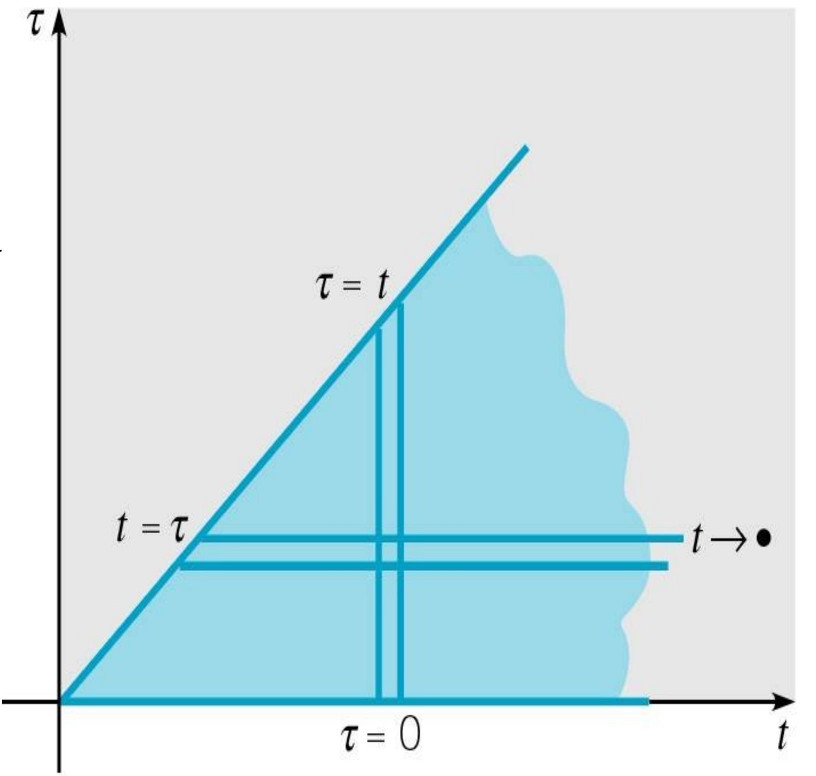
$f*(g1+g2) = \quad f*g1 + f*g2$ (distributividade)

$(f*g)*h) \quad = \quad f*(g*h)$ (associatividade)

Ainda temos, $f*0=0*f=0$; $(f*1)(t) \neq f(t)$ e pode ser que $f*f<0$.

Teorema 6.6.1 Ideia da prova

$$
\begin{aligned}
F(s)G(s) &= \int_0^\infty e^{-su} f(u)du \int_0^\infty e^{-s\tau} g(\tau)d\tau \\
&= \int_0^\infty g(\tau)d\tau \int_0^\infty e^{-s(\tau+u)} f(u)du \\
&= \int_0^\infty g(\tau)d\tau \int_\tau^\infty e^{-st} f(t-\tau)dt \qquad (t = \tau + u) \\
&= \int_0^\infty \int_\tau^\infty e^{-st} g(\tau) f(t-\tau)dtd\tau \\
&= \int_0^\infty \int_0^t e^{-st} f(t-\tau)g(\tau)d\tau\ dt \\
&= \int_0^\infty e^{-st}\left[\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau\right]dt \\
&= L\{h(t)\}
\end{aligned}
$$



Exemplo 2

- Encontre a Transformada de Laplace da função h abaixo.

$$h(t) = \int_0^t (t-\tau)\sin 2t\, d\tau$$

- Solução: Note que $f(t) = t$ e $g(t) = \sin 2t$, com

$$F(s) = L\{f(t)\} = L\{t\} = \frac{1}{s^2}$$

$$G(s) = L\{g(t)\} = L\{\sin 2\text{t}\} = \frac{2}{s^2 + 4}$$

- Assim pelo Teorema 6.6.1,

$$L\{h(t)\} = H(s) = F(s)G(s) = \frac{2}{s^2(s^2 + 4)}$$

Exemplo 3: Encontre a Transformada Inversa (1 de 2)

- Encontre Transformada de Laplace inversa de $H(s)$, abaixo.

$$H(s)=\frac{2}{s^2(s-2)}$$

- Solução: Seja $F(s) = 2/s^2$ e $G(s) = 1/(s - 2)$, com

$$f(t)=L^{-1}\{F(s)\}=2\mathrm{t}$$
$$g(t)=L^{-1}\{G(s)\}=e^{2\mathrm{t}}$$

- Assim pelo Teorema 6.6.1,

$$L^{-1}\{H(s)\}=h(t)=2\int_0^t (t-\tau)e^{2\tau}d\tau$$

Exemplo 3: Solução $h(t)$ (2 de 2)

- Podemos simplesmente integrar para $h(t)$, como segue.

$$
\begin{aligned}
h(t) &= 2\int_0^t (t-\tau)e^{2\tau}\,d\tau = 2t\int_0^t e^{2\tau}\,d\tau - 2\int_0^t \tau\, e^{2\tau}\,d\tau \\
&= te^{2\tau}\Big|_0^t - \left[\tau\, e^{2\tau}\Big|_0^t - \int_0^t e^{2\tau}\,d\tau\right] \\
&= t\left[e^{2t}-1\right] - \left[t\,e^{2t} - \frac{1}{2}\left[e^{2t}-1\right]\right] \\
&= te^{2t} - t - t\,e^{2t} + \frac{1}{2}e^{2t} - \frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{2}e^{2t} - t - \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

Exemplo 4: PVI (1 de 4)

- Encontre a solução do PVI

$$y'' + 4y = g(t), \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = -1$$

- Solução:

$$L\{y''\} + 4L\{y\} = L\{g(t)\}$$

- ou

$$\left[s^2 L\{y\} - sy(0) - y'(0)\right] + 4L\{y\} = G(s)$$

- Seja $Y(s) = L\{y\}$, e substituindo as condições iniciais,

$$\left(s^2 + 4\right) Y(s) = 3s - 1 + G(s)$$

- Assim

$$Y(s) = \frac{3s-1}{s^2+4} + \frac{G(s)}{s^2+4}$$

Exemplo 4: Solução (2 de 4)

- Temos

$$Y(s) = \frac{3s-1}{s^2+4} + \frac{G(s)}{s^2+4}$$

$$= 3\left[\frac{s}{s^2+4}\right] - \frac{1}{2}\left[\frac{2}{s^2+4}\right] + \frac{1}{2}\left[\frac{2}{s^2+4}\right]G(s)$$

- Assim

$$y(t) = 3\cos 2t - \frac{1}{2}\sin 2t + \frac{1}{2}\int_0^t \sin 2(t-\tau)\,g(\tau)\,d\tau$$

- Noteque se $g(t)$ é dado, então a integral de convolução pode ser calculada.

$$y'' + 4y = g(t), \quad y(0) = 3, \; y'(0) = -1$$

Exemplo 4: Solução da Transformada Laplace (3 de 4)

- Lembrem que a Transformada de Laplace da solução *y é*

$$Y(s) = \frac{3s - 1}{s^2 + 4} + \frac{G(s)}{s^2 + 4} = \Phi(s) + \Psi(s)$$

- Note $\Phi(s)$ depende somente do sistema de coeficientes e das condições iniciais, enquanto $\Psi(s)$ depende somente do sistema de coeficientes e da função força $g(t)$.
- Mas, $\phi(t) = L^{-1}\{\Phi(s)\}$ resolve o PVI homogêneo

$$y'' + 4y = 0, \quad y(0) = 3, \; y'(0) = -1$$

enquanto $\psi(t) = L^{-1}\{\Psi(s)\}$ resolve o PVI não homogêneo

$$y'' + 4y = g(t), \quad y(0) = 0, \; y'(0) = 0$$

Exemplo 4: Função de Transferência (4 de 4)

- Examinando $\Psi(s)$ mais de perto,

$$\Psi(s) = \frac{G(s)}{s^2+4} = H(s)G(s), \text{ onde } H(s) = \frac{1}{s^2+4}$$

- A função $H(s)$ éconhecida como a **função de transferência**, e depende somente do sistema de coeficientes.
- A função $G(s)$ depende somente da excitação externa $g(t)$ aplicada no sistema.
- *Se* $G(s) = 1$, então $g(t) = \delta(t)$ e por isso $h(t) = L^{-1}\{H(s)\}$ resolve solves o PVI não homogêneo

$$y'' + 4y = \delta(t), \quad y(0) = 0, \; y'(0) = 0$$

- Assim $h(t)$ é a resposta do sistema para um impulso unitário aplicado em $t = 0$, e por isso $h(t)$ é chamada de **resposta ao impulso** do sistema.

Problema de entrada-saída (Input-Output) (1 de 3)

- Considere o PVI geral

$$a\,y'' + b\,y' + cy = g(t), \quad y(0) = y_0, \quad y'(0) = y_0'$$

- Este PVI é também chamado de um **Problema input-output**. Os coeficientes *a*, *b*, *c* descreve propriedade físicas de um sistema, e $g(t)$ é um **input** do sistema. Os valores y_0 e y_0' descreve o estado inicial, e a solução *y* é o **output** no tempo *t*.
- Usando a Transformada de Laplace, obtemos

$$a\left[s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0)\right] + b\left[sY(s) - y(0)\right] + cY(s) = G(s)$$

ou

$$Y(s) = \frac{(as+b)\,y_0 + a\,y_0'}{as^2 + bs + c} + \frac{G(s)}{as^2 + bs + c} = \Phi(s) + \Psi(s)$$

$$a\,y'' + b\,y' + cy = g(t),\quad y(0) = y_0,\quad y'(0) = y_0'$$

Solução da Transformada de Laplace (2 de 3)

- Temos

$$Y(s) = \frac{(as+b)\,y_0 + a\,y_0'}{as^2+bs+c} + \frac{G(s)}{as^2+bs+c} = \Phi(s) + \Psi(s)$$

- Como antes, $\Phi(s)$ depende somente do sistema de coeficientes e das condições inicial, enquanto $\Psi(s)$ depende somente do sistema de coeficientes e da função força $g(t)$.
- Mas, $\phi(t) = L^{-1}\{\Phi(s)\}$ resolve o PVI homogêneo

$$a\,y'' + b\,y' + cy = 0,\quad y(0) = y_0,\quad y'(0) = y_0'$$

Enquanto $\psi(t) = L^{-1}\{\Psi(s)\}$ resolve o PVI não homogêneo

$$a\,y'' + b\,y' + cy = g(t),\quad y(0) = 0,\quad y'(0) = 0$$

Função de Transferência (3 de 3)

- Examinando $\Psi(s)$ mais de perto,

$$\Psi(s) = \frac{G(s)}{as^2 + bs + c} = H(s)G(s), \quad \text{onde } H(s) = \frac{1}{as^2 + bs + c}$$

- Como antes, $H(s)$ é a **função de transferência**, e depende somente do sistema de coeficientes, enquanto $G(s)$ depende somente da excitação externa $g(t)$ aplicada no sistema.
- Assim se $G(s) = 1$, então $g(t) = \delta(t)$ e por isso $h(t) = L^{-1}\{H(s)\}$ resolve o PVI não homogêneo

$$a\,y'' + b\,y' + cy = \delta(t), \quad y(0) = 0, \; y'(0) = 0$$

- Assim $h(t)$ é a resposta do sistema para um impulso unitário aplicado em $t = 0$, e por isso $h(t)$ é chamada a **resposta ao impulso** do sistema, com

$$\psi(t) = L^{-1}\{H(s)G(s)\} = \int_0^t h(t-\tau)g(\tau)\,d\tau$$