10.2 Séries e Integrais de Fourier

- Veremos como resolver muitos problemas importantes envolvendo equações diferenciais parciais, desde que possa expressar uma função dada como uma séries infinita de senos e ou cossenos.
- A partir daqui vamos explicar em detalhe como isso pode ser feito.
- Essas séries trigonométricas são chamadas **séries de Fourier;** elas são análogas às séries de Taylor no sentido de que ambos os tipos de séries fornecem um modo de se expressar funções bastante complicadas em termos de certas funções elementares.

Representação de Funções em Séries de Fourier

- Vamos começar com uma série da forma

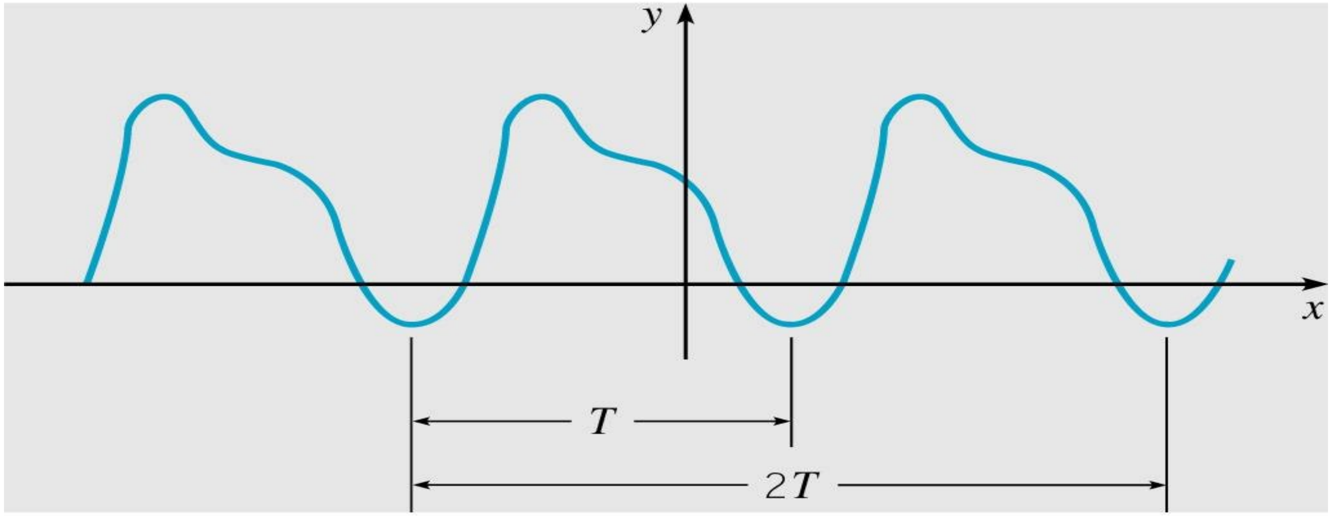
$$\frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \left(a_m \cos \frac{m\pi\ x}{L} + b_m \sin \frac{m\pi\ x}{L} \right)$$

- No conjunto de pontos onde esta série converge, ela define uma função f cujos valores em cada ponto x é a soma da série para aquele valor de x.
- Nesse caso, dizemos que a série acima é a **série de Fourier series** de f.
- Nossos objetivos imediatos são determinar que funções podem ser representadas como uma soma de uma série de Fourier e encontrar maneiras de calcular os coeficientes na série correspondente a uma função dada.

Funções Periódicas

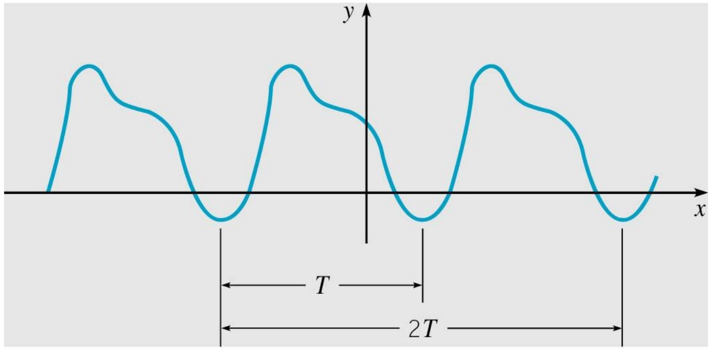
- É necessário desenvolver propriedades de $\sin(m\pi x/L)$ e $\cos(m\pi x/L)$, onde m é um inteiro positivo.
- A primeira propriedade é seu caráter periódico.
- Uma função é **periódica** com período $T > 0$ se o domínio de f contém $x + T$ sempre que contiver x, e se

$$f(x + T) = f(x) \quad \text{, para todo } x.$$



Periodecidade das Funções Seno e Cosseno

- Uma função periódica de período T, $f(x + T) = f(x)$ para todo x.
- Note que $2T$ é também um período e, de fato, qualquer múltiplo inteiro de T.
- O menor valor de T para o qual f é periódica é chamado de **período fundamental** of f.
- Se f e g são duas funções periódicas com periódo comum T, então fg e $c_1 f + c_2 g$ são também periódica com período T.
- Em particular, $\sin(m\pi x/L)$ e $\cos(m\pi x/L)$ são periódica com período $T = 2L/m$.



Ortogonalidade

- O produto interno usual (u, v) de duas funções reais u e v em um intervalo $\alpha \le x \le \beta$ é definida por

$$(u,v) = \int_\alpha^\beta u(x)v(x)dx$$

- As funções u e v são ditas **ortogonais** em $\alpha \le x \le \beta$ se seu produto interno (u, v) é zero:

$$(u,v) = \int_\alpha^\beta u(x)v(x)dx = 0$$

- Um conjunto de funções é **mutualmente ortogonal** se cada distinto pares de funções, pertence ao conjunto e é ortogonal.

Ortogonalidade de Seno e Cosseno

- As funções sin($m\pi x/L$) e cos($m\pi x/L$), m = 1, 2, …, formal um conjunto mutualmente ortogonal de funções em $-L \le x \le L$, com

$$\int_{-L}^{L} \cos\frac{m\pi x}{L}\cos\frac{n\pi x}{L}dx = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ L, & m = n; \end{cases}$$

$$\int_{-L}^{L} \cos\frac{m\pi x}{L}\sin\frac{m\pi x}{L}dx = 0, \text{ all } m, n;$$

$$\int_{-L}^{L} \sin\frac{m\pi x}{L}\sin\frac{n\pi x}{L}dx = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ L, & m = n. \end{cases}$$

- Estes resultados podem ser obtidos por integração direta;

Encontrando Coeficientes da Expansão de Fourier

- Suponha que a séries converge, e chamamos esta soma de $f(x)$:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty}\left(a_m \cos\frac{m\pi x}{L} + b_m \sin\frac{m\pi x}{L} \right)$$

- Os coeficientes a_n, $n = 1, 2, \ldots$, podem ser encontrados da seguinte maneira

$$\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx = \frac{a_0}{2}\int_{-L}^{L}\cos\frac{n\pi x}{L}dx + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \int_{-L}^{L}\cos\frac{m\pi x}{L}\cos\frac{n\pi x}{L}dx$$

$$+ \sum_{m=1}^{\infty} b_m \int_{-L}^{L}\sin\frac{m\pi x}{L}\cos\frac{n\pi x}{L}dx$$

- Por Ortogonalidade

$$\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx = a_n\int_{-L}^{L}\cos^2\frac{n\pi x}{L}dx = La_n$$

Fórmulas dos Coeficientes

- Portanto como vimos anteriormente temos

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx, \;\; n = 1, 2, \ldots$$

- Para encontrar o coeficiente a_0, temos que

$$\int_{-L}^{L} f(x)dx = \frac{a_0}{2}\int_{-L}^{L}dx + \sum_{m=1}^{\infty} a_m\int_{-L}^{L}\cos\frac{m\pi x}{L}dx + \sum_{m=1}^{\infty} b_m\int_{-L}^{L}\sin\frac{m\pi x}{L}dx = La_0$$

- Assim, os coeficientes a_n são determinados pela fórmula

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx, \;\; n = 0, 1, 2, \ldots$$

- Analogamente, os coeficientes b_n são determinados pela fórmula

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx, \;\; n = 1, 2, \ldots$$

As Fórmulas de Euler-Fourier

- Assim, os coeficientes são dados pelas equações

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx, \quad n = 0,1,2,\ldots,$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx, \quad n = 1,2,\ldots,$$

as quais são conhecidas como **as fórmulas Euler-Fourier** .

- Note que estas fórmulas dependem somente dos valores de $f(x)$ no intervalo $-L \le x \le L$. Como cada um dos termos da série de Fourier

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty}\left(a_m \cos\frac{m\pi x}{L} + b_m \sin\frac{m\pi x}{L}\right)$$

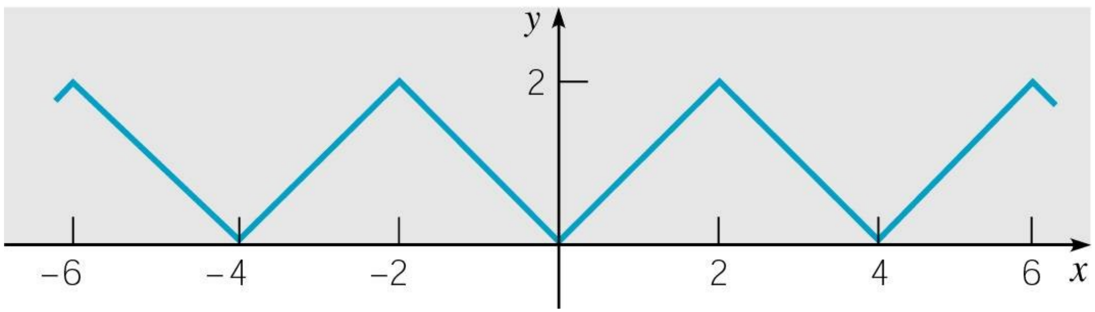
é periódico com período $2L$, a séries converge para todo x sempre que convergir em $-L \le x \le L$, e f é determinada para todo x por seus valores no intervalo $-L \le x \le L$.

Exemplo 1: Onda Triangular (1 de 3)

- Considere a função abaixo,

$$f(x) = \begin{cases} -x, & -2 \le x < 0 \\ x, & 0 \le x < 2 \end{cases}, \qquad f(x+4) = f(x)$$

- Esta função representa uma onda triangular, e é periódica com período $T = 4$. (veja gráfico). Neste caso, $L = 2$.
- Assumindo que f tem uma representação em série de Fourier, encontrar os coeficientes a_m e b_m.



Exemplo 1: Coeficientes (2 de 3)

- Primeiro, encontramos a_0:

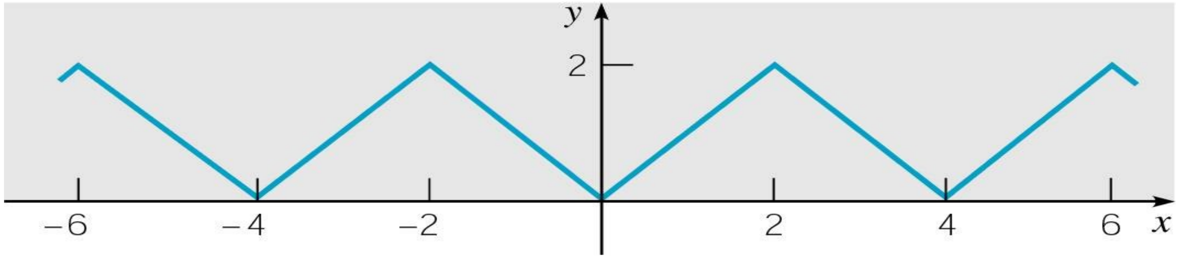
$$a_0 = \frac{1}{2}\int_{-2}^{0}(-x)\,dx + \frac{1}{2}\int_{0}^{2}x\,dx = 1 + 1 = 2$$

- Então, para a_m, $m = 1, 2, \ldots$, temos

$$a_m = \frac{1}{2}\int_{-2}^{0}(-x)\cos\frac{m\pi x}{2}dx + \frac{1}{2}\int_{0}^{2}x\cos\frac{m\pi x}{2}dx = \begin{cases} -8/(m\pi)^2, & m \text{ odd} \\ 0, & m \text{ even,} \end{cases}$$

onde usamos a integração por partes.

- Analogamente, podemos obter os $b_m = 0$, $m = 1, 2, \ldots$



Exemplo 1: Expansão em Fourier (3 de 3)

- Assim $b_m = 0$, $m = 1, 2, \ldots$, e

$$a_0 = 2, \quad a_m = \begin{cases} -8/(m\pi)^2, & m \text{ ímpar} \\ 0, & m \text{ par}, \end{cases}$$

- Então

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty}\left(a_m \cos\frac{m\pi x}{L} + b_m sin\frac{m\pi x}{L}\right)$$

$$= 1 - \frac{8}{\pi^2}\left(\cos\frac{\pi x}{2} + \frac{1}{3^2}\cos\frac{3\pi x}{2} + \frac{1}{5^2}\cos\frac{5\pi x}{2} + \ldots\right)$$

$$= 1 - \frac{8}{\pi^2}\sum_{m=1,3,5,\ldots}^{\infty}\frac{\cos(m\pi x/2)}{m^2}$$

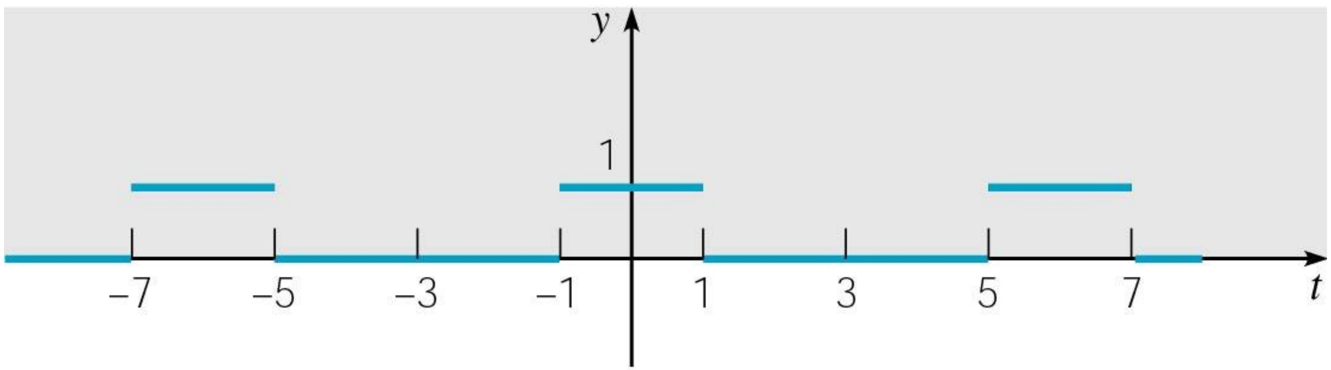
$$= 1 - \frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos[(2n-1)\pi x/2]}{(2n-1)^2}$$

Exemplo 2: Função (1 de 3)

- Considere a função abaixo.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -3 < x < -1 \\ 1, & -1 < x < 1 \\ 0, & 1 < x < 3 \end{cases}, \qquad f(x+6) = f(x)$$

- Esta função é periódica com período $T = 6$. Neste caso, $L = 3$.
- Assumindo que f tem uma representação em série de Fourier, encontrar os coeficientes a_n e b_n.



Exemplo 2: Coeficientes (2 de 3)

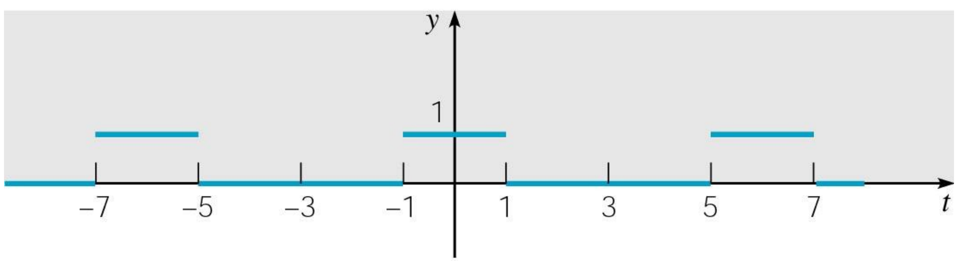
- Primeiro, encontramos a_0:

$$a_0 = \frac{1}{3}\int_{-3}^{3} f(x)\,dx = \frac{1}{3}\int_{-1}^{1} dx = \frac{2}{3}$$

- Usando a fórmula de Euler-Fourier, obtemos

$$a_n = \frac{1}{3}\int_{-1}^{1} \cos\frac{n\pi x}{3}\,dx = \frac{1}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{3}\bigg|_{-1}^{1} = \frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{3},\quad n = 1, 2, \ldots,$$

$$b_n = \frac{1}{3}\int_{-1}^{1} \sin\frac{n\pi x}{3}\,dx = -\frac{1}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{3}\bigg|_{-1}^{1} = 0,\quad n = 1, 2, \ldots,$$



Exemplo 2: Expansão em Fourier (3 de 3)

- Assim $b_n = 0$, $n = 1, 2, \ldots$, e

$$a_0 = \frac{2}{3}, \quad a_n = \frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{3}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

- Então

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \sin\frac{n\pi x}{L}\right) \\
&= \frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{3}\cos\frac{n\pi x}{3} \\
&= \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{3}}{\pi}\left[\cos\left(\frac{\pi x}{3}\right) + \frac{1}{2}\cos\left(\frac{2\pi x}{3}\right) - \frac{1}{4}\cos\left(\frac{4\pi x}{3}\right) - \frac{1}{5}\cos\left(\frac{5\pi x}{3}\right) + \ldots\right]
\end{aligned}$$

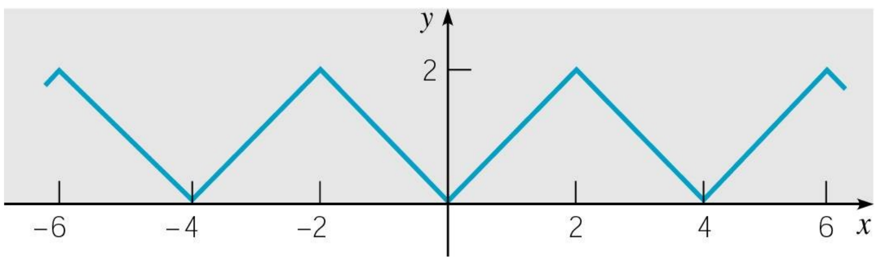
Exemplo 3: Onda Triangular (1 de 5)

- Considere agora a função do Exemplo 1

$$f(x) = \begin{cases} -x, & -2 \le x < 0 \\ x, & 0 \le x < 2 \end{cases}, \qquad f(x+4) = f(x),$$

com o seu gráfico e sua representação em série de Fourier, abaixo

$$f(x) = 1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)\pi x/2}{(2n-1)^2}$$



- Invertigaremos a velocidade de convergência da série e determinaremos quantos termos são necessários para que o erro não seja maior que 0.01 para todo *x*.

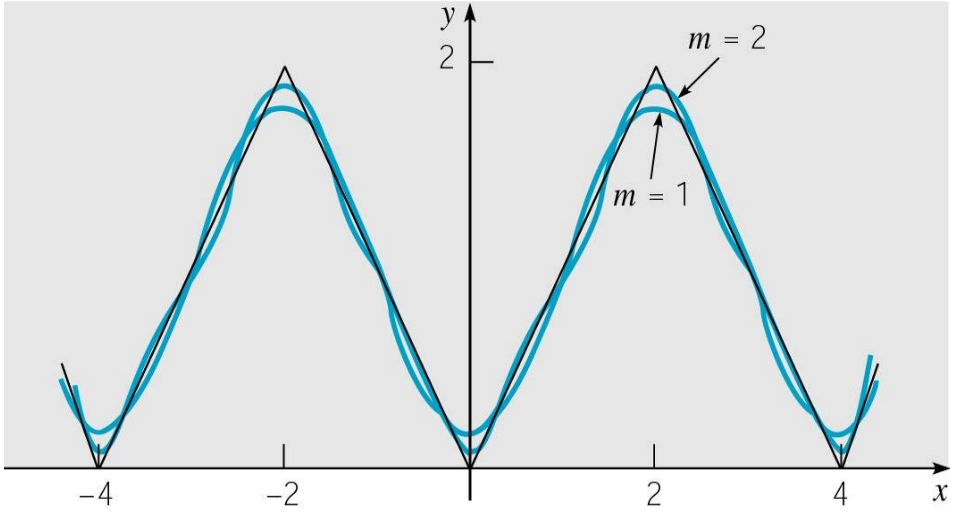
Exemplo 3: Somas Parcias (2 de 5)

- A *m-ésima* soma parcial na série de Fourier

$$s_m(x) = 1 - \frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{m} \frac{\cos(2n-1)\pi x/2}{(2n-1)^2},$$

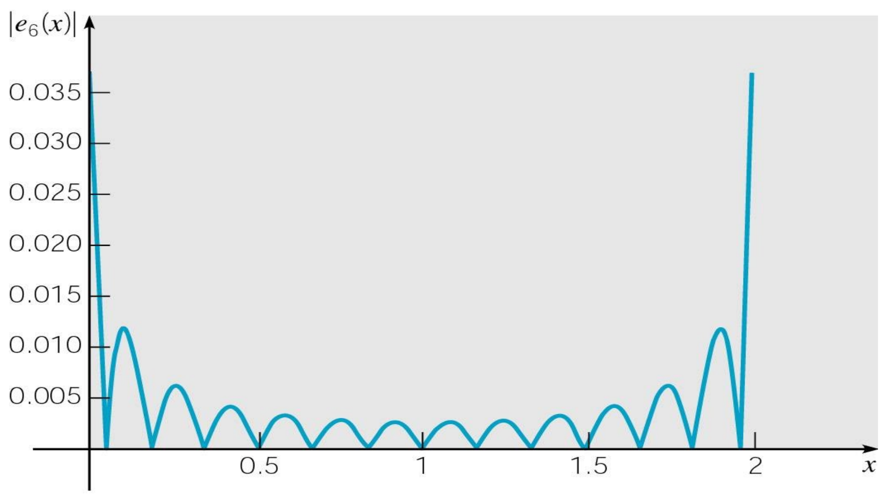
e pode ser usado para aproximar a função f.

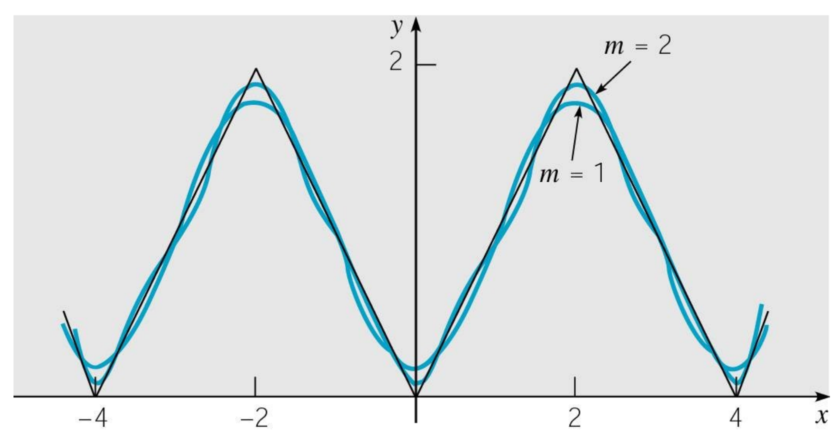
- Os coeficientes diminuem como $(2n-1)^2$, de modo que a série, converge razoavelmente rápido. Veja no gráfico de s_1, s_2, e f.



Exemplo 3: Erro

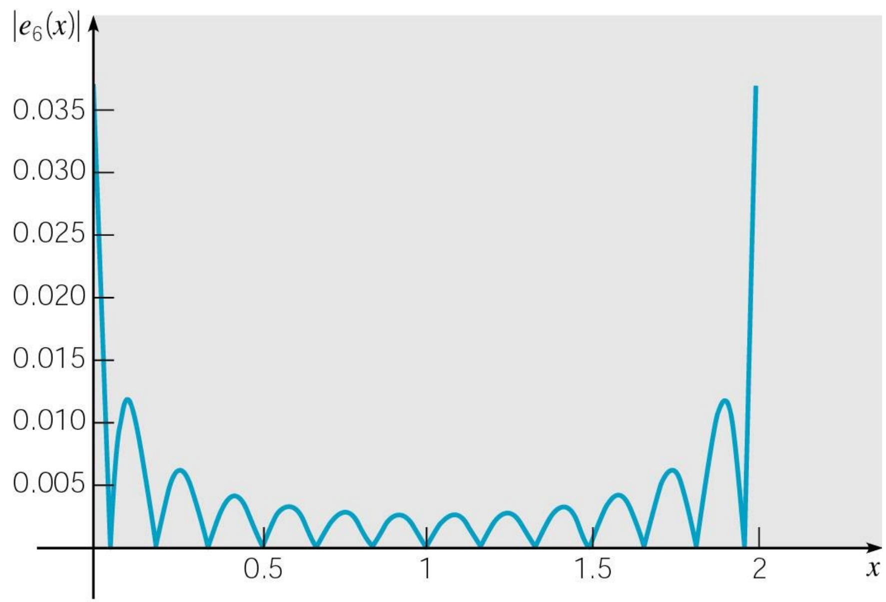
- Para investigar a convergência com mais detalhes, consideremos a função erro $e_m(x) = f(x) - s_m(x)$.
- Dado abaixo no gráfico de $|e_6(x)|$ em $0 \le x \le 2$.
- Note que o erro é maior nos pontos $x = 0$ e $x = 2$, onde o gráfico de $f(x)$ tem bicos.
- Analogamente, gráficos são obtidos para outros valores de m.

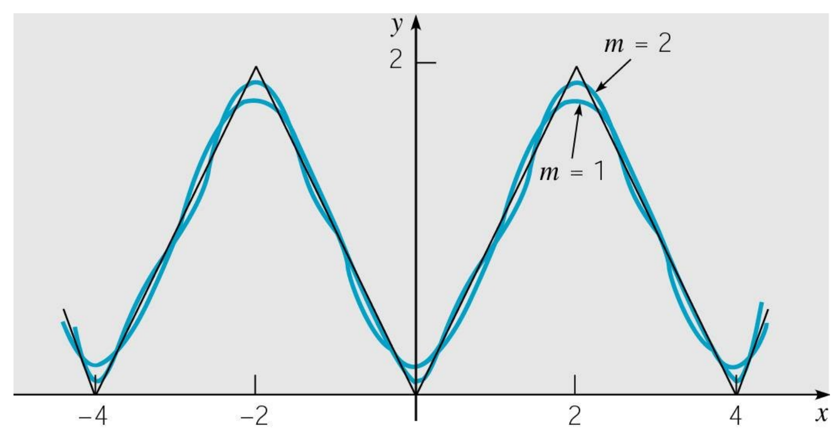




Exemplo 3: Limite Uniforme (4 de 5)

- Desde que o erro máximo ocorre em $x = 0$ ou $x = 2$, obtemos uma cota uniforme para o erro para cada m calculando $|e_m(x)|$ em um destes pontos.
- Por exemplo, $e_6(2) = 0.03370$, onde $|e_6(x)| < 0.034$ em $0 \leq x \leq 2$, e consequentemente para todo x.

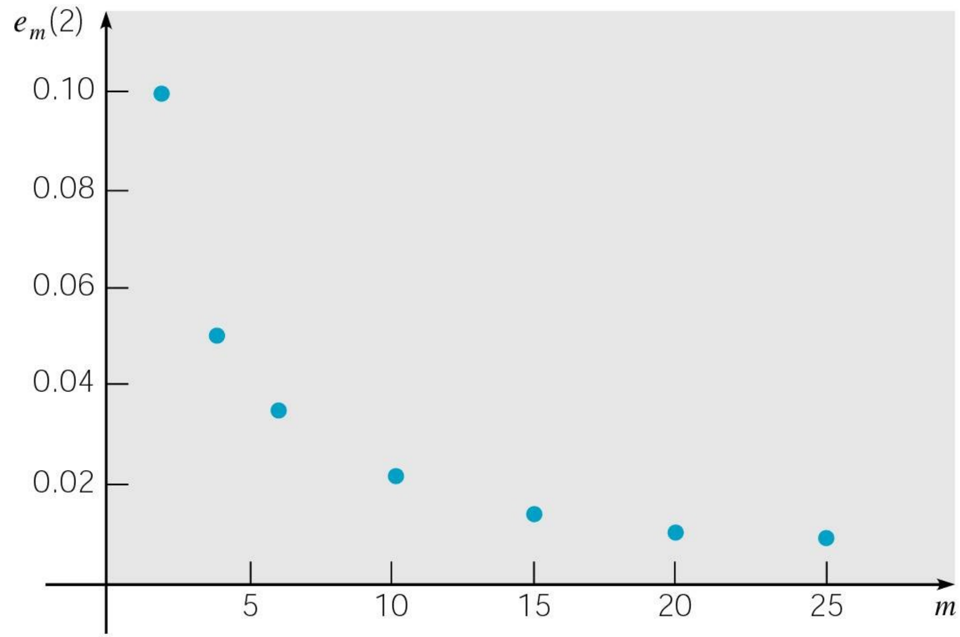




Exemplo 3: Velocidade de Convergência (5 de 5)

- A tabela mostra valores de $|e_m(2)|$ para outros valores de m, e esses dados estão plotados abaixo.
- Dessa informação, podemos começar a estimar o número de termos que serão necessários para obter a precisão pedida.
- Para guarantir que $|e_m(2)| \leq 0.01$, necessitamos escolher $m = 21$.

m	e_m(2)
2	0.09937
4	0.05040
6	0.03370
10	0.02025
15	0.01350
20	0.01013
25	0.00810



10.3: O Teorema de Convergência de Fourier

- Na Seção 10.2, mostramos que, se a série de Fourier

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{m=1}^{\infty}\left(a_m\cos\frac{m\pi x}{L}+b_m\sin\frac{m\pi x}{L}\right)$$

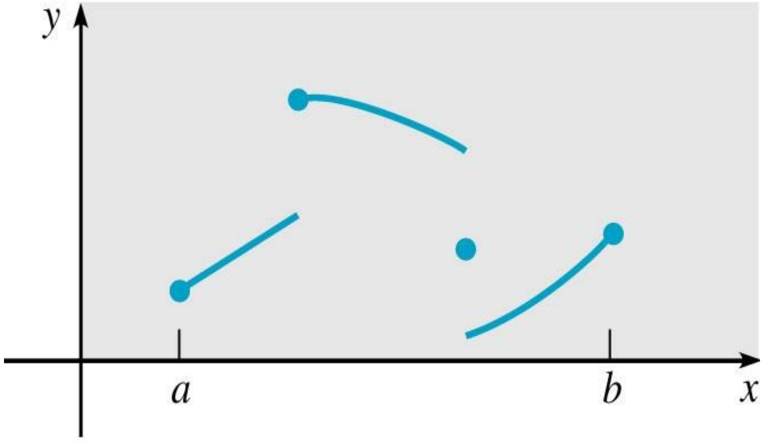
converge e, define uma função f, e então f é periódica com período $2L$, com coeficientes a_m e b_m dado por

$$a_m=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)\cos\frac{m\pi x}{L}dx,\qquad b_m=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)\sin\frac{m\pi x}{L}dx$$

- Nesta seção vamos supor que é dada uma função periódica f de período $2L$ que é integravel em $[-L, L]$. Podemos calcular a_m e b_m usando as fórmulas acima e construir a série de Fourier associada. O problema é saber se essa série converge para algum valor de x, e se esse for o caso, se sua soma é $f(x)$.

Representação das Funções em Séries de Fourier

- Para garantir a convergência de uma série de Fourier para a função da qual seus coeficientes são calculados, é essencial colocar hipóteses adicionais sobre a função.
- De um ponto de vista prático, tais condições devem ser fracas o suficiente para cobrir todas as situações de interesse e, ainda, simples o suficiente para serem facilmente verificadas.
- Para este propósito, vamos relembrar do a definição de função contínua por partes.



Funções Contínuas Por Partes

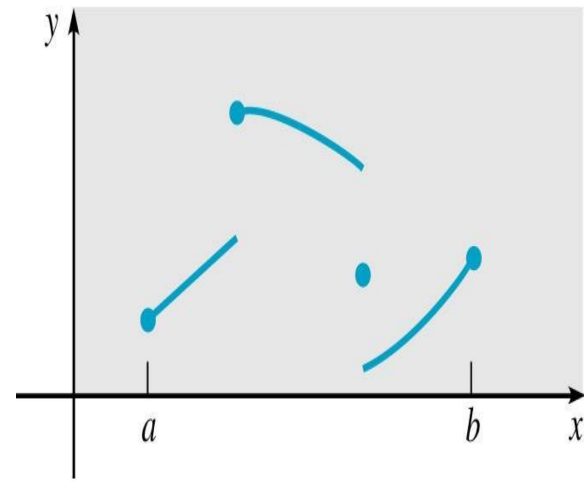
- Uma função f é **contínua por partes** em um intervalo $[a, b]$ se este intervalo pode ser particionado por um número finito de pontos

$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ tal que

(1) f é contínua em cada intervalo (x_k, x_{k+1})

(2) $\left|\lim_{x \to t_k^+} f(x)\right| < \infty, \quad k = 0, \ldots, n-1$

(3) $\left|\lim_{x \to x_{k+1}^-} f(x)\right| < \infty, \quad k = 1, \ldots, n$



- A notação $f(c+)$ denota o limite de $f(x)$ com $x \to c+$ (pela direita) e $f(c-)$ denota o limite de $f(x)$ com $x \to c-$ (pela esqueda).
- Não é necessário que a função esteja definida nos pontos da partição x_k, e nem é necessário que o intervalo $[a, b]$ seja fechado.

Teorema 10.3.1

- Suponha que f e f' são contínuas por partes em $[-L, L)$.
- Alé disso, suponha que f está definida fora de $[-L, L)$ de modo a ser periódica de período $2L$.
- Então f tem uma série de Fourier.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty}\left(a_m \cos\frac{m\pi x}{L} + b_m \sin\frac{m\pi x}{L}\right)$$

onde

$$a_m = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{m\pi x}{L}dx, \quad b_m = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{m\pi x}{L}dx$$

- A série de Fourier converge para $f(x)$ em todos os pontos x onde f é contínua, e converge para $[f(x+) + f(x-)]/2$ em todos os pontos x onde f é descontínua.

Identidade de Parseval

- A identidade de Parseval afirma que

$$\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)^2 dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{m=1}^{\infty}\left(a_m^2 + b_m^2\right)$$

onde a_n e b_n são os coeficientes de Fourier correspondentes a $f(x)$ e se $f(x)$ satisfaz às condições do teorema 10.3.1

Integral de Séries de Fourier

- Se cada termo de uma série infinita é contínuo em um intervalo (a,b) e se a série converge uniformemente para f(x) nesse intervalo. Então:

(a) f(x) também é contínua no intervalo;

(b) a série pode ser integrada termo a termo, isto é,

$$\int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_a^b u_n(x) dx \right)$$

Derivada de Séries de Fourier

- Se cada termo de uma série infinita é derivável, e se a série de derivadas é uniformemente converge, então a série pode ser derivada termo a termo, isto é:

$$\frac{d}{dx}\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{d}{dx}u_n(x)\right)$$

Teorema 10.3.1: Observações

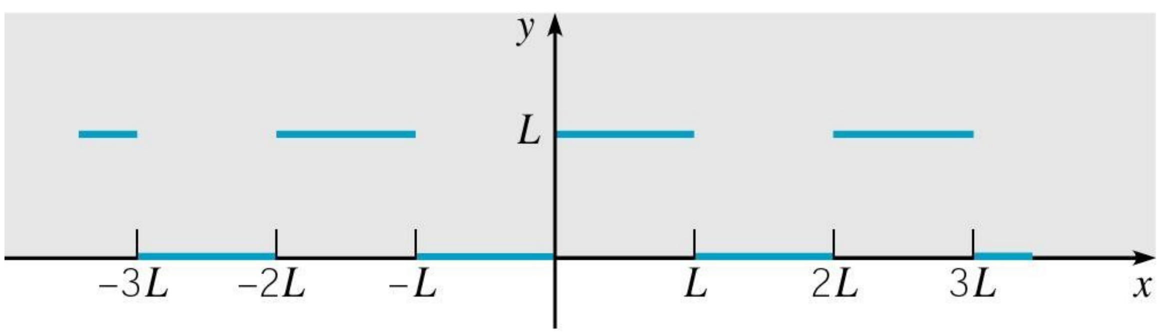
- Note que a série de Fourier converge para a média de $f(x+)$ e $f(x-)$ nos pontos de descontinuidade de f.
- A condição dada neste teorema são somente suficiente para a convergência de uma série de Fourier; Elas não são necessária. Nem são as condições suficientes mais gerais que foram descobertas.
- Funções não incluídas no teorema são, principalmente, as que têm descontinuidades infinitas no intervalo $[-L, L)$, como $1/x^2$.
- Uma série de Fourier pode convergir para pode convergir para uma soma que não é diferenciável, nem mesmo contínua, apesar do fato de que cada termo da série é contínuo e até diferenciável um número infinito de vezes. (Veja Ex. Anteriores 1 e 2).

Exemplo 1: Onda Quadrada (1 de 8)

- Considere a função abaixo.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -L < x < 0 \\ L, & 0 < x < L \end{cases}, \qquad f(x+2L) = f(x)$$

- Vamos, temporariamente, deixar em aberto a definição de f em $x = 0$ e $x = \pm L$, exceto para dizer que seu valor tem que ser finito.
- Esta função representa a onda quadrada, e é periódica com período $T = 2L$.

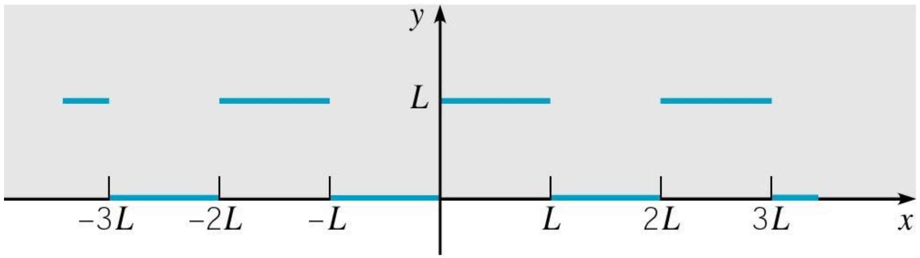


Exemplo 1: Onda quadrada

- Lembre-se que para nossa função f,

$$f(x)=\begin{cases}0, & -L<x<0\\ L, & 0<x<L\end{cases}, \qquad f(x+2L)=f(x)$$

- O intervalo $[-L, L)$ pode ser particionado em dois subintervalos abertos $(-L, 0)$ e $(0, L)$.
- Em $(0, L)$, $f(x) = L$ e $f'(x) = 0$. Assim f e f' são contínuas e tendo limites finitos quando $x \to 0$ pela direita e $x \to L$ pela esquerda.
- Analogamente em $(-L, 0)$. Assim f e f' são contínuas por partes em $[-L, L)$, e podemos aplicar o Teorema 10.3.1.



Exemplo 1: Coeficientes (3 de 8)

- Primeiro, encontre a_0:

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\,dx = \frac{1}{L}\int_0^L L\,dx = L$$

- Então para a_m, $m = 1, 2, \ldots$, temos

$$a_m = \frac{1}{L}\int_0^L L\cos\frac{m\pi x}{L}\,dx = \frac{L}{m\pi}\sin\frac{m\pi x}{L}\bigg|_0^L = 0,\ \ m \neq 0$$

- Analogamente, para $b_m = 0$, $m = 1, 2, \ldots$,

$$b_m = \frac{1}{L}\int_0^L L\sin\frac{m\pi x}{L}\,dx = \frac{L}{m\pi}\cos\frac{m\pi x}{L}\bigg|_0^L = \begin{cases} 2L/m\pi, & m\ \text{ímpar} \\ 0, & m\ \text{par}, \end{cases}$$

Exemplo 1: Expansão em Fourier (4 de 8)

- Assim, $a_m = 0$, $m = 1, 2, \ldots$, e

$$a_0 = L, \; b_m = \begin{cases} 2L/m\pi\,, & m \text{ ímpar} \\ 0, & m \text{ par}, \end{cases}$$

- Então

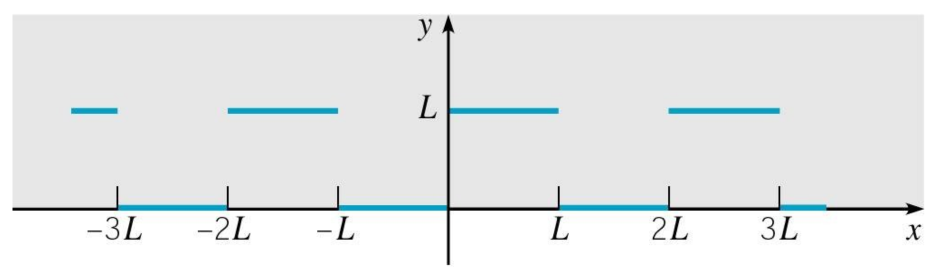
$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \left(a_m \cos\frac{m\pi x}{L} + b_m \sin\frac{m\pi x}{L} \right) \\ &= \frac{L}{2} + \frac{2L}{\pi} \left(\sin\frac{\pi x}{L} + \frac{1}{3}\sin\frac{3\pi x}{L} + \frac{1}{5}\sin\frac{5\pi x}{L} + \ldots \right) \\ &= \frac{L}{2} + \frac{2L}{\pi} \sum_{m=1,3,5,\ldots}^{\infty} \frac{\sin(m\pi x/L)}{L} \\ &= \frac{L}{2} + \frac{2L}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)\pi x/L}{2n-1} \end{aligned}$$

Exemplo 1: Teorema 10.3.1 (5 de 8)

- Portanto

$$f(x) = \frac{L}{2} + \frac{2L}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)\pi x / L}{2n-1}$$

- Agora f é contínua em $(-nL, 0)$ e $(0, nL)$, onde a série de Fourier converge para $f(x)$ em todos estes intervalos, pelo Teorema 10.3.1.
- Nos pontos $x = 0, \pm nL$ onde f é descontinua, todos os termos antes do primeiro desaparecem, e a soma é $L/2=[f(x+)+f(x-)]/2$.
- Assim, podemos, escolher como definição da $f(x)$ ser $L/2$ nestes pontos de descontinuidade, para que desta forma a series possa convergir para f nestes pontos.

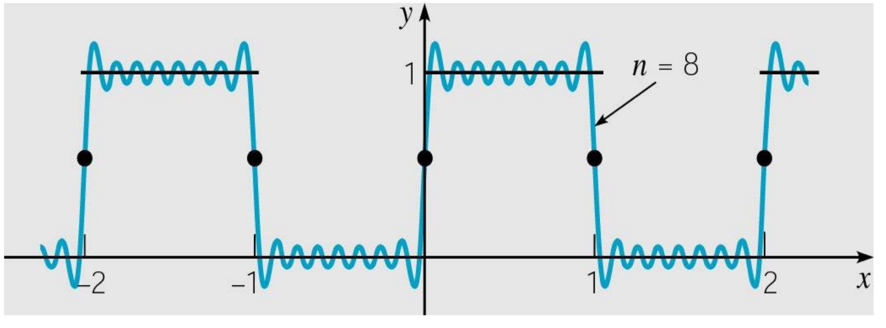


Exemplo 1: Fenômeno de Gibbs (6 de 8)

- Considere a soma parcial

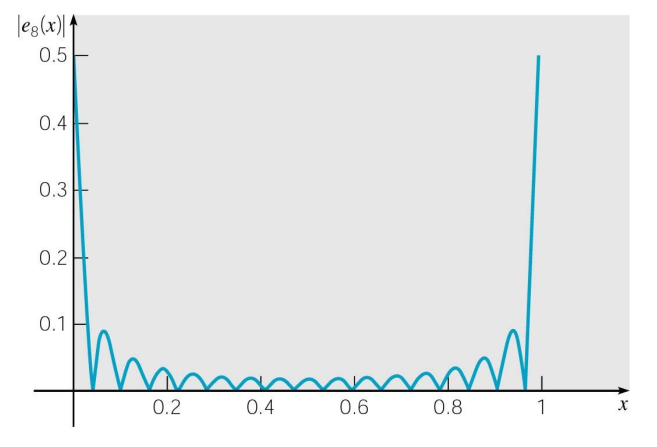
$$s_n(x) = \frac{L}{2} + \frac{2L}{\pi}\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(2k-1)\pi\, x/L}{2k-1}$$

- O gráfico de $s_8(x)$ e f são dados abaixo para $L = 1$.
- As somas parciais parecem convergir para f nos pontos de continuidade e têm tendência a ultrapassar f nos pontos próximos de descontinuidade.
- Este comportamento é típico de séries de fourier em pontos de descontinuidades e é conhecido como fenômeno de Gibbs.



Exemplo 1: Erro (7 de 8)

- Para investigar a convergência com mais detalhes. Considere a função erro $e_n(x) = f(x) - s_n(x)$.
- É dado abaixo o gráfico de $|e_8(x)|$ e $L = 1$. O menor cota superior de $|e_8(x)|$ é 0.5, e é aproximada quando $x \to 0$ e $x \to 1$.
- Quando n aumenta, o erro diminui em (0, 1), onde f é contínua, mas a menor cota superior não diminui quando n aumenta.
- Portanto não podemos reduzir uniformemente o erro no intervalo inteiro aumentando o número de termos.



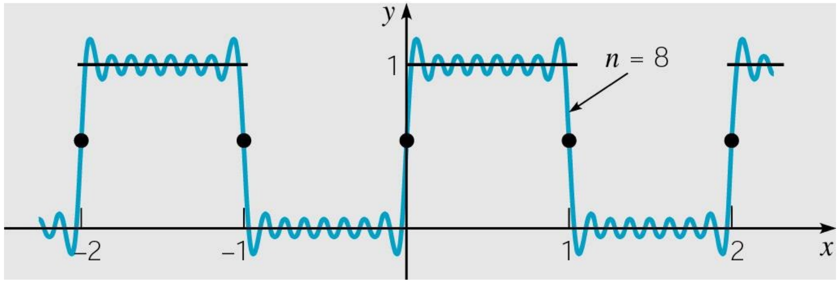
Exemplo 1: Velocidade de Convergência (8 de 8)

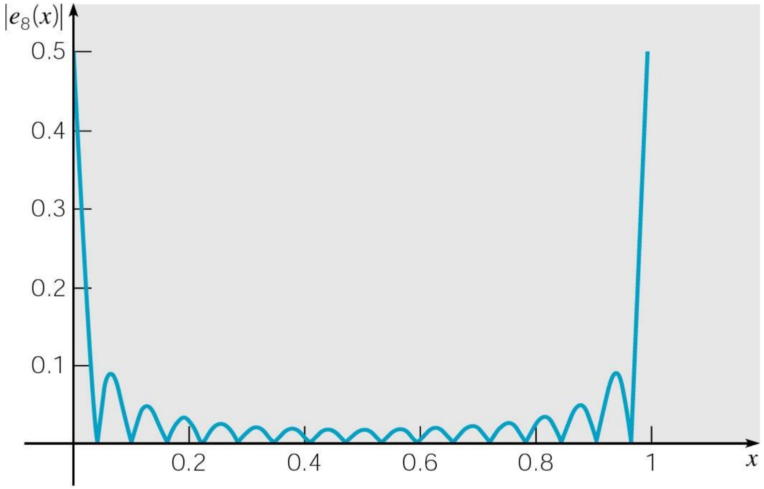
- Note que na nossa série de Fourier,

$$f(x) = \frac{L}{2} + \frac{2L}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)\pi\, x/L}{2n-1}$$

os coeficientes são proporcional a $1/(2n-1)$.

- Assim esta séries converge mais devagar do que as dos Exemplos 1 e 3 da Seção 10.2, porque nestes, os coeficientes são proporcionais a $1/(2n-1)^2$.



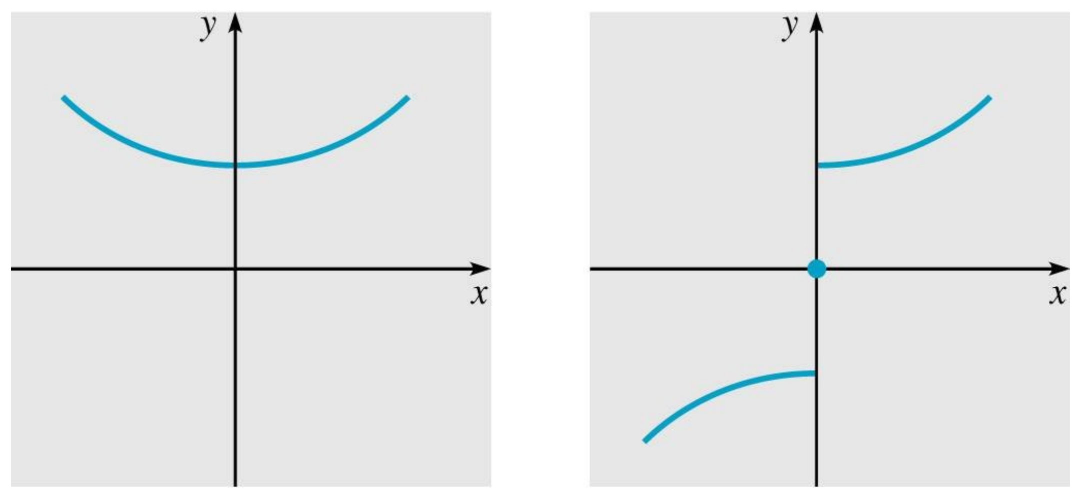


10.4: Funções Pares e Ímpares

- Antes de olhar outros exemplos de séries de Fourier, vamos distinguir duas classes de funções para as quais a fórmula de Euler-Fourier pode ser simplificada.
- Essas classes são formadas pelas funções pares e ímpares, que geometricamente, pela propriedade de simetria em relação ao eixo dos *y* e à origem, respectivamente.

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx$$



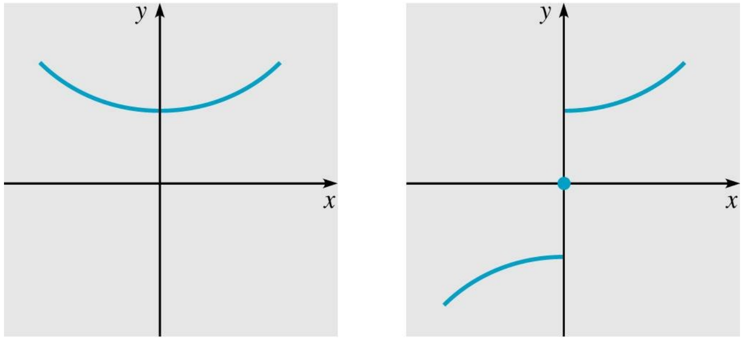
(a) (b)

Definição de fonções pares e ímpares

- Analiticamente, f é uma **função par** se seu domínio contém o ponto $-x$ sempre que contiver x, e se $f(-x) = f(x)$ para cada x no domínio de f. figura (a) .
- A função f é uma **função ímpar** se seu domínio contém o ponto $-x$ sempre que contiver x, e se $f(-x) = -f(x)$ para cada x no domínio de f. figura (b) .
- Note que $f(0) = 0$ para toda função ímpar.
- Exemplos de funções pares

  $1, x^2, \cos x, |x|$.
- Exemplos de funções ímpres

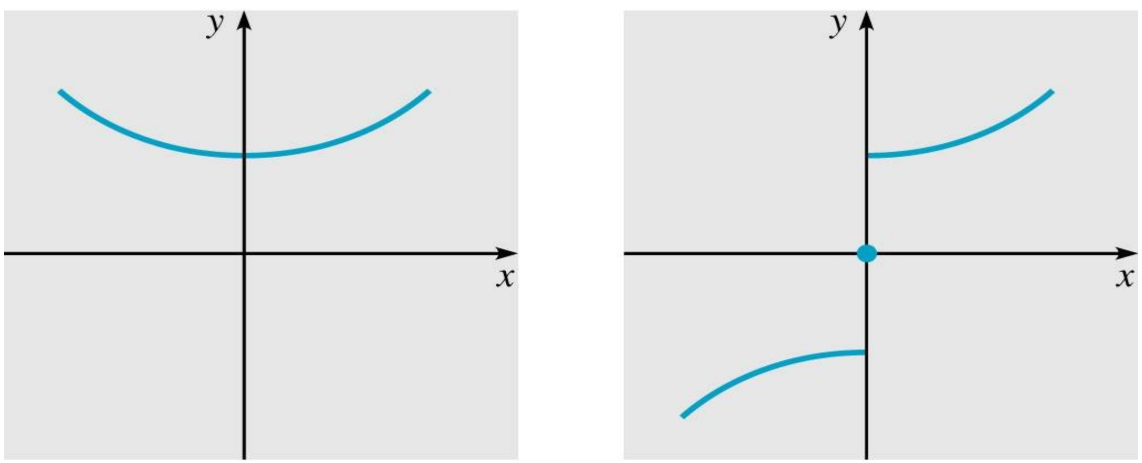
  $x, x^3, \sin x$.



(a) (b)

Propriedades Aritiméticas

- Segue as seguintes propriedades aritiméticas:
  - A soma (diferença) e o produto (quociente) de duas funções pares é par.
  - O produto (quociente) de função par com ímpar é ímpar.
  - A soma (diferença) de duas funções ímpares é ímpar.
  - O produto (quociente) de duas funções ímpares é par.
  - O soma (diferença) de função par com ímpar não par nem ímpar.



(a) (b)

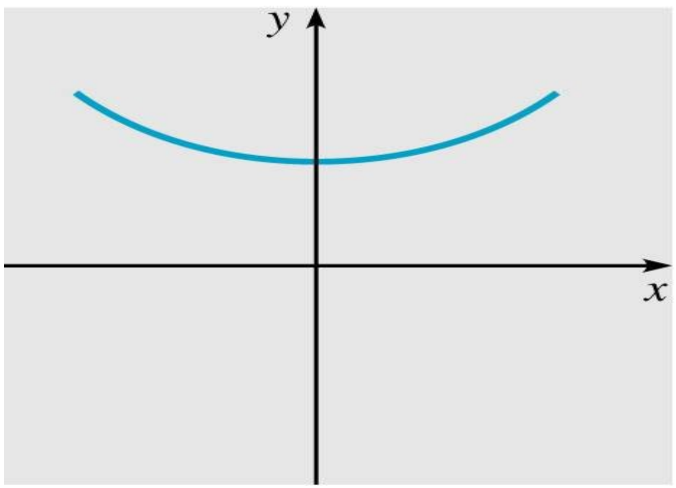
Propriedades Integrais

- Se f é uma função par, então

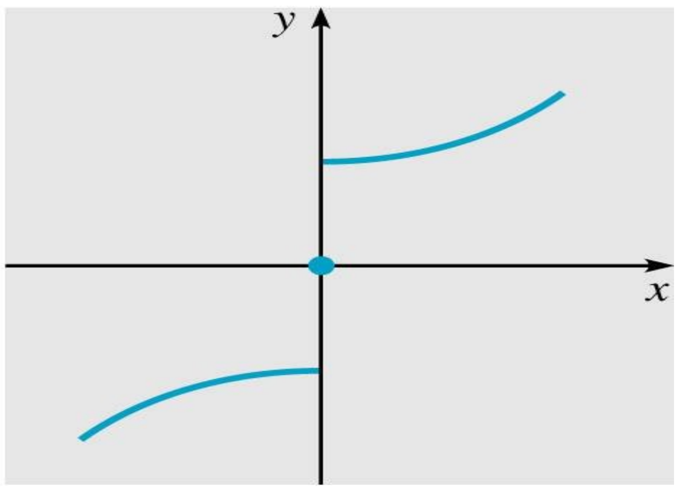
$$\int_{-L}^{L} f(x)dx = 2\int_{0}^{L} f(x)dx$$

- se f é uma função ímpar, então

$$\int_{-L}^{L} f(x)dx = 0$$



(a)



(b)

Séries em Cossenos

- Suponha que f e f' são contínuas por partes em $[-L, L)$ e que f é uma função par e periódica com período $2L$.
- Então $f(x)\cos(n\pi x/L)$ é par e $f(x)\sin(n\pi x/L)$ é ímpar. Assim,

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

$$b_n = 0, \quad n = 1, 2, \ldots$$

- Logo, f tem série de Fourier e é da forma

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{L}$$

- Assim a série de Fourier de uma função par consiste somente de termos de cossenos (e termos constantes), e é chamada de **Série de Fourier em Cossenos.**

Séries em Senos

- Suponha que f e f' são contínuas por partes em $[-L, L)$ e que f é uma função ímpar e periódica com período $2L$.
- Então $f(x)\cos(n\pi x/L)$ é ímpar e $f(x)\sin(n\pi x/L)$ é par. Assim,

$$a_n = 0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx, \quad n = 1, 2, \ldots$$

- Logo, f tem série de Fourier e é da forma

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{L}$$

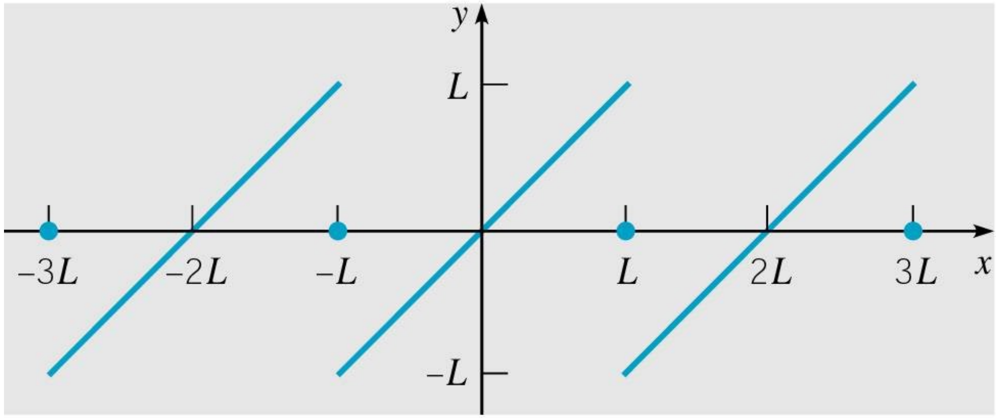
- Assim a série de Fourier de uma função ímpar consiste somente de termos de senos (e termos constantes), e é chamada de **Série de Fourier em Senos.**

Exemplo 1: Onda dente de Serra

- Considere a função abaixo.

$$f(x) = \begin{cases} x, & -L < x < L \\ 0, & x = \pm L \end{cases}, \qquad f(x+2L) = f(x)$$

- Esta função representa uma onda dente de serra, e é periódica com período $T = 2L$.
- Encontre a série de Fourier dessa função.



Exemplo 1: Coeficientes (2 de 3)

- Como f é uma função ímpar periódica com período $2L$, temos

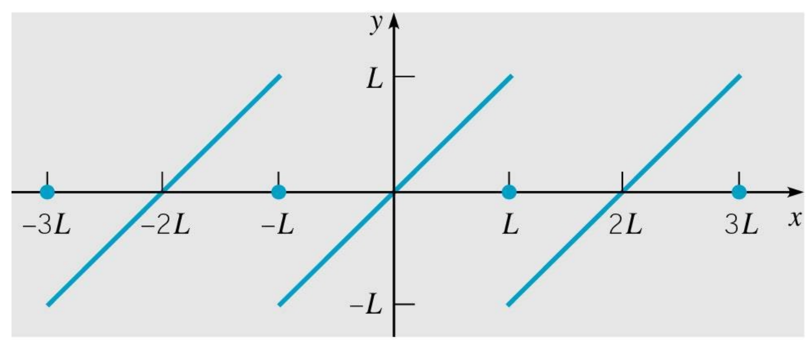
$$a_n = 0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L x \sin\frac{n\pi x}{L}dx = \frac{2}{L}\left(\frac{L}{n\pi}\right)^2\left(\sin\frac{n\pi x}{L} - \frac{n\pi x}{L}\cos\frac{n\pi x}{L}\right)\Bigg|_0^L$$

$$= \frac{2L}{n\pi}(-1)^{n+1}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

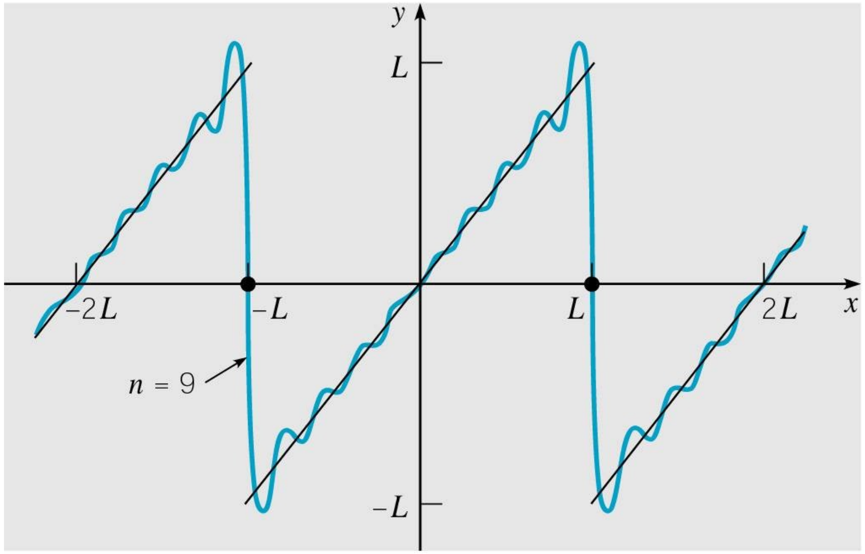
- Segue que a série de Fourier de f é

$$f(x) = \frac{2L}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin\frac{n\pi x}{L}$$



Exemplo 1: Gráfico da Soma Parcial (3 de 3)

- Os gráficos da soma parcial de $s_9(x)$ e f são dados abaixo.
- Observe que f é descontínua em $x = \pm(2n+1)L$, e nestes pontos a série converge para a média dos limites à direita e à esquerda nestes pontos, $[f(x+) + f(x-)]/2$, que é zero.
- O fenômeno de Gibbs ocorre, novamente, próximo aos pontos de descontinuidade.



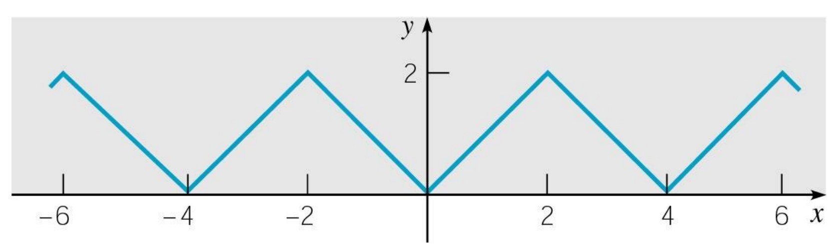
Prolongamentos de Funções

- É muito útil expandir uma função *f* dada, originalmente, no intervalo [0,L], em uma série de Fourier de período 2L.
- **Extensão Par:** Definir uma função *g* de períoda $2L$ tal que

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & 0 \le x \le L \\ f(-x), & -L < x < 0 \end{cases}, \qquad g(x+2L) = g(x)$$

- A função *g* é, então, uma **extensão periódica par** de *f*. Sua série de Fourier, que é uma série em cossenos, representa *f* em $[0, L]$.
- Por exemplo, a extensão periódica par de $f(x) = x$ em [0, 2] é a onda triangular $g(x)$.

$$g(x) = \begin{cases} -x, & -2 \le x < 0 \\ x, & 0 \le x < 2 \end{cases}$$



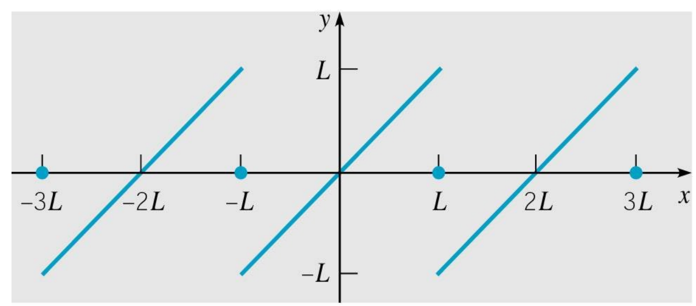
Extensão Ímpar

- Como antes, seja f uma função definida sómente em $(0, L)$.
- Definir uma função h de período $2L$ tal que

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & 0 < x < L \\ 0, & x = 0, L \\ -f(-x) & -L < x < 0 \end{cases}, \qquad h(x + 2L) = h(x)$$

- A função h é a **extensão periódica ímpar** de f. Sua série de Fourier, que é uma série de senos, representa f em $(0, L)$.
- Por exemplo, a estensão periódica ímpar de $f(x) = x$ em $[0, L)$ é a onda dente de serra $h(x)$ dada por.

$$h(x) = \begin{cases} x, & -L < x < L \\ 0, & x = \pm L \end{cases}$$



Extensão em Geral

- Portanto, seja f uma função definida somente em $[0, L]$.
- Defina uma função k de período $2L$ tal que

$$k(x) = \begin{cases} f(x), & 0 \le x \le L \\ m(x), & -L < x < 0 \end{cases}, \qquad k(x + 2L) = k(x)$$

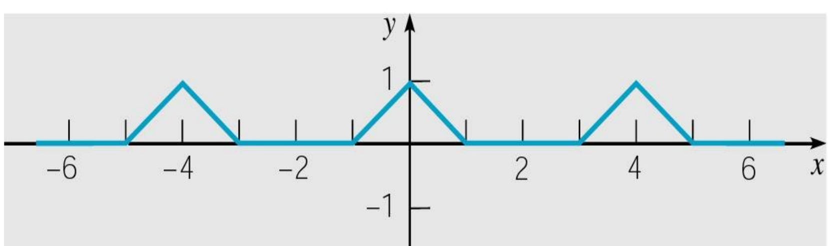
  onde $m(x)$ é ma função definida de forma consistente com o Teorema 10.3.1. Por exemplo, podemos definir $m(x) = 0$.
- A série de Fourier para k envolve termos tanto em seno como em cosseno, e representa f em $[0, L]$, independente do modo como $m(x)$ é definida.
- Assim, existe uma infinidade de tais séries, todas convergindo para f em $[0, L]$.

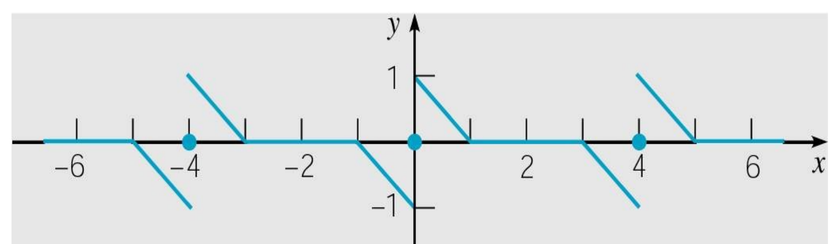
Exemplo 2

- Considere a função abaixo.

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x, & 0 < x \leq 1 \\ 0, & 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

- Como indicado anteriormente, podemos representar f por uma série de cossenos ou uma série de senos em [0, 2]. onde, $L = 2$.
- A série em cossenos para f converge para uma extensão periódica par de f de período 4, e seu gráfico é dado abaixo à esquerda.
- A série em senos para f converge para uma extensão periódica ímpar de f de período 4, e seu gráfico é dado abaixo à direita.





Fórmula Complexa da Série de Fourier

- Usando a fórmula de Euler,

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\,\text{sen}(\theta), \quad \cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad e \quad \text{sen}(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

- Para escrever

$$a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n\,\text{sen}\frac{n\pi x}{L} = \left(\frac{a_n}{2} + \frac{b_n}{2i}\right)e^{\frac{in\pi x}{L}} + \left(\frac{a_n}{2} - \frac{b_n}{2i}\right)e^{\frac{-in\pi x}{L}}$$

- Logo, o coeficiente c_n de $e^{\frac{in\pi x}{L}}$ é dado por

$$c_n = \frac{a_n}{2} + \frac{b_n}{2i} = \frac{1}{2}(a_n - ib_n) = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)\left(\cos\frac{n\pi x}{L} - i\,\text{sen}\frac{n\pi x}{L}\right)dx$$

ou seja

$$c_n = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)e^{\frac{-in\pi x}{L}}dx, \quad n = 1,2,.. \quad e \quad c_0 = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)dx$$

Resumindo,

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{\frac{in\pi x}{L}} \quad onde \quad c_n = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)e^{\frac{-in\pi x}{L}}dx, \quad para \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Integral de Fourier

A integral de Fourier de uma função f definida no intervalo $(-\infty, +\infty)$ é dada por

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\left[A(\alpha)\cos(\alpha x) + B(\alpha)\operatorname{sen}(\alpha x)\right]d\alpha\ ,$$

onde

$$A(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos(\alpha x)dx \qquad e \qquad B(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\operatorname{sen}(\alpha x)dx$$

Exemplo 1

- Determine a representação, por uma integral de Fourier, da função

$$f(x) = \begin{cases} 0 \quad , & x < 0 \\ 1 \quad , & 0 < x < 2 \\ 0 \quad , & x > 2 \end{cases}$$

Transformada de Fourier

- Transformada de Fourier e a transformada inversa de Fourier

$$\Im\{f(x)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{i\alpha x}dx = F(\alpha) \quad e \quad \Im^{-1}\{F(\alpha)\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\alpha)e^{-i\alpha x}d\alpha = f(x)$$

- Transformada seno de Fourier e a transf. seno de Fourier inversa

$$\Im_s\{f(x)\} = \int_{0}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{sen}(\alpha x)dx = F(\alpha) \quad e \quad \Im^{-1}{}_s\{F(\alpha)\} = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty} F(\alpha)\,\mathrm{sen}(\alpha x)dx = f(x)$$

- Transformada cosseno de Fourier e a transf. Cosseno de Fourier inversa

$$\Im_c\{f(x)\} = \int_{0}^{+\infty} f(x)\cos(\alpha x)dx = F(\alpha) \quad e \quad \Im^{-1}{}_c\{F(\alpha)\} = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty} F(\alpha)\cos(\alpha x)dx = f(x)$$