10: Equações Diferenciais Parciais(EDP's)

- Uma EDP é uma equação envolvendo duas ou mais variáveis independentes $x, y, z, t, \ldots$ e derivadas parciais de uma função (variável dependente) $u=u(x,y,z,t,\ldots)$.

$$F\left(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^1}, \ldots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_n}, \ldots, \frac{\partial^k u}{\partial x_n^k}\right) = 0$$

- Exemplos:

$$a) \quad xu_x - yu_y = \operatorname{sen}(xy)$$

$$b) \quad \partial_{tt} u - \partial_{xx} u + \operatorname{sen}(u) = 0$$

$$c) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$d) \quad u_{tt} = c^2 \Delta u$$

$$e) \quad \Delta u = 0$$

Classificação das EDP's

- A ordem de uma EDP é dada pela derivada parcial de maior ordem que ocorre na equação.
- Uma EDP é dita linear se é de primeiro grau em um e em todas as suas derivadas parciais que ocorrem na equação, caso contrário é dita não linear.
- Exemplos

$a)\quad xu_x - yu_y = \operatorname{sen}(xy), \qquad Ordem \quad 1, \quad Linear\,;$

$b)\quad \partial_{tt}u - \partial_{xx}u + \operatorname{sen}(u) = 0, \qquad Ordem \quad 2, \quad Não-linear\,;$

$c)\quad \dfrac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad Ordem \quad 2, \quad Linear\,;$

$d)\quad u_{tt} = c^2 \Delta u\,, \qquad Ordem \quad 2, \quad Linear\,;$

$e)\quad \Delta u = f(x), \qquad Ordem \quad 2, \quad Linear\,.$

Condições de Contorno

- Em EDP's, o espaço das variáveis independentes é multidimensional: procuramos soluções definidas em um aberto Ω *.* É natural substituir os extremos do intervalo (caso n=1) pelo bordo, $\partial\Omega$, da região Ω*.*
- Quando impomos condições sobre o valor da solução e de suas derivadas no bordo da região temos um ***problema de valores de contorno*** ou, simplesmente, ***problema de contorno***.
- Encontramos muitas vezes condições do tipo

$$\alpha\, u(x) + \beta\, \frac{\partial u}{\partial n}(x) = f(x), \quad x \in \partial\Omega$$

onde α e β são constantes dadas, f é uma função dada em $\partial\Omega$ *e* $\frac{\partial u}{\partial n}$ é a derivada de u na direção normal a $\partial\Omega$.

- No caso $\beta = 0$, a condição é conhecida como ***Condição de Dirichlet***;
- No caso $\alpha = 0$, temos uma ***Condição de Neumann.***

Condições Iniciais

- Em EDP's temos mais de uma variável independente (por exemplo x e t), quando fixamos uma das variáveis (por exemplo $t=0$) e impor o valor da solução e de suas derivadas parciais em relação à variável fixa como função das outras variáveis. O problema correspondente é um ***Problema de Cauchy*** ou de ***Valor Inicial***.

- Por exemplo:

$$\begin{cases} u(x,0) = f(x) \\ u_t(x,0) = g(x) \end{cases}$$

onde f e g são funções dadas.

- Quando temos um problema em que são impostas condições de contorno e condições iniciais, eles são chamados de ***Problemas Mistos***.

10.1: Problemas de Valores de Contorno para Fronteiras com Dois Pontos

- Em muitos problemas físicos importantes, existem duas ou mais variáveis independentes, de modo que o modelo matemático correspondente envolve equações diferenciais parciais.
- Neste capítulo trata de um método importante ara se equações diferenciais parciais conhecido como **separação de variáveis**.
- Essencialmente, é a substituição da equação diferencial parcial por um conjunto de equações diferenciais ordinárias, que tem que ser resolvidas sujeitas a condições iniciais ou de contorno.
- Já vimos anteriormente a base matemática necessária, agora veremos o método de separação de variáveis que será usado para resolver diversos problemas ligados à condução de calor, à propagação de ondas e à teoria do potencial.

Problema de Valor de Contorno

- Uma equação diferencial e uma condição de contorno apropriada formam um problema de valores de contorno com dois pontos. Um exemplo típico é:

$$PVC => \begin{cases} y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x), & equação \quad diferencial \\ condição \; de \quad contorno & \begin{cases} y(\alpha) = y_0, \\ y(\beta) = y_1 \end{cases} \end{cases}$$

- Se a função g tem valor nulo para todo x e se os valores y_0 e y_1 também são nulos, então o problema é dito **homogêneo**, caso contrário, o problema é **não homogêneo**.
- Para resolver o PVC, precisamos encontrar uma função $y = \phi(x)$ que satisfaz a equação diferencial no intervalo $\alpha < x < \beta$ e que tem os valores especificados y_0 e y_1, nos extremos do intervalo.

Exemplo 1

- Considere o PVC

$$y'' + 2y = 0, \quad y(0) = 1, \; y(\pi) = 0$$

- A solução geral 0da equação diferencial é

$$y = c_1 \cos\sqrt{2}x + c_2 \sin\sqrt{2}x$$

- A primeira condição de contorno requer que $c_1 = 1$.
- Para a segunda condição de contorno, obtemos

$$c_1 \cos\sqrt{2}\pi + c_2 \sin\sqrt{2}\pi = 0 \quad \Rightarrow \quad c_2 = -\cot\sqrt{2}\pi \cong -0.2762$$

- Assim a solução do PVC é

$$y = \cos\sqrt{2}x - \cot\sqrt{2}\pi \, \sin\sqrt{2}x$$

- Esse exemplo ilustra o caso de um problema de valores de contorno não-homogêneo com uma única solução.

Exemplo 2

- Considere o problema de valor de contorno

$$y'' + y = 0, \quad y(0) = 1, \; y(\pi) = a, \qquad a > 0 \ \text{arbitrário} .$$

- A solução geral desta equação diferencial é

$$y = c_1 \cos x + c_2 sinx$$

- A primeira condição de contorno requer que $c_1 = 1$, enquanto a segunda requer $c_1 = -a$. Assim, não existe solução para $a \neq -1$.
- Agora, se $a = -1$, existe uma infinidades de soluções, da forma:

$$y = \cos x + c_2 sinx, \quad c_2 \ \text{arbitrário}$$

- Esse exemplo ilustra o fato de que um PVC não-homogêneo pode não ter solução e, também, que, sob condições especiais, pode ter uma infinidades de soluções.

Problema de valores de contorno não-homogêneo e o correspondente problema homogêneo.

- O correspondendo o PVC não-homogêneo

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x), \quad y(\alpha) = y_0, \ y(\beta) = y_1$$

ao caso do problema homogêneo associado

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \quad y(\alpha) = 0, \ y(\beta) = 0$$

- Observe que este problema tem solução $y = 0$ para todo x, independente dos coeficientes $p(x)$ e $q(x)$.
- Essa solução é chamada, muitas vezes, de solução trivial e, raramente, é de interesse.
- O que queremos saber, em geral, é se o problema tem outras soluções, não-nulas.

Exemplo 3

- Considere o problema de valores de contorno
$$y'' + 2y = 0, \quad y(0) = 0, \; y(\pi) = 0$$
- Como no Exemplo 1, a solução geral é
$$y = c_1 \cos\sqrt{2}x + c_2 \sin\sqrt{2}x$$
- A primeira condição requer que $c_1 = 0$.
- Para a segunda condição, nós temos $c_2 = 0$.
- Assim a única solução do PVC é $y = 0$.
- Esse exemplo ilustra o fato de que um problema de valores de contorno homogênea pode ter somente a solução trivial $y = 0$.

Exemplo 4

- Considere o problema de valores de contorno

$$y'' + y = 0, \quad y(0) = 0, \; y(\pi) = 0$$

- Como no Exemplo 2, a solução geral é

$$y = c_1 \cos x + c_2 sinx$$

- A primeira condição requer que $c_1 = 0$, enquanto a segunda condição de contorno é satisfeita independente do valor de c_2.
- Assim existe uma infinidades de soluções da forma

$$y = c_2 sinx, \quad c_2 \text{ arbitrário}$$

- Esse exemplo ilustra que um problema de valores de contorno homogêneo pode ter uma infinidade de soluções

Problemas de Autovalores

- O problema de autovalor $\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x}$.
- Note que $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ é uma solução para todo λ, mas para certos λ, chamados de autovalores, existem soluções não-nulas, chamadas de autovetores.
- A situação é semelhante para problemas de valores de contorno.
- Considere o problema de valores de contorno

$$y'' + \lambda y = 0, \quad y(0) = 0, \; y(\pi) = 0$$

- Este é o mesmo problema que o Exemplo 3 se $\lambda = 2$, e o mesmo problema como no Exemplo 4 se $\lambda = 1$.
- Assim o PVC acima possui somente a solução trivial para $\lambda = 2$, e para o outro caso, solução não trivial para $\lambda = 1$.

Autovalores e Autofunções (2 de 8)

- Considere o seguinte PVC

$$y'' + \lambda y = 0, \quad y(0) = 0, \; y(\pi) = 0$$

Tem somente solução trivial com $\lambda = 2$, e tem para o outro caso, solução não trivial para $\lambda = 1$.

- Por extensão da terminologia para sistemas lineares, os valores de $\boldsymbol{\lambda}$ para o qual as soluções não triviais ocorrem chamamos de **autovalores**, e as soluções não triviais são chamadas de **autofunções**.
- Assim $\lambda = 1$ é um autovalor do PVC e $\lambda = 2$ não é.
- Além disso, qualquer multiplo não nulo de sen$x$ é uma autofunção correspondente ao autovalor $\lambda = 1$.

Problema de Valores de Contorno para $\lambda > 0$ (3 de 8)

Vamos agora procurar outros autovalores e autofunções de

$$y'' + \lambda y = 0, \quad y(0) = 0, \; y(\pi) = 0$$

- Consideremos separadamente os casos $\lambda < 0$, $\lambda = 0$ e $\lambda > 0$.
- Suponha primeiro que $\lambda > 0$. Para evitar o aparecimento de sinais de raízes quadradas, seja $\lambda = \mu^2$, onde $\mu > 0$.
- Nosso PVC é então

$$y'' + \mu^2 y = 0, \quad y(0) = 0, \; y(\pi) = 0$$

- A solução geral é

$$y = c_1 \cos \mu x + c_2 \sin \mu x$$

- A primeira condição de contorno requer $c_1 = 0$, enquanto a segunda é satisfeita independente de c_2, contando que $\mu = n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Autovalores e autofunções para $\lambda > 0$ (4 de 8)

- Temos $\lambda = \mu^2$ e $\mu = n$. Portanto os autovalores de

$$y'' + \lambda y = 0, \quad y(0) = 0,\ y(\pi) = 0$$

são

$$\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 4,\ \lambda_3 = 9,\ \ldots,\ \lambda_n = n^2,\ \ldots$$

Com as seguintes autofunções correspondentes

$$y_1 = a_1 \sin x,\ y_2 = a_2 \sin 2x,\ y_3 = a_3 \sin 3x,\ \ldots,\ y_n = a_n \sin nx,\ \ldots$$

onde $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ são constantes arbitrárias. A escolha de cada constante pode se 1, obtemos assim

$$y_1 = \sin x,\ y_2 = \sin 2x,\ y_3 = \sin 3x,\ \ldots,\ y_n = \sin nx,\ \ldots$$

Problema de Valores de Contorno para $\lambda < 0$ (5 de 8)

- Suponha agora $\lambda < 0$, e seja $\lambda = -\mu^2$, onde $\mu > 0$.
- Então nosso problema de valor de contorno torna-se

$$y'' - \mu^2 y = 0, \quad y(0) = 0, \; y(\pi) = 0$$

- A solução geral é

$$y = c_1 \cosh \mu x + c_2 \sinh \mu x$$

- Nós escolhemos $\cosh \mu x$ e $\sinh \mu x$ em vez de $e^{\mu x}$ e $e^{-\mu x}$ por conveniência e aplicando as condições de contorno.
- A primeira condição de contorno requer que $c_1 = 0$, e para a segunda condição de contorno, temos $c_2 = 0$.
- Assim a única solução é $y = 0$, e portanto não há autovalores negativo para este problema.

Problema de Valores de Contorno para $\lambda = 0$ (6 de 8)

- Agora suponha $\lambda = 0$. então nosso problema torna-se

$$y'' = 0, \quad y(0) = 0, \; y(\pi) = 0$$

- A solução geral é

$$y = c_1 x + c_2$$

- A primeira condição de contorno requer que $c_2 = 0$, e para a segunda condição, nós temos $c_1 = 0$.
- Assim a única solução é $y = 0$, e $\lambda = 0$ não é um autovalor para este problema.

Autovalores reais (7 de 8)

- Assim, só temos autovalores reais de

$$y'' + \lambda y = 0, \quad y(0) = 0, \; y(\pi) = 0$$

  são da forma $\lambda_n = n^2$ com autofunções correspondentes proporcionais a

$$y_1 = \sin x, \; y_2 = \sin 2x, \; y_3 = \sin 3x, \; \ldots, \; y_n = \sin nx, \; \ldots$$

- Existe a possibilidade de autovalores complexos, mas em particular para o PVC pode ser mostrado que não existe autovalores complexos.
- Uma das propriedades úteis dessa classe é que todos os autovalores são reais.

Problema de Valores de Contorno em [0, L] (8 de 8)

- Vamos considerar PVC em intervalos da forma [0, L]:

$$y'' + \lambda y = 0, \quad y(0) = 0, \; y(L) = 0$$

- Se nós tormarmos $\lambda = \mu^2$, $\mu > 0$, como antes, a solução geral é

$$y = c_1 \cos \mu x + c_2 \sin \mu x$$

- A primeira condição de contorno requer $c_1 = 0$, e a segunda requer $\mu = n\pi/L$, independente do valor de c_2.
- Assim, como antes, os autovalores e autofunções são

  $\lambda_n = n^2\pi^2/L^2$, $y_n(x) = \sin(n\pi x/L)$,

  onde as autofunções $y_n(x)$ estão determinadas a menos de uma constante multiplicativa.

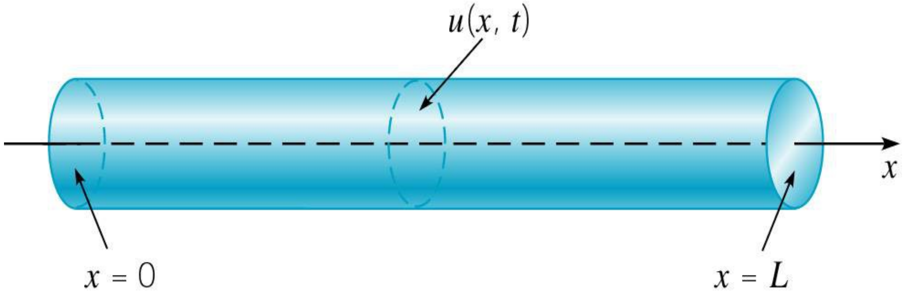
10.5: Separação de Variaveis; Condução de Calor em uma Barra

- As equações diferenciais parciais básicas de condução de calor, propagação de ondas e teoria do potencial, que vamos discutir, estão associadas a três tipos distintos de fenômenos: processos de difusão, processos oscilatórios e processos independentes do tempo ou estacionários.
- Consequentemente, elas são de importância fundamental em muitos ramos da física e de grande significância do ponto de vista da matemática.
- As EDP's cuja teoria está melhor desenvolvida e cujas aplicações são mais significativas e variadas são as equações lineares de segunda ordem.
- Todas essas equações podem ser classificada em três tipos:

  A equação de calor, a equação de onda e a equação do potencial.

Condução de calor em uma Barra: Considerações (1 de 6)

- Considere um problema de condução de calor em uma barra de seção reta uniforme feita com material homogêneo.
- Escolha o eixo dos x de modo a formar o eixo da barra de modo que $x=0$ e $x=L$ correspondem às extremidades da barra.
- Suponha que os lados da barra estão perfeitamente isolados, de modo que não há transmissão de calor ai.
- Assumiremos que as dimensões da seção reta são tão pequenas que a temperatura u pode ser considerada constante em qualquer seção reta.
- Então u só depende da coordenada axial x e do instante t.



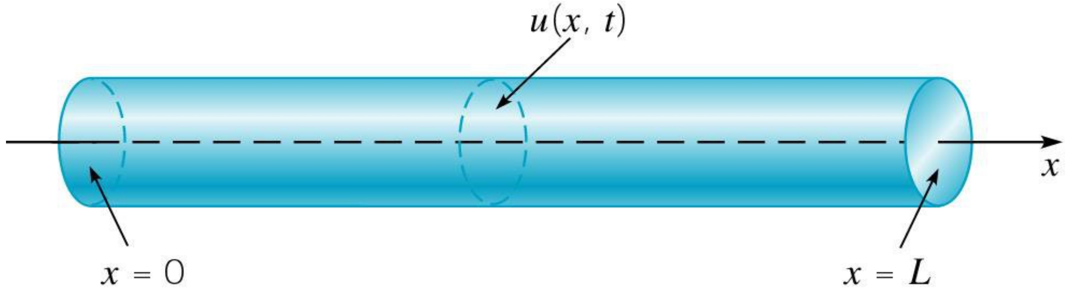
Equação da condução do calor

- A variação da temperatura na barra é governada pela **equação da condução do calor**, e é da forma

$$\alpha^2 u_{xx} = u_t, \quad 0 < x < L, \quad t > 0$$

onde α^2 é uma constante conhecida como **difusividade térmica.**

- O parâmetro α^2 depende somente do material do qual a barra foi feita, e é definida por $\alpha^2 = \kappa/\rho s$, onde κ é a condutividade térmica, ρ é a densidade, e s é o calor específico do material da barra. A unidade de α^2 são (comprimento)^2/tempo.
- Veja Tabela 10.5.1 para valores típicos de α^2 .



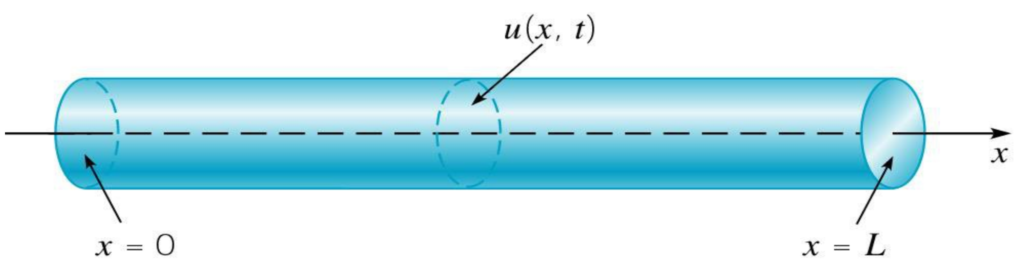
Condução de calor:
Condições Iniciais e Contorno (3 de 6)

- Além disso, vamos supor que a distribuição inicial de temperatura na barra é dada por:

$$u(x,0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq L$$

  onde f é uma função dada.
- Finalmente, supomos que as extremidades da barra são mantidas a temperatura fixas: a temperatura T_1 em $x = 0$ e T_2 em $x = L$.
- Agora vamos considerar somente o caso $T_1 = T_2 = 0$, mais a frente vermos o caso geral e como reduzi-lo a este caso.
- Assim, temos as condições de contorno

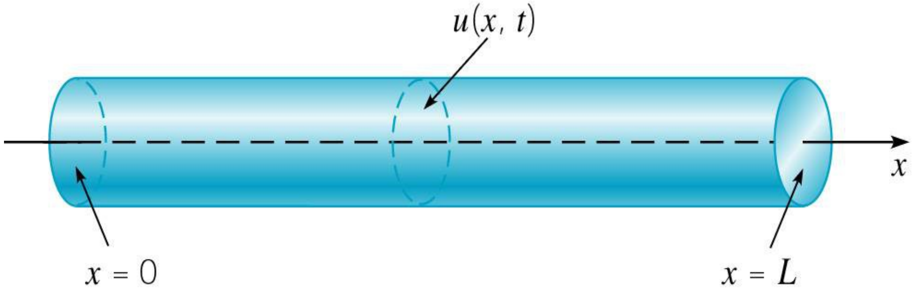
$$u(0,t) = 0, \quad u(L,t) = 0, \quad t > 0$$



Problema da condução de calor (4 de 6)

- Assim o problema fundamental da condução do calor é encontrar $u(x,t)$ que satisfaz

$$\alpha^2 u_{xx} = u_t, \quad 0 < x < L, \quad t > 0$$
$$u(0,t) = 0, \quad u(L,t) = 0, \quad t > 0$$
$$u(x,0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq L$$

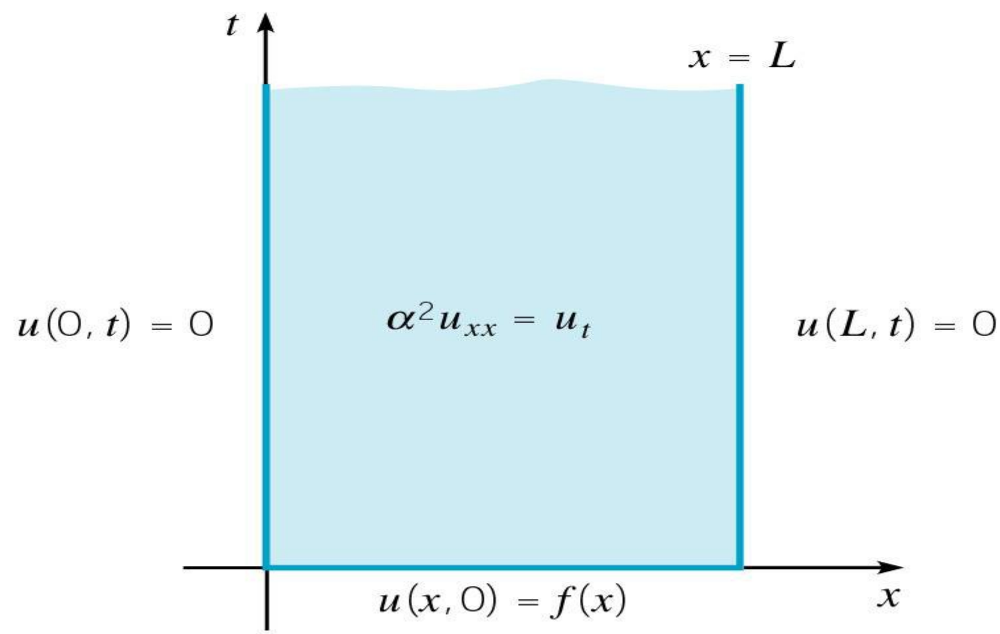


- Com respeito a variável tempo *t*, este é um problema de valor inicial; é dada uma condição inicial e a equação diferencial determina o que acontece depois.
- Com respeito a variável espacial *x*, este é um problema de valor de contorno; as condições de contorno são impostas em cada extremidade da barra e a equação diferencial descreve a evolução da temperatura no intervalo entre elas.

Condução de calor: Problema de Contorno (5 de 6)

- De outro ponto de vista, podemos considerar o problema como sendo um problema de valores de contorno no plano *xt*.
- Neste caso, procura-se a solução $u(x,t)$ que satisfaz a equação do calor na faixa semi-infinita $0 < x < L$, $t > 0$, sujeita à condição de que $u(x,t)$ tem que assumir um valor dado em cada ponto da fronteira dessa faixa.

$$\alpha^2 u_{xx} = u_t, \quad 0 < x < L, \quad t > 0$$
$$u(0,t) = 0, \quad u(L,t) = 0, \quad t > 0$$
$$u(x,0) = f(x), \quad 0 \le x \le L$$



Condução do Calor:
Equação Linear Homogênea (6 de 6)

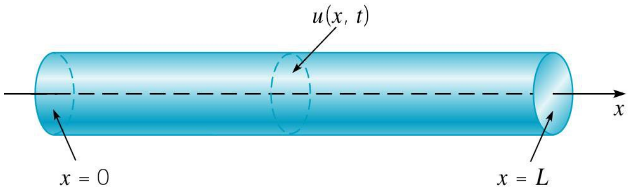
- O problema da Condução de Calor

$$\alpha^2 u_{xx} = u_t, \quad 0 < x < L, \quad t > 0$$

$$u(0,t) = 0, \quad u(L,t) = 0, \quad t > 0$$

$$u(x,0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq L$$

é linear.



- A equação diferencial e as condições de contorno são, também, homogêneas.
- Isso sugere que podemos abordar o problema procurando soluções da equação diferencial e das condições de contorno, fazendo, depois, uma superposição para satisfazer a condição inicial.

Método de Separação de Variáveis (1 de 7)

- Nosso objetivo é procurar soluções não triviais da equação diferencial e condições de contorno.
- Assumiremos que a solução $u(x,t)$ possui a forma

$$u(x,t) = X(x)T(t)$$

- Substituindo u, dada acima, na equação diferencial

$$\alpha^2 u_{xx} = u_t$$

Obtemos

$$\alpha^2 X'' T = X T'$$

ou

$$\frac{X''}{X} = \frac{1}{\alpha^2}\frac{T'}{T}$$

Equações Diferenciais Ordinárias (2 de 7)

- Temos

$$\frac{X''}{X} = \frac{1}{\alpha^2}\frac{T'}{T}$$

- Note que o lado esquerdo só depende de *x* e o lado direito de *t*.
- Assim para que esta equação seja válida em $0 < x < L$, $t > 0$, é necessário que ambos os lados da equação seja igual a uma mesma constante, chamamos de $-\lambda$. Então

$$\frac{X''}{X} = \frac{1}{\alpha^2}\frac{T'}{T} = -\lambda \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{c} X'' + \lambda X = 0 \\ T' + \alpha^2 \lambda T = 0 \end{array}$$

- Assim a equação diferencial parcial é substituída por duas equações diferenciais ordinárias.

Condições de Contorno

- Lembre-se nosso problema original é

$$\alpha^2 u_{xx} = u_t, \quad 0 < x < L, \quad t > 0$$
$$u(0,t) = 0, \quad u(L,t) = 0, \quad t > 0$$
$$u(x,0) = f(x), \quad 0 \le x \le L$$

- Substituindo $u(x,t) = X(x)T(t)$ as condições de contorno em $x = 0$,

$$u(0,t) = X(0)T(t) = 0$$

- Como estamos interessados em soluções não triviais, pedimos $X(0) = 0$ uma vez que $T(t) = 0$ para $t > 0$. Analogamente, $X(L) = 0$.
- Temos, portanto, o seguinte problema de valor de contorno

$$X'' + \lambda X = 0, \quad X(0) = X(L) = 0$$

Autovalores e autofunções (4 de 7)

- Assim,

$$X'' + \lambda X = 0, \quad X(0) = X(L) = 0$$

- Portanto as únicas soluções não triviais para o problema de valor de contorno são as autofunções

$$X_n(x) = \sin(n\pi x / L), \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

associadas aos autovalores

$$\lambda_n = n^2\pi^2 / L^2, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

- Com estes valores para λ, a solução para a equação de primeira ordem

$$T' + \alpha^2\lambda T = 0$$

é

$$T_n = k_n e^{-(n\pi\alpha/L)^2 t}, \quad k_n \text{ constante.}$$

Soluções Fundamentais (5 de 7)

- Assim nossas soluções fundamentais são da forma

$$u_n(x,t) = e^{-(n\pi\alpha/L)^2 t} \sin(n\pi x/L), \quad n = 1,2,3,\ldots,$$

onde desprezamos as constantes arbitrárias de proporcionalidade.

- As funções u_n são chamadas às vezes **soluções fundamentais** do problema de condução de calor.
- Resta, apenas, satisfazer a condição inicial

$$u(x,0) = f(x), \quad 0 \le x \le L$$

- Lembre-se de que resolvemos, muitas vezes, problemas de valor inicial formando combinações lineares de um conjunto fundamental de soluções e escolhendo, depois, os coeficientes que satisfazem as condições iniciais.
- Aqui, temos um número infinito de soluções fundamentais..

Coeficientes de Fourier (6 de 7)

- Nossas soluções fundamentais são

$$u_n(x,t) = e^{-(n\pi\alpha/L)^2 t} \sin(n\pi x/L), \quad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

- Lembrando da condição inicial

$$u_n(x,0) = f(x), \quad 0 \le x \le L$$

- Portanto, assumimos que

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-(n\pi\alpha/L)^2 t} \sin(n\pi x/L)$$

onde c_n são tomadas, tal que as condições iniciais são satizfeitas:

$$u(x,0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(n\pi x/L)$$

- Escolhendo os coeficientes c_n para uma série de Fourier de senos.

Solução (7 de 7)

- Portanto, a solução do problema da condução do calor

$$\alpha^2 u_{xx} = u_t, \quad 0 < x < L, \quad t > 0$$

$$u(0,t) = 0, \quad u(L,t) = 0, \quad t > 0$$

$$u(x,0) = f(x), \quad 0 \le x \le L$$

é dado por

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-(n\pi\alpha/L)^2 t} \sin(n\pi x / L)$$

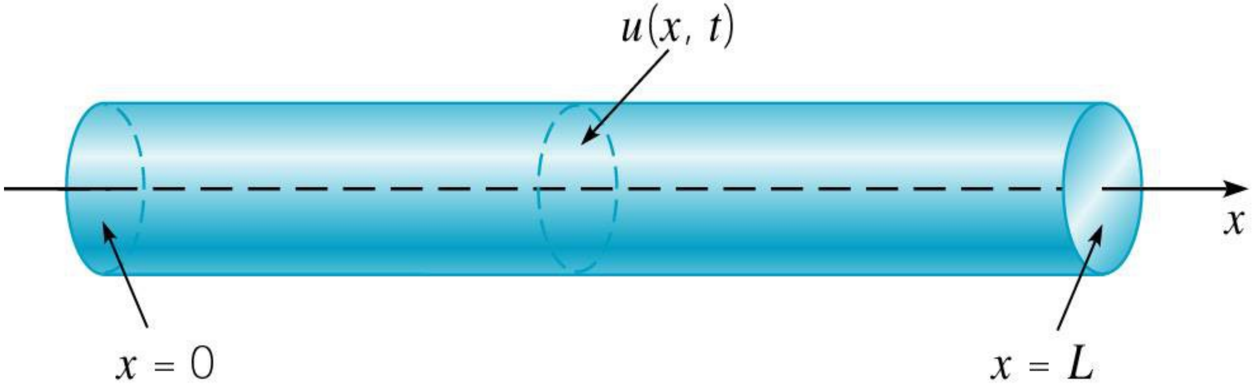
onde

$$c_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin(n\pi x / L)\, dx$$

Exemplo 1: Problema da Condução do Calor (1 de 6)

- Encontre a temperatura $u(x,t)$ em qualquer instante em uma barra de metal com 50 cm de comprimento, insolada nos lados, a uma temperatura uniforme, inicialmente, de 20° C em toda a barra, e cujas extremidades são mantidas a 0° C para todo $t > 0$.
- Este problema de condução de calor tem a forma

$$\alpha^2 u_{xx} = u_t, \quad 0 < x < 50, \quad t > 0$$
$$u(0,t) = 0, \quad u(50,t) = 0, \quad t > 0$$
$$u(x,0) = 20, \quad 0 < x < 50$$



Exemplo 1: Solução (2 de 6)

- A solução do nosso problema de condução de calor é

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-(n\pi\alpha/50)^2 t} \sin(n\pi x/50)$$

onde

$$c_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) sin(n\pi x/L)\,dx = \frac{2}{50}\int_0^{50} 20 sin(n\pi x/50)\,dx$$

$$= \frac{4}{5}\int_0^{50} sin(n\pi x/50)\,dx = \frac{40}{n\pi}(1-\cos n\pi) = \begin{cases} 80/n\pi, & n \text{ ímpar} \\ 0, & n \text{ par} \end{cases}$$

- Assim

$$u(x,t) = \frac{80}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)} e^{-\left(\frac{(2n-1)\pi\alpha}{50}\right)^2 t} sin\left(\frac{(2n-1)\pi x}{50}\right)$$

Exemplo 1: Convergência Rápida (3 de 6)

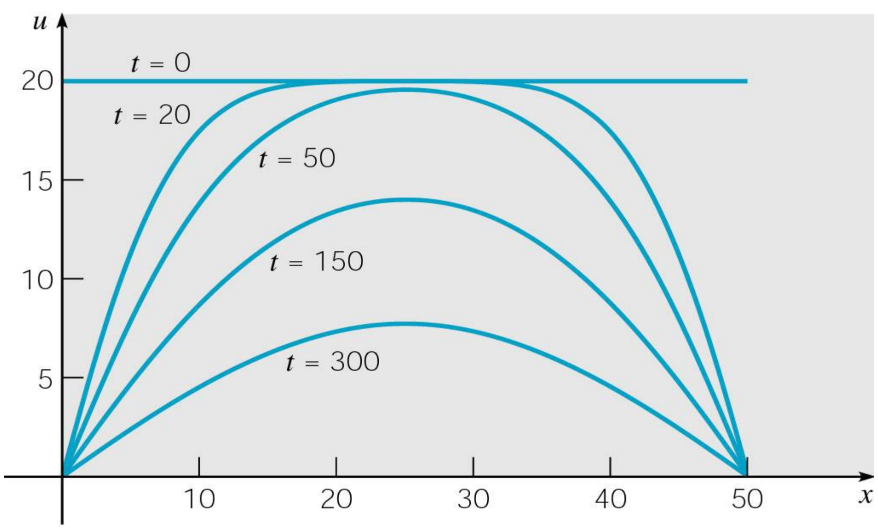
- Assim a temperatura ao longo da barra é dado por

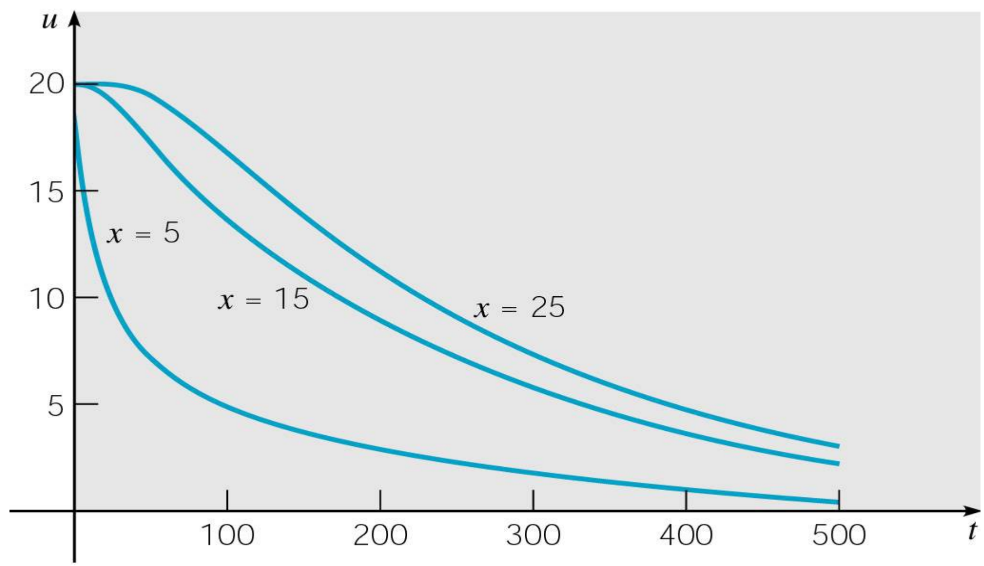
$$u(x,t) = \frac{80}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)} e^{-(\frac{(2n-1)\pi\alpha}{50})^2 t} sin\left(\frac{(2n-1)\pi\ x}{50}\right)$$

- O fator exponencial com potência negativa em cada termo da série faz com que ela convirja rapidamente, exceto para valores pequenos de t ou α^2.
- Portanto, resultados precisos podem ser obtidos usando-se apenas alguns poucos termos da série.
- Para apresentar resultados quantitativos, tome t em segundos; então α^2 tem unidade em cm^2/sec.
- Se escolhermos $\alpha^2 = 1$, isso corresponde a uma barra feita com um material cujas propriedades térmicas estão entre o cobre e o alumínio (veja Tabela 10.5.1).

Exemplo 1: Gráfico da Temperatura (4 de 6)

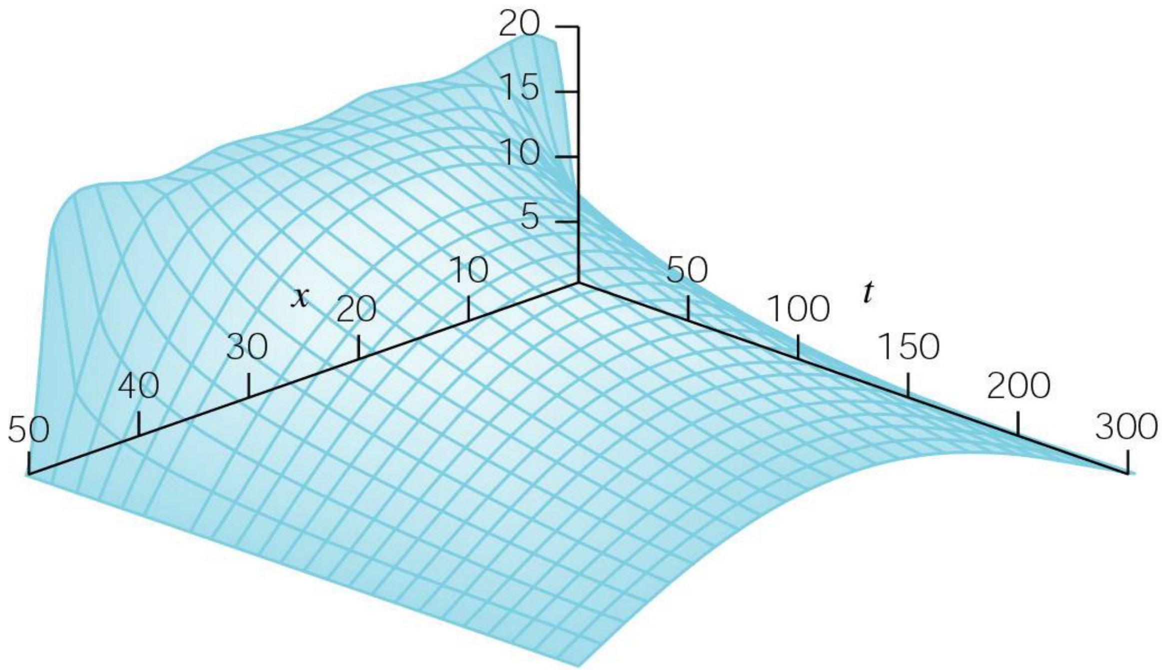
- O gráfico mostra a distribuição de temperatura na barra em diversos instantes diferentes tempos.(fig. à esquerda).
- Observe que a temperatura vai diminuindo sempre, à medida que a barra perde calor pelas extremidades.
- O modo no qual a temperatura decai em um determinado ponto na barra, (fig. à direita), onde aparece o gráfico da temperatura em função do tempo para alguns pontos selecionados na barra.





Exemplo 1: Gráfico de $u(x,t)$ (5 de 6)

- O gráfico tridimensional de u versus x e t.
- Observe que obtemos os gráficos anteriores fazendo a interseção da superfície abaixo com planos onde t ou x são constantes.
- A pequena ondulação em $t = 0$ resulta da utilização de apenas um número finito de termos na série que representa $u(x,t)$ e da convergência lenta da série para $t = 0$.



Exemplo1: Tempo em que a temperatura atinge 1°C (6 de 6)

- Lembrando que a solução do nosso problema é

$$u(x,t)=\frac{80}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)}e^{-(\frac{(2n-1)\pi\alpha}{50})^2 t}sin\left(\frac{(2n-1)\pi\ x}{50}\right)$$

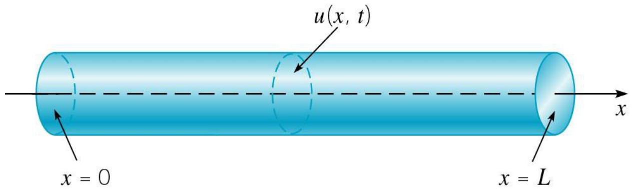
- Suponha que queiramos determinar o tempo τ para o qual a barra inteira atinga a temperatura de 1° C.
- Devido à simetria da distribuição da temperatura inicial e das condições de fronteira, o ponto mais quente da barras é o centro
- Assim τ é determinado resolvendo $u(25,t) = 1$ para t.
- Usando só o primeiro termo da série de Fourier acima, obtemos

$$\tau = \frac{2500}{\pi^2}\ln(80/\pi) \cong 820\,\text{sec}$$

10.6: Outros problemas de condução de calor

- Na seção 10.5, consideramos o problema de condução de calor

$$\alpha^2 u_{xx} = u_t, \quad 0 < x < L, \quad t > 0$$
$$u(0,t) = 0, \quad u(L,t) = 0, \quad t > 0$$
$$u(x,0) = f(x), \quad 0 \le x \le L$$



com solução

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-(n\pi\alpha/L)^2 t} \sin(n\pi x/L), \quad c_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin(n\pi x/L)\,dx$$

- Neste estágio, esta é uma *solução formal*, foi obtida sem a justificativa rigorosa dos processos de limites envolvidos.
- Enquanto tais justificativas estão além do nosso alcance, veremos certas características a seguir.

Solução Formal

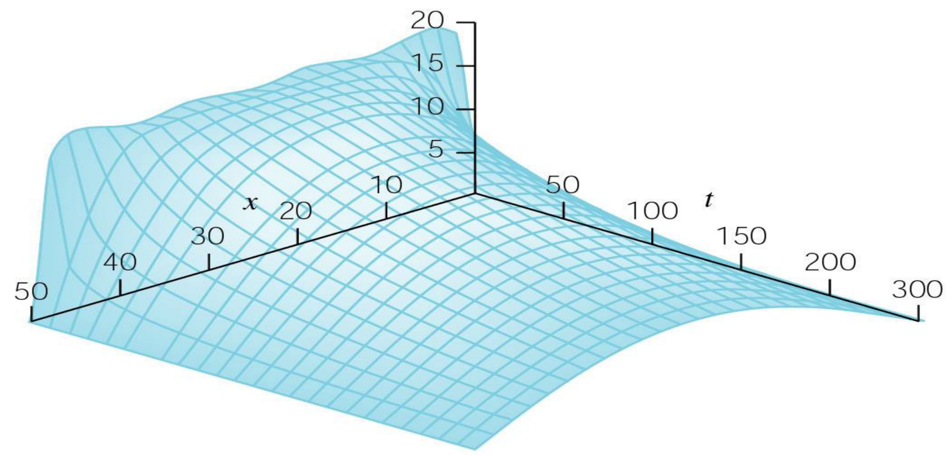
- Uma vez obtida a série

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-(n\pi\alpha/L)^2 t} \sin(n\pi x/L),$$

  Pode ser mostrado que em $0 < x < L$, $t > 0$, a série converge para uma função contínua $u(x,t)$, que u_{xx} e u_t pode ser calculada por diferenciação da série termo a termo, e que a equação da condução de calor é efetivamente satisfeita.
- O argumento depende de cada termo tendo um fator exponencial negativa, resultando na rápida convergência da série.
- Um outro argumento mostra que $u(x,t)$ satisfaz o limite e condições iniciais, e, portanto, a solução formal é justificado.

Condução do calor como um processo de suavização

- Embora a distribuição inicial de temperatura f satisfaz as condições do Teorema 10.3.1 (teorema de convergência de Fourier), é contínua por partes e portanto pode ser descontínua.
- No entanto, a solução $u(x,t)$ é continua para valores arbitrariamente pequenos de $t > 0$.
- Isto ilustra o fato de que a condução de calor é um processo difusivo que instantaneamente suaviza quaisquer descontinuidades que podem estar presentes na distribuição da temperatura inicial $u(x,0) = f(x)$.



Difusão do Calor

- Finalmente, como a distribuição da temperatura inicial f é limitada, segue da equação

$$c_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin(n\pi\ x/L)\,dx$$

Que os coeficientes c_n são também limitados.

- Assim apresença do fator exponencial com potência negativa em cada termo da série

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-(n\pi\alpha\ /L)^2 t}\sin(n\pi\ x/L)$$

garante que

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t) = 0$$

Independe das condições iniciais.

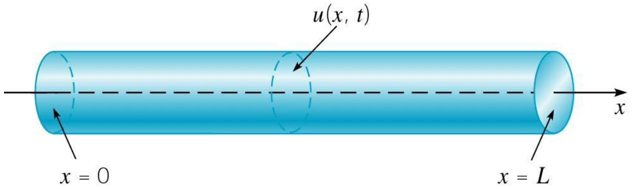
Condições de Contorno Não-Homogêneas (1 de 5)

- Consideremos agora o problema de condução de calor com condições de contorno não homogêneas:

$$\alpha^2 u_{xx} = u_t, \quad 0 < x < L, \quad t > 0$$

$$u(0,t) = T_1, \quad u(L,t) = T_2, \quad t > 0$$

$$u(x,0) = f(x), \quad 0 \le x \le L$$



- Resolveremos este problema, reduzindo-o a um problema com condições de contorno homogêneas.

- A técnica para reduzir este problema, para o caso homogênea é sugerido por um argumento físico, tal como apresentaremos a seguir.

Distribuição da temperatura estado estacionário (2 de 5)

- Depois de muito tempo (i.e., com $t \to \infty$), antecipamos que será alcançada uma distribuição de temperatura estacionária $v(x)$, a qual independe do tempo t e das condições iniciais.
- Como $v(x)$ tem que satisfazer a equação de condução do calor,

$$\alpha^2 u_{xx} = u_t, \quad 0 < x < L,$$

temos

$$v''(x) = 0, \quad 0 < x < L$$

- Além disso, $v(x)$ deve satisfazer as condições de calor

$$v(0) = T_1, \quad v(L) = T_2$$

- Resolvendo para $v(x)$, obtemos

$$v(x) = (T_2 - T_1)\frac{x}{L} + T_1$$

Distribuição da Temperatura Transiente (3 de 5)

- Retornando ao problema original, tentaremos expressar $u(x,t)$ como a soma da temperatura do estado estacionário de distribuição $v(x)$ e outra distribuição (transiente) de temperatura $w(x,t)$. Assim

$$u(x,t) = v(x) + w(x,t)$$

- Uma vez que tem uma expressão para $v(x)$, encontramos $w(x,t)$.
- Primeiro devemos encontrar o valor de $w(x,t)$ como segue.
- Substituindo $u(x,t) = v(x) + w(x,t)$ em $\alpha^2 u_{xx} = u_t$, obtemos $\alpha^2 w_{xx} = w_t$, com $v_{xx} = v_t = 0$.
- A seguir, $w(x,t)$ satisfaz as condições de contorno e iniciais.

$$w(0,t) = u(0,t) - v(0) = T_1 - T_1 = 0$$
$$w(L,t) = u(L,t) - v(L) = T_2 - T_2 = 0$$
$$w(x,0) = u(x,0) - v(x) = f(x) - v(x)$$

Solução Transiente (4 de 5)

- Portanto o Problema de Valor de Contorno para $w(x,t)$ é

$$\alpha^2 w_{xx} = w_t, \quad 0 < x < L, \quad t > 0$$

$$w(0,t) = 0, \quad w(L,t) = 0, \quad t > 0$$

$$w(x,0) = f(x) - v(x), \quad 0 \le x \le L$$

onde

$$v(x) = (T_2 - T_1)\frac{x}{L} + T_1$$

- A solução deste problema é feita como na seção anterior

$$w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-(n\pi\alpha/L)^2 t} \sin(n\pi x/L)$$

onde

$$c_n = \frac{2}{L}\int_0^L \left[f(x) - (T_2 - T_1)\frac{x}{L} - T_1 \right] \sin(n\pi x/L)\, dx$$

Solução Não Homogênea (5 de 5)

- O nosso problema valor de contorno original é não homogêneo

$$\alpha^2 u_{xx} = u_t, \quad 0 < x < L, \quad t > 0$$
$$u(0,t) = T_1, \quad u(L,t) = T_2, \quad t > 0$$
$$u(x,0) = f(x), \quad 0 \le x \le L$$

- Assim a solução $u(x,t) = v(x) + w(x,t)$ é dado por

$$u(x,t) = \left(T_2 - T_1\right)\frac{x}{L} + T_1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-(n\pi\alpha/L)^2 t} \sin\left(n\pi x / L\right)$$

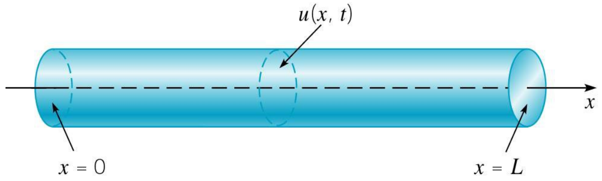
onde

$$c_n = \frac{2}{L}\int_0^L \left[f(x) - \left(T_2 - T_1\right)\frac{x}{L} - T_1 \right] \sin\left(n\pi x / L\right) dx$$

Exemplo 1: Problema de Condução de Calor Não-Homogêneo (1 de 3)

- Considere o problema de condução de calor não homogêneo

$$u_{xx} = u_t, \quad 0 < x < 30, \quad t > 0$$
$$u(0,t) = 20, \quad u(30,t) = 50, \quad t > 0$$
$$u(x,0) = 60 - 2x, \quad 0 < x < 30$$



- A temperatura do estado estacionário datisfaz $v''(x) = 0$ e as condições de contorno $v(0) = 20$ e $v(30) = 50$. Assim $v(x) = x + 20$.
- A distribuição de temperatura transiente $w(x,t)$ satisfaz o problema de condução de calor homogêneo

$$\alpha^2 w_{xx} = w_t, \quad 0 < x < 30, \quad t > 0$$
$$w(0,t) = 0, \quad w(30,t) = 0, \quad t > 0$$
$$w(x,0) = [60 - 2x] - [20 + x] = 40 - 3x, \quad 0 \le x \le 30$$

Exemplo 1: Solução (2 de 3)

- A solução não homogênea $u(x,t)$ é dada pela distribuição da temperatura do estado estacionário $v(x)$ e a distribuição da temperatura transiente $w(x,t)$.
- Assim

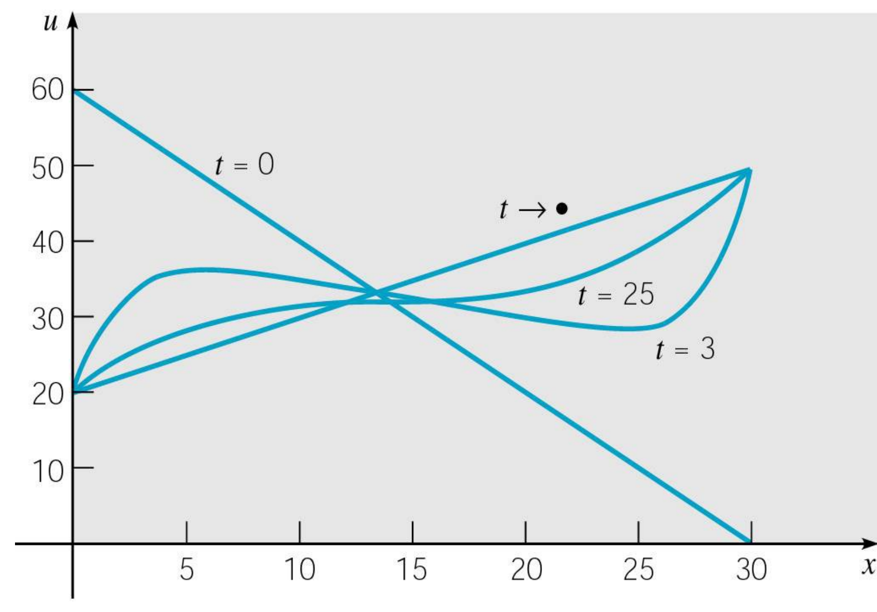
$$u(x,t) = x + 20 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-(n\pi/30)^2 t} \sin(n\pi x/30)$$

onde

$$c_n = \frac{1}{15}\int_0^{30} (40 - 3x)\sin(n\pi x/30)\,dx$$

Exemplo 1: Gráfico da Solução (3 de 3)

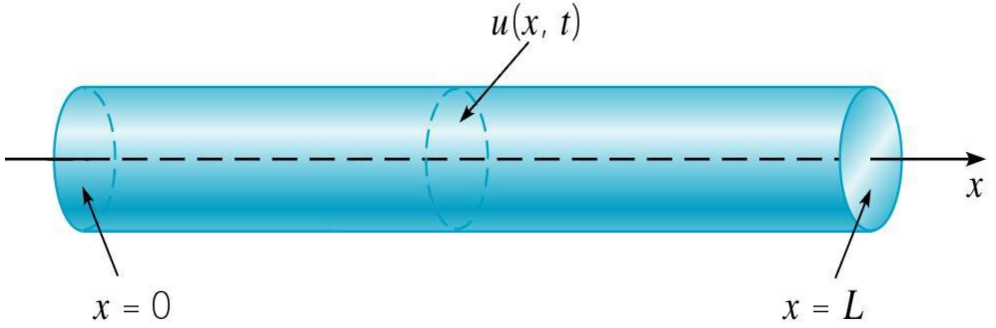
- A figura abaixo mostra um gráfico da distribuição de temperatura inicial $u(x,0) = 60 - 2x$, a distribuição de temperatura final $v(x) = x + 20$, e distribuição da temperatura $u(x,t)$ em dois tempos intermédios.
- Note-se que a temperatura intermédia satisfaz as condições de contorno em qualquer tempo $t > 0$.
- Quando t aumenta, o efeito das condições de contorno move-se gradualmente a partir das extremidades da barra em direção ao seu centro.



Barra com Extremidades Insoladas

- Suponhamos agora que as extremidades da barra estão isoladas, de modo que não há transferência de calor através delas.
- Pode ser mostrado (ver Apêndice A deste capítulo) que a taxa de fluxo de calor através de uma secção transversal é proporcional à taxa de variação da temperatura na direção *x*.
- Assim, no caso de ausência de fluxo de calor, o problema é da forma

$$\alpha^2 u_{xx} = u_t, \quad 0 < x < L, \quad t > 0$$
$$u_x(0,t) = 0, \quad u_x(L,t) = 0, \quad t > 0$$
$$u(x,0) = f(x), \quad 0 \le x \le L$$



- Este problema pode ser resolvido usando o método de separação de variáveis.

Método de Separação de Variáveis

- Assumiremos que

$$u(x,t) = X(x)T(t)$$

- Substituindo na equação diferencial

$$\alpha^2 u_{xx} = u_t$$

obtemos

$$\alpha^2 X'' T = X T'$$

ou

$$\frac{X''}{X} = \frac{1}{\alpha^2}\frac{T'}{T} = -\lambda \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{c} X'' + \lambda X = 0 \\ T' + \alpha^2 \lambda T = 0, \end{array}$$

onde λ é uma constante.

- A seguir considere as condições de contorno.

Condições de Contorno (3 de 11)

- Do problema original

$$\alpha^2 u_{xx} = u_t, \quad 0 < x < L, \quad t > 0$$

$$u_x(0,t) = 0, \quad u_x(L,t) = 0, \quad t > 0$$

$$u(x,0) = f(x), \quad 0 \le x \le L$$

- Substituindo $u(x,t) = X(x)T(t)$ nas condições de contorno $x = 0$,

$$u_x(0,t) = X'(0)T(t) = 0$$

- Como estamos interessados em soluções não triviais pedimos $X'(0)= 0$ em vez de $T(t) = 0$ para $t > 0$. Analogamente, $X'(L) = 0$.
- Temos, portanto, o seguinte problema de valor de contorno

$$X'' + \lambda X = 0, \quad X'(0) = X'(L) = 0$$

Problema de Valor de Contorno para $\lambda < 0$ (4 de 11)

- Assim, devemos resolver o problema de Contorno

$$X'' + \lambda X = 0, \quad X'(0) = X'(L) = 0$$

- Pode ser demonstrado que as soluções não triviais existem apenas se λ é real.
- Suponha $\lambda < 0$, e seja $\lambda = \mu^2$, onde μ é real e positivo.
- Então nossa equação torna-se

$$X'' - \mu^2 X = 0, \quad X'(0) = X'(L) = 0$$

cuja solução geral é

$$X(x) = k_1 \sinh \mu x + k_2 \cosh \mu x$$

- Neste caso, as condições de fronteira requerem $k_1 = k_2 = 0$, e, portanto, a única solução é a trivial.
- Portanto λ não pode ser negativa.

Problema de Valor de Contorno para $\lambda = 0$ (5 de 11)

- Nosso Problema de Contorno é

$$X'' + \lambda X = 0, \quad X'(0) = X'(L) = 0$$

- Suponha $\lambda = 0$. Então nossa equação torna-se

$$X'' = 0, \quad X'(0) = X'(L) = 0$$

cuja solução geral é

$$X(x) = k_1 x + k_2$$

- A partir das condições de fronteira, $k_1 = 0$ e k_2 não é determinado.
- Daí $\lambda = 0$ é um autovalor, com autofunção $X(x) = 1$.
- Além disso, a partir da equação abaixo, $T(t) = k_3$, com k_3 constante.

$$T' + \alpha^2 \lambda T = 0$$

- Segue-se que $u(x,t) = C$, onde $C = k_2 k_3$ é uma constante.

Problema de Valor de Contorno para $\lambda > 0$ (6 de 11)

Nosso Problema de Contorno é

$$X'' + \lambda X = 0, \quad X'(0) = X'(L) = 0$$

- Suponha $\lambda > 0$, e seja $\lambda = \mu^2$, onde μ é real e positivo.
- Então, a nossa equação torna-se

$$X'' + \mu^2 X = 0, \quad X'(0) = X'(L) = 0$$

cuja solução geral é

$$X(x) = k_1 \sin \mu x + k_2 \cos \mu x$$

- Neste caso, as condições de fronteira acima exige $k_1 = 0$, enquanto k_2 é arbitrário desde que $\mu = n\pi/L$, $n = 1, 2, \ldots$.
- Assim nossos autovalores e autofunções são

$$\lambda_n = n^2\pi^2/L^2, \quad X_n(x) = \cos(n\pi x/L),$$

Soluções Fundamentais (7 de 11)

- Para autovalores $\lambda_n = n^2\pi^2/L^2$, a equação

$$T' + \alpha^2 \lambda T = 0$$

Tem solução

$$T_n = k_n e^{-(n\pi\alpha/L)^2 t}, \quad k_n \text{ constante.}$$

- Combinando todos esses resultados, temos as seguintes soluções fundamentais para o nosso problema original:

$$u_0(x,t) = 1,$$

$$u_n(x,t) = e^{-(n\pi\alpha/L)^2 t}\cos\left(n\pi x/L\right), \quad n = 1, 2, \ldots,$$

onde as constantes arbitrárias de proporcionalidade foram omitidas.

Condições Iniciais (8 de 11)

- Como tanto a equação diferencial quanto as condições de contorno são lineares e homogêneas, qualquer combinação linear finita de soluções fundamentais as satisfazem.
- Vamos supor que isso também é verdade para uma combinação linear infinita convergente de soluções fundamentais.
- Assim, para que as condições iniciais sejam satisfeitas

$$u(x,0) = f(x), \quad 0 \le x \le L$$

assumimos

$$u(x,t) = \frac{c_0}{2} u_0(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n(x,t)$$

$$= \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-(n\pi\alpha/L)^2 t} \cos(n\pi x/L)$$

Condições Iniciais (9 de 11)

- Assim, para que as condições iniciais sejam satisfeitas

$$u(x,0) = f(x), \quad 0 \le x \le L$$

assumimos

$$u(x,t) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-(n\pi\alpha/L)^2 t} \cos(n\pi x/L)$$

onde c_n são escolhidos de modo que a condição inicial é satisfeita:

$$u(x,0) = f(x) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(n\pi x/L)$$

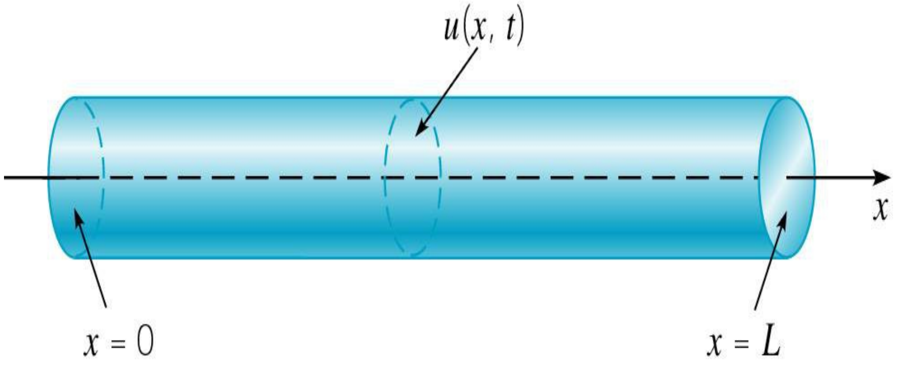
- Assim, tomando os coeficientes c_n para a série de Fourier de cossenos:

$$c_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos(n\pi x/L)\,dx, \quad n = 0,1,2,\ldots$$

Solução (10 de 11)

- Portanto, a solução para o problema de condução de calor para uma barra com os extremos isolados

$$\alpha^2 u_{xx} = u_t, \quad 0 < x < L, \quad t > 0$$
$$u_x(0,t) = 0, \quad u_x(L,t) = 0, \quad t > 0$$
$$u(x,0) = f(x), \quad 0 \le x \le L$$



é dado por

$$u(x,t) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-(n\pi\alpha/L)^2 t} \cos(n\pi x/L)$$

onde

$$c_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos(n\pi x/L)\,dx, \quad n = 0,1,2,\ldots$$

Interpretação Física

- A solução do nosso Problema de Conduçao de Calor

$$u(x,t) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-(n\pi\alpha/L)^2 t} \cos(n\pi x/L)$$

pode ser considerada como a soma da distribuição de temperatura do estado estacionário (dado por $c_0/2$), que é independente do tempo, e uma solução transitória (dada por série) que tende a 0 com $t \to \infty$.

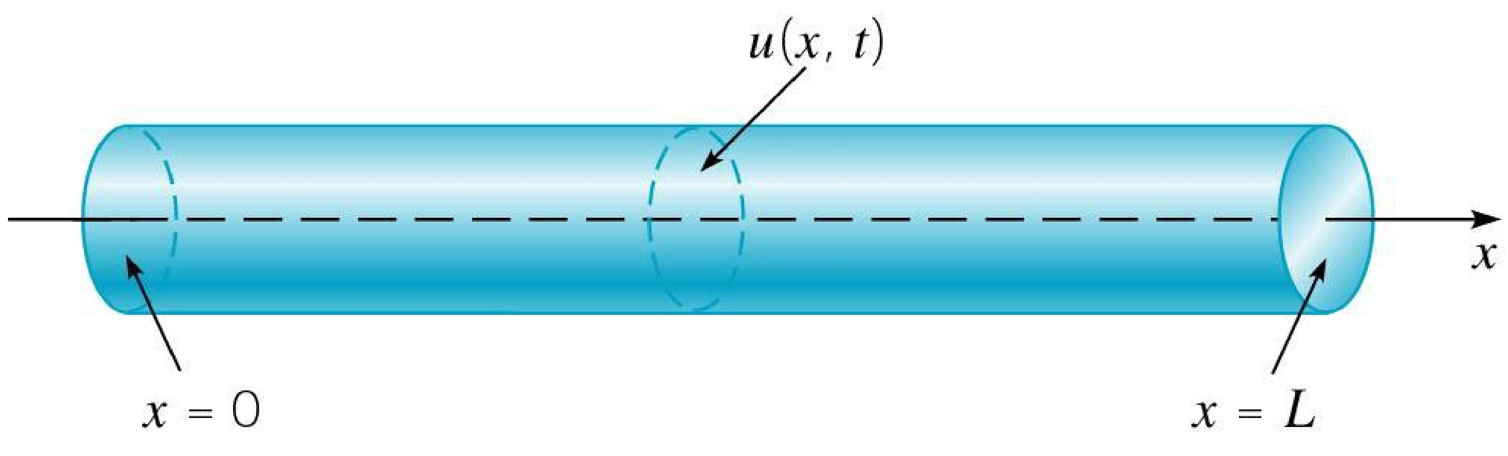
- Fisicamente, nós esperamos que o processo de condução de calor irá, gradualmente, uniformizar a distribuição de temperatura na barra.
- Observe que o valor médio da distribuição de temperatura inicial é

$$\frac{c_0}{2} = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)dx$$

Exemplo 2: Problema de Condução de Calor (1 de 4)

- Encontre a temperatura $u(x,t)$ em uma barra metálica com 25 cm comprimento, isolada tanto nas extremidades quanto nos lados, cuja distribuição inicial de temperatura é $u(x,0) = x$ para $0 < x < 25$.
- Este problema de condução de calor tem a forma

$$\alpha^2 u_{xx} = u_t, \quad 0 < x < 25, \quad t > 0$$
$$u_x(0,t) = 0, \quad u_x(25,t) = 0, \quad t > 0$$
$$u(x,0) = x, \quad 0 < x < 25$$



Exemplo 2: Solução (2 de 4)

- A solução do nosso problema de condução de calor é

$$u(x,t) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-(n\pi\alpha/25)^2 t} \cos(n\pi x/25)$$

onde

$$c_0 = \frac{2}{25}\int_0^{25} x\,dx = 25,$$

$$c_n = \frac{2}{25}\int_0^{25} x\cos(n\pi x/25)\,dx = \begin{cases} -100/(n\pi)^2, & n \text{ ímpar} \\ 0, & n \text{ par} \end{cases}, \quad n \geq 1$$

- Assim

$$u(x,t) = \frac{25}{2} - \frac{100}{\pi^2} \sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty} \frac{1}{n} e^{-(n\pi\alpha/50)^2 t} \cos(n\pi x/25)$$

Exemplo 2: Convergência Rápida (3 de 4)

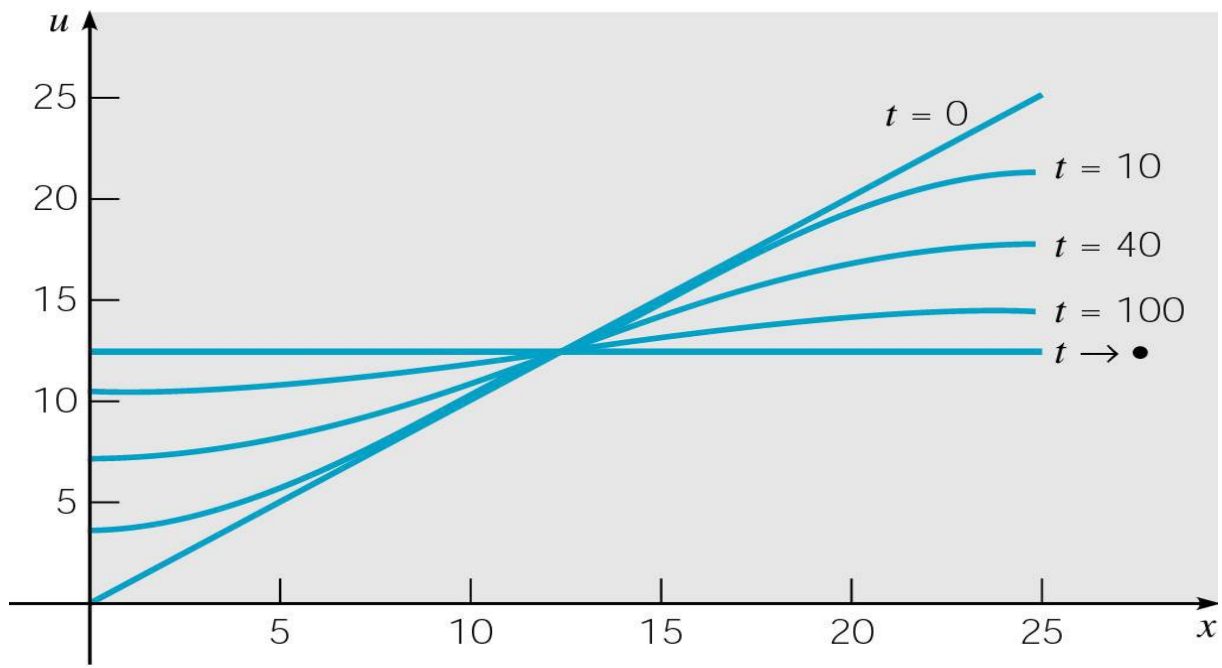
- A temperatura ao longo da barra é dada por

$$u(x,t) = \frac{25}{2} - \frac{100}{\pi^2} \sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty} \frac{1}{n} e^{-(n\pi\alpha/50)^2 t} \cos(n\pi x/25)$$

- O fator exponencial negativo em cada termo faz com que a série convirja rapidamente, exceto para pequenos valores de t ou α^2.
- Portanto, resultados aproximados podem geralmente ser obtidos usando apenas alguns termos da série..
- A fim de apresentar os resultados quantitativos, tome t medidos em segudos; então α^2 possui unidades cm^2/sec.
- Se tomarmos $\alpha^2 = 1$ por conveniência, então a barra é eita de um material cujas propriedades situam-se entre o cobre e alumínio (Tabela 10.5.1).

Exemplo 1: Gráfico da Temperatura (4 de 4)

- O gráfico da distribuição de temperatura $u(x,t)$ na barra é apresentado abaixo para vários tempos.
- Observa-se que à medida que aumenta o tempo t, a distribuição de temperatura $u(x,t)$ ao longo da barra é suavizada para o valor médio (12.5) da distribuição de temperatura inicial $u(x,0) = x$, $0 < x < 25$.



Problemas Mais Gerais (1 de 2)

- O método de separação de variáveis podem também ser usados para resolver os problemas de condução de calor com as condições de contorno diferentes dos discutidos nesta secção.
- Por exemplo, a extremidade esquerda da barra pode ser mantido a uma temperatura T fixo, enquanto a outra extremidade é isolada.
- Neste caso, as condições de contorno são

$$u(0,t) = T, \quad u_x(L,t) = 0, \quad t > 0$$

- O primeiro passo é o de reduzir as condições específicas para aquelas homogêneos subtraindo a solução do estado estacionário.
- O problema resultante é resolvido por um procedimento praticamente idêntico ao dos problemas anteriormente considerados.

Problemas Mais Gerais (2 de 2)

- Um outro tipo de condição de limite ocorre quando a taxa de fluxo de calor através da extremidade da barra é proporcional à temperatura.
- as condições de contorno, neste caso, têm a forma

$$u_x(0,t) - h_1 u(0,t) = 0, \quad u_x(L,t) + h_2 u(L,t) = 0, \quad t > 0,$$

onde h_1 e h_2 são constantes não negativas.

- Se aplicarmos o método de separação de variáveis para o problema da condução de calor com as condições de fronteira acima, temos

$$X'' + \lambda X = 0, \quad X'(0) - h_1 X(0) = 0, \quad X'(L) + h_2 X(L) = 0$$

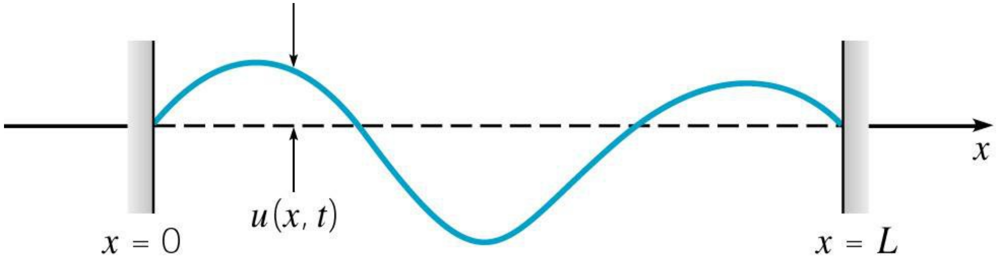
- Como antes, somente para certos valores não negativos de λ que originam soluções fundamentais, que podem, então, ser sobrepostas de modo a formar uma solução geral que satisfaz a condição inicial.

10.7: A Equação da Onda: Vibrações de uma Corda Elástica

- Uma segunda equação diferencial parcial que ocorre com frequência em matemática aplicada é a equação de onda.
- Alguma forma dessa equação, ou uma generalização, quase que inevitavelmente aparece em qualquer análise matemática de fenômenos envolvendo a propagação de ondas em um meio contínuo.
- Estudos de ondas acústicas, ondas de água, ondas eletromagnéticas e ondas sísmicas baseiam-se, todos, nessa equação.
- Talvez a maneira mais simples de visualizar esta situação ocorre na investigação de vibrações mecânicas..
- Nesta seção, nosso foco é em vibrações de uma corda elástica.
- Pode-se pensar nessa corda elástica como sendo uma corda de violino, ou um esteio, ou, possivelmente, um cabo de força.

Cordas Vibrando: Suposições (1 de 5)

- Suponha que um fio elástico de comprimento *L* é firmemente esticado entre dois suportes no mesmo nível horizontal.
- De modo que o eixo dos *x* esteja ao longo da corda e seja $x=0$ e $x=L$ as extremidades da corda.
- Suponha que a corda é colocada em movimento de modo que vibra em um plano vertical, e denote por $u(x,t)$ o deslocamento vertical da corda no ponto *x* no instante *t*.
- Desprezados os efeitos de amortecimento, como a resistência do ar, e a amplitude do movimento não é muito grande.

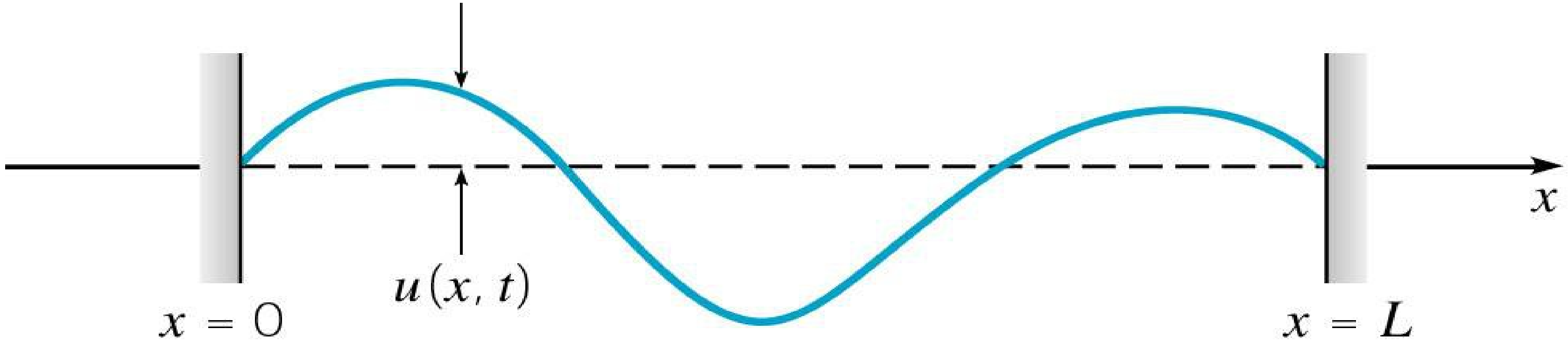


Equação da Onda (2 de 5)

- Partindo destas suposições, a vibração das cordas é governada pela equação de onda unidimensional, que tem a forma

$$a^2 u_{xx} = u_{tt}, \quad 0 < x < L, \quad t > 0$$

- O coeficiente constante a^2 é dado por $a^2 = T/\rho$, onde T é a tensão(força) na corda, ρ é a massa por unidade de comprimento do material da corda.
- Então, a tem unidades de comprimento/tempo. Mostra-se que a é a velocidade de propagação das ondas ao longo da corda.



Equação da Onda: Condições de Contorno e Inicial (3 de 5)

- Assumiremos que as extremidades permanecem fixas

$$u(0,t) = 0, \quad u(L,t) = 0, \quad t \geq 0$$

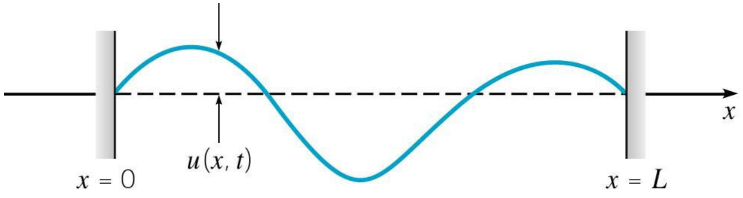
- Como a equação diferencial é de segunda ordem em relação a t, é razoável descrever duas condições iniciais: a posição inicial e a velocidade inicia:

$$u(x,0) = f(x), \quad u_t(x,0) = g(x), \quad 0 \leq x \leq L,$$

onde f e g são funções dadas.

- Para que estas condições possam ser consistentes, pedimos

$$f(0) = f(L) = 0, \quad g(0) = g(L) = 0$$



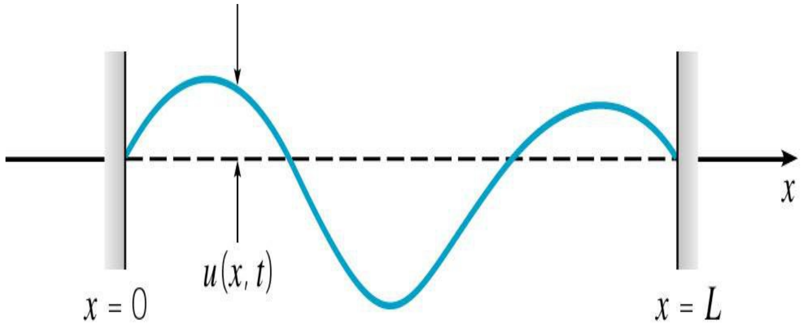
Problema da Equação da Onda (4 de 5)

- Assim, o Problema da Onda é

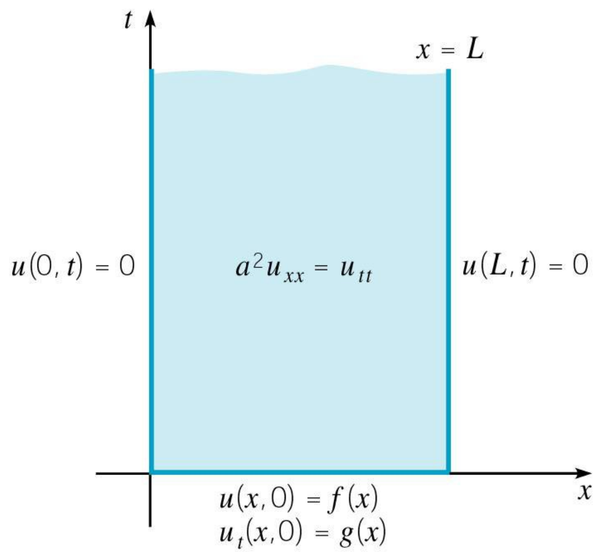
$$a^2 u_{xx} = u_{tt}, \quad 0 < x < L, \quad t > 0$$

$$u(0,t) = 0, \quad u(L,t) = 0, \quad t \geq 0$$

$$u(x,0) = f(x), \quad u_t(x,0) = g(x), \quad 0 \leq x \leq L$$



- Esse é um problema de valor inicial na variável temporal *t* e um problema de valores de contorno na variável espacial *x*.
- De outro ponto de vista, também pode ser considerado como um problema de valores de contorno na faixa semi-infinita 0<x<0, t>0 no plano *xt*. São impostas uma condição em cada ponto dos lados semi-infinitos e duas condições em cada ponto da base.



Problema da Equação da Onda (5 de 5)

- A equação da onda modela um número grande de outros problemas ondulatórios, além das vibrações transversas de uma corda elástica.
- Por exemplo,basta interpretar a função *u* e a constante *a* apropriadamente para se ter problemas que tratam de ondas em um oceano, ondas acústicas ou eletromagnéticas na atmosfera, ou ondas elástica em um corpo sólido.
- Se o problema tiver mais de uma dimensão espacial significativa, então a equação tem que ser ligeiramente generalizada:(2D)

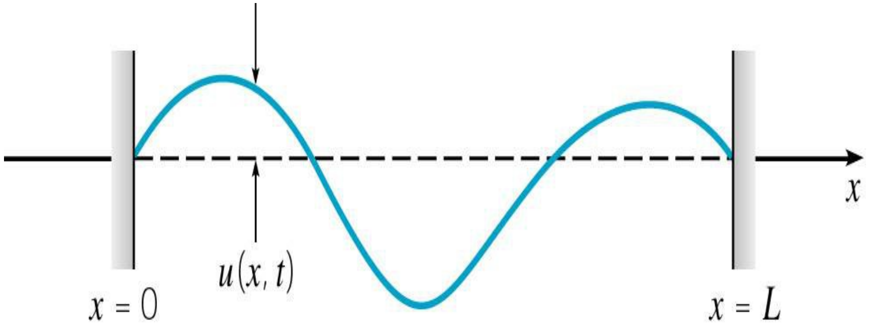
$$a^2\left(u_{xx} + u_{yy}\right) = u_{tt}$$

- Esta equação pode ser usada para descrever o movimento de uma pele de tambor finas, com contorno adequado e condições iniciais.

Deslocamento Inicial Não nulo

- Suponha, primeiro, que a corda é deslocada em relação a sua posição de equilíbrio e solta, depois, no instante $t = 0$ com velocidade nula, para vibrar livremente.
- O deslocamento vertical $u(x, t)$ tem que satisfazer

$$a^2 u_{xx} = u_{tt}, \quad 0 < x < L, \quad t > 0$$
$$u(0,t) = 0, \; u(L,t) = 0, \quad t \geq 0$$
$$u(x,0) = f(x), \; u_t(x,0) = 0, \quad 0 \leq x \leq L$$



onde f é uma função dada que descreve a configuração da corda em $t = 0$.

- Nós usaremos o método de separação de variáveis para obter a solução deste problema.

Método Separação de Variáveis (2 de 9)

- Supondo que

$$u(x,t) = X(x)T(t)$$

- Substituindo $u(x,t)$ na equação

$$a^2 u_{xx} = u_{tt}$$

obtemos

$$a^2 X'' T = X T''$$

ou

$$\frac{X''}{X} = \frac{1}{a^2}\frac{T''}{T} = -\lambda \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} X'' + \lambda X &= 0 \\ T'' + a^2\lambda T &= 0, \end{aligned}$$

onde λ é uma constante.

Condições de Contorno (3 de 9)

- Lembrando que o problema de vibrações é

$$a^2 u_{xx} = u_{tt}, \quad 0 < x < L, \quad t > 0$$

$$u(0,t) = 0, \; u(L,t) = 0, \quad t \geq 0$$

$$u(x,0) = f(x), \; u_t(x,0) = 0, \quad 0 \leq x \leq L$$

- Substituindo $u(x,t) = X(x)T(t)$ na segunda condição inicial em $t = 0$, encontramos que

$$u_t(x,0) = X(x)T'(0) = 0, \quad 0 \leq x \leq L \quad \Rightarrow \quad T'(0) = 0$$

- Analogamente, a condição de contorno requer $X(0) = 0$, $X(L) = 0$:

$$u(0,t) = X(0)T(t) = 0, \; u(L,t) = X(L)T(t) = 0, \quad t \geq 0$$

- Temos portanto o seguinte problema de valor de contorno em x:

$$X'' + \lambda X = 0, \quad X(0) = X(L) = 0$$

Autovalores e autofunções (4 de 9)

- Este problema têm solução não-trivial se, e somente se, tivermos as autofunções

$$X_n(x) = \sin(n\pi\, x/L), \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

associadas com os autovalores

$$\lambda_n = n^2\pi^2/L^2, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

- Usando os valores de λ, a solução para a equação

$$T'' + a^2\lambda\, T = 0$$

é

$$T(t) = k_1 \cos(n\pi\, a\,t/L) + k_2 \sin(n\pi\, a\,t/L),$$

onde k_1, k_2 são constantes. Como $T'(0) = 0$, $k_2 = 0$, e onde

$$T(t) = k_1 \cos(n\pi\, a\,t/L)$$

Soluções Fundamentais (5 de 9)

- Assim, nossas soluções fundamentais tem a forma

$$u_n(x,t) = \sin(n\pi\ x/L)\cos(n\pi\ at/L), \quad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

onde nós omitimos as constantes de proporcionalidade.

- Para satisfazer as condições iniciais

$$u(x,0) = f(x), \quad 0 \le x \le L$$

assumimos

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(n\pi\ x/L)\cos(n\pi\ at/L)$$

onde c_n são escolhidas de tal forma que fatisfazem as condições iniciais:

$$u(x,0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(n\pi\ x/L) \Rightarrow c_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin(n\pi\ x/L)\,dx$$

Solução

- Portanto a solução do problema de vibrações

$$a^2 u_{xx} = u_{tt}, \quad 0 < x < L, \quad t > 0$$

$$u(0,t) = 0, \; u(L,t) = 0, \quad t \geq 0$$

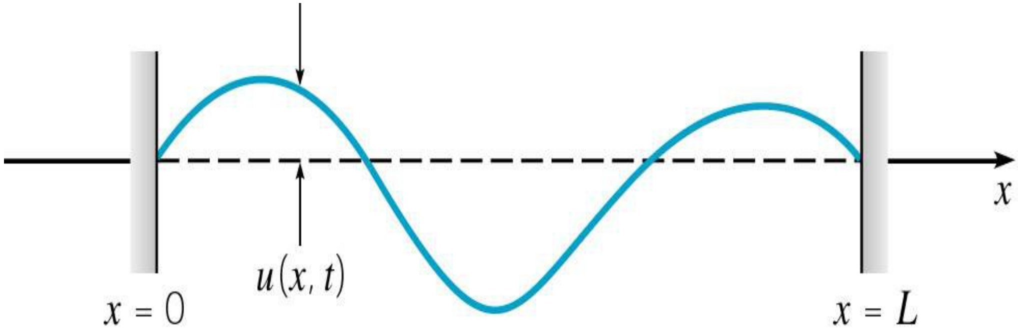
$$u(x,0) = f(x), \; u_t(x,0) = 0, \quad 0 \leq x \leq L$$

é dado por

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(n\pi x / L) \cos(n\pi a t / L)$$

onde

$$c_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin(n\pi x / L)\, dx$$



Frequência Natural (7 de 9)

- Nossa solução é

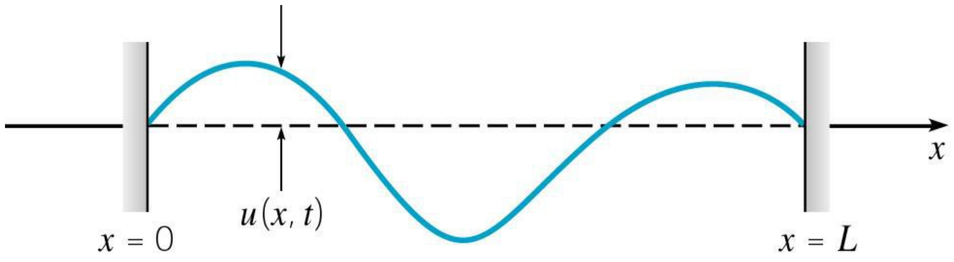
$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(n\pi\ x/L)\cos(n\pi\ at/L)$$

- Para valores fixos de n, a expressão

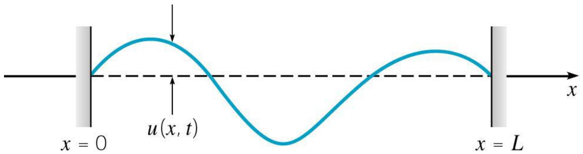
$$\sin(n\pi\ x/L)\cos(n\pi\ at/L)$$

é periódica no tempo t com período $T = 2L/na$, ela representa um movimento vibratório da corda com frequência $n\pi a/L$.

- As quantidades $\lambda a = n\pi a/L$, for $n = 1, 2, \ldots$, são as **frequências naturais** da corda – isto é, frequências nas quais a corda vibra livremente.



Modo Natural (8 de 9)



- Nossa solução é

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(n\pi \; x/L)\cos(n\pi \; a\,t/L)$$

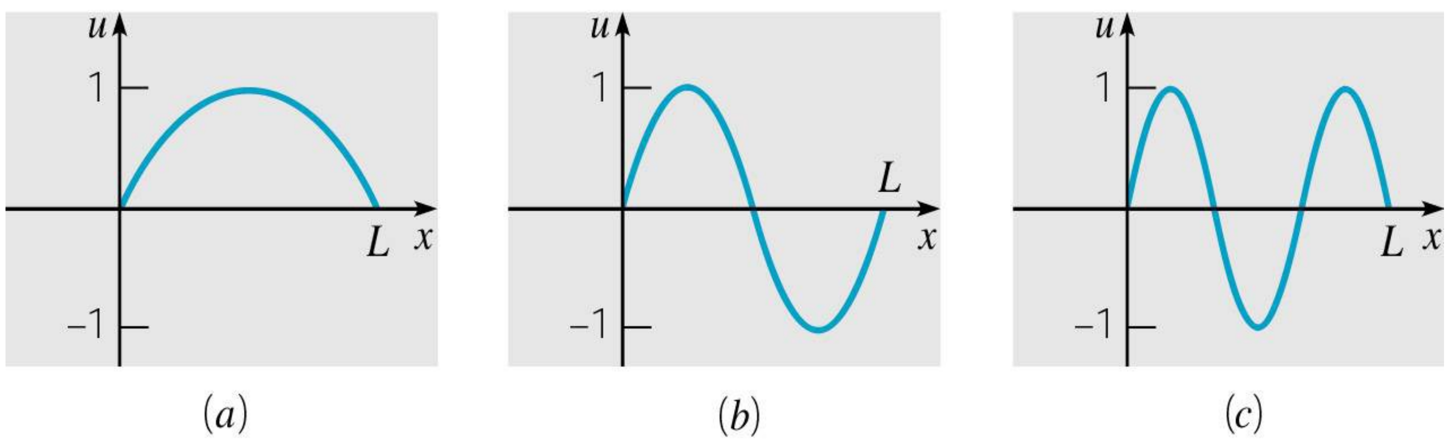
- Para um valor fixado de n, o fator

$$\sin(n\pi \; x/L)$$

representa o deslocamento padrão que ocorre na corda ao vibrar na frequência dada.
- Cada padrão de deslocamento é chamado um **modo natural** de vibração e periódico na variável espacial x.
- O período espacial $2L/n$ é chamado o **comprimento de onda** do modo de frequência $n\pi a/L$, para $n = 1, 2, \ldots$.

Gráfico dos Modos Naturais

- Assim os autovalores $n^2\pi^2/L^2$ do problema de vibrações são proporcionais aos quadrados das frequências naturais e as autofunções sen$(n\pi x/L)$ dão os modos naturais.
- Os três primeiros modos naturais estão esborçados abaixo.
- O movimento total da corda $u(x,t)$ é uma combinação dos modos naturais de vibração e, também, uma função periódica no tempo com período $2L/a$.



Exemplo 1: Problema da Corda vibrante (1 de 5)

- Considere o Problema da corda vibrante da forma

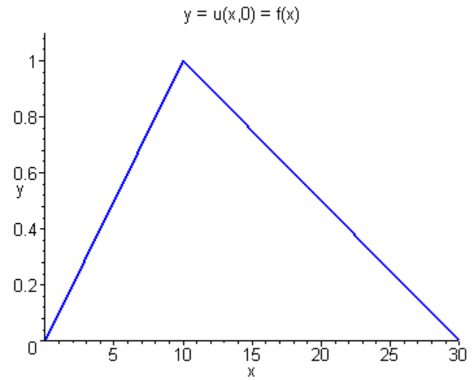
$$4u_{xx} = u_{tt}, \quad 0 < x < 30, \quad t > 0$$

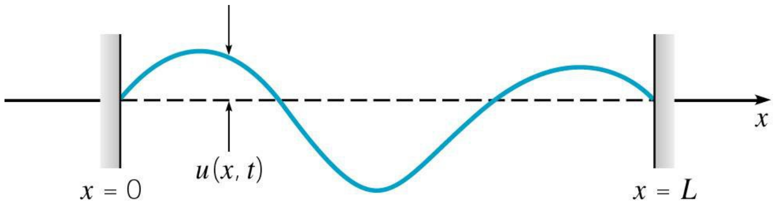
$$u(0,t) = 0, \ u(30,t) = 0, \quad t \geq 0$$

$$u(x,0) = f(x), \ u_t(x,0) = 0, \quad 0 \leq x \leq 30$$

onde

$$f(x) = \begin{cases} x/10, & 0 \leq x \leq 10 \\ (30 - x)/20, & 10 < x \leq 30 \end{cases}$$





Exemplo 1: Solução (2 de 5)

- A solução de nosso problema da corda vibrante é

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(n\pi x/30)\cos(2n\pi t/30)$$

onde

$$c_n = \frac{2}{30}\int_0^{10} \frac{x}{10}\sin(n\pi x/30)\,dx + \frac{2}{30}\int_{10}^{30} \frac{30-x}{20}\sin(n\pi x/30)\,dx$$

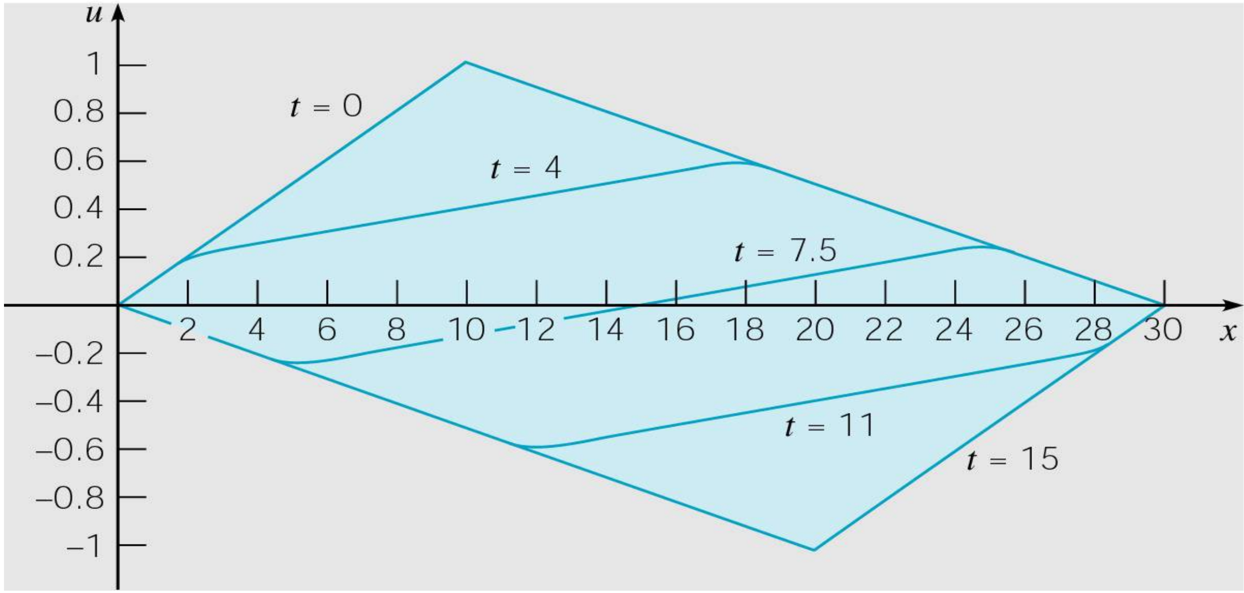
$$= \frac{9}{n^2\pi^2}\sin(n\pi/3),\ \ n = 1,2,\ldots$$

- Assim

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{9}{n^2\pi^2}\sin(n\pi/3)\sin(n\pi x/30)\cos(2n\pi t/30)$$

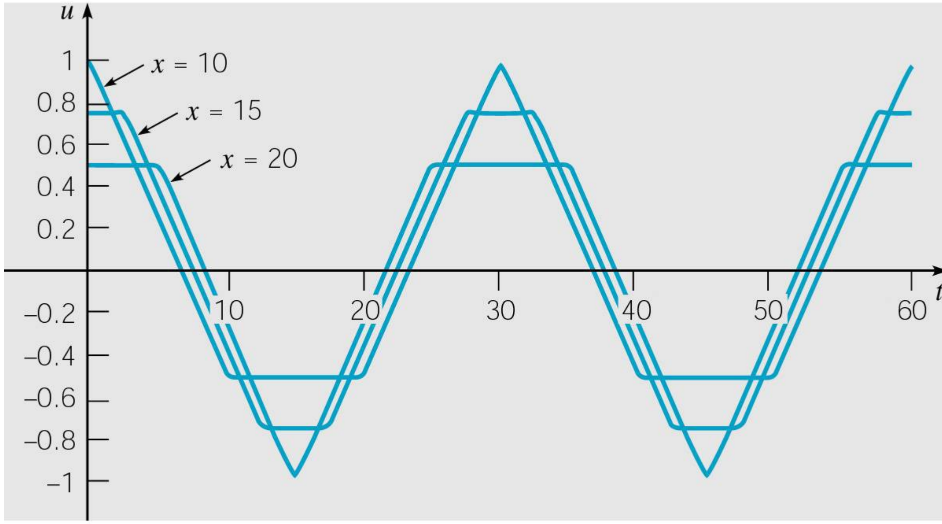
Exemplo 1: Deslocamento Padrão (3 de 5)

- O gráfico abaixo $u(x,t)$ para valores fixos de t mostra o deslocamento padrão da corda para diferentes tempos.
- Note que o deslocamento inicial máximo é positivo e ocorre para $x = 10$, enquanto em $t = 15$, meio período mais tarde, o deslocamento máximo é negativo e ocorre em $x = 20$.
- A corda, então, refaz seu movimento e volta à configuração original em $t = 30$.



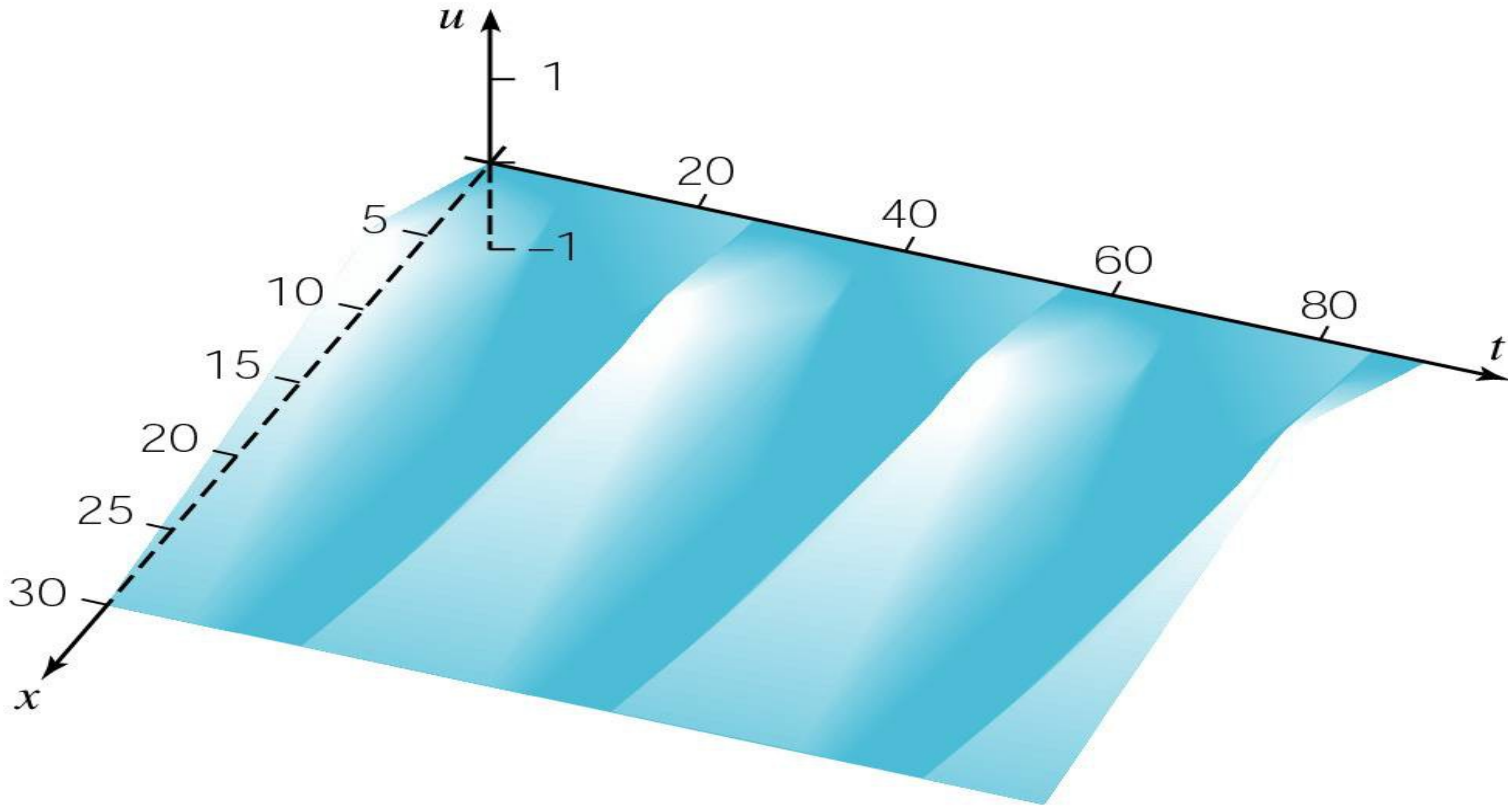
Exemplo 1: Comportamento espacial ao longo do tempo (4 de 5)

- O gráfico abaixo de $u(x,t)$ para valores fixos de x mostra o comportamento dos pontos da corda $x = 10$, 15, e 20, com o avanço do tempo.
- Os gráficos confirmam que o movimento é periódico com período 30.
- Observe também, que cada ponto interior na corda fica parado durante um terço de cada período.



Exemplo 1: Gráfico de $u(x,t)$ (5 de 5)

- Gráfico tridimensional de u em função de x e t.



Justificativa da Solução (1 de 10)

- Nesta fase, a solução para o problema da corda vibrante é

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\left(n\pi\, x/L\right)\cos\left(n\pi\, a t/L\right)$$

onde

$$c_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left(n\pi\, x/L\right) dx$$

é somente uma *solução formal* para garantir que de fato representa a solução do problema dado é necessário que se estudo mais a fundo.

Por enquanto tal justificativa está além do nosso alcance, nós só discutiremos certas características do argumento aqui.

Solução Formal das Derivadas Parciais (2 de 10)

- É tentador para tentar justificar a solução, substituindo

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(n\pi\, x/L)\cos(n\pi\, at/L)$$

na equação diferencial, e nas condições de contorno e iniciais.

- No entanto, ao calcular formalmente u_{xx}, por exemplo, temos

$$u_{xx}(x,t) = -\sum_{n=1}^{\infty} c_n \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \sin(n\pi\, x/L)\cos(n\pi\, at/L)$$

- Devido ao fator n^2 no numerador, a séries pode não convergir.
- Isso pode significar não necessariamente que a série de $u(x,t)$ está incorreta, mas que não pode ser usada para calcular u_{xx} e u_{tt}.

Comparação das Soluções Formais (3 de 10)

- Uma diferença básica entre a solução da equação da onda

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(n\pi\, x/L)\cos(n\pi\, a t/L)$$

e da equação do calor

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-(n\pi\alpha/L)^2 t} \sin(n\pi\, x/L)$$

É a presença dos termos exponenciais negativos na segunda, o qual se aproxima de zero rapidamente e assegura a convergência da solução em série e de suas derivadas.

- Em contraste, as soluções da séries da equação da onda contém somente termos oscilatórios que não decai com o crescimento de n.

Forma Alternativa para Validação da Solução

- Existe uma forma alternativa para validar nossa solução

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(n\pi\, x/L)\cos(n\pi\, a\,t/L)$$

indiretamente. Nós também ganharemos informação adicional sobre a estrutura da solução.

- Vamos mostrar, primeiro que a solução é equivalente a

$$u(x,t) = \left[h(x - at) + h(x + at)\right]/2$$

onde h é a extensão periódica ímpar de f:

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & 0 \le x \le L \\ -f(-x), & -L < x < 0 \end{cases}, \qquad h(x + 2L) = h(x)$$

Expressão Alternativa para Solução (5 de 10)

- Como h é uma extensão ímpar de f, ela possui uma série de senos de Fourier

$$h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(n\pi x/L), \quad c_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin(n\pi x/L)\,dx$$

- Então, usando a identidade trigonométrica

$$\sin(A \pm B) = \sin A \cos B \pm \cos A \sin B$$

obtemos

$$h(x - at) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\left[\sin(n\pi x/L)\cos(n\pi at/L) - \cos(n\pi x/L)\sin(n\pi at/L)\right]$$

$$h(x + at) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\left[\sin(n\pi x/L)\cos(n\pi at/L) + \cos(n\pi x/L)\sin(n\pi at/L)\right]$$

- Usando estas equações, obtém-se

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(n\pi x/L)\cos(n\pi at/L) = \left[h(x - at) + h(x + at)\right]/2$$

Continuidade da f (6 de 10)

- Assim

$$u(x,t) = \left[h(x-at) + h(x+at)\right]/2, \quad -L < x \leq L,\ t > 0$$

onde

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & 0 \leq x \leq L \\ -f(-x), & -L < x < 0 \end{cases}, \quad h(x+2L) = h(x)$$

- Então $u(x,t)$ é contínua em $0 < x < L$, $t > 0$, desde que h seja contínua no intervalo $(-\infty, \infty)$.
- Isto requer que f seja contínua no intervalo original $[0, L]$.
- Além disso, lembre-se que as condições de compatibilidade no problema corda vibrante requerem $f(0) = f(L) = 0$.
- Assim $h(0) = h(L) = h(-L) = 0$ também.

Continuidade da $f\,'$ e $f\,''$

- Temos

$$u(x,t) = \left[h(x - at) + h(x + at)\right]/2, \quad -L < x \le L,\ t > 0$$

onde

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & 0 \le x \le L \\ -f(-x), & -L < x < 0 \end{cases}, \qquad h(x + 2L) = h(x)$$

- Note que $u(x,t)$ é duas vezes continuamente diferenciável com respeito a qualquer uma das variáveis de $0 < x < L$, $t > 0$, desde que h seja duas vezes continuamente diferenciável em $(-\infty, \infty)$.
- Isto requer que $f\,'$ e $f\,''$ seja contínua em $[0, L]$.

Condições nos extremos para f'' (8 de 10)

- Temos

$$u(x,t) = \left[h(x-at)+h(x+at)\right]/2, \quad -L < x \leq L,\ t > 0$$

onde

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & 0 \leq x \leq L \\ -f(-x), & -L < x < 0 \end{cases}, \qquad h(x+2L) = h(x)$$

- Assumindo que h é duas vezes continuamente diferenciável em $(-\infty, \infty)$.
- Como h'' é a extensão ímpar de f'', temos que $f''(0) = 0$ e $f''(L) = 0$.
- Desde que h' seja a extensão par de f', não são necessárias condições adicionais sobre f'.

Solução da Equação da Onda (9 de 10)

- Temos

$$u(x,t) = [h(x - at) + h(x + at)]/2, \quad -L < x \le L,\ t > 0$$

onde

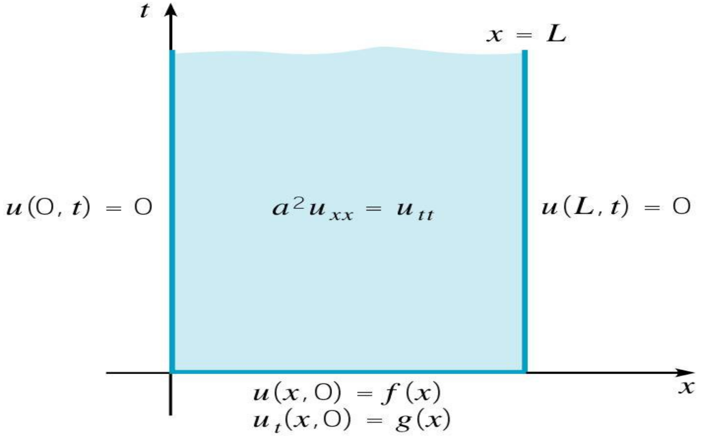
$$h(x) = \begin{cases} f(x), & 0 \le x \le L \\ -f(-x), & -L < x < 0 \end{cases}, \qquad h(x + 2L) = h(x)$$

- Desde que todas estas condições forem satisfeitas, u_{xx} e u_{tt} podem ser calculadas pelas formulas acima para u e h.
- Pode-se então mostrar que estas derivadas satisfazem a equação de onda, e as condições de contorno e iniciais são satisfeitas.
- Assim $u(x,t)$ é uma solução para o problema da corda vibrante, onde

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(n\pi\, x/L)\cos(n\pi\, a\,t/L), \quad c_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin(n\pi\, x/L)\,dx$$

Efeitos da descontinuidades iniciais (10 de 10)

- Se algumas das condições enunciadas anteriormente não forem satisfeitas, então u não vai ser diferenciável em alguns pontos da faixa semi-infinita $0 < x < L$, e $t > 0$, e assim u é uma solução da equação de onda apenas em um sentido um tanto restrito.
- Uma consequência física importante dessa observação é que, se o dado inicial f tem alguma descontinuidade, ela será preservada na solução $u(x,t)$ durante todo o tempo.
- Em contraste, em problemas de condução de calor, descontinuidades iniciais são imediatamente suavizados.



Problema Geral para a Corda Elástica $f = 0$ (1 de 6)

- Suponha que a corda é colocada em movimento a partir de sua posição de equilíbrio com uma velocidade inicial dada.
- Então, o deslocamento vertical $u(x, t)$ satisfaz

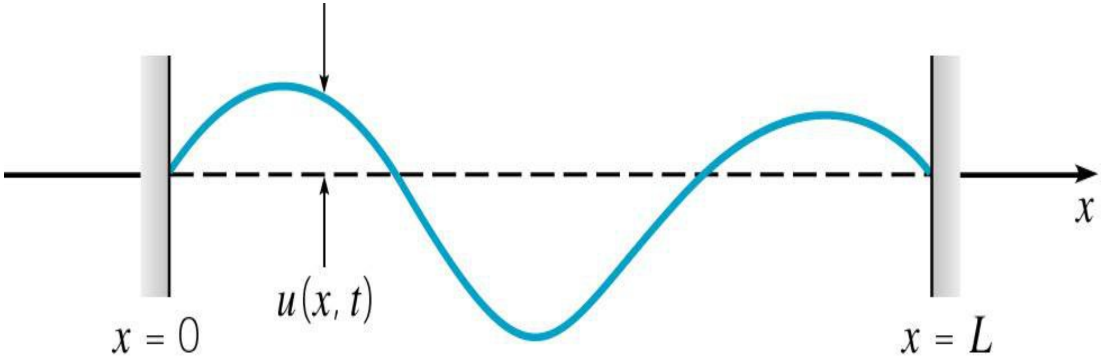
$$a^2 u_{xx} = u_{tt}, \quad 0 < x < L, \quad t > 0$$

$$u(0,t) = 0, \; u(L,t) = 0, \quad t \geq 0$$

$$u(x,0) = 0, \; u_t(x,0) = g(x), \quad 0 \leq x \leq L$$

onde g é a velocidade inicial da corda no ponto x.

- Usaremos o Método Separação de Variáveis para encontrar a solução deste problema.



Método Separação de Variáveis (2 de 6)

- Tomando

$$u(x,t) = X(x)T(t)$$

Temos duas equações diferenciais

$$X'' + \lambda X = 0, \quad T'' + a^2\lambda T = 0$$

- A condição de contorno pede que $X(0) = 0$, $X(L) = 0$, então

$$X'' + \lambda X = 0, \quad X(0) = X(L) = 0$$

- Para termos soluções não triviais, os autovalores e autofunções para este problema são

$$\lambda_n = n^2\pi^2 / L^2, \quad X_n(x) = \sin(n\pi x / L), \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

- Então $T(t)$ satisfaz

$$T'' + a^2 n^2 \pi^2 / L^2 \, T = 0$$

Condições de Contorno (3 de 6)

- Lembre que as condições iniciais são

$$u(x,0) = 0,\ \ u_t(x,0) = g(x),\ \ 0 \le x \le L$$

- Substituindo $u(x,t) = X(x)T(t)$ na primeira destas condições,

$$u(x,0) = X(x)T(0) = 0,\ \ 0 \le x \le L \quad \Rightarrow \quad T(0) = 0$$

- Portanto $T(t)$ satisfaz

$$T'' + a^2 n^2 \pi^2 / L^2\, T = 0,\ \ T(0) = 0$$

com solução

$$T(t) = k_1 \cos(n\pi\, a t / L) + k_2 \sin(n\pi\, a t / L),$$

onde k_1, k_2 são constantes.

- como $T(0) = 0$, segue que $k_1 = 0$, e portanto

$$T(t) = k_1 \sin(n\pi\, a t / L)$$

Soluções Fundamentais (4 de 6)

- Assim nossas soluções fundamentais são da forma

$$u_n(x,t) = \sin(n\pi\ x/L)\sin(n\pi\ at/L), \quad n = 1,2,3,\ldots,$$

onde omitimos as constantes.

- Para satisfazer a condição inicial

$$u_t(x,0) = g(x), \quad 0 \le x \le L$$

assumimos

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} k_n u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} k_n \sin(n\pi\ x/L)\sin(n\pi\ at/L)$$

onde k_n são escolhidos tal que as condições iniciais são satisfeitas.

Condição Inicial (5 de 6)

- Assim

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} k_n u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} k_n \sin(n\pi\, x/L)\sin(n\pi\, a t/L)$$

onde k_n são escolhidos tal que as condições iniciais são verificadas:

$$u_t(x,0) = g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi\, a}{L} k_n \sin(n\pi\, x/L)$$

- Por isso

$$\frac{n\pi\, a}{L} k_n = \frac{2}{L}\int_0^L g(x)\sin(n\pi\, x/L)\,dx$$

ou

$$k_n = \frac{2}{n\pi\, a}\int_0^L g(x)\sin(n\pi\, x/L)\,dx$$

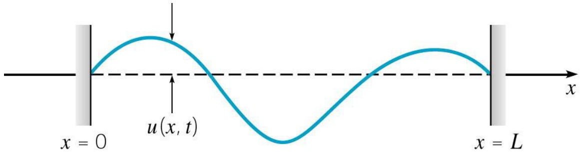
Solução (6 de 6)

- Portanto a solução do problema da corda vibrante

$$a^2 u_{xx} = u_{tt}, \quad 0 < x < L, \quad t > 0$$

$$u(0,t) = 0, \; u(L,t) = 0, \quad t \geq 0$$

$$u(x,0) = 0, \; u_t(x,0) = g(x), \quad 0 \leq x \leq L$$



é dado por

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(n\pi x / L) \sin(n\pi a t / L)$$

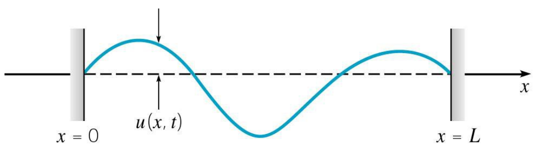
onde

$$c_n = \frac{2}{n\pi a} \int_0^L g(x) \sin(n\pi x / L)\, dx$$

Problema Geral para a Corda Elástica (1 de 3)

- Suponha que a corda é posta em movimento a partir de uma posição inicial geral com uma determinada velocidade.
- Então o deslocamento vertical $u(x, t)$ satisfaz

$$a^2 u_{xx} = u_{tt}, \quad 0 < x < L, \quad t > 0$$



$$u(0,t) = 0, \; u(L,t) = 0, \quad t \geq 0$$

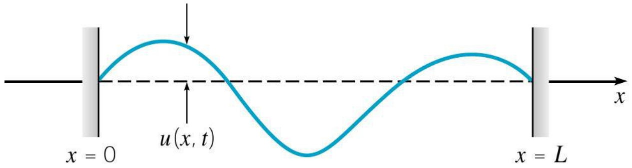
$$u(x,0) = f(x), \; u_t(x,0) = g(x), \quad 0 \leq x \leq L$$

onde f é a posição inicial e g é a velocidade inicial da corda no ponto x.

- Podemos usar o Método Separação de Variáveis para obter a solução.
- No entanto, é importante observar que ele também pode ser resolvido somando-se, simplesmente, as duas soluções obtidas anteriormente.

Problemas em Separados (2 de 3)

- Seja $v(x,t)$ satisfazendo



$$a^2 v_{xx} = v_{tt}, \quad 0 < x < L, \quad t > 0$$
$$v(0,t) = 0, \; v(L,t) = 0, \quad t \geq 0$$
$$v(x,0) = f(x), \; v_t(x,0) = 0, \quad 0 \leq x \leq L$$

e seja $w(x,t)$ satisfazendo

$$a^2 w_{xx} = w_{tt}, \quad 0 < x < L, \quad t > 0$$
$$w(0,t) = 0, \; w(L,t) = 0, \quad t \geq 0$$
$$w(x,0) = 0, \; w_t(x,0) = g(x), \quad 0 \leq x \leq L$$

- Então $u(x,t) = v(x,t) + w(x,t)$ satisfaz o problema geral

$$a^2 u_{xx} = u_{tt}, \quad 0 < x < L, \quad t > 0$$
$$u(0,t) = 0, \; u(L,t) = 0, \quad t \geq 0$$
$$u(x,0) = f(x), \; u_t(x,0) = g(x), \quad 0 \leq x \leq L$$

Superposição (3 de 3)

- Então $u(x,t) = v(x,t) + w(x,t)$ satisfaz o problema geral

  $$a^2 u_{xx} = u_{tt}, \quad 0 < x < L, \quad t > 0$$

  $$u(0,t) = 0, \quad u(L,t) = 0, \quad t \geq 0$$

  $$u(x,0) = f(x), \quad u_t(x,0) = g(x), \quad 0 \leq x \leq L$$

  onde

  $$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(n\pi x/L)\cos(n\pi a t/L), \quad c_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin(n\pi x/L)\,dx$$

  $$w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} k_n \sin(n\pi x/L)\sin(n\pi a t/L), \quad k_n = \frac{2}{n\pi a}\int_0^L g(x)\sin(n\pi x/L)\,dx$$

- Esta é uma outra aplicação do princípio da sobreposição

10.8: Equação de Laplace

- Uma das equações diferenciais parciais mais importantes que ocorrem em matemática aplicada é a **Equação de Laplace**.
- Em duas dimensões, esta equação é da forma

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

e em três dimensão

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0$$

- Por exemplo, o problema de condução de calor em duas dimensões, a temperatura $u(x,y,t)$ satisfaz a equação diferencial

$$\alpha^2\left(u_{xx} + u_{yy}\right) = u_t$$

onde α^2 é a difusividade térmica. Se existir um estado estacionário, então u é uma função somente de x e y, e a derivada em relação a t desaparece.

Equação do Potencial

- A função potencial de uma partícula livre no espaço, sob a ação, apenas, de forças gravitacionais, satisfaz a equação

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

onde a equação de Laplace é conhecida **Equação do Potencial**.

- Em elasticidade, os deslocamentos que ocorrem quando uma barra perfeitamente elástica é torcida são descritos em termos da função de deformação que também satisfaz a equação

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

- Vamos concentrar na equação de Laplace no caso bidimensional.

Condições de Contorno (1 de 4)

- Como não existe dependência no tempo nos problemas mencionados

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

não existem condições iniciais a serem satisfeitas pelas soluções.

- No entanto, elas satisfazem certas condições de contorno em uma curva ou superfície que marca a fronteira da região na qual a equação diferencial vai ser resolvida.
- Como a equação de Laplace é de segunda ordem, parece razoável esperar que sejam necessárias duas codnições de contorno para determinar, completamente, a solução.
- Isso não ocorre, como veremos a seguir.

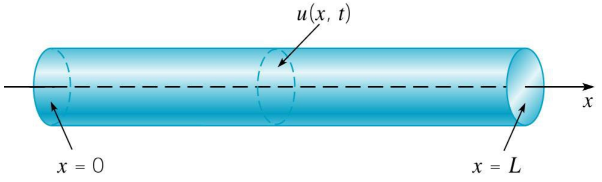
Condições de Contorno (2 de 4)

- Lembrando da condução de calor em uma barra:

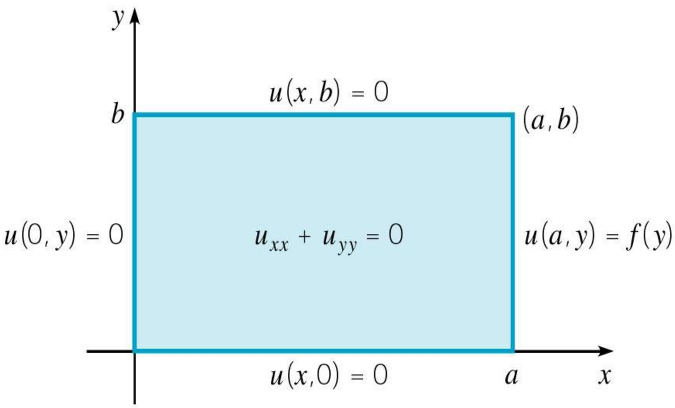
$$\alpha^2 u_{xx} = u_t, \quad 0 < x < L, \quad t > 0$$

$$u(0,t) = T_1, \quad u(L,t) = T_2, \quad t > 0$$

$$u(x,0) = f(x), \quad 0 \le x \le L$$



- Note que foi necessário prescrever uma condição, em cada extremo da barra, isto é, uma condição para cada ponto do contorno.
- Generalizando esta observação para problemas multi-dimensional, é natural prescrever uma condição para u em cada ponto da fronteira de uma região na qual a solução é procurada.



Tipos comuns de condições de contorno (3 de 4)

- A condição de contorno mais comum ocorre quando é especificado o valor de u em cada ponto na fronteira.
- Em termos do problema de condução de calor, isso corresponde a descrever a temperatura na fronteira.
- Em alguns problemas, é dado o valor da derivada, ou taxa de variação de u na direção normal à fronteira.
- Por exemplo, a condição sobre um corpo termicamente isolado, é desse tipo.
- É possível a ocorrência de condições de contorno mais complicadas, por exemplo, u pode ser especificado em parte da fronteira e sua derivada normal especificada na outra parte.

Condições de Dirichlet e Neumann (4 de 4)

- O problema de encontrar uma solução da equação de Laplace com valores, de *u,* dados na fronteira é conhecido como um **Problema de Dirichlet**.
- O problema de encontrar uma solução da equação de Laplace se os valores da derivada normal, de *u*, são dados na fronteira é conhecido como um **Problema de Neumann**.
- Os problemas de Dirichler e Neumann também são conhecidos como o primeiro e o segundo problemas de valores de contorno da teoria do potencial, respectivamente.
- Existência e unicidade da solução da equação de Laplace sob estas condições de contorno podem ser mostrados, desde que a forma do contorno e as funções que aparecem nas condições de contorno satisfazer certas condições bem fracas.

Problema Dirichlet para um Retângulo (1 de 8)

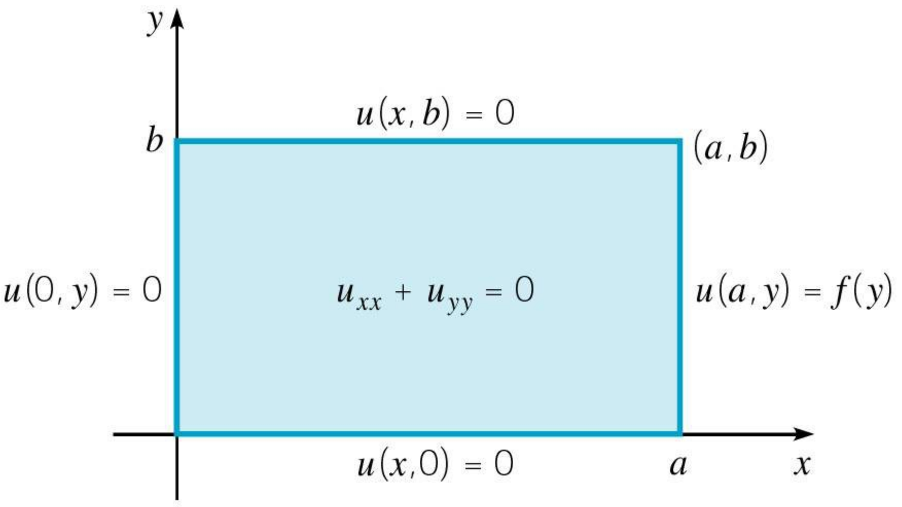
- Considere o seguinte problema de Dirichlet em um retângulo:

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b$$

$$u(x,0) = 0, \quad u(x,b)) = 0, \quad 0 < x < a$$

$$u(0,y) = 0, \quad u(a,y) = f(y), \quad 0 \le y \le b$$

onde f é uma função dada $0 \le y \le b$.



Método Separação de Variáveis (2 de 8)

- Assumindo

$$u(x, y) = X(x)Y(y)$$

- Substituindo-o na equação diferencial

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

obtemos

$$X''Y + XY'' = 0$$

ou

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = \lambda \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} X'' - \lambda X = 0 \\ Y'' + \lambda Y = 0, \end{array}$$

onde λ é uma constante.

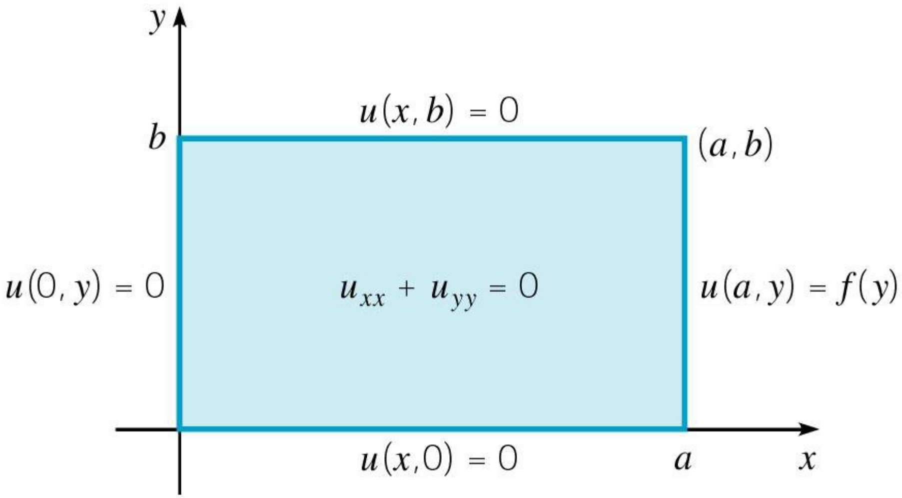
Condições de Contorno (3 de 8)

- Problema de Dirichlet é

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad 0 < x < a, \qquad 0 < y < b$$

$$u(x,0) = 0, \quad u(x,b) = 0, \qquad 0 < x < a$$

$$u(0,y) = 0, \quad u(a,y) = f(y), \quad 0 \leq y \leq b$$



- Substituindo $u(x,y) = X(x)Y(y)$ nas condições de contorno homogêneo, encontramos

$$u(0,y) = X(0)Y(y) = 0, \quad 0 \leq y \leq b \quad \Rightarrow \quad X(0) = 0,$$

$$u(x,0) = X(x)Y(0) = 0, \quad 0 < x < a \quad \Rightarrow \quad Y(0) = 0,$$

$$u(x,b) = X(x)Y(b) = 0, \quad 0 < x < a \quad \Rightarrow \quad Y(b) = 0$$

Autovalores e autofunções (4 de 8)

- Obtemos, então, duas equações diferenciais ordinárias:

$$X'' - \lambda X = 0, \quad X(0) = 0;$$

$$Y'' + \lambda Y = 0, \quad Y(0) = 0, \quad Y(b) = 0$$

- Como vimos anteriormente, segue que

$$\lambda_n = n^2\pi^2 / b^2, \quad Y_n(y) = \sin(n\pi\, y / b), \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

- Com estes valores para λ, a solução para a equação

$$X'' - \lambda X = 0$$

é

$$X(x) = k_1 \cosh(n\pi\, x / b) + k_2 \sinh(n\pi\, x / b),$$

onde k_1, k_2 são constantes. como $X(0) = 0$, $k_1 = 0$, e assim

$$X(x) = k_2 sinh(n\pi\, x / b)$$

Soluções Fundamentais (5 de 8)

- Assim nossas soluções fundamentais tem a forma

$$u_n(x,y) = \sinh(n\pi\ x/b)\sin(n\pi\ y/b), \quad n = 1,2,3,\ldots,$$

  Onde omitimos as constantes.

- Para satisfazer a condição em $x = a$,

$$u(a,y) = f(y), \quad 0 \le y \le b,$$

  assuma que

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sinh(n\pi\ x/b)\sin(n\pi\ y/b)$$

  onde as c_n são escolhidas tal que satisfazem as condições iniciais.

Condição Inicial (6 de 8)

- Assim

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sinh(n\pi\ x/b)\sin(n\pi\ y/b)$$

onde as c_n são escolhidas tal que satisfaz a condição inicial:

$$u(a,y) = f(y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sinh(n\pi\ a/b)\sin(n\pi\ y/b)$$

- Portanto

$$c_n \sinh\left(\frac{n\pi\ a}{b}\right) = \frac{2}{b}\int_0^b f(y)\sin(n\pi\ y/b)\,dy$$

ou

$$c_n = \frac{2}{b}\sinh\left(\frac{n\pi\ a}{b}\right)^{-1}\int_0^b f(y)\sin(n\pi\ y/b)\,dy$$

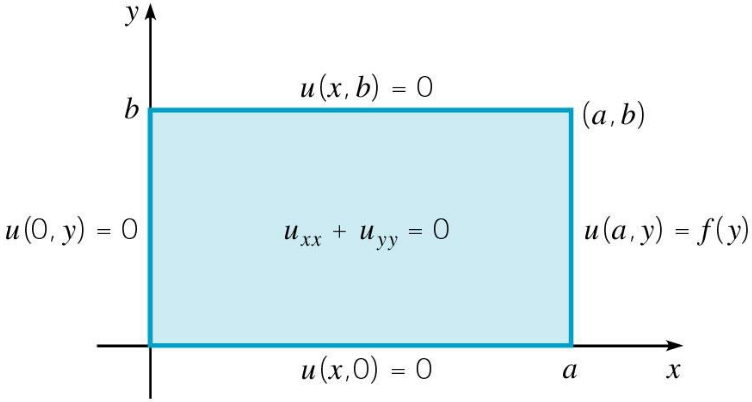
Solução (7 de 8)

- Portanto a solução do problema de Dirichlet

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad 0 < x < a, \qquad 0 < y < b$$

$$u(x,0) = 0, \quad u(x,b) = 0, \qquad 0 < x < a$$

$$u(0,y) = 0, \quad u(a,y) = f(y), \quad 0 \le y \le b$$



é dado por

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sinh(n\pi x/b)\sin(n\pi y/b)$$

onde

$$c_n = \frac{2}{b}\sinh\left(\frac{n\pi a}{b}\right)^{-1}\int_0^b f(y)\sin(n\pi y/b)\,dy$$

Convergência Rápida (8 de 8)

- Nossa solução é

$$u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty} c_n \sinh(n\pi\ x/b)\sin(n\pi\ y/b)$$

onde

$$c_n=\frac{2}{b}\sinh\left(\frac{n\pi\ a}{b}\right)^{-1}\int_0^b f(y)\sin(n\pi\ y/b)\,dy$$

- Para n grande, $\sinh(x) = (e^x - e^{-x})/2 \cong (e^x)/2$ e logo

$$\frac{\sinh(n\pi\ x/b)}{\sinh(n\pi\ a/b)}\cong\frac{e^{n\pi\ x/b}}{e^{n\pi\ a/b}}=e^{-n\pi\ (a-x)/b}$$

- Esse fator, comporta-se como uma exponencial com potência negativa.
- A representação em série de of $u(x,t)$ acima converge rapidamente a memos que $a - x$ seja muito pequeno.

Exemplo 1: Problema de Dirichlet (1 de 2)

- Considere o seguinte problema na forma

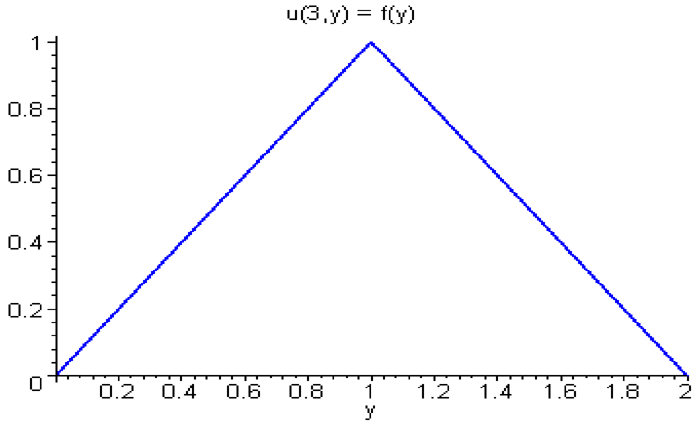
$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad 0 < x < 3, \quad 0 < y < 2$$

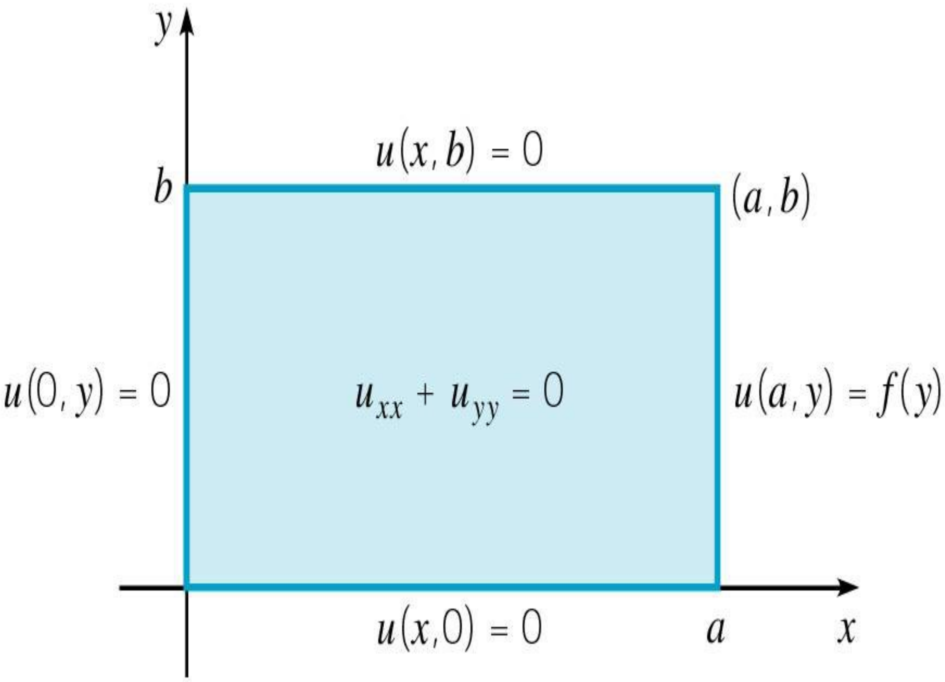
$$u(x,0) = 0, \quad u(x,2) = 0, \quad 0 < x < 3$$

$$u(0,y) = 0, \quad u(3,y) = f(y), \quad 0 \le y \le 2$$

onde

$$f(y) = \begin{cases} y, & 0 \le y \le 1 \\ 2 - y, & 1 \le y \le 2 \end{cases}$$



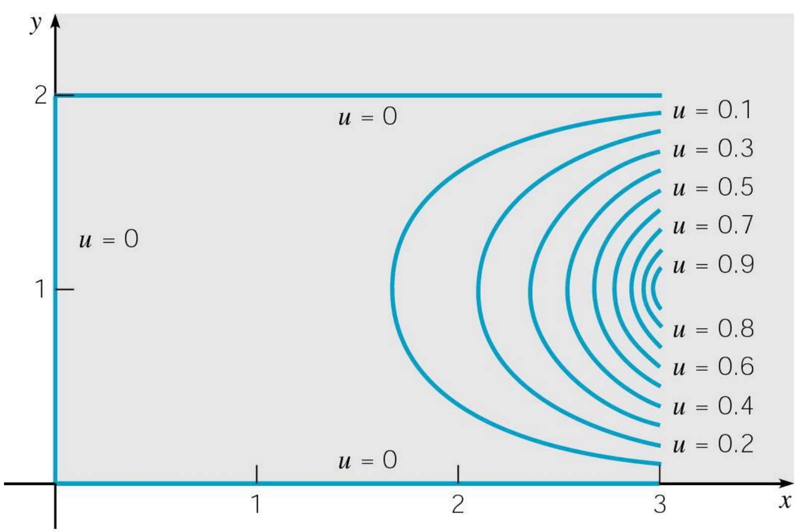


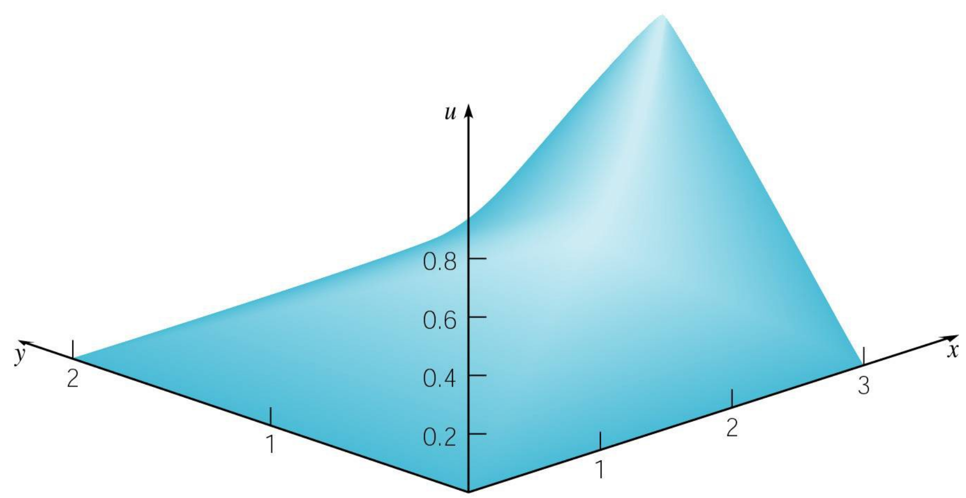
Exemplo 1: Solução (2 de 2)

- A solução do nosso problema de Dirichlet

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8\sin(n\pi/2)}{n^2\pi^2\sinh(3n\pi/2)} \sin\left(n\pi x/2\right)\cos\left(n\pi t\right)$$

- O gráfico de $u(x,y)$ é dado abaixo á direita, e o gráfico contendo curvas de nível de $u(x,y)$ está à esquerda.





Problema de Dirichlet em um Círculo (1 de 8)

- Considere o problema da equação de Laplace em uma região circular $r < a$ sujeita à condição de contorno

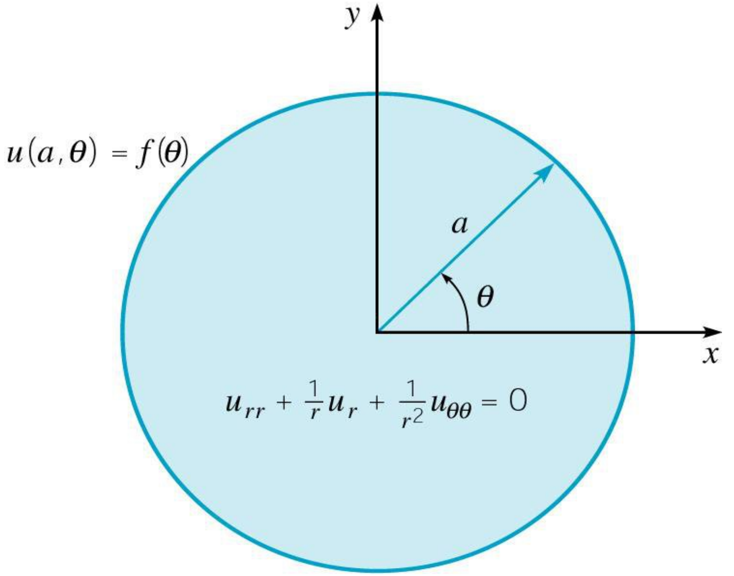
$$u(a,\theta) = f(\theta), \quad 0 \leq \theta < 2\pi$$

onde f é uma função dada.

- Em coordenadas polares, a equação de Laplace tem a forma

$$u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 0$$

- Pedimos que $u(r,\theta)$ seja periódica em θ com período 2π, e que $u(r,\theta)$ seja limitada para $r \leq a$.



Método Separação de Variáveis (2 de 8)

- Vamos supor que

$$u(r,\theta) = R(r)\Theta(\theta)$$

- Substituindo na equação diferencial de Laplace

$$u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 0$$

obtemos

$$R''\Theta + \frac{1}{r}R'\Theta + \frac{1}{r^2}R\Theta'' = 0$$

ou

$$r^2\frac{R''}{R} + r\frac{R'}{R} = -\frac{\Theta''}{\Theta} = \lambda \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} &r^2R'' + rR' - \lambda R = 0 \\ &\Theta'' + \lambda\Theta = 0 \end{aligned}$$

onde λ é uma constante.

Equações para $\lambda < 0$, $\lambda = 0$ (3 de 8)

- Como $u(r,t)$ é periódica em θ com período 2π, pode-se mostrar que λ é real. Consideremos o caso $\lambda < 0$, $\lambda = 0$ e $\lambda > 0$.
- Se $\lambda < 0$, seja $\lambda = -\mu^2$ onde $\mu > 0$. Então

$$\Theta'' - \mu^2 \Theta = 0 \quad \Rightarrow \quad \Theta = c_1 e^{\mu\theta} + c_2 e^{-\mu\theta}$$

- Assim $\Theta(\theta)$ periódica somente se $c_1 = c_2 = 0$; conclui-se que λ não pode ser negativo.
- Se $\lambda = 0$, então a solução de $\Theta = 0$ é $\Theta = c_1 + c_2\theta$.
- Assim $\Theta(\theta)$ periódica somente se $c_2 = 0$; logo $\Theta(\theta)$ é constante.
- Além disso, a equação para R é a equação do tipo Euler

$$r^2 R'' + rR' = 0 \quad \Rightarrow \quad R(r) = k_1 + k_2 \ln r$$

- Como $u(r,t)$ é limitado para $r \leq a$, $k_2 = 0$ e assim $R(r)$ e constante.
- Logo a solução $u(r,\theta)$ é constante para $\lambda = 0$.

Equações para $\lambda > 0$ (4 de 8)

- Se $\lambda > 0$, tome $\lambda = \mu^2$ onde $\mu > 0$. Então

$$\Theta'' + \mu^2\Theta = 0 \quad \Rightarrow \quad \Theta = c_1 \sin(\mu\theta) + c_2\cos(\mu\theta)$$

- Assim $\Theta(\theta)$ é periódica com período 2π somente se $\mu = n$, onde n é um inteiro negativo.
- Além disso, a equação correspondente em R é a equação de Euler

$$r^2R'' + rR' + \mu^2R = 0 \quad \Rightarrow \quad R(r) = k_1r^{\mu} + k_2r^{-\mu}$$

- Como $u(r,t)$ é limitado para $r \leq a$, $k_2 = 0$ temos

$$R(r) = k_1r^{\mu}$$

- Segue que neste caso a solução é da forma

$$u_n(r,\theta) = r^n\cos n\theta\,, \quad v_n(r,\theta) = r^n\sin n\theta\,, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Soluções Fundamentais (5 de 8)

- Assim as soluções fundamentais de

$$u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 0$$

são, para $n = 1, 2, \ldots,$

$$u_0(r,\theta) = 1, \;\; u_n(r,\theta) = r^n \cos n\theta, \quad v_n(r,\theta) = r^n \sin n\theta$$

- De forma usual, assumimos que

$$u(r,\theta) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \left(c_n \cos n\theta + k_n \sin n\theta\right)$$

onde c_n e k_n são escolhidos de forma a satisfazer a condição de contorno

$$u(a,\theta) = f(\theta), \quad 0 \le \theta < 2\pi$$

Condições de Contorno (6 de 8)

- Como

$$u(r,\theta) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \left(c_n \cos n\theta + k_n \sin n\theta\right)$$

onde c_n e k_n são escolhido de forma a satisfazer a condição de contorno

$$u(a,\theta) = f(\theta) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a^n \left(c_n \cos n\theta + k_n \sin n\theta\right), \; 0 \leq \theta < 2\pi$$

- A função f pode ser estendida para for a deste intervalo $0 \leq \theta < 2\pi$ de modo a ficar periódica de período 2π, tendo portanto uma série de Fourier da forma acima.
- Podemos calcular os coeficientes c_n e k_n usando a Fórmula de Euler-Fourier.

Coeficientes (7 de 8)

- Como a extensão periódica de f tem período 2π, podemos calcular seus coeficientes de Fourier integrando em qualquer período da função.
- Em particular, é conveniente usar o intervalo original $(0, 2\pi)$.
- Assim para

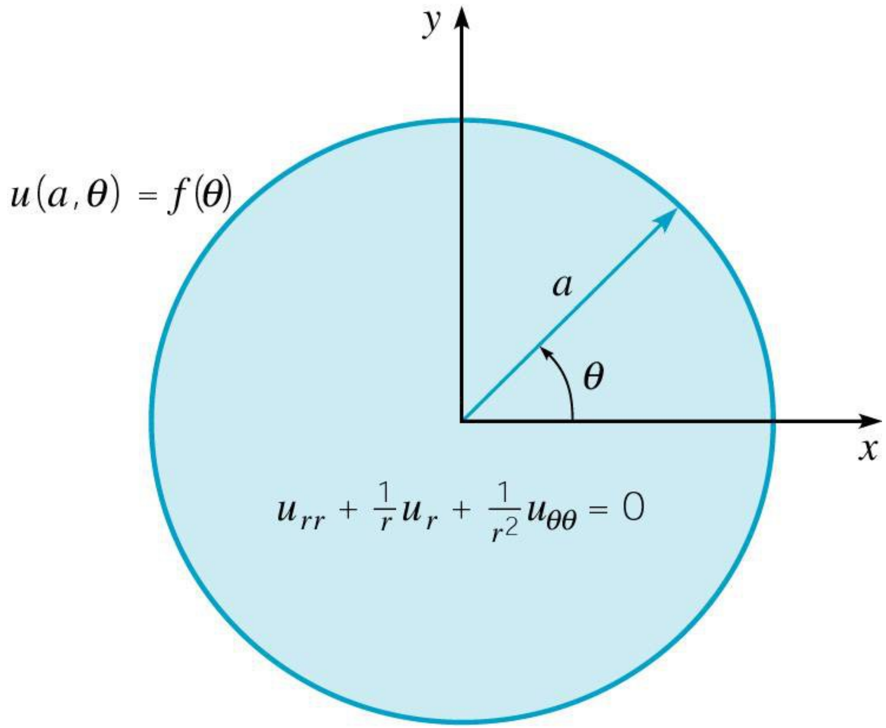
$$f(\theta) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a^n \left(c_n \cos n\theta + k_n \sin n\theta \right),$$

temos

$$a^n c_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \cos n\theta \, d\theta, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

$$a^n k_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \sin n\theta \, d\theta, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Solução (8 de 8)



- Portanto a solução para o Problema de contorno

$$u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 0,$$
$$u(a,\theta) = f(\theta), \quad 0 \le \theta < 2\pi$$

é dado por

$$u(r,\theta) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n\left(c_n \cos n\theta + k_n \sin n\theta\right),$$

onde

$$c_n = \frac{1}{a^n\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\cos n\theta \, d\theta, \quad k_n = \frac{1}{a^n\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\sin n\theta \, d\theta$$

- Note que, nesse problema, precisamos dos termos em senos e em cossenos na solução. Isso ocorre porque os dados de contorno foram dados em $0 \le \theta < 2\pi$ e têm período 2π.