

Fundamentos de Matemáticas Aplicadas

Juliho Castillo Colmenares

Índice general

Parte 1. Precálculo	5
Capítulo 1. Lógica y conjuntos	7
1. Lógica y Cálculo Proposicional	7
Bibliografía	19

Parte 1

Precálculo

Capítulo 1

Lógica y conjuntos

1. Lógica y Cálculo Proposicional

Muchos algoritmos y demostraciones usan expresiones lógicas tales como **si p entonces q** . Entonces es necesario conocer los casos en los cuales esas expresiones son **ciertas** o **falsas**. Discutiremos esto en esta unidad.

También investigamos el valor de verdad de enunciados cuantificados, que son aquellos que usan los cuantificadores lógicos **para todo...** y **existe...**

1.1. Proposiciones y Declaraciones Compuestas. Una proposición es un enunciado declarativo que puede ser cierto o falso, pero no ambos.

EJEMPLO 1.1. ¿Cuál de los siguientes enunciados es una proposición?

1. El hielo flota en el agua.
2. China está en Europa.
3. $2 + 2 = 4$
4. $2 + 2 = 5$
5. ¿A donde vas?
6. Haz tu tarea.

1.2. Proposiciones compuestas. Muchas proposiciones están **compuestas** de proposiciones más simples, llamadas *subproposiciones*, por medio de *conectores lógicos*. Una proposición se dice que es *primitiva* si no puede descomponerse en proposiciones más simples.

Por ejemplo, las siguientes proposiciones son compuestas

- “Las rosas son rojas y las violetas son azules”
- “Juan es inteligente y estudiaba hasta muy noche”

La propiedad fundamental de una proposición compuesta es que su valor de verdad está completamente determinado por los valores de verdad de sus subproposiciones y la manera en la cual están conectadas para formar la proposición compuesta.

1.3. Operaciones Lógicas Básicas. En esta sección discutiremos las tres operaciones lógicas básicas: conjunción, disjunción y la negación.

1.4. Conjunción $p \wedge q$. Cualesquiera dos proposiciones p, q pueden ser combinadas por la palabra “y” para formar una proposición compuesta llamada *conjunción* que se escribe $p \wedge q$.

DEFINICIÓN 1.1. Si tanto p como q son ciertas, entonces $p \wedge q$ es cierta; en otro caso $p \wedge q$ es falsa.

OBSERVACIÓN 1.1. Para entender mejor como se conectan los valores de verdad, generalmente se utilizan *tablas de verdad*.

Por brevedad 1 representará el valor **cierto**, mientras que 0 representará **falso**

TABLA DE VERDAD 1 (Conjunción).

p	q	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

En este curso, usaremos el *sistema algebraico de computo SageMath*, el cual está escrito con base en el lenguaje de programación **Python** e incorpora diversos paquetes de **OpenSource**.

Puede acceder a este sistema, a través de <https://cloud.sagemath.com/>

Construimos la tabla de verdad de la conjunción en el siguiente script <https://goo.gl/hEF5os>

1.5. Disjunción $p \vee q$. Cualesquiera dos proposiciones p, q pueden ser combinadas por la palabra “o” para formar una proposición compuesta llamada *disjunción* que se escribe $p \vee q$.

DEFINICIÓN 1.2. Si tanto p como q son falsas, entonces $p \vee q$ es falsa; en otro caso $p \vee q$ es verdadera.

TABLA DE VERDAD 2 (Disjunción).

p	q	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Construimos la tabla de verdad de la disjunción en el siguiente script <https://goo.gl/5kXzNI>

OBSERVACIÓN 1.2. Algunas veces ‘‘ $p \circ q$ ’’ se entiende en el sentido exclusivo: Puede ocurrir p o q , *pero no ambos*, que es diferente a la definición anterior. Sin embargo, existe un conector llamado de hecho o **exclusivo**, que cumple esta definición y consideraremos más adelante.

1.6. Negación $\neg p$. Dada cualquier proposición p , otra proposición llamada *negación* de p puede ser formada escribiendo “*No es cierto que...*” o “*Es falso que...*” antes de p .

De manera más sencilla, decimos **no** p y escribimos $\neg p$.

DEFINICIÓN 1.3 (Negación). Si p es cierta, entonces $\neg p$ es falsa; pero si p es falsa, $\neg p$ es cierta.

TABLA DE VERDAD 3 (Negación).

p	$\neg p$
1	0
0	1

Construimos la tabla de verdad de la disjunción en el siguiente script <https://goo.gl/sgCfkC>

1.7. Proposiciones y Tablas de Verdad. Sea $P(p, q, \dots)$ una expresión construida con variables lógicas p, q, \dots , que toman valores de **verdadero** ‘‘V’’ o **falso** ‘‘F’’, a través de conectores lógicos como \wedge, \vee, \neg y otros que discutiremos más adelante.

Tales expresiones $P(p, q, \dots)$ son llamadas *proposiciones*.

La propiedad principal de una proposición $P(p, q, \dots)$ es que sus valores de verdad sólo dependen del valor de sus variables.

Una manera simple y concisa de mostrar esta relación es a través de una *tabla de verdad*.

EJEMPLO 1.2. Contruir la tabla de verdad de la proposición

$$\neg(p \wedge \neg q).$$

Construimos la tabla de verdad de la proposición anterior con el siguiente script <https://goo.gl/V2Axzi>

TABLA DE VERDAD 4 ($\neg(p \wedge \neg q)$).

p	q	not q	p and not q	not(p and not q)
1	1	0	0	1
1	0	1	1	0
0	1	0	0	1
0	0	1	0	1

OBSERVACIÓN 1.3. Para evitar el uso excesivo de parentesis, algunas veces adoptamos una jerarquía para los conectores lógicos.

De manera específica \neg tiene prioridad sobre \wedge , que a su vez tiene prioridad sobre \vee .

Por ejemplo,

$$\neg p \wedge q$$

significa

$$(\neg p) \wedge q$$

y no

$$\neg(p \wedge q).$$

1.8. Método alternativo de construir una tabla de verdad.

p	q	\neg	$(p$	\wedge	\neg	$q)$
1	1					
1	0					
0	1					
0	0					

EJEMPLO 1.3. Construya las tablas de verdad de las siguientes proposiciones

1. $p \vee \neg p$
2. $p \wedge \neg p$
3. $\neg(p \vee q)$
4. $\neg p \wedge \neg q$
5. $\neg(p \wedge q)$
6. $\neg p \vee \neg q$

1.9. Tautologías y Contradicciones. Algunas proposiciones $P(p, q, \dots)$ son siempre ciertas, no importa los valores de verdad de las variables p, q, \dots

Tales proposiciones se conocen como *tautologías*.

De manera similar, algunas proposiciones $P(p, q, \dots)$ son siempre falsas, no importa los valores de verdad de las variables p, q, \dots

Tales proposiciones se conocen como *contradicciones*.

EJEMPLO 1.4. Construya las tablas de verdad de $p \wedge \neg p$ y $p \vee \neg p$.

1.10. Equivalencias Lógicas. Diremos que dos proposiciones $P(p, q, \dots)$ y $Q(p, q, \dots)$ son *lógicamente equivalentes* si tienen tablas de verdad idénticas.

En tal caso, escribimos

$$P(p, q, \dots) \equiv Q(p, q, \dots)$$

Idempotent laws:	(1a) $p \vee p \equiv p$	(1b) $p \wedge p \equiv p$
Associative laws:	(2a) $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$	(2b) $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$
Commutative laws:	(3a) $p \vee q \equiv q \vee p$	(3b) $p \wedge q \equiv q \wedge p$
Distributive laws:	(4a) $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$	(4b) $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
Identity laws:	(5a) $p \vee F \equiv p$ (6a) $p \vee T \equiv T$	(5b) $p \wedge T \equiv p$ (6b) $p \wedge F \equiv F$
Involution law:	(7) $\neg\neg p \equiv p$	
Complement laws:	(8a) $p \vee \neg p \equiv T$ (9a) $\neg T \equiv F$	(8b) $p \wedge \neg p \equiv F$ (9b) $\neg F \equiv T$
DeMorgan's laws:	(10a) $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$	(10b) $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$

FIGURA 1. Leyes para el álgebra de proposiciones

EJEMPLO 1.5. Demostremos que

$$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$$

EJEMPLO 1.6. Reescriba la frase “No es cierto que: las rosas son rojas y las violetas son azules”, usando la equivalencia anterior.

Por su utilidad, algunas equivalencias lógicas con llamadas *leyes para el álgebra de proposiciones*.

A continuación, enunciaremos algunas, pero es necesario verificar su validez a través de tablas de verdad.

1.11. Sentencias condicionales y bicondicionales. Muchas sentencias, particularmente en matemáticas, son de la forma “*si p entonces q*”. Tales sentencias son llamadas *condicionales* y son denotadas por

$$p \rightarrow q.$$

El condicional $p \rightarrow q$ es frecuentemente leído como “*p implica q*” o “*p sólo si q*”.

Otra sentencia común es de la forma “*p si y solo si q*”. Tales sentencias son llamadas *bicondicionales* y se denota por

$$p \iff q.$$

TABLA DE VERDAD 5 (Condicional).

p	q	$p \rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

TABLA DE VERDAD 6 (Bicondicional).

p	q	$p \longleftrightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

EJEMPLO 1.7. Demuestre que

$$p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q.$$

EJEMPLO 1.8. Determine cuales de las siguientes sentencias son tautologías, construyendo las correspondientes tablas de verdad.

1. $\neg(p \vee \neg q) \rightarrow \neg p$
2. $p \rightarrow (q \rightarrow r)$
3. $(p \rightarrow q) \rightarrow r$
4. $(p \rightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow p)$
5. $(p \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow q$
6. $(p \wedge q) \rightarrow p$
7. $q \rightarrow (\neg p \vee \neg q)$
8. $((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow r)$

1.12. Argumentos. Un *argumento* es una afirmación de que un conjunto dado de proposiciones

$$P_1, P_2, \dots, P_n,$$

llamadas *premisas*, tiene como consecuencia otra proposición Q , llamada *conclusión*.

En otras palabras, es una sentencia de la forma

$$(P_1 \wedge P_2 \wedge \dots \wedge P_n) \rightarrow Q$$

Tal argumento se denota por

$$P_1, P_2, \dots, P_n \vdash Q.$$

La noción de “*argumento lógico*” o “*argumento válido*” se formaliza de la manera siguiente:

DEFINICIÓN 1.4. Un argumento $P_1, P_2, \dots, P_n \vdash Q$ se dice que es *válido* si la proposición

$$(P_1 \wedge P_2 \wedge \dots \wedge P_n) \rightarrow Q$$

es una tautología.

Si un argumento no es *válido*, diremos que es una *falacia*.

EJEMPLO 1.9. 1. Demuestre que $p, p \rightarrow q \vdash q$ es un argumento válido.

2. Demuestre que $p \rightarrow q, q \vdash p$ es una falacia.

p	q	r	$(p \rightarrow q)$		\wedge	$(q \rightarrow r)$		\rightarrow	$(p \rightarrow r)$	
T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	T	F	F	F	T	T	F
T	F	T	T	F	F	F	T	T	T	T
T	F	F	T	F	F	F	T	F	T	F
F	T	T	F	T	T	T	T	T	F	T
F	T	F	F	T	F	T	F	T	F	F
F	F	T	F	T	F	T	T	T	F	T
F	F	F	F	T	F	T	F	T	F	F
Step			1	2	1	3	1	2	1	4

FIGURA 2.

3. Demuestre que $p \rightarrow q, \neg q \vdash \neg p$ es un argumento válido.

EJEMPLO 1.10. Un principio fundamental del razonamiento lógico nos dice que:

Si p implica q y q implica r , entonces p implica r .

En otras palabras, el siguiente argumento es válido

$$p \rightarrow q, q \rightarrow r \vdash p \rightarrow r.$$

Si sube el dólar, sube la gasolina.

EJEMPLO 1.11. $\frac{\text{Si sube la gasolina, entonces hay inflación.}}{\therefore \text{Si sube el dólar, entonces hay inflación.}}$

1.13. Funciones proposicionales y Cuantificadores. Una *función proposicional* (o *sentencia abierta* o *condición*) definida en un conjunto A es una expresión $p(x)$ que tiene la propiedad de que $p(a)$ es cierta o falsa para cada $a \in A$.

El conjunto A se conoce como dominio de $p(x)$, y el subconjunto de todos los elementos para los cuales $p(x)$ es cierto se conoce como el *conjunto de verdad* T_p de $p(x)$:

$$T_p = \{x \mid x \in A, p(x) = 1\},$$

o simplemente

$$T_p = \{x \mid p(x)\}.$$

EJEMPLO 1.12. Encuentre el conjunto de verdad para cada función en el conjunto \mathbb{N} de los enteros positivos:

1. $p(x) : x + 2 > 7$
2. $p(x) : x + 5 < 3$
3. $p(x) : x + 5 > 1$

1.14. Cuantificador universal. Sea $p(x)$ una función proposicional definido en un conjunto A . La expresión

$$(1) \quad \forall x \in A : p(x)$$

se lee como ‘‘para todo $x \in A$, $p(x)$ es verdadero.’’

El símbolo \forall (‘‘para todo’’) se llama cuantificador universal.

Mientras que $p(x)$ es una sentencia abierta (su valor de verdad depende de cada $x \in A$), la afirmación

$$\forall x \in A : p(x)$$

es verdadera si y solo si $p(x)$ se cumple para todo $x \in A$.

Por otro lado, si existe algún $x \in A$ tal que $p(x)$ es falso, entonces

$$\forall x \in A : p(x)$$

es falso.

EJEMPLO 1.13. Verifique el valor de verdad de las siguientes afirmaciones:

1. $\forall n \in \mathbb{N} : n + 4 > 3$.
2. $\forall n \in \mathbb{N} : n + 2 > 8$.

1.15. Cuantificador existencial. Sea $p(x)$ una función proposicional definido en un conjunto A . La expresión

$$(2) \quad \exists x \in A : p(x)$$

se lee como ‘‘existe $x \in A$, tal que $p(x)$ es verdadero.’’

El símbolo \exists (‘‘existe...’’) se llama cuantificador existencial.

Mientras que $p(x)$ es una sentencia abierta (su valor de verdad depende de cada $x \in A$), la afirmación

$$\exists x \in A : p(x)$$

es verdadera si y solo si $p(x)$ se cumple algún $x \in A$.

Por otro lado, si para todo $x \in A$, $p(x)$ es falso, entonces

$$\exists x \in A : p(x)$$

es falso.

Verifique el valor de verdad de las siguientes afirmaciones:

1. $\exists n \in \mathbb{N} : n + 4 < 7$;
2. $\exists n \in \mathbb{N} : n + 6 < 4$.

1.16. Negación de Sentencias Cuantificadas. Considere la afirmación:

Todos los estudiantes de ingeniería saben programar.

¿Cómo podemos negar esta afirmación?

Al menos un estudiante de ingeniería no sabe programar.

De manera simbólica, si M denota el conjunto de estudiantes de ingeniería, la negación anterior se puede escribir como

$$\begin{aligned} & \neg (\forall x \in M : x \text{ sabe programar}) \\ & \equiv \exists x \in M : x \text{ no sabe programar.} \end{aligned}$$

Si en el ejercicio anterior definimos

$$p(x) : x \text{ sabe programar,}$$

entonces podemos reescribir la equivalencia anterior como

$$\begin{aligned} & \neg (\forall x \in M : p(x)) \\ & \equiv \exists x \in M : \neg p(x). \end{aligned}$$

De manera similar

No hay estudiante de ingeniería que sepa programar

se puede reescribir como

Cada uno de los estudiantes de ingeniería no saben programar.

De manera simbólica, podemos reescribir

$$\begin{aligned} & \neg (\exists x \in M : p(x)) \\ & \equiv \forall x \in M : \neg p(x). \end{aligned}$$

TEOREMA 1.1 (DeMorgan).

$$(3) \quad \neg (\forall x \in M : p(x)) \equiv \exists x \in M : \neg p(x)$$

$$(4) \quad \neg (\exists x \in M : p(x)) \equiv \forall x \in M : \neg p(x).$$

EJEMPLO 1.14. La negación de la siguiente afirmación

Para todo entero positivo n , tenemos que $n + 2 > 8$

es

Existe un entero positivo n tal que $n + 2 \leq 8$.

EJEMPLO 1.15. La negación de la siguiente afirmación

Existe una persona viva con 150 años o más.

es

Toda persona viva tiene menos de 150 años.

OBSERVACIÓN 1.4. Para negar una afirmación del tipo

$$\forall x \in A : p(x)$$

sólo necesitamos encontrar un elemento $x_0 \in A$ tal que $p(x)$ sea *falso*.

A un elemento x_0 así se le conoce como *contraejemplo*.

EJEMPLO 1.16. (a) Un contraejemplo para $\forall x \in \mathbb{R} : |x| \neq 0$ es $x = 0$.

(b) Un contraejemplo para $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 \geq x$ es $x = \frac{1}{2}$.

(c) Sin embargo, $\forall x \in \mathbb{N} : x^2 \leq x$ es siempre cierto.

1.17. Ejemplos Resueltos.

1.18. Proposiciones y Tablas de Verdad.

EJEMPLO 1.17. Sea p : ‘‘Hace frío’’ y q : ‘‘Está lloviendo’’.
Proponga un enunciado verbal simple que describa cada una de las siguientes proposiciones:

1. $\neg p$;
2. $p \wedge q$;
3. $p \vee q$;
4. $q \vee \neg p$.

EJEMPLO 1.18. Encuentre la tabla de verdad de $\neg p \wedge q$.

EJEMPLO 1.19. Demuestre que la proposición

$$p \vee \neg(p \wedge q)$$

es una tautología.

EJEMPLO 1.20. Muestre que las proposiciones $\neg(p \wedge q)$ y $\neg p \vee \neg q$ son lógicamente equivalentes.

EJEMPLO 1.21. Use las leyes en la tabla 1 para mostrar que

$$\neg(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge q) \equiv \neg p$$

1.19. Sentencias condicionales.

EJEMPLO 1.22. Reescriba los siguientes enunciados sin usar el condicional:

1. Si hace frío, el usa sombrero.
2. Si la productividad se incrementa, entonces el salario aumenta.

EJEMPLO 1.23. Considere la proposición condicional $p \rightarrow q$. La proposiciones

$$q \rightarrow p, \neg p \rightarrow \neg q, \neg q \rightarrow \neg p$$

son llamadas **conversa**, **inversa** y **contrapositiva**, respectivamente.

¿Cuáles de estas proposiciones son lógicamente equivalente s a $p \rightarrow q$?

EJEMPLO 1.24. Determine la contrapositiva de cada enunciado:

1. Si Erik es poeta, entonces es pobre.
2. Solo si Marcos estudia, pasará el examen.

EJEMPLO 1.25. Escriba la negación de cada enunciado, tan simple como sea posible:

1. Si ella trabaja, ganará dinero.
2. El nada si y solo si el agua está tibia.
3. Si neva, entonces no manejaré.

1.20. Argumentos.

EJEMPLO 1.26. Muestre que el siguiente argumento es una falacia:

$$p \rightarrow q, \neg p \vdash \neg q.$$

EJEMPLO 1.27. Muestre que el siguiente argumento es válido:

$$p \rightarrow q, \neg q \vdash \neg p.$$

EJEMPLO 1.28. Muestre que el siguiente argumentos siempre es válido:

$$p \rightarrow \neg q, r \rightarrow q, r \vdash \neg p.$$

EJEMPLO 1.29. Determine la validez del siguiente argumento:

$$\begin{array}{l} \text{Si 7 es menor que 4, entonces 7 no es número primo} \\ \text{7 no es menor que 4} \\ \hline \text{7 no es número primo.} \end{array}$$

EJEMPLO 1.30. Determine la validez del siguiente argumento:

Si dos lados de un triángulo son iguales, entonces los respectivos ángulos opuestos son iguales
 Dos lados de un triángulo no son iguales

 Los respectivos ángulos opuestos no son iguales.

1.21. Cuantificadores y Funciones Proposicionales.

EJEMPLO 1.31. Sea $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Determine el valor de verdad de cada uno de los siguientes enunciados:

1. $\exists x \in A : x + 3 = 10$;
2. $\forall x \in A : x + 3 < 10$;
3. $\exists x \in A : x + 3 < 5$;
4. $\forall x \in A : x + 3 \leq 7$.

EJEMPLO 1.32. Determine el valor de verdad de cada uno de las siguientes afirmaciones donde $U = \{1, 2, 3\}$ es el conjunto “*universo*” (de referencia):

1. $\exists x \forall y : x^2 < y + 1$;
2. $\forall x \exists y : x^2 + y^2 < 12$;
3. $\forall x \forall y : x^2 + y^3 < 12$.

EJEMPLO 1.33. Encuentre la negación de cada una de las siguientes afirmaciones:

1. $\exists x \forall y : p(x, y)$;
2. $\forall x \forall y : p(x, y)$;
3. $\exists x \exists y \forall z : p(x, y, z)$.

EJEMPLO 1.34. Sea

$$p(x) : x + 2 > 5.$$

Indique cuando $p(x)$ es una función proposicional o no en cada uno de los siguientes conjuntos:

1. \mathbb{N}
2. $\mathbb{Z}^- = \{-1, -2, -3, \dots\}$
3. \mathbb{C}

EJEMPLO 1.35. Niegue cada uno de las siguientes afirmaciones:

1. Todos los estudiantes viven en los dormitorios.
2. A todos los estudiantes de ingeniería le gusta el futbol.
3. Algunos estudiantes tienen 25 años o más.

1.22. Bibliografía. Las notas de esta sección están basadas en el capítulo 4 ‘‘Logic and Propositional Calculus’’ del libro

Lipschutz, S. and Lipson, M.; **Schaum’s Outline of Discrete Mathematics**; McGraw-Hill, 3th Edition.

Bibliografía

Cárdenas, H. (1973). *Álgebra superior*.