

JULIHO CASTILLO COLMENARES PH.D.

# CÁLCULO

[GITHUB.COM/JULIHOCC](https://github.com/julihoccc)

Cálculo © 2020 by Juliho David Castillo Colmenares is  
licensed under Attribution 4.0 International



# Índice general

1	<i>Cálculo Diferencial</i>	7
1.1	<i>Límites y continuidad</i>	7
1.2	<i>Derivadas</i>	9
1.3	<i>Derivación implícita</i>	12
1.4	<i>Derivación logarítmica</i>	14
1.5	<i>Linealización</i>	16
1.6	<i>Optimización univariada</i>	17
1.7	<i>Análisis de Gráficas</i>	23
2	<i>Cálculo Integral</i>	27
2.1	<i>Antiderivadas</i>	27
2.2	<i>La integral definida</i>	30
2.3	<i>El Teorema Fundamental del Cálculo</i>	34
2.4	<i>Integración por partes</i>	38
2.5	<i>Fracciones parciales</i>	40
2.6	<i>Técnicas de integración trigonométrica</i>	42
2.7	<i>Área y longitud de arco</i>	45
2.8	<i>Volumen</i>	49
2.9	<i>Integrales impropias</i>	56
2.10	<i>Área de Superficies de Revolución</i>	58
3	<i>Cálculo en varias variables</i>	61
3.1	<i>Representación paramétrica de curvas</i>	61
3.2	<i>Derivadas Parciales</i>	63

## 4 *Bibliografia* 69

# 1 Cálculo Diferencial

## 1.1 Límites y continuidad

### Límites

Diremos que la función tiene un *límite*  $L$  cuando  $x$  *aproxima*  $a$  si para cada  $\epsilon > 0$ , podemos encontrar  $\delta > 0$  tal que

$$|f(x) - L| < \epsilon$$

siempre que

$$0 < |x - a| < \delta.$$

En ese caso, escribimos

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

**Problema Resuelto 1.1.** *Calcula los siguientes límites, trazando las gráficas correspondientes:*

(i)  $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 4x + 8)$

(ii)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$

(iii)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x}$

**Propiedades de límites** Si  $\lim_{x \rightarrow a} f_1(x) = L_1$  y  $\lim_{x \rightarrow a} f_2(x) = L_2$ , entonces

(i)  $\lim_{x \rightarrow a} (f_1(x) \pm f_2(x)) = L_1 \pm L_2$

(ii)  $\lim_{x \rightarrow a} (f_1(x)f_2(x)) = L_1L_2.$

(iii)  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{L_1}{L_2}$  siempre y cuando  $L_2 \neq 0$ .

## Continuidad

Diremos que una función es *continua en el punto*  $x = a$  si

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

**Problema Resuelto 1.2.**  $f(x) = x^2 - 4x + 8$  es continua en  $x = 1$ .

**Problema Resuelto 1.3.** Sin embargo,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - 2} & x \neq 2 \\ 6 & x = 2 \end{cases}$$

es discontinua en  $x = 2$  y decimos que  $x = 2$  es una discontinuidad.

Si  $f(x)$  es continua en cada punto del intervalo  $x_1 < x < x_2$ , entonces diremos que es continua en dicho intervalo.

**Proposición 1.1.** Si  $f(x)$  y  $g(x)$  son continuas en un mismo intervalo, entonces también lo son

(i)  $f(x) \pm g(x)$

(ii)  $f(x)g(x)$

(iii)  $\frac{f(x)}{g(x)}$  siempre que  $g(x) \neq 0$  en dicho intervalo.

## Ejemplos

**Problema Resuelto 1.4.** Demostrar por definición que  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4$  si

(i)  $f(x) = x^2$

(ii)  $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \neq 2 \\ 0 & x = 2 \end{cases}$

**Problema Resuelto 1.5.** Demostrar que si  $\lim_{x \rightarrow a} f_1(x) = l_1$  y  $\lim_{x \rightarrow a} f_2(x) = l_2$ , entonces

$$\lim_{x \rightarrow a} (f_1(x) + f_2(x)) = l_1 + l_2$$

**Problema Resuelto 1.6.** Mostrar que  $f(x) = x^2$  es continua en

$$x = 2, \text{ pero } f(x) = \begin{cases} x^2 & x \neq 2 \\ 0 & x = 2 \end{cases} \text{ no lo es.}$$

## 1.2 Derivadas

**Definición** La *derivada* de  $y = f(x)$  en el punto  $x$  está definida como

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

donde  $h = \Delta x$ ,  $\Delta y = f(x+h) - f(x) = f(x+\Delta x) - f(x)$  siempre que tal límite exista. **Diferencial** Si  $\Delta x \approx 0$  y  $f'(x)$  existe, entonces

$$\Delta y \approx f'(x)\Delta x.$$

El diferencial de  $x$  es un cambio *infinitesimal en tal variable*.

**Definición.** Si  $y = f(x)$  y  $f'(x)$  existe, el diferencial de  $y$  está dado por

$$dy = f'(x)dx$$

El proceso de encontrar las derivadas de una función se conoce como *diferenciación*.

Derivadas de alto orden

**Definición.**

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \begin{cases} f(x) & n = 0 \\ \frac{d}{dx} \left( \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} f(x) \right) & n > 0 \end{cases}$$

Usualmente rescribimos

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

$$y'' = \frac{d^2 y}{dx^2}$$

En el caso  $n > 2$ , es más común escribir  $y^{(n)}$  para denotar a la  $n$ -ésima derivada.

**Interpretación geométrica** Geométricamente, la derivada  $f'(a)$  de una función  $f(x)$ , en un punto dado  $x = a$ , representa *pendiente de la recta tangente* a  $y = f(x)$  en el punto  $(a, f(a))$ .

**Relación con continuidad** Si una función tiene derivada en un punto, entonces es continua en dicho punto.

Sin embargo, el recíproco no es necesariamente cierto.

### Fórmulas de derivación

En lo subsecuente,  $u, v$  representarán funciones de  $x$ , mientras que  $a, c, p$  representarán constantes.

$$\begin{array}{ll}
1. \frac{d}{dx}(u \pm v) = \frac{du}{dx} \pm \frac{dv}{dx} & 4. \frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v(du/dx) - u(dv/dx)}{v^2} \\
2. \frac{d}{dx}(cu) = c \frac{du}{dx} & 5. \frac{d}{dx} u^p = pu^{p-1} \frac{du}{dx} \\
3. \frac{d}{dx}(uv) = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx} & 6. \frac{d}{dx}(a^u) = a^u \ln a
\end{array}$$

Figura 1.1: Fórmulas usuales de derivadas

$$\begin{array}{ll}
7. \frac{d}{dx} e^u = e^u \frac{du}{dx} & 14. \frac{d}{dx} \csc u = -\csc u \cot u \frac{du}{dx} \\
8. \frac{d}{dx} \ln u = \frac{1}{u} \frac{du}{dx} & 15. \frac{d}{dx} \sin^{-1} u = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \frac{du}{dx} \\
9. \frac{d}{dx} \sin u = \cos u \frac{du}{dx} & 16. \frac{d}{dx} \cos^{-1} u = \frac{-1}{\sqrt{1-u^2}} \frac{du}{dx} \\
10. \frac{d}{dx} \cos u = -\sin u \frac{du}{dx} & 17. \frac{d}{dx} \tan^{-1} u = \frac{1}{1+u^2} \frac{du}{dx} \\
11. \frac{d}{dx} \tan u = \sec^2 u \frac{du}{dx} & 18. \frac{d}{dx} \cot^{-1} u = \frac{-1}{1+u^2} \frac{du}{dx} \\
12. \frac{d}{dx} \cot u = -\csc^2 u \frac{du}{dx} & 19. \frac{d}{dx} \sinh u = \cosh u \frac{du}{dx} \\
13. \frac{d}{dx} \sec u = \sec u \tan u \frac{du}{dx} & 20. \frac{d}{dx} \cosh u = \sinh u \frac{du}{dx}
\end{array}$$

Figura 1.2: Fórmulas usuales de derivadas

Supondremos que las derivadas de  $u$  y  $v$  existe, es decir, que son diferenciables.

En particular, cuando  $u = x$ , las fórmulas se simplifican porque  $\frac{du}{dx} = 1$ .

### Ejemplos

**Problema 1.1.** Demostrar que si  $u$  y  $v$  son funciones diferenciables

(i)

$$\frac{d}{dx}(u + v) = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$$

(ii)

$$\frac{d}{dx}(uv) = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$$

**Problema 1.2.** Demostrar que si  $f(x)$  tiene una derivada en  $x = a$ , entonces  $f(x)$  es continua en  $x = a$ .

**Problema 1.3.** Demostrar que si  $p$  es cualquier entero positivo, y  $u$  es una función diferenciable respecto a  $x$ , entonces

$$\frac{d}{dx} u^p = pu^{p-1} \frac{du}{dx}$$

**Problema 1.4.** Dando por hecho que

$$\lim_{b \rightarrow 0} \frac{\sin(b)}{b} = 1$$

demostrar que



(i)

$$\frac{d}{dx} \sin(u) = \cos(u) \frac{du}{dx}$$

(ii)

$$\frac{d}{dx} \cos(u) = -\sin(u) \frac{du}{dx}$$

(iii)

$$\frac{d}{dx} \tan(u) = \sec^2(u) \frac{du}{dx}$$

**Problema 1.5.** *Demostrar que*

$$\frac{d}{dx} \tan^{-1}(u) = \frac{1}{1+u^2} \frac{du}{dx}$$

**Problema 1.6.** *Dando por hecho que*

$$\lim_{b \rightarrow 0} (1+b)^{1/b} = e$$

*demostrar que*

(i)

$$\frac{d}{dx} \ln(u) = \frac{1}{u} \frac{du}{dx}$$

(ii)

$$\frac{d}{dx} e^u = e^u \frac{du}{dx}$$

**Problema 1.7.** *Encontrar*

(i)

$$\frac{d}{dx} \sqrt{x^4 + 2x}$$

(ii)

$$\frac{d}{dx} \sin(\ln(x))$$

(iii)

$$\frac{d}{dx} \ln(e^{3x} + \cos(2x))$$

**Problema 1.8.** Si

$$x^2 y - e^{2x} = \sin(y)$$

*, encontrar  $y'$ .***Problema 1.9.** *Mostrar que si*

$$y = 3x^2 + \sin(2x)$$

*entonces*

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + 4y = 12x^2 + 6$$

**Problema 1.10.** *Encontrar los diferenciales de*

(i)

$$y = x^2 - \ln x$$

(ii)

$$y = e^{-2x} + \cos(3x)$$

### 1.3 Derivación implícita

Denotaremos por  $y'$  la derivada  $\frac{dy}{dx}$ .

**Problema 1.11.** Si

$$x^2 + y^2 = r^2,$$

donde  $r$  es una constante, encontrar  $y'$ .

**Solución.** Por regla de la cadena,  $(y^2)' = 2yy'$ . Esto porque

$$\frac{dy^2}{dx} = \frac{dy^2}{dy} \frac{dy}{dx}.$$

Si derivamos el lado izquierdo de la ecuación, respecto de  $x$ , usando linealidad, obtenemos  $2x + 2yy'$ , mientras que si derivamos el derecho, ya que  $r^2$  es contante, obtenemos cero e igualando, tenemos que

$$2x + 2yy' = 0.$$

Después de despejar obtenemos que

$$y' = -\frac{x}{y}.$$

**Observación.** Observe que

$$x^2 + y^2 = r^2$$

es la ecuación de un círculo con centro en el origen con radio  $r > 0$ . Use *Sagemath* para graficar esta ecuación para un radio dado, por ejemplo,  $r = 5$ .

1. Compare las pendientes de las rectas tangente en  $(x, y)$  y  $(-x, -y)$ . ¿Que relación sobre estás dos rectas podemos deducir?
2. Compare las pendiente de la recta tangente en  $(x, y)$  y la recta que pasa por el origen y este punto. ¿Que relación sobre estás dos rectas podemos deducir?

**Problema 1.12.** Si

$$x^3 + y^3 = 6xy,$$

encontrar  $y'$ .

**Solución.** Por regla de la cadena

$$\frac{d}{dx}(y^3) = \frac{dy^3}{dy} \frac{dy}{dx},$$

es decir,  $(y^3)' = (3y^2)(y')$ .

Además, por la regla de Leibniz,

$$(xy)' = x'y + xy' = y + xy'.$$

Entonces, derivando ambos lados de la ecuación, y usando linealidad, tenemos que

$$3x^2 + 3y^2 y' = 6(y + xy').$$

Despejando  $y'$ , obtenemos

$$y' = \frac{2y - x^2}{y^2 - 2x}.$$

**Problema 1.13.** Encuentre  $y'$  en términos de  $x$ , si  $y = \arcsin(x)$ , con imagen  $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$ .

**Solución** En este caso  $x = \sin(y)$ . Por regla de la cadena obtenemos que

$$\frac{d}{dx} \sin(y) = \frac{d}{dy} \sin(y) \frac{dy}{dx} = \cos(y) y'.$$

Sin embargo, también sabemos que

$$\frac{d}{dx} \sin(y) = \frac{dx}{dx} = 1.$$

Por lo cual  $1 = \cos(y)y'$ , y entonces  $y' = 1/\cos(y)$ . Pero también sabemos que, por la manera en que escogemos el rango de  $y$ ,  $\cos(y) > 0$ , y por tanto

$$\cos(y) = \sqrt{1 - \sin^2(y)} = \sqrt{1 - x^2}.$$

Es decir

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

**Problema 1.14.** Encuentre  $y'$ .

1.  $\sin(x + y) = y^2 \cos(x)$ ,
2.  $x^4 + y^2 = 16$ ,
3.  $y = \arccos(x)$ ,
4.  $y = \arctan(x)$ .

## 1.4 Derivación logarítmica

Recordemos que  $y = e^x$  si y solo si  $x = \ln(y)$ , por lo cual  $\ln(y)$  solamente está definido para  $y > 0$ . Dos propiedades fundamentales del logaritmo son las siguientes:

1.  $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$ ,
2.  $\ln(a^b) = b\ln(a)$ .

De esto se deduce, usando leyes de los exponentes, que  $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$ .

Por regla de la cadena,

$$\frac{d}{dx} \ln(y) = \frac{d}{dy} \ln(y) \frac{dy}{dx},$$

es decir,

$$(\ln(y))' = \frac{y'}{y}.$$

De esto se deduce que

$$y' = y \left( \frac{d}{dx} \ln(y) \right).$$

Esta forma de derivar, conocida como *derivación logarítmica*, es especialmente útil si necesitamos derivar funciones que involucren multiplicación, división, exponenciación y radicales.

**Problema 1.15.** Si  $y = \frac{x+1}{\sqrt{x-2}}$ , encontrar  $y'$ .

**Solución** Primero, escribimos  $y = (x+1)(x-2)^{-1/2}$ . Entonces

$$\ln(y) = \ln(x+1) - \frac{1}{2} \ln(x-2),$$

de donde

$$\frac{d}{dx} \ln(y) = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{x-2} \right).$$

Simplificando la última expresión obtenemos

$$\frac{d}{dx} \ln(y) = \frac{x-3}{2(x+1)(x-2)},$$

de donde obtenemos

$$y' = \left( \frac{x+1}{(x-2)^{1/2}} \right) \left( \frac{x-3}{2(x+1)(x-2)} \right),$$

y simplificando obtenemos,

$$y' = \frac{x-3}{2(x-2)^{3/2}}.$$

De hecho, podemos obtener la fórmula para la derivada del cociente usando la fórmula (1.4). En efecto,

$$\ln\left(\frac{f}{g}\right) = \ln(fg^{-1}) = \ln(f) - \ln(g).$$

Derivando obtenemos

$$\frac{d}{dx} \ln\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{f'}{f} - \frac{g'}{g}.$$

Entonces

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \left(\frac{f}{g}\right) \left(\frac{f'}{f} - \frac{g'}{g}\right) = \frac{f'g - g'f}{g^2}.$$

Otro ejemplo del uso de la derivada es el siguiente. Supongamos que  $y = x^\alpha$ , con  $x \neq 0$ . Entonces  $\ln(y) = \alpha \ln(x)$ , y por tanto

$$\frac{d}{dx} \ln(y) = \frac{\alpha}{x}.$$

Entonces  $y' = (x^\alpha)(\alpha x^{-1}) = \alpha x^{\alpha-1}$ .

Por último, derivaremos  $y = \ln|x|$ . Observe que solamente necesitamos deducir el caso cuando  $x < 0$ , es decir  $|x| = -x$ . En esta situación  $y = \ln(-x)$  y por regla de la cadena, sustituyendo  $u = -x$ ,  $y = \ln(u)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx} = \frac{1}{u} u' = \frac{u'}{u}.$$

Pero  $u' = -1$ , y por tanto  $\frac{d}{dx} \ln(-x) = \frac{-1}{-x} = \frac{1}{x}$ . Entonces, siempre que  $x \neq 0$ ,

$$\frac{d}{dx} \ln|x| = \frac{1}{x}.$$

**Problema 1.16.** Encuentre  $y'$  usando derivación logarítmica.

$$1. y = \frac{x^{3/4} \sqrt{x^2 + 1}}{(3x + 2)^5},$$

$$2. y = x^{\sqrt{(x)}},$$

$$3. y = \ln(e^{-x} + xe^{-x}),$$

$$4. y = \frac{x}{1 - \ln(x-1)}$$

$$5. y = x^x,$$

$$6. y = x^{\sin(x)},$$

$$7. x^y = y^x.$$

**Problema 1.17.** Use la definición de derivada para demostrar que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$$

## 1.5 Linealización

Supongamos que  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es diferenciable en  $a \in \mathbb{R}$ , es decir, existe la derivada  $f'(a)$ . Como ya hemos visto, esta derivada es la *pendiente* de la *recta tangente*, que es la mejor *aproximación lineal* de  $f$  en  $a$ .

La ecuación de la recta tangente se puede obtener a partir de la siguiente ecuación:

$$\frac{y - f(a)}{x - a} = f'(a),$$

que es la ecuación de una recta que pasa por el punto  $(a, f(a))$  con pendiente  $f'(a)$ .

**Definición.** Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función diferenciable. Definimos la linealización de  $f$  alrededor de (o con pivote en)  $a \in \mathbb{R}$  como

$$L_{f,a}(x) = f(a) + f'(a)(x - a).$$

La linealización  $L_{f,a}(x)$  se puede usar para hacer calcular de manera bastante precisa de valor de  $f(x)$  para  $x \approx a$ .

Aproximación de la raíz cuadrada

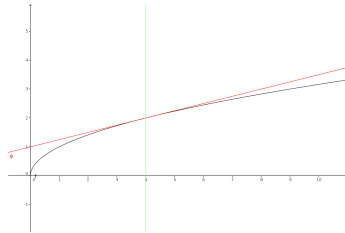


Figura 1.3: Linealización de  $\sqrt{x}$  alrededor  $a = 4$ .

Existen varios algoritmos para calcular la raíz de un número real. Sin embargo, podemos calcular raíces de números reales de manera muy precisa, usando la linealización.

Por ejemplo, calculemos  $\sqrt{4.1}$ . Primero determinamos la función a linealizar, en este caso,  $f(x) = \sqrt{x}$ . La derivada de  $f$  es

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Después, escogemos como pivote el punto  $a = 4$ . En este caso  $f(4) = 2$  y  $f'(4) = \frac{1}{4}$ . De donde obtenemos

$$L(x) = f(4) + f'(4)(x - 4) = 2 + \frac{1}{4}(x - 4).$$

Entonces

$$\sqrt{4.1} \approx L(4.1) = 2 + .25(4.1 - 4) = 2.025.$$

Si usáramos una calculadora, obtendríamos  $\sqrt{4.1} = 2.02484567313$ .

El error absoluto entre este valor y el que obtuvimos de la aproximación es

$$|2.025 - 2.02484567313| \approx 1.54 \times 10^{-4}.$$

**Problema 1.18.** Use una aproximación lineal para calcular los siguientes valores. Posteriormente, use una calculadora para encontrar su valor y determine el error absoluto.

1.  $(2.001)^5$
2.  $e^{-0.015}$
3.  $(8.06)^{2/3}$
4.  $\frac{1}{1002}$
5.  $\tan(44^\circ)$
6.  $\sqrt{99.8}$

## 1.6 Optimización univariada

**Definición.** Sea  $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Decimos que:

1.  $f$  alcanza su valor máximo o máximo global en  $c \in D$  si  $f(c) \geq f(x)$ , para toda  $x \in D$ ;
2.  $f$  alcanza su valor mínimo o mínimo global en  $c \in D$  si  $f(c) \leq f(x)$ , para toda  $x \in D$ .

**Teorema 1.1** (Teorema del Valor Extremo). Si  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es continua, entonces  $f$  alcanza su máximo y su mínimo.

Aunque el criterio anterior nos es útil al optimizar en intervalos compactos, es decir, de la forma  $[a, b]$ , en un caso general no siempre esto es cierto. Sin embargo, tenemos la siguiente noción de máximo (mínimo) en intervalos abiertos.

**Definición.** Sea  $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Decimos que:

1.  $f$  tiene un máximo local en  $c \in D$  si existe un radio  $\epsilon > 0$  suficientemente pequeño, de manera que  $f(c) \geq f(x)$ , para toda  $x \in (c - \epsilon, c + \epsilon) \subset D$ ;
2.  $f$  tiene un mínimo local en  $c \in D$  si existe un radio  $\epsilon > 0$  suficientemente pequeño, de manera que  $f(c) \leq f(x)$ , para toda  $x \in (c - \epsilon, c + \epsilon) \subset D$ .

**Observación.** La condición de que exista si existe un radio  $\epsilon > 0$  suficientemente pequeño, y que  $x \in (c - \epsilon, c + \epsilon) \subset D$  se puede entender como que  $x \in D$  este suficientemente cerca de  $c \in D$ . De manera informal, podemos decir que  $f$  alcanza un máximo local en  $c$  si  $f(c) \geq f(x)$  para  $x$  suficientemente cercanos a  $c$ . Lo mismo se puede decir para un mínimo local. Note que todo máximo (mínimo) global es, en particular, un máximo (mínimo resp.) local.

**Teorema 1.2** (Teorema de Fermat). Si  $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  alcanza un máximo o mínimo local en  $c \in D$  y  $f'(c)$  existe, entonces necesariamente  $f'(c) = 0$ .

**Observación.** Debemos tener cuidado al usar el teorema de Fermat. Por ejemplo  $f = |x|$  alcanza su mínimo en cero, pero en este punto la derivada no existe. En cambio,  $f(x) = x^3$  tiene derivada igual a cero en  $x = 0$ , pero este punto no es máximo ni mínimo de la función.

Como podemos apreciar, los puntos más interesantes para nuestro estudio son aquellos donde la derivada no existe o si existe, es igual a cero.

**Definición.** Sea  $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  y  $c \in D$ . Decimos que  $c$  es un punto crítico si  $f'(c)$  no existe o si existe,  $f'(c) = 0$ .

Con los resultados anteriores, podemos describir un criterio para optimizar funciones continuas en compactos.

**Proposición 1.2.** Supongamos que

1.  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es continua,
2.  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  es diferenciable.

Si  $f$  alcanza su máximo (o mínimo) global en  $c$ , entonces

1.  $c = a$  o  $c = b$ , o
2.  $f'(c) = 0$  un punto crítico.

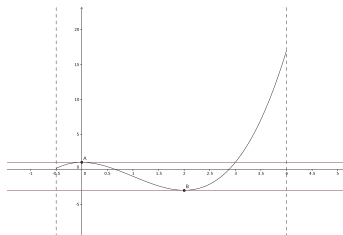
En decir, para encontrar donde  $f$  alcanza sus valores extremos, basta probar en los extremos del intervalo o en los puntos críticos, que se encuentran en su interior.

**Problema 1.19.** Encuentre el máximo y el mínimo global de la función  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$  si  $-\frac{1}{2} \leq x \leq 4$ .

Solución

Como  $f$  es continua en  $[-\frac{1}{2}, 4]$  y diferenciable en su interior  $(-\frac{1}{2}, 4)$  (¿porqué?), podemos aplicar el criterio de la proposición 1.2.



Figura 1.4:  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ 

Primero evaluamos en los extremos.

$$\begin{cases} f(-\frac{1}{2}) = \frac{1}{8} \\ f(4) = 17 \end{cases}$$

Derivamos  $f$  y obtenemos los puntos críticos, resolviendo la ecuación

$$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2) = 0.$$

Los puntos críticos son  $x = 0$  y  $x = 2$ . Sus respectivos valores son  $f(0) = 1$  y  $f(2) = -3$ .

Finalmente, basta comparar los diferentes valores obtenidos para concluir que el máximo global es 17 y se alcanza en  $x = 4$ , mientras que el mínimo global es  $-3$  y se alcanza en  $x = 2$ .

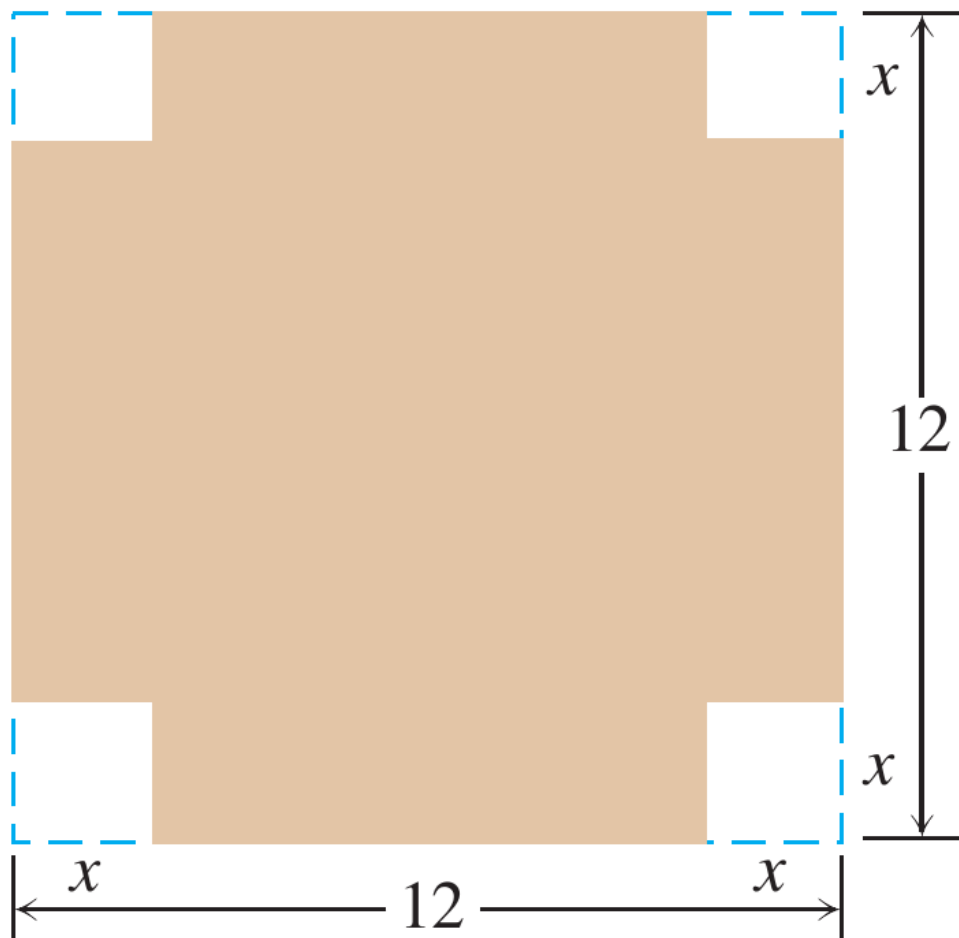
**Problema 1.20.** Encuentre los máximos y mínimos absolutos en el intervalo indicado. Grafique.

1.  $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1$ ,  $[-2, 3]$
2.  $f(x) = \frac{x}{x^2 - x + 1}$ ,  $[0, 3]$
3.  $f(x) = t\sqrt{4 - t^2}$ ,  $[-1, 2]$
4.  $\phi(t) = 2\cos(t) + \sin(2t)$ ,  $[0, \frac{\pi}{2}]$
5.  $f(x) = xe^{-x^2/8}$ ,  $[-1, 4]$
6.  $f(x) = \ln(x^2 + x + 1)$ ,  $[-1, 1]$
7.  $f(x) = x - 2\arctan(x)$ ,  $[0, 4]$

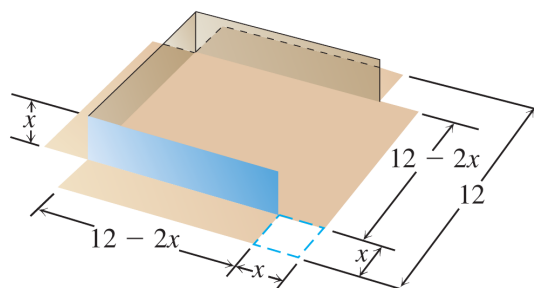
### Optimización aplicada

**Problema 1.21.** Una caja abierta está hecha al cortar pequeños cuadrados congruentes, de las esquinas, de una hoja de lata de 12 in por 12 in, y doblando los lados hacia arriba.

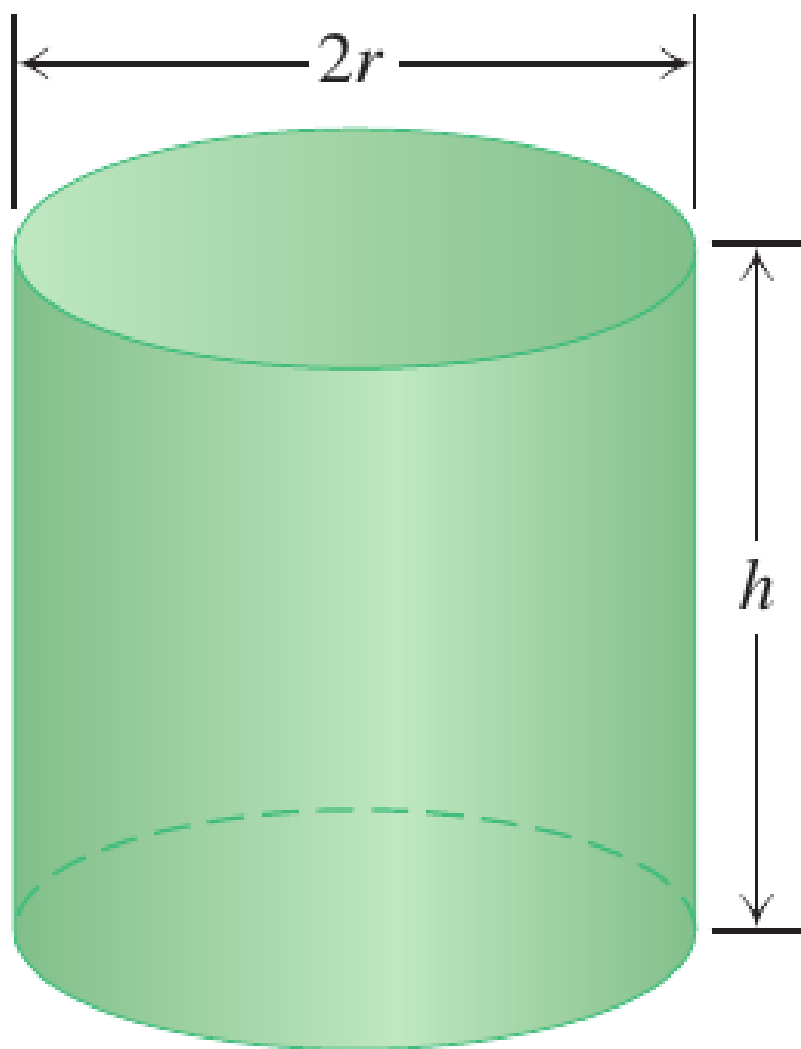
¿Qué tan largas deben ser las esquinas cortadas de las esquinas para hacer la caja tan grande como sea posible?



(a)

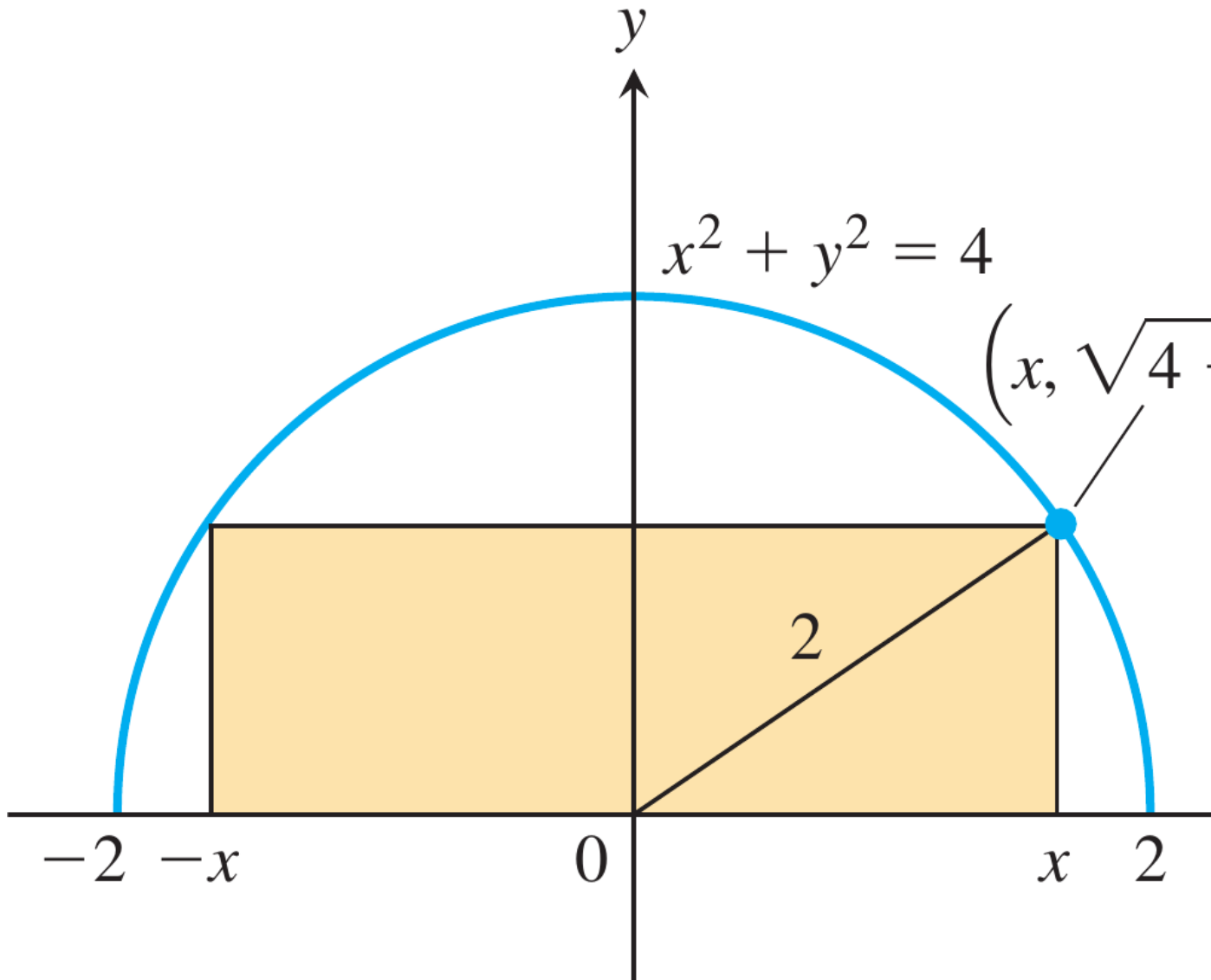


(b)



Se te ha pedido diseñar una lata de un litro, con la forma de un cilindro circular recto. ¿Qué dimensiones utilizarán el menor material posible?

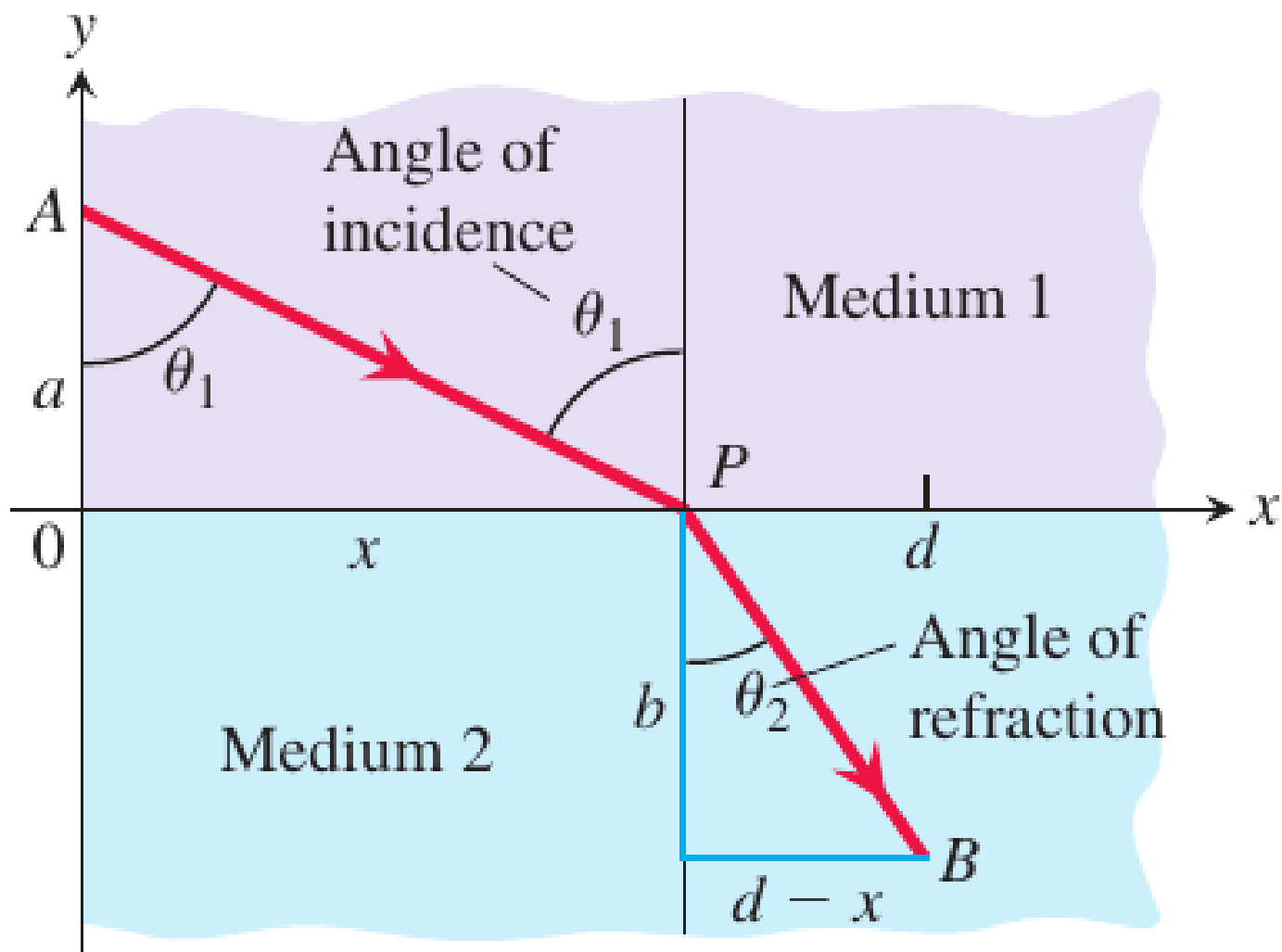
Un rectángulo está inscrito en un semicírculo de radio 2. ¿Cuál es el área más grande que se puede obtener, y cuáles son las dimensiones?



[Ley de Snell (refracción)] La velocidad de la luz depende del medio a través del cuál viaje, y es generalmente más lenta en medios más densos.

El *principio de Fermat* (de óptica) establece que la luz viaja fe

un punto a otro a lo largo de un camino para el cual el tiempo es mínimo.



Describe el camino para el cuál un rayo de luz seguirá yendo de un punto  $A$  en un medio en el que la velocidad es  $c_1$ , a un punto  $B$  en un medio en el que la velocidad es  $c_2$ .

### 1.7 Análisis de Gráficas

Supongamos que  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es una función con segunda derivada. Podemos proceder de la siguiente manera para en-

contrar su gráfica.

1. Encontrar las raíces, es decir, los puntos  $c$  tales que  $f(c) = 0$ ;
2. Encontrar los puntos críticos, es decir, los puntos  $c$  tales que  $f'(c) = 0$ ;
  - a) Si  $f''(c) > 0$ , entonces  $c$  es mínimo local,
  - b) Si  $f''(c) < 0$ , entonces  $c$  es máximo local,
3. Encontrar los puntos de inflexión, es decir, los puntos  $c$  tales que  $f'(c) = 0$ .

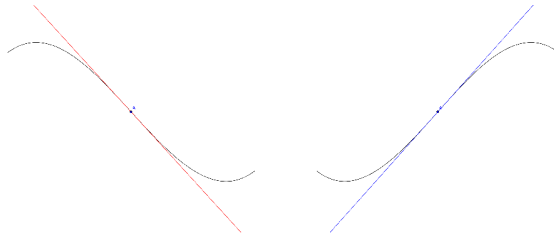


Figura 1.5: Puntos de inflexión

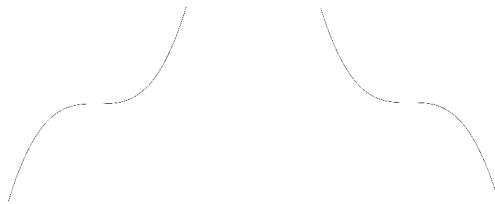


Figura 1.6: Puntos de silla

Los puntos de inflexión pueden ser como en la figura 1.5. Si  $f''$  cambia de negativa a positiva, la gráfica localmente como la de la izquierda, mientras que en el otro caso, luce como en la de la derecha.

Falta por caracterizar los puntos críticos  $c$  donde  $f''(c) = 0$ , es decir, que también son puntos de inflexión. Estos puntos se les conoce como *puntos de silla* y alrededor de estos, la gráfica se ve como alguna de las de la figura 1.6.

**Problema 1.22.** Grafique la función  $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^3 - x$ .

Solución

Primero, resolvemos la ecuación

$$x^3 - x = 0,$$

y tenemos que las raíces de  $f$  son  $x = -1, 0, 1$ .

Después derivamos  $f$ :

$$f'(x) = 3x^2 - 1,$$

y resolvemos la ecuación  $f'(c) = 0$ .

Entonces, los puntos críticos de la función son  $x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$ . Utilizamos el criterio ?? para decidir si son máximo o mínimos locales, o incluso, puntos de silla.

La segunda derivada de  $f$  es

$$f''(x) = 6x.$$

Como  $f''(\frac{1}{\sqrt{3}}) = 6(\frac{1}{\sqrt{3}}) > 0$ , entonces

$$c = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

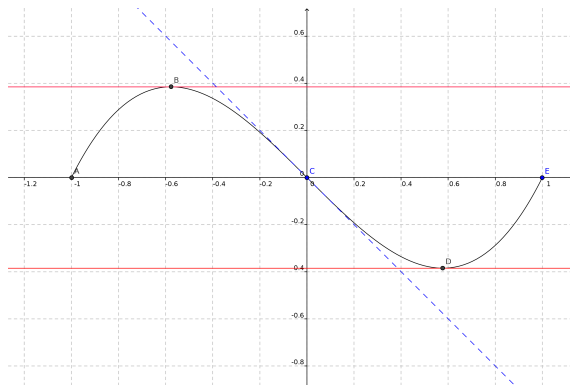
es un mínimo local.

De manera similar, concluimos que

$$c = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

es un máximo local.

Finalmente, resolvemos  $f''(c) = 0$ , pero la única solución es  $c = 0$  y por tanto, este es el único punto de inflexión. Como antes de  $c = 0$ ,  $f'' < 0$ , mientras que después  $f'' > 0$ , concluimos que en este punto, la gráfica se ve localmente como la gráfica de la derecha en la figura 1.5.



Podemos utilizar Sagemath para graficar y comparar con nuestros resultados. La gráfica esta dada en la figura 1.7.





## 2 Cálculo Integral

### 2.1 Antiderivadas

Si  $F'(x) = f(x)$ , diremos que  $F$  es una antiderivada de  $f$ .

**Problema 2.1.**  $x^3$  es una antiderivada de  $3x^2$ , porque...

$$D_x(x^3) = 3x^2$$

Pero  $x^3 + 5$  es también una antiderivada de  $3x^2$ , porque...

$$D_x(x^3 + 5) = 3x^2$$

En general, si  $F(x)$  es una antiderivada de  $f(x)$ , entonces  $F(x) + C$ ,  $C \in \mathbb{R}$  es también una antiderivada.

Más aun, si  $F(x)$  y  $G(x)$  son antiderivadas de  $f(x)$ , entonces existe  $C \in \mathbb{R}$  tal que

$$F(x) = G(x) + C.$$

Diremos que  $C$  es una *constante de integración*.

$\int f(x)dx$  denotara cualquier antiderivada de  $f(x)$  más una constante de integración.

Diremos que  $f(x)$  es el integrando, mientras que  $\int f(x)dx$  es llamada *integral indefinida*.

**Problema 2.2.1.**

$$\int x dx = \frac{1}{2}x^2 + C$$

2.

$$\int -\sin(x)dx = \cos(x) + C$$

**Proposición 2.1** (Reglas para antiderivadas).1.  $\int 0dx = C$

2.  $\int 1dx = x + C$

3.  $\int adx = ax + C$

4.  $\int x^r dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C, r \neq -1$

$$5. \int a f(x) dx = a F(x) + C$$

$$6. \int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$$

$$7. \int (f(x) - g(x)) dx = \int f(x) dx - \int g(x) dx$$

**Problema 2.3.1.**  $\int \sqrt[3]{x} dx =$

$$2. \int \frac{1}{x^2} dx =$$

$$3. \int 7x^3 dx =$$

$$4. \int (x^2 + 4) dx =$$

$$5. \int (3x^6 - 4x) dx =$$

Con las reglas (3)-(7), podemos calcular la antiderivada de cualquier polinomio.

**Problema 2.4.**

$$\int \left( 6x^8 - \frac{2}{3}x^5 + 7x^4 + \sqrt{3} \right) dx =$$

### *Integración por sustitución*

**Proposición 2.2** (Integración por sustitución).

$$\int (g(x))^r g'(x) dx = \frac{1}{r+1} (g(x))^{r+1} + C$$

para  $r \neq -1$ .

**Problema 2.5.**

$$\int \left( \frac{1}{3}x^3 + 7 \right)^5 x^2 dx =$$

**Problema 2.6.**

$$\int (x^2 + 1)^{2/3} x dx =$$

**Proposición 2.3** (Regla 9, método de sustitución).

$$\int f(g(x)) g'(x) dx = \int f(u) du$$

donde  $u = g(x)$ ,  $du = g'(x) dx$ .

Véase el ejercicio resuelto 2.13

**Problema 2.7.** Encuentre

$$\int x \sin(x^2) dx =$$

**Problema 2.8.** Encuentre

$$\int \sin(x/2) dx =$$

$$\int \sin x \, dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x \, dx = \sin x + C$$

$$\int \sec^2 x \, dx = \tan x + C$$

$$\int \tan x \sec x \, dx = \sec x + C$$

$$\int \csc^2 x \, dx = -\cot x + C$$

$$\int \cot x \csc x \, dx = -\csc x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \sin^{-1} x + C$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} \, dx = \tan^{-1} x + C$$

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} \, dx = \sec^{-1} x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} \, dx = \sin^{-1} \left( \frac{x}{a} \right) + C \quad \text{for } a > 0$$

$$\int \frac{1}{a^2+x^2} \, dx = \frac{1}{a} \tan^{-1} \left( \frac{x}{a} \right) + C \quad \text{for } a > 0$$

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-a^2}} \, dx = \frac{1}{a} \sec^{-1} \left( \frac{x}{a} \right) + C \quad \text{for } a > 0$$

Figura 2.1: Antiderivadas comunes

### Ejemplos Resueltos

**Problema 2.9** (Fórmula de integración por sustitución (2.2)).1.

$$\int (s^3 + 2)^2 (3s^2) ds =$$

$$2. \int (x^3 + 2)^{1/2} x^2 dx =$$

$$3. \int \frac{8x^2}{(x^3 + 2)^3} dx =$$

$$4. \int \frac{x^2 dx}{\sqrt[4]{x^3 + 2}} dx =$$

$$5. \int 3x\sqrt{1 - 2x^2} dx =$$

$$6. \int \sqrt[3]{1 - x^2} x dx =$$

$$7. \int \sin^2(x) \cos(x) dx =$$

**Problema 2.10.1.**  $\int \frac{\cos(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx =$

$$2. \int x \sec^2(4x^2 - 5) dx =$$

$$3. \int x^2 \sqrt{x+1} dx =$$

**Problema 2.11.** Una piedra se lanza hacia arriba desde el suelo, con una velocidad inicial de 64 ft/s.

1. ¿Cuándo alcanzará su altura máxima?
2. ¿Cuál será su altura máxima?
3. ¿Cuándo tocará el suelo?
4. ¿Cuál será su velocidad al tocar el suelo?

**Problema 2.12.** Encuentre la ecuación de una curva en el plano  $xy$  que pasa por el punto  $(0, 1)$  y cuya pendiente es igual a la altura en cada punto  $(x, y)$ .

**Problema 2.13.** Justifique el método de sustitución (2.3).

## 2.2 La integral definida

### Notación “Sigma”

La letra griega  $\Sigma$  denota adición repetida:

$$\sum_{i=a}^b f(i) = f(a) + f(a+1) + \dots + f(b),$$

siempre que  $a \leq b$ .

**Problema 2.14.1.**  $\sum_{j=1}^5 j = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$

2.  $\sum_{i=0}^3 (2i + 1) = 1 + 3 + 5 + 7$

3.  $\sum_{i=2}^{10} i^2 = 2^2 + 3^2 + \dots + 10^2$

4.  $\sum_{j=1}^4 \cos(j\pi) = \cos \pi + \cos 2\pi + \cos 3\pi + \cos 4\pi.$

### Linealidad

#### Proposición 2.4.

$$\sum_{i=a}^b c f(i) = c \sum_{i=a}^b f(i)$$

$$\sum_{i=a}^b f(i) + g(i) = \sum_{i=a}^b f(i) + \sum_{i=a}^b g(i)$$

### Área bajo la curva

Sea  $f$  una función tal que  $f(x) \geq 0$  en el intervalo  $[a, b]$ .

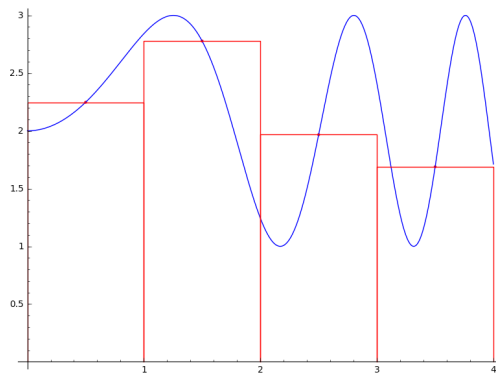


Figura 2.2: Aproximación de área bajo la curva

#### Algoritmo. (Sumas de Riemman)

1. Dividimos el intervalo en  $N$  subintervalos

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b.$$

2. Definimos la longitud de cada intervalo  $[x_{i-1}, x_i]$  como

$$\delta x_i = x_i - x_{i-1}.$$

3. El área bajo la curva definida por  $f$  esta aproximada por

$$\sum_{i=1}^N f(\xi_i) \delta x_i,$$

donde  $\xi_i$  es un punto en el intervalo  $[x_i, x_{i+1}]$ .

Una manera más concreta de construir una suma de Riemman es *fijando el tamaño del paso*:

1. Definimos  $h = \frac{b-a}{N}$ ;

2. Escogemos

$$\xi_k = a + kh, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N;$$

3. La suma de Riemann correspondiente será

$$\sum_{k=1}^N f(\xi_k) \cdot h = h(f(\xi_1) + \dots + f(\xi_N)).$$

Al fijar el tamaño del paso, hemos ocupado el extremo derecho de cada intervalo:  $x_k = a + k \cdot h$ , pero también podemos escoger por ejemplo:

■ el extremo izquierdo:

$$\xi_k = a + (k-1) \cdot h;$$

■ o el punto medio de cada intervalo:

$$\xi_k = a + \left(k - \frac{1}{2}\right) \cdot h;$$

Si en un intervalo  $[a, b]$ ,  $f(x) < 0$ , entonces la suma anterior aproxima el área *sobre la curva*.

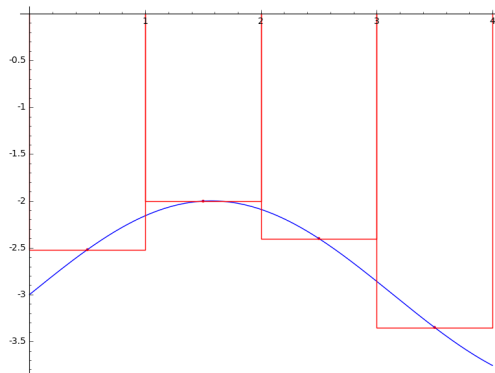


Figura 2.3: Aproximación de área bajo la curva

Por esta razón, cuando no distinguimos cuando  $f(x)$  cambia de signo en un intervalo, hablamos del *área con signo*.

**Definición. 1.** La integral definida de  $f$  en el intervalo  $[a, b]$  está dada por

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \sum_{i=1}^N f(\xi_i) \delta x_i \right),$$

siempre y cuando el límite exista.

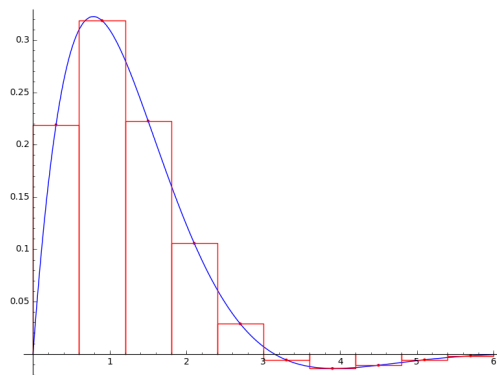


Figura 2.4: Aproximación de área bajo la curva

2. Si el límite existe, diremos que  $f$  es integrable (en  $[a, b]$ ).
3. La suma está definida como en el algoritmo 2.2.3 y se conoce como suma de Riemman.

**Problema 2.15.** Calcule

$$\int_1^5 1 dx.$$

**Problema 2.16.** Calcule

$$\int_0^5 x dx.$$

**Problema 2.17.** Calcule

$$\int_1^5 x dx.$$

**Proposición 2.5.**

$$\int_a^b 1 dx = b - a \quad (2.1)$$

$$\int_a^b x dx = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2} \quad (2.2)$$

**Problema 2.18.** Aproxime la integral

$$\int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx$$

utilizando el algoritmo 2.2.3 fijando el tamaño del paso, con  $a = -1, b = 1, N = 5$  y usando el extremo derecho de cada intervalo.

**Problema 2.19.** Aproxime la integral del ejemplo 2.18 cuando:

1.  $a = 0, b = 3, N = 4$ ;
2.  $a = -2, b = 2, N = 8$ ;
3.  $a = -3, b = 3, N = 16$ .

*Propiedades de la Integral Definida**Propiedades: Linealidad*

$$\int_a^b c f(x) dx = c \int_a^b f(x) dx \quad (2.3)$$

$$\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx \quad (2.4)$$

*Propiedades: Límites*

$$\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx \quad (2.5)$$

$$\int_a^a f(x) dx = 0 \quad (2.6)$$

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx \quad (2.7)$$

*Ejemplos Resueltos*

**Problema 2.20.** Supongamos que  $f$  y  $g$  son integrables en  $[a, b]$ .

*Demostrar que:*

1. Si  $f(x) \geq 0$  en  $[a, b]$ , entonces  $\int_a^b f(x) dx \geq 0$ .
2. Si  $f(x) \leq g(x)$  en  $[a, b]$ , entonces

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx.$$

3. Si  $m \leq f(x) \leq M$  para todo  $x \in [a, b]$ , entonces

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a).$$

**Problema 2.21.** Demuestre la fórmula

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

**2.3** *El Teorema Fundamental del Cálculo**Valor promedio de una función*



### Valor promedio de una función

Si una función  $f$  se evalúa en  $n$  puntos  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N$ , el valor promedio de la función para estos puntos es

$$\frac{f(\xi_1) + f(\xi_2) + \dots + f(\xi_N)}{N} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N f(\xi_k).$$

Sin embargo, si tratamos de promediar una función en un intervalo  $[a, b]$ , esta definición no es útil porque habrá una infinidad<sup>1</sup> de puntos.

Aun así, todavía podemos encontrar una definición, motivada por el promedio en una cantidad finita de puntos

Escogiendo el tamaño del paso fijo para un número  $N$  dado de subintervalos, tenemos que

$$h = \frac{b-a}{N}.$$

O de manera equivalente

$$\frac{1}{N} = \frac{1}{b-a} h.$$

De manera que

$$\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N f(\xi_k) = \frac{1}{b-a} \sum_{k=1}^N f(\xi_k) \cdot h.$$

Cuando  $N \rightarrow \infty$ , el lado derecho se aproxima a

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(\xi) d\xi.$$

**Definición.** El valor promedio de  $f$  en  $[a, b]$  está dado por

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

Sea  $f$  una función continua en  $[a, b]$ . Si  $x \in [a, b]$ , entonces

$$F(x) = \int_a^x f(\xi) d\xi$$

es una función que depende de  $x$  tal que

$$D_x F(x) = D_x \left( \int_a^x f(\xi) d\xi \right) = f(x).$$

### Enunciado del T.F.C

**Teorema 2.1** (Teorema Fundamental del Cálculo). Sea  $f$  una función continua en  $[a, b]$  y  $F(x)$  una antiderivada de  $f(x)$ . Entonces

$$\int_a^b f(\xi) d\xi = F(b) - F(a). \quad (\text{TFC})$$

<sup>1</sup> De hecho, una cantidad no numerable de puntos, por lo que ni siquiera podemos tratar de aplicar algunas técnicas para series

La ecuación (TFC) nos da una manera sencilla de calcular

$$\int_a^b f(\xi) d\xi \dots$$

siempre y cuando podamos encontrar una antiderivada de  $f(x)$ , en términos de funciones elementales.

La expresión  $F(b) - F(a)$  generalmente se abrevia como

$$F(x) \Big|_a^b.$$

Calcule las siguientes fórmulas utilizando el (TFC):

1.

$$\int_a^b x dx =$$

2.

$$\int_a^b x^2 dx =$$

3.

$$\int_a^b x^r dx =$$

**Proposición 2.6** (TFC con Cambio de Variables). *Supongamos que en el intervalo  $[a, b]$ , la función  $f$  es continua y la función  $g$  es diferenciable.*

Entonces

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du,$$

donde  $u = g(x)$ .

**Problema 2.22.** *Evalúe*

$$\int_1^9 \sqrt{5x+4} dx.$$

### Ejemplos Resueltos

**Problema 2.23.** *Evalúe*

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2(x) \cos(x) dx.$$

**Problema 2.24.** *Encuentre el área de la región entre la curva dada por  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$ , el eje  $x$ ,  $x = 0$  y  $x = 1$ .*

**Problema 2.25.** *Encuentre el valor promedio de  $f(x) = 4 - x^2$  en  $[0, 2]$ .*

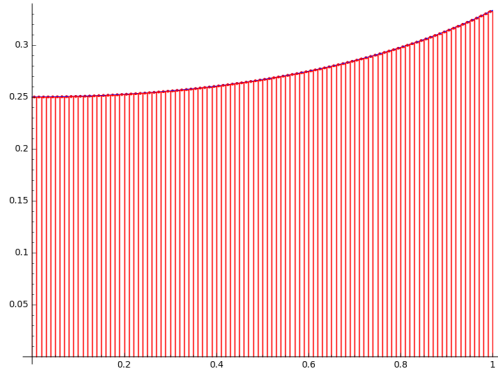


Figura 2.5:  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$

**Problema 2.26.** Demuestre la fórmula (2.3.2). Sugerencia: Utilice el teorema del valor medio.

**Teorema 2.2** (Teorema del Valor Medio para Integrales). Sea  $f$  una función continua en  $[a, b]$ . Entonces existe  $c \in [a, b]$  tal que

$$\int_a^b f(\xi) d\xi = (b-a) f(c)$$

**Problema 2.27.** Demuestre que

1. Si  $f$  es una función par, entonces para  $a > 0$  :

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx;$$

2. Si  $f$  es una función impar, entonces para  $a > 0$  :

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 0.$$

**Problema 2.28** (Regla trapezoidal). Sea  $f(x) \geq 0$  en  $[a, b]$ . Dividamos  $[a, b]$  en  $N$  subintervalos de longitud fija  $h = \frac{b-a}{N}$ , por medio de puntos

$$x_k = a + k \cdot h, \quad k = 1, \dots, N.$$

Muestre que

$$\int_a^b f(\xi) d\xi \approx \frac{h}{2} \left( f(a) + 2 \sum_{k=1}^{N-1} f(\xi_k) + f(b) \right)$$

**Problema 2.29.** Use la regla trapezoidal para aproximar

$$\int_0^1 x^2 dx$$

con  $N = 1$ .

Utilice el (TFC) para calcular la integral de manera exacta y compare.

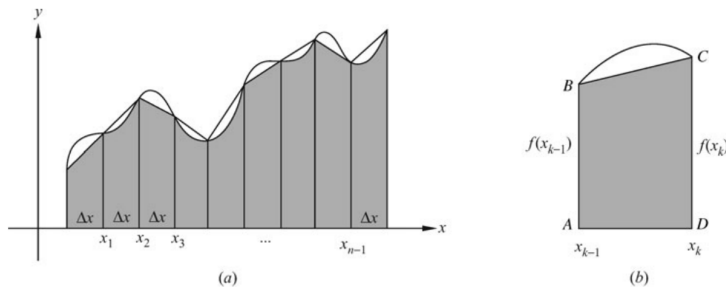


Figura 2.6: Regla trapezoidal

## 2.4 Integración por partes

A partir de la regla del producto

$$\frac{d}{dx}(uv) = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx},$$

se deduce la fórmula de integración por partes:

$$\int u dv = uv - \int v du$$

Para elegir  $u$ , podemos seguir la regla empírica **LIATE**:

- **L**ogaritmos
- **I**versas trigonométricas
- **A**lgebraicas
- **T**rigonométricas
- **E**xponenciales

**Problema 2.30.** Encuentre

$$\int x \ln(x) dx.$$

**Problema 2.31.** Encuentre

$$\int x e^x dx.$$

**Problema 2.32.** Encuentre

$$\int e^x \cos(x) dx.$$

### Ejemplos Resueltos

**Problema 2.33.** Por medio de integración por partes, encuentre la siguiente integral indefinida

$$\int x^3 e^{x^2} dx$$

**Problema 2.34.** Por medio de integración por partes, encuentre la siguiente integral indefinida

$$\int \ln(x^2 + 2) dx$$

**Problema 2.35.** Por medio de integración por partes, encuentre la siguiente integral indefinida

$$\int \ln(x) dx$$

**Problema 2.36.** Por medio de integración por partes, encuentre la siguiente integral indefinida

$$\int x \sin(x) dx$$

**Problema 2.37.** Por medio de integración por partes, encuentre la siguiente integral indefinida

$$\int x^2 \ln(x) dx$$

**Problema 2.38.** Por medio de integración por partes, encuentre la siguiente integral indefinida

$$\int \sin^{-1}(x) dx$$

**Problema 2.39.** Por medio de integración por partes, encuentre la siguiente integral indefinida

$$\int \tan^{-1}(x) dx$$

**Problema 2.40.** Por medio de integración por partes, encuentre la siguiente integral indefinida

$$\int \sec^3(x) dx$$

**Problema 2.41.** Por medio de integración por partes, encuentre la siguiente integral indefinida

$$\int x^2 \sin(x) dx$$

**Problema 2.42.** Por medio de integración por partes, encuentre la siguiente integral indefinida

$$\int x^3 e^{2x} dx$$

**Problema 2.43.** Deduzca la siguiente fórmula de reducción

$$\begin{aligned} \int \sin^m(x) dx = & -\frac{\sin^{m-1}(x) \cdot \cos(x)}{m} \\ & + \frac{m-1}{m} \int \sin^{m-2}(x) dx. \end{aligned} \quad (\text{FR})$$

**Problema 2.44.** Aplique la formula de reducción (FR) para hallar

$$\int \sin^2(x) dx.$$

**Problema 2.45.** Aplique la formula de reducción (FR) para hallar

$$\int \sin^3(x) dx.$$

## 2.5 Fracciones parciales

La técnica de fracciones parciales se utiliza para integrar funciones racionales, es decir, aquellas de la forma

$$\frac{N(x)}{D(x)},$$

donde  $N, D$  son polinomios.

Por simplicidad, supondremos que

1. El coeficiente líder de  $D(x)$  es igual a 1.
2. El grado de  $D(x)$  es mayor que el de  $N(x)$ .

Sin embargo, ninguna de estas dos condiciones son esenciales.

**Problema 2.46.**

$$\int \frac{2x^3}{5x^8 + 3x - 4} dx = \frac{1}{5} \int \frac{2x^3}{x^8 + \frac{3}{5}x - \frac{4}{5}}$$

**Problema 2.47.**

$$\frac{2x^5 + 7}{x^2 + 3} = 2x^3 - 6x + \frac{18x + 7}{x^2 + 3}$$

**Definición.** Un polinomio es irreducible si no se puede expresar como el producto de dos polinomios de grado menor.

1. Todo polinomio lineal es irreducible
2. Un polinomio cuadrático

$$g(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0$$

es irreducible si y solo  $b^2 - 4ac < 0$ .

**Problema 2.48.** *Verifique que*

1.  $x^2 + 4$  es irreducible;
2.  $x^2 + x - 4$  es reducible.

**Teorema 2.3.** *Todo polinomio cuyo coeficiente líder sea igual a 1 se puede expresar como producto de factores lineales, o factores cuadráticos irreducibles.*

**Problema 2.49.1.**  $x^3 - 4x =$

2.  $x^3 + 4x =$
3.  $x^4 - 9 =$
4.  $x^3 - 3x^2 - x + 3 =$

### *Método de Fracciones Parciales*

*Caso I.  $D(x)$  es producto de factores lineales distintos*

**Problema 2.50.** *Resuelva*

$$\int \frac{dx}{x^2 - 4}$$

**Problema 2.51.** *Resuelva*

$$\int \frac{(x+1)dx}{x^3 + x^2 - 6x}$$

### *Regla General para Caso 1*

El integrando se representa como una suma de términos de la form  $\frac{A}{x-a}$ , para cada factor  $x-a$ , y  $A$  una constante por determinar.

*Caso 2.  $D(x)$  es producto de factores lineales repetidos.*

**Problema 2.52.** Encuentre

$$\int \frac{(3x+5)dx}{x^3-x^2-x+1}$$

**Problema 2.53.**

$$\int \frac{(x+1)dx}{x^3(x-2)^2}$$

*Regla General para el Caso 2.*

Para cada factor  $x - c$  de multiplicidad  $k$ , se utiliza la expresión

$$\frac{A_1}{x-r} + \frac{A_2}{(x-r)^2} + \dots + \frac{A_k}{(x-r)^k}.$$

*Caso 3. Factores cuadráticos irreducibles distintos, y lineales repetidos*

A cada factor irreducible  $x^2 + bx + c$  de  $D(x)$  le corresponde el integrando

$$\frac{Ax+B}{x^2+bx+c}.$$

**Problema 2.54.** Encuentre

$$\int \frac{(x-1)dx}{x(x^2+1)(x^2+2)}$$

*Caso IV. Factores cuadráticos irreducibles repetidos*

A cada factor cuadráticos irreducible  $x^2 + bx + c$  de mutiplicidad  $k$  le corresponde el integrando

$$\sum_{i=1}^k \frac{A_i x + B_i}{(x^2 + bx + c)^i}$$

**Problema 2.55.** Encuentre

$$\int \frac{2x^2+3}{(x^2+1)^2} dx.$$

## 2.6 Técnicas de integración trigonométrica

*Integrados trigonométricos*



**Caso 1**

Considérense las integrales de la forma

$$\int \sin^k(x) \cos^n(x) dx,$$

con  $k, n$  enteros no negativos.

**Tipo 1.1**

Si Al menos uno de los números  $k, n$  es impar, entonces podemos escoger  $u = \cos(x)$  o  $u = \sin(x)$ .

**Problema 2.56.**

$$\int \sin^3(x) \cos^2(x) dx.$$

**Problema 2.57.**

$$\int \sin^4(x) \cos^7(x) dx$$

**Problema 2.58.**

$$\int \sin^5(x) dx$$

**Tipo 1.2**

Si ambas potencias  $k, n$  son pares. Entonces utilizaremos las identidades

$$\begin{cases} \cos^2(x) = \frac{1 + \cos(2x)}{2} \\ \sin^2(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{2} \end{cases}$$

**Problema 2.59.**

$$\int \cos^2(x) \sin^4(x) dx$$

**Caso 2**

Consideraremos integrales de la forma

$$\int \tan^k(x) \sec^n(x) dx.$$

y utilizaremos la identidad

$$\sec^2(x) = 1 + \tan^2(x).$$

**Tipo 2.1**

Si  $n$  es par, entonces se sustituye  $u = \tan(x)$ .

**Problema 2.60.**

$$\int \tan^2(x) \sec^4(x) dx$$

**Tipo 2.2**

Si  $n, k$  son impares, se sustituye  $u = \sec(x)$ .

**Problema 2.61.**

$$\int \tan^3(x) \sec(x) dx.$$

**Tipo 2.3**

Si  $n$  es impar y  $k$  par, reducimos a los casos anteriores y utilizaremos la fórmula

$$\int \sec(x) dx = \ln |\tan(x) + \sec(x)|$$

**Problema 2.62.**

$$\int \tan^2(x) \sec(x) dx =$$

**Caso 3**

Consideremos ahora integrales de la forma  $\int f(Ax)g(Bx)dx$ , donde  $f, g$  pueden ser o bien  $\sin$  o bien  $\cos$ .

Necesitaremos las identidades

$$\sin(Ax)\cos(Bx) = \frac{1}{2} (\sin((A+B)x) + \sin((A-B)x))$$

$$\sin(Ax)\sin(Bx) = \frac{1}{2} (\cos((A-B)x) - \cos((A+B)x))$$

$$\cos(Ax)\cos(Bx) = \frac{1}{2} (\cos((A-B)x) + \cos((A+B)x))$$

**Problema 2.63.**

$$\int \sin(7x)\cos(3x)$$

**Problema 2.64.**

$$\int \sin(7x)\cos(3x)$$

**Problema 2.65.**

$$\int \sin(7x)\sin(3x)$$

**Problema 2.66.**

$$\int \cos(7x)\cos(3x)$$

### Sustitución trigonométrica

Existen tres principales tipos de sustitución trigonométrica. Introduciremos cada uno por medio de ejemplos típicos.

**Problema 2.67.** *Encuentre*

$$\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{4+x^2}}$$

#### Estrategia I

Si  $\sqrt{a^2+x^2}$  aparece en el integrando, intente  $x = a \tan(\theta)$

**Problema 2.68.** *Encuentre*

$$\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{9-x^2}}$$

#### Estrategia II

Si  $\sqrt{a^2-x^2}$  aparece en un integrando, trate con la sustitución  $x = a \sin(\theta)$ .

**Problema 2.69.** *Encuentre*

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-4}} dx.$$

#### Estrategia III

Si  $\sqrt{x^2-a^2}$  aparece en un integrando, trate con la sustitución  $x = a \sec \theta$ .

## 2.7 Área y longitud de arco

### Área entre una curva y el eje vertical

Nosotros ya sabemos como encontrar el área de una región como la siguiente

El área de la región acotada por

$$x = a, \quad x = b, \quad y = 0, \quad y = f(x)$$

está dada por

$$\int_a^b f(x) dx$$

Ahora consideremos una región como la siguiente

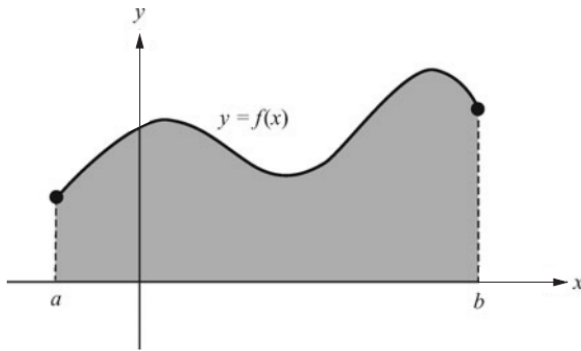


Figura 2.7: Área bajo la curva

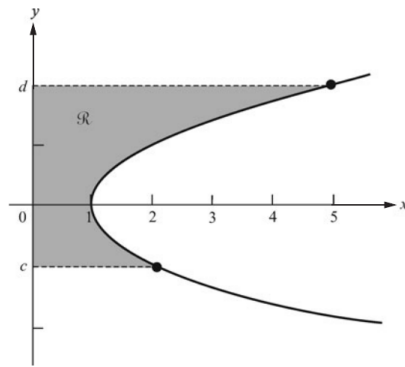


Figura 2.8: Área entre curva y eje vertical

De manera similar, el área de la región acotada por

$$x = 0, x = g(y), y = c, y = d$$

está dada por

$$\int_c^d g(y) dy$$

**Problema 2.70.** Calcule el área de la región dada en la figura 2.9, que está acotada por el eje  $y$ , arriba por  $y = 2$ , abajo por  $y = -1$  y la curva

$$x + y^2 = 4.$$

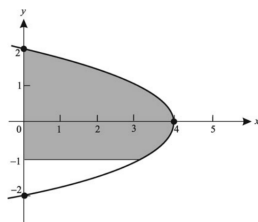


Figura 2.9: Área acotada por una parábola

### Área entre curvas

Supongamos que  $f$  y  $g$  son funciones continuas para  $a \leq x \leq b$ .

El área  $A$  de la región contenida entre estas dos curvas y los ejes  $x = a$  y  $x = b$  está dada por la fórmula

$$A = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx.$$

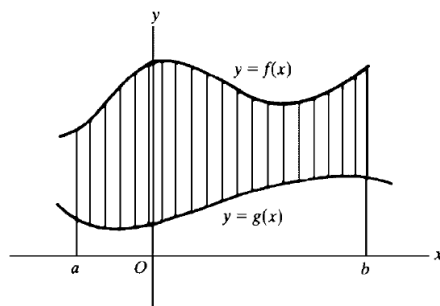


Fig. 29-4

Figura 2.10: Área entre curvas (funciones positivas)

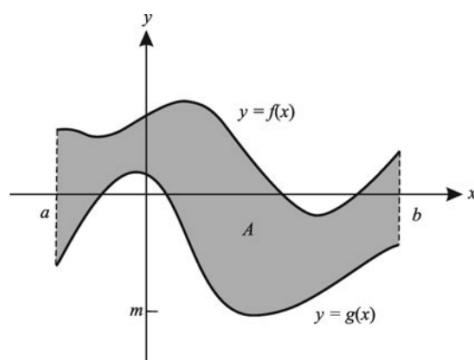


Figura 2.11: Área entre curvas

**Problema 2.71.** Calcule el área de región de la figura 2.13, acotada por

$$x = 0, x = 1, y = \frac{1}{2}x + 2, y = x^2.$$

### Longitud de arco

Por la fórmula de distancia

$$\overline{P_{k-1}P_k} = \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (f(x_k) - f(x_{k-1}))^2}.$$

Por el teorema del valor medio, existe  $x_k^* \in (x_{k-1}, x_k)$  tal que

$$f(x_k) - f(x_{k-1}) = (x_k - x_{k-1}) f'(x_k^*) = (\Delta x) f'(x_k^*).$$

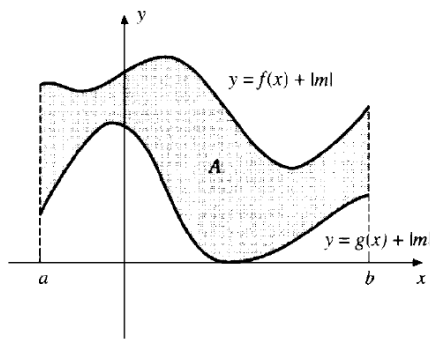


Figura 2.12: Deducción de la fórmula

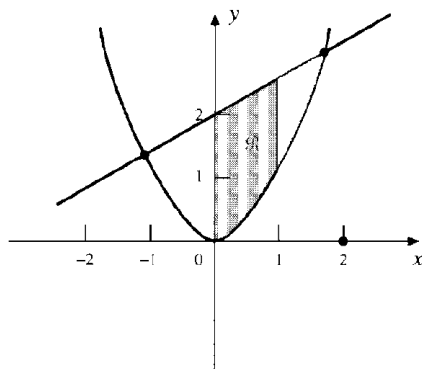


Figura 2.13: Área entre línea y parábola

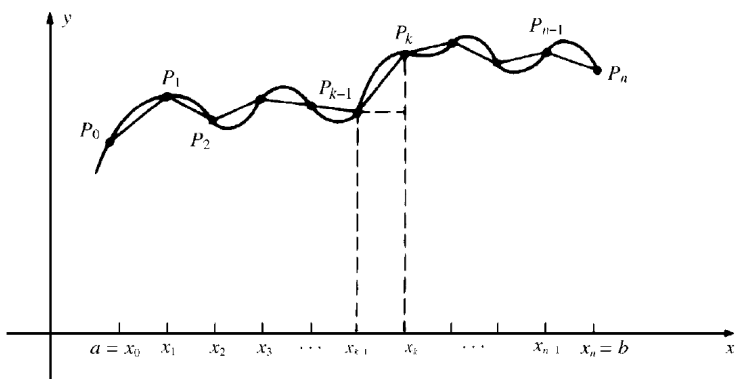


Figura 2.14: Aproximación de la longitud de un arco

Entonces

$$\overline{P_{k-1}P_k} = \sqrt{1 + (f'(x_k^*))^2}(\Delta x)$$

De manera que

$$\sum_{k=1}^n \overline{P_{k-1}P_k} = \sum_{k=1}^n \sqrt{1 + (f'(x_k^*))^2}(\Delta x),$$

donde  $(\Delta x)n = b - a$ .

Tomando el límite  $n \rightarrow \infty$  de ambos lados obtenemos que la longitud  $L(f, a, b)$  de al arco dado por la curva  $f(x)$  en el intervalo  $a \leq x \leq b$  esta dado por

$$L(f, a, b) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

**Problema 2.72.** Encuentre la longitud del arco descrito por la curva  $y = x^{3/2}$  de  $x = 0$  a  $x = 5$ .

### Ejemplos

**Problema 2.73.** Encuentre el área acotada por la parábola

$$x = 8 + y - y^2,$$

el eje  $y$  y las líneas  $y = -1$  y  $y = 3$ .

**Problema 2.74.** Encuentre el área de la región acotada por las parábolas

$$y = 6x - x^2$$

y

$$y = x^2 - 2x.$$

**Problema 2.75.** Encuentre la longitud de arco de la curva

$$x = 3y^{3/2} - 1$$

desde  $y = 0$  hasta  $y = 4$ .

**Problema 2.76.** Encuentre la longitud de arco de la catenaria

$$y = \frac{a}{2} \left( e^{x/a} + e^{-x/a} \right)$$

desde  $x = 0$  hasta  $x = a$ .

## 2.8 Volumen

Un sólido de revolución se obtiene al girar una región del plano alrededor de una línea que no intersecta la región.

La línea alrededor del cuál se realiza la rotación se llama *eje de revolución*.

Sea  $f$  una función continua tal que  $f(x) \geq 0$  para  $a \leq x \leq b$ . Considere la región  $\mathcal{R}$  bajo la gráfica de  $f$ , arriba del eje  $x$ , entre  $x = a$  y  $x = b$ :

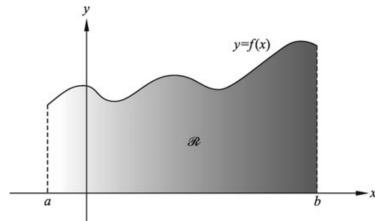


Figura 2.15: Región de revolución

**Problema 2.77.** Grafique la superficie de revolución generada por la región acotada por la recta  $y = x$  y la parábola  $y = x^2$ .

**Observación.** A partir de ahora, usaremos el sistema algebraico de computo *SageMath*, para visualizar las gráficas.

[fragile]Código para graficar en 2D

```
x = var("x")
line = x
parabola = x^2
graf = plot(line, (-0.5, 1.5))
graf = graf+plot(parabola, (-0.5, 1.5))
graf.show()
```

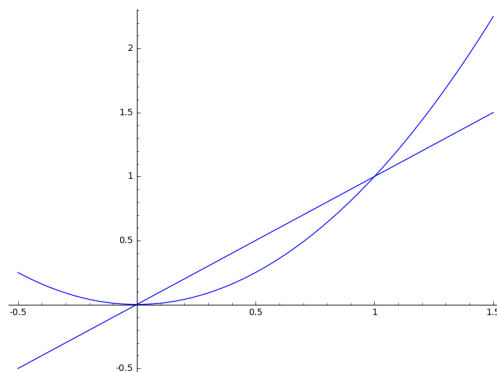


Figura 2.16: Región  $\mathcal{R}$  acotada por  $y = x$  y  $y = x^2$

[fragile]Código para generar un sólido de revolución

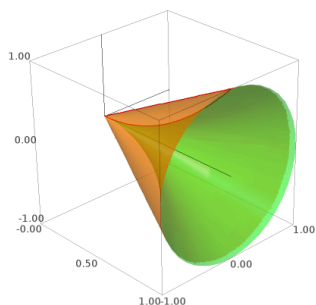
```
x = var("x")
line = x
parabola = x^2
P = axes(1, color="black")
```



```

sur1=revolution_plot3d(line,(x,0,1),
    opacity=0.5,rgbcolor=(1,0.5,0),
    show_curve=True,parallel_axis='x')
sur2=revolution_plot3d(parabola,(x,0,1),
    opacity=0.5,rgbcolor=(0,1,0),
    show_curve=True,parallel_axis='x')
(sur1+sur2+P).show()

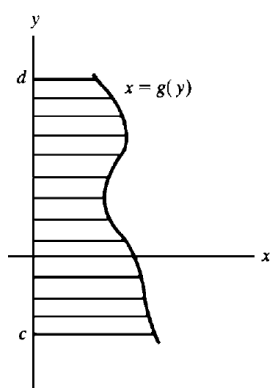
```

Figura 2.17: Sólido generado por  $\mathcal{R}$ 

### Fórmula del Disco

El volumen  $V$  de un sólido de revolución obtenido al rotar una región  $\mathcal{R}$  alrededor del eje  $x$  está dado por

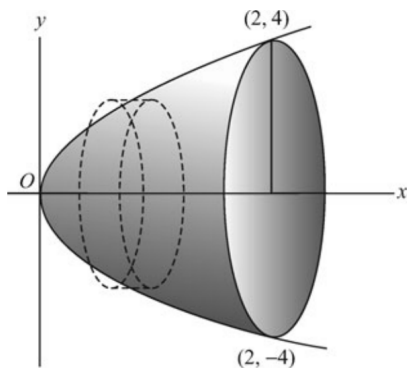
$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx \quad (\text{Fórmula del Disco})$$

Figura 2.18: Región acotada por  $x = g(y)$ 

De manera similar, la fórmula para una región como acotada por la gráfica  $x = g(y)$  está dada por

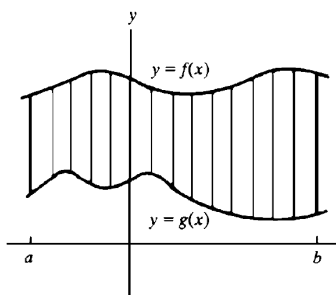
$$V = \pi \int_c^d (g(y))^2 dy \quad (\text{Fórmula del Disco (II)})$$

**Problema 2.78.** Considere el sólido de revolución obtenido al girar alrededor del eje  $x$  la región en el primer cuadrante acotada por la parábola  $y^2 = 8x$  y la línea  $x = 2$ . Encuentre su volumen.



**Problema 2.79.** Considere el sólido de revolución obtenido al girar alrededor del eje  $y$  la región en el primer cuadrante acotada por la parábola  $y = 4x^2$  y la línea  $y = 16$ . Encuentre su volumen.

### Método de Washer



Supongamos que  $0 \leq g(x) \leq f(x)$  para  $a \leq x \leq b$ . Consideremos la región acotada por  $x = a$ ,  $x = b$ , y las curvas  $y = g(x)$  y  $y = f(x)$ .

Entonces el volumen  $V$  del sólido de revolución generado por esta región rotando alrededor del eje  $x$  está dado por

$$V = \pi \int_a^b ((f(x))^2 - (g(x))^2) dx \quad (\text{Washer})$$

Una fórmula similar

$$V = \pi \int_c^d ((f(y))^2 - (g(y))^2) dy \quad (\text{Washer (II)})$$

se satisface cuando la región está acotada por las curvas  $x = f(y)$ ,  $x = g(y)$  y las rectas  $y = c$ ,  $y = d$ , siempre y cuando  $0 \leq g(y) \leq f(y)$  para  $c \leq y \leq d$  y se rota tal región alrededor del eje  $y$ .

**Problema 2.80.** Considere el sólido de revolución obtenido al girar alrededor del eje  $x$  la región acotada por las curvas

$$y = 4x^2, \quad x = 0, \quad y = 16.$$

Encuentre el volumen por (Washer).

### Método de las capas cilíndricas

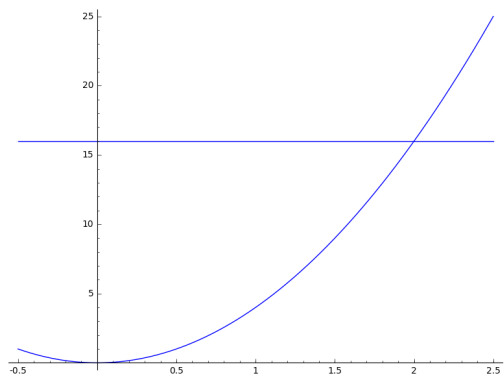


Figura 2.19: Región  $\mathcal{R}$  acotada por  $y = 4x^2$ ,  $x = 0$ ,  $y = 16$ .

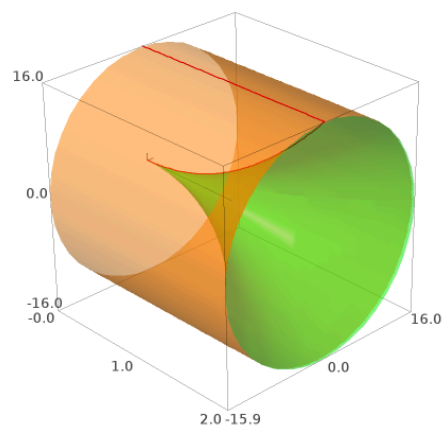
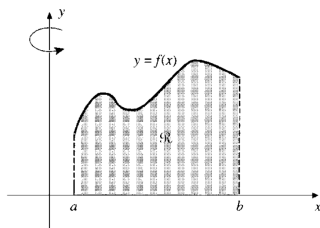


Figura 2.20: Sólido generado por región  $\mathcal{R}$ .



Consideremos el sólido de revolución obtenido al rotar alrededor del eje  $y$  la región  $\mathcal{R}$  en el primer cuadrante entre el eje  $x$  y la curva  $y = f(x)$ , entre  $x = a$  y  $x = b$ .

Entonces el volumen del sólido está dado por la fórmula

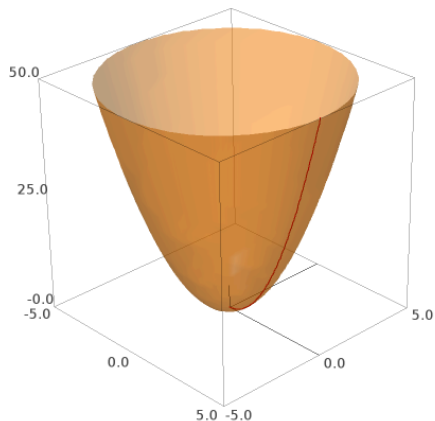
de capas cilíndricas

$$V = 2\pi \int_a^b x f(x) dx \quad (\text{FCC})$$

Una fórmula similar se satisface cuando se intercambian  $x$  y  $y$ , es decir, la región  $\mathcal{R}$  en el primer cuadrante entre el eje  $y$  y la curva  $x = f(y)$ , entre  $y = c$  y  $y = d$ , se gira alrededor del eje  $x$

$$V = 2\pi \int_c^d y f(y) dy \quad (\text{FCC(II)})$$

**Problema 2.81.** Rote alrededor del eje  $y$  la región sobre el eje  $x$  y debajo de  $y = 2x^2$ , entre  $x = 0$  y  $x = 5$ . Por medio de (FCC). Encuentre el volumen.



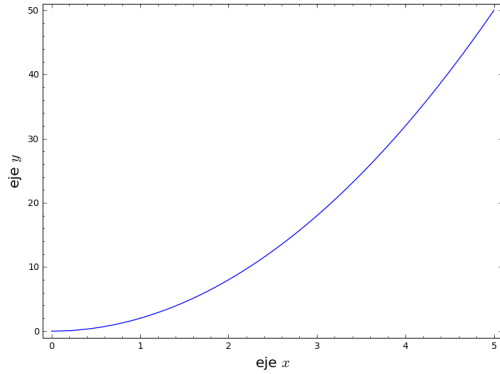
### Diferencia de Capas

Supongamos que  $0 \leq g(x) \leq f(x)$  en el intervalo  $[a, b]$ ,  $a \geq 0$ . Sea  $\mathcal{R}$  la región en el primer cuadrante entre

$$y = f(x), y = g(x), x = a, x = b.$$

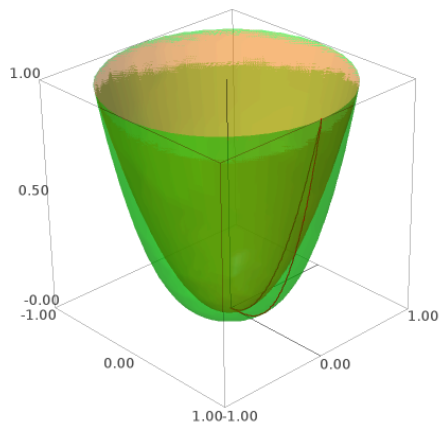
Entonces el volumen del sólido de revolución obtenido al rotar  $\mathcal{R}$  alrededor del eje  $y$  está dado por

$$V = 2\pi \int_a^b x (f(x) - g(x)) dx \quad (\text{FDC})$$

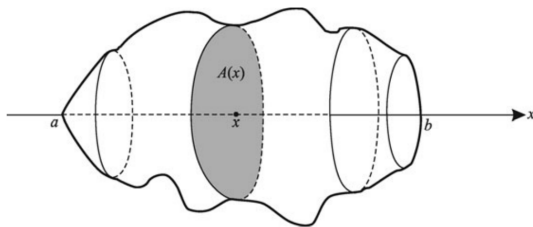
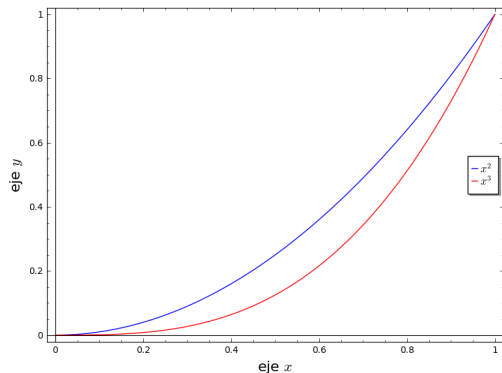


**Problema 2.82.** Consideremos la región en el primer cuadrante acotado arriba por  $y = x^2$  y debajo por  $y = x^3$ .

Encuentre el volumen del sólidos generado al rotar  $\mathcal{R}$  alrededor del eje  $y$ .



### Secciones trasversales (rebanadas)



Supongamos  
que un  
sólido  
vive ente-  
ramente  
entre el  
plano  
perpendi-

cular al eje  $x$  en  $x = a$  y el plano perpendicular al  $x$  en  $x = b$ .

Para cada  $x \in [a, b]$ , supongamos que el plano perpendicular al eje  $x$  en el punto  $x$  intersecta al sólido en una región de área  $A(x)$ .

Entonces, el volumen  $V$  del sólido está dado por

$$V = \int_a^b A(x) dx. \quad (\text{FST})$$

**Problema 2.83.** Supongamos que un segmento de un misil de longitud  $h$  es tal que la sección transversal perpendicular al eje de simetría del misil a una distancia  $x$  de la punta es un círculo de radio  $\sqrt{x}$ . Encuentre el volumen del misil.

## 2.9 Integrales impropias

### Límites al infinito

Para que

$$\int_a^b f(x) dx$$

esté bien definida, basta que  $f$  sea una función continua y  $a, b$  sean número reales. Ahora veremos que sucede cuando

1.  $a$  o  $b$  tienden a  $\pm\infty$ ;
2.  $f$  es discontinuo.

Tales integrales se conocen como *impropias*.

Límites infinitos de integración

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{c \rightarrow +\infty} \int_a^c f(x)dx \quad (2.8)$$

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{c \rightarrow -\infty} \int_c^b f(x)dx \quad (2.9)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_c^{+\infty} f(x)dx + \int_{-\infty}^c f(x)dx \quad (2.10)$$

La última integral es válida siempre y cuando los dos límites del lado derecho existan.

**Problema 2.84.** Encuentre la integral

$$\int_0^{\infty} e^{-x} \sin(x) dx$$

**Problema 2.85.** Encuentre la integral

$$\int_{-\infty}^0 e^{rx} dx$$

para  $r > 0$ .

**Problema 2.86.** Evalúe

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$$

### Discontinuidades del integrando

Caso I Si  $f$  es continuo en  $(a, b]$ , discontinuo en  $x = a$ , podemos definir

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{u \rightarrow a^+} \int_u^b f(x)dx,$$

siempre y cuando el límite exista.

**Problema 2.87.** Evalúe

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2}$$

Caso II Si  $f$  es continuo en  $[a, b)$ , discontinuo en  $x = b$ , podemos definir

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{u \rightarrow b^-} \int_a^u f(x)dx,$$

siempre y cuando el límite exista.

**Problema 2.88. Evaluate**

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos(x)}{\sqrt{1-\sin(x)}} dx$$

Caso III Si  $f$  es continuo en  $[a, b]$  excepto en un punto  $c \in (a, b)$ , entonces

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{u \rightarrow c^-} \int_a^u f(x) dx + \lim_{u \rightarrow c^+} \int_u^b f(x) dx$$

siempre y cuando ambos límites del lado derecho existan.

**Problema 2.89. Evaluate**

$$\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}}$$

**2.10 Área de Superficies de Revolución**

Si un arco de una curva se gira alrededor de una línea que no se intersecta con el arco, entonces la superficie resultante es llamada *superficie de revolución*.

Por *área de superficie*, nos referiremos al área de la superficie exterior.

Sea  $f$  una función continua y  $f(x) \geq 0$  en  $[a, b]$  que es diferenciable en  $(a, b)$ . Entonces el área de superficie  $S$  de la superficie de revolución generado al girar la gráfica de  $f$  en  $[a, b]$  alrededor del eje  $x$  esta dado por la fórmula

$$S = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

De manera similar, sea  $g$  una función continua y  $g(y) \geq 0$  en  $[c, d]$  que es diferenciable en  $(c, d)$ . Entonces el área de superficie  $S$  de la superficie de revolución generado al girar la gráfica de  $g$  en  $[c, d]$  alrededor del eje  $y$  esta dado por la fórmula

$$S = 2\pi \int_c^d g(y) \sqrt{1 + (g'(y))^2} dy.$$

De manera más general, si una curva esta dada por las ecuaciones paramétricas

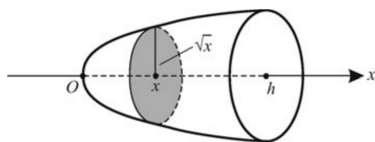
$$x = f(u), \quad y = g(u)$$

y el arco va de  $u = u_1$  a  $u = u_2$  se rota alrededor del eje  $x$ , entonces el área de superficie de la superficie de revolución resultante está dada por la fórmula

$$S = 2\pi \int_{u_1}^{u_2} y \sqrt{\left(\frac{dx}{du}\right)^2 + \left(\frac{dy}{du}\right)^2} du$$



En la fórmula anterior, hemos supuesto que  $f, g$  son continuas en  $[u_1, u_2]$ , diferenciable en  $(u_1, u_2)$  y que  $y = g(u) \geq 0$  en  $[u_1, u_2]$ .





## 3 Cálculo en varias variables

### 3.1 Representación paramétrica de curvas

#### Ecuaciones paramétricas

Si las coordenadas  $(x, y)$  de un punto  $P$  en una curva están dadas por las funciones

$$x = f(t), y = g(t) \quad (\text{Ec.Par.})$$

de una tercera variable o *parámetro*  $t$ , entonces (Ec.Par.) son llamadas *ecuaciones paramétricas* de la curva.

#### Problema 3.1. a

$$x = \cos(t), y = \sin^2(t)$$

son ecuaciones paramétricas de la parábola

$$4x^2 + y = 4.$$

b

$$x = \frac{1}{2}t, y = 4 - t^2$$

es otra parametrización de la misma curva.

#### Problema 3.2.1. Las ecuaciones

$$x = r \cos(t), y = r \sin(t)$$

representan el círculo con radio en el origen.

#### 2. Las ecuaciones

$$x = a + r \cos(t), y = b + r \sin(t)$$

representa el círculo de radio  $r$  y centro en  $(a, b)$ .

Supongamos que la curvas está dada por (Ec.Par.). Entonces las primera y segunda derivadas están dadas por

$$D_x y = \frac{D_t y}{D_t x} \quad (3.1)$$

$$D_{xx} y = \frac{D_{tx} y}{D_t x} \quad (3.2)$$

### Longitud de arco

Si una curva está dada por (Ec.Par.), entonces la *longitud de curva* entre dos puntos correspondientes a los valores paramétricos  $t_1$  y  $t_2$  es

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(D_t x)^2 + (D_t y)^2} dt$$

### Ejemplos

**Problema 3.3.** Encuentre  $D_x y$ ,  $D_{xx} y$  para

$$x = t - \sin(t), y = 1 - \cos(t)$$

**Problema 3.4.** Encuentre  $D_x y$  y  $D_{xx} y$  si  $x = e^t \cos(t)$ ,  $y = e^t \sin(t)$ .

**Problema 3.5.** Encuentre una ecuación a la línea tangente de la curva

$$x = \sqrt{t}, y = t - \frac{1}{\sqrt{t}}$$

en el punto  $t = 4$ .

**Problema 3.6.** La posición de una partícula que se está moviendo a lo largo de una curva está dada al tiempo  $t$  por las ecuaciones paramétricas

$$x = 2 - 3 \cos(t), y = 3 + 2 \sin(t)$$

donde  $x$  y  $y$  están medidos en pies y  $t$  en segundos.

Note que

$$\frac{1}{9}(x-2)^2 + \frac{1}{4}(y-3)^2 = 1$$

de manera que la curva es una elipse. ¿Porqué?

Continuación

1. Encuentre la tasa de cambio temporal de  $x$  cuando  $t = \frac{\pi}{3}$
2. Encuentre la tasa de cambio temporal de  $y$  cuando  $t = \frac{5\pi}{3}$
3. Encuentre la tasa de cambio temporal del ángulo de inclinación  $\theta$  de la línea tangente cuando  $t = \frac{2\pi}{3}$

**Problema 3.7.** Encuentre la longitud de arco de la curva

$$x = t^2, y = t^3$$

desde  $t = 0$  a  $t = 4$ .

**Problema 3.8.** Encuentre la longitud de arco de la cicloide

$$x = \theta - \sin \theta, y = 1 - \cos \theta$$

entre  $\theta = 0$  y  $\theta = 2\pi$ .

## 3.2 Derivadas Parciales

### Objetivos del aprendizaje

1. Calcular e interpretar derivadas parciales.
2. Aplicar derivadas parciales para estudiar Ejemplos de análisis marginal en economía.
3. Calcular derivadas parciales de segundo orden.
4. Usar la regla de la cadena de derivadas parciales para encontrar tasas de cambio y hacer aproximaciones incrementales.

### Derivadas parciales de primer orden

La derivada parcial de  $f(x, y)$  respecto de  $x$  se denota por

$$\partial_x f(x, y) \text{ ó } f_x(x, y)$$

y es la función obtenida al derivar  $f$  respecto de  $x$  *tratando a  $y$  como una constante*.

### Derivadas parciales de primer orden

De manera similar, la derivada parcial de  $f(x, y)$  respecto de  $y$  se denota por

$$\partial_y f(x, y) \text{ ó } f_y(x, y)$$

y es la función obtenida al derivar  $f$  respecto de  $y$  *tratando a  $x$  como una constante*.

### Algunas propiedades y fórmulas

**Proposición 3.1.** Sean  $u(x, y), v(x, y)$  funciones de dos variables y  $h(y)$  una función que no depende de  $x$ .

1.  $\partial_x h(y) = 0$ ;
2.  $\partial_x (h(y)u) = h(y)\partial_x u$ ;
3.  $\partial_x (u + v) = \partial_x u + \partial_x v$ ;

$$4. \partial_x(uv) = u\partial_x v + v\partial_x u;$$

$$5. \partial_x u^n = nu^{n-1}\partial_x u;$$

$$6. \partial_x e^u = e^u \partial_x u;$$

$$7. \partial_x \ln(u) = \frac{\partial_x u}{u}.$$

**Observación.** Las reglas siguen valiendo si: cambiamos  $\partial_x$  por  $\partial_y$  y  $h$  no depende de  $y$ .

### Cálculo de derivadas parciales

**Problema 3.9.** Encuentre las derivadas parciales de  $f(x, y) = x^2 + 2xy^2 + \frac{2y}{3x}$

El desarrollo completo del ejercicio lo puede encontrar en [mi Canal de YouTube](#). La comprobación de la solución la puede encontrar en [SageMathCell](#).

**Problema 3.10.** Encuentre las derivadas parciales de

$$f(x, y) = (x^2 + x * y + y)^5.$$

El desarrollo completo del ejercicio lo puedes encontrar en [mi Canal de YouTube](#). La comprobación se puede encontrar en <http://sagecell.sagemath.org/?q=vrfhvp>

**Problema 3.11.** Encuentre las derivadas parciales de

$$f(x, y) = xe^{-2xy}.$$

El desarrollo completo del ejercicio lo puedes encontrar en [mi Canal de YouTube](#). La comprobación se puede encontrar en <http://sagecell.sagemath.org/?q=onrgkx>

**Problema 3.12.** Evalúe las derivadas parciales  $\partial_x f(x, y)$  y  $\partial_y f(x, y)$  en el punto  $(x_0, y_0)$  dado:

$$1. f(x, y) = x^3y - 2(x + y), \quad x_0 = 1, y_0 = 0;$$

$$2. f(x, y) = x + \frac{x}{y - 3x}, \quad x_0 = 1, y_0 = 1;$$

$$3. f(x, y) = (x - 2y)^2 + (y - 3x)^2 + 5, \quad x_0 = 0, y_0 = -1;$$

$$4. f(x, y) = xy \ln\left(\frac{y}{x}\right) + \ln(2x - 3y)^2, \quad x_0 = 1, y_0 = 1;$$

Puede verificar sus resultados con este [este script](#).

### Clasificación de Puntos Críticos

**Definición** (Extremos relativos). Diremos la función  $f(x,y)$  tiene un máximo relativo en  $(x_0, y_0)$  si

$$f(x_0, y_0) \geq f(x, y)$$

para todo  $(x, y)$  suficientemente cercano a  $(x_0, y_0)$ .

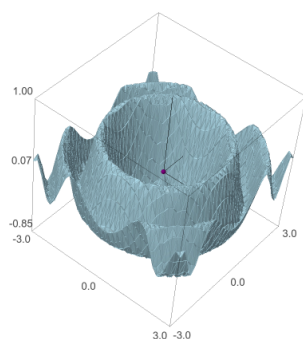
De manera similar, diremos la función  $f(x,y)$  tiene un mínimo relativo en  $(x_0, y_0)$  si

$$f(x_0, y_0) \leq f(x, y)$$

para todo  $(x, y)$  suficientemente cercano a  $(x_0, y_0)$ .

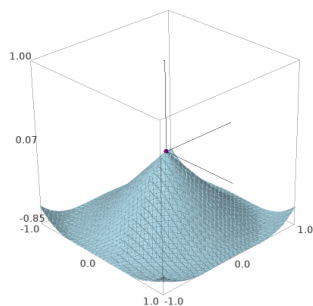
Los extremos relativos no siempre son extremos absolutos...

Figura 3.1: Máximo Relativo



Est imagen la puede genera con el siguiente código: <http://sagecell.sagemath.org/?q=wdxppk>

Sin embargo, para puntos suficientemente cercano, un *extremo relativo* sí lo es.



Esta imagen la puede generar con el siguiente código: <http://sagecell.sagemath.org/?q=butszu>

De hecho, el mapa topográfico de la región, nos indica que existen punto a una mayor altura que el *máximo relativo*.

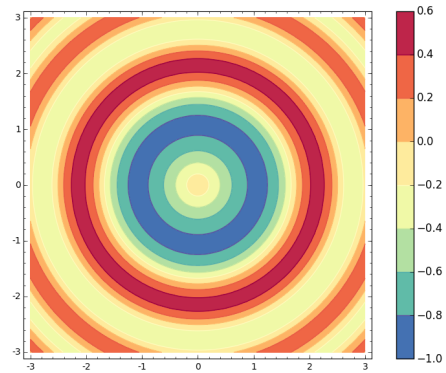


Figura 3.2: Mapa topográfico con alturas

Puede generar este mapa topográfico con el siguiente código  
<http://sagecell.sagemath.org/?q=zyutmy>

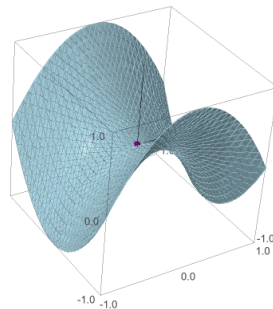
**Definición** (Puntos críticos). *Un punto  $(x_0, y_0)$  es un punto crítico de  $f(x, y)$  si*

$$\partial_x f(x_0, y_0) = 0, \partial_y f(x_0, y_0) = 0.$$

Todos los extremos relativos son puntos críticos...

Pero no todos los puntos críticos son extremos relativos.

Figura 3.3: Punto de silla



<http://sagecell.sagemath.org/?q=kmfhcx>

Diremos que un punto crítico que no es extremo local es un punto de silla.

<http://sagecell.sagemath.org/?q=mjknwh>

**Observación.**  $(0, 0)$  es punto de silla de  $f(x, y) = x^2 - y^2$ .

**Definición** (Segundas derivadas). *Las derivadas parciales de segundo orden de  $f(x, y)$  son*

- $\partial_{xx} f(x, y) = \partial_x (\partial_x f(x, y)) = f_{xx}(x, y)$
- $\partial_{xy} f(x, y) = \partial_x (\partial_y f(x, y)) = f_{yx}(x, y)$
- $\partial_{yx} f(x, y) = \partial_y (\partial_x f(x, y)) = f_{xy}(x, y)$



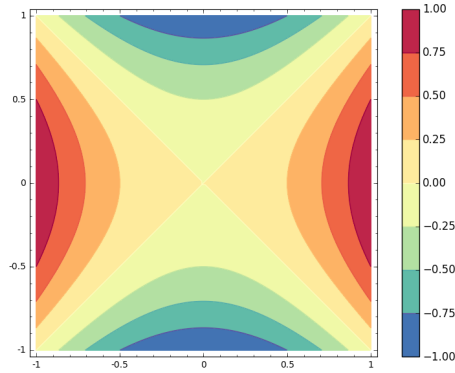


Figura 3.4: Mapa topografico de  $f(x, y) = x^2 - y^2$

$$\blacksquare \partial_{yy}f(x, y) = \partial_y(\partial_y f(x, y)) = f_{yy}(x, y)$$

### Hessiano de una función

$$\text{Hess } f(x, y) = \begin{pmatrix} \partial_{xx}f(x, y) & \partial_{yx}f(x, y) \\ \partial_{xy}f(x, y) & \partial_{yy}f(x, y) \end{pmatrix}$$

El determinante Hessiano de  $f(x, y)$  se define como

$$D(x, y) = \partial_{xx}f(x, y)\partial_{yy}f(x, y) - \partial_{xy}f(x, y)\partial_{yx}f(x, y).$$

**Observación.** Si las derivadas parciales mixtas  $\partial_{xy}f(x, y)$ ,  $\partial_{yx}f(x, y)$  existen y son continuas, entonces

$$\partial_{xy}f(x, y) = \partial_{yx}f(x, y),$$

de manera que

$$D(x, y) = \partial_{xx}f(x, y)\partial_{yy}f(x, y) - (\partial_{xy}f(x, y))^2.$$

**Teorema 3.1** (Clasificación de puntos críticos). *Supongamos que todas las derivadas de primer y segundo orden de  $f(x, y)$  existe y que  $(x_0, y_0)$  es un punto crítico de  $f(x, y)$ . Entonces*

- Si  $D(x_0, y_0) < 0$ , entonces  $(x_0, y_0)$  es un punto de silla.
- Si  $D(x_0, y_0) > 0$  y  $\partial_{xx}f(x_0, y_0) > 0$ , entonces  $(x_0, y_0)$  es un mínimo relativo.
- Si  $D(x_0, y_0) > 0$  y  $\partial_{xx}f(x_0, y_0) < 0$ , entonces  $(x_0, y_0)$  es un máximo relativo.

**Observación.** Si  $D(x_0, y_0) = 0$ , la información no es concluyente.

**Problema 3.13.** Clasifique los puntos críticos de  $f(x, y) = x^2 + y^2$ .

Puede ver el desarrollo completo del ejercicio en <https://youtu.be/9Vz-qouiRPw>.

Para encontrar los puntos críticos, puede [este script](#).

Para evaluarlos en  $D(x, y)$  y  $\partial_{xx}f(x, y)$  puede utilizar [este script](#).

**Problema 3.14.** Clasifique los puntos críticos de  $f(x, y) = 12x - x^3 - 4y^2$ .

Puede ver el desarrollo completo del ejercicio en <https://youtu.be/oY3DjTSqado>.

Para encontrar los puntos críticos puede usar [este script](#).

Para evaluarlos en  $D(x, y)$  y  $\partial_{xx}f(x, y)$  puede utilizar [este script](#).

**Problema 3.15.** Clasifique los puntos críticos de  $f(x, y) = x^3 - y^3 + 6xy$ .

Puede ver el desarrollo completo del ejercicio en <https://youtu.be/oCk2O9SpJG4>.

Para encontrar los puntos críticos puede usar [este script](#).

Para evaluarlos en  $D(x, y)$  y  $\partial_{xx}f(x, y)$  puede usar [este script](#).

**Problema 3.16.** Clasifique los puntos críticos de cada una de las siguientes funciones:

1.  $f(x, y) = 5 - x^2 - y^2$
2.  $f(x, y) = \frac{16}{x} + \frac{6}{y} + x^2 - 3y^2$
3.  $f(x, y) = x^3 + y^2 - 6xy + 9x + 5y + 2$
4.  $f(x, y) = (x^2 + 2y^2)e^{1-x^2-y^2}$

Puede verificar sus resultados, utilizando [este script](#).

## 4 Bibliografia