JULIHO CASTILLO COLMENARES SC.D.

CÁLCULO

GITHUB.COM/JULIHOCC

Índice general

Cálculo Diferencial

Límites y continuidad

Límites

Definición Diremos que la función tiene un *límite* L *cuando* x *aproxima* a si para cada $\epsilon > 0$, podemos encontrar $\delta > 0$ tal que

$$|f(x) - l| < \epsilon$$

siempre que

$$0 < |x - a| < \delta.$$

En ese caso, escribimos

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

Calcula los siguientes límites, trazando las gráficas correspondientes:

(i) $\lim_{x \to 1} \left(x^2 - 4x + 8\right)$

(ii) $\lim_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$

(iii) $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sin(x)}{x}$

Propiedades de límites Si $\lim_{x \to a} f_1(x) = L_1$ y $\lim_{x \to a} f_2(x) = L_2$, entonces

(i) $\lim_{x \to a} (f_1(x) \pm f_2(x)) = L_1 \pm L_2$

(ii) $\lim_{x \to a} (f_1(x) f_2(x)) = L_1 L_2$.

(iii) $\lim_{x \to a} \dfrac{f_1(x)}{f_2(x)} = \dfrac{L_1}{L_2}$ *siempre y cuando* $L_2 \neq 0$.

Continuidad

Diremos que una función es *continua en el punto* $x = a$ si

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

$f(x) = x^2 - 4x + 8$ es continua en $x = 1$.

Sin embargo,

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2} & x \neq 2 \\ 6 & x = 2 \end{cases}$$

es *discontinua* en $x = 2$ y decimos que $x = 2$ es una *discontinuidad*.

Si $f(x)$ es continua en cada punto del intervalo $x_1 < x < x_2$, entonces diremos que es continua en dicho intervalo.

Si $f(x)$ y $g(x)$ son continuas en un mismo intervalo, entonces también lo son

(I) $f(x) \pm g(x)$

(II) $f(x)g(x)$

(III) $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ siempre que $g(x) \neq 0$ en dicho intervalo.

Ejemplos

Demostrar por definición que $\lim_{x\to 2} f(x) = 4$ si

(I) $f(x) = x^2$

(II) $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \neq 2 \\ 0 & x = 2 \end{cases}$

Demostrar que si $\lim_{x\to a} f_1(x) = l_1$ y $\lim_{x\to a} f_2(x) = l_2$, entonces

$$\lim_{x\to a} \left(f_1(x) + f_2(x)\right) = l_1 + l_2$$

Mostrar que $f(x) = x^2$ es continua en $x = 2$, pero $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \neq 2 \\ 0 & x = 2 \end{cases}$ no lo es.

Derivadas

Definición La *derivada* de $y = f(x)$ en el punto x está definida como

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

donde $h = \Delta x$, $\Delta y = f(x+h) - f(x) = f(x+\Delta x) - f(x)$ siempre que tal límite exista. Diferencial Si $\Delta x \approx 0$ y $f'(x)$ existe, entonces

$$\Delta y \approx f'(x)\Delta x.$$

El diferencial de x es un cambio *infinitesimal en tal variable.*

Si $y = f(x)$ y $f'(x)$ existe, el diferencial de y está dado por

$$dy = f'(x)dx$$

El proceso de encontrar las derivadas de una función se conoce como *diferenciación.*

Derivadas de alto orden

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \begin{cases} f(x) & n = 0 \\ \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} f(x)\right) & n > 0 \end{cases}$$

Usualmente rescribimos

$$y' = \frac{dy}{dx}$$
$$y'' = \frac{d^2 y}{dx^2}$$

En el caso $n > 2$, es más común escribir $y^{(n)}$ para denotar a la $n-$ésima derivada.

Interpretación geométrica Geométricamente, la derivada $f'(a)$ de una función $f(x)$, en un punto dado $x = a$, representa *pendiente de la recta tangente* a $y = f(x)$ en el punto $(a, f(a))$.

Relación con continuidad Si una función tiene derivada en un punto, entonces es continua en dicho punto.

Sin embargo, el recíproco no es necesariamente cierto.

Fórmulas de derivación

En lo subsecuente, u, v representarán funciones de x, mientras que a, c, p representarán constantes.

Supondremos que las derivadas de u y v existe, es decir, que son diferenciables.

1. $\dfrac{d}{dx}(u \pm v) = \dfrac{du}{dx} \pm \dfrac{dv}{dx}$
2. $\dfrac{d}{dx}(cu) = c\dfrac{du}{dx}$
3. $\dfrac{d}{dx}(uv) = u\dfrac{dv}{dx} + v\dfrac{du}{dx}$
4. $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{v(du/dx) - u(dv/dx)}{v^2}$
5. $\dfrac{d}{dx}u^p = pu^{p-1}\dfrac{du}{dx}$
6. $\dfrac{d}{dx}(a^u) = a^u \ln a$

Figura 1: Fórmulas usuales de derivadas

En particular, cuando $u = x$, las fórmulas se simplifican porque $\dfrac{du}{dx} = 1$.

Ejemplos

Demostrar que si u y v son funciones diferenciables

7. $\dfrac{d}{dx} e^u = e^u \dfrac{du}{dx}$	14. $\dfrac{d}{dx} \csc u = -\csc u \cot u \dfrac{du}{dx}$
8. $\dfrac{d}{dx} \ln u = \dfrac{1}{u} \dfrac{du}{dx}$	15. $\dfrac{d}{dx} \sin^{-1} u = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \dfrac{du}{dx}$
9. $\dfrac{d}{dx} \sin u = \cos u \dfrac{du}{dx}$	16. $\dfrac{d}{dx} \cos^{-1} u = \dfrac{-1}{\sqrt{1-u^2}} \dfrac{du}{dx}$
10. $\dfrac{d}{dx} \cos u = -\sin u \dfrac{du}{dx}$	17. $\dfrac{d}{dx} \tan^{-1} u = \dfrac{1}{1+u^2} \dfrac{du}{dx}$
11. $\dfrac{d}{dx} \tan u = \sec^2 u \dfrac{du}{dx}$	18. $\dfrac{d}{dx} \cot^{-1} u = \dfrac{-1}{1+u^2} \dfrac{du}{dx}$
12. $\dfrac{d}{dx} \cot u = -\csc^2 u \dfrac{du}{dx}$	19. $\dfrac{d}{dx} \sinh u = \cosh u \dfrac{du}{dx}$
13. $\dfrac{d}{dx} \sec u = \sec u \tan u \dfrac{du}{dx}$	20. $\dfrac{d}{dx} \cosh u = \sinh u \dfrac{du}{dx}$

Figura 2: Fórmulas usuales de derivadas

(i)
$$\frac{d}{dx}(u+v) = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$$

(ii)
$$\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{du} + v\frac{du}{dx}$$

Demostrar que si $f(x)$ tiene una derivada en $x = a$, entonces $f(x)$ es continua en $x = a$.

Demostrar que si p es cualquier entero positivo, y u es una función diferenciable respecto a x, entonces

$$\frac{d}{dx}u^p = pu^{p-1}\frac{du}{dx}$$

Dando por hecho que

$$\lim_{b\to 0} \frac{\sin(b)}{b} = 1$$

demostrar que

(i)
$$\frac{d}{dx}\sin(u) = \cos(u)\frac{du}{dx}$$

(ii)
$$\frac{d}{dx}\cos(u) = -\sin(u)\frac{du}{dx}$$

(iii)
$$\frac{d}{dx}\tan(u) = \sec^2(u)\frac{du}{dx}$$

Demostrar que

$$\frac{d}{dx}\tan^{-1}(u) = \frac{1}{1+u^2}\frac{du}{dx}$$

Dando por hecho que

$$\lim_{b\to 0}(1+b)^{1/b} = e$$

demostrar que

(I)
$$\frac{d}{dx}\ln(u) = \frac{1}{u}\frac{du}{dx}$$

(II)
$$\frac{d}{dx}e^u = e^u\frac{du}{dx}$$

Encontrar

(I)
$$\frac{d}{dx}\sqrt{x^4+2x}$$

(II)
$$\frac{d}{dx}\sin\left(\ln(x)\right)$$

(III)
$$\frac{d}{dx}\ln\left(e^{3x}+\cos\left(2x\right)\right)$$

Si
$$x^2y - e^{2x} = \sin(y)$$
, encontrar y'.

Mostrar que si
$$y = 3x^2 + \sin(2x)$$
entonces
$$\frac{d^2y}{dx^2} + 4y = 12x^2 + 6$$

Encontrar los diferenciales de

(I)
$$y = x^2 - \ln x$$

(II)
$$y = e^{-2x} + \cos(3x)$$

Derivación implícita

Denotaremos por y' la derivada $\frac{dy}{dx}$.

Si
$$x^2 + y^2 = r^2,$$
donde r es una constante, encontrar y'.

Por regla de la cadena, $(y^2)' = 2yy'$. Esto porque
$$\frac{dy^2}{dx} = \frac{dy^2}{dy}\frac{dy}{dx}.$$

Si derivamos el lado izquierdo de la ecuación, respecto de x, usando linealidad, obtenemos $2x + 2yy'$, mientras que si derivamos el derecho, ya que r^2 es contante, obtenemos cero e igualando, tenemos que

$$2x + 2yy' = 0.$$

Después de despejar obtenemos que

$$y' = -\frac{x}{y}.$$

Observe que

$$x^2 + y^2 = r^2$$

es la ecuación de un círculo con centro en el origen con radio $r > 0$. Use `Sagemath` para graficar esta ecuación para un radio dado, por ejemplo, $r = 5$.

1. Compare las pendientes de las rectas tangente en (x, y) y $(-x, -y)$. ¿Que relación sobre estás dos rectas podemos deducir?

2. Compare las pendiente de la recta tangente en (x, y) y la recta que pasa por el origen y este punto. ¿Que relación sobre estás dos rectas podemos deducir?

Si

$$x^3 + y^3 = 6xy,$$

encontrar y'.

Por regla de la cadena

$$\frac{d}{dx}\left(y^3\right) = \frac{dy^3}{dy}\frac{dy}{dx},$$

es decir, $(y^3)' = \left(3y^2\right)(y')$.

Además, por la regla de Leibniz,

$$(xy)' = x'y + xy' = y + xy'.$$

Entonces, derivando ambos lados de la ecuación, y usando linealidad, tenemos que

$$3x^2 + 3y^2y' = 6\left(y + xy'\right).$$

Despejando y', obtenemos

$$y' = \frac{2y - x^2}{y^2 - 2x}.$$

Encuentre y' en términos de x, si $y = \arcsin(x)$, con imagen $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$.

Solución En este caso $x = \sin(y)$. Por regla de la cadena obtenemos que

$$\frac{d}{dx}\sin(y) = \frac{d}{dy}\sin(y)\frac{dy}{dx} = \cos(y)y'.$$

Sin embargo,también sabemos que

$$\frac{d}{dx}\sin(y) = \frac{dx}{dx} = 1.$$

Por lo cual $1 = \cos(y)y'$, y entonces $y' = 1/\cos(y)$. Pero también sabemos que, por la manera en que escogemos el rango de y, $\cos(y) > 0$, y por tanto

$$\cos(y) = \sqrt{1-\sin^2(y)} = \sqrt{1-x^2}.$$

Es decir

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Encuentre y'.

1. $\sin(x+y) = y^2\cos(x)$,
2. $x^4 + y^2 = 16$,
3. $y = \arccos(x)$,
4. $y = \arctan(x)$.

Derivación logarítmica

Recordemos que $y = e^x$ si y solo si $x = \ln(y)$, por lo cual $\ln(y)$ solamente está definido para $y > 0$. Dos propiedades fundamentales del logaritmo son las siguientes:

1. $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$,
2. $\ln(a^b) = b\ln(a)$.

De esto se deduce, usando leyes de los exponentes, que $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$.

Por regla de la cadena,

$$\frac{d}{dx}\ln(y) = \frac{d}{dy}\ln(y)\frac{dy}{dx},$$

es decir,

$$(\ln(y))' = \frac{y'}{y}.$$

De esto se deduce que

$$y' = y\left(\frac{d}{dx}\ln(y)\right).$$

Esta forma de derivar, conocida como *derivación logarítmica*, es especialmente útil si necesitamos derivar funciones que involucren multiplicación, división, exponenciación y radicales.

Si $y = \dfrac{x+1}{\sqrt{x-2}}$, encontrar y'.

Solución Primero, escribimos $y = (x+1)(x-2)^{-1/2}$. Entonces

$$\ln(y) = \ln(x+1) - \frac{1}{2}\ln(x-2),$$

de donde

$$\frac{d}{dx}\ln(y) = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-2}\right).$$

Simplificando la última expresión obtenemos

$$\frac{d}{dx}\ln(y) = \frac{x-3}{2(x+1)(x-2)},$$

de donde obtenemos

$$y' = \left(\frac{x+1}{(x-2)^{1/2}}\right)\left(\frac{x-3}{2(x+1)(x-2)}\right),$$

y simplificando obtenemos,

$$y' = \frac{x-3}{2(x-2)^{3/2}}.$$

De hecho, podemos obtener la fórmula para la derivada del cociente usando la fórmula (). En efecto,

$$\ln\left(\frac{f}{g}\right) = \ln(fg^{-1}) = \ln(f) - \ln(g).$$

Derivando obtenemos

$$\frac{d}{dx}\ln\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{f'}{f} - \frac{g'}{g}.$$

Entonces

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \left(\frac{f}{g}\right)\left(\frac{f'}{f} - \frac{g'}{g}\right) = \frac{f'g - g'f}{g^2}.$$

Otro ejemplo del uso de la derivada es el siguiente. Supongamos que $y = x^{\alpha}$, con $x \neq 0$. Entonces $\ln(y) = \alpha\ln(x)$, y por tanto

$$\frac{d}{dx}\ln(y) = \frac{\alpha}{x}.$$

Entonces $y' = (x^{\alpha})\left(\alpha x^{-1}\right) = \alpha x^{\alpha-1}$.

Por último, derivaremos $y = \ln|x|$. Observe que solamente necesitamos deducir el caso cuando $x < 0$, es decir $|x| = -x$. En esta situación $y = \ln(-x)$y por regla de la cadena, sustituyendo $u = -x$, $y = \ln(u)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = \frac{1}{u}u' = \frac{u'}{u}.$$

Pero $u' = -1$, y por tanto $\dfrac{d}{dx}\ln(-x) = \dfrac{-1}{-x} = \dfrac{1}{x}$. Entonces, siempre que $x \neq 0$,

$$\frac{d}{dx}\ln|x| = \frac{1}{x.}$$

Encuentre y' *usando derivación logarítmica.*

1. $y = \dfrac{x^{3/4}\sqrt{x^2+1}}{(3x+2)^5}$,

2. $y = x^{\sqrt{(x)}}$,

3. $y = \ln(e^{-x} + xe^{-x})$,

4. $y = \dfrac{x}{1-\ln(x-1)}$

5. $y = x^x$,

6. $y = x^{\sin(x)}$,

7. $x^y = y^x$.

Use la definición de derivada para demostrar que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$$

Linealización

Supongamos que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es diferenciable en $a \in \mathbb{R}$, es decir, existe la derivada $f'(a)$. Como ya hemos visto, esta derivada es la *pendiente* de la *recta tangente,* que es la mejor *aproximación lineal* de f en a.

La ecuación de la recta tangente se puede obtener a partir de la siguiente ecuación:

$$\frac{y - f(a)}{x - a} = f'(a),$$

que es la ecuación de una recta que pasa por el punto $(a, f(a))$ con pendiente $f'(a)$.

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función diferenciable. Definimos la *linealización* de f alrededor de (o con pivote en) $a \in \mathbb{R}$ como

$$L_{f,a}(x) = f(a) + f'(a)(x - a).$$

La linealización $L_{f,a}(x)$ se puede usar para hacer calcular de manera bastante precisa de valor de $f(x)$ para $x \approx a$.

Aproximación de la raíz cuadrada

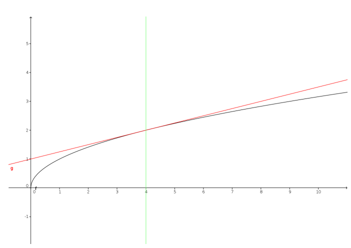


Figura 3: Linealización de $\sqrt{x}$ alrededor $a = 4$.

Existen varios algoritmos para calcular la raíz de un número real. Sin embargo, podemos calcular raíces de números reales de manera muy precisa, usando la linealización.

Por ejemplo, calculemos $\sqrt{4.1}$. Primero determinamos la función a linealizar, en este caso, $f(x) = \sqrt{x}$. La derivada de f es

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Después, escogemos como pivote el punto $a = 4$. En este caso $f(4) = 2$ y $f'(4) = \frac{1}{4}$. De donde obtenemos

$$L(x) = f(4) + f'(4)(x-4) = 2 + \frac{1}{4}(x-4).$$

Entonces

$$\sqrt{4.1} \approx L(4.1) = 2 + .25(4.1 - 4) = 2.025.$$

Si usáramos una calculador, obtendríamos $\sqrt{4.1} = 2.02484567313$.

El error absoluto entre este valor y el que obtuvimos de la aproximación es

$$|2.025 - 2.02484567313| \approx 1.54 \times 10^{-4}.$$

Use una aproximación lineal para calcular los siguientes valores. Posteriormente, use una calculadora para encontrar su valor y determine el error absoluto.

1. $(2.001)^5$
2. $e^{-0.015}$
3. $(8.06)^{2/3}$
4. $\frac{1}{1002}$
5. $\tan(44^o)$
6. $\sqrt{99.8}$

Optimización univariada

Sea $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Decimos que:

1. f alcanza su *valor máximo* o *máximo global* en $c \in D$ si $f(c) \geq f(x)$, para toda $x \in D$;
2. f alcanza su *valor mínimo* o *mínimo global* en $c \in D$ si $f(c) \leq f(x)$, para toda $x \in D$.

[Teorema del Valor Extremo] Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es continua, entonces f alcanza su máximo y su mínimo.

Aunque el criterio anterior nos es útil al optimizar en intervalos compactos, es decir, de la forma $[a, b]$, en un caso general no siempre esto es cierto. Sin embargo, tenemos la siguiente noción de máximo (mínimo) en intervalos abiertos.

Sea $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Decimos que:

1. f tiene un *máximo local* en $c \in D$ si existe un radio $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño, de manera que $f(c) \geq f(x)$, para toda $x \in (c - \epsilon, c + \epsilon) \subset D$;

2. f tiene un *mínimo local* en $c \in D$ si existe un radio $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño, de manera que $f(c) \leq f(x)$, para toda $x \in (c - \epsilon, c + \epsilon) \subset D$.

La condición de que exista si existe un radio $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño, y que $x \in (c - \epsilon, c + \epsilon) \subset D$ se puede entender como que $x \in D$ este suficientemente cerca de $c \in D$. De manera informal, podemos decir que f alcanza un máximo local en c si $f(c) \geq f(x)$ para x suficientemente cercanos a c. Lo mismo se puede decir para un mínimo local. Note que todo máximo (mínimo) global es, en particular, un máximo (mínimo resp.) local.

[Teorema de Fermat] Si $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ alcanza un máximo o mínimo local en $c \in D$ y $f'(c)$ existe, entonces *necesariamente* $f'(c) = 0$.

Debemos tener cuidado al usar el teorema de Fermat. Por ejemplo $f = |x|$ alcanza su mínimo en cero, pero en este punto la derivada no existe. En cambio, $f(x) = x^3$ tiene derivada igual a cero en $x = 0$, pero este punto no es máximo ni mínimo de la función.

Como podemos apreciar, los puntos más interesantes para nuestro estudio son aquellos donde la derivada no existe o si existe, es igual a cero.

Sea $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $c \in D$. Decimos que c es un punto crítico si $f'(c)$ no existe o si existe, $f'(c) = 0$.

Con los resultados anteriores, podemos describir un criterio para optimizar funciones continuas en compactos.

Supongamos que

1. $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es continua,

2. $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ es diferenciable.

Si f alcanza su máximo (o mínimo) global en c, entonces

1. $c = a$ o $c = b$, o

2. $f'(c) = 0$ un punto crítico.

En decir, para encontrar donde f alcanza sus valores extremos, basta probar en los extremos del intervalo o en los puntos críticos, que se encuentran en su interior.

Encuentre el máximo y el mínimo global de la función $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ si $-\frac{1}{2} \leq x \leq 4$.

Solución

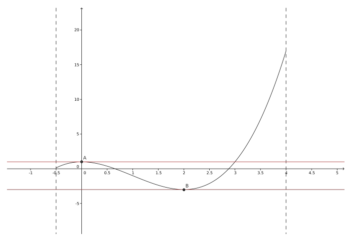


Figura 4: $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$

Como f es continua en $[-\frac{1}{2}, 4]$ y diferenciable en su interior $(-\frac{1}{2}, 4)$ (¿porqué?), podemos aplicar el criterio de la proposición .

Primero evaluamos en los extremos.

$$\begin{cases} f(-\frac{1}{2}) = \frac{1}{8} \\ f(4) = 17 \end{cases}$$

Derivamos f y obtenemos los puntos críticos, resolviendo la ecuación

$$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2) = 0.$$

Los puntos críticos son $x = 0$ y $x = 2$. Sus respectivos valores son $f(0) = 1$ y $f(2) = -3$.

Finalmente, basta comparar los diferente valores obtenidos para concluir que el máximo global es 17 y se alcanza en $x = 4$, mientras que el mínimo global es -3 y se alcanza en $x = 2$.

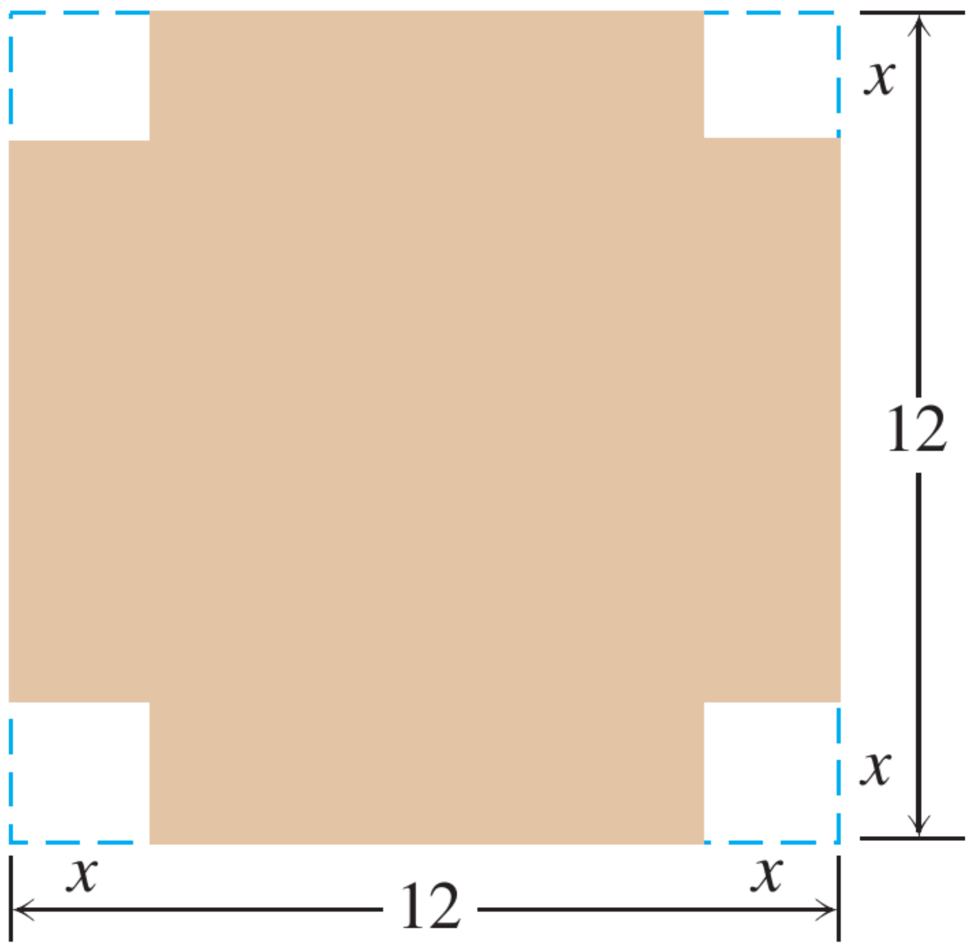
Encuentre los máximos y mínimos absolutos en el intervalo indicado. Grafique.

1. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1$, $[-2, 3]$
2. $f(x) = \frac{x}{x^2 - x + 1}$, $[0, 3]$
3. $f(x) = t\sqrt{4 - t^2}$, $[-1, 2]$
4. $\phi(t) = 2\cos(t) + \sin(2t)$, $[0, \frac{\pi}{2}]$
5. $f(x) = xe^{-x^2/8}$, $[-1, 4]$
6. $f(x) = \ln(x^2 + x + 1)$, $[-1, 1]$
7. $f(x) = x - 2\arctan(x)$, $[0, 4]$

Optimización aplicada

Una caja abierta está hecha al cortar pequeños cuadrados congruentes, de las esquinas, de una hoja de lata de `12 in` por `12 in`, y doblando los lados hacía arriba.

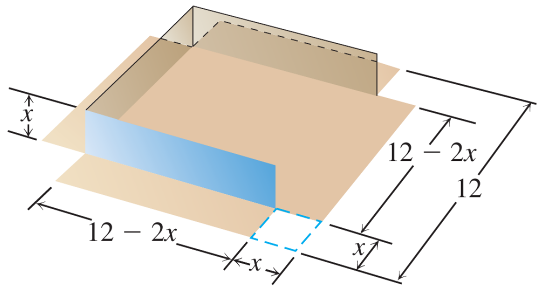
¿Qué tan largas deben ser las esquinas cortadas de las esquinas para hacer la caja tan grande como sea posible?



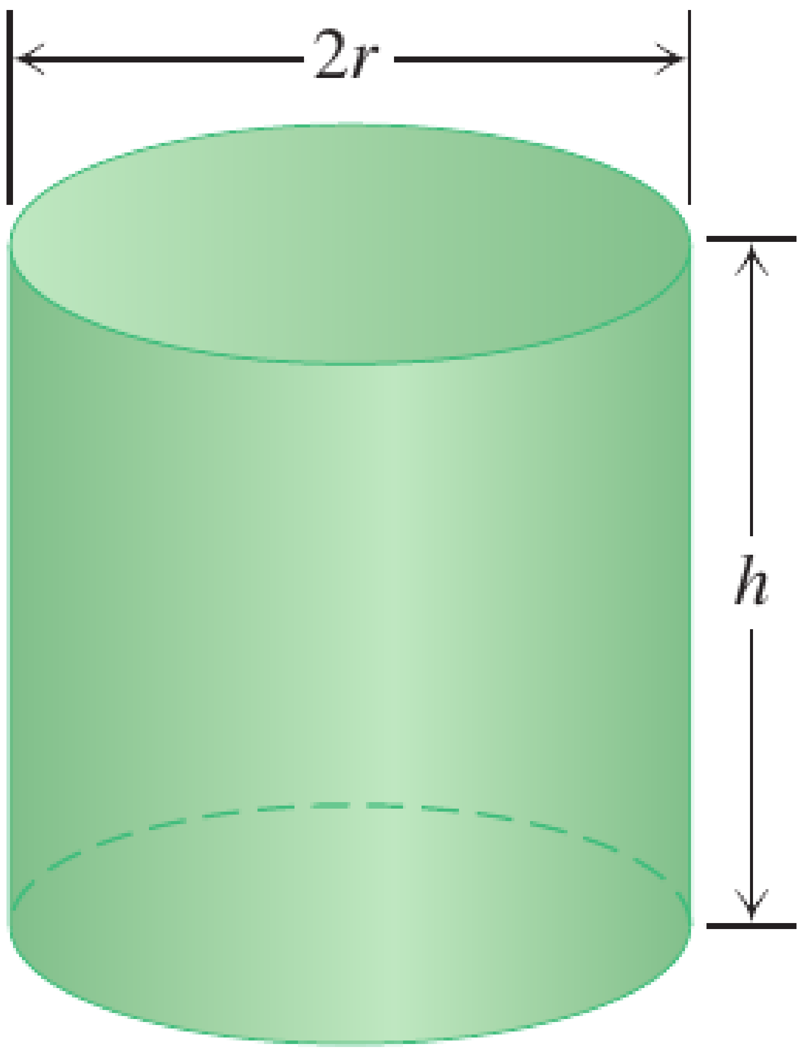
(a)

Se te ha pedido diseñar una lata de un litro, con la forma de un cilindro circular recto. ¿Qué dimensiones utilizarán el menor material posible?

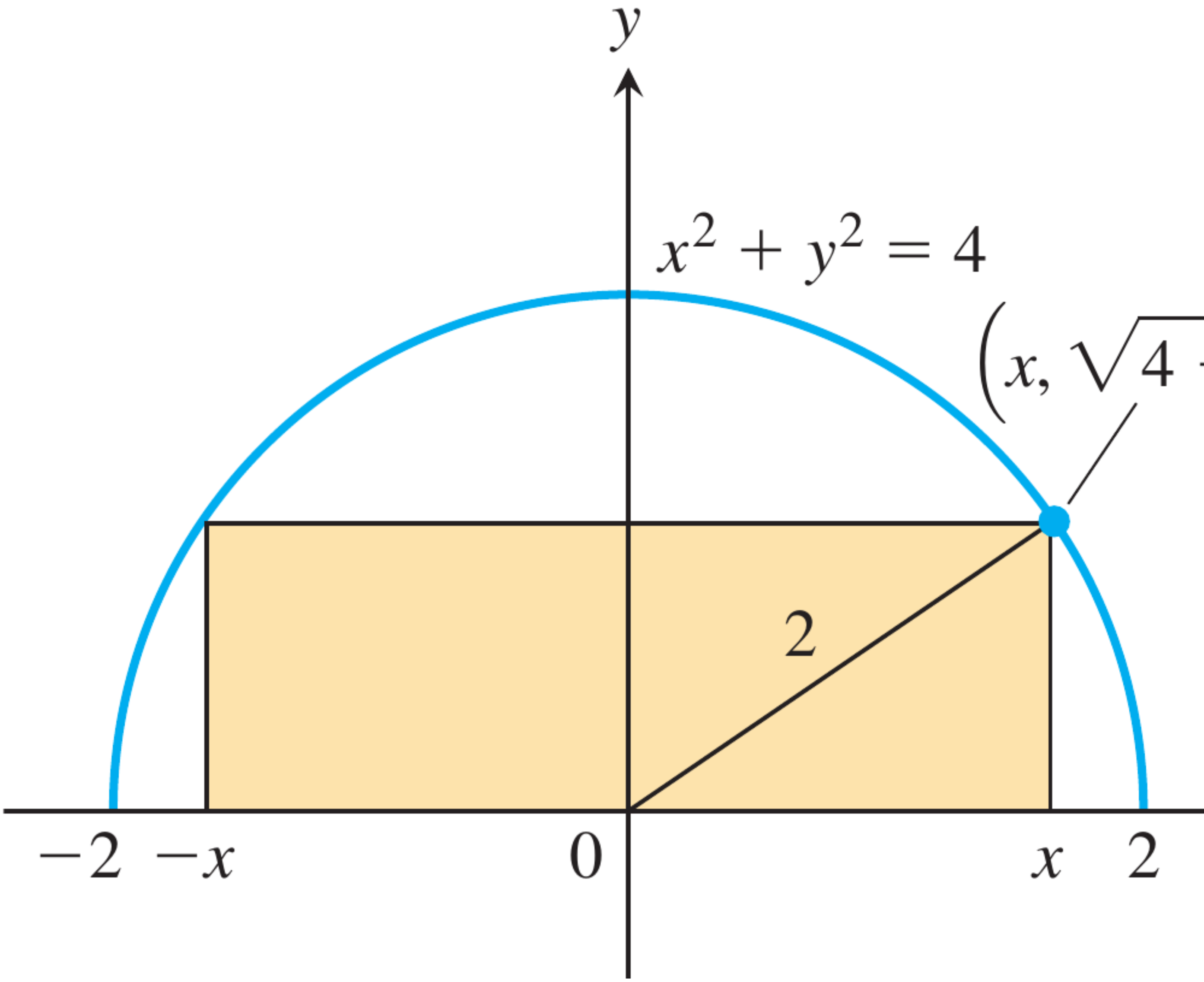
Un rectángulo está inscrito en un semicírculo de radio 2. ¿Cuál es el



(b)



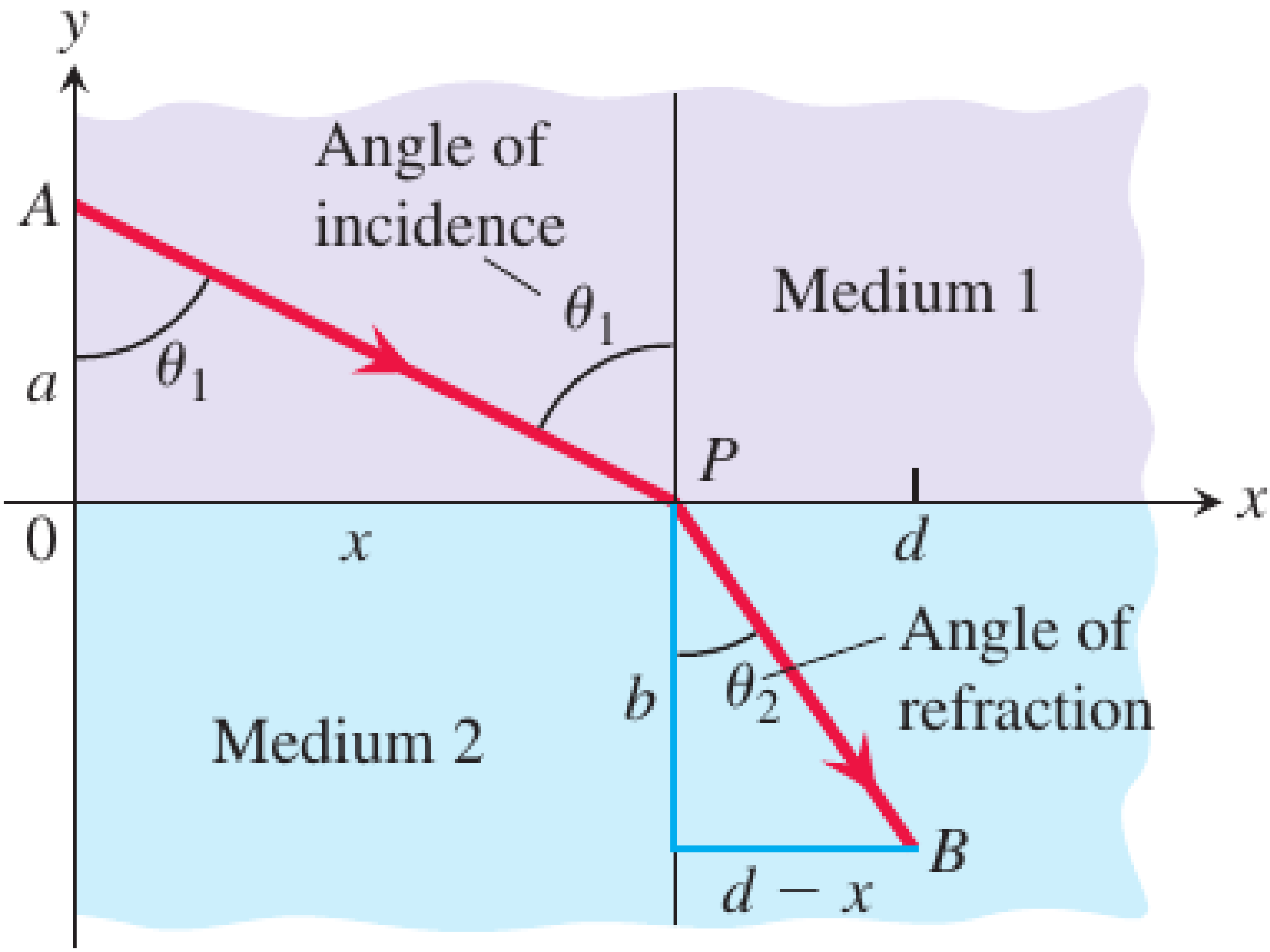
área más grande que se puede obtener, y cuáles son las dimensiones?



[Ley de Snell (refracción)] La velocidad de la luz depende del medio a través del cuál viaje, y es generalmente más lenta en medios más densos.

El *principio de Fermat* (de óptica) establece que la luz viaja fe un punto a otro a lo largo de un camino para el cual el tiempo es mínimo.

Describe el camino para el cuál un rayo de luz seguirá yendo de un punto A en un medio en el que la velocidad es c_1, a un punto B en un medio en el que la velocidad es c_2.


y
A
Angle of
incidence
Medium 1
θ_1
θ_1
a
P
0
x
d
x
Angle of
refraction
θ_2
b
Medium 2
B
$d - x$

Análisis de Gráficas

Supongamos que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función con segunda derivada. Podemos proceder de la siguiente manera para encontrar su gráfica.

1. Encontrar las raíces, es decir, los puntos c tales que $f(c) = 0$;
2. Encontrar los puntos críticos, es decir, los puntos c tales que $f'(c) = 0$;
   a) Si $f''(c) > 0$, entonces c es mínimo local,
   b) Si $f''(c) < 0$, entonces c es máximo local,
3. Encontrar los puntos de inflexión, es decir, los puntos c tales que $f'(c) = 0$.

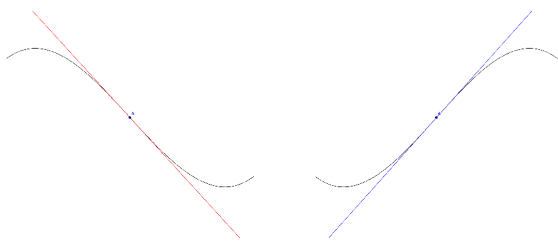


Figura 5: Puntos de inflexión

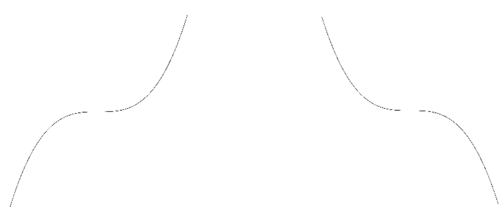


Figura 6: Puntos de silla

Los puntos de inflexión pueden ser como en la figura 5. Si f'' cambia de negativa a positiva, la gráfica localmente como la de la izquierda, mientras que en el otro caso, luce como en la de la derecha.

Falta por caracterizar los puntos críticos c donde $f''(c) = 0$, es decir, que también son puntos de inflexión. Estos puntos se les conoce como *puntos de silla* y alrededor de estos, la gráfica se ve como alguna de las de la figura 6.

Grafique la función $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}, f(x) = x^3 - x$.

Solución

Primero, resolvemos la ecuación

$$x^3 - x = 0,$$

y tenemos que las raíces de f son $x = -1, 0, 1$.

Después derivamos f:

$$f'(x) = 3x^2 - 1,$$

y resolvemos la ecuación $f'(c) = 0$.

Entonces, los puntos críticos de la función son $x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$. Utilizamos el criterio **??** para decidir si son máximo o mínimos locales, o incluso, puntos de silla.

La segunda derivada de f es

$$f''(x) = 6x.$$

Como $f''(\frac{1}{\sqrt{3}}) = 6\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) > 0$, entonces

$$c = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

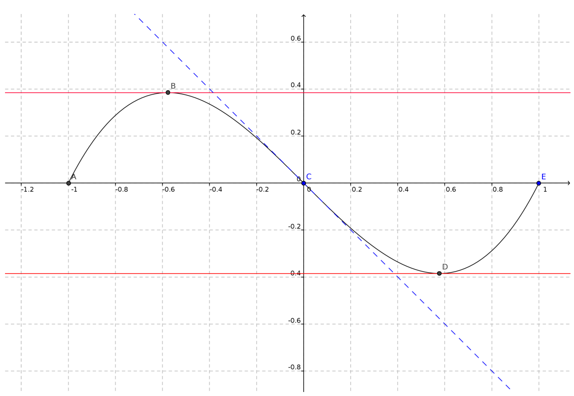
es un mínimo local.

De manera similar, concluimos que

$$c = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

es un máximo local.

Finalmente, resolvemos $f''(c) = 0$, pero la única solución es $c = 0$ y por tanto, este es el único punto de inflexión. Como antes de $c = 0$, $f'' < 0$, mientras que después $f'' >$, concluimos que en este punto, la gráfica se ve localmente como la gráfica de la derecha en la figura 5.



Podemos utilizar `Sagemath` para graficar y comparar con nuestros resultados. La gráfica esta dada en la figura .

Cálculo Integral

Antiderivadas

Si $F'(x) = f(x)$, diremos que F es una antiderivada de f.
x^3 es una antiderivada de $3x^2$, porque...

$$D_x\left(x^3\right) = 3x^2$$

Pero $x^3 + 5$ es también una antiderivada de $3x^2$, porque...

$$D_x\left(x^3 + 5\right) = 3x^2$$

En general, si $F(x)$ es una antiderivada de $f(x)$, entonces $F(x) + C$, $C \in \mathbb{R}$ es también una antiderivada.

Más aun, si $F(x)$ y $G(x)$ son antiderivadas de $f(x)$, entonces existe $C \in \mathbb{R}$ tal que

$$F(x) = G(x) + C.$$

Diremos que C es una *constante de integración.*

$\int f(x)dx$ denotara cualquier antiderivada de $f(x)$ más una constante de integración.

Diremos que $f(x)$ es el integrando, mientras que $\int f(x)dx$ es llamada *integral indefinidad.*

1. $$\int x dx = \frac{1}{2}x^2 + C$$

2. $$\int -\sin(x)dx = \cos(x) + C$$

[Reglas para antiderivadas]

1. $\int 0dx = C$
2. $\int 1dx = x + C$
3. $\int adx = ax + C$
4. $\int x^r dx = \dfrac{x^{r+1}}{r+1} + C$, $r \neq -1$

5. $\int af(x)dx = aF(x) + C$
6. $\int (f(x) + g(x))\, dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$
7. $\int (f(x) - g(x))\, dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx$

1. $\int \sqrt[3]{x}dx =$
2. $\int \frac{1}{x^2}dx =$
3. $\int 7x^3dx =$
4. $\int \left(x^2 + 4\right) dx =$
5. $\int \left(3x^6 - 4x\right) dx =$

Con las reglas (3)-(7), podemos calcular la antiderivada de cualquier polinomio.

$$\int \left(6x^8 - \frac{2}{3}x^5 + 7x^4 + \sqrt{3}\right) dx =$$

Integración por sustitución

[Integración por sustitución]

$$\int (g(x))^r\, g'(x)dx = \frac{1}{r+1}\,(g(x))^{r+1} + C$$

para $r \neq -1$.

$$\int \left(\frac{1}{3}x^3 + 7\right)^5 x^2dx =$$

$$\int \left(x^2 + 1\right)^{2/3} xdx =$$

[Regla 9, método de sustitución]

$$\int f\left(g(x)\right) g'(x)dx = \int f(u)du$$

donde $u = g(x), du = g'(x)dx$.

Véase el ejericicio resuelto

Encuentre

$$\int x\sin(x^2)dx =$$

Encuentre

$$\int \sin(x/2)dx =$$

Figura 7: Antiderivadas comunes

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C$$

$$\int \sec^2 x\,dx = \tan x + C$$

$$\int \tan x \sec x\,dx = \sec x + C$$

$$\int \csc^2 x\,dx = -\cot x + C$$

$$\int \cot x \csc x\,dx = -\csc x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \sin^{-1} x + C$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \tan^{-1} x + C$$

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\,dx = \sec^{-1} x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C \qquad \text{for } a > 0$$

$$\int \frac{1}{a^2+x^2}\,dx = \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C \qquad \text{for } a > 0$$

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-a^2}}\,dx = \frac{1}{a}\sec^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C \qquad \text{for } a > 0$$

Ejemplos Resueltos

[Fórmula de integración por sustitución ()]

1. $\int \left(s^3+2\right)^2 (3s^2)ds =$
2. $\int \left(x^3+2\right)^{1/2} x^2dx =$
3. $\int \dfrac{8x^2}{\left(x^3+2\right)^3}dx =$
4. $\int \dfrac{x^2dx}{\sqrt[4]{x^3+2}}dx =$
5. $\int 3x\sqrt{1-2x^2}dx =$
6. $\int \sqrt[3]{1-x^2}xdx =$
7. $\int \sin^2(x)\cos(x)dx =$

1. $\int \dfrac{\cos(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}dx =$
2. $\int x\sec^2(4x^2-5)dx =$
3. $\int x^2\sqrt{x+1}dx =$

Una piedra se lanza hacia arriba desde el suelo, con una velocidad inicial de $64ft/s$.

1. ¿Cuándo alcanzará su altura máxima?
2. ¿Cuál será su altura máxima?
3. ¿Cuándo tocará el suelo?
4. ¿Cuál será su velocidad al tocar el suelo?

Encuentre la ecuación de una curva en el plano xy que pasa por el punto $(0,1)$ y cuya pendiente es igual a la altura en cada punto (x,y).

Justifique el método de sustitución ().

La integral definida

Notación "Sigma"

La letra griega Σ denota adición repetida:

$$\sum_{i=a}^{b} f(i) = f(a) + f(a+1) + ... + f(b),$$

siempre que $a \leq b$.

1. $\sum_{j=1}^{5} j = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$
2. $\sum_{i=0}^{3} (2i + 1) = 1 + 3 + 5 + 7$
3. $\sum_{i=2}^{10} i^2 = 2^2 + 3^2 + ... + 10^2$
4. $\sum_{j=1}^{4} \cos(j\pi) = \cos\pi + \cos 2\pi + \cos 3\pi + \cos 4\pi$.

Linealidad

$$\sum_{i=a}^{b} cf(i) = c \sum_{i=a}^{b} f(i)$$
$$\sum_{i=a}^{b} f(i) + g(i) = \sum_{i=a}^{b} f(i) + \sum_{i=a}^{b} g(i)$$

Área bajo la curva

Sea f una función tal que $f(x) \geq 0$ en el intervalo $[a, b]$.

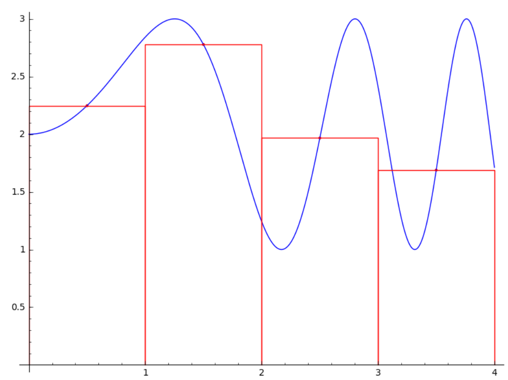


Figura 8: Aproximación de área bajo la curva

Sumas de Riemman

1. Dividimos el intervalo en N subintervalos
$$a = x_0 < x_1 < ... < x_N = b.$$
2. Definimos la longitud de cada intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ como
$$\delta x_i = x_i - x_{i-1}.$$
3. El área bajo la curva definida por f esta aproximada por
$$\sum_{i=1}^{N} f(\xi_i)\delta x_i,$$
donde ξ_i es un punto en el intervalo $[x_i, x_{i+1}]$.

Una manera más concreta de construir una suma de Riemman es *fijando el tamaño del paso:*

1. Definimos $h = \dfrac{b-a}{N}$;
2. Escogemos
$$\xi_k = a + kh,\ k = 0, 1, 2, ..., N;$$
3. La suma de Riemann correspondiente será
$$\sum_{k=1}^{N} f(\xi_k) \cdot h = h\left(f(\xi_1) + ... + f(\xi_N)\right).$$

Al fijar el tamaño del paso, hemos ocupado el extremo derecho de cada intervalo: $x_k = a + k * h$, pero también podemos escoger por ejemplo:

- el extremo izquierdo:
$$\xi_k = a + (k-1) \cdot h;$$
- o el punto medio de cada intervalo:
$$\xi_k = a + \left(k - \frac{1}{2}\right) \cdot h;$$

Si en un intervalo $[a, b]$, $f(x) < 0$, entonces la suma anterior aproxima el área *sobre la curva.*

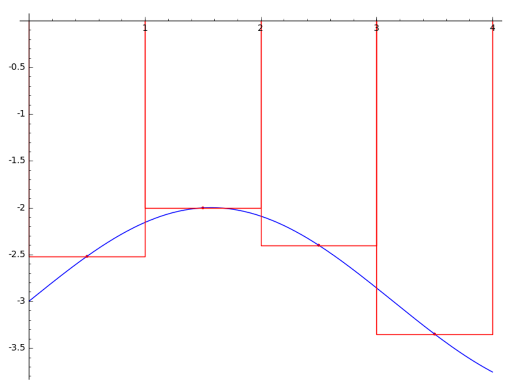


Figura 9: Aproximación de área bajo la curva

Por esta razón, cuando no distinguimos cuando $f(x)$ cambia de signo en un intervalo, hablamos del *área con signo.*

1. La integral definida de f en el intervalo $[a, b]$ está dada por por
$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{N\to\infty} \left(\sum_{i=1}^{N} f(\xi_i)\delta x_i\right),$$
siempre y cuando el límite exista.

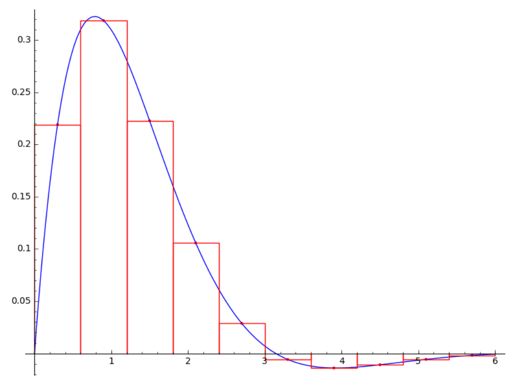


Figura 10: Aproximación de área bajo la curva

2. Si el límite existe, diremos que f es integrable (en $[a, b]$).

3. La suma está definida como en el algoritmo y se conoce como *suma de Riemman.*

Calcule

$$\int_1^5 1dx.$$

Calcule

$$\int_0^5 xdx.$$

Calcule

$$\int_1^5 xdx.$$

$$\int_a^b 1dx = b - a \tag{1}$$

$$\int_a^b xdx = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2} \tag{2}$$

Aproxime la integral

$$\int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx$$

utilizando el algoritmo fijando el tamaño del paso, con $a = -1, b = 1, N = 5$ y usando el extremo derecho de cada intervalo.

Aproxime la integral del ejemplo cuando:

1. $a = 0, b = 3, N = 4$;

2. $a = -2, b = 2, N = 8$;

3. $a = -3, b = 3, N = 16$.

Propiedades de la Integral Definida

Propiedades: Linealidad

$$\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx \tag{3}$$

$$\int_a^b \left(f(x)+g(x)\right)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx \tag{4}$$

Propiedades: Límites

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx \tag{5}$$

$$\int_a^a f(x)dx = 0 \tag{6}$$

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx \tag{7}$$

Ejemplos Resueltos

Supongamos que f y g son integrables en $[a,b]$. Demostrar que:

1. Si $f(x) \geq 0$ en $[a,b]$, entonces $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.
2. Si $f(x) \leq g(x)$ en $[a,b]$, entonces
$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$
3. Si $m \leq f(x) \leq M$ para todo $x \in [a,b]$, entonces
$$m\left(b-a\right) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M\left(b-a\right).$$

Demuestre la fórmula
$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n\left(n+1\right)}{2}.$$

El Teorema Fundamental del Cálculo

Valor promedio de una función

Valor promedio de una función

Si una función f se evalúa en n puntos $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_N$, el valor promedio de la función para estos puntos es

$$\frac{f(\xi_1)+f(\xi_2)+...+f(\xi_N)}{N} = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} f(\xi_k).$$

Sin embargo, si tratamos de promediar una función en un intervalo $[a, b]$, esta definición no es útil porque habrá una infinidad[1] de puntos.

[1] De hecho, una cantidad no numerable de puntos, por lo que ni siquiera podemos tratar de aplicar algunas técnicas para series

Aun así, todavía podemos encontrar una definición, motivada por el promedio en una cantidad finita de puntos

Escogiendo el tamaño del paso fijo para un número N dado de subintervalos, tenemos que

$$h = \frac{b-a}{N}.$$

O de manera equivalente

$$\frac{1}{N} = \frac{1}{b-a} h.$$

De manera que

$$\frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} f(\xi_k) = \frac{1}{b-a} \sum_{k=1}^{N} f(\xi_k) \cdot h.$$

Cuando $N \to \infty$, el lado derecho se aproxima a

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(\xi) d\xi.$$

El valor promedio de f en $[a, b]$ está dado por

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

Sea f una función continua en $[a, b]$. Si $x \in [a, b]$, entonces

$$F(x) = \int_a^x f(\xi) d\xi$$

es una función que depende de x tal que

$$D_x F(x) = D_x \left(\int_a^x f(\xi) d\xi \right) = f(x).$$

Enunciado del T.F.C

[Teorema Fundamental del Cálculo] Sea f una función continua en $[a, b]$ y $F(x)$ una antiderivada de $f(x)$. Entonces

$$\int_a^b f(\xi) d\xi = F(b) - F(a). \tag{TFC}$$

La ecuación (TFC) nos da una manera sencilla de calcular

$$\int_a^b f(\xi) d\xi ...$$

siempre y cuando podamos encontrar una antiderivada de $f(x)$, en términos de funciones elementales.

La expresión $F(b) - F(a)$ generalmente se abrevia como

$$F(x) \mid_a^b .$$

Calcule las siguientes fórmulas utilizando el (TFC):

1.
$$\int_a^b x dx =$$

2.
$$\int_a^b x^2 dx =$$

3.
$$\int_a^b x^r dx =$$

[TFC con Cambio de Variables] Supongamos que en el intervalo $[a, b]$, la función f es continua y la función g es diferenciable.

Entonces
$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du,$$

donde $u = g(x)$.

Evalue
$$\int_1^9 \sqrt{5x+4}dx.$$

Ejemplos Resueltos

Evalúe
$$\int_0^{\pi/2} \sin^2(x)\cos(x)dx.$$

Encuentre el área de la región entre la curva dada por $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$, el eje x, $x = 0$ y $x = 1$.

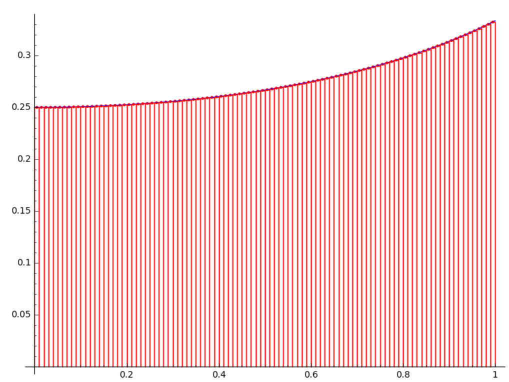


Figura 11: $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$

Encuentre el valor promedio de $f(x) = 4 - x^2$ en $[0, 2]$.

Demuestre la fórmula (). Sugerencia: Utilice el teorema del valor medio.

[Teorema del Valor Medio para Integrales] Sea f una función continua en $[a, b]$. Entonces existe $c \in [a, b]$ tal que

$$\int_a^b f(\xi) d\xi = (b - a) f(c)$$

Demuestre que

1. Si f es una función par, entonces para $a > 0$:

$$\int_{-a}^{a} f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx;$$

2. Si f es una función impar, entonces para $a > 0$:

$$\int_{-a}^{a} f(x) dx = 0.$$

[Regla trapezoidal] Sea $f(x) \geq 0$ en $[a, b]$. Dividamos $[a, b]$ en N subintervalos de longitud fija $h = \frac{b-a}{N}$, por medio de puntos

$$x_k = a + k \cdot h, \; k = 1, ..., N.$$

Muestre que

$$\int_a^b f(\xi) d\xi \approx \frac{h}{2} \left(f(a) + 2 \sum_{k=1}^{N-1} f(\xi_k) + f(b) \right)$$

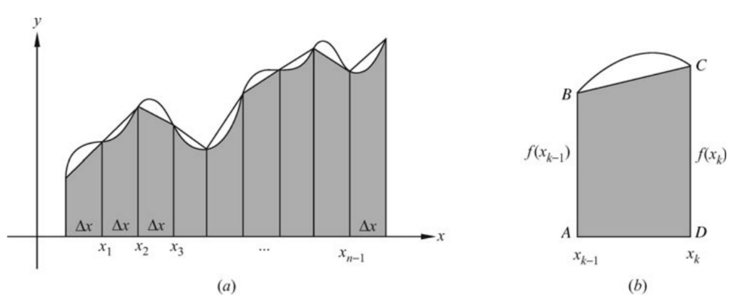


Figura 12: Regla trapezoidal

Use la regla trapezoidal para aproximar

$$\int_0^1 x^2 dx$$

con $N = 1$.

Utilice el (TFC) para calcular la integral de manera exacta y compare.

Integración por partes

A partir de la regla del producto

$$\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx},$$

se deduce la fórmula de integración por partes:

$$\int udv = uv - \int vdu$$

Para elegir u, podemos seguir la regla empírica **LIATE**:

- **L**ogaritmos
- **I**nversas trigonométricas
- **A**lgebraicas
- **T**rigonométricas
- **E**xponenciales

Encuentre

$$\int x\ln(x)dx.$$

Encuentre

$$\int xe^{x}dx.$$

Encuentre

$$\int e^{x}\cos(x)dx.$$

Ejemplos Resueltos

Por medio de integración por partes, encuentre la siguiente integral indefinida

$$\int x^3 e^{x^2}dx$$

Por medio de integración por partes, encuentre la siguiente integral indefinida

$$\int \ln\left(x^2+2\right)dx$$

Por medio de integración por partes, encuentre la siguiente integral indefinida

$$\int \ln(x)dx$$

Por medio de integración por partes, encuentre la siguiente integral indefinida

$$\int x\sin(x)dx$$

Por medio de integración por partes, encuentre la siguiente integral indefinida
$$\int x^2 \ln(x)dx$$

Por medio de integración por partes, encuentre la siguiente integral indefinida
$$\int \sin^{-1}(x)dx$$

Por medio de integración por partes, encuentre la siguiente integral indefinida
$$\int \tan^{-1}(x)dx$$

Por medio de integración por partes, encuentre la siguiente integral indefinida
$$\int \sec^3(x)dx$$

Por medio de integración por partes, encuentre la siguiente integral indefinida
$$\int x^2 \sin(x)dx$$

Por medio de integración por partes, encuentre la siguiente integral indefinida
$$\int x^3 e^{2x}dx$$

Deduzca la siguiente *fórmula de reducción*
$$\begin{aligned}\int \sin^m(x)dx = &-\frac{\sin^{m-1}(x)\cdot\cos(x)}{m}\\ &+\frac{m-1}{m}\int \sin^{m-2}(x)dx.\end{aligned} \tag{FR}$$

Aplique la formula de reducción (FR) para hallar
$$\int \sin^2(x)dx.$$

Aplique la formula de reducción (FR) para hallar
$$\int \sin^3(x)dx.$$

Fracciones parciales

La técnica de fracciones parciales se utiliza para integrar funciones racionales, es decir, aquellas de la forma
$$\frac{N(x)}{D(x)},$$
donde N, D son polinomios.

Por simplicidad, supondremos que

1. El coeficiente líder de $D(x)$ es igual a 1.
2. El grado de $D(x)$ es mayor que el de $N(x)$.

Sin embargo, ninguna de estas dos condiciones son esenciales.

$$\int \frac{2x^3}{5x^8+3x-4}dx = \frac{1}{5}\int \frac{2x^3}{x^8+\frac{3}{5}x-\frac{4}{5}}$$

$$\frac{2x^5+7}{x^2+3} = 2x^3-6x+\frac{18x+7}{x^2+3}$$

Un polinomio es irreducible si no se puede expresar como el producto de dos polinomios de grado menor.

1. Todo polinomio lineal es irreducible
2. Un polinomio cuadrático

$$g(x) = ax^2+bx+c,\ a \neq 0$$

es irreducible si y solo $b^4-4ac<0$.

Verifique que

1. x^2+4 es irreducible;
2. x^2+x-4 es reducible.

Todo polinomio cuyo coeficiente líder sea igual a 1 se puede expresar como producto de factores lineales, o factores cuadráticos irreducibles.

1. $x^3-4x=$
2. $x^3+4x=$
3. $x^4-9=$
4. $x^3-3x^2-x+3=$

Método de Fracciones Parciales

Caso I. $D(x)$ es producto de factores lineales distintos

Resuelva

$$\int \frac{dx}{x^2-4}$$

Resuelva

$$\int \frac{(x+1)dx}{x^3+x^2-6x}$$

Regla General para Caso 1

El integrando se representa como una suma de términos de la form $\frac{A}{x-a}$, para cada factor $x-a$, y A una constante por determinar.

Caso 2. $D(x)$ es producto de factores lineales repetidos.

Encuentre

$$\int \frac{(3x+5)dx}{x^3-x^2-x+1}$$

$$\int \frac{(x+1)dx}{x^3(x-2)^2}$$

Regla General para el Caso 2.

Para cada factor $x-c$ de multiplicidad k, se utiliza la expresión

$$\frac{A_1}{x-r}+\frac{A_2}{(x-r)^2}+...+\frac{A_k}{(x-r)^k}.$$

Caso 3. Factores cuadráticos irreducibles distintos, y lineales repetidos

A cada factor irreducible x^2+bx+c de $D(x)$ le corresponde el integrando

$$\frac{Ax+B}{x^2+bx+c}.$$

Encuentre

$$\int \frac{(x-1)dx}{x(x^2+1)(x^2+2)}$$

Caso IV. Factores cuadráticos irreducibles repetidos

A cada factor cuadráticos irreducible x^2+bx+c de mutiplicidad k le corresponde el integrando

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{A_i x+B_i}{(x^2+bx+c)^i}$$

Encuentre

$$\int \frac{2x^2+3}{(x^2+1)^2}dx.$$

Técnicas de integación trigonométrica

Integrados trigonométricos

Caso 1

Considérense las integrales de la forma

$$\int \sin^k(x) cos^n(x) dx,$$

con k, n enteros no negativos.

Tipo 1.1

Si Al menos uno de los números k, n es impar, entonces podemos escoger $u = \cos(x)$ o $u = \sin(x)$.

$$\int \sin^3(x)\cos^2(x)dx.$$

$$\int sin^4(x) cos^7(x) dx$$

$$\int sin^5(x) dx$$

Tipo 1.2

Si ambas potencias k, n son pares. Entonces utilizaremos las identidades

$$\begin{cases} cos^2(x) = \dfrac{1 + cos(2x)}{2} \\ sin^2(x) = \dfrac{1 - cos(2x)}{2} \end{cases}$$

$$\int cos^2(x) sin^4(x) dx$$

Caso 2

Consideraremos integrales de la forma

$$\int tan^k(x) sec^n(x) dx.$$

y utilizaremos la identidad

$$sec^2(x) = 1 + tan^2(x).$$

Tipo 2.1

Si n es par, entonces se sustituye $u = \tan(x)$.

$$\int tan^2(x) sec^4(x) dx$$

Tipo 2.2

Si n, k son impares, se sustituye $u = sec(x)$.

$$\int tan^3(x) sec(x) dx.$$

Tipo 2.3

Si n es impar y k par, reducimos a los casos anteriores y utilizaremos la fórmula

$$\int \sec(x) dx = \ln|\tan(x) + \sec(x)|$$

$$\int \tan^2(x)\sec(x) dx =$$

Caso 3

Consideremos ahora integrales de la forma $\int f(Ax)g(Bx)dx$, donde f, g pueden ser o bien sin o bien cos.

Necesitaremos las identidades

$$\begin{aligned}
sin(Ax)cos(Bx) &= \frac{1}{2}\left(sin\left((A+B)x\right) + sin\left((A-B)x\right)\right)\\
sin(Ax)sin(Bx) &= \frac{1}{2}\left(cos\left((A-B)x\right) - cos\left((A+B)x\right)\right)\\
cos(Ax)cos(Bx) &= \frac{1}{2}\left(cos\left((A-B)x\right) + cos\left((A+B)x\right)\right)
\end{aligned}$$

$$\int sin(7x)cos(3x)$$

$$\int sin(7x)cos(3x)$$

$$\int sin(7x)sin(3x)$$

$$\int cos(7x)cos(3x)$$

Sustitución trigonométrica

Existen tres principales tipos de sustitución trigonométrica. Introduciremos cada uno por medio de ejemplos típicos.

Encuentre

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4+x^2}}$$

Estrategia I

Si $\sqrt{a^2+x^2}$ aparece en el integrando, intente $x = a\tan(\theta)$
Encuentre
$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{9-x^2}}$$

Estrategia II

Si $\sqrt{a^2-x^2}$ aparece en un integrando, trate con la sustitución $x = a\sin(\theta)$.
Encuentre
$$\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-4}}dx.$$

Estrategia III

Si $\sqrt{x^2-a^2}$ aparece en un integrando, trate con la sustitución $x = a\sec\theta$.

Área y longitud de arco

Área entre una curva y el eje vertical

Nostros ya sabemos como encontrar el áre de una región como la siguiente

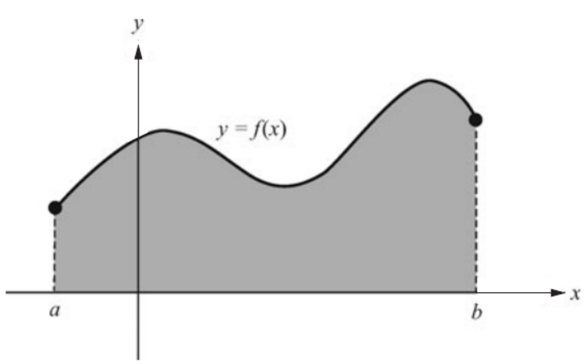


Figura 13: Área bajo la curva

El área de la región acotada por
$$x = a,\ x = b,\ y = 0,\ y = f(x)$$
está dada por
$$\int_a^b f(x)dx$$

Ahora consideremos una región como la siguiente

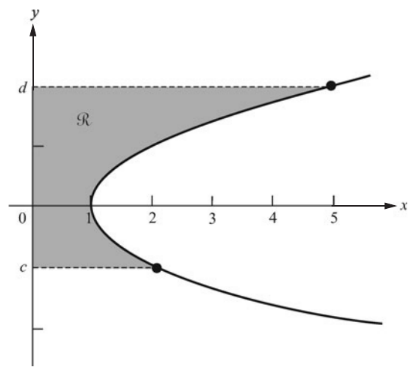


Figura 14: Área entre curva y eje vertical

De manera similar, el área de la región acotada por

$$x = 0,\ x = g(y),\ y = c,\ y = d$$

está dada por

$$\int_c^d g(y)dy$$

Calcule el área de la región dada en la figura 15, que está acotada por el eje y, arriba por $y = 2$, abajo por $y = -1$ y la curva

$$x + y^2 = 4.$$

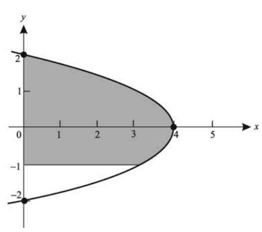


Figura 15: Área acotada por una parabola

Área entre curvas

Supongamos que f y g son funciones continuas para $a \leq x \leq b$.

El área A de la región contenida entre estas dos curvas y los ejes $x = a$ y $x = b$ está dada por la fórmula

$$A = \int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx.$$

Calcule el área de región de la figura 19, acotada por

$$x = 0,\ x = 1,\ y = \frac{1}{2}x + 2,\ y = x^2.$$

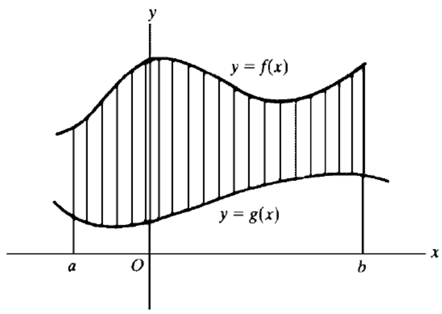


Fig. 29-4

Figura 16: Área entre curvas (funciones positivas)

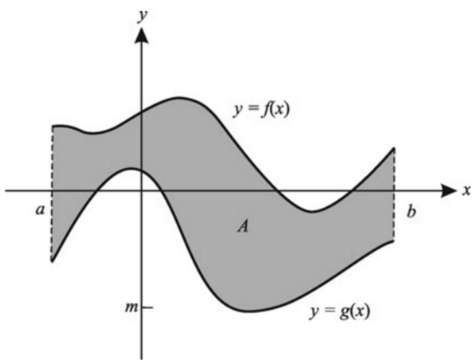


Figura 17: Área entre curvas

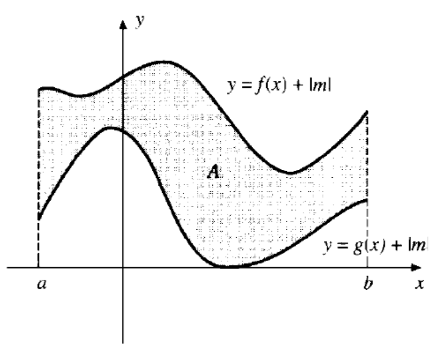


Figura 18: Deducción de la fórmula

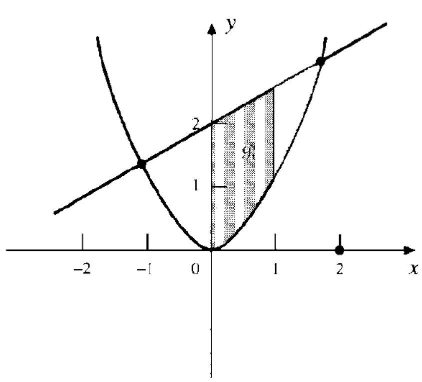


Figura 19: Área entre línea y parábola

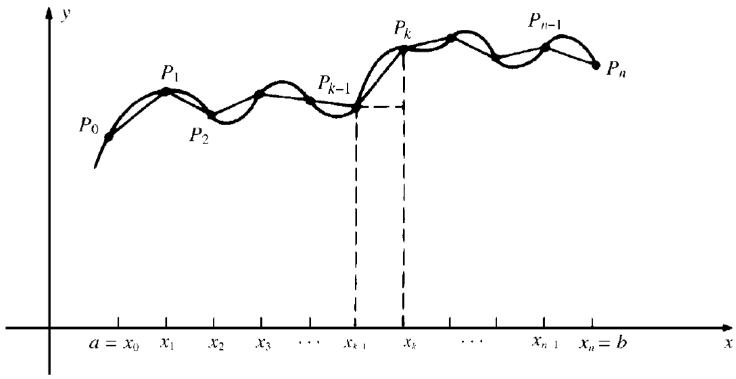


Figura 20: Aproximación de la longitud de un arco

Longitud de arco

Por la fórmula de distancia

$$\overline{P_{k-1}P_k} = \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (f(x_k) - f(x_{k-1}))^2}.$$

Por el teorema del valor medio, existe $x_k^* \in (x_{k-1}, x_k)$ tal que

$$f(x_k) - f(x_{k-1}) = (x_k - x_{k-1})\, f'(x_k^*) = (\Delta x) f'(x_k^*).$$

Entonces

$$\overline{P_{k-1}P_k} = \sqrt{1 + (f'(x_k^*))^2}(\Delta x)$$

De manera que

$$\sum_{k=1}^{n} \overline{P_{k-1}P_k} = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + (f'(x_k^*))^2}(\Delta x),$$

donde $(\Delta x)n = b - a$.

Tomando el límite $n \to \infty$ de ambos lados obtenemos que la longitud $L(f, a, b)$ de al arco dado por la curva $f(x)$ en el intervalo $a \leq x \leq b$ esta dado por

$$L(f, a, b) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

Encuentre la longitud del arco descrito por la curva $y = x^{3/2}$ de $x = 0$ a $x = 5$.

Ejemplos

Encuentre el área acotada por la parábola

$$x = 8 + y - y^2,$$

el eje y y las líneas $y = -1$ y $y = 3$.

Encuentre el área de la región acotada por las parábolas

$$y = 6x - x^2$$

y

$$y = x^2 - 2x.$$

Encuentre la longitud de arco de la curva

$$x = 3y^{3/2} - 1$$

desde $y = 0$ hasta $y = 4$.

Encuentre la longitud de arco de la *catenaria*

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{x/a} + e^{-x/a}\right)$$

desde $x = 0$ hasta $x = a$.

Volumen

Un *sólido de revolución* se obtiene al girar una región del plano alrededor de una línea que no intersecta la región.

La línea alrededor del cuál se realiza la rotación se llama *eje de revolución.*

Sea f una función continua tal que $f(x) \geq 0$ para $a \leq x \leq b$. Considere la región $\mathcal{R}$ bajo la gráfica de f, arriba del eje x, entre $x = a$ y $x = b$:

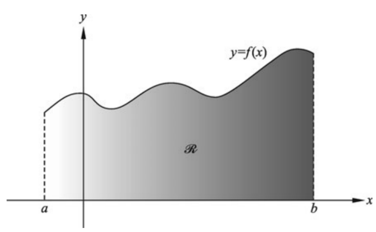


Figura 21: Región de revolución

Grafique la superficie de revolución generada por la región acotada por la recta $y = x$ y la parábola $y = x^2$.

A partir de ahora, usaremos el sistema algebráico de computo `SageMath`, para visualizar las gráficas.

[fragile]Código para graficar en 2D

```
x = var("x")
line = x
parabola = x^2
graf = plot(line, (-0.5,1.5))
graf = graf+plot(parabola, (-0.5,1.5))
graf.show()
```

[fragile]Código para generar un sólido de revolución

```
x = var("x")
```

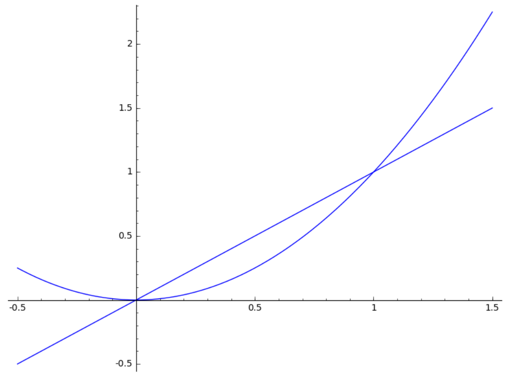


Figura 22: Región $\mathcal{R}$ acotada por $y = x$ y $y = x^2$

```
line = x
parabola = x^2
P = axes(1, color="black")
sur1=revolution_plot3d(line,(x,0,1),
    opacity=0.5,rgbcolor=(1,0.5,0),
    show_curve=True,parallel_axis='x')
sur2=revolution_plot3d(parabola,(x,0,1),
    opacity=0.5,rgbcolor=(0,1,0),
    show_curve=True,parallel_axis='x')
(sur1+sur2+P).show()
```

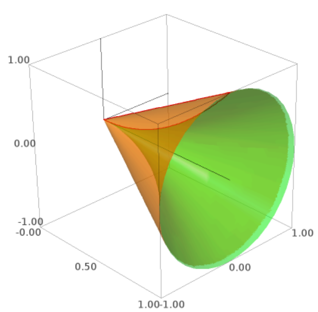
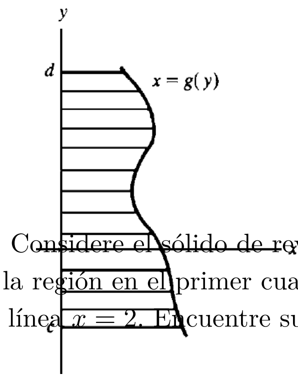


Figura 23: Sólido generado por $\mathcal{R}$

Fórmula del Disco

El volumen V de un sólido de revolución obtenido al rotar una región $\mathcal{R}$ alrededor del eje x está dado por

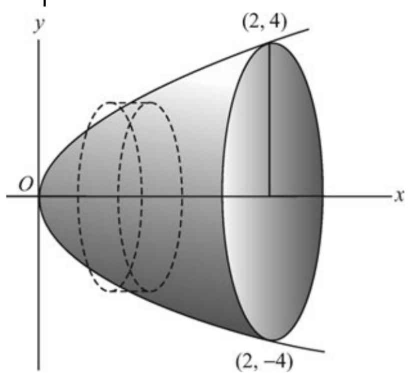
$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 \, dx \qquad \text{(Fórmula del Disco)}$$



De manera similar, la fórmula para una región como acotada por la gráfica $x = g(y)$ está dada por

$$V = \pi \int_c^d (g(y))^2 \, dy \qquad \text{(Fórmula del Disco (II))}$$

Considere el sólido de revolución obtenido al girar alrededor del eje x la región en el primer cuadránte acotada por la parábola $y^2 = 8x$ y la línea $x = 2$. Encuentre su volumen.



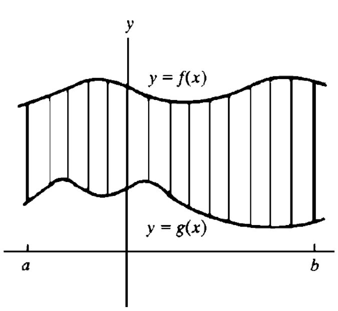
Considere el sólido de revolución obtenido al girar alrededor del eje y la región en el primer cuadránte acotada por la parábola $y = 4x^2$ y la línea $y = 16$. Encuentre su volumen.

Método de Washer

Supongamos que $0 \leq g(x) \leq f(x)$ para $a \leq x \leq b$. Consideremos la región acotada por $x = a$, $x = b$, y las curvas $y = g(x)$ y $y = f(x)$.

Entonces el volumen V del sólido de revolución generado por esta región rotando alrededor del eje x está dado por

$$V = \pi \int_a^b \left((f(x))^2 - (g(x))^2 \right) dx \qquad \text{(Washer)}$$



Una fórmula similar

$$V = \pi \int_c^d \left((f(y))^2 - (g(y))^2 \right) dy \qquad \text{(Washer (II))}$$

se satisface cuando la región esta acotada por las curvas $x = f(y)$,

$x = g(y)$ y las rectas $y = c,\ y = d$, siempre y cuando $0 \leq g(y) \leq f(y)$ para $c \leq y \leq d$ y se rota tal región alrededor del eje y.

Considere el sólido de revolución obtenido al girar alrededor del eje x la región acotada por las curvas

$$y = 4x^2,\ x = 0,\ y = 16.$$

Encuentre el volumen por (Washer).

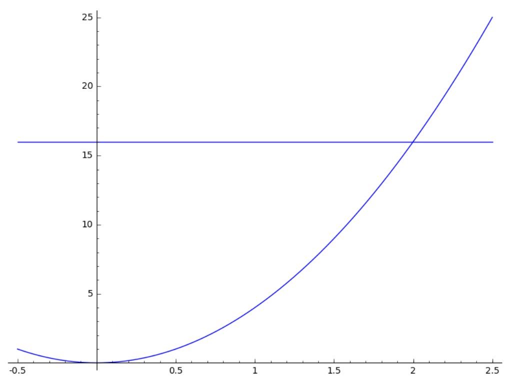
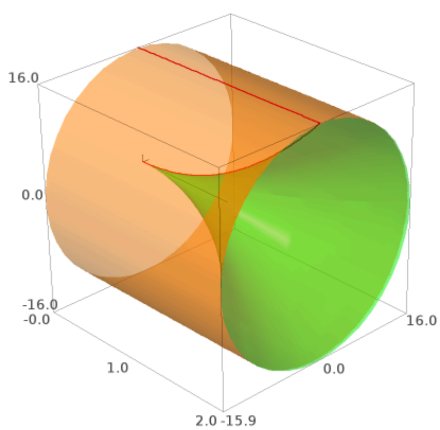
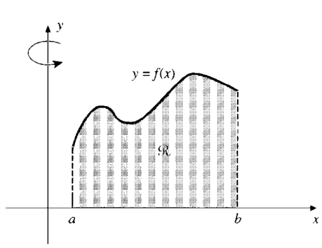


Figura 25: Región $\mathcal{R}$ acotada por $y = 4x^2,\ x = 0,\ y = 16$.

Figura 26: Sólido generado por región $\mathcal{R}$.



Método de las capas cilíndricas



Consideremos el sólido de revolución obtenido al rotar alrededor del eje y la región $\mathcal{R}$ en el primer cuadrante entre el eje x y la curva $y = f(x)$, entre $x = a$ y $x = b$.

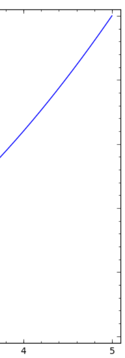
Entonces el volumen del sólido está dado por la fórmual de capas cilíndricas

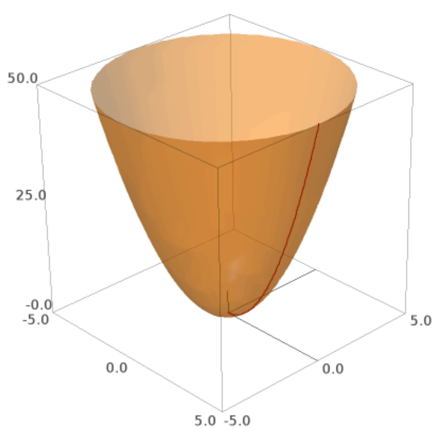
$$V = 2\pi \int_a^b x f(x) dx \tag{FCC}$$

Una fórmula similar se satisface cuando se intercambian x y y, es decir, la región $\mathcal{R}$ en el primer cuadránte entre el eje y y la curva $x = f(y)$, entre $y = c$ y $y = d$, se gira alrededor del eje x

$$V = 2\pi \int_c^d y f(y) dy \tag{FCC(II)}$$

Rote alrededor del eje y la región sobre el eje x y debajo de $y = 2x^2$, entre $x = 0$ y $x = 5$. Por medio de (FCC). Encuentre el volumen.





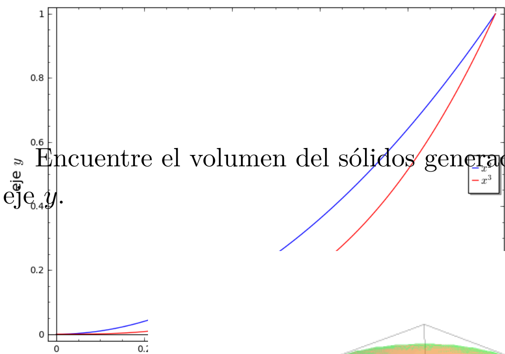
Diferencia de Capas

Supongamos que $0 \leq g(x) \leq f(x)$ en el intervalo $[a, b],\ a \geq 0$. Sea $\mathcal{R}$ la región en el primer cuadránte entre

$$y = f(x),\ y = g(x),\ x = a,\ x = b.$$

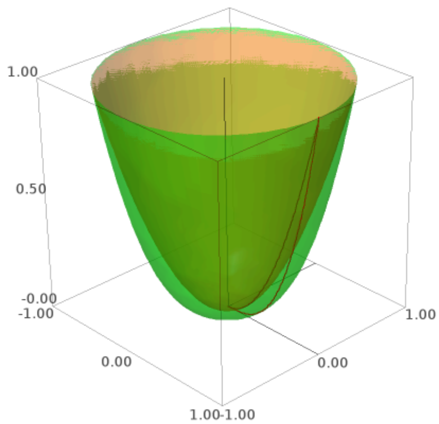
Entonces el volumen del sólido de revolución obtenido al rotar $\mathcal{R}$ alrededor del eje y está dado por

$$V = 2\pi \int_a^b x\left(f(x) - g(x)\right) dx \tag{FDC}$$

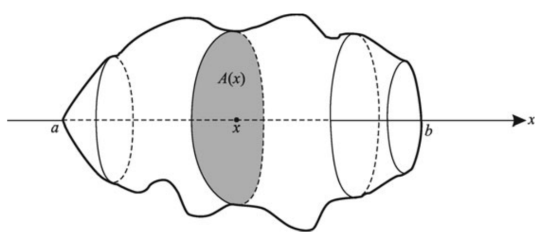


Consideremos la región en el primer cuadrante acotado arriba por $y = x^2$ y debajo por $y = x^3$.

Encuentre el volumen del sólidos generado al rotar $\mathcal{R}$ alrededor del eje y.



Secciones trasnversales (rebanadas)

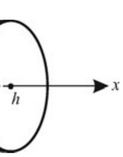


Supongamos que un sólido vive enteramente entre el plano perpendicular al eje x en $x = a$ y el plano perpendicular al x en $x = b$.

Para cada $x \in [a, b]$, supongamos que el plano perpendicular al eje x en el punto x intersecta al sólido en una región de área $A(x)$.

Entonces, el volumen V del sólido está dado por

$$V = \int_a^b A(x)dx. \tag{FST}$$



Supongamos que un segmento de un misil de longitud h es tal que la sección transversal perpendicular al eje de simetría del misil a una distancia x de la punta es un círculo de radio $\sqrt{x}$. Encuentre el volumen del misil.

Integrales impropias

Límites al infinito

Para que
$$\int_a^b f(x)dx$$
esté bien definida, basta que f sea una función continua y a, b sean número reales. Ahora veremos que sucede cuando

1. a o b tienden a $\pm\infty$;

2. f es discontinuo.

Tales integrales se conocen como *impropias.*

Límites infinitos de integración

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{c\to+\infty}\int_a^c f(x)dx \tag{8}$$
$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{c\to-\infty}\int_c^b f(x)dx \tag{9}$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_c^{+\infty} f(x)dx + \int_{-\infty}^{c} f(x)dx \tag{10}$$

La última integral es válida siempre y cuando los dos límites del lado derecho existan.

Encuentre la intergral
$$\int_0^{\infty} e^{-x}\sin(x)dx$$

Encuentre la integral
$$\int_{-\infty}^{0} e^{rx}dx$$
para $r > 0$.

Evalue
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$$

Discontinuidades del integrando

Caso I Si f es continuo en $(a, b]$, discontinuo en $x = a$, podemos definir
$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{u\to a^+}\int_u^b f(x)dx,$$
siempre y cuando el límite exista.

Evalue
$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2}dx$$

Caso II Si f es continuo en $[a,b)$, discontinuo en $x = b$, podemos definir

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{u\to b^-} \int_a^u f(x)dx,$$

siempre y cuando el límite exista.

Evalue

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos(x)}{\sqrt{1-\sin(x)}}dx$$

Caso III Si f es continuo en $[a,b]$ excepto en un punto $c \in (a,b)$, entonces

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{u\to c^-} \int_a^u f(x)dx + \lim_{u\to c^+} \int_u^b f(x)dx$$

siempre y cuando ambos límites del lado derecho existan.

Evalue

$$\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}}dx$$

Área de Superficies de Revolución

Si un arco de una curva se gira alrededor de una línea que no se intersecta con el arco, entonces la superficie resultante is llamada *superficie de revolución.*

Por *área de superficie,* nos referiremos al área de la superficie exterior.

Sea f una función continua y $f(x) \geq 0$ en $[a,b]$ que es diferenciable en (a,b). Entonces el área de superficie S de la superficie de revolución generado al girar la gráfica de f en $[a,b]$ alrededor del eje x esta dado por la fórmula

$$S = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}dx.$$

De manera similar, sea g una función continua y $g(y) \geq 0$ en $[c,d]$ que es diferenciable en (c,d). Entonces el área de superficie S de la superficie de revolución generado al girar la gráfica de g en $[c,d]$ alrededor del eje y esta dado por la fórmula

$$S = 2\pi \int_c^d g(y))\sqrt{1+(g'(y))^2}dy.$$

De manera más general, si una curva esta dada por las ecuaciones paramétricas

$$x = f(u),\ y = g(u)$$

y el arco va de $u = u_1$ a $u = u_2$ se rota alrededor del eje x, entonces el área de superficie de la superficie de revolución resultante está dada por la fórmula

$$S = 2\pi \int_{u_1}^{u_2} y\sqrt{\left(\frac{dx}{du}\right)^2 + \left(\frac{dy}{du}\right)^2}du$$

En la fórmula anterior, hemos supuesto que f, g son continuas en $[u_1, u_2]$, diferenciable en (u_1, u_2) y que $y = g(u) \geq 0$ en $[u_1, u_2]$.

Cálculo en varias variables

Representación paramétrica de curvas

Ecuaciones paramétricas

Si las coordenadas (x, y) de un punto P en una curva están dadas por las funciones

$$x = f(t), y = g(t) \tag{Ec.Par.}$$

de una tercera variable o *parámetro* t, entonces (Ec.Par.) son llamadas *ecuaciones paramétricas* de la curva.

a

$$x = \cos(t), y = \sin^2(t)$$

son ecuaciones paramétricas de la parábola

$$4x^2 + y = 4.$$

b

$$x = \frac{1}{2}t, y = 4 - t^2$$

es otra parametrización de la misma curva.

1. Las ecuaciones

$$x = r\cos(t), y = r\sin(t)$$

representan el círculo con radio en el origen.

2. Las ecuaciones

$$x = a + r\cos(t), y = b + r\sin(t)$$

representa el círculo de radio r y centro en (a, b).

Supongamos que la curvas está dada por (Ec.Par.). Entonces las primera y segunda derivadas están dadas por

$$D_x y = \frac{D_t y}{D_t x} \tag{11}$$

$$D_{xx} y = \frac{D_{tx} y}{D_t x} \tag{12}$$

Longitud de arco

Si una curva está dada por (Ec.Par.), entonces la *longitud de curva* entre dos puntos correspondientes a los valores parámetricos t_1 y t_2 es

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(D_t x)^2 + (D_t y)^2} dt$$

Ejemplos

Encuentre $D_x y$, $D_{xx} y$ para

$$x = t - \sin(t), y = 1 - \cos(t)$$

Encuentre $D_x y$ y $D_{xx} y$ si $x = e^t \cos(t), y = e^t \sin(t)$.

Encuentre una ecuación a la línea tangente de la curva

$$x = \sqrt{t}, y = t - \frac{1}{\sqrt{t}}$$

en el punto $t = 4$.

La posición de una particula que se está moviendo a lo largo de una curva está dada al tiempo t por las ecuaciones paramétricas

$$x = 2 - 3\cos(t), y = 3 + 2\sin(t)$$

donde x y y están medidos en pies y t en segundos.

Note que

$$\frac{1}{9}(x-2)^2 + \frac{1}{4}(y-3)^2 = 1$$

de manera que la curva es una elipse.*¿Porqué?*

Continuación

1. Encuentre la tasa de cambio temporal de x cuando $t = \frac{\pi}{3}$
2. Encuentre la tasa de cambio temporal de y cuando $t = \frac{5\pi}{3}$
3. Encuentre la tasa de cambio temporal del ángulo de inclinación θ de la línea tangente cuando $t = \frac{2\pi}{3}$

Encuentre la longitud de arco de la curva

$$x = t^2, y = t^3$$

desde $t = 0$ a $t = 4$.

Encuentre la longitud de arco de la cicloide

$$x = \theta - \sin\theta, y = 1 - \cos\theta$$

entre $\theta = 0$ y $\theta = 2\pi$.

Derivadas Parciales

Objetivos del aprendizaje

1. Calcular e interpretar derivadas parciales.
2. Aplicar derivadas parciales para estudiar Ejemplos de análisis marginal en economía.
3. Calcular derivadas parciales de segundo orden.
4. Usar la regla de la cadena de derivadas parciales para encontrar tasas de cambio y hacer aproximaciones incrementales.

Derivadas parciales de primer orden

La derivada parcial de $f(x, y)$ respecto de x se denota por

$$\partial_x f(x, y) \text{ ó } f_x(x, y)$$

y es la función obtenida al derivar f respecto de x *tratando a y como una constante*.

Derivadas parciales de primer orden

De manera similar, la derivada parcial de $f(x, y)$ respecto de y se denota por

$$\partial_y f(x, y) \text{ ó } f_y(x, y)$$

y es la función obtenida al derivar f respecto de y *tratando a x como una constante*.

Algunas propiedades y fórmulas

Sean $u(x, y), v(x, y)$ funciones de dos variables y $h(y)$ una función que no depende de x.

1. $\partial_x h(y) = 0$;
2. $\partial_x (h(y)u) = h(y)\partial_x u$;
3. $\partial_x (u + v) = \partial_x u + \partial_x v$;
4. $\partial_x (uv) = u\partial_x v + v\partial_x u$;
5. $\partial_x u^n = nu^{n-1}\partial_x u$;
6. $\partial_x e^u = e^u \partial_x u$;
7. $\partial_x \ln(u) = \frac{\partial_x u}{u}$.

Las reglas siguen valiendo si: cambiamos ∂_x por ∂_y y h no depende de y.

Cálculo de derivadas parciales

Encuentre las derivadas parciales de $f(x,y) = x^2 + 2xy^2 + \frac{2y}{3x}$

El desarrollo completo del ejercicio lo puede encontrar en mi Canal de YouTube. La comprobación de la solución la puede encontrar en SageMathCell.

Encuentre las derivadas parciales de

$$f(x,y) = (x^2 + x * y + y)^5.$$

El desarrollo completo del ejercicio lo puedes encontrar en mi Canal de YouTube. La comprobación se puede encontrar en http://sagecell.sagemath.org/?q=vrfhpv

Encuentre las derivadas parciales de

$$f(x,y) = xe^{-2xy}.$$

El desarrollo completo del ejercicio lo puedes encontrar en mi Canal de YouTube. La comprobación se puede encontrar en http://sagecell.sagemath.org/?q=onrgkx

Evalue las derivadas parciales $\partial_x f(x,y)$ y $\partial_y f(x,y)$ en el punto (x_0, y_0) dado:

1. $f(x,y) = x^3y - 2(x+y),\ x_0 = 1, y_0 = 0;$
2. $f(x,y) = x + \dfrac{x}{y-3x},\ x_0 = 1, y_0 = 1;$
3. $f(x,y) = (x-2y)^2 + (y-3x)^2 + 5,\ x_0 = 0, y_0 = -1;$
4. $f(x,y) = xy\ln\left(\dfrac{y}{x}\right) + \ln(2x-3y)^2,\ x_0 = 1, y_0 = 1;$

Puede verificar sus resultados con este este script.

Clasificación de Puntos Críticos

[Extremos relativos] Diremos la función f(x,y) tiene un *máximo relativo* en (x_0, y_0) si

$$f(x_0, y_0) \geq f(x,y)$$

para todo (x,y) suficientemente cercano a (x_0, y_0).

De manera similar, diremos la función f(x,y) tiene un *mínimo relativo* en (x_0, y_0) si

$$f(x_0, y_0) \leq f(x,y)$$

para todo (x,y) suficientemente cercano a (x_0, y_0).

Los *extremos relativos* no siempre son *extremos absolutos*...

Est imagen la puede genera con el siguiente código: http://sagecell.sagemath.org/?q=wdxppk

Sin embargo, para puntos suficientemente cercano, un *extremo relativo* sí lo es.

Esta imagen la puede generar con el siguiente código: http://sagecell.sagemath.org/?q=butszu

De hecho, el mapa topográfico de la región, nos indica que existen punto a una mayor altura que el *máximo relativo*.

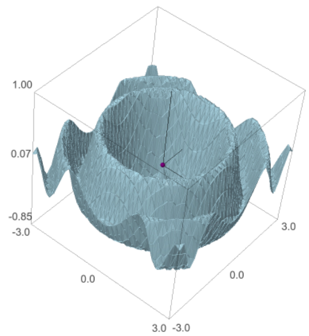
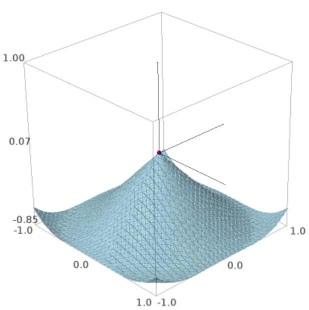


Figura 27: Máximo Relativo



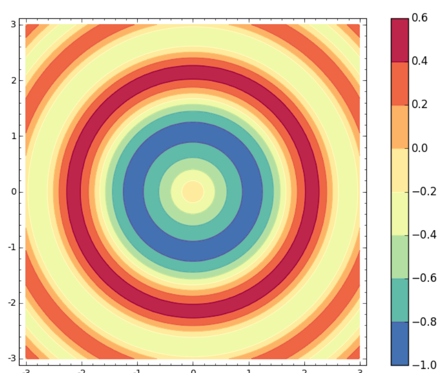


Figura 28: Mapa topográfico con alturas

Puede generar este mapa topográfico con el siguiente código http://sagecell.sagemath.org/?q=zyutmy

[Puntos críticos] Un punto (x_0, y_0) es un *punto crítico* de $f(x, y)$ si

$$\partial_x f(x_0, y_0) = 0,\ \partial_y f(x_0, y_0) = 0.$$

Todos los extremos relativos son puntos críticos...

Pero no todos los puntos críticos son extremos relativos.

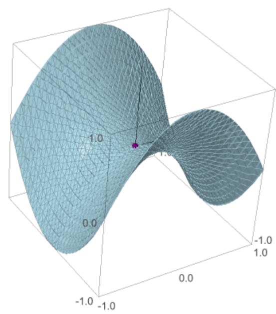


Figura 29: Punto de silla

http://sagecell.sagemath.org/?q=kmfhcx

Diremos que un punto crítico que no es extremo local es un punto de silla.

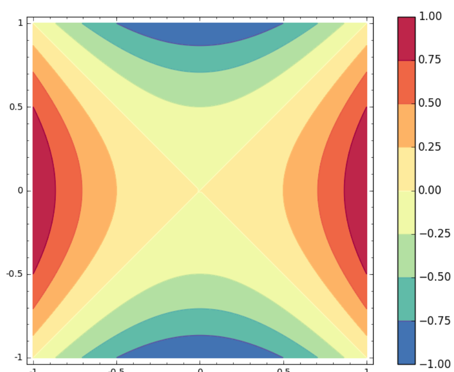


Figura 30: Mapa topografico de $f(x, y) = x^2 - y^2$

http://sagecell.sagemath.org/?q=mjknwh

$(0, 0)$ es punto de silla de $f(x, y) = x^2 - y^2$.

[Segundas derivadas] Las derivadas parciales de segundo orden de $f(x, y)$ son

- $\partial_{xx} f(x, y) = \partial_x \left(\partial_x f(x, y)\right) = f_{xx}(x, y)$
- $\partial_{xy} f(x, y) = \partial_x \left(\partial_y f(x, y)\right) = f_{yx}(x, y)$
- $\partial_{yx} f(x, y) = \partial_y \left(\partial_x f(x, y)\right) = f_{xy}(x, y)$
- $\partial_{yy} f(x, y) = \partial_y \left(\partial_y f(x, y)\right) = f_{yy}(x, y)$

Hessiano de una función

$$\text{Hess}\, f(x,y) = \begin{pmatrix} \partial_{xx} f(x,y) & \partial_{yx} f(x,y) \\ \partial_{xy} f(x,y) & \partial_{yy} f(x,y) \end{pmatrix}$$

El determinante Hessiano de $f(x,y)$ se define como

$$D(x,y) = \partial_{xx} f(x,y) \partial_{yy} f(x,y) - \partial_{xy} f(x,y) \partial_{yx} f(x,y).$$

Si las derivadas parciales mixtas $\partial_{xy} f(x,y),\ \partial_{yx} f(x,y)$ existen y son continuas, entonces

$$\partial_{xy} f(x,y) = \partial_{yx} f(x,y),$$

de manera que

$$D(x,y) = \partial_{xx} f(x,y) \partial_{yy} f(x,y) - \left(\partial_{xy} f(x,y)\right)^2.$$

[Clasificación de puntos críticos] Supongamos que todas las derivas de primer y segundo orden de $f(x,y)$ existe y que (x_0, y_0) es un punto crítico de $f(x,y)$. Entonces

- Si $D(x_0, y_0) < 0$, entonces (x_0, y_0) es un *punto de silla*.
- Si $D(x_0, y_0) > 0$ y $\partial_{xx} f(x_0, y_0) > 0$, entonces (x_0, y_0) es un *mínimo relativo*.
- Si $D(x_0, y_0) > 0$ y $\partial_{xx} f(x_0, y_0) < 0$, entonces (x_0, y_0) es un *máximo relativo*.

Si $D(x_0, y_0) = 0$, la información no es concluyente.

Clasifique los puntos críticos de $f(x,y) = x^2 + y^2$.

Puede ver el desarrollo completo del ejercicio en https://youtu.be/9Vz-qouiRPw.

Para encontrar los puntos críticos, puede este script.

Para evaluarlos en $D(x,y)$ y $\partial_{xx} f(x,y)$ puede utilizar este script.

Clasifique los puntos críticos de $f(x,y) = 12x - x^3 - 4y^2$.

Puede ver el desarrollo completo del ejercicio en https://youtu.be/oY3DjTSqado.

Para encontrar los puntos críticos puede usar este script.

Para evaluarlos en $D(x,y)$ y $\partial_{xx} f(x,y)$ puede utilizar este script.

Clasifique los puntos críticos de $f(x,y) = x^3 - y^3 + 6xy$.

Puede ver el desarrollo completo del ejercicio en https://youtu.be/oCk2O9SpJG4.

Para encontrar los puntos críticos puede usar este script.

Para evaluarlos en $D(x,y)$ y $\partial_{xx} f(x,y)$ puede usar este script.

Clasifique los puntos críticos de cada una de las siguientes funciones:

1. $f(x,y) = 5 - x^2 - y^2$
2. $f(x,y) = \frac{16}{x} + \frac{6}{y} + x^2 - 3y^2$

3. $f(x,y) = x^3 + y^2 - 6xy + 9x + 5y + 2$
4. $f(x,y) = (x^2 + 2y^2)e^{1-x^2-y^2}$

Puede verificar sus resultados, utilizando este este script.

Ecuaciones de primer orden

Fundamentos de Ecuaciones Diferenciales

Conceptos básicos

Definición Una *ecuación diferencial* es una ecuación que involucra derivadas o diferenciales de una o varias variables.

Si la ecuación sólo involucra derivadas respecto a una única variable independiente, diremos que es *ordinaria*. En otro caso, que es *parcial*.

Orden Si la ecuación involucra derivadas de orden n, pero no de orden más alto, diremos que la propia ecuación es de *orden* n.

$$\left(y''\right)^2 + 3x = 2\left(y'\right)^3$$

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = y^2$$

$$\frac{d^2Q}{dt^2} - 3\frac{dQ}{dt} + 2Q = 4\sin(2t)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x-y}$$

De manera equivalente

$$(x+y)dx + (y-x)dy = 0$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$$

Constantes arbitrarias

Una constante arbitraria es un valor que es independiente de las variables involucradas en la ecuación.

Generalmente las denotaremos con las primeras letras del alfabeto:

$$A, B, C, c_1, c_2, ...$$

En la ecuación

$$y = x^2 + c_1 x + c_2$$

los símbolos c_1, c_2 representan constantes arbitrarias.

La relación $y = Ae^{-4x+B}$ se puede reescribir como $y = Ce^{-4x}$. Por lo que sólo involucra una constante arbitraria.

Siempre reduciremos las ecuaciones al número mínimo de constantes arbitrarias, a las que llamaremos *esenciales*.

Soluciones

Una *solución de una ecuación diferencial* es una relación entre las variables que está libre de derivadas, y que satisface la ecuación diferencial en al menos un intervalo.

Una *solución general* de una ecuación diferencial de orden n es aquella que involucra n constantes arbitrarias esenciales.

$y = x^2 + c_1 x + c_2$ es una solución general de $y'' = 2$.

Una *solución particular* es aquella que se obtiene de una general, sustituyendo valores específicos en las constantes arbitrarias.

$y = x^2 - 3x + 2$ es una solución particular de $y'' = 2$.

Una *solución singular* es una aquella que no se puede obtener de la solución general sólo especificando valores para las constantes arbitrarias.

La solución general de $y = xy' - y'^2$ es $y = cx - c^2$.

Sin embargo, $y = \dfrac{x^2}{4}$ es una solución que no se puede obtener sustituyendo c. Por tanto, es una solución particular.

Ecuación diferencial de una familia de curvas

Una solución general de orden n tiene n parámetros (constantes arbitrarias esenciales) y por tanto, geométricamente representa una *familia de curvas* $n-$*paramétrica.*

De manera reciproca, una relación con n constantes arbitrarias (también llamada *primitiva*) tiene asociada una ecuación diferencial de orden n (de la cual es solución general), llamada la *ecuación diferencial de la familia.*

Ejemplos

Clasificación de ecuaciones diferenciales Clasifica cada una e las siguientes ecuaciones diferenciales enunciando su orden; sus variables dependientes e independientes; y si es ordinaria o parcial:

$$x^2y'' + xy' + \left(x^2 - n^2\right) y = 0$$

Solución. (I) Orden 2;

(II) variable dependiente: y;

(III) variable independiente: x;

(IV) ecuación ordinaria.

□

$$\frac{dx}{dy} = x^2 + y^2$$

Solución. (I) Orden 1;

(II) variable dependiente: x;

(III) variable independiente: y;

(IV) ordinaria.

□

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^2 + y^2}$$

Solución. (I) Orden 1;

(II) variable dependiente: y;

(III) variable independiente: x;

(IV) ordinaria.

□

$$\left(\frac{d^2u}{dt^2}\right)^3 + u^4 = 1$$

Solución. (I) Orden 2;

(II) variable dependiente: u;

(III) variable independiente: t;

(IV) ordinaria.

□

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = 2\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}$$

Solución. (I) Orden 2;

(II) variable dependiente: Y;

(III) variables independientes: x, t;

(IV) parcial.

□

$$\left(x^2 + 2y^2\right) dx + \left(3x^3 - 4y^2\right) dy = 0$$

Solución. (I) Orden 1;

(II) variable dependiente: y;

(III) variable independiente: x;

(IV) ordinaria.

□

Solución de ecuaciones diferenciales Verifica para cada ecuación, si la relación indicada es solución; y en ese caso, determina si es general.

$$\begin{cases} y' - x + y = 0 \\ y = Ce^{-x} + x - 1 \end{cases}$$

Solución. (I) $y' = -Ce^{-x} + 1$

(II) $y' - x + y = (-Ce^{-x} + 1) - x + (Ce^{-x} + x - 1) = 0$

(III) C es su único parámetro.

(IV) Por tanto y es solución general.

□

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2xy}{3y^2 - x^2} \\ x^2y - y^3 = c \end{cases}$$

Solución. (I) Derivando de forma implícita obtenemos

$$x^2y' + 2xy - 3y^2y' = 0$$

(II) Despejando y' obtenemos

$$y' = \frac{2xy}{3y^2 - x^2}$$

(III) Como C es el único parámetro, y es una solución general.

$\square$

$$\begin{cases} \dfrac{d^2I}{dt^2} + 2\dfrac{dI}{dt} - 3I = 2\cos(t) - 4\sin(t) \\ I = c_1e^t + c_2e^{-3t} + \sin(t) \end{cases}$$

Solución. (I) $\dfrac{dI}{dt} = c_1e^t - 3c_2e^{-3t} + \cos(t)$

(II) $\dfrac{d^2I}{dt^2} = c_1e^t + 9c_2e^{-3t} - \sin(t)$

(III)

$$\begin{aligned} &\left(c_1e^t + 9c_2e^{-3t} - \sin(t)\right) \\ +2&\left(c_1e^t - 3c_2e^{-3t} + \cos(t)\right) \\ -3&\left(c_1e^t + c_2e^{-3t} + \sin(t)\right) \\ &= 2\cos(t) - 4\sin(t) \end{aligned}$$

(IV) Como c_1, c_2 son parámetros, entonces I es una solución general.

$\square$

$$\begin{cases} x^3\left(\dfrac{d^2v}{dx^2}\right)^2 = 2v\dfrac{dv}{dx} \\ v = cx^2 \end{cases}$$

Solución. (I) $\dfrac{dv}{dx} = 2cx$

(II) $\dfrac{d^2v}{dx^2} = 2c$

(III) Sustituimos en el lado izquierdo

$$x^3\left(2c\right)^2 = 4c^2x^3$$

(IV) Sustituimos en el lado derecho

$$2\left(cx^2\right)\left(2cx\right) = 4c^2x^3$$

(V) Entonces v es solución, pero como la ecuación es de grado 2 y c es el único parámetro, no es general.

$\square$

Determine la solución particular de la ecuación diferencia del problema **??**, tal que satisface las condiciones

$$I(0) = 2$$
$$I'(0) = -5$$

Solución. (I) $I(t) = c_1e^t + c_2e^{-3t} + \sin(t)$

(II) $I(0) = c_1 + c_2 = 2$

(III) $I'(t) = c_1e^t - 3c_2e^{-3t} + \cos(t)$

(IV) $I'(0) = c_1 - 3c_2 + 1 = -5$

(V) $c_1 - 3c_2 = -6$

(VI) $c_1 = 0, c_2 = 1$

(VII) $I = 2e^{-3t} + \sin(t)$

□

Mostrar que la solución de problema de valor inicial

$$\begin{cases} Q''(t) + 4Q'(t) + 20Q(t) = 16e^{-2t} & t \geq 0 \\ Q(0) = 2, Q'(0) = 0 \end{cases}$$

is

$$Q(t) = e^{-2t}\left(1 + \sin(4t) + \cos(4t)\right)$$

Solución

$$\begin{aligned} Q'(t) &= e^{-2t}\left(4\cos(4t) - 4\sin(4t)\right) - 2e^{-2t}\left(1 + \sin(4t) + \cos(4t)\right) \\ &= e^{-2t}\left(2\cos(4t) - 6\sin(4t) - 2\right) \end{aligned}$$

Solución

$$\begin{aligned} Q''(t) &= e^{-2t}\left(-8\sin(4t) - 24\cos(4t)\right) - 2e^{-2t}\left(2\cos(4t) - 6\sin(4t) - 2\right) \\ &= e^{-2t}\left(4\sin(4t) - 28\cos(4t) + 4\right) \end{aligned}$$

Solución

$$\begin{aligned} Q''(t) + 4Q'(t) + 20Q(t) \\ = e^{-2t}\left(4\sin(4t) - 28\cos(4t) + 4\right) \\ +4e^{-2t}\left(2\cos(4t) - 6\sin(4t) - 2\right) \\ +20e^{-2t}\left(1 + \sin(4t) + \cos(4t)\right) \\ = 16e^{-2t} \end{aligned}$$

Determine gráficamente una relación entre la solución general

$$y = cx - c^2$$

y la solución singular $y = \dfrac{x^2}{4}$ de la ecuación diferencial

$$y = xy' - y^2$$

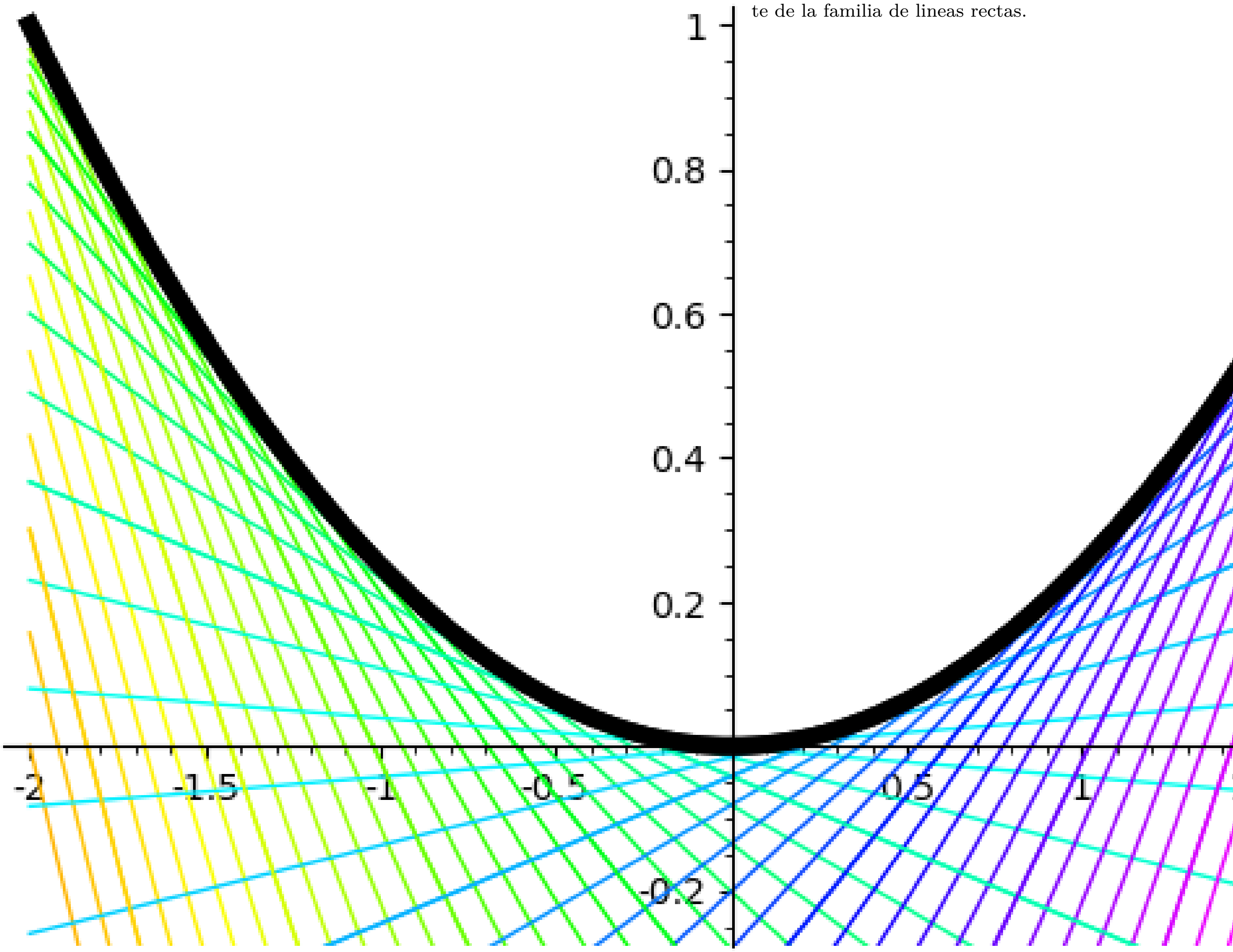


Figura 31: La parábola es la envolvente de la familia de lineas rectas.

La envolvente de una familia de curvas

$$G(x, y, c) = 0,$$

si es que existe, puede encontrarse resolviendo simultaneamente las ecuaciones

$$\begin{cases} \partial_c G(x,y,c) = 0 \\ G(x,y,c) = 0 \end{cases}$$

Solución

(I) Calculamos la parcial $\partial_c G(x,y,c) = -x + 2c$

(II) Plantemos las ecuaciones

$$\begin{aligned} -x + 2c &= 0 \\ y - cx + c^2 &= 0 \end{aligned}$$

(III) Resolvemos las ecuaciones y obtenemos la solución paramética

$$x = 2c, y = c^2$$

(IV) La solución se puede reescribir como

$$y = \frac{x^2}{4}$$

1. Trace la gráfica de varios miembros de la familia uniparamétrica

$$\left\{ y = cx^2 \middle| c \in \mathbb{R} \right\}$$

2. Obtenga la ecuación diferencial de esta familia

Solución: Inciso (a)
Solución: Inciso (b)

(I) $y = cx^3 \to y' = 3cx^2$

(II) $c = \dfrac{y}{x^3}$

(III) $y' = 3\left(\dfrac{y}{x^3}\right)x^2$

(IV) $y' = \dfrac{3y}{x}$

Encuentre una ecuación diferencial para la familia biparamétrica de cónicas

$$ax^2 + by^2 = 1$$

Solución. Supongamos que $b \neq 0$.

(I) $2ax + 2byy' = 0$

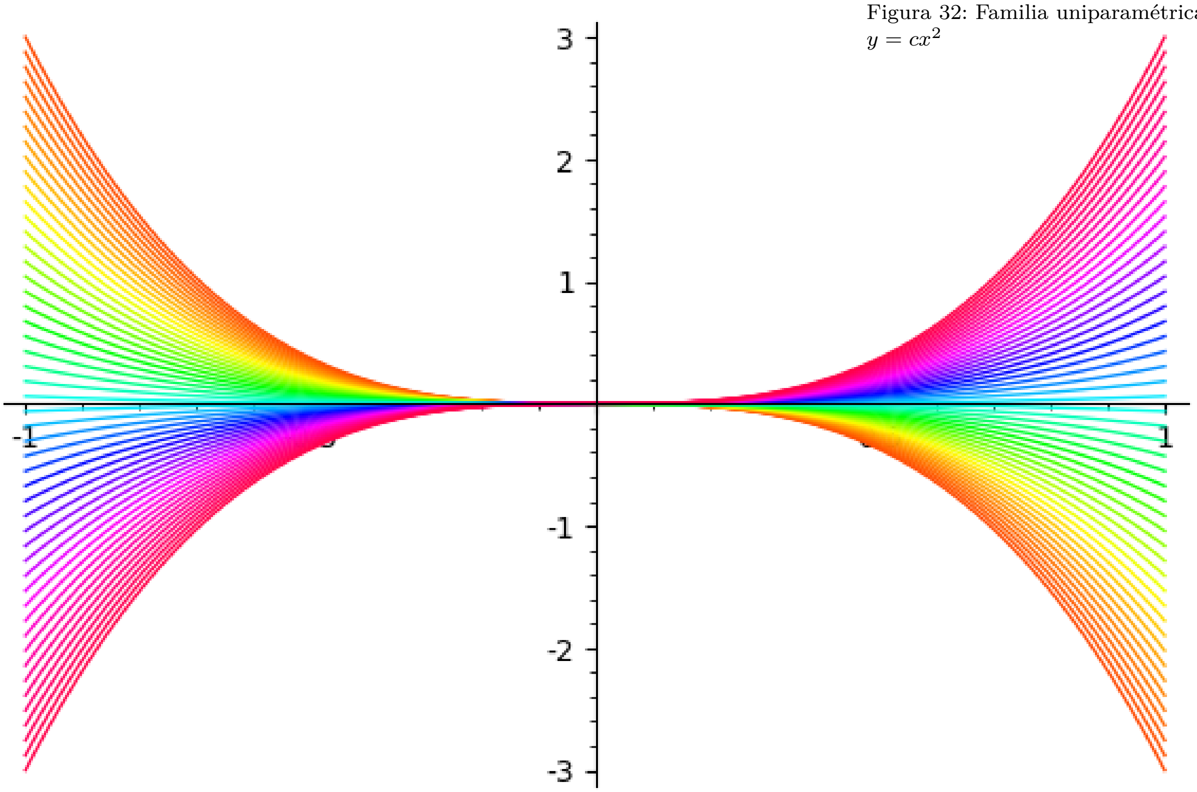


Figura 32: Familia uniparamétrica $y = cx^2$

(II) $a = \dfrac{-byy'}{x}$

(III) $\left(-\dfrac{byy'}{x}\right) x^2 + by^2 = 1$

(IV) $-bxyy' + by^2 = 1$

(V) $-b\left(xyy'' + xy'^2 + yy'\right) + 2byy' = 0$

(VI) $xyy'' + xy'^2 - yy' = 0$

$\square$

1. Encuentra una solución general para la ecuación diferencial $\dfrac{dy}{dx} = 3x^2$
2. Traza la gráfica de las soluciones obtenidas en el inciso (a)
3. Determina la ecuación de la curva particular en el inciso (b), que pasa por el punto $(1, 3)$

Solución: Inciso (a)

(I) $dy = 3x^2 dx$

(II) $\displaystyle\int dy = \int 3x^2 dx$

(III) $y = x^3 + c$

Solución: Inciso (b)
Inciso (c)

(I) Como la curva pasa por $(1, 3)$, entonces

$$x = 1 \to y = 3$$

(II)

$$3 = 1^3 + c \to c = 2$$

(III) $y = x^3 + 2$

Resuelva el problema de condición inicial

$$\begin{cases} y'' = 3x - 2 \\ y(0) = 2 \\ y'(1) = -3 \end{cases}$$

Solución. (I) $y' = \dfrac{3x^2}{2} - 2x + c_1$

(II) $y'(1) = -3 \to -3 = \dfrac{3}{2} - 2 + c_1 \to c_1 = -\dfrac{5}{2}$

(III) $y = \dfrac{x^3}{2} - x^2 - \dfrac{5x}{2} + c_2$

(IV) $y(0) = 2 \to c_2 = 2 \to y = \dfrac{x^3}{2} - x^2 - \dfrac{5x}{2} + 2$

$\square$

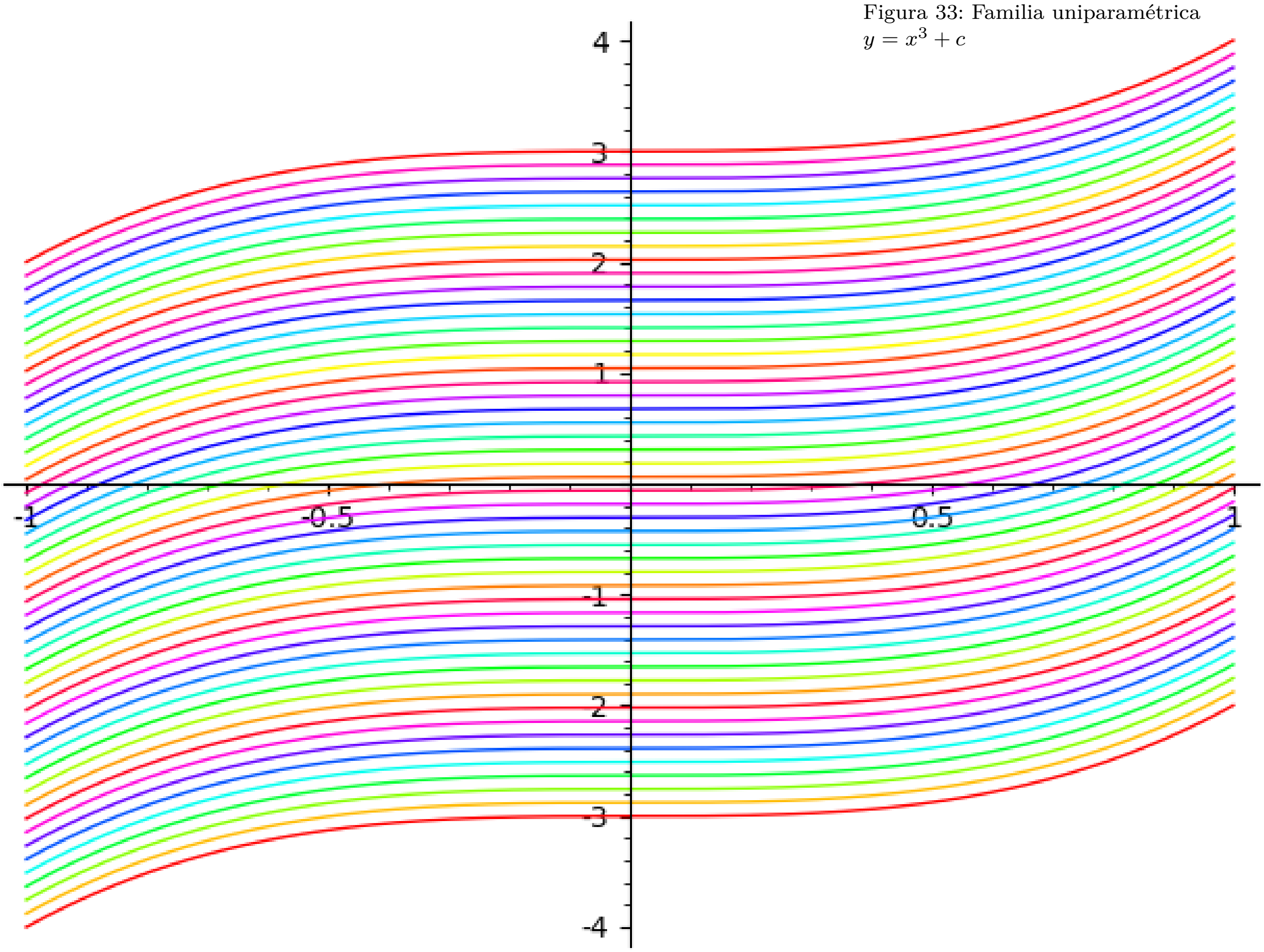


Figura 33: Familia uniparamétrica $y = x^3 + c$

Ecuaciones Especiales de Primer Orden

Cualquier ecuación diferencial de primer orden de la *forma normal*

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

puede ser reescrita en la *forma diferencial*

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

y viceversa.

Separación de variables Una ecuación es *separable* si se puede escribir en la forma.

$$f_1(x)g_1(y)dx + f_2(x)g_2(y)dy = 0$$

En ese caso, su solución está dada por

$$\int \frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx + \int \frac{g_2(y)}{g_1(y)}dy = c$$

siempre que $g_1(y)f_2(x) \neq 0$.

Resuelve la ecuación diferencial

$$xdy - ydx = 0$$

Ecuaciones exactas Una ecuación

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

es *exacta* si existe una función diferenciable $U : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = dU(x, y) = 0$$

En ese caso, la solución está dada por

$$U(x, y) = c$$

Un criterio para determinar si una ecuación es exacta es verificar que

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

Determina si la ecuación

$$xdy - ydx = 0$$

es exacta.

De manera equivalente, podemos encontrar la solución de la siguiente manera

$$\int M\partial x + \int \left(N - \frac{\partial}{\partial y}\int M\partial x\right)dy = c$$

donde ∂x indica que la integración es realizada únicamente respecto a x, manteniendo y constante.

Demuestra que la ecuación

$$\frac{xdy - ydx}{x^2} = 0$$

es exacta y resuélvela.

Factor Integrante Cuando una ecuación no es exacta, en ocasiones se puede encontrar de manera explícita una función $\mu : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ llamada *factor integrante* tal que

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu M) = \frac{\partial}{\partial x}(\mu N)$$

y por tanto

$$\mu M dx + \mu N dy = 0$$

es exacta.

Ecuaciones lineales

Diremos que una ecuación es lineal si se puede reescribir en la forma:

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)$$

En este caso, un factor integrantes está dado por

$$\mu = e^{\int p(x)dx}$$

y la ecuación se puede reescribir como

$$\frac{d}{dx}(\mu y) = \mu q(x)$$

Entonces,

$$\mu y = \int \mu q(x)dx + c$$

y la solución está dada por

$$\begin{aligned} y &= e^{-\int pdx}\left(\int e^{\int pdx} q(x)dx + c\right) \\ &= e^{-\int pdx}\int e^{\int pdx} q(x)dx + ce^{-\int pdx} \end{aligned}$$

Reescribe la ecuación

$$xdy - ydx = 0$$

en forma lineal; calcula el factor integrante y resuelve.

$$(a) \quad \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2} = d\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$(b) \quad \frac{x\,dy - y\,dx}{y^2} = -d\left(\frac{x}{y}\right)$$

$$(c) \quad \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2} = d\left(\tan^{-1}\frac{y}{x}\right)$$

$$(d) \quad \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2 - y^2} = \frac{1}{2}\,d\left\{\ln\frac{x - y}{x + y}\right\}$$

$$(e) \quad \frac{x\,dx + y\,dy}{x^2 + y^2} = \tfrac{1}{2}d\{\ln(x^2 + y^2)\}$$

Figura 34: Algunos ejemplos de factores integrantes.

Ecuaciones homogéneas de orden cero

Diremos que una ecuación diferencial es *homogénea de orden cero* si se puede reescribir como

$$\frac{dy}{dx} = F\left(\frac{y}{x}\right)$$

Definimos la variable dependiente $\nu = \frac{y}{x}$, de manera que $y = \nu x$.

Entonces la ecuación diferencial se puede reescribir como

$$v + x\frac{d\nu}{dx} = F(\nu)$$

o de manera equivalente

$$xd\nu + (F(\nu) - v)\, dx = 0.$$

Entonces tiene su solución está dada por

$$\ln|x| = \int \frac{d\nu}{F(\nu) - \nu} + c$$

Reescriba la ecuación

$$xdy - ydx = 0$$

como una ecuación homogénea de orden cero y resuelva.

Ecuaciones de Bernoulli

Diremos que una ecuación es de Bernoulli si se puede reescribir en la forma

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)y^n$$

siempre que $n \neq 0, 1$

En ese caso, hacemos la sustitución $\nu = y^{1-n}$ y la ecuación se reduce a una ecuación lineal, cuya solución está dada por

$$\nu e^{(1-n)\int pdx} = (1-n)\int qe^{(1-n)\int pdx} + c$$

(I) Si $n = 0$, la ecuación ya es lineal sin necesidad de hacer sustitución alguna.

(II) Si $n = 1$, la ecuación se puede reescribir como separable.

Resuelve la ecuación

$$x\frac{dy}{dx} + y = xy^3$$

Ecuaciones solubles

Diremos que una ecuación diferencial es soluble para y si

$$y = g\left(x, p\right)$$

donde $p = y'$.

En ese caso,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dg}{dx} = \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial x}$$

o de manera equivalente

$$p = \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial x}$$

Resolvemos la ecuación anterior para p

$$G\left(x, p, c\right) = 0$$

y sustituimos en $y = g(x, p)$.

Resuelve la ecuación

$$xp^2 + 2px - y = 0$$

donde $p = y'$.

Ecuación de Clairaut

Diremos que una ecuación es de Clairaut si se puede reescribir como

$$y = px + F(p)$$

donde $p = y'$

Este es un caso especial del tipo anterior con solución

$$y = cx + F(c)$$

Resuelve la ecuación

$$y = px \pm \sqrt{p^2 + 1}$$

donde $p = y'$.

Reducción de orden

Si una ecuación diferencial es de orden $m > 1$, pero hace falta de forma explícita la variable dependiente y, entonces se puede reducir de orden con la sustitución $y' = p$.

Resuelve la ecuación

$$y'' + 2y' = 4x$$

Resuelve la ecuación

$$1 + yy'' + y'^2 = 0$$

con la reducción de orden $y' = p$.

Ejemplos

(I) Encuentra la solución general de

$$\left(4x + xy^2\right) dx + \left(y + x^2 y\right) dy = 0$$

(II) Encuentra la solución particular para $y(1) = 2$.

Resuelve el problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} + 3y = 8 \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

Resuelve la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = \sec(y)\tan(x)$$

Aplicaciones de Ecuaciones Diferenciales de Primer Orden

Crecimiento y decaimiento

Sea $N(t)$ la cantidad de algún recurso, sustancia o población que (de-)crece respecto del tiempo.

En este caso $N'(t)$ la tasa de cambio y supondremos que es proporcional a $N(t)$:

$$\frac{dN}{dt} = rN,$$

donde r es la constante de proporcionalidad.

Una persona deposita $\$20,000$ en una cuenta de ahorros que paga el $5\,\%$ de interés anual, compuesto continuamente. Encuentre

1. el monto en la cuenta después de tres años;
2. el tiempo requerido para que la cuenta al doble de su valor, sin contar retiros ni depósitos extras.

Ejemplos de enfriamiento

La ley de enfriamiento de Newton establece que *la tasa de cambio de la temperatura de un cuerpo (respecto del tiempo) es proporcional a la diferencia entre el cuerpo y el medio circundante:*

$$\frac{dT}{dt} = -k\left(T - T_m\right)$$

donde k es una constante (positiva) de proporcionalidad; T es la temperatura del cuerpo; y T_m es la temperatura del medio.

Un cuerpo a una temperatura de $50^o F$ está colocado en el exterior donde la temperatura es de $100^o F$. Si después de 5 minutos la temperatura del cuerpo es $60^o F$, encontrar:

1. cuanto le tomará al cuerpo alcanzar una temperatura de 75^oF y
2. la temperatura del cuerpo después de 20 minutos.

Caída de cuerpos

[Segunda ley de Newton] La fuerza neta que actúa en un cuerpo es igual a la razón cambio respecto del tiempo del momento del cuerpo; o para masa constante

$$F = m\frac{dv}{dt}$$

donde F es la fuerza neta en el cuerpo y v es la velocidad del mismo, en el tiempo t.

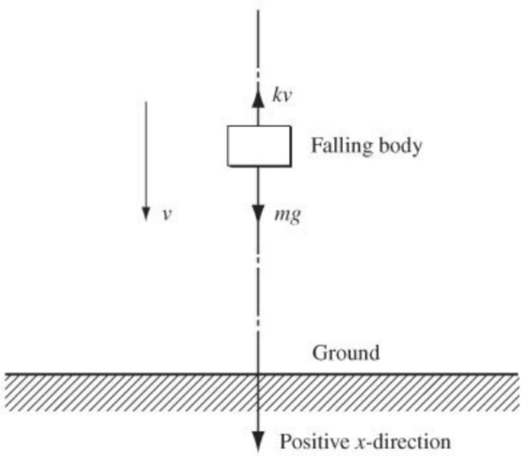


Fig. 7-1

En nuestro modelo, $F = mg - kv$, donde m es la masa, g es la aceleración debida a la gravedad y $k > 0$ es una constante de proporcionalidad debida a la resistencia del aire.

De manera que obtenemos la ecuación diferencial $mg - kv = m\dfrac{dv}{dt}$, o de manera equivalente

$$\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m}v = g.$$

Un cuerpo que pesa `64lbs` es dejado caer desde una altura de `100fts` con velocidad inicial de `10ft/sec.`

Suponga que la resistencia del aire es proporcional a la velocidad del cuerpo. Se sabe que la velocidad límite del cuerpo es de `128ft/sec`. Encuentre:

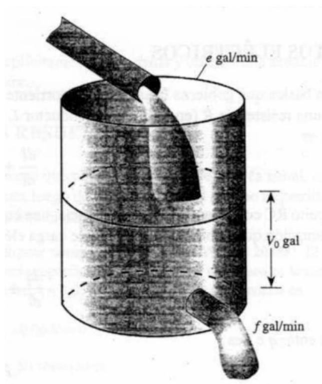
1. una expresión para la velocidad del cuerpo en cualquier tiempo t, y
2. una expresión para la posición del cuerpo en cualquier tiempo.
3. Determine el instante en que choca contra el suelo.

Ejemplos de Disolución

Consideremos un tanque que inicialmente contiene V_0 litros de salmuera, que contiene Q_0 kgs de sal.

Otra solución de salmuera, que contiene b kgs por litro se vierte en el tanque a una tasa o ritmo de e litros/minuto en tanto que simultáneamente, la solución bien agitada abandona el tanque a un ritmo de f litros/minuto.

El problema es encontrar la cantidad de sal en el tanque en respecto del tiempo t.



Por Q denotaremos la cantidad (en kilos) de sal que se encuentra en el tanque en en el tiempo t.

El volumen de salmuera al tiempo t es

$$V(t) = V_0 + e \times t - f \times t.$$

La concentración de sal en el tanque en un momento dado es

$$\frac{Q(t)}{V(t)},$$

de lo que se deduce que la sal sale del tanque a una tasa de

$$f \times \left(\frac{Q(t)}{V(t)}\right) \texttt{kgs/min.}$$

De este modo,

$$\frac{dQ}{dt} = be - f \times \left(\frac{Q}{V_0 + (e-f)t}\right),$$

o de manera equivalente

$$\frac{dQ}{dt} + f \times \left(\frac{Q}{V_0 + (e-f) \times t}\right) = be.$$

Un tanque contiene inicialmente 100 litros de una solución de salmuera con 1 kilo de sal. En $t = 0$ se vierte otra solución de salmuera que contiene 1 kilo de sal por litro a un ritmo de 3 litros/minuto, en tanto que la salmuera bien agitada abandona el tanque al mismo ritmo. Encuentre

1. la cantidad de sal en el tanque en cualquier tiempo t, y

2. el tiempo en el cual la mezcla en el tanque contiene 2 kilos de sal.

Un tanque de 50 lts contiene inicialmente 10 litros de agua fresca. Al tiempo $t = 0$ se vierte al tanque una solución de salmuera que contiene 1 kilo de sal por litro a un ritmo 4 lts/min, mientras que la mezcla bien agitada abandona el tanque a un ritmo de 2 lts/min. Encuentre

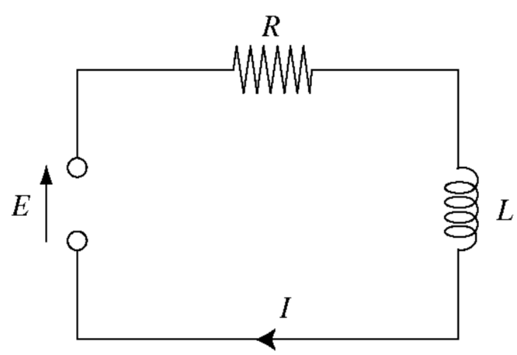
1. la cantidad de tiempo requerido para que ocurra un derrame y;

2. la cantidad de sal en el tanque al momento del derrame.

Circuitos Eléctricos

La ecuación básica que gobierna la cantidad de corriente I (en amperios) en un circuito RL simple (fig.) consiste en una resistencia R (en ohmios), un inductor L (en henrios) y una fuerza electromotriz (abreviado fem)E (en voltios) es

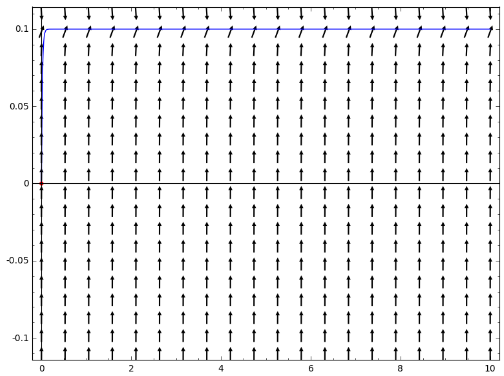
$$\frac{dI}{dt} + \frac{R}{L} I = \frac{E}{L}.$$

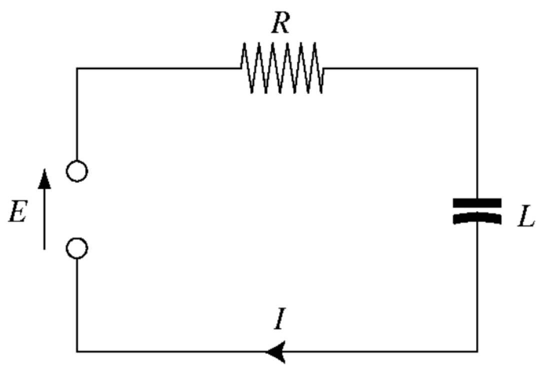


Un circuito RL tiene una fem de 5 voltios, una resistencia de 50 ohmios, una inductancia de 1 henrio y no tiene corriente inicial. Encuentre la corriente de estado estacionario, i.e., cuando $t \to \infty$.

Para un circuito RC consistente en una resistencia, una capacidad C (en faradios), una fem y sin inductancia (fig.), la ecuación que gobierna la cantidad de carga eléctrica q (en coulombios) sobre el capacitor es

$$\frac{dq}{dt} + \frac{1}{R \cdot C} q = \frac{E}{R}.$$





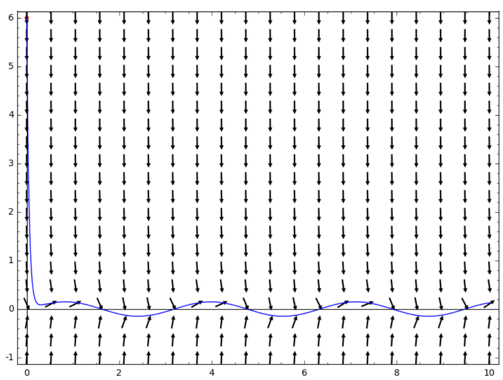
La relación entre q e I es

$$I = \frac{dq}{dt}.$$

Un circuito `RC` tiene una `fem` dada por $400\cos(2t)$, una resistencia de `100 ohms` y una capacitancia de `1/100 faradios`. No existe carga inicial en el capacitor. Encuentre la corriente del circuito en función del tiempo, y determine su comportamiento asintótico.

Un circuito RL tiene una fem (en voltios) dada por $3sin(2t)$, una resistencia de 10 ohmios, una inductancia de 0.5 henrios y una corriente inicial de 6 amperios.

Encuentre la corriente de estado estacionario.



6
5
4
3
2
1
0
-1
0
2
4
6
8
10

Espacios Vectoriales

Definición y ejemplos

Hasta ahora hemos considerado a los vectores como elementos de un espacio
$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, ..., x_n | x_k \in \mathbb{R})\},$$
por ejemplo vectores en el plano $\mathbb{R}^2 = \{(x, y)|x, y \in \mathbb{R}\}$ o en el espacio $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z)|x, y, z \in \mathbb{R}\}$. En cada caso, teníamos una suma entre vectores y una multiplicación por *escalares,* es decir, número reales.

Si $u = (u_1, u_2)$ y $v = (v_1, v_2)$ son vectores en $\mathbb{R}^2$, y $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces
$$(u_1, u_2) + (v_1, v_2) = (u_1 + v_1, u_2 + v_2),$$
mientras que
$$\alpha(u_1, u_2) = (\alpha u_1, \alpha u_2).$$

En este caso, la suma tiene las siguientes propiedades:

1. (Cerradura) $u + v = (u_1, u_2) + (v_1, v_2) = (u_1 + v_1, u_2 + v_2)$, es un vector en $\mathbb{R}^2$,
2. (Asociatividad) Si $w = (w_1, w_2)$ es otro vector en $\mathbb{R}^2$, entonces
$$\begin{aligned}(u + v) + w &= ((u_1, u_2) + (v_1, v_2)) + (w_1, w_2)\\ &= (u_1, u_2) + ((v_1, v_2) + (w_1, w_2))\\ &= u + (v + w),\end{aligned}$$
3. (Conmutatividad) $u + v = (u_1 + v_1, u_2 + v_2) = (v_1 + u_1, v_2 + u_2) = v + u$
4. (Existencia de un elemento neutro) $u + \vec{0} = (u_1, u_2) + (0, 0) = (u_1, u_2) = u$, y de la misma forma $\vec{0} + u = u$.
5. (Inversos aditivos) Para $u = (u_1, u_2)$, definimos
$$-u = (-u_1, -u_2),$$
y este elemento satisface que
$$u + (-u) = (-u) + u = 0.$$

La multiplicación por escalares satisface las siguientes propiedades

1. αu es de nuevo un vector en $\mathbb{R}^2$,
2. $1u = 1(u_1, u_2) = (1 \cdot u_1, 1 \cdot u_2) = u$,
3. $(\alpha\beta)u = \alpha(\beta u_1, \beta u_2) = \alpha(\beta u)$.

Finalmente, la suma de vectores y la multiplicación por escalares estan relacionadas por las siguiente leyes distributivas.

1. $(\alpha + \beta)u = ((\alpha + \beta)u_1, (\alpha + \beta)u_2) = (\alpha u_1, \alpha u_2) + (\beta u_1, \beta u_2) = \alpha u + \beta u$,
2. $\alpha(u + v) = \alpha(u_1 + v_1, u_2 + v_2) = (\alpha(u_1 + v_1), \alpha(u_2 + v_2)) = \alpha(u_1, u_2) + \alpha(v_1, v_2) = \alpha u + \alpha v$.

[†] Verificar que las mismas propiedades se cumplen para $\mathbb{R}^3$, usando la suma de vectores y multiplicación por escalares conocida.

Estas propiedades se cumplen para muchos y muy diferentes conjuntos, donde tenemos una operación suma entre sus elementos y podemos definir una multiplicación por números reales. De hecho, estos conjuntos son los objetos de estudio en el álgebra lineal.

Sea V un conjunto, con una operación $+ : V \times V \to V$ y una operación $\cdot : \mathbb{R} \times V \to V$. Decimos que V es un *espacio vectorial (sobre* $\mathbb{R}$*)* si para todo $u, v, w \in V$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ se cumplen las siguientes propiedades.

1. (Cerradura)$u + v \in V$,
2. (Asociatividad)$(u + v) + w = u + (v + w)$,
3. (Conmutatividad)$u + v = v + u$,
4. (Elemento neutro) Existe $0 \in V$, tal que para todo $u \in V : u + 0 = 0 + u = u$,
5. (Elementos inversos) Para todo $u \in V$, existe $-u \in V$, tal que $u + (-u) = (-u) + u = 0$.
6. $\alpha u \in V$,
7. $1u = u$,
8. $(\alpha\beta)u = \alpha(\beta u)$,
9. $(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u$,
10. $\alpha(u, v) = \alpha u + \alpha v$.

A los elementos del espacio vectorial V les llamamos *vectores.*

Cuando V es un espacio vectorial, con operación suma $+ : V \times V \to V$ y multiplicación por escalares $\cdot : \mathbb{R} \to V \to V$, por brevedad, decimos que $(V, +, \cdot)$ es un espacio vectorial.

Ejemplos

[†] Demuestre usando las propiedades anteriores, que en cualquier espacio vectorial se cumplen las siguientes propiedades.

1. $0u = \alpha 0 = 0$. (Note que el cero escrito a la izquierda denota el cero como número, mientras que escrito a la izquierda o solo, denota el elemento neutro del espacio vectorial.)

2. $-u = (-1)u$. *Sugerencia: Verifique que* $u + (-1)u = 0$.

3. Si $\alpha u = 0$, entonces o bien $\alpha = 0$ o $u = 0$.

4. El elemento neutro 0 es único.

5. Para cada vector u, su inverso aditivo $-u$ es único.

Compruebe que los siguientes conjuntos son espacios vectoriales (reales), con las operaciones suma y multiplicación por escalar usuales.

1. $\{0\}$.

2. $\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y = mx\right\}$ para $m \in \mathbb{R}$ fijo.

3. $\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | ax + by + cz = 0\right\}$ para $a, b, c \in \mathbb{R}$.

4. $\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | (a, b, c) \cdot (x, y, z) = 0\right\}$ para $a, b, c \in \mathbb{R}$.

5. $\{f | f : S \to \mathbb{R}\}$, donde S puede ser cualquier conjunto fijos.

6. $\mathbb{R}^{m \times n}$, es decir, el conjunto de matrices $m \times n$ con entradas reales.

7. El espacio de polinómios con coeficientes reales.

8. El espacio de polinómios con coeficientes reales de grado $\leq n$, para $n \in \mathbb{N}$ fijo.

9. $C[a, b]$, el espacio de funciones continuas en el intervalo $[a, b]$.

10. El conjunto de número reales *positivos* con las operaciones $u \oplus v := u, v$ y $\alpha \cdot u := u^{\alpha}$.

Considere la ecuación diferencial de segundo orden homogénea

$$y''(x) + a(x)y' + b(x)y(x) = 0$$

donde a, b son funciones continuas. Demuestre que el conjunto de soluciones de la ecuación diferencial es un espacio vectorial bajo las reglas usuales para la suma de funciones y multiplicación por escalares.

Subespacios vectoriales

$\mathbb{R}^2$ es un espacio vectorial con las operaciones

$$(u_1, u_2) + (v_1, v_2) = (u_1 + v_1, u_2 + v_2)$$

y

$$\alpha(u_1, u_2) = (\alpha u_1, \alpha u_2).$$

En la sección anterior consideramos el subjunto

$$L_c = \{(u_1, u_2) | u_2 = cu_1\} \subset \mathbb{R}^2$$

para c una pendiente fija, y verificamos que en efecto, con las mismas operaciones es un espacio vectorial.

Decimos entonces que L_c es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$.

Si $(V, +, \cdot)$ es un espacio vectorial y $W \subset V$ es también espacio vectorial, con las mismas operaciones $+, \cdot$ decirmos que W es un subespacio vectorial de V, y podemos escribir $W < V$.

En principio, si $W < V$, tendríamos que verificar todos loa axiomas de espacio vectorial para $(W, +, \cdot)$. Sin embargo, si en el espacio V, la suma es asociativa y conmutativa, también lo será en W. De igual manera, el elemento neutro $1 \in V$ de la multiplicación por escalares es el mismo en W, y se sigue cumpliendo la asociatividad de la multiplicación por escalares y las leyes de distribución.

Entonces, basta demostrar que se cumplen los restantes axiomas, a saber:

1. Si $u, v \in W$, entonces $u + v \in W$.
2. Si $\alpha \in \mathbb{R}, v \in W$, entonces $\alpha v \in W$.
3. $0 \in W$.
4. Si $u \in W$, entonces $-u \in W$.

Sin embargo, los dos últimos incisos se siguen del segundo. En efecto, si escogemos $\alpha = 0$ y cualquier $u \in W$, entonces

$$0 = 0 \cdot u \in W.$$

De igual manera, para cualquier $u \in W$, si escogemos $\alpha = -1$, entonces $-u = (-1)u \in W$.

Por último, verificar los dos axiomas restantes es equivalente a verificar que para todo $\alpha \in \mathbb{R}, u, v \in W$,

$$\alpha u + v \in W.$$

Si $W \subset V$, entonces

$$W < V \iff \forall \alpha \in \mathbb{R}, u, v \in W, \alpha u + v \in W.$$

Todo $W < V$ contiene a $0 \in V$.

Si $W < V$, pero $W \neq \{0\}$ y $W \neq V$, entonces decimos que W es un subespacio (vectorial) propio.

Sean $u, v_1, ..., v_k$ vectores en un espacio vectorial V. Decimos que u es combinación lineal de $v_1, ..., v_k$ si existen escalares $\alpha_1, ..., \alpha_k \in \mathbb{R}$ tales que:

$$u = \alpha_1 v_1 + ...\alpha_k v_k.$$

Sea V un espacio vectorial. El subespacio generado por un subconjunto $S = \{v_1, ..., v_k\} \subset V$ se define como

$$\text{gen}\,(S) = \{\alpha_1 v_k, ..., \alpha_k v_k | \alpha_1, ..., \alpha_k \in \mathbb{R}\}\,,$$

es decir, el conjunto de todas las combinaciones lineales de $v_1, ..., v_k$.

gen $(S) < V$.

$u = (2, 0, 2)$ es combinación lineal de $v_1 = (1, 0, 1)$ y $v_2 = (0, 1, 1)$ porque $u = 2v_1 - v_2$.

De hecho,

$$\text{gen}\,(v_1, v_2) = \{(a, b, a + b) | a, b \in \mathbb{R}\} < \mathbb{R}^3$$

es el plano que contiene a estos dos vectores.

$(-1, -1, 1) \notin \text{gen}\,(v_1, v_2)$, porque no vive en este plano.

Ejemplos

¿Cuál de los siguientes conjuntos de vectores

$$u = (u_1, u_2, u_3)$$

en $\mathbb{R}^3$ son subespacios de $\mathbb{R}^3$?

1. $\{u | u_1 \geq 0\}$
2. $\{u | u_1 + 3u_2 = u_3\}$
3. $\{u | u_2 = u_1^2\}$
4. $\{u | u_1 u_2 = 0\}$
5. $\{u | a_2 \text{ es racional}\}$

Sea V el espacio vectorial (real) de todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. ¿Cuales de los siguientes conjuntos son subespacios de V?

1. todas las funciones f tales que $f(x^2) = f^2(x)$
2. todas las funciones f tales que $f(0) = f(1)$
3. todas las funciones f tales que $f(3) = 1 + f(-5)$
4. todas las funciones f tales que $f(-1) = 0$

Sea W el conjunto de todos los vectores $(x_1, ..., x_5)$ que satisfacen

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + \frac{4}{3}x_3 - x_4 &= 0 \\ x_1 + \frac{2}{3}x_3 - x_5 &= 0 \\ 9x_1 - 3x_2 + 6x_3 - 3x_4 - 3x_5 &= 0. \end{aligned}$$

Mostrar que W es subespacio vectorial de $\mathbb{R}^5$.

[†]

1. Verificar que si $U, W < V$, entonces $U \cap W < V$.

2. Demostrar que si $U = \{u_1, ..., u_m\}$ y $W = \{w_1, ..., w_m\}$, entonces

$$U \cap W = \text{gen}\,(u_1, ..., u_n, w_1, ..., w_m)\,.$$

[†]

- Sean $u, v \in \mathbb{R}^2$. Mostrar que

$$W = \{\alpha u + \beta v | \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} < \mathbb{R}^2.$$

- Mostrar que si u, v no son paralelos, entonces para cualquier $w \in \mathbb{R}^2$, podemos encontrar $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ de manera que $w = \alpha u + \beta v$.

[†] Sea A una matriz $m \times n$ con entradas reales. Demostrar que el conjunto de todas los vectores columna u de longitud n, tales que $Au = 0$ es un subespacio vectorial de todos los vectores columna $\mathbb{R}^n$.

Transformaciones lineales

Definición y ejemplos

Sean V, W espacios vectoriales. Decimos que $T : V \to W$ es una *transformación lineal* si para todos $\alpha \in \mathbb{R}, u, v \in V$ se cumple

1. $T(u + v) = T(u) + T(v)$ (T abre sumas)

2. $T(\alpha u) = \alpha T(u)$ (T saca escalares)

o de manera equivalente

$$T(\alpha u + v) = \alpha T(u) + T(v),$$

es decir, T *respeta la estructura de espacio vectorial.*

En el caso $V = W$, decimos que $T : V \to V$ es un operador y al conjunto de operadores en V lo denotamos por $L(V)$. En el caso $W = \mathbb{R}$, decimos que $T : V \to \mathbb{R}$ es un funcional en V.

Sea $a = [a_1, ..., a_n] \in \mathbb{R}^n$ fijo y definamos $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $T(u) = a \cdot u$. Entonces, T es una transformación lineal.

Sea $A = \begin{bmatrix} a_{ij} \end{bmatrix}$ una matriz de dimensión $n \times m$, donde n indica el número de columnas y m el de renglones.

Si definimos $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $T(u) = Au$, entonces T es una tranformación lineal. En otras palabras, cada matriz define una transformación lineal. Lo inverso también es cierto.

Sea

$$e_k = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

el vector columna con un 1 en la $k-$ésima posición y ceros en el resto, y sea $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una transformación lineal. Entonces, $T(e_k) \in \mathbb{R}^m$ y digamos que es de la forma

$$T(e_k) = \begin{bmatrix} a_{1k} \\ \vdots \\ a_{mk} \end{bmatrix}.$$

Si definimos $A = [a_{ij}] \in M_{mn}$ entonces $T(e_k) = Ae_k$, $k = 1, ..., n$. Por linealidad tanto de T como de A, obtenemos que $T(x) = Ax$, para todo vector $x \in \mathbb{R}^n$.

Las siguientes transformaciones son lineales:

- $T : C^1[0,1] \to C^0[0,1]$,
$$T(f)(x) = f'(x).$$
- $T : C^0[0,1] \to \mathbb{R}$,
$$T(f) = \int_0^1 f(t)dt.$$
- $T : C^0[0,1] \to C^1[0,1]$,
$$T(f)(x) = C + \int_0^x f(t)dt,$$

donde $x \in [0,1]$ y $C \in \mathbb{R}$ es alguna constante.

Indique si la siguiente transformación $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ es lineal y de ser así, encuentre su representación matricial.

$$T \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + 2y \\ z - y \\ 2x + 7y - 3z \end{bmatrix}$$

La prueba de que la transformación es lineal se deja al lector. Ahora bien,

$$T \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, T \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 7 \end{bmatrix}, T \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto, la representación matricial de T esta dada por

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 7 & -3 \end{bmatrix}$$

Operadores en $\mathbb{R}^n$

Sean $T, S \in L(\mathbb{R}^n)$. La composición TS, es decir, $TS(x) = T(S(x))$ es de nuevo un operador y de hecho, si $B = [b_{ij}]$ es la matriz asociada a T como en el ejemplo y $A = [A_{ij}]$ la asociada a S, entonces la matriz asociada a TS es $C = [c_{ij}]$ conjunto

$$c_{ij} = \sum_{k}^{n} b_{ik} a_{kj}.$$

Decimos que $C = BA$ es el producto de de B con A (es este orden), y esta composicion es asociativa.

El operador de T con S suma esta definido como $(T + S)(u) = T(u) + S(u)$, y de hecho tiene asociada la matriz

$$\left[b_{ij} + a_{ij} \right].$$

Dos operadores especiales en R^n son la *transformación cero* $0(x) = 0$ y la *identidad* $\mathrm{Id}(x) = x$. [†] Encuentre la matriz asociada a los operadores cero e identidad.

Podemos definir la multiplicación de operadores por escalares de la siguiente forma. $(\alpha T)(u) = \alpha T(u)$. De esta manera, con la operación suma entre operadores y esta multiplicación por escalares, resulta que $L(\mathbb{R}^n)$ es un espacio vectorial.

Finalmente, si para $P \in L(\mathbb{R}^n)$ existe $Q \in L(\mathbb{R}^n)$, de manera que $PQ = \mathrm{Id}$, decimos que P es *invertible* y que Q es el operador inverso de P. También podemos escribir Q como P^{-1}. De hecho, si A es la matriz asociada a P, entonces A^{-1} es la asociada a P^{-1}.

Ejemplos

Verificar que las siguientes transformaciones son lineales, y encontrar la representación matricial de cada una.

1. (Proyección sobre el plano)

$$T \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix}$$

2.

$$T\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x-y\\y+z\\2x-y-z\\-x+y+2z\end{bmatrix}$$

3.

$$T\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2x-y+3z\\4x-2y+6z\\-6x+3y-9z\end{bmatrix}$$

4.

$$T\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2x-y\\2y-4x\end{bmatrix}$$

5.

$$T\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2x\\3x-y\end{bmatrix}$$

6.

$$T\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2x-y+3z\\6x-3y+9z\end{bmatrix}$$

7.

$$T\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2x+y\\2y-x\\x+8y\end{bmatrix}$$

8.

$$T\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1x-3z\\-y+5z\end{bmatrix}$$

9.

$$T\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2x+y\\-4x+2y\\8x+4y\end{bmatrix}$$

10.

$$T=\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3x-z\\-y+2z\\15x-2y-z\end{bmatrix}$$

Encuentre una expresión matemática para la transformación que rota un vector en el plano, con un ángulo ϕ en el sentido positivo (contrario a las manecillas del reloj). Indique si esta transformación es lineal y de serlo, encuentre su representación matricial. *Sugerencia: Exprese el vector en coordenadas polares.*

Núcleo e imagen

El *núcleo* de una transformación lineal $T : V \to W$, donde V y W son espacios vectoriales, es el conjunto

$$\ker(T) = \{v \in V | T(v) = 0\}.$$

La imágen de $T : V \to W$ es el conjunto

$$\operatorname{Im}(T) = \{w \in W | \exists v \in V, T(v) = w\}.$$

$\ker(T) < V, \operatorname{Im}(T) < W$.

Demostración. Si $\alpha \in \mathbb{R}$ y $u, v \in \ker(T)$, entonces

$$\begin{aligned} T(\alpha u + v) &= \alpha T(u) + T(v) && \text{(Por linealidad de } T\text{)} \\ &= \alpha 0 + 0 && \text{(Porque } T(u) = T(v) = 0\text{)} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Por tanto, $\ker(T) < V$.

Ahora, si $\alpha \in \mathbb{R}$ y $w, w' \in \operatorname{Im}(T)$, entonces Existen $v, v' \in V$ tales que $T(v) = w, T(w') = v'$. Por lo cual,

$$\begin{aligned} \alpha w + w' &= \alpha T(v) + T(v') \\ &= T(\alpha v + v'). \end{aligned}$$

Como $\alpha v + v' \in V$, entonces $\alpha w + w' \in W$. □

Encontrar un conjunto de vectores que generen $\ker(T)$, para la tranformación lineal T dada por ().

Supongamos que

$$T \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + 2y \\ z - y \\ 2x + 7y - 3z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Esto equivale a resolver el sistema de ecuacuones

$$\begin{aligned} x + 2y &= 0 \\ z - y &= 0 \\ 2x + 7y - 3x &= 0, \end{aligned}$$

que podemos reescribir en forma matricial como

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 7 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

y utilizando Gauss-Jordan, se reduce a

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

es decir, tenemos dos ecuaciones con tres incognitas

$$\begin{aligned} x + 2y &= 0 \\ y - z &= 0 \end{aligned}$$

por lo que sustituyendo $y = z = t$, tenemos que

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2t \\ t \\ t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

, es decir, todos los vectores en $\ker(T)$ son multiplos de

$$\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

De manera equivalente,

$$\ker(T) = \operatorname{gen}\left(\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right).$$

Encontrar un conjunto de vectores que generen $\operatorname{Im}(T)$, para la tranformación lineal T dada por ().

Un vector en $\operatorname{Im}(T)$ es de la forma,

$$\begin{bmatrix} x + 2y \\ z - y \\ 2x + 7y - 3z \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 7 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix},$$

por lo que $\operatorname{Im}(T)$ estaría generado por los vectores

$$u = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, v = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 7 \end{bmatrix}, w = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Sin embargo, por el ejercicio anterior, $w = 2u - v$, y por tanto

$$\begin{bmatrix} x + 2y \\ z - y \\ 2x + 7y - 3z \end{bmatrix} = xu + yv + wz = (x + 2z)u + (y - z)v.$$

De hecho, para cualesquiera λ, μ, si escogemos una solución de las ecuaciones las ecuaciones

$$\begin{aligned}\lambda &= x + 2z\\ \mu &= y - z,\end{aligned}$$

podemos escribir

$$\begin{bmatrix} x+2y \\ z-y \\ 2x+7y-3z \end{bmatrix} = xu + yv + zw = \lambda u + \mu v.$$

Es decir,

$$\mathrm{Im}(T) = \mathrm{gen}\,(u,v) = \mathrm{gen}\left(\begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\-1\\7\end{bmatrix}\right).$$

Ejemplos

Encuentre un conjunto de vectores, con el mínimo número de elementos posible, que generen $\ker(T)$ e $\mathrm{Im}(T)$ para cada una de las transformaciones lineales del ejercicio .

Bases y dimensión

Sea V un espacio vectorial y $B = \{u_1, ..., u_k\} \subset V$. Decimos que B es unconjunto *linealmente independiente* si para cualesquiera $c_1, ..., c_k \in \mathbb{R}$,

$$c_1u_1 + ... + c_ku_k = 0 \Rightarrow c_1 = ... = c_k = 0,$$

es decir, la única relación lineal entre los elementos de B es la trivial. En otro caso, decimos que B es *linealmente dependiente.*

Decimos que $B \subset V$ es una base de V si:

1. $V = \mathrm{gen}\,(B)$ y

2. B es linealmente independiente.

Es decir, B es un base si cualquier $v \in V$ es una combinación lineal de sus elementos, no falta información, y ninguno de los elementos de la base es combinación lineal de los restantes, es decir, no sobra información. Una vez que tenemos una base, toda lo que necesitamos saber sobre el espacio vectorial se puede obtener a partir de los elementos de la base.

Toda base de un espacio vectorial tiene el mismo número de elementos.

1. Si $B = \{u_1, ..., u_n\}$ es una base de V, decimos que n es la *dimensión* de V y escribimos $\dim V = n$.

2. Si $T : V \to W$ es una transformación lineal decimos que $\dim(\ker T)$ es la *nulidad* de T y la denotamos por $\operatorname{nul}(T)$.

3. Si $T : V \to W$ es una transformación lineal decimos que $\dim(\operatorname{Im} T)$ es el rango de T y la denotamos por $\operatorname{ran}(T)$.

Determinar si un conjunto forma una base de $\mathbb{R}^n$ puede ser bastante laborioso. Sin embargo, las siguientes dos proposiciones, que se presentan sin prostración, sirven como criterios avanzados para determinar si un conjuntos es base.

Si $n = \dim V$, cualquier conjunto $B \subset V$ linealmente independiente con n elementos es una base de V.

$B = \left\{ \begin{bmatrix} a_{1,1} \\ \vdots \\ a_{1,n} \end{bmatrix}, ..., \begin{bmatrix} a_{n,1} \\ \vdots \\ a_{n,n} \end{bmatrix} \right\}$ es un conjunto de vectores linealmente independientes en $\mathbb{R}^n$ si y solo si

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

Determine si

$$B' = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

es base de $\mathbb{R}^2$.

Sabemos que

$$B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

es una base de $\mathbb{R}^2$. Entonces $\dim \mathbb{R}^2 = 2$.

Pero como

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0,$$

entonces

$$B' = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

es un conjunto de 2 vectores *linealmente independientes*. Por tanto, B' también es una base de $\mathbb{R}^2$.

Encuentre una base para $\ker T$ y otra para $\operatorname{Im} T$, para la transformación definida en el ejercicio de muestra . Indique cuál es la dimensión de cada espacio.

Como ya vimos en el ejercicio de muestra ,

$$\ker(T) = \text{gen}\left(\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right).$$

Consideremos la ecuación

$$c_1 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 0,$$

es decir

$$\begin{bmatrix} -2c_1 \\ c_1 \\ c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

La única solución es $c = 0$ y por tanto

$$B = \left\{\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$$

es un conjunto linealmente independiente.

Por tanto, B es una base de $\ker T$ y $\text{nul}\,(T) = 1$.

De manera similar, en el ejercicio de muestra ,

$$\text{Im}(T) = \text{gen}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 7 \end{bmatrix}\right).$$

Entonces

$$\begin{aligned} c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 7 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \Rightarrow \begin{bmatrix} c_1 + c_2 \\ -c_2 \\ 2c_1 + 7c_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \Rightarrow c_1 = c_2 = 0. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 7 \end{bmatrix}\right\}$$

es un conjunto linealmente independiente, y por tanto una base de $\text{Im}(T)$. Entonces $\text{ran}\,(T) = 2$.

Finalmente, enunciaremos una de las proposicones importantes en nuestro curso. Si $T : V \to W$ es una transformación lineal, tenemos ls siguiente relación entre las dimensiones de $V, \ker T$ e $\text{Im}\, T$. [Teorema de la dimensión]

$$\dim V = \text{nul}\,(T) + \text{ran}\,(T)\,.$$

Ejemplos

Determine si el conjunto E es base del espacio vectorial V.

1. $E = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$, $V = \mathbb{R}^2$,
2. $E = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$, $V = \mathbb{R}^2$,
3. $E = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$, $V = \mathbb{R}^3$.

Para cada una de las transformaciones lineales $T : V \to W$, del ejercicio , encuentre

1. Una base de $\ker T$,
2. Una base de $\operatorname{Im} T$,
3. $\operatorname{nul}(T)$,
4. $\operatorname{ran}(T)$,

y verifique la afirmación del teorema .

Coordenadas y cambios de base.

Coordenadas

Si $E = \{e_1, ..., e_n\}$ es base de un espacio vectorial V, entonces todo vector $v \in V$ se puede escribir de la forma

$$v = v_1 e_1 + ... + v_n e_n.$$

Esto es cierto para cualquier otro conjunto que genere V. Lo importante de una base es que, debido a la independencia lineal de E, esta manera de escribir el vector es *única.*

Supongamos que podemos escribir $v = c_1 e_1 + ... + c_n e_n$. Entonces

$$\begin{aligned} 0 &= v - v \\ &= (v_1 e_1 + ... + v_n e_n) - (c_1 e_1 + ... + c_n e_n) \\ &= (v_1 - c_1) e_1 + ... + (v_n - c_n) e_n. \end{aligned}$$

Como E es linealmente independiente, entonces $v_1 - c_1 = ... = v_n - c_n = 0$. Es decir,

$$v_1 = c_1, ..., v_n = c_n.$$

En otras palabras, los escalares $v_1, ..., v_n$ en la expresión () es *única.*

Para simplificar la expresión () necesitamos el concepto de orden de una base.

Una base ordenada $(e_1, ..., e_n)$ es una sucesión de vectores en V tal que $\{e_1, ..., e_n\}$ es una base.

Dos bases ordendas $(e_1, ..., e_n), (f_1, ..., f_n)$ son iguales si y solo si

$$e_1 = f_1, ..., e_n = f_n.$$

Si intercambiamos un par de elementos de una base ordenada obtendremos una base ordenada distinta, aunque como conjuntos sean diferentes.

$$\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right)$$

y

$$\left(\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right)$$

son dos bases ordenadas distintas de $\mathbb{R}^2$.

Si consideramos E como la base ordenada $(e_1, ..., e_n)$ entonces, la expresión () se puede escribir como

$$\begin{bmatrix}v_1\\ ...\\ v_n\end{bmatrix}_E.$$

Decimos que $v_1, ..., v_n$ son las cordenadas de v en la base E.

Si consideramos la base ordenada

$$E = (\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix},)$$

de $\mathbb{R}^2$, entonces

$$\begin{bmatrix}u\\v\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}u\\v\end{bmatrix}_E.$$

En cambio, si consideramos

$$F = \left(\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right),$$

entonces

$$\begin{bmatrix}u\\v\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}v\\u\end{bmatrix}_F.$$

La base

$$\left(\begin{bmatrix}1\\0\\ \vdots\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\ \vdots\\0\end{bmatrix}, ..., \begin{bmatrix}0\\0\\ \vdots\\1\end{bmatrix}\right)$$

de $\mathbb{R}^n$ se conoce como *base canónica.*

Cambios de base

Supongamos que tenemos dos bases $B = (e_1, ..., e_n)$ y $F = (f_1, .., f_n)$ de $\mathbb{R}^n$. ¿Como podemos comparar las cordenadas de un vector $v \in \mathbb{R}^n$ en ambas bases? Digamos que sus coordenadas son

$$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}_B = \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix}_F .$$

Para realizar la comparación, digamos que las coordenadas de cada elemento de la base F en la base B son

$$f_k = \begin{bmatrix} f_{k,1} \\ \vdots \\ f_{k,n} \end{bmatrix}_B .$$

Ahora bien

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix}_F &= w_1 f_1 + ... + w_n f_n \\ &= w_1 \begin{bmatrix} f_{1,1} \\ \vdots \\ f_{1,n} \end{bmatrix}_B + ... + w_n \begin{bmatrix} f_{n,1} \\ \vdots \\ f_{n,n} \end{bmatrix}_B \\ &= \begin{bmatrix} w_1 f_{1,1} + ... + w_n f_{n,1} \\ \vdots \\ w_1 f_{1,n} + ... + w_n f_{n,n} \end{bmatrix}_B , \end{aligned}$$

y como las coordenadas en una base son únicas, tenemos que

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} w_1 f_{1,1} + ... + w_n f_{n,1} \\ \vdots \\ w_1 f_{1,n} + ... + w_n f_{n,n} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} f_{1,1} & \cdots & f_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ f_{n,1} & \cdots & f_{n,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$P_{F,B} := \begin{bmatrix} f_{1,1} & \cdots & f_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ f_{n,1} & \cdots & f_{n,n} \end{bmatrix}$$

se conoce como *matriz de paso* de F a B. También decimos que es la matriz cambio de base de F a B.

Así como podemos cambiar las coordenadas de la base F a la base B, podemos aplicar el mismo procedimiento para encontrar la matriz de paso de B a F. Sin embargo, al ser el procedimiento inverso, basta encontrar la matriz inversa. En otras palabras.

$P_{B,F} = P_{F,B}^{-1}$.

El hecho de que $P_{F,B}$ sea invertible se debe a que esta formada por los vectores columna que son las coordenadas de cada elemento de la base F en términos de B. Estos vectores generen todo $\mathbb{R}^n$, que es equivalente a que la matriz $P_{F,B}$ sea invertible.

1. Verifique que
$$F = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$
es una base de $\mathbb{R}^3$.

2. Si denotamos por E la base estandar de $\mathbb{R}^3$, encuentre las matrices de paso $P_{F,E}$ y $P_{E,F}$.

Por la proposición , basta verificar que F es un conjunto linealmente independiente. Ahora bien, por la proposición , basta verificar que
$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Aunque esto lo podemos hacer *a mano*, usaremos `WxMaxima` para hacer dichas cuentas. Primero introducimos la matriz, a partir de la cual calcularemos el determinante y la denotaremos por P.

```
(%i1)   P: matrix(
         [1,0,1],
         [0,-2,0],
         [0,0,1]
        );
```

(%o1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Posteriormente, calculamos su determinante.

```
(%i2)   determinant(%);
```

(%o2) -2

y concluimos que F es una base.

Note que
$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

estan ya dados en terminos de la base canónica E y por tanto

$$P_{F,E} = P.$$

Por la proposición , sabemos que $P_{E,F} = P^{-1}$ y usando nuevamente `WxMaxima`, calculamos esta matriz inversa.

```
(%i3)   invert(P);
```

$$(\%o3) \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ejemplos

Encuentre las matrices de paso $P_{F,E}$ y $P_{E,F}$ para los siguientes casos.

1. E la base canónica de $\mathbb{R}^2$, $F = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right)$,
2. E la base canónica de $\mathbb{R}^2$, $F = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$
3. E la base canónica de $\mathbb{R}^3$, $F = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$.

Encuentre las coordenadas de los siguientes vectores v, en las bases ordendas F indicadas. Utilice el resultado en el ejercicio .

1. $v = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $F = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right)$,
2. $v = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $F = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$
3. $v = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}$, $F = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$.

Encuentre las coordendas de los elementos de la base canonica de V en terminos de las bases ordenadas F indicadas. Utilice el resultado en el ejercicio .

1. $V = \mathbb{R}^2$, $F = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right)$,
2. $V = \mathbb{R}^2$, $F = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$

3. $V = \mathbb{R}^3$, $F = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$.

Teoría espectral

Valores propios

Como hemos visto, hacer cálculos que involucren matrices, por ejemplo multiplicar una matriz por un vector, puede ser complicados por la cantidad de operaciones involucradas. En cambio, multiplicar por escalares es muy sencillo. ¿Podríamos encontrar alguna manera de convertir las operanciones con matrices en operaciones con escalares? En este capítulo trataremos de responder esta pregunta.

Sea $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una transformación lineal y A su representación matricial en la base estandar. Si $\lambda \in \mathbb{R}$ y $v \in \mathbb{R}$, $v \neq 0$ tales que

$$Av = \lambda v,$$

decimos que λ es un valor propio y v un λ-vector propio.

Supongamos que $F = (v_1, ..., v_n)$ es una base ordenada de vectores propios de $\mathbb{R}^n$, es decir,

$$Av_k = \lambda_k v_k,\ k = 1, ...n.$$

Entonces, la representación matricial de $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ en la base F es

$$B = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_k & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

es decir, una matriz con los valores propios en la diagonal y ceros en otras partes.

Si expresamos un vector $v \in \mathbb{R}^n$ en esta base, tendría la forma

$$v = c_1 v_1 + ... + c_n v_n,$$

y aplicando la transformación, o de manera equivalente, multiplicando por B, obtendriamos

$$T(v) = c_1 \lambda_1 v_1 + ... + c_n \lambda_n v_n,$$

es decir, simplemente haríamos operaciones con escalares. Por esta razón, es importante estudiar los valores y vectores propios asociados a operadores en $\mathbb{R}^n$, es decir, transformaciones lineales $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Esta teoría se conoce como *espectral.*

Valores propios

El primer paso para desarrollar la teoría espectral de un operador es determinar sus valores propios. Antes, recordemos el siguiente criterio para determinar si un operador es invertible.

Sea $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una transformación lineal, y A una representación lineal en alguna base de $\mathbb{R}^n$. Las siguientes proposiciones son equivalentes:

1. A es invertible,
2. $Av = 0$ si y solo si $v = 0$,
3. $\det(A) \neq 0$.

La misma proposición se puede reescribir de la siguiente manera.

Sea $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una transformación lineal, y M una representación lineal en alguna base de $\mathbb{R}^n$. Las siguientes proposiciones son equivalentes:

1. M no es invertible,
2. Existe un vector $v \neq 0$, tal que $Mv = 0$,
3. $\det(A) = 0$.

Supongamos que λ es un valor propio de A y v un λ-vector propio. Como $v = Iv$, entonces

$$Av = \lambda v \Leftrightarrow Av = \lambda I v \Leftrightarrow (A - \lambda I)v = 0.$$

Es decir, $v \in \ker(T)$ aunque $v \neq 0$. Esto quiere decir que $A - \lambda I$ no es invertible y por tanto,

$$\det(A - \lambda I) = 0.$$

Este es el criterio que buscabamos para localizar los valores propios.

Si $A \in M_{n\times n}$, entonces

$$p(\lambda) = (-1)^n \det(A - \lambda I) = \det(\lambda I - A)$$

se conoce como *polinomio característico* de A.

λ es valor propio de A si y solo si es raíz de $p(\lambda)$.

Encuentre los valores propios, de la transformación lineal con representación matricial

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Primero determinamos el polinomio característico:

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= -\begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & -1 \\ 2 & 2-\lambda & -1 \\ 2 & 2 & -\lambda \end{vmatrix} \\ &= \lambda^3 - 5\lambda^2 + 8\lambda - 4 \\ &= (\lambda-1)(\lambda-2)^2. \end{aligned}$$

Los valores propios de A son las raices de $p(\lambda) = (x-1)(x-2)^2$, es decir,

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2.$$

Podemos verificar nuestra respuesta en `WxMaxima`, de la siguiente manera:

Primero, introducimos la matriz.

```
(%i1) matrix(
       [3,1,-1],
       [2,2,-1],
       [2,2,0]
      );
```

(%o1) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

Posteriormente, calculamos el polinomio característico. En este caso, `WxMaxima` usará la definición

$$p(x) = \det(A - xI).$$

```
(%i2) charpoly(%, x), expand;
```

(%o2) $-x^3 + 5x^2 - 8x + 4$

Finalmente, factorizamos el polinomio.

```
(%i8) factor(%o2);
```

(%o8) $-(x-2)^2\,(x-1)$

Otra manera, más directa, es encontrar directamenta las raices del polinomio

```
(%i13) realroots(%o2);
```

(%o13) $[x = 2, x = 1]$

Otra manera de obtener los valores propios es la siguiente:

```
(%i21) eigenvalues(A);
```

(%o21) $[[1, 2], [1, 2]]$ En este caso, el primer arreglo nos dice los valores propios, mientras que el segundo, nos dice sus *multiplicidades algebráicas*, que es el exponente que tienen asociado en el polinomio característico.

Ejemplos

Encuentre los valores propios de las siguientes matrices. Verifique sus resultados usando `WxMaxima`.

1. $$A = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$$

2. $$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$$

3. $$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$$

4. $$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$$

5. $$A = \begin{bmatrix} -6 & -3 & -25 \\ 2 & 1 & 8 \\ 2 & 2 & 7 \end{bmatrix}$$

6. $$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

7. $$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

8. $$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

9. $$A = \begin{bmatrix} 7 & -2 & -4 \\ 3 & 0 & -2 \\ 6 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

10. $$A = \begin{bmatrix} -3 & -7 & -5 \\ 2 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Vectores propios

Si $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es una transformación lineal y A su representación matricial, en la base estandar, y λ un valor propio de A, entonces cualquier vector $v \in \mathbb{R}^n$ que satisfaga la ecuación

$$Av = \lambda v$$

se conoce como λ-vector propio.

Al conjunto de λ-vectores propios se le conoce como λ-espacio propio y se denota por E_λ.

En el caso anterior, tenemos que

$$E_\lambda = \ker\left(A - \lambda I\right).$$

Encuentre el espacio propio asociado al valor propio $\lambda_1 = 2$ de la matriz A definida en ().

Si

$$v = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in E_{\lambda_1},$$

entonces $\left(A - 2I\right) v = 0$, es decir,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

que se reduce al sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 2x = z \\ z = 2y \end{cases}.$$

Escogiendo $z = 2t$, donde $t \in \mathbb{R}$, obtenemos

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ t \\ 2t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Es decir $\ker(A - 2I)$ esta generado por el conjunto $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$ y al consistir de un solo vector, este es linealmente independiente, y por tanto es una base. En resumen,

$$\ker(A - 2I) = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right).$$

Encuentre el espacio propio asociado al valor propio $\lambda_2 = 1$ de la matriz A definida en ().

$$\ker(A - I) = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right).$$

Para comprobar nuestros resultados, podemos usar `WxMaxima`. Primero, introducimos nuestra matriz.

```
(%i1)  matrix(
        [3,1,-1],
        [2,2,-1],
        [2,2,0]
       );
```

(%o1) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

Posteriormente, calculamos los vectores propios de la siguiente manera.

```
(%i2)  eigenvectors(%);
```

(%o2) $[[[1,2],[1,2]],[[[1,0,2]],[[1,1,2]]]]$

El primer arreglo $[1,2]$ nos dice los dos valores propios, mientras que el segundo $[1,2]$ nos dice su multiplicidad algebráica. El tercer arreglo $[1,0,2]$ es un vector propio de $\lambda = 1$, mientras que el último $[1,1,2]$ es uno asociado a $\lambda = 2$. Como explicamos anteriormente, cada uno de estos constituye una base de sus respectivos espacios propios.

Ejemplos

Encuentre los espacios propios de los diferentes valores propios de las matrices dadas en el ejercicio .

Diagonalización

$A \in M_n$ se dice que es *diagonalizable* si existe una base de $\mathbb{R}^n$ que consista de vectores propios de A.

Determine si la matriz A definida en () es diagonalizable.

Como vimos en las secciones anteriores, los valores propios de A son $\lambda_1 = 2$ y $\lambda_2 = 1$, con respectivos espacio propios

$$\ker(A - 2I) = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right).$$

y

$$\ker(A - I) = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right).$$

Como cualquier otro vector propio es o bien multiplo de $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ o bien de $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$, tendríamos a los más una conjuto de dos vectores propios linealmente independientes. Sin embargo, cualquier base de $\mathbb{R}^3$ debe tener exactamente 3 vectores propios linealmente independientes. Por tanto A no es diagonalizable.

Podemos comprobar este resultado usando `WxMaxima` de la siguiente manera.

Primero, introducimos la matriz de manera habitual.

```
(%i1)  A: matrix(
        [3,1,-1],
        [2,2,-1],
        [2,2,0]
       );
```

(%o1) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

Y posteriormente usamos el comando `nondiagonalizable`, siempre calculando primero los vectores propios de la matriz.

```
(%i4)  eigenvectors(A);
```

(%o4) $[[[1, 2], [1, 2]], [[[1, 0, 2]], [[1, 1, 2]]]]$

```
(%i5)  nondiagonalizable;
```

(%o5) *true*

Si la respuesta es `true`, esto quiere decir que en efecto, tal matriz no es diagonalizable. En otro caso, obtenendremo `false`.

¿Porqué decimos que una matriz es diagonalizable? Consideremos una transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, y una base

$$F = (v_1, v_2)$$

de valores propios. Como $T(v_1) = \lambda_1 v_1$, $T(v_a) = \lambda_2 v_2$ y en terminos de esta base

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}_F, v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}_F,$$

entonces

$$T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}_F \right) = \lambda_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}_F = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ 0 \end{bmatrix}_F$$

y de manera similar

$$T\left(\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}_F\right) = \lambda_2 \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}_F = \begin{bmatrix}0\\\lambda_2\end{bmatrix}_F.$$

Entonces, la representación matricial D de la transformación T en la base F estará formada por los dos vectores columna, que resultan de aplicar la transformación a cada elemento de la base, es decir,

$$D = \begin{bmatrix}\lambda_1 & 0\\0 & \lambda_2\end{bmatrix}.$$

Este mismo razonamiento, lo podemos aplicar a cualquier tranformación lineal $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, si podemos obtener una base de vectores propios para su representación matricial A (en la base estandar o de hecho, en cualquier otra base), es decir, si A es diagonalizable.

En este caso, ¿cómo podemos relacionar las representaciones matriciales de $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, en la base estandar y en una base de vectores propios? Denotemos por A a la primera y por D a la segunda, mientras que por $V = (\mathbb{R}^n, E)$ al espacio vectorial $\mathbb{R}^n$ en la base E estandar, mientra que $V' = (\mathbb{R}^n, F)$ en la de valores propios. Considere el diagrama **??**, donde P denota la matriz cambio de base $P_{F,E}$. Es claro que

$$AP = PD,$$

y por tanto, multiplicando por $P^{-1} = P_{E,F}$ por la izquierda en ambos lados de la ecuación,

$$D = P^{-1}AP.$$

En este caso, decimos que D es una matriz diagonal *semejante* a A. Para un repaso de cambios de base, consulte la sección .

Determine si la matriz

$$A = \begin{bmatrix}3 & 2 & 4\\2 & 0 & 2\\4 & 2 & 3\end{bmatrix}$$

es diagonalizable y encuentre una matriz diagonal semejante.

Para encontrar los vectores propios, podemos proceder como en la sección . Para hacer más eficientes los cálculos, usaremos `WxMaxima`. Primero, introducimos la matriz:

```
(%i1) A: matrix(
       [3,2,4],
       [2,0,2],
       [4,2,3]
      );
```

(%o1) $\begin{pmatrix}3 & 2 & 4\\2 & 0 & 2\\4 & 2 & 3\end{pmatrix}$

Después, encontramos los valores propios:

(%i2) `eigenvectors(A);`

(%o2) $[[[8,-1],[1,2]],[[[1,\frac{1}{2},1]],[[1,0,-1],[0,1,-\frac{1}{2}]]]]$

La salida de la última instrucción quiere decir que $\lambda = 8$ es un vector propio, de multiplicidad 1 con vector propio

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

mientras que $\lambda_1 = -1$ es un vector propio, de multiplicidad 2 y por tanto, los siguientes dos vectores

$$v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1/2 \end{bmatrix}$$

son vectores propios, linealmente independientes asociados a $\lambda_2 = -1$.

Por lo tanto,

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1/2 \end{bmatrix}.$$

Introducimos esta matriz en `WxMaxima` y calculamos su inversa, a la que denotamos por Q.

(%i5)
```
P: matrix(
 [1,1,0],
 [1/2,0,1],
 [1,-1,-1/2]
);
```

(%o5) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

(%i6) `Q:invert(P);`

(%o6) $\begin{pmatrix} \frac{4}{9} & \frac{2}{9} & \frac{4}{9} \\ \frac{5}{9} & -\frac{2}{9} & -\frac{4}{9} \\ -\frac{2}{9} & \frac{8}{9} & -\frac{2}{9} \end{pmatrix}$

Finalmente, realizamos el calculo $P^{-1}AP$

(%i7) `Q.A.P;`

(%o7) $\begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

para verificar que, en efecto, la matriz resultante es diagonal, y en su diagonal estan ordenados los valores propios de A.

Ejemplos

Determine si cada matriz A en el ejercicio son diagonalizables, y en caso de serlo, encuentre

1. Una base F de vectores propios de A;
2. la matriz $P = P_{F,E}$ cambio de base, donde E es la base estandar del respectivo espacio vectorial;
3. la matriz diagonal D semejante a A, usando la matriz cambio de base P.

Ecuaciones de Orden Superior

Ecuaciones Diferenciales Lineales

Una ec. dif. lineal de $n-$ésimo orden tiene la forma

$$b_n(x)y^{(n)} + \cdots + b_1(x)y' + b_0(x)y = g(x)$$

donde $g(x)$ y los *coeficientes* $b_j(x)$ dependen *sólo* de x.

Si $g(x) \equiv 0$, diremos que () es *homogénea.*[2] también diremos que es de *coeficientes constantes* si cada $b_j(x)$ es precisamente una constante.

[2] Observe que es homogénea en un sentido diferente a la sección previa;

Consideremos el problema de valor inicial dado por () y n condiciones iniciales dadas

$$y(x_0) = c_0,\, y'(x_0) = c_1,\, \cdots\, y^{(n-1)} = c_{n-1}.$$

Si $g(x)$ y $b_j(x), j = 0, 1, ..., n$ son continuas en algún intervalo $\mathcal{I}$ que contiene a x_0 y si $b_n(x) \neq 0$ en $\mathcal{I}$, entonces el problema de valor inicial dado por () y () tiene una *única* solución definida a través de $\mathcal{I}$.

Cuando las condiciones en $b_n(x)$ en el teorema se satisfacen, podemos dividir () y obtenemos

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + ... + a_0(x)y = \phi(x)$$

donde

$$a_j(x) = \frac{b_j(x)}{b_n(x)},\, j = 0, 1, \cdot, n-1$$

y $\phi(x) = \frac{g(x)}{b_n(x)}$.

Definimos el operador diferencial $L(y)$ por

$$L(y) \equiv y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + ... + a_0(x)y$$

donde $a_i(x)$, $i = 0, 1, ..., n-1$, son continuas en un intervalo de interés.

Entonces () puede reescribirse como

$$L(y) = \phi(x),$$

y en particular, una ec. dif. lineal homogénea se puede reescribir como

$$L(y) = 0$$

Soluciones Linealmente Independientes

Un conjunto de funciones

$$\{y_1(x), ..., y_n(x)\}$$

es *linealmente independiente* en $a \leq x \leq b$ si existe un conjunto de constantes

$$\{c_1, ..., c_n\}$$

no todas iguales a cero (es decir, al menos una de estas debe ser diferente de cero) tales que

$$c_1 y_1(x) + \cdots + c_n y_n(x) \equiv 0$$

en $a \leq x \leq b$.

El conjunto

$$\{x, 5x, 1, \sin(x)\}$$

es linealmente dependiente en $\mathbb{R}$ ya que con las constantes

$$c_1 = -5,\ c_2 = 1,\ c_3 = 0,\ c_4 = 0,$$

se satisface ():

$$-5 \cdot x + 1 \cdot 5x + 0 \cdot 1 + 0 \cdot \sin(x) = 0.$$

El conjunto

$$c_1 = \cdots = c_n = 0$$

siempre resuelve (). De hecho, *si es la única solución* diremos que $\{y_i(x)\}_{i=1,...,n}$ es *linealmente independiente.*

La ec. dif. lineal homogénea de orden n $L(y) = 0$ siempre tiene n soluciones linealmente independientes. Si $y_1(x), ..., y_n(x)$ representan tales soluciones, entonces la solución general de $L(y) = 0$ es

$$y(x) = c_1 y_1(x) + ... + c_n y_n(x)$$

donde $c_1, ..., c_2$ son constantes arbitrarias.

El Wronskiano

El *wronskiano* de un conjunto de funciones

$$\{z_1(x), ..., z_n(x)\}$$

en el intervalo $a \leq x \leq b$, (que tengan al menos $n - 1$ derivadas en dicho intervalo) es el determinante

$$W(z_1, ..., z_n) = \begin{vmatrix} z_1 & z_2 & \cdots & z_n \\ z_1' & z_2' & \cdots & z_n' \\ \vdots & & \cdots & \vdots \\ z_1^{(n-1)} & z_2^{(n-1)} & \cdots & z_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

1. Si el Wronskiano de un conjunto de n funciones definidas en un intervalo $a \leq x \leq b$ es diferente de cero, para al menos en un punto en este intervalo, entonces el conjunto de funciones es linealmente independiente.

2. Si el Wronskiano es *identicamente cero* en dicho intervalo y cada uno de las funciones es una *solución de la misma ecuación diferencial*, entonces el conjunto de funciones es linealmente dependiente.

El teorema no es concluyente cuando el wronskiano es identicamente cero, pero las funciones no son soluciones de una misma ecuación diferencial.

Ecuaciones No Homogeneas

Sea y_p cualquier solución particular de la ecuación () y y_h la solución *general* de la ecuación homogénea asociada $L(y) = 0$, (a y_h se le llama solución complementaria).

La solución general de la ecuación $L(y) = \phi(x)$ es $y = y_p + y_h$.

Ejemplos

- Encuentre el wronskiano de $\left\{e^x, e^{-x}\right\}$.
- Determine si el conjunto es linealmente independiente en $(-\infty, +\infty)$.
- Verifique directamente la definición.
- Encuentre el wronskiano de $\{\sin(3x), \cos(3x)\}$.
- Determine si el conjunto es linealmente independiente en $(-\infty, +\infty)$.
- Verifique directamente la definición.
- Encuentre el wronskiano de $\left\{x, x^2, x^3\right\}$.
- Determine si el conjunto es linealmente independiente en $(-\infty, +\infty)$.
- Verifique directamente la definición.
- Encuentre el wronskiano de $\{1 - x, 1 + x, 1 - 3x\}$.
- Verifique directamente si el linealmente independiente a partir de la definición.
- Realice nuevamente el ejercicio, sabiendo que las funciones son solución de la ecuación $y'' = 0$.

Ecuaciones Diferenciales Lineales Homogéneas de Segundo Orden con Coeficientes Constantes

La ecuación Característica

Para la ec. dif.

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$$

con a_1, a_0 constantes, asociaremos la ec. algebráica

$$\lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 = 0,$$

la cual se conoce como *ecuación característica* de ().

La ecuación característica de

$$y'' + 3y' - 4y = 0$$

es

$$\lambda^2 + 3\lambda - 4 = 0;$$

mientras que la ecuación característica de

$$y'' - 2y' + y = 0$$

es

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0.$$

Toda ecuación característica se puede factorizar de la siguiente manera

$$(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) = 0.$$

La Solución General

La solución general de () se obtienen a partir de las raices de (); consideraremos los siguientes 3 casos.

Caso 1. $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \lambda_1 \neq \lambda_2$.

$$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}.$$

Si $\lambda_2 = -\lambda_1$, () se puede reescribir como

$$y = k_1 \cosh(\lambda_1 x) + k_2 \sinh(\lambda_2 x).$$

Resuelva

$$\begin{cases} y'' - y' - 2y = 0 \\ y(0) = 1, \ y'(0) = 0 \end{cases}$$

Caso 2. $\lambda = a \pm ib \in \mathbb{C}, b \neq 0.$

En este caso, *necesariamente* $\lambda_2 = a - ib$; y la solución esta dada por

$$y = d_1 e^{(a+ib)x} + d_2 e^{(a-ib)x};$$

que es algebraicamente equivalente a

$$y = c_1 e^{ax}\cos(bx) + c_2 e^{ax}\sin(bx).$$

Resuelva

$$\begin{cases} y'' + 4y' + 5y = 0 \\ y(0) = 2,\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

Caso 3. $\lambda_1 = \lambda_2.$

$$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 x e^{\lambda_2 x}.$$

Resuelva

$$\begin{cases} 100\dfrac{d^2u}{dt^2} - 20\dfrac{du}{dt} + u = 0 \\ u(0) = 2,\ u'(0) = 1 \end{cases}$$

Resuelva

$$y'' - 7y' = 0.$$

Resuelva

$$y'' - 5y = 0.$$

Vuelva a escribir el problema en términos de funciones hiperbólicas.

Resuelva

$$\ddot{y} + 10\dot{y} + 21y = 0.$$

Resuelva

$$y'' + 4y = 0.$$

Ecuaciones Diferenciales Lineales Homogéneas de n−ésimo Orden con Coeficientes Constantes

La ecuación característica de la ecuación diferencial

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + ... + a_1 y' + a_0 y = 0$$

con coeficientes constantes es

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + ... + a_1\lambda + a_0 = 0.$$

La ecuación característica de

$$y^{(4)} - 3y''' + 2y'' - y = 0$$

es

$$\lambda^4 - 3\lambda^3 + 2\lambda^2 - 1 = 0.$$

La solución general

Si las soluciones de la ecuación característica

$$\lambda_1, ..., \lambda_n$$

son todas distintas, la solución es

$$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + ... + c_n e^{\lambda_n x}.$$

Diremos que una raíz λ_k tiene multiplicidad p si $(\lambda - \lambda_k)^p$ es factor de la ecuación característica, pero $(\lambda - \lambda_k)^{p+1}$ no.

En este caso, podemos asociar p soluciones linealmente independiente con λ_k :

$$e^{\lambda_k x}, xe^{\lambda_k x}, ..., x^{p-1}e^{\lambda_k x}.$$

Ejemplos

Resuelva

$$\begin{cases} y''' + y' = 0 \\ y(0) = 3, y'(0) = 1, y''(0) = 2 \end{cases}$$

Resuelva

$$\begin{cases} y^{(4)} - 2y^{(3)} + 6y^{(2)} - 10y^{(1)} + 5y = 0 \\ y(0) = 1, y'(0) = 0, y''(0) = 1, y'''(0) = 0. \end{cases}$$

Ejemplos

Resuelva

$$y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0.$$

Resuelva

$$y^{(4)} - 9y'' + 20y = 0.$$

Resuelva

$$y''' - 6y'' + 2y' + 36y = 0.$$

Resuelva

$$y^{(4)} + 8y''' + 24y'' + 32y' + 16y = 0.$$

Resuelva

$$\frac{d^5P}{dt^5} - \frac{d^4P}{dt^4} - 2\frac{d^3P}{dt^3} + 2\frac{d^2P}{dt^2} + \frac{dP}{dt} - P = 0.$$

Método de Coeficientes Indeterminados

Por el teorema , la solución de $L(y) = 0$ está dada por la solución particular y_p más la solución general y_h, la cuál es la solución de la ecuación lineal homogénea $L(y) = 0$.

En esta sección, aprenderemos a obtener y_p, una vez que y_h es conocida, a través del *coeficientes indeterminados.*

Forma simple del método

Para aplicar este método a la ecuación diferencial $L(y) = \phi(x)$, ϕ y *TODAS sus derivadas* deben estar generadas por un conjunto *finito* de funciones linealmente independientes

$$\{y_1(x), ..., y_n(x)\}.$$

En ese caso, comenzaremos suponiendo que $y_p(x)$ es una combinanción lineal de $y_1(x), ..., y_n(x)$:

$$y_p(x) = A_1 y_1(x) + ... + A_n y_n(x)$$

donde $A_1, A_2, ..., A_n$ son constantes.

A continuación, revisaremos algunos casos comunes, en los que podemos aplicar dicho método.

Caso $\phi(x) = p_{n(x)}$

Si suponemos que $\phi(x)$ es un polinomio de grado n, entonces

$$y_p(x) = A_n x^n + A_{n-1}x^{n-1} + ... + A_1 x + A_0.$$

Recordemos que la solución general de la ecuación $y'' - y' - 2y = 0$ está dada por...

$$y_h(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x}$$

Resuelva

$$y'' - y' - 2y = 4x^2$$

Caso $\phi(x) = ke^{\alpha x}$

Si suponemos que $\phi(x)$ es una función exponencial, entonces

$$y_p(x) = Ae^{\alpha x}.$$

Resuelva

$$y'' - y' - 2y = e^{3x}.$$

Caso $\phi(x) = ke^{\alpha x}$

Si suponemos que $\phi(x)$ es una función exponencial, entonces

$$y_p(x) = Ae^{\alpha x}.$$

Caso $\phi(x) = k_1 \sin(\beta x) + k_2 \cos(\beta x)$

Si suponemos que $\phi(x)$ es una función senoidal, entonces

$$y_p(x) = A\sin(\beta x) + B\cos(\beta x)$$

Resuelva

$$y'' - y' - 2y = \sin(2x).$$

Generalizaciones

Si $\phi(x) = e^{\alpha x} p_n(x)$, entonces

$$y_p = e^{\alpha x} \left(A_n x^n + ... + A_1 x + A_0 \right).$$

Resolver

$$y'' = e^{-x} x^2$$

Si $\phi(x) = k e^{\alpha x} \sin(\beta x)$ o $\phi(x) = k e^{\alpha x} \cos(\beta x)$, entonces

$$y_p(x) = A_0 e^{\alpha x} \sin(\beta x) + B_0 e^{\alpha x} \cos(\beta x).$$

Resuelva

$$y'' = e^{-x} \cos(3x)$$

Aun más, si $\phi(x) = k e^{\alpha x} \sin(\beta x) p_n(x)$ o $\phi(x) = k e^{\alpha x} \cos(\beta x) p_n(x)$, entonces

$$\begin{aligned} y_p(x) = A_0 e^{\alpha x} \sin(\beta x) & \left(A_n x^n + ... + A_1 x + A_0 \right) \\ + B_0 e^{\alpha x} \cos(\beta x) & \left(B_n x^n + ... + B_1 x + B_0 \right). \end{aligned}$$

Si cualquier término de y_p, salvo por los términos constantes, es también un término de y_h, entonces y_p *debe ser modificada* multiplicandola por x^m.

Aquí m es el entero positivo más pequeño tal que el producto $x^m y_p$ no tiene términos en común con y_h.

Resuelve la ecuación

$$y'' - y' - 2y = \frac{1}{2} e^{-x}$$

Si $\phi(x)$ no tiene alguna de las formas anteriores o la ecuación diferencial no tiene coeficientes constantes, este método no se puede aplicar.

Principio de superposición

Consideremos la ecuación diferencial

$$L[y] = \phi_1(x) + \phi_2(x)$$

donde L es un operador diferencial lineal con coeficientes constantes de la forma

$$L[y] = y^{(n)} + ... + a_1 y' + a_0 y$$

Digamos que $y_h(x)$ es la solución de la ecuación homogénea asociada, es decir,

$$L[y_h] = 0,$$

mientras que $y_{p1(x)}$ resuelve

$$L[y_{p1}] = \phi_1(x)$$

y $y_{p2}(x)$,

$$L[y_{p2}] = \phi_2(x).$$

Entonces $y(x) = y_h(x) + y_{p1}(x) + y_{p2}(x)$ resuelve la ecuación

$$L[y] = \phi_1(x) + \phi_2(x).$$

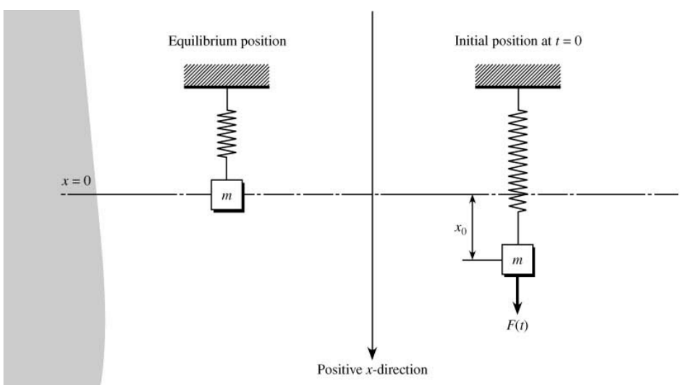
Resuelve la ecuación

$$y'' - y' - 2y = 2e^{3x} - 3t^2$$

Aplicaciones

Resortes

Resortes



img030601.png: 0x0 pixel, 300dpi, 0.00x0.00 cm, bb=

Ley de Hooke

La fuerza restauradora F de un resorte es igual y opuesta a las fuerzas aplicadas al mismo y proporcional a la extensión (contracción) l del resorte de la fuerza aplicada, es decir, $F = -kl$, donde k indica la constante de proporcionalidad, generalmente llamada constante del resorte.

A partir de la segunda ley de Newton, tenemos que

$$m\ddot{x} = -kx - a\dot{x} + F(t),$$

o de manera equivalente

$$\ddot{x} + \frac{a}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{F(t)}{m},$$

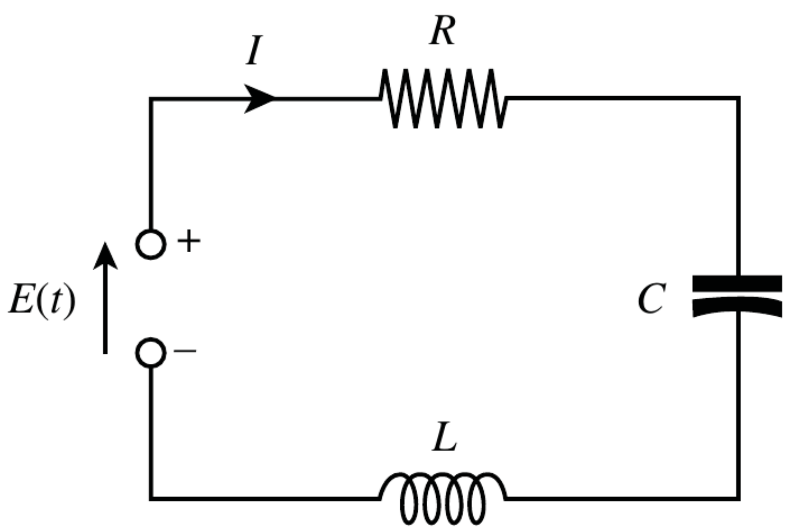
donde a, k son constantes positivas de proporcionalida; $F(t)$ es una fuerza externa; y sujeta a condiciones iniciales

$$x(0) = x_0, \dot{x}(0) = v_0.$$

Una masa de $2kg$ se suspende de un resorte con una constante conocida de $10N/m$, y se le permite llegar a una posición de reposo. Luego se le pone en movimiento dándole una velocidad inicial de $150cm/seg$. Encuentre una expresión para el movimiento de la masa, suponiendo que no hay resistencia del aire.

Encuentre la frecuencia circular; la frecuencia natural y el periodo el oscilador armónico simple del problema .

Círcuitos eléctricos



- Cantidad de corriente I (en amperios)
- Resistencia R (en ohmios)
- Inductor L (en henrios)
- Fuerza electromotriz (abreviado fem)E (en voltios)
- Capacidad C (en faradios)

La ley del bucle de Kirchhoff La suma algebraica de las caídas de voltaje en un circuito eléctrico cerrado simple es cero.

$$RI + L\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}q - E(t) = 0$$

$$I = \frac{dq}{dt}$$
$$\frac{dI}{dt} = \frac{d^2q}{dt^2}$$

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC}q = \frac{1}{L}E(t)$$

$$q(0) = q_0$$
$$I(0) = \left.\frac{dq}{dt}\right|_{t=0} = I_0$$

Un circuito RCL conectado en serie tiene $R = 180$ ohmios, $C = 1/280$ faradio, $L = 20$ henries, y una aplicada voltaje $E(t) = 10 \operatorname{sen} t$.

Suponiendo que no hay carga inicial en el capacitor, sino una corriente inicial de 1 amperio en $t = 0$ cuando se aplica la tensión por primera vez, encuentre la carga subsiguiente en el capacitor.

Variación de parametros

La técnica de variación de parametros es otra forma de encontrar una solución particular de la ecuación diferencial:

$$L(y) = \phi(x)$$

una vez que conocemos la solución de $L(y) = 0$.

Recordemos que la solución de $L(y) = 0$ está dada por

$$y_h(x) = c_1 y_1(x) + ... + c_n y_n(x)$$

El Método

Una solución particular de $L(y) = \phi(x)$ tiene la forma

$$y_p(x) = \nu_1(x) \cdot y_1(x) + ... + \nu_n(x) \cdot y_n(x)$$

donde $y_i(x),\ i = 1, 2, ..., n$ están dadas por () y $\nu_i(x),\ i = 1, 2, ..., n$ son funciones por determinar.

Para esto, primero resolvemos el siguiente sistema

$$\begin{cases} \nu_1' y_1 + ... + \nu_n' y_n & = 0 \\ \nu_1' y_1' + ... + \nu_n' y_n' & = 0 \\ \dots & \\ \nu_1' y_1^{(n-1)} + ... + \nu_n' y_n^{(n-1)} & = \phi(x) \end{cases}$$

Posteriormente, integramos cada $\nu_i'(x)$ para obtener $\nu(x)$.

Como $y_1(x), ..., y_n(x)$ son soluciones linealmente independientes de la misma ecuación $L(y) = 0$, su wronskiano nunca se anula (teorema), y esto significa que el sistema () tiene determinante siempre diferente de cero, y por tanto se puede resolver de manera única para $v_1'(x), ..., v_n'(x)$.

El método de variación de parametros puede ser aplicado a todas las ecuaciones diferenciales lineales, y por tanto tiene un mayor alcance que el método de coeficientes indeterminados.

Sin embargo, si ambos métodos son aplicables, es preferible el de coeficientes indeterminados por ser más eficiente.

Además, en algunos casos es imposible obtener una forma cerrada de la integral de $v_i'(x)$, y otros métodos deben ser aplicados.

Ejemplos

Resuelva $y''' + y' = \sec(x)$

Resuelva $y''' - 3y'' + 2y' = \dfrac{e^x}{1+e^{-x}}$

Resuelva $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{x}$

Ejemplos de valor inicial

Resuelva

$$y'' - y' - 2y = 4x^2, \; y(0) = 1, y'(0) = 4.$$

Resuelva

$$\begin{cases} y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0, \\ y(\pi) = 0, y'(\pi) = 0, y''(\pi) = 1. \end{cases}$$

Transformada de Laplace

La Transformada de Laplace

Definición

Sea $f(x)$ una función definida en $0 \leq x < \infty$ y sea s una variable arbitraria. La *Transformada de Laplace* de $f(x)$, denotada ya sea por $\mathcal{L}\{f(x)\}$ o por $F(s)$ está dada por

$$\mathcal{L}\{f(x)\} = F(s) = \int_0^\infty e^{-sx} f(x) dx,$$

siempre y cuando dicha integral converja.

La convergencia ocurre cuando el límite

$$\lim_{R\to\infty} \int_0^R e^{-sx} f(x) dx \tag{13}$$

existe.

1. Si el límite anterior no existe, la integral impropia diverge y $f(x)$ no tiene transformada de Laplace.

2. Cuando evaluamos la integral en (13), la variable s deberá tratarse como una constante debido a que la integración es respecto de x.

En esta sección usaremos la convención de que una función se denota por minúsculas, mientras que su transformada se denotará por la correspondiente mayúscula:

$$\mathcal{L}\{f(x)\} = F(s), \mathcal{L}\{g(x)\} = G(s).$$

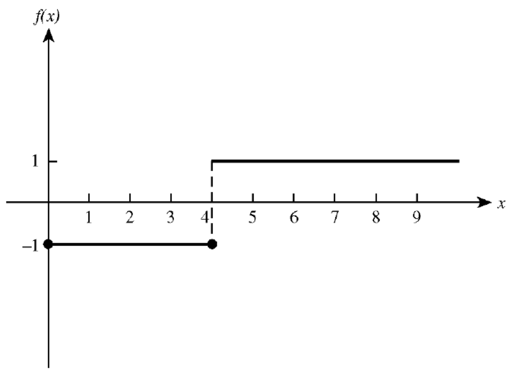
De manera similar, a, c_1, c_2 serán constantes arbitrarias.

Ejemplos

Encuentre la Transformada de Laplace de $f(x) = 1$.

Encuentre la Transformada de Laplace

$$f(x) = \begin{cases} -1 & x \leq 4 \\ 1 & x > 4 \end{cases}$$



Algunas fórmulas básicas

$$\mathcal{L}\left\{t^n\right\} = \frac{n!}{s^{n+1}}, \texttt{ n natural} \tag{14}$$

$$\mathcal{L}\left\{\sin(kt)\right\} = \frac{k}{s^2+k^2} \tag{15}$$

$$\mathcal{L}\left\{\cos(kt)\right\} = \frac{s}{s^2+k^2} \tag{16}$$

$$\mathcal{L}\left\{e^{at}\right\} = \frac{1}{s-a} \tag{17}$$

Linealidad

$$\mathcal{L}\left\{c_1 f(x) + c_2 g(x)\right\} = c_1 F(s) + c_2 G(s) \tag{PTL1}$$

Encuentre la Transformada de Laplace de $f(x) = 3 + 2x^2$.
Encuentre la Transformada de Laplace de

$$f(x) = 5\sin(3x) - 17e^{-2x}$$

Encuentre la Transformada de Laplace de

$$f(x) = 2\sin(x) + 3\cos(2x).$$

Encuentre la Transformada de Laplace de

$$f(x) = 2x^2 - 3x + 4.$$

Propiedades

Propiedades de la Transformada de Laplace

$$\mathcal{L}\left\{e^{ax} f(x)\right\} = F(s-a) \tag{PTL2}$$

$$\mathcal{L}\left\{x^n f(x)\right\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n}\left(F(s)\right) \tag{PTL3}$$

Encuentre la Transformada de Laplace de

$$g(x) = xe^{4x}$$

$$\mathcal{L}\left\{t^n e^{at}\right\} = \frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$$

Encuentre la Transformada de Laplace de

$$g(x) = e^{-2x}\sin(5x)$$

Encuentre la Transformada de Laplace de

$$g(x) = x\cos(\sqrt{7}x).$$

Encuentre la Transformada de Laplace de

$$g(x) = e^{-x}x\cos(2x).$$

Transformada Inversa de Laplace

Definición

Una *transformada inversa de Laplace* de $F(s)$, denotada por $\mathcal{L}^{-1}\left\{F(s)\right\}$, es una función $f(x)$ tal que

$$\mathcal{L}\left\{f(x)\right\} = F(s).$$

La manera más práctica de encontrar las inversas es identificar, en una tabla de transformadas, la función $F(s)$ como una transformada de Laplace de una función $f(x)$.

Generalmente, esto se hace manipulando algebraicamente $F(s)$.

Manipulación de denominadores

Para poder encontrar transformadas inversas de Laplace, necesitaremos manipular expresiones algebraicas.

Métodos algebraicos Especialmente, necesitaremos dos técnicas:

- Complemento de cuadrados.
- Fracciones parciales.

Complemento de cuadrados Si $p(x) = ax^2 + bx + c$, entonces

$$p(x) = a\left(x-h\right)^2 + k,$$

donde $h = -\dfrac{b}{2a}$ y $k = p(h)$.

Fracciones parciales Otro método útil que se recomienda repasar es la descomposición en fracciones parciales.

Linealidad

Si $\mathcal{L}\left\{f(x)\right\} = F(s)$, $\mathcal{L}\left\{g(x)\right\} = G(s)$ y $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, entonces

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{c_1F(s) + c_2G(s)\right\} = c_1f(x) + c_2g(x).$$

Ejemplos

Encontrar $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}$

Encontrar $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-8}\right\}$

Encontrar $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+6}\right\}$

Encontrar $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5s}{(s^2+1)^2}\right\}$

Encontrar $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+1}{s^2-9}\right\}$

E.D. Lineales con Coeficientes Constantes

Transformadas de Laplace de Derivadas

Denotaremos $\mathcal{L}\{y(x)\}$ por $Y(s)$. Bajo condiciones muy generales, la transformada de Laplace de la $n-$ésima derivada, $n = 1, 2, 3...$ de $y(x)$ está dada por

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left\{\frac{d^n y}{dx^n}\right\} =& s^n Y(s) - s^{n-1}y(0) - s^{n-2}y'(0) - \cdots \\ & - sy^{(n-2)}(0) - y^{(n-1)}(0).\end{aligned}$$

Si las condiciones iniciales en $y(x)$ en $x = 0$ está dada por

$$y(0) = c_0,\ y'(0) = c_1, \cdots,\ y^{(n-1)}(0) = c_{n-1},$$

entonce () se puede reescribir como

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left\{\frac{d^n y}{dx^n}\right\} =& s^n Y(s) - s^{n-1}c_0 - s^{n-2}c_1 - \cdots \\ & - sc_{n-2} - c_{n-1}.\end{aligned}$$

Casos Especiales

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left\{y'(x)\right\} &= sY(s) - c_0 \\ \mathcal{L}\left\{y''(x)\right\} &= s^2Y(s) - c_0 s - c_1.\end{aligned}$$

Ejemplos

Resuelva

$$\begin{cases} y' - 5y = 0; \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

Resuelva

$$\begin{cases} y' - 5y = e^{5x}; \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Resuelva

$$\begin{cases} y' + y = \sin(x); \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Resuelva

$$\begin{cases} y'' + 4y = 0; \\ y(0) = 2,\ y'(0) = 2. \end{cases}$$

Resuelva

$$\begin{cases} y'' - y' - 2y = 4x^2; \\ y(0) = 1,\ y'(0) = 4. \end{cases}$$

Resuelva

$$\begin{cases} y'' - 3y' + 4y = 0; \\ y(0) = 1,\ y'(0) = 5. \end{cases}$$

Transformada de funciones discontinuas

Convolución

La convolución de dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ se define como

$$f(x) * g(x) = \int_0^x f(t)g(x-t)dt.$$

$$\begin{aligned} f(x) * g(x) &= g(x) * f(x) \\ f(x) * (g(x) + h(x)) &= f(x) * g(x) + f(x) * h(x). \end{aligned}$$

[Teorema de Convolución] Si $\mathcal{L}\{f(x)\} = F(s)$ y $\mathcal{L}\{g(x)\} = G(s)$, entonces

$$\mathcal{L}\{f(x) * g(x)\} = F(s)G(s).$$

De los teoremas anteriores, obtenemos

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)G(s)\} = f(x) * g(x) = g(x) * f(x).$$

Función Escalón

La función escalón se define como

$$u(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x \geq 0. \end{cases}$$

Al hacer un cambio de coordenadas $x' = x - c$, obtenemos

$$u(x-c) = \begin{cases} 0 & x < c \\ 1 & x \geq c. \end{cases}$$

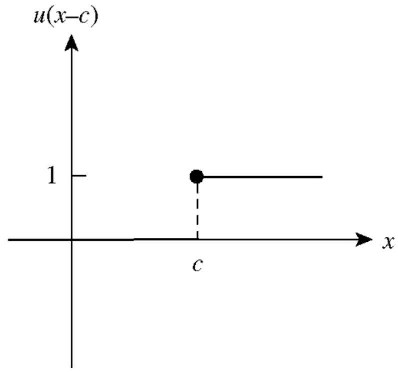


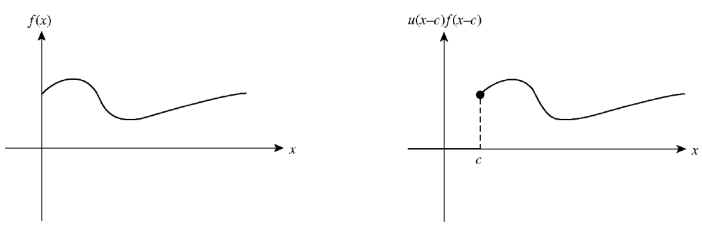
Figura 35: Función Escalón $u(x-c)$

$$\mathcal{L}\left\{u(x-c)\right\} = \frac{1}{s}e^{-cs}.$$

Traslaciones

Para cualquier función $f(x)$, definida para $x \geq 0$, obtenemos

$$u(x-c)f(x-c) = \begin{cases} 0 & x < c \\ f(x-c) & x \geq c. \end{cases}$$



Si $F(s) = \mathcal{L}\left\{f(x)\right\}$, entonces

$$\mathcal{L}\left\{u(x-c)f(x-c)\right\} = e^{-cs}F(s).$$

De manera inversa

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{e^{-cs}F(s)\right\} = u(x-c)f(x-c).$$

Ejemplos

Sean $f(x) = e^{3x}$ y $g(x) = e^{2x}$.

1. Calcule $f(x) * g(x)$;
2. calcule $g(x) * f(x)$;
3. verifique el teorema .

Encuentre

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2 - 5s + 6}\right\}$$

por convoluciones.

Encuentre

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{6}{s^2 - 1}\right\}$$

por convoluciones.

Encuentre

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s\left(s^2 + 4\right)}\right\}$$

por convoluciones.

Encuentre

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)^2}\right\}$$

por convoluciones.

Encuentre $\mathcal{L}\{g(x)\}$ si

$$g(x) = \begin{cases} 0 & x < 4 \\ (x-4)^2 & x \geq 4. \end{cases}$$

Encuentre $\mathcal{L}\{g(x)\}$ si

$$g(x) = \begin{cases} 0 & x < 4 \\ x^2 & x \geq 4. \end{cases}$$

Sistemas de Ecuaciones Diferenciales

Proyecto final: Ecuaciones diferenciales

Teoría

Consideremos la siguiente ecuación diferencial

$$x'(t) = cx(t).$$

Esta ecuación describe un modelos donde la razón de crecimiento instantaneo x' es propocional al estado del sistema, en un momento determinado. Aplicaciones de este modelo incluyen:

1. Crecimiento poblacional;
2. decaimiento radioactivo;
3. la Ley de Newton, para la temperatura de un cuerpos; y
4. interés compuesto.

De hecho, si conocemos la condición *inicial,* es decir, el valor del sistema en el tiempo $t = 0$, podemos encontrar una *única solución al problema*.

La única solución *continuamente diferenciable* a la ecuación diferencial

$$x' = cx,$$

con condición incial $x(0) = x_0$ es

$$x(t) = e^{tc}x_0.$$

Es fácil comprobar que () es un solución derivando de manera usual; que esta sea la *única solución* con derivada continua es resultado del *teorema fundamental de las ecuaciones diferenciales ordinarias.*

Sin embargo, este modelo solo describe un sistema con una cantidad que evoluciona con el tiempo, ¿como modelar un sistema con más cantidades?

Podemos pensar que existen cantidades $x_1(t), ..., x_n(t)$ de manera que la razón de cambio de cada una sea *combinación lineal* de cada una de los estados del sistema, es decir, para $k = 1, ..., n$:

$$x'_k(t) = a_{k,1}x_1(t) + ... + a_{k,n}x_n(t).$$

Esto es una manera de generalizar el hecho de que para una sola cantidad, su razón de cambio instantanea sea *proporcional*.

De manera matricial, podemos escribir este sistema como

$$\begin{bmatrix} x'_1(t) \\ \vdots \\ x'_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & ... & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & ... & a_{n,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}.$$

Si definimos

$$\begin{cases} x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \\ x'(t) = \begin{bmatrix} x'_1(t) \\ \vdots \\ x'_n(t) \end{bmatrix} \\ A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & ... & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & ... & a_{n,n} \end{bmatrix} \end{cases}$$

el sistema anterior se puede reescribir como

$$x'(t) = Ax(t).$$

Note como se parece este sistema al de una sola variable. De hecho, así como podemos definir e^a para $a \in \mathbb{R}$, es posible definir e^A, donde A es una matriz $n \times n$. Para esto, necesitamos la siguiente definición de la función exponencial.

$$e^x = \sum_{k \geq 0} \frac{x^k}{k!}$$

Esta definición tiene sentido para matrices porque $A^k = A \cdots A$ un número k de veces.

La única solución de la ecuación diferencial *vectorial*

$$x'(t) = Ax(t),$$

para $x(t) \in \mathbb{R}^n$ para cada $t \in \mathbb{R}$ y $A \in M_n$, con condición inicial

$$x_0 = \begin{bmatrix} x_{1,0} \\ \vdots \\ x_{n,0} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

es

$$x(t) = e^{tA}x_0.$$

Sin embargo, calcular la n-ésima potencia de una matriz puede ser demasiado complicado... excepto para matrices diagonales.

Si

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & & \\ 0 & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

es una matriz diagonal, entonces

$$D^k = \begin{bmatrix} \lambda_1^k & 0 & & \\ 0 & \lambda_2^k & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n^k \end{bmatrix}.$$

Demostración. La demostración se puede hacer por inducción. □

Supongamos que $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es una tranformación lineal, cuya representación matricial A (en la base estandar E) es diagonalizable y P es la matriz de paso de la base F de vectores propios a la base E. Entonces si D es la matriz que representa la misma transformación en la base F, sabemos que

$$A = PDP^{-1}.$$

Por inducción, no es difícil demostrar que

$$A^n = PD^nP^{-1},$$

y por tanto, multiplicando por un escalar $t \in \mathbb{R}$,

$$tA^n = P(tD^n)P^{-1}.$$

Antes de continuar, recordemos que por propiedades distributivas de las matrices

$$R(M + N)S = RMS + RNS,$$

o de manera más generalizar

$$\sum (RM_kS) = R\left(\sum M_k\right)S.$$

Entonces

$$\begin{aligned} e^{tA} &= \sum_{k\geq 0} \frac{(tA)^k}{k!} \\ &= \sum_{k\geq 0} \frac{\left(P(tD^n)P^{-1}\right)^k}{k!} \\ &= P\left(\sum_{k\geq 0} \frac{(tD^n)^k}{k!}\right) P^{-1} \\ &= Pe^{tD}P^{-1}. \end{aligned}$$

Basta entonces encontrar e^{tD}. Pero como vimos, calcular las potencias de D no es dificil.

$$\begin{aligned} e^{tD} &= \sum_{k\geq 0} \frac{1}{k!}(tD)^k \\ &= \sum_{k\geq 0} \frac{1}{k!} \begin{bmatrix} (t\lambda_1)^k & 0 & & \\ 0 & (t\lambda_2)^k & & \\ & & \ddots & \\ & & & (t\lambda_n)^k \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \sum_{k\geq 0} \frac{1}{k!}(t\lambda_1)^k & 0 & & \\ 0 & \sum_{k\geq 0} \frac{1}{k!}(t\lambda_2)^k & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sum_{k\geq 0} \frac{1}{k!}(t\lambda_n)^k \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} e^{t\lambda_1} & 0 & & \\ 0 & e^{t\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{t\lambda_n} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

¡Listo!

Ejemplos

Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = x + 2y \end{cases}$$

con condiciones inciales

$$x(0) = 0,\ y(0) = 3.$$

Rescribimos $x = x_1, y = x_2$ y podemos escribir el sistema de forma matricial, en la siguiente manera

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

Entonces

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Usando `WxMaxima`, podemos encontrar los valores y vectores propios.

```
(%i1)  A: matrix(
        [-1,0],
        [1,2]
       );
```

(%o1) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

```
(%i2)  eigenvectors(%);
```

(%o2) $[[[-1,2],[1,1]],[[[1,-\frac{1}{3}]],[[0,1]]]]$

Esto quiere decir que $\lambda_1 = -1$ es un valor propio con vector propio

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{3} \end{bmatrix},$$

mientras que $\lambda_2 = 2$ también lo es, con vector propio

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Como tenemos dos vectores propios en un espacio de dimensión dos, basta verificar que son linealmente independiente, para saber que forman una base. Para comprobar que son linealmente independientes, formamos una matriz que tenga como columnas a estos vectores y verificamos que esta matriz es invertible.

```
(%i4)  P: matrix(
        [1,0],
        [-1/3,1]
       );
```

(%o4) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}$

```
(%i5)  determinant(%);
```

(%o5) 1

Entonces, $F = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{3} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$ es una base de $\mathbb{R}^2$, de vectores propios de A. Por tanto A es diagonalizable. Como P es la matriz de cambio de la base F a la base estandar E, usamos la siguiente identidad

$$D = P^{-1}AP,$$

para encontrar la matriz diagonalizada D. Denotaremos a P^{-1} por Q.

```
(%i6) Q:invert(P);
```

(%o6) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}$

```
(%i7) D:Q.A.P;
```

(%o7) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

Entonces, sabemos que

$$e^{tD} = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix},$$

y podemos hallar e^{tA} con la ecuación

$$e^{tA} = Pe^{tD}P^{-1}.$$

Podemos hacer los cálculos en `WxMaxima` de la siguiente manera

```
(%i8) matrix(
       [%e^(-t),0],
       [0,%e^(2*t)]
      );
```

(%o8) $\begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{2\,t} \end{pmatrix}$

```
(%i9) P.%o8.Q;
```

(%o9) $\begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ \frac{e^{2\,t}}{3} - \frac{e^{-t}}{3} & e^{2\,t} \end{pmatrix}$

Es decir,

$$e^{tA} = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ \frac{e^{2\,t}}{3} - \frac{e^{-t}}{3} & e^{2\,t} \end{bmatrix}$$

Las condiciones inciales se pueden escribir en forma vectorial como

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix},$$

y por tanto, nuestra solución sera

$$\begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ \frac{e^{2\,t}}{3} - \frac{e^{-t}}{3} & e^{2\,t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Realizamos los cálculos en `WxMaxima` de la siguiente manera. Primero introducimos el vector como si fuera una matriz de dos reglos y una columnas

```
(%i10) matrix(
        [0],
        [3]
       );
```

$$(\%o10)\ \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

y posteriormente hacemos la multiplicación, recordando que `WxMaxima` le asigno la etiqueta `%o9` a nuestra matriz e^{tA}, y la etiqueta `%o10` a nuestro vector de condiciones inciales.

```
(%i11) %o9.%o10;
```

$$(\%o11)\ \begin{pmatrix} 0 \\ 3\,e^{2\,t} \end{pmatrix}$$

Por tanto, la solucion a nuestro sistema de ecuaciones diferenciales es

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3e^{2t} \end{bmatrix}.$$

Proyecto final

Resuelva los siguientes sistema de ecuaciones diferenciales, como se hizo en el ejemplo anterior. Debe plantear de manera correcta todos los pasos, indicar los cálculos que hizo en `WxMaxima` y escribiendo de manera clara sus conclusiones. El proyecto puede ser elaborado por equipos de a lo más tres personas, y debe ser entregado en computadora el día del examen final.[3]

[3] Para copiar el cógido que introduzca en `WxMaxima`, seleccione con el botón izquierdo de su ratón, el lado izquierdo del código, de manera que cambie a color azul como en la figura **??** y posteriormente presione el botón derecho, y seleccione la opción copiar.

1.
$$\begin{cases} x_1' = 2x_1 + x_2 \\ x_2' = x_1 + x_2 \end{cases}$$
con condiciones iniciales $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = 1$.

2.
$$x' = Ax$$
con
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$
y condiciones iniciales
$$x(0) = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

3.
$$x' = Ax$$

con

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

y condiciones iniciales

$$x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ -b \\ b \end{bmatrix}.$$

Solución de Sistemas Lineales

Resuelva el siguiente sistema para las funciones incógnitas $u(x)$ y $v(x)$:

$$\begin{aligned} u' + u - v &= 0 \\ v' - u + v &= 2 \\ u(0) &= 1 \\ v(0) &= 2 \end{aligned}$$

Resuelva el siguiente sistema para las funciones incógnitas $y(x)$ y $z(x)$:

$$\begin{aligned} y' + z &= x \\ z' + 4y &= 0 \\ y(0) &= 1 \\ z(0) &= -1 \end{aligned}$$

Resuelva el siguiente sistema para las funciones incógnitas $w(x)$, $y(x)$ y $z(x)$:

$$\begin{aligned} w' + y &= \sin x \\ y' - z &= e^x \\ z' + w + y &= 1 \end{aligned}$$

$$w(0) = 0,\ y(0) = 1,\ z(0) = 1$$

Resuelva el siguiente sistema para las funciones incógnitas $y(x)$ y $z(x)$:

$$\begin{aligned} y'' + z + y &= 0 \\ z' + y' &= 0 \end{aligned}$$

$$y(0) = 0,\ y'(0) = 0,\ z(0) = 1$$

Resuelva el siguiente sistema para las funciones incógnitas $y(x)$ y $z(x)$:

$$\begin{aligned} z'' + y' &= \cos x \\ y'' - z &= \sin x \end{aligned}$$

$$z(0) = -1,\ z'(0) = -1,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0$$