GITHUB.COM/JULIHOCC

CÁLCULO

JULIHO CASTILLO COLMENARES PH.D.

Índice general

1 Cálculo Diferencial

1.1 Límites y continuidad

Límites

Diremos que la función tiene un *límite* L *cuando* x *aproxima* a si para cada $\epsilon > 0$, podemos encontrar $\delta > 0$ tal que

$$|f(x) - l| < \epsilon$$

siempre que

$$0 < |x - a| < \delta.$$

En ese caso, escribimos

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

Problema Resuelto 1.1. *Calcula los siguientes límites, trazando las gráficas correspondientes:*

(I) $\lim_{x\to 1} \left(x^2 - 4x + 8\right)$

(II) $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{x-2}$

(III) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x}$

Proposición 1.1. *Si* $\lim_{x\to a} f_1(x) = L_1$ *y* $\lim_{x\to a} f_2(x) = L_2$, *entonces*

(I) $\lim_{x\to a} \left(f_1(x) \pm f_2(x)\right) = L_1 \pm L_2$

(II) $\lim_{x\to a} \left(f_1(x) f_2(x)\right) = L_1 L_2$.

(III) $\lim_{x\to a} \dfrac{f_1(x)}{f_2(x)} = \dfrac{L_1}{L_2}$ siempre y cuando $L_2 \neq 0$.

Continuidad

Diremos que una función es *continua en el punto* $x = a$ si

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Problema Resuelto 1.2. *Verifica que* $f(x) = x^2 - 4x + 8$ *es continua en* $x = 1$*, pero que*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} & x \neq 2 \\ 6 & x = 2 \end{cases}$$

es discontinua *en* $x = 2$.

En ese caso, decimos que $x = 2$ *es una* discontinuidad.

Definición 1.1. *Si* $f(x)$ *es continua en cada punto del intervalo* $x_1 < x < x_2$*, entonces diremos que es continua en dicho intervalo.*

Proposición 1.2. *Si* $f(x)$ *y* $g(x)$ *son continuas en un mismo intervalo, entonces también lo son*

(I) $f(x) \pm g(x)$

(II) $f(x)g(x)$

(III) $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ *siempre que* $g(x) \neq 0$ *en dicho intervalo.*

1.2 *Derivadas*

Primeras definiciones

Definición 1.2. *La* derivada *de* $y = f(x)$ *en el punto* x *está definida como*

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

donde $h = \Delta x$, $\Delta y = f(x+h) - f(x) = f(x + \Delta x) - f(x)$ *siempre que tal límite exista.*

Observación 1.1. *Si* $\Delta x \approx 0$ *y* $f'(x)$ *existe, entonces*

$$\Delta y \approx f'(x)\Delta x.$$

En física, el diferencial de x *es un cambio* infinitesimal *en dicha variable.*

Definición 1.3. *Si* $y = f(x)$ *y* $f'(x)$ *existe, el diferencial de* y *está dado por*

$$dy = f'(x)dx$$

El proceso de encontrar las derivadas de una función se conoce como *diferenciación*.

Definición 1.4 (Derivadas de alto orden)**.**

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \begin{cases} f(x) & n = 0 \\ \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} f(x)\right) & n > 0 \end{cases}$$

Usualmente rescribimos

$$y' = \frac{dy}{dx}$$
$$y'' = \frac{d^2 y}{dx^2}$$

En el caso $n > 2$, es más común escribir $y^{(n)}$ para denotar a la $n-$ésima derivada.

Interpretación geométrica

Geométricamente, la derivada $f'(a)$ de una función $f(x)$, en un punto dado $x = a$, representa *pendiente de la recta tangente* a $y = f(x)$ en el punto $(a, f(a))$.

Relación con continuidad

Si una función tiene derivada en un punto, entonces es continua en dicho punto. Sin embargo, el recíproco no es necesariamente cierto.

Problema Resuelto 1.3. *Demuestra que la función de valor absoluto $f(x) = \sqrt{x^2}, x \in \mathbb{R}$ es continua en toda la recta real, pero no tiene derivada en $x = 0$.*

Fórmulas de derivación

En lo subsecuente, u, v representarán funciones de x, mientras que a, c, p representarán constantes.

Supondremos que las derivadas de u y v existe, es decir, que son diferenciables.

1. $\dfrac{d}{dx}(u \pm v) = \dfrac{du}{dx} \pm \dfrac{dv}{dx}$
2. $\dfrac{d}{dx}(cu) = c\dfrac{du}{dx}$
3. $\dfrac{d}{dx}(uv) = u\dfrac{dv}{dx} + v\dfrac{du}{dx}$
4. $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{v(du/dx) - u(dv/dx)}{v^2}$
5. $\dfrac{d}{dx}u^p = pu^{p-1}\dfrac{du}{dx}$
6. $\dfrac{d}{dx}(a^u) = a^u \ln a$

Figura 1.1: Fórmulas usuales de derivadas

En particular, cuando $u = x$, las fórmulas se simplifican porque $\dfrac{du}{dx} = 1$.

7. $\frac{d}{dx} e^u = e^u \frac{du}{dx}$
8. $\frac{d}{dx} \ln u = \frac{1}{u} \frac{du}{dx}$
9. $\frac{d}{dx} \sin u = \cos u \frac{du}{dx}$
10. $\frac{d}{dx} \cos u = -\sin u \frac{du}{dx}$
11. $\frac{d}{dx} \tan u = \sec^2 u \frac{du}{dx}$
12. $\frac{d}{dx} \cot u = -\csc^2 u \frac{du}{dx}$
13. $\frac{d}{dx} \sec u = \sec u \tan u \frac{du}{dx}$
14. $\frac{d}{dx} \csc u = -\csc u \cot u \frac{du}{dx}$
15. $\frac{d}{dx} \sin^{-1} u = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \frac{du}{dx}$
16. $\frac{d}{dx} \cos^{-1} u = \frac{-1}{\sqrt{1-u^2}} \frac{du}{dx}$
17. $\frac{d}{dx} \tan^{-1} u = \frac{1}{1+u^2} \frac{du}{dx}$
18. $\frac{d}{dx} \cot^{-1} u = \frac{-1}{1+u^2} \frac{du}{dx}$
19. $\frac{d}{dx} \sinh u = \cosh u \frac{du}{dx}$
20. $\frac{d}{dx} \cosh u = \sinh u \frac{du}{dx}$

Figura 1.2: Fórmulas usuales de derivadas

Problema Resuelto 1.4. *Demostrar que si u y v son funciones diferenciables*

(I)

$$\frac{d}{dx}(u+v) = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$$

(II)

$$\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{du} + v\frac{du}{dx}$$

Problema Resuelto 1.5. *Demostrar que si $f(x)$ tiene una derivada en $x = a$, entonces $f(x)$ es continua en $x = a$.*

Problema Resuelto 1.6. *Demostrar que si p es cualquier entero positivo, y u es una función diferenciable respecto a x, entonces*

$$\frac{d}{dx}u^p = pu^{p-1}\frac{du}{dx}$$

1.3 *Derivación implícita*

Denotaremos por y' la derivada $\frac{dy}{dx}$.

Problema Resuelto 1.7. *Si*

$$x^2 + y^2 = r^2,$$

donde r es una constante, encontrar y'.

Solución 1.1. *Por regla de la cadena, $(y^2)' = 2yy'$. Esto porque*

$$\frac{dy^2}{dx} = \frac{dy^2}{dy}\frac{dy}{dx}.$$

Si derivamos el lado izquierdo de la ecuación, respecto de x, usando linealidad, obtenemos $2x + 2yy'$, mientras que si derivamos el derecho, ya que r^2 es contante, obtenemos cero e igualando, tenemos que

$$2x + 2yy' = 0.$$

Después de despejar obtenemos que

$$y' = -\frac{x}{y}.$$

Observación 1.2. *Observe que*

$$x^2 + y^2 = r^2$$

es la ecuación de un círculo con centro en el origen con radio $r > 0$. *Use* `Sagemath` *para graficar esta ecuación para un radio dado, por ejemplo,* $r = 5$.

1. *Compare las pendientes de las rectas tangente en* (x, y) *y* $(-x, -y)$. *¿Que relación sobre estás dos rectas podemos deducir?*

2. *Compare las pendiente de la recta tangente en* (x, y) *y la recta que pasa por el origen y este punto. ¿Que relación sobre estás dos rectas podemos deducir?*

Problema Resuelto 1.8. *Si*

$$x^3 + y^3 = 6xy,$$

encontrar y'.

Solución 1.2. *Por regla de la cadena*

$$\frac{d}{dx}\left(y^3\right) = \frac{dy^3}{dy}\frac{dy}{dx},$$

es decir, $(y^3)' = \left(3y^2\right)\left(y'\right)$.
Además, por la regla de Leibniz,

$$(xy)' = x'y + xy' = y + xy'.$$

Entonces, derivando ambos lados de la ecuación, y usando linealidad, tenemos que

$$3x^2 + 3y^2y' = 6\left(y + xy'\right).$$

Despejando y', *obtenemos*

$$y' = \frac{2y - x^2}{y^2 - 2x}.$$

Problema Resuelto 1.9. *Encuentre* y' *en términos de* x, *si* $y = \arcsin(x)$, *con imagen* $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$.

Solución En este caso $x = \sin(y)$. Por regla de la cadena obtenemos que

$$\frac{d}{dx}\sin(y) = \frac{d}{dy}\sin(y)\frac{dy}{dx} = \cos(y)y'.$$

Sin embargo,también sabemos que

$$\frac{d}{dx}\sin(y) = \frac{dx}{dx} = 1.$$

Por lo cual $1 = \cos(y)y'$, y entonces $y' = 1/\cos(y)$. Pero también sabemos que, por la manera en que escogemos el rango de y, $\cos(y) > 0$, y por tanto

$$\cos(y) = \sqrt{1-\sin^2(y)} = \sqrt{1-x^2}.$$

Es decir

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Problema Resuelto 1.10. *Encuentre y'.*

1. $\sin(x+y) = y^2\cos(x)$,
2. $x^4 + y^2 = 16$,
3. $y = \arccos(x)$,
4. $y = \arctan(x)$.

1.4 *Derivación logarítmica*

Recordemos que $y = e^x$ si y solo si $x = \ln(y)$, por lo cual $\ln(y)$ solamente está definido para $y > 0$. Dos propiedades fundamentales del logaritmo son las siguientes:

1. $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$,
2. $\ln(a^b) = b\ln(a)$.

De esto se deduce, usando leyes de los exponentes, que $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$.

Por regla de la cadena,

$$\frac{d}{dx}\ln(y) = \frac{d}{dy}\ln(y)\frac{dy}{dx},$$

es decir,

$$(\ln(y))' = \frac{y'}{y}.$$

De esto se deduce que

$$y' = y\left(\frac{d}{dx}\ln(y)\right).$$

Esta forma de derivar, conocida como *derivación logarítmica*, es especialmente útil si necesitamos derivar funciones que involucren multiplicación, división, exponenciación y radicales.

Problema Resuelto 1.11. *Si* $y = \dfrac{x+1}{\sqrt{x-2}}$, *encontrar* y'.

Solución Primero, escribimos $y = (x+1)(x-2)^{-1/2}$. Entonces

$$\ln(y) = \ln(x+1) - \frac{1}{2}\ln(x-2),$$

de donde

$$\frac{d}{dx}\ln(y) = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-2}\right).$$

Simplificando la última expresión obtenemos

$$\frac{d}{dx}\ln(y) = \frac{x-3}{2(x+1)(x-2)},$$

de donde obtenemos

$$y' = \left(\frac{x+1}{(x-2)^{1/2}}\right)\left(\frac{x-3}{2(x+1)(x-2)}\right),$$

y simplificando obtenemos,

$$y' = \frac{x-3}{2(x-2)^{3/2}}.$$

De hecho, podemos obtener la fórmula para la derivada del cociente usando la fórmula (1.4). En efecto,

$$\ln\left(\frac{f}{g}\right) = \ln(fg^{-1}) = \ln(f) - \ln(g).$$

Derivando obtenemos

$$\frac{d}{dx}\ln\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{f'}{f} - \frac{g'}{g}.$$

Entonces

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \left(\frac{f}{g}\right)\left(\frac{f'}{f} - \frac{g'}{g}\right) = \frac{f'g - g'f}{g^2}.$$

Otro ejemplo del uso de la derivada es el siguiente. Supongamos que $y = x^\alpha$, con $x \neq 0$. Entonces $\ln(y) = \alpha\ln(x)$, y por tanto

$$\frac{d}{dx}\ln(y) = \frac{\alpha}{x}.$$

Entonces $y' = (x^\alpha)\left(\alpha x^{-1}\right) = \alpha x^{\alpha-1}$.

Por último, derivaremos $y = \ln|x|$. Observe que solamente necesitamos deducir el caso cuando $x < 0$, es decir $|x| = -x$. En esta situación $y = \ln(-x)$y por regla de la cadena, sustituyendo $u = -x$, $y = \ln(u)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = \frac{1}{u}u' = \frac{u'}{u}.$$

Pero $u' = -1$, y por tanto $\frac{d}{dx}\ln(-x) = \frac{-1}{-x} = \frac{1}{x}$. Entonces, siempre que $x \neq 0$,

$$\frac{d}{dx}\ln|x| = \frac{1}{x.}$$

Problema Resuelto 1.12. *Encuentre y' usando derivación logarítmica.*

1. $y = \dfrac{x^{3/4}\sqrt{x^2+1}}{(3x+2)^5}$,
2. $y = x^{\sqrt(x)}$,
3. $y = \ln(e^{-x} + xe^{-x})$,
4. $y = \dfrac{x}{1 - \ln(x-1)}$
5. $y = x^x$,
6. $y = x^{\sin(x)}$,
7. $x^y = y^x$.

Problema Resuelto 1.13. *Use la definición de derivada para demostrar que*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$$

1.5 Linealización

Supongamos que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es diferenciable en $a \in \mathbb{R}$, es decir, existe la derivada $f'(a)$. Como ya hemos visto, esta derivada es la *pendiente* de la *recta tangente*, que es la mejor *aproximación lineal* de f en a.

La ecuación de la recta tangente se puede obtener a partir de la siguiente ecuación:

$$\frac{y - f(a)}{x - a} = f'(a),$$

que es la ecuación de una recta que pasa por el punto $(a, f(a))$ con pendiente $f'(a)$.

Definición 1.5. *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función diferenciable. Definimos la* linealización *de f alrededor de (o con pivote en) $a \in \mathbb{R}$ como*

$$L_{f,a}(x) = f(a) + f'(a)(x - a).$$

La linealización $L_{f,a}(x)$ se puede usar para hacer calcular de manera bastante precisa de valor de $f(x)$ para $x \approx a$.

Aproximación de la raíz cuadrada

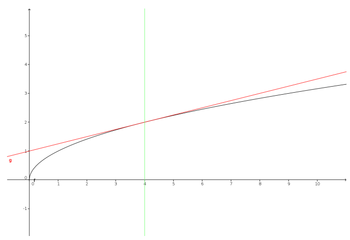


Figura 1.3: Linealización de $\sqrt{x}$ alrededor $a = 4$.

Existen varios algoritmos para calcular la raíz de un número real. Sin embargo, podemos calcular raíces de números reales de manera muy precisa, usando la linealización.

Por ejemplo, calculemos $\sqrt{4.1}$. Primero determinamos la función a linealizar, en este caso, $f(x) = \sqrt{x}$. La derivada de f es

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Después, escogemos como pivote el punto $a = 4$. En este caso $f(4) = 2$ y $f'(4) = \frac{1}{4}$. De donde obtenemos

$$L(x) = f(4) + f'(4)(x - 4) = 2 + \frac{1}{4}(x - 4).$$

Entonces

$$\sqrt{4.1} \approx L(4.1) = 2 + .25(4.1 - 4) = 2.025.$$

Si usáramos una calculador, obtendríamos $\sqrt{4.1} = 2.02484567313$.

El error absoluto entre este valor y el que obtuvimos de la aproximación es

$$|2.025 - 2.02484567313| \approx 1.54 \times 10^{-4}.$$

Problema Resuelto 1.14. *Use una aproximación lineal para calcular los siguientes valores. Posteriormente, use una calculadora para encontrar su valor y determine el error absoluto.*

1. $(2.001)^5$
2. $e^{-0.015}$
3. $(8.06)^{2/3}$

4. $\frac{1}{1002}$

5. $\tan(44^o)$

6. $\sqrt{99.8}$

1.6 Optimización univariada

Definición 1.6. *Sea $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Decimos que:*

1. *f alcanza su* valor máximo *o* máximo global *en $c \in D$ si $f(c) \geq f(x)$, para toda $x \in D$;*

2. *f alcanza su* valor mínimo *o* mínimo global *en $c \in D$ si $f(c) \leq f(x)$, para toda $x \in D$.*

Teorema 1.1 (Teorema del Valor Extremo)**.** *Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es continua, entonces f alcanza su máximo y su mínimo.*

Aunque el criterio anterior nos es útil al optimizar en intervalos compactos, es decir, de la forma $[a, b]$, en un caso general no siempre esto es cierto. Sin embargo, tenemos la siguiente noción de máximo (mínimo) en intervalos abiertos.

Definición 1.7. *Sea $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Decimos que:*

1. *f tiene un* máximo local *en $c \in D$ si existe un radio $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño, de manera que $f(c) \geq f(x)$, para toda $x \in (c - \epsilon, c + \epsilon) \subset D$;*

2. *f tiene un* mínimo local *en $c \in D$ si existe un radio $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño, de manera que $f(c) \leq f(x)$, para toda $x \in (c - \epsilon, c + \epsilon) \subset D$.*

Observación 1.3. *La condición de que exista si existe un radio $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño, y que $x \in (c - \epsilon, c + \epsilon) \subset D$ se puede entender como que $x \in D$ este suficientemente cerca de $c \in D$. De manera informal, podemos decir que f alcanza un máximo local en c si $f(c) \geq f(x)$ para x suficientemente cercanos a c. Lo mismo se puede decir para un mínimo local. Note que todo máximo (mínimo) global es, en particular, un máximo (mínimo resp.) local.*

Teorema 1.2 (Teorema de Fermat)**.** *Si $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ alcanza un máximo o mínimo local en $c \in D$ y $f'(c)$ existe, entonces* necesariamente $f'(c) = 0$.

Observación 1.4. *Debemos tener cuidado al usar el teorema de Fermat. Por ejemplo $f = |x|$ alcanza su mínimo en cero, pero* *en este punto la derivada no existe. En cambio, $f(x) = x^3$ tiene derivada igual a cero en $x = 0$, pero este punto no es máximo ni mínimo de la función.*

Como podemos apreciar, los puntos más interesantes para nuestro estudio son aquellos donde la derivada no existe o si existe, es igual a cero.

Definición 1.8. *Sea $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $c \in D$. Decimos que c es un punto crítico si $f'(c)$ no existe o si existe, $f'(c) = 0$.*

Con los resultados anteriores, podemos describir un criterio para optimizar funciones continuas en compactos.

Proposición 1.3. *Supongamos que*

1. *$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es continua,*
2. *$f : (a, b) \to \mathbb{R}$ es diferenciable.*

Si f alcanza su máximo (o mínimo) global en c, entonces

1. *$c = a$ o $c = b$, o*
2. *$f'(c) = 0$ un punto crítico.*

En decir, para encontrar donde f alcanza sus valores extremos, basta probar en los extremos del intervalo o en los puntos críticos, que se encuentran en su interior.

Problema Resuelto 1.15. *Encuentre el máximo y el mínimo global de la función $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ si $-\frac{1}{2} \le x \le 4$.*

Solución

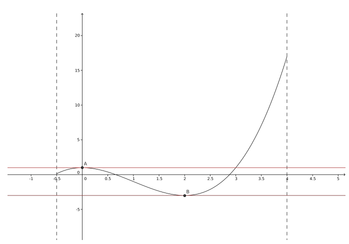


Figura 1.4: $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$

Como f es continua en $[-\frac{1}{2}, 4]$ y diferenciable en su interior $(-\frac{1}{2}, 4)$ (¿porqué?), podemos aplicar el criterio de la proposición 1.3.

Primero evaluamos en los extremos.

$$\begin{cases} f(-\frac{1}{2}) = \frac{1}{8} \\ f(4) = 17 \end{cases}$$

Derivamos f y obtenemos los puntos críticos, resolviendo la ecuación

$$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2) = 0.$$

Los puntos críticos son $x = 0$ y $x = 2$. Sus respectivos valores son $f(0) = 1$ y $f(2) = -3$.

Finalmente, basta comparar los diferente valores obtenidos para concluir que el máximo global es 17 y se alcanza en $x = 4$, mientras que el mínimo global es -3 y se alcanza en $x = 2$.

Problema Resuelto 1.16. *Encuentre los máximos y mínimos absolutos en el intervalo indicado. Grafique.*

1. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1,\ [-2, 3]$
2. $f(x) = \frac{x}{x^2 - x + 1},\ [0, 3]$
3. $f(x) = t\sqrt{4 - t^2},\ [-1, 2]$
4. $\phi(t) = 2\cos(t) + \sin(2t),\ [0, \frac{\pi}{2}]$
5. $f(x) = xe^{-x^2/8},\ [-1, 4]$
6. $f(x) = \ln(x^2 + x + 1),\ [-1, 1]$
7. $f(x) = x - 2\arctan(x),\ [0, 4]$

Optimización aplicada

Problema Resuelto 1.17. *Una caja abierta está hecha al cortar pequeños cuadrados congruentes, de las esquinas, de una hoja de lata de 12 in por 12 in, y doblando los lados hacía arriba.*

¿Qué tan largas deben ser las esquinas cortadas de las esquinas para hacer la caja tan grande como sea posible?

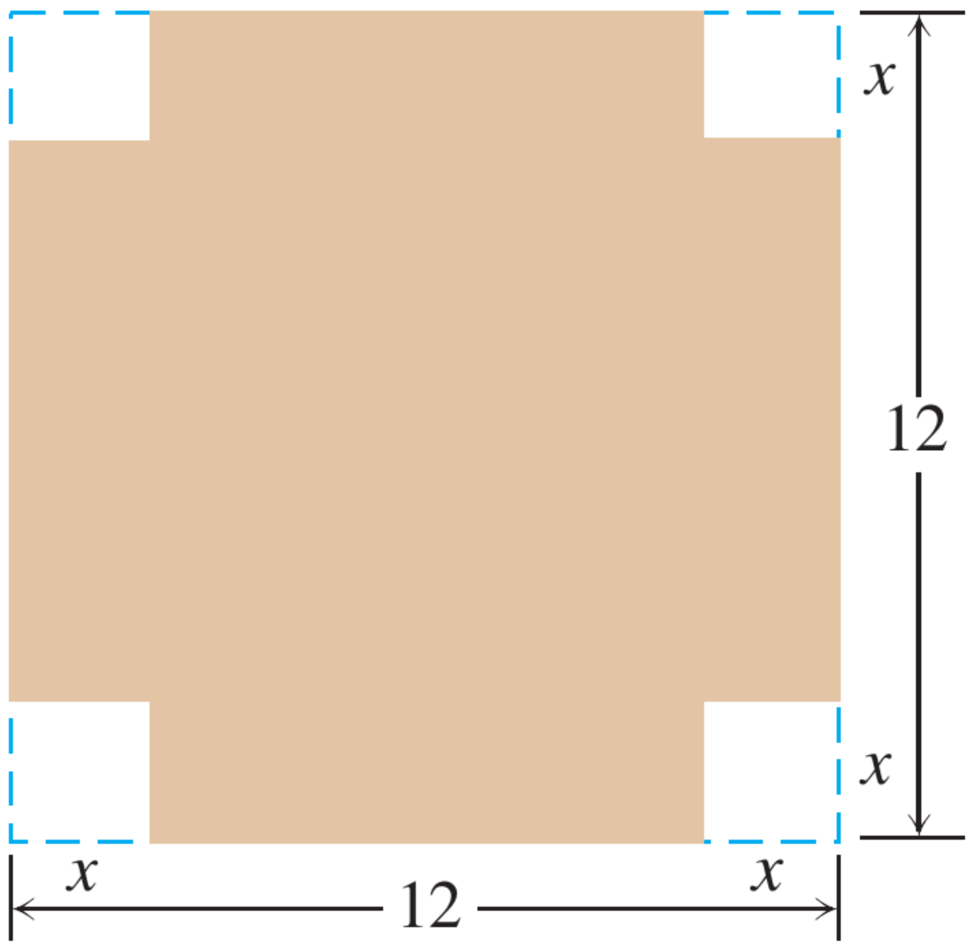
Se te ha pedido diseñar una lata de un litro, con la forma de un cilindro circular recto. ¿Qué dimensiones utilizarán el menor material posible?

Un rectángulo está inscrito en un semicírculo de radio 2. ¿Cuál es el área más grande que se puede obtener, y cuáles son las dimensiones?

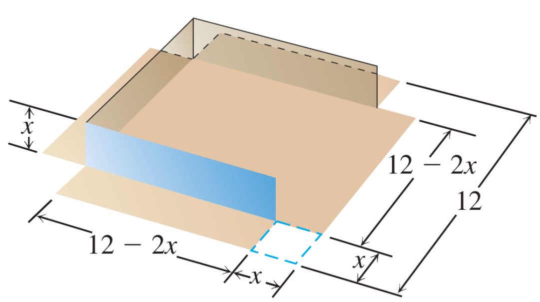
[Ley de Snell (refracción)] La velocidad de la luz depende del medio a través del cuál viaje, y es generalmente más lenta en medios más densos.

El *principio de Fermat* (de óptica) establece que la luz viaja fe un punto a otro a lo largo de un camino para el cual el tiempo es mínimo.

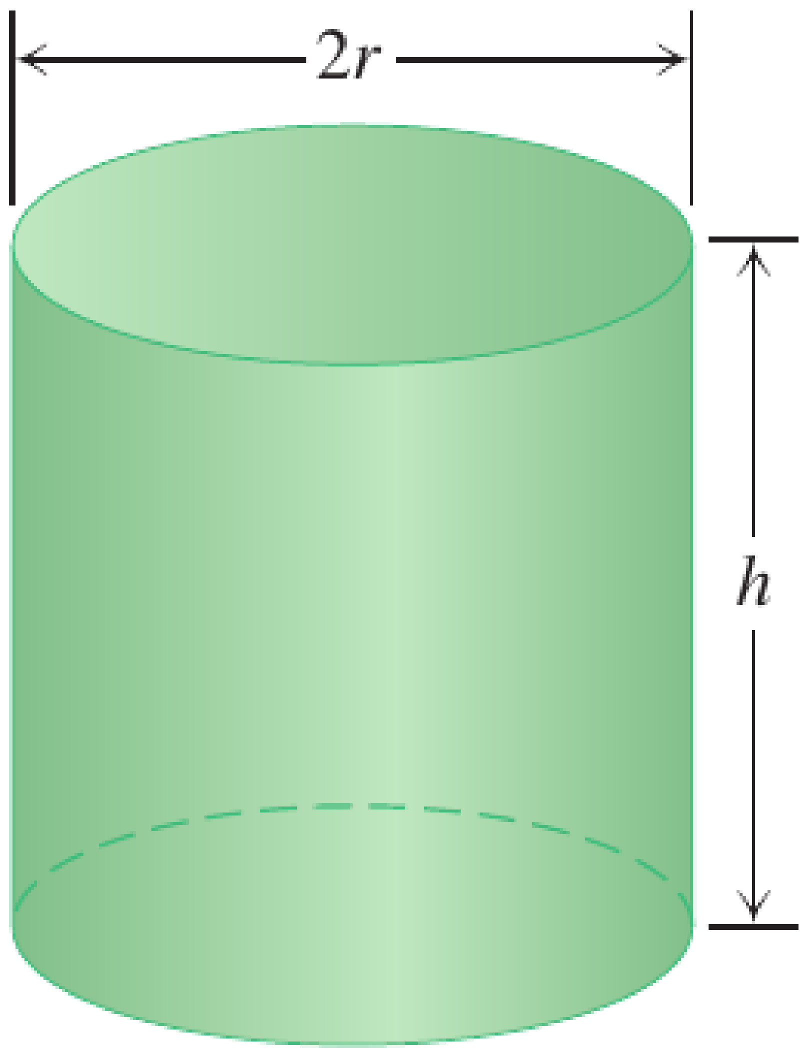
Describe el camino para el cuál un rayo de luz seguirá yendo de un punto A en un medio en el que la velocidad es c_1, a un punto B en un medio en el que la velocidad es c_2.



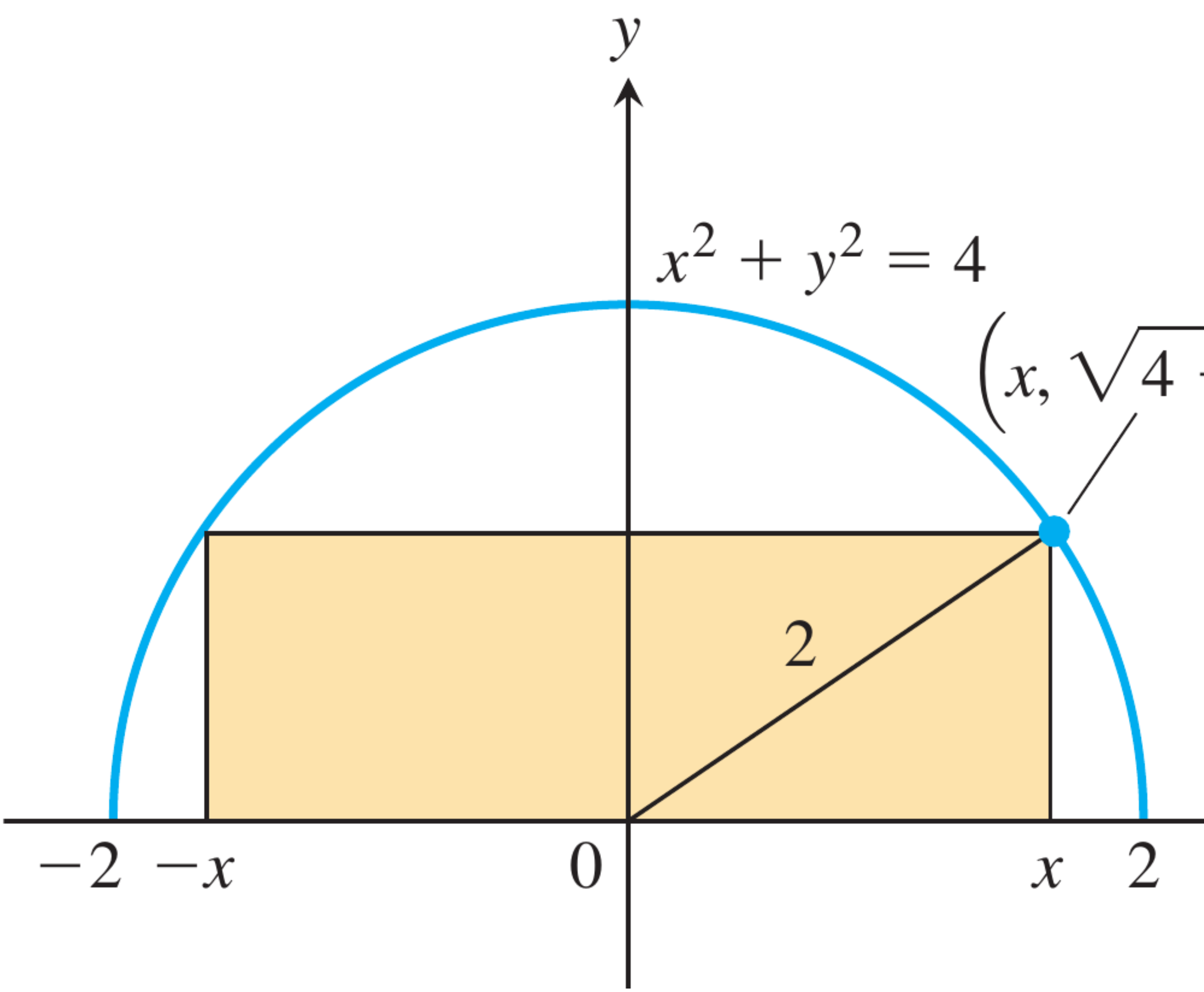
(a)



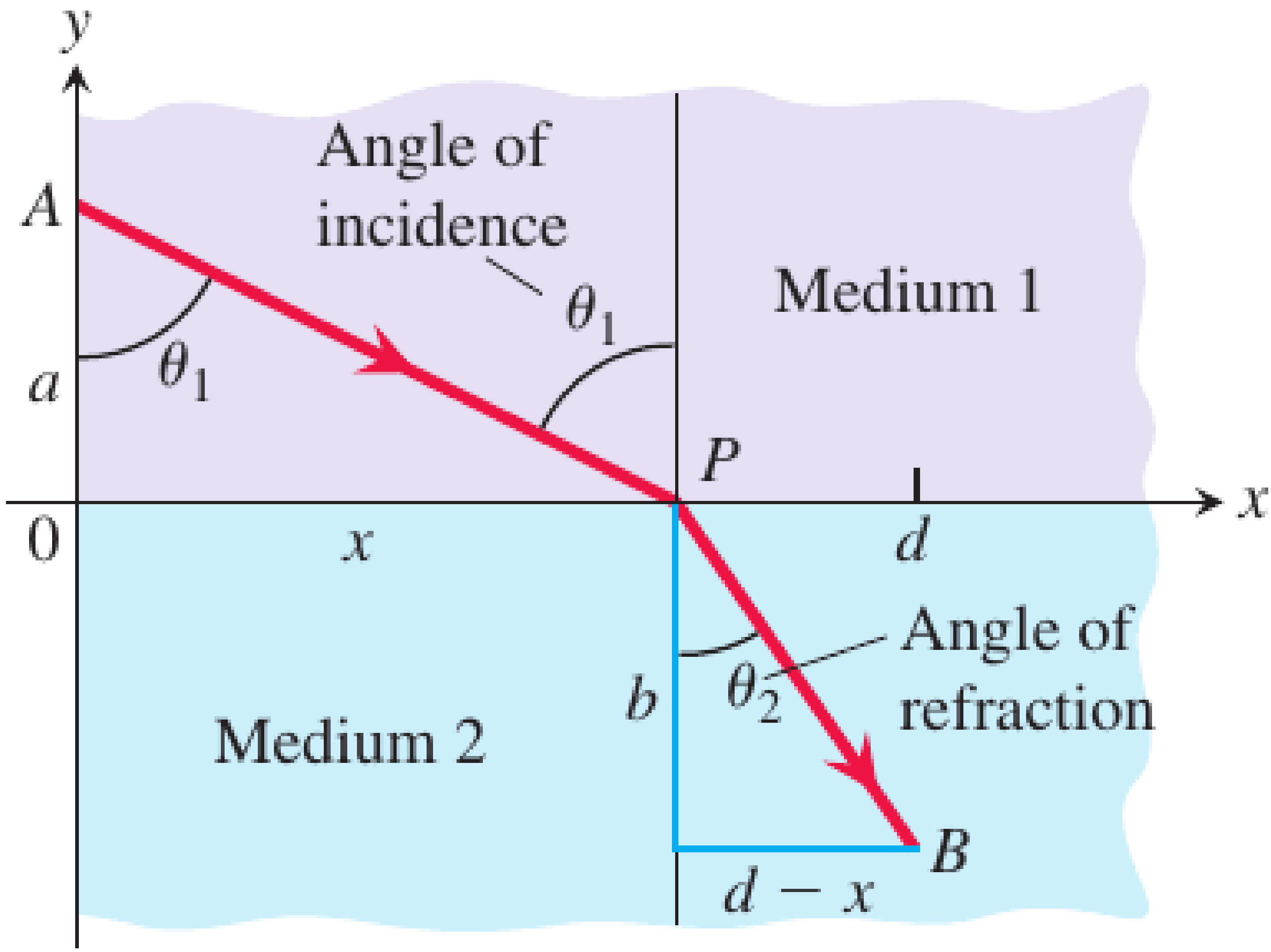
(b)



2r
h



y
$x^2 + y^2 = 4$
$\left(x, \sqrt{4\right.$
2
-2 $-x$
0
x 2


y
A
Angle of
incidence
θ_1
Medium 1
a
θ_1
P
0
x
d
x
Angle of
refraction
b
θ_2
Medium 2
B
$d - x$

1.7 *Análisis de Gráficas*

Supongamos que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función con segunda derivada. Podemos proceder de la siguiente manera para encontrar su gráfica.

1. Encontrar las raíces, es decir, los puntos c tales que $f(c) = 0$;
2. Encontrar los puntos críticos, es decir, los puntos c tales que $f'(c) = 0$;
   a) Si $f''(c) > 0$, entonces c es mínimo local,
   b) Si $f''(c) < 0$, entonces c es máximo local,
3. Encontrar los puntos de inflexión, es decir, los puntos c tales que $f'(c) = 0$.

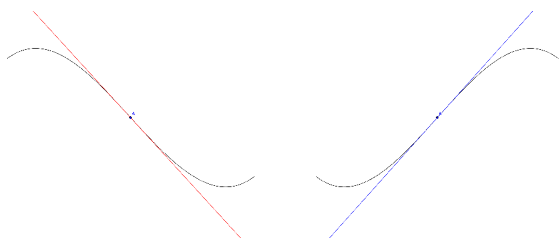


Figura 1.5: Puntos de inflexión

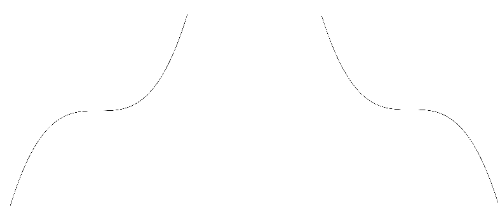


Figura 1.6: Puntos de silla

Los puntos de inflexión pueden ser como en la figura 1.5. Si f'' cambia de negativa a positiva, la gráfica localmente como la de la izquierda, mientras que en el otro caso, luce como en la de la derecha.

Falta por caracterizar los puntos críticos c donde $f''(c) = 0$, es decir, que también son puntos de inflexión. Estos puntos se les conoce como *puntos de silla* y alrededor de estos, la gráfica se ve como alguna de las de la figura 1.6.

Problema Resuelto 1.18. *Grafique la función $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - x$.*

Solución

Primero, resolvemos la ecuación

$$x^3 - x = 0,$$

y tenemos que las raíces de f son $x = -1, 0, 1$.

Después derivamos f:

$$f'(x) = 3x^2 - 1,$$

y resolvemos la ecuación $f'(c) = 0$.

Entonces, los puntos críticos de la función son $x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$. Utilizamos el criterio **??** para decidir si son máximo o mínimos locales, o incluso, puntos de silla.

La segunda derivada de f es

$$f''(x) = 6x.$$

Como $f''(\frac{1}{\sqrt{3}}) = 6\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) > 0$, entonces

$$c = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

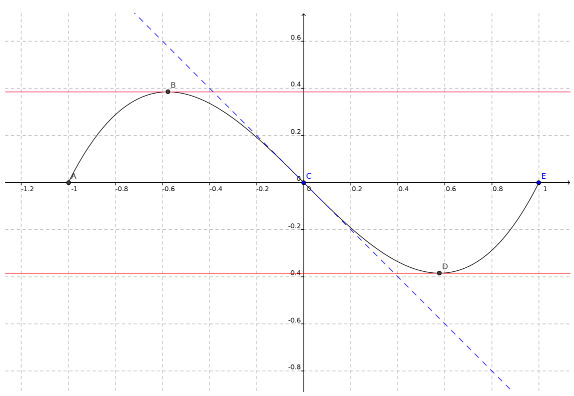
es un mínimo local.

De manera similar, concluimos que

$$c = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

es un máximo local.

Finalmente, resolvemos $f''(c) = 0$, pero la única solución es $c = 0$ y por tanto, este es el único punto de inflexión. Como antes de $c = 0$, $f'' < 0$, mientras que después $f'' >$, concluimos que en este punto, la gráfica se ve localmente como la gráfica de la derecha en la figura 1.5.



Podemos utilizar `Sagemath` para graficar y comparar con nuestros resultados. La gráfica esta dada en la figura 1.7.

1.8 Problemas de práctica

Límites y continuidad

Problema 1.1. *Demostrar por definición que* $\lim_{x\to 2} f(x) = 4$ *si*

(I) $f(x) = x^2$

(II) $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \neq 2 \\ 0 & x = 2 \end{cases}$

Problema 1.2. *Demostrar que si* $\lim_{x\to a} f_1(x) = l_1$ *y* $\lim_{x\to a} f_2(x) = l_2$*, entonces*

$$\lim_{x\to a} (f_1(x) + f_2(x)) = l_1 + l_2$$

Problema 1.3. *Mostrar que* $f(x) = x^2$ *es continua en* $x = 2$*, pero* $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \neq 2 \\ 0 & x = 2 \end{cases}$ *no lo es.*

Derivadas

Problema 1.4. *Dando por hecho que*

$$\lim_{b\to 0} \frac{\sin(b)}{b} = 1$$

demostrar que

(I)
$$\frac{d}{dx}\sin(u) = \cos(u)\frac{du}{dx}$$

(II)
$$\frac{d}{dx}\cos(u) = -\sin(u)\frac{du}{dx}$$

(III)
$$\frac{d}{dx}\tan(u) = \sec^2(u)\frac{du}{dx}$$

Problema 1.5. *Demostrar que*

$$\frac{d}{dx}\tan^{-1}(u) = \frac{1}{1+u^2}\frac{du}{dx}$$

Problema 1.6. *Dando por hecho que*

$$\lim_{b\to 0} (1+b)^{1/b} = e$$

demostrar que

(I)
$$\frac{d}{dx}\ln(u) = \frac{1}{u}\frac{du}{dx}$$

(II)

$$\frac{d}{dx}e^u = e^u\frac{du}{dx}$$

Problema 1.7. *Encontrar*

(I)

$$\frac{d}{dx}\sqrt{x^4+2x}$$

(II)

$$\frac{d}{dx}\sin\left(\ln(x)\right)$$

(III)

$$\frac{d}{dx}\ln\left(e^{3x}+\cos\left(2x\right)\right)$$

Problema 1.8. *Si*

$$x^2y - e^{2x} = \sin(y)$$

, encontrar y'*.*

Problema 1.9. *Mostrar que si*

$$y = 3x^2 + \sin(2x)$$

entonces

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 4y = 12x^2 + 6$$

Problema 1.10. *Encontrar los diferenciales de*

(I)

$$y = x^2 - \ln x$$

(II)

$$y = e^{-2x} + \cos(3x)$$

2 Cálculo Integral

2.1 Antiderivadas

Si $F'(x) = f(x)$, diremos que F es una antiderivada de f.

Problema Resuelto 2.1. *x^3 es una antiderivada de $3x^2$, porque...*

$$D_x\left(x^3\right) = 3x^2$$

Pero $x^3 + 5$ es también una antiderivada de $3x^2$, porque...

$$D_x\left(x^3 + 5\right) = 3x^2$$

En general, si $F(x)$ es una antiderivada de $f(x)$, entonces $F(x) + C$, $C \in \mathbb{R}$ es también una antiderivada.

Más aun, si $F(x)$ y $G(x)$ son antiderivadas de $f(x)$, entonces existe $C \in \mathbb{R}$ tal que

$$F(x) = G(x) + C.$$

Diremos que C es una *constante de integración.*

$\int f(x)dx$ denotara cualquier antiderivada de $f(x)$ más una constante de integración.

Diremos que $f(x)$ es el integrando, mientras que $\int f(x)dx$ es llamada *integral indefinidad.*

Problema Resuelto 2.2. *1.*

$$\int xdx = \frac{1}{2}x^2 + C$$

2.

$$\int -\sin(x)dx = \cos(x) + C$$

Proposición 2.1 (Reglas para antiderivadas)**.** *1.* $\int 0dx = C$

2. $\int 1dx = x + C$

3. $\int adx = ax + C$

4. $\int x^r dx = \dfrac{x^{r+1}}{r+1} + C$, $r \neq -1$

5. $\int af(x)dx = aF(x) + C$

6. $\int (f(x) + g(x))\, dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$

7. $\int (f(x) - g(x))\, dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx$

Problema Resuelto 2.3. *1.* $\int \sqrt[3]{x}dx =$

2. $\int \frac{1}{x^2}dx =$

3. $\int 7x^3 dx =$

4. $\int \left(x^2 + 4\right) dx =$

5. $\int \left(3x^6 - 4x\right) dx =$

Con las reglas (3)-(7), podemos calcular la antiderivada de cualquier polinomio.

Problema Resuelto 2.4.

$$\int \left(6x^8 - \frac{2}{3}x^5 + 7x^4 + \sqrt{3}\right) dx =$$

Integración por sustitución

Proposición 2.2 (Integración por sustitución)**.**

$$\int (g(x))^r\, g'(x)dx = \frac{1}{r+1}\,(g(x))^{r+1} + C$$

para $r \neq -1$.

Problema Resuelto 2.5.

$$\int \left(\frac{1}{3}x^3 + 7\right)^5 x^2 dx =$$

Problema Resuelto 2.6.

$$\int \left(x^2 + 1\right)^{2/3} x dx =$$

Proposición 2.3 (Regla 9, método de sustitución)**.**

$$\int f\left(g(x)\right) g'(x)dx = \int f(u)du$$

donde $u = g(x), du = g'(x)dx$.

Véase el ejericicio resuelto 2.13

Problema Resuelto 2.7. *Encuentre*

$$\int x \sin(x^2)dx =$$

Problema Resuelto 2.8. *Encuentre*

$$\int \sin(x/2)dx =$$

Figura 2.1: Antiderivadas comunes

$$\int \sin x\, dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x\, dx = \sin x + C$$

$$\int \sec^2 x\, dx = \tan x + C$$

$$\int \tan x \sec x\, dx = \sec x + C$$

$$\int \csc^2 x\, dx = -\cot x + C$$

$$\int \cot x \csc x\, dx = -\csc x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \sin^{-1} x + C$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\, dx = \tan^{-1} x + C$$

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\, dx = \sec^{-1} x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\, dx = \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C \qquad \text{for } a > 0$$

$$\int \frac{1}{a^2+x^2}\, dx = \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C \qquad \text{for } a > 0$$

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-a^2}}\, dx = \frac{1}{a}\sec^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C \qquad \text{for } a > 0$$

Ejemplos Resueltos

Problema Resuelto 2.9 (Fórmula de integración por sustitución (2.2)).

1. $\int \left(s^3+2\right)^2 (3s^2)ds =$
2. $\int \left(x^3+2\right)^{1/2} x^2 dx =$
3. $\int \dfrac{8x^2}{\left(x^3+2\right)^3} dx =$
4. $\int \dfrac{x^2 dx}{\sqrt[4]{x^3+2}} dx =$
5. $\int 3x\sqrt{1-2x^2}dx =$
6. $\int \sqrt[3]{1-x^2}x dx =$
7. $\int \sin^2(x)\cos(x)dx =$

Problema Resuelto 2.10.

1. $\int \dfrac{\cos(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx =$
2. $\int x\sec^2(4x^2-5)dx =$
3. $\int x^2\sqrt{x+1}dx =$

Problema Resuelto 2.11. *Una piedra se lanza hacia arriba desde el suelo, con una velocidad inicial de* $64ft/s$.

1. *¿Cuándo alcanzará su altura máxima?*
2. *¿Cuál será su altura máxima?*
3. *¿Cuándo tocará el suelo?*
4. *¿Cuál será su velocidad al tocar el suelo?*

Problema Resuelto 2.12. *Encuentre la ecuación de una curva en el plano* xy *que pasa por el punto* $(0,1)$ *y cuya pendiente es igual a la altura en cada punto* (x,y).

Problema Resuelto 2.13. *Justifique el método de sustitución* (2.3).

2.2 *La integral definida*

Notación "Sigma"

La letra griega Σ denota adición repetida:

$$\sum_{i=a}^{b} f(i) = f(a) + f(a+1) + ... + f(b),$$

siempre que $a \leq b$.

Problema Resuelto 2.14. *1.* $\sum_{j=1}^{5} j = 1+2+3+4+5 = 15$

2. $\sum_{i=0}^{3} (2i+1) = 1+3+5+7$

3. $\sum_{i=2}^{10} i^2 = 2^2 + 3^2 + ... + 10^2$

4. $\sum_{j=1}^{4} \cos(j\pi) = \cos\pi + \cos 2\pi + \cos 3\pi + \cos 4\pi.$

Linealidad

Proposición 2.4.

$$\sum_{i=a}^{b} cf(i) = c\sum_{i=a}^{b} f(i)$$
$$\sum_{i=a}^{b} f(i)+g(i) = \sum_{i=a}^{b} f(i) + \sum_{i=a}^{b} g(i)$$

Área bajo la curva

Sea f una función tal que $f(x) \geq 0$ en el intervalo $[a, b]$.

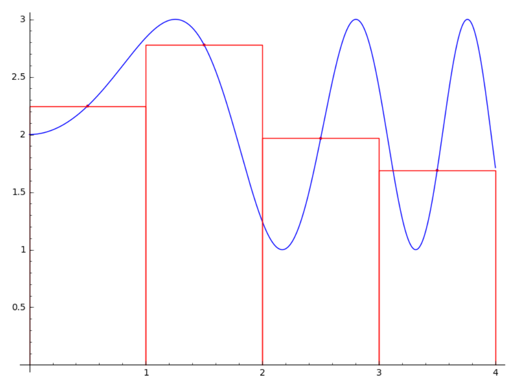


Figura 2.2: Aproximación de área bajo la curva

Algoritmo. (Sumas de Riemman)

1. Dividimos el intervalo en N subintervalos
$$a = x_0 < x_1 < ... < x_N = b.$$
2. Definimos la longitud de cada intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ como
$$\delta x_i = x_i - x_{i-1}.$$
3. El área bajo la curva definida por f esta aproximada por
$$\sum_{i=1}^{N} f(\xi_i)\delta x_i,$$
donde ξ_i es un punto en el intervalo $[x_i, x_{i+1}]$.

Una manera más concreta de construir una suma de Riemman es *fijando el tamaño del paso:*

1. Definimos $h = \dfrac{b-a}{N}$;
2. Escogemos
$$\xi_k = a + kh,\ k = 0, 1, 2, ..., N;$$
3. La suma de Riemann correspondiente será
$$\sum_{k=1}^{N} f(\xi_k) \cdot h = h \left(f(\xi_1) + ... + f(\xi_N) \right).$$

Al fijar el tamaño del paso, hemos ocupado el extremo derecho de cada intervalo: $x_k = a + k * h$, pero también podemos escoger por ejemplo:

- el extremo izquierdo:
$$\xi_k = a + (k-1) \cdot h;$$
- o el punto medio de cada intervalo:
$$\xi_k = a + \left(k - \frac{1}{2} \right) \cdot h;$$

Si en un intervalo $[a, b]$, $f(x) < 0$, entonces la suma anterior aproxima el área *sobre la curva.*

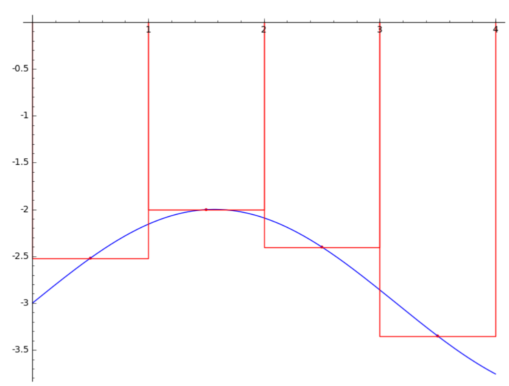


Figura 2.3: Aproximación de área bajo la curva

Por esta razón, cuando no distinguimos cuando $f(x)$ cambia de signo en un intervalo, hablamos del *área con signo.*

Definición 2.1. *1. La integral definida de f en el intervalo $[a, b]$ está dada por por*
$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{N \to \infty} \left(\sum_{i=1}^{N} f(\xi_i) \delta x_i \right),$$
siempre y cuando el límite exista.

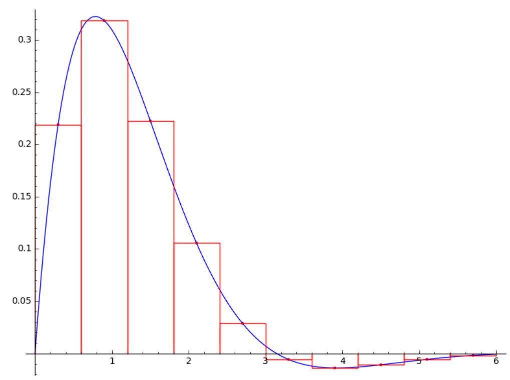


Figura 2.4: Aproximación de área bajo la curva

2. *Si el límite existe, diremos que f es integrable (en $[a, b]$).*
3. *La suma está definida como en el algoritmo 2.2 y se conoce como* suma de Riemman.

Problema Resuelto 2.15. *Calcule*

$$\int_1^5 1dx.$$

Problema Resuelto 2.16. *Calcule*

$$\int_0^5 xdx.$$

Problema Resuelto 2.17. *Calcule*

$$\int_1^5 xdx.$$

Proposición 2.5.

$$\int_a^b 1dx = b - a \tag{2.1}$$

$$\int_a^b xdx = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2} \tag{2.2}$$

Problema Resuelto 2.18. *Aproxime la integral*

$$\int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx$$

utilizando el algoritmo 2.2 fijando el tamaño del paso, con $a = -1, b = 1, N = 5$ y usando el extremo derecho de cada intervalo.

Problema Resuelto 2.19. *Aproxime la integral del ejemplo 2.18 cuando:*

1. $a = 0, b = 3, N = 4;$
2. $a = -2, b = 2, N = 8;$
3. $a = -3, b = 3, N = 16.$

Propiedades de la Integral Definida

Propiedades: Linealidad

$$\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx \tag{2.3}$$

$$\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx \tag{2.4}$$

Propiedades: Límites

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx \tag{2.5}$$

$$\int_a^a f(x)dx = 0 \tag{2.6}$$

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx \tag{2.7}$$

Ejemplos Resueltos

Problema Resuelto 2.20. *Supongamos que f y g son integrables en $[a,b]$. Demostrar que:*

1. *Si $f(x) \geq 0$ en $[a,b]$, entonces $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.*
2. *Si $f(x) \leq g(x)$ en $[a,b]$, entonces*

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$

3. *Si $m \leq f(x) \leq M$ para todo $x \in [a,b]$, entonces*

$$m\,(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M\,(b-a)\,.$$

Problema Resuelto 2.21. *Demuestre la fórmula*

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n\,(n+1)}{2}.$$

2.3 El Teorema Fundamental del Cálculo

Valor promedio de una función

Valor promedio de una función

Si una función f se evalúa en n puntos $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_N$, el valor promedio de la función para estos puntos es

$$\frac{f(\xi_1) + f(\xi_2) + ... + f(\xi_N)}{N} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} f(\xi_k).$$

Sin embargo, si tratamos de promediar una función en un intervalo $[a, b]$, esta definición no es útil porque habrá una infinidad[1] de puntos.

[1] De hecho, una cantidad no numerable de puntos, por lo que ni siquiera podemos tratar de aplicar algunas técnicas para series

Aun así, todavía podemos encontrar una definición, motivada por el promedio en una cantidad finita de puntos

Escogiendo el tamaño del paso fijo para un número N dado de subintervalos, tenemos que

$$h = \frac{b-a}{N}.$$

O de manera equivalente

$$\frac{1}{N} = \frac{1}{b-a} h.$$

De manera que

$$\frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} f(\xi_k) = \frac{1}{b-a} \sum_{k=1}^{N} f(\xi_k) \cdot h.$$

Cuando $N \to \infty$, el lado derecho se aproxima a

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(\xi) d\xi.$$

Definición 2.2. *El valor promedio de f en $[a, b]$ está dado por*

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

Sea f una función continua en $[a, b]$. Si $x \in [a, b]$, entonces

$$F(x) = \int_a^x f(\xi) d\xi$$

es una función que depende de x tal que

$$D_x F(x) = D_x \left(\int_a^x f(\xi) d\xi \right) = f(x).$$

Enunciado del T.F.C

Teorema 2.1 (Teorema Fundamental del Cálculo)**.** *Sea f una función continua en $[a, b]$ y $F(x)$ una antiderivada de $f(x)$. Entonces*

$$\int_a^b f(\xi) d\xi = F(b) - F(a). \tag{TFC}$$

La ecuación (TFC) nos da una manera sencilla de calcular

$$\int_a^b f(\xi) d\xi ...$$

siempre y cuando podamos encontrar una antiderivada de $f(x)$, en términos de funciones elementales.

La expresión $F(b) - F(a)$ generalmente se abrevia como

$$F(x) \mid_a^b .$$

Calcule las siguientes fórmulas utilizando el (TFC):

1. $$\int_a^b x dx =$$
2. $$\int_a^b x^2 dx =$$
3. $$\int_a^b x^r dx =$$

Proposición 2.6 (TFC con Cambio de Variables)**.** *Supongamos que en el intervalo $[a, b]$, la función f es continua y la función g es diferenciable.*

Entonces

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du,$$

donde $u = g(x)$.

Problema Resuelto 2.22. *Evalue*

$$\int_1^9 \sqrt{5x+4} dx.$$

Ejemplos Resueltos

Problema Resuelto 2.23. *Evalúe*

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2(x)\cos(x) dx.$$

Problema Resuelto 2.24. *Encuentre el área de la región entre la curva dada por $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$, el eje x, $x = 0$ y $x = 1$.*

Problema Resuelto 2.25. *Encuentre el valor promedio de $f(x) = 4 - x^2$ en $[0, 2]$.*

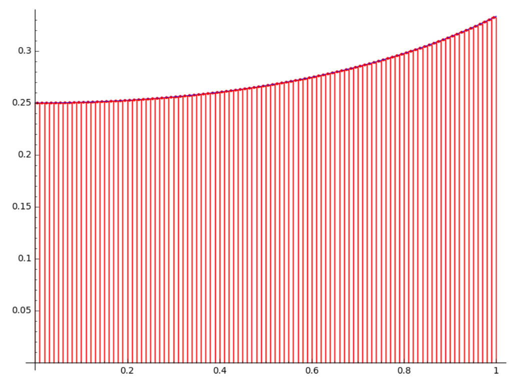


Figura 2.5: $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$

Problema Resuelto 2.26. *Demuestre la fórmula* (2.3). *Sugerencia: Utilice el teorema del valor medio.*

Teorema 2.2 (Teorema del Valor Medio para Integrales). *Sea f una función continua en $[a,b]$. Entonces existe $c \in [a,b]$ tal que*

$$\int_a^b f(\xi)d\xi = (b-a)\,f(c)$$

Problema Resuelto 2.27. *Demuestre que*

1. *Si f es una función par, entonces para $a > 0$:*
$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx;$$
2. *Si f es una función impar, entonces para $a > 0$:*
$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0.$$

Problema Resuelto 2.28 (Regla trapezoidal). *Sea $f(x) \geq 0$ en $[a,b]$. Dividamos $[a,b]$ en N subintervalos de longitud fija $h = \frac{b-a}{N}$, por medio de puntos*

$$x_k = a + k \cdot h,\ k = 1, ..., N.$$

Muestre que

$$\int_a^b f(\xi)d\xi \approx \frac{h}{2}\left(f(a) + 2\sum_{k=1}^{N-1} f(\xi_k) + f(b)\right)$$

Problema Resuelto 2.29. *Use la regla trapezoidal para aproximar*

$$\int_0^1 x^2 dx$$

con $N = 1$.

Utilice el (TFC) *para calcular la integral de manera exacta y compare.*

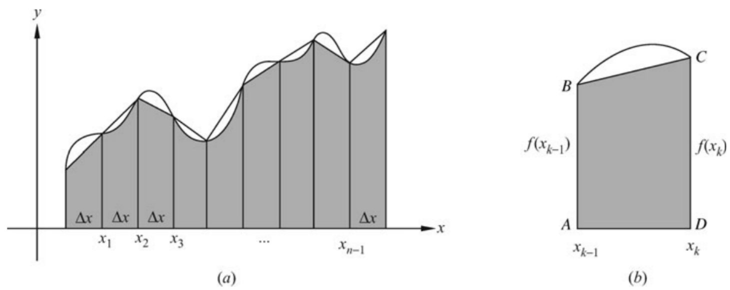


Figura 2.6: Regla trapezoidal

2.4 Integración por partes

A partir de la regla del producto

$$\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx},$$

se deduce la fórmula de integración por partes:

$$\int udv = uv - \int vdu$$

Para elegir u, podemos seguir la regla empírica **LIATE**:

- **L**ogaritmos
- **I**nversas trigonométricas
- **A**lgebraicas
- **T**rigonométricas
- **E**xponenciales

Problema Resuelto 2.30. *Encuentre*

$$\int x\ln(x)dx.$$

Problema Resuelto 2.31. *Encuentre*

$$\int xe^x dx.$$

Problema Resuelto 2.32. *Encuentre*

$$\int e^x \cos(x)dx.$$

Ejemplos Resueltos

Problema Resuelto 2.33. *Por medio de integración por partes, encuentre la siguiente integral indefinida*

$$\int x^3 e^{x^2} dx$$

Problema Resuelto 2.34. *Por medio de integración por partes, encuentre la siguiente integral indefinida*

$$\int \ln\left(x^2+2\right) dx$$

Problema Resuelto 2.35. *Por medio de integración por partes, encuentre la siguiente integral indefinida*

$$\int \ln(x) dx$$

Problema Resuelto 2.36. *Por medio de integración por partes, encuentre la siguiente integral indefinida*

$$\int x \sin(x) dx$$

Problema Resuelto 2.37. *Por medio de integración por partes, encuentre la siguiente integral indefinida*

$$\int x^2 \ln(x) dx$$

Problema Resuelto 2.38. *Por medio de integración por partes, encuentre la siguiente integral indefinida*

$$\int \sin^{-1}(x) dx$$

Problema Resuelto 2.39. *Por medio de integración por partes, encuentre la siguiente integral indefinida*

$$\int \tan^{-1}(x) dx$$

Problema Resuelto 2.40. *Por medio de integración por partes, encuentre la siguiente integral indefinida*

$$\int \sec^3(x) dx$$

Problema Resuelto 2.41. *Por medio de integración por partes, encuentre la siguiente integral indefinida*

$$\int x^2 \sin(x) dx$$

Problema Resuelto 2.42. *Por medio de integración por partes, encuentre la siguiente integral indefinida*

$$\int x^3 e^{2x} dx$$

Problema Resuelto 2.43. *Deduzca la siguiente* fórmula de reducción

$$\begin{aligned}\int \sin^m(x) dx = &-\frac{\sin^{m-1}(x)\cdot\cos(x)}{m} \\ &+\frac{m-1}{m}\int \sin^{m-2}(x)dx.\end{aligned} \qquad \text{(FR)}$$

Problema Resuelto 2.44. *Aplique la formula de reducción* (FR) *para hallar*

$$\int \sin^2(x) dx.$$

Problema Resuelto 2.45. *Aplique la formula de reducción* (FR) *para hallar*

$$\int \sin^3(x) dx.$$

2.5 *Fracciones parciales*

La técnica de fracciones parciales se utiliza para integrar funciones racionales, es decir, aquellas de la forma

$$\frac{N(x)}{D(x)},$$

donde N, D son polinomios.

Por simplicidad, supondremos que

1. El coeficiente líder de $D(x)$ es igual a 1.
2. El grado de $D(x)$ es mayor que el de $N(x)$.

Sin embargo, ninguna de estas dos condiciones son esenciales.

Problema Resuelto 2.46.

$$\int \frac{2x^3}{5x^8+3x-4}dx = \frac{1}{5}\int \frac{2x^3}{x^8+\frac{3}{5}x-\frac{4}{5}}$$

Problema Resuelto 2.47.

$$\frac{2x^5+7}{x^2+3} = 2x^3-6x+\frac{18x+7}{x^2+3}$$

Definición 2.3. *Un polinomio es irreducible si no se puede expresar como el producto de dos polinomios de grado menor.*

1. Todo polinomio lineal es irreducible

2. Un polinomio cuadrático

$$g(x) = ax^2 + bx + c,\ a \neq 0$$

   es irreducible si y solo $b^4 - 4ac < 0$.

Problema Resuelto 2.48. *Verifique que*

1. $x^2 + 4$ *es irreducible;*

2. $x^2 + x - 4$ *es reducible.*

Teorema 2.3. *Todo polinomio cuyo coeficiente líder sea igual a* 1 *se puede expresar como producto de factores lineales, o factores cuadráticos irreducibles.*

Problema Resuelto 2.49. *1.* $x^3 - 4x =$

2. $x^3 + 4x =$

3. $x^4 - 9 =$

4. $x^3 - 3x^2 - x + 3 =$

Método de Fracciones Parciales

Caso I. $D(x)$ *es producto de factores lineales distintos*

Problema Resuelto 2.50. *Resuelva*

$$\int \frac{dx}{x^2 - 4}$$

Problema Resuelto 2.51. *Resuelva*

$$\int \frac{(x+1)dx}{x^3 + x^2 - 6x}$$

Regla General para Caso 1

El integrando se representa como una suma de términos de la form $\dfrac{A}{x-a}$, para cada factor $x - a$, y A una constante por determinar.

Caso 2. $D(x)$ es producto de factores lineales repetidos.

Problema Resuelto 2.52. *Encuentre*

$$\int \frac{(3x+5)dx}{x^3-x^2-x+1}$$

Problema Resuelto 2.53.

$$\int \frac{(x+1)dx}{x^3(x-2)^2}$$

Regla General para el Caso 2.

Para cada factor $x-c$ de multiplicidad k, se utiliza la expresión

$$\frac{A_1}{x-r}+\frac{A_2}{(x-r)^2}+...+\frac{A_k}{(x-r)^k}.$$

Caso 3. Factores cuadráticos irreducibles distintos, y lineales repetidos

A cada factor irreducible x^2+bx+c de $D(x)$ le corresponde el integrando

$$\frac{Ax+B}{x^2+bx+c}.$$

Problema Resuelto 2.54. *Encuentre*

$$\int \frac{(x-1)dx}{x(x^2+1)(x^2+2)}$$

Caso IV. Factores cuadráticos irreducibles repetidos

A cada factor cuadráticos irreducible x^2+bx+c de mutiplicidad k le corresponde el integrando

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{A_i x+B_i}{(x^2+bx+c)^i}$$

Problema Resuelto 2.55. *Encuentre*

$$\int \frac{2x^2+3}{(x^2+1)^2}dx.$$

2.6 Técnicas de integación trigonométrica

Integrados trigonométricos

Caso 1

Considérense las integrales de la forma

$$\int \sin^k(x)cos^n(x)dx,$$

con k, n enteros no negativos.

Tipo 1.1

Si Al menos uno de los números k, n es impar, entonces podemos escoger $u = \cos(x)$ o $u = \sin(x)$.

Problema Resuelto 2.56.

$$\int \sin^3(x)\cos^2(x)dx.$$

Problema Resuelto 2.57.

$$\int sin^4(x)cos^7(x)dx$$

Problema Resuelto 2.58.

$$\int sin^5(x)dx$$

Tipo 1.2

Si ambas potencias k, n son pares. Entonces utilizaremos las identidades

$$\begin{cases} cos^2(x) = \dfrac{1 + cos(2x)}{2} \\ sin^2(x) = \dfrac{1 - cos(2x)}{2} \end{cases}$$

Problema Resuelto 2.59.

$$\int cos^2(x)sin^4(x)dx$$

Caso 2

Consideraremos integrales de la forma

$$\int tan^k(x)sec^n(x)dx.$$

y utilizaremos la identidad

$$sec^2(x) = 1 + tan^2(x).$$

Tipo 2.1

Si n es par, entonces se sustituye $u = \tan(x)$.

Problema Resuelto 2.60.

$$\int tan^2(x)sec^4(x)dx$$

Tipo 2.2

Si n, k son impares, se sustituye $u = sec(x)$.

Problema Resuelto 2.61.

$$\int tan^3(x)sec(x)dx.$$

Tipo 2.3

Si n es impar y k par, reducimos a los casos anteriores y utilizaremos la fórmula

$$\int \sec(x)dx = \ln|\tan(x) + \sec(x)|$$

Problema Resuelto 2.62.

$$\int \tan^2(x)\sec(x)dx =$$

Caso 3

Consideremos ahora integrales de la forma $\int f(Ax)g(Bx)dx$, donde f, g pueden ser o bien sin o bien cos.

Necesitaremos las identidades

$$sin(Ax)cos(Bx) = \frac{1}{2}\left(sin\left((A+B)x\right) + sin\left((A-B)x\right)\right)$$
$$sin(Ax)sin(Bx) = \frac{1}{2}\left(cos\left((A-B)x\right) - cos\left((A+B)x\right)\right)$$
$$cos(Ax)cos(Bx) = \frac{1}{2}\left(cos\left((A-B)x\right) + cos\left((A+B)x\right)\right)$$

Problema Resuelto 2.63.

$$\int sin(7x)cos(3x)$$

Problema Resuelto 2.64.

$$\int sin(7x)cos(3x)$$

Problema Resuelto 2.65.

$$\int sin(7x)sin(3x)$$

Problema Resuelto 2.66.

$$\int cos(7x)cos(3x)$$

Sustitución trigonométrica

Existen tres principales tipos de sustitución trigonométrica. Introduciremos cada uno por medio de ejemplos típicos.

Problema Resuelto 2.67. *Encuentre*

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4+x^2}}$$

Estrategia I

Si $\sqrt{a^2+x^2}$ aparece en el integrando, intente $x = a\tan(\theta)$

Problema Resuelto 2.68. *Encuentre*

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{9-x^2}}$$

Estrategia II

Si $\sqrt{a^2-x^2}$ aparece en un integrando, trate con la sustitución $x = a\sin(\theta)$.

Problema Resuelto 2.69. *Encuentre*

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-4}}dx.$$

Estrategia III

Si $\sqrt{x^2-a^2}$ aparece en un integrando, trate con la sustitución $x = a\sec\theta$.

2.7 *Área y longitud de arco*

Área entre una curva y el eje vertical

Nostros ya sabemos como encontrar el áre de una región como la siguiente

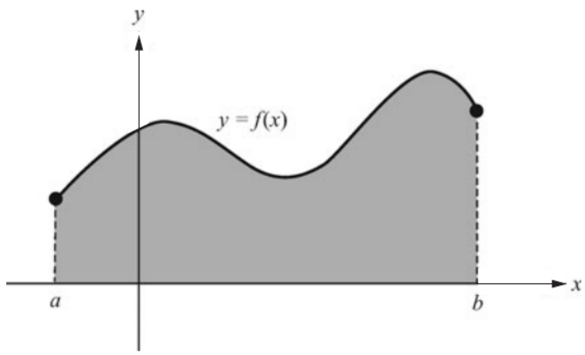


Figura 2.7: Área bajo la curva

El área de la región acotada por

$$x = a,\ x = b,\ y = 0,\ y = f(x)$$

está dada por

$$\int_a^b f(x)dx$$

Ahora consideremos una región como la siguiente

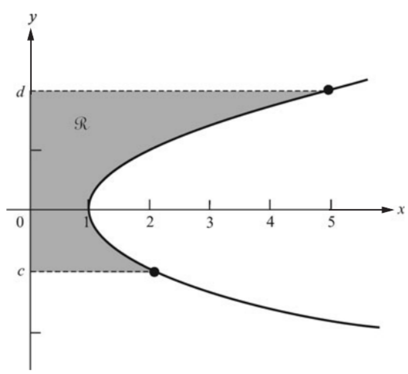


Figura 2.8: Área entre curva y eje vertical

De manera similar, el área de la región acotada por

$$x = 0,\ x = g(y),\ y = c,\ y = d$$

está dada por

$$\int_c^d g(y)dy$$

Problema Resuelto 2.70. *Calcule el área de la región dada en la figura 2.9, que está acotada por el eje y, arriba por $y = 2$, abajo por $y = -1$ y la curva*

$$x + y^2 = 4.$$

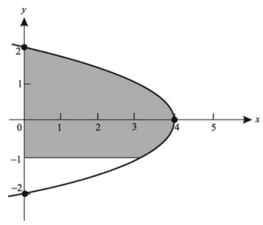


Figura 2.9: Área acotada por una parabola

Área entre curvas

Supongamos que f y g son funciones continuas para $a \leq x \leq b$.

El área A de la región contenida entre estas dos curvas y los ejes $x = a$ y $x = b$ está dada por la fórmula

$$A = \int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx.$$

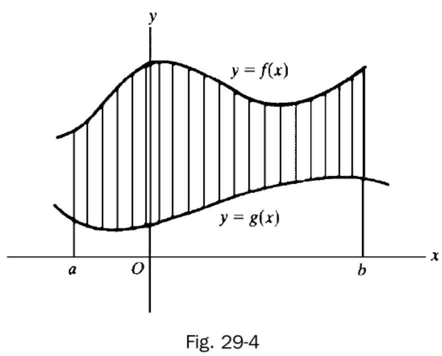


Figura 2.10: Área entre curvas (funciones positivas)

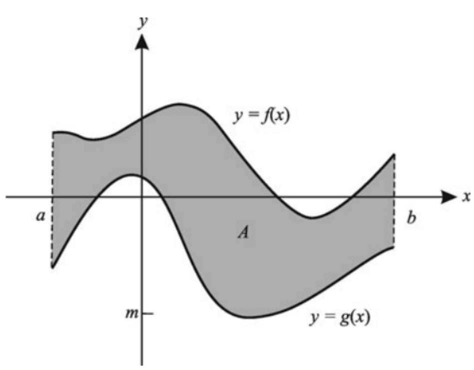


Figura 2.11: Área entre curvas

Problema Resuelto 2.71. *Calcule el área de región de la figura 2.13, acotada por*

$$x = 0,\ x = 1,\ y = \frac{1}{2}x + 2,\ y = x^2.$$

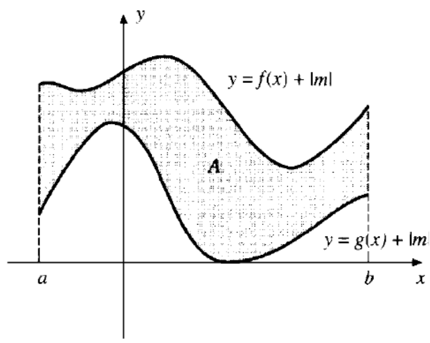


Figura 2.12: Deducción de la fórmula

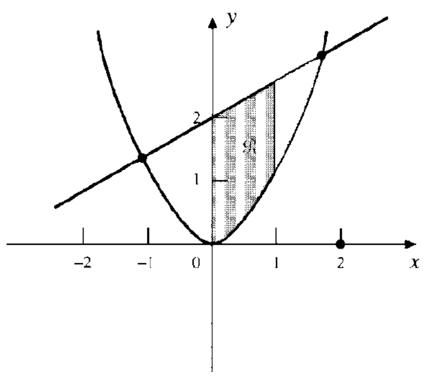


Figura 2.13: Área entre línea y parábola

Longitud de arco

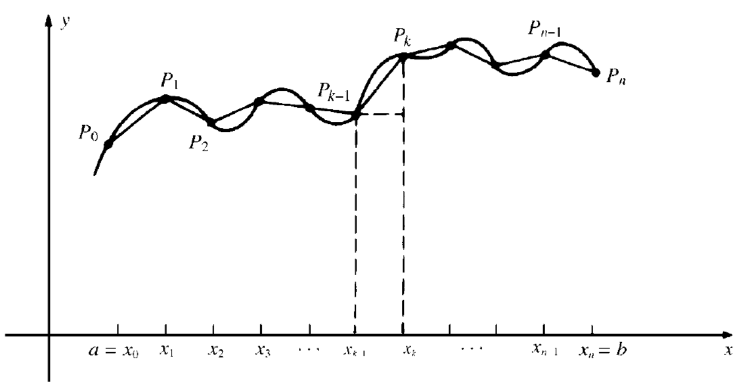


Figura 2.14: Aproximación de la longitud de un arco

Por la fórmula de distancia

$$\overline{P_{k-1}P_k} = \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (f(x_k) - f(x_{k-1}))^2}\,.$$

Por el teorema del valor medio, existe $x_k^* \in (x_{k-1}, x_k)$ tal que

$$f(x_k) - f(x_{k-1}) = (x_k - x_{k-1})\, f'(x_k^*) = (\Delta x) f'(x_k^*).$$

Entonces

$$\overline{P_{k-1}P_k} = \sqrt{1 + (f'(x_k^*))^2}(\Delta x)$$

De manera que

$$\sum_{k=1}^{n} \overline{P_{k-1}P_k} = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + \left(f'(x_k^*)\right)^2}(\Delta x),$$

donde $(\Delta x)n = b - a$.

Tomando el límite $n \to \infty$ de ambos lados obtenemos que la longitud $L(f, a, b)$ de al arco dado por la curva $f(x)$ en el intervalo $a \leq x \leq b$ esta dado por

$$L(f, a, b) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}dx.$$

Problema Resuelto 2.72. *Encuentre la longitud del arco descrito por la curva $y = x^{3/2}$ de $x = 0$ a $x = 5$.*

Ejemplos

Problema Resuelto 2.73. *Encuentre el área acotada por la parábola*

$$x = 8 + y - y^2,$$

el eje y y las líneas $y = -1$ y $y = 3$.

Problema Resuelto 2.74. *Encuentre el área de la región acotada por las parábolas*

$$y = 6x - x^2$$

y

$$y = x^2 - 2x.$$

Problema Resuelto 2.75. *Encuentre la longitud de arco de la curva*

$$x = 3y^{3/2} - 1$$

desde $y = 0$ hasta $y = 4$.

Problema Resuelto 2.76. *Encuentre la longitud de arco de la catenaria*

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{x/a} + e^{-x/a}\right)$$

desde $x = 0$ hasta $x = a$.

2.8 *Volumen*

Un *sólido de revolución* se obtiene al girar una región del plano alrededor de una línea que no intersecta la región.

La línea alrededor del cuál se realiza la rotación se llama *eje de revolución.*

Sea f una función continua tal que $f(x) \geq 0$ para $a \leq x \leq b$. Considere la región $\mathcal{R}$ bajo la gráfica de f, arriba del eje x, entre $x = a$ y $x = b$:

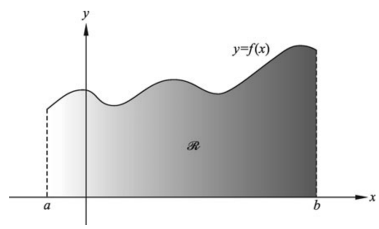


Figura 2.15: Región de revolución

Problema Resuelto 2.77. *Grafique la superficie de revolución generada por la región acotada por la recta $y = x$ y la parábola $y = x^2$.*

Observación 2.1. *A partir de ahora, usaremos el sistema algebráico de computo `SageMath`, para visualizar las gráficas.*

[fragile]Código para graficar en 2D

```
x = var("x")
line = x
parabola = x^2
graf = plot(line, (-0.5,1.5))
graf = graf+plot(parabola, (-0.5,1.5))
graf.show()
```

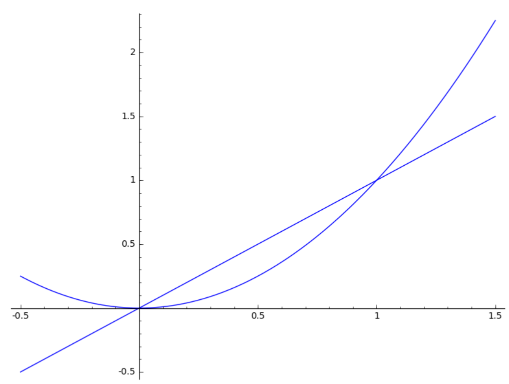


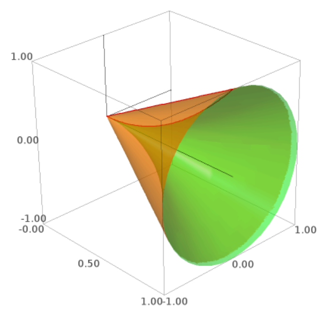
Figura 2.16: Región $\mathcal{R}$ acotada por $y = x$ y $y = x^2$

[fragile]Código para generar un sólido de revolución

```
x = var("x")
line = x
parabola = x^2
P = axes(1, color="black")
sur1=revolution_plot3d(line,(x,0,1),
```

```
    opacity=0.5,rgbcolor=(1,0.5,0),
    show_curve=True,parallel_axis='x')
sur2=revolution_plot3d(parabola,(x,0,1),
    opacity=0.5,rgbcolor=(0,1,0),
    show_curve=True,parallel_axis='x')
(sur1+sur2+P).show()
```

Figura 2.17: Sólido generado por $\mathcal{R}$



Fórmula del Disco

El volumen V de un sólido de revolución obtenido al rotar una región $\mathcal{R}$ alrededor del eje x está dado por

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 \, dx \qquad \text{(Fórmula del Disco)}$$

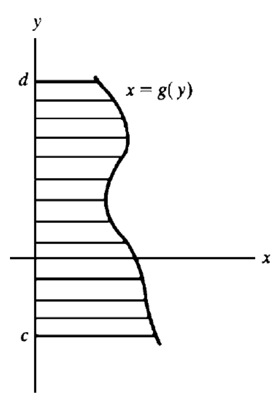


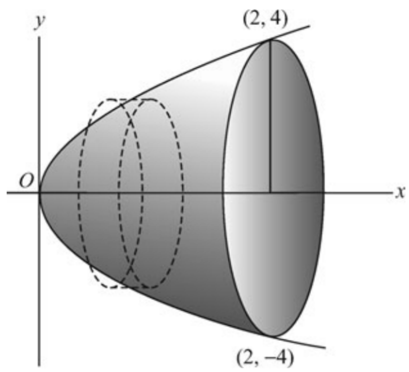
Figura 2.18: Región acotada por $x = g(y)$

De manera similar, la fórmula para una región como acotada por la gráfica $x = g(y)$ está dada por

$$V = \pi \int_c^d (g(y))^2 \, dy$$

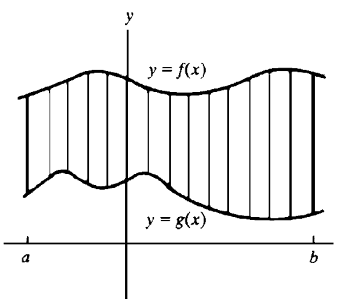
(Fórmula del Disco (II))

Problema Resuelto 2.78. *Considere el sólido de revolución obtenido al girar alrededor del eje x la región en el primer cuadránte acotada por la parábola $y^2 = 8x$ y la línea $x = 2$. Encuentre su volumen.*



Problema Resuelto 2.79. *Considere el sólido de revolución obtenido al girar alrededor del eje y la región en el primer cuadránte acotada por la parábola $y = 4x^2$ y la línea $y = 16$. Encuentre su volumen.*

Método de Washer



Supongamos que $0 \leq g(x) \leq f(x)$ para $a \leq x \leq b$. Consideremos la región acotada por $x = a$, $x = b$, y las curvas $y = g(x)$ y $y = f(x)$.

Entonces el volumen V del sólido de revolución generado por esta región rotando alrededor del eje x está dado por

$$V = \pi \int_a^b \left((f(x))^2 - (g(x))^2\right) dx \qquad \text{(Washer)}$$

Una fórmula similar

$$V = \pi \int_c^d \left((f(y))^2 - (g(y))^2\right) dy \qquad \text{(Washer (II))}$$

se satisface cuando la región esta acotada por las curvas $x = f(y)$, $x = g(y)$ y las rectas $y = c, \ y = d$, siempre y cuando $0 \leq g(y) \leq f(y)$ para $c \leq y \leq d$ y se rota tal región alrededor del eje y.

Problema Resuelto 2.80. *Considere el sólido de revolución obtenido al girar alrededor del eje x la región acotada por las curvas*

$$y = 4x^2, \ x = 0, \ y = 16.$$

Encuentre el volumen por (Washer).

Método de las capas cilíndricas

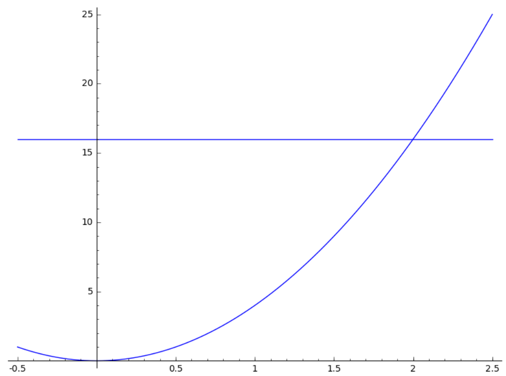


Figura 2.19: Región $\mathcal{R}$ acotada por $y = 4x^2,\ x = 0,\ y = 16.$

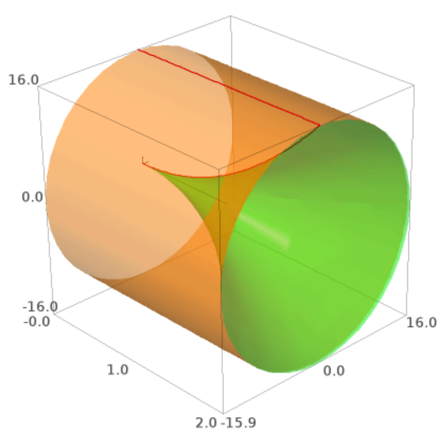
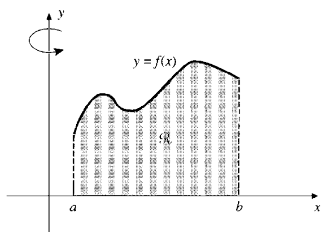


Figura 2.20: Sólido generado por región $\mathcal{R}$.



Consideremos el sólido de revolución obtenido al rotar alrededor del eje y la región $\mathcal{R}$ en el primer cuadrante entre el eje x y la curva $y = f(x)$, entre $x = a$ y $x = b$.

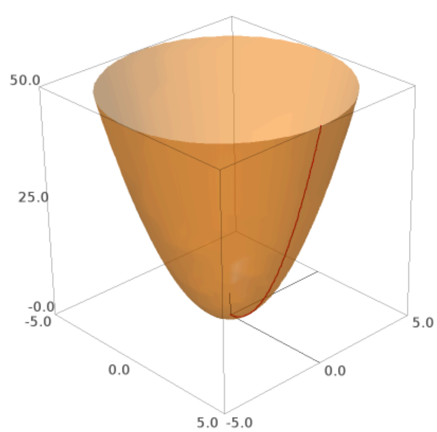
Entonces el volumen del sólido está dado por la fórmual de capas cilíndricas

$$V = 2\pi \int_a^b x f(x) dx \tag{FCC}$$

Una fórmula similar se satisface cuando se intercambian x y y, es decir, la región $\mathcal{R}$ en el primer cuadránte entre el eje y y la curva $x = f(y)$, entre $y = c$ y $y = d$, se gira alrededor del eje x

$$V = 2\pi \int_c^d y f(y) dy \tag{FCC(II)}$$

Problema Resuelto 2.81. *Rote alrededor del eje y la región sobre el eje x y debajo de $y = 2x^2$, entre $x = 0$ y $x = 5$. Por medio de (FCC). Encuentre el volumen.*



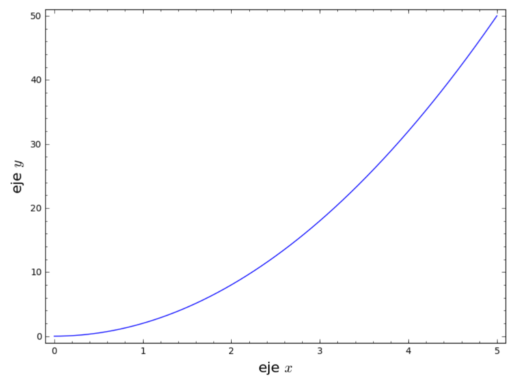
Diferencia de Capas

Supongamos que $0 \leq g(x) \leq f(x)$ en el intervalo $[a, b], \; a \geq 0$. Sea $\mathcal{R}$ la región en el primer cuadránte entre

$$y = f(x), \; y = g(x), \; x = a, \; x = b.$$

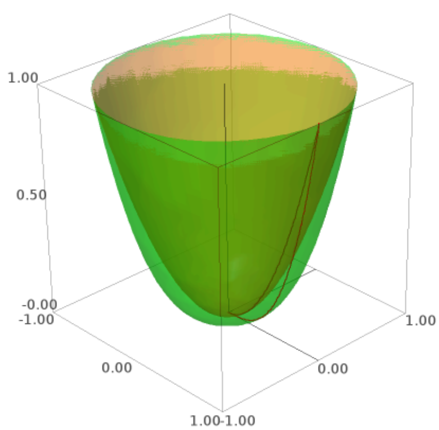
Entonces el volumen del sólido de revolución obtenido al rotar $\mathcal{R}$ alrededor del eje y está dado por

$$V = 2\pi \int_a^b x\,(f(x) - g(x))\,dx \qquad \text{(FDC)}$$

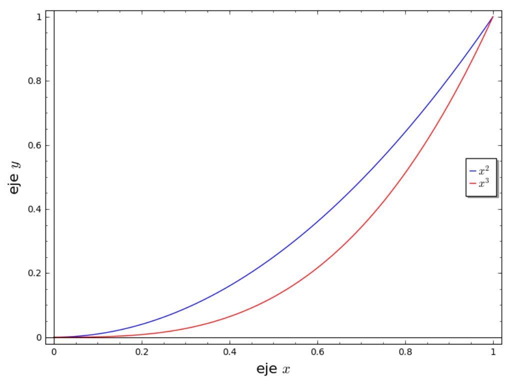


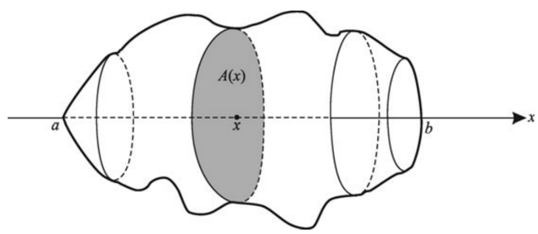
Problema Resuelto 2.82. *Consideremos la región en el primer cuadrante acotado arriba por $y = x^2$ y debajo por $y = x^3$.*

Encuentre el volumen del sólidos generado al rotar $\mathcal{R}$ alrededor del eje y.



Secciones trasnversales (rebanadas)





Supongamos que un sólido vive enteramente entre el plano perpendicular al eje x en $x = a$ y el plano perpendicular al x en $x = b$.

Para cada $x \in [a, b]$, supongamos que el plano perpendicular al eje x en el punto x intersecta al sólido en una región de área $A(x)$.

Entonces, el volumen V del sólido está dado por

$$V = \int_a^b A(x)dx. \tag{FST}$$

Problema Resuelto 2.83. *Supongamos que un segmento de un misil de longitud h es tal que la sección transversal perpendicular al eje de simetría del misil a una distancia x de la punta es un círculo de radio $\sqrt{x}$. Encuentre el volumen del misil.*

2.9 *Integrales impropias*

Límites al infinito

Para que

$$\int_a^b f(x)dx$$

esté bien definida, basta que f sea una función continua y a, b sean número reales. Ahora veremos que sucede cuando

1. a o b tienden a $\pm\infty$;
2. f es discontinuo.

   Tales integrales se conocen como *impropias.*
   Límites infinitos de integración

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{c\to+\infty}\int_a^c f(x)dx \tag{2.8}$$

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{c\to-\infty}\int_c^b f(x)dx \tag{2.9}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_c^{+\infty} f(x)dx + \int_{-\infty}^{c} f(x)dx \tag{2.10}$$

La última integral es válida siempre y cuando los dos límites del lado derecho existan.

Problema Resuelto 2.84. *Encuentre la intergral*

$$\int_0^{\infty} e^{-x}\sin(x)dx$$

Problema Resuelto 2.85. *Encuentre la integral*

$$\int_{-\infty}^{0} e^{rx}dx$$

para $r > 0$.

Problema Resuelto 2.86. *Evalue*

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{e^x + e^{-x}}$$

Discontinuidades del integrando

Caso I Si f es continuo en $(a, b]$, discontinuo en $x = a$, podemos definir

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{u\to a^+}\int_u^b f(x)dx,$$

siempre y cuando el límite exista.

Problema Resuelto 2.87. *Evalue*

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2}dx$$

Caso II Si f es continuo en $[a, b)$, discontinuo en $x = b$, podemos definir

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{u\to b^-}\int_a^u f(x)dx,$$

siempre y cuando el límite exista.

Problema Resuelto 2.88. *Evalue*

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos(x)}{\sqrt{1-\sin(x)}}dx$$

Caso III Si f es continuo en $[a,b]$ excepto en un punto $c \in (a,b)$, entonces

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{u\to c^-}\int_a^u f(x)dx + \lim_{u\to c^+}\int_u^b f(x)dx$$

siempre y cuando ambos límites del lado derecho existan.

Problema Resuelto 2.89. *Evalue*

$$\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}}dx$$

2.10 *Área de Superficies de Revolución*

Si un arco de una curva se gira alrededor de una línea que no se intersecta con el arco, entonces la superficie resultante is llamada *superficie de revolución.*

Por *área de superficie*, nos referiremos al área de la superficie exterior.

Sea f una función continua y $f(x) \geq 0$ en $[a,b]$ que es diferenciable en (a,b). Entonces el área de superficie S de la superficie de revolución generado al girar la gráfica de f en $[a,b]$ alrededor del eje x esta dado por la fórmula

$$S = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}dx.$$

De manera similar, sea g una función continua y $g(y) \geq 0$ en $[c,d]$ que es diferenciable en (c,d). Entonces el área de superficie S de la superficie de revolución generado al girar la gráfica de g en $[c,d]$ alrededor del eje y esta dado por la fórmula

$$S = 2\pi\int_c^d g(y))\sqrt{1+(g'(y))^2}dy.$$

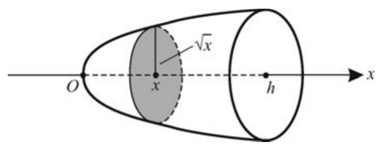
De manera más general, si una curva esta dada por las ecuaciones paramétricas

$$x = f(u),\ y = g(u)$$

y el arco va de $u = u_1$ a $u = u_2$ se rota alrededor del eje x, entonces el área de superficie de la superficie de revolución resultante está dada por la fórmula

$$S = 2\pi\int_{u_1}^{u_2} y\sqrt{\left(\frac{dx}{du}\right)^2+\left(\frac{dy}{du}\right)^2}du$$

En la fórmula anterior, hemos supuesto que f, g son continuas en $[u_1, u_2]$, diferenciable en (u_1, u_2) y que $y = g(u) \geq 0$ en $[u_1, u_2]$.



3 Cálculo en varias variables

3.1 Representación paramétrica de curvas

Ecuaciones paramétricas

Si las coordenadas (x, y) de un punto P en una curva están dadas por las funciones

$$x = f(t), y = g(t) \tag{Ec.Par.}$$

de una tercera variable o *parámetro* t, entonces (Ec.Par.) son llamadas *ecuaciones paramétricas* de la curva.

Problema Resuelto 3.1. *a*

$$x = \cos(t), y = \sin^2(t)$$

son ecuaciones paramétricas de la parábola

$$4x^2 + y = 4.$$

b

$$x = \frac{1}{2}t, y = 4 - t^2$$

es otra parametrización de la misma curva.

Problema Resuelto 3.2. *1. Las ecuaciones*

$$x = r\cos(t), y = r\sin(t)$$

representan el círculo con radio en el origen.

2. Las ecuaciones

$$x = a + r\cos(t), y = b + r\sin(t)$$

representa el círculo de radio r y centro en (a, b).

Supongamos que la curvas está dada por (Ec.Par.). Entonces las primera y segunda derivadas están dadas por

$$D_x y = \frac{D_t y}{D_t x} \tag{3.1}$$

$$D_{xx} y = \frac{D_{tx} y}{D_t x} \tag{3.2}$$

Longitud de arco

Si una curva está dada por (Ec.Par.), entonces la *longitud de curva* entre dos puntos correspondientes a los valores paramétricos t_1 y t_2 es

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(D_t x)^2 + (D_t y)^2} dt$$

Ejemplos

Problema Resuelto 3.3. *Encuentre $D_x y$, $D_{xx} y$ para*

$$x = t - \sin(t), y = 1 - \cos(t)$$

Problema Resuelto 3.4. *Encuentre $D_x y$ y $D_{xx} y$ si $x = e^t \cos(t), y = e^t \sin(t)$.*

Problema Resuelto 3.5. *Encuentre una ecuación a la línea tangente de la curva*

$$x = \sqrt{t}, y = t - \frac{1}{\sqrt{t}}$$

en el punto $t = 4$.

Problema Resuelto 3.6. *La posición de una particula que se está moviendo a lo largo de una curva está dada al tiempo t por las ecuaciones paramétricas*

$$x = 2 - 3\cos(t), y = 3 + 2\sin(t)$$

donde x y y están medidos en pies y t en segundos.

Note que

$$\frac{1}{9}(x-2)^2 + \frac{1}{4}(y-3)^2 = 1$$

de manera que la curva es una elipse.¿Porqué?

Continuación

1. Encuentre la tasa de cambio temporal de x cuando $t = \frac{\pi}{3}$
2. Encuentre la tasa de cambio temporal de y cuando $t = \frac{5\pi}{3}$
3. Encuentre la tasa de cambio temporal del ángulo de inclinación θ de la línea tangente cuando $t = \frac{2\pi}{3}$

Problema Resuelto 3.7. *Encuentre la longitud de arco de la curva*

$$x = t^2, y = t^3$$

desde $t = 0$ a $t = 4$.

Problema Resuelto 3.8. *Encuentre la longitud de arco de la cicloide*

$$x = \theta - \sin\theta, y = 1 - \cos\theta$$

entre $\theta = 0$ *y* $\theta = 2\pi$.

3.2 Derivadas Parciales

Objetivos del aprendizaje

1. Calcular e interpretar derivadas parciales.
2. Aplicar derivadas parciales para estudiar Ejemplos de análisis marginal en economía.
3. Calcular derivadas parciales de segundo orden.
4. Usar la regla de la cadena de derivadas parciales para encontrar tasas de cambio y hacer aproximaciones incrementales.

Derivadas parciales de primer orden

La derivada parcial de $f(x, y)$ respecto de x se denota por

$$\partial_x f(x, y) \text{ ó } f_x(x, y)$$

y es la función obtenida al derivar f respecto de x *tratando a* y *como una constante.*

Derivadas parciales de primer orden

De manera similar, la derivada parcial de $f(x, y)$ respecto de y se denota por

$$\partial_y f(x, y) \text{ ó } f_y(x, y)$$

y es la función obtenida al derivar f respecto de y *tratando a* x *como una constante.*

Algunas propiedades y fórmulas

Proposición 3.1. *Sean* $u(x, y), v(x, y)$ *funciones de dos variables y* $h(y)$ *una función que no depende de* x.

1. $\partial_x h(y) = 0$;
2. $\partial_x (h(y)u) = h(y)\partial_x u$;
3. $\partial_x (u + v) = \partial_x u + \partial_x v$;

4. $\partial_x (uv) = u\partial_x v + v\partial_x u;$

5. $\partial_x u^n = nu^{n-1}\partial_x u;$

6. $\partial_x e^u = e^u \partial_x u;$

7. $\partial_x \ln(u) = \frac{\partial_x u}{u}.$

Observación 3.1. *Las reglas siguen valiendo si: cambiamos ∂_x por ∂_y y h no depende de y.*

Cálculo de derivadas parciales

Problema Resuelto 3.9. *Encuentre las derivadas parciales de* $f(x,y) = x^2 + 2xy^2 + \frac{2y}{3x}$

El desarrollo completo del ejercicio lo puede encontrar en mi Canal de YouTube. La comprobación de la solución la puede encontrar en SageMathCell.

Problema Resuelto 3.10. *Encuentre las derivadas parciales de*

$$f(x,y) = (x^2 + x * y + y)^5.$$

El desarrollo completo del ejercicio lo puedes encontrar en mi Canal de YouTube. La comprobación se puede encontrar en http://sagecell.sagemath.org/?q=vrfhpv

Problema Resuelto 3.11. *Encuentre las derivadas parciales de*

$$f(x,y) = xe^{-2xy}.$$

El desarrollo completo del ejercicio lo puedes encontrar en mi Canal de YouTube. La comprobación se puede encontrar en http://sagecell.sagemath.org/?q=onrgkx

Problema Resuelto 3.12. *Evalue las derivadas parciales $\partial_x f(x,y)$ y $\partial_y f(x,y)$ en el punto (x_0, y_0) dado:*

1. $f(x,y) = x^3y - 2(x+y),\ x_0 = 1, y_0 = 0;$

2. $f(x,y) = x + \dfrac{x}{y-3x},\ x_0 = 1, y_0 = 1;$

3. $f(x,y) = (x-2y)^2 + (y-3x)^2 + 5,\ x_0 = 0, y_0 = -1;$

4. $f(x,y) = xy \ln\left(\dfrac{y}{x}\right) + \ln(2x-3y)^2,\ x_0 = 1, y_0 = 1;$

Puede verificar sus resultados con este este script.

Clasificación de Puntos Críticos

Definición 3.1 (Extremos relativos)**.** *Diremos la función f(x,y) tiene un* máximo relativo *en* (x_0, y_0) *si*

$$f(x_0, y_0) \geq f(x, y)$$

para todo (x, y) *suficientemente cercano a* (x_0, y_0).

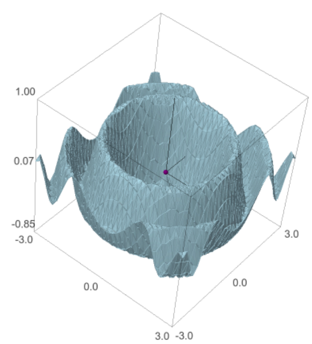
De manera similar, diremos la función f(x,y) tiene un mínimo relativo *en* (x_0, y_0) *si*

$$f(x_0, y_0) \leq f(x, y)$$

para todo (x, y) *suficientemente cercano a* (x_0, y_0).

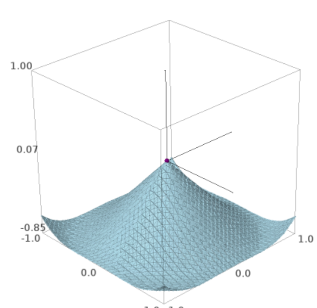
Los *extremos relativos* no siempre son *extremos absolutos*...

Figura 3.1: Máximo Relativo



Est imagen la puede genera con el siguiente código: http://sagecell.sagemath.org/?q=wdxppk

Sin embargo, para puntos suficientemente cercano, un *extremo relativo* sí lo es.



Esta imagen la puede generar con el siguiente código: http://sagecell.sagemath.org/?q=butszu

De hecho, el mapa topográfico de la región, nos indica que existen punto a una mayor altura que el *máximo relativo.*

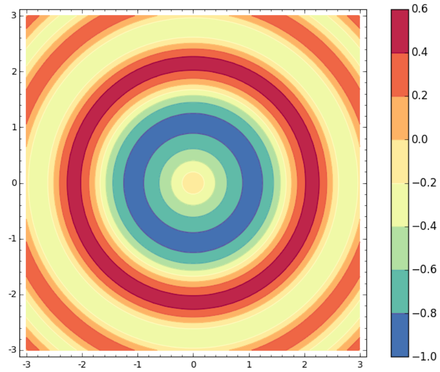


Figura 3.2: Mapa topográfico con alturas

Puede generar este mapa topográfico con el siguiente código http://sagecell.sagemath.org/?q=zyutmy

Definición 3.2 (Puntos críticos)**.** *Un punto* (x_0, y_0) *es un* punto crítico *de* $f(x, y)$ *si*

$$\partial_x f(x_0, y_0) = 0, \ \partial_y f(x_0, y_0) = 0.$$

Todos los extremos relativos son puntos críticos...
Pero no todos los puntos críticos son extremos relativos.

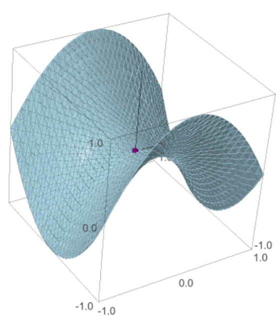


Figura 3.3: Punto de silla

http://sagecell.sagemath.org/?q=kmfhcx

Diremos que un punto crítico que no es extremo local es un punto de silla.

http://sagecell.sagemath.org/?q=mjknwh

Observación 3.2. $(0, 0)$ *es punto de silla de* $f(x, y) = x^2 - y^2$.

Definición 3.3 (Segundas derivadas)**.** *Las derivadas parciales de segundo orden de* $f(x, y)$ *son*

- $\partial_{xx} f(x, y) = \partial_x \left(\partial_x f(x, y)\right) = f_{xx}(x, y)$
- $\partial_{xy} f(x, y) = \partial_x \left(\partial_y f(x, y)\right) = f_{yx}(x, y)$
- $\partial_{yx} f(x, y) = \partial_y \left(\partial_x f(x, y)\right) = f_{xy}(x, y)$

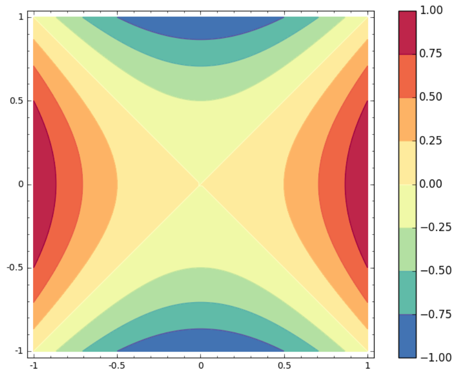


Figura 3.4: Mapa topografico de $f(x,y) = x^2 - y^2$

- $\partial_{yy} f(x,y) = \partial_y \left(\partial_y f(x,y)\right) = f_{yy}(x,y)$

Hessiano de una función

$$\text{Hess}\, f(x,y) = \begin{pmatrix} \partial_{xx} f(x,y) & \partial_{yx} f(x,y) \\ \partial_{xy} f(x,y) & \partial_{yy} f(x,y) \end{pmatrix}$$

El determinante Hessiano de $f(x,y)$ se define como

$$D(x,y) = \partial_{xx} f(x,y) \partial_{yy} f(x,y) - \partial_{xy} f(x,y) \partial_{yx} f(x,y).$$

Observación 3.3. *Si las derivadas parciales mixtas $\partial_{xy} f(x,y)$, $\partial_{yx} f(x,y)$ existen y son continuas, entonces*

$$\partial_{xy} f(x,y) = \partial_{yx} f(x,y),$$

de manera que

$$D(x,y) = \partial_{xx} f(x,y) \partial_{yy} f(x,y) - \left(\partial_{xy} f(x,y)\right)^2.$$

Teorema 3.1 (Clasificación de puntos críticos). *Supongamos que todas las derivas de primer y segundo orden de $f(x,y)$ existe y que (x_0, y_0) es un punto crítico de $f(x,y)$. Entonces*

- *Si $D(x_0,y_0) < 0$, entonces (x_0,y_0) es un* punto de silla.
- *Si $D(x_0,y_0) > 0$ y $\partial_{xx} f(x_0,y_0) > 0$, entonces (x_0,y_0) es un* mínimo relativo.
- *Si $D(x_0,y_0) > 0$ y $\partial_{xx} f(x_0,y_0) < 0$, entonces (x_0,y_0) es un* máximo relativo.

Observación 3.4. *Si $D(x_0,y_0) = 0$, la información no es concluyente.*

Problema Resuelto 3.13. *Clasifique los puntos críticos de* $f(x,y) = x^2 + y^2$.

Puede ver el desarrollo completo del ejercicio en https://youtu.be/9Vz-qouiRPw.

Para encontrar los puntos críticos, puede este script.

Para evaluarlos en $D(x,y)$ y $\partial_{xx}f(x,y)$ puede utilizar este script.

Problema Resuelto 3.14. *Clasifique los puntos críticos de* $f(x,y) = 12x - x^3 - 4y^2$.

Puede ver el desarrollo completo del ejercicio en https://youtu.be/oY3DjTSqado.

Para encontrar los puntos críticos puede usar este script.

Para evaluarlos en $D(x,y)$ y $\partial_{xx}f(x,y)$ puede utilizar este script.

Problema Resuelto 3.15. *Clasifique los puntos críticos de* $f(x,y) = x^3 - y^3 + 6xy$.

Puede ver el desarrollo completo del ejercicio en https://youtu.be/oCk2O9SpJG4.

Para encontrar los puntos críticos puede usar este script.

Para evaluarlos en $D(x,y)$ y $\partial_{xx}f(x,y)$ puede usar este script.

Problema Resuelto 3.16. *Clasifique los puntos críticos de cada una de las siguientes funciones:*

1. $f(x,y) = 5 - x^2 - y^2$
2. $f(x,y) = \frac{16}{x} + \frac{6}{y} + x^2 - 3y^2$
3. $f(x,y) = x^3 + y^2 - 6xy + 9x + 5y + 2$
4. $f(x,y) = (x^2 + 2y^2)e^{1-x^2-y^2}$

Puede verificar sus resultados, utilizando este este script.

4 Bibliografía