JULIHO CASTILLO COLMENARES

PRECÁLCULO

WWW.ASIMOVIAN.ACADEMY

Índice general

1 Teoría de conjuntos

1.1 *Lógica matemática*

Muchos algoritmos y demostraciones usan expresiones lógicas tales como `si p entonces q`. Entonces es necesario conocer los casos en los cuales esas expresiones son `ciertas` o `falsas`. Discutiremos esto en esta unidad.

También investigamos el valor de verdad de enunciados cuantificados, que son aquellos que usan los cuantificadores lógicos `para todo...` y `existe...`

En este curso, usaremos el *sistema algebráico de computo* `SageMath`, el cuál está escrito con base en el lenguaje de programación `Python` e incorpora diversos paquetes de `OpenSource`. Puede acceder a este sistema, a través de https://cloud.sagemath.com/

Proposiciones y Declaraciones Compuestas

Una proposición es un enunciado declarativo que puede ser cierto o falso, pero no ambos.

Ejemplo. ¿Cuál de los siguientes enunciados es una proposición?

1. El hielo flota en el agua.
2. China está en Europa.
3. $2+2=4$
4. $2+2=5$
5. ¿A donde vas?
6. Haz tu tarea.

Proposiciones compuestas

Muchas proposiciones están `compuestas` de proposiciones más simples, llamadas *subproposiciones*, por medio de *conectores lógicos.* Una proposición se dice que es *primitiva* si no puede descomponerse en proposiciones más simples.

Por ejemplo, las siguientes proposiciones son compuestas

- "Las rosas son rojas y las violetas son azules"
- "Juan es inteligente y estudia hasta muy noche"

La propiedad fundamental de una proposición compuesta es que su valor de verdad está completamente determinado por los valores de verdad de sus subproposiciones y la manera en la cual están conectadas para formar la proposición compuesta.

Operaciones Lógicas Básicas

En esta sección discutiremos las tres operaciones lógicas básicas: conjunción , disyunción y la negación.

Conjunción $p \wedge q$

Cualesquiera dos proposiciones p, q pueden ser combinadas por la palabra “y” para formar una proposición compuesta llamada *conjunción* que se escribe $p \wedge q$.

Definición. Si tanto p como q son ciertas, entonces $p \wedge q$ es cierta; en otro caso $p \wedge q$ es falsa. [1]

Observación. Para entender mejor como se conectan los valores de verdad, generalmente se utilizan *tablas de verdad.*

Por brevedad 1 representará el valor `cierto`, mientras que 0 representará `falso`

[1]

Tabla de Verdad 1 (Conjunción)**.**

p	q	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Construimos la tabla de verdad de la conjunción en el siguiente script https://goo.gl/hEF5os

Disyunción $p \vee q$

Cualesquiera dos proposiciones p, q pueden ser combinadas por la palabra “o” para formar una proposición compuesta llamada *disyunción* que se escribe $p \vee q$.

Definición. Si tanto p como q son falsas, entonces $p \vee q$ es falsa; en otro caso $p \vee q$ es verdadera. [2]

Observación. Algunas veces `"p o q"` se entiende en el sentido exclusivo: Puede ocurrir `p o q`, *pero no ambos,* que es diferente a la definición anterior. Sin embargo, existe un conector llamado de hecho `o exclusivo`, que cumple esta definición y consideraremos más adelante.

[2]

Tabla de Verdad 2 (disyunción)**.**

p	q	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Construimos la tabla de verdad de la disyunción en el siguiente script https://goo.gl/5kXzNI

Negación $\neg p$

Dada cualquier proposición p, otra proposición llamada *negación* de p puede ser formada escribien *“No es cierto que...”* o *“Es falso que...”* antes de `p`.

De manera más sencilla, decimos `no` p y escribimos $\neg p$.

Definición (Negación)**.** Si p es cierta, entonces $\neg p$ es falsa; pero si p es falsa, $\neg p$ es cierta. [3]

[3]

Tabla de Verdad 3 (Negación)**.**

p	$\neg p$
1	0
0	1

Construimos la tabla de verdad de la disyunción en el siguiente script https://goo.gl/sgCfkC

Proposiciones y Tablas de Verdad

Sea $P(p, q, ...)$ una expresión construida con variables lógicas $p, q, ...,$ que toman valores de `verdadero "V"` o `falso "F"`, a través de conectores lógicos como $\wedge$, $\vee$, $\neg$ y otros que discutiremos más adelante.

Tales expresiones $P(p, q, ...)$ son llamadas *proposiciones.*

La propiedad principal de una proposición $P(p, q, ...)$ es que sus valores de verdad sólo dependen del valor de sus variables.

Una manera simple y concisa de mostrar esta relación es a través de una *tabla de verdad.*

Ejemplo. Contruir la tabla de verdad de la proposición $\neg (p \wedge \neg q)$.
Solución.

Tabla de Verdad 4 ($\neg (p \wedge \neg q)$).

p	q	not q	p and not q	not(p and not q)
1	1	0	0	1
1	0	1	1	0
0	1	0	0	1
0	0	1	0	1

Construimos la tabla de verdad de la proposición anterior con el siguiente script https://goo.gl/V2Axzi

Método alternativo de construir una tabla de verdad

p	q	$\neg$	$(p$	$\wedge$	$\neg$	$q)$
1	1					
1	0					
0	1					
0	0					

Observación. Para evitar el uso excesivo de paréntesis, algunas veces adoptamos una jerarquía para los conectores lógicos.

De manera especifica $\neg$ tiene prioridad sobre $\wedge$, que a su vez tiene prioridad sobre $\vee$.

Por ejemplo, $\neg p \wedge q$ significa $(\neg p) \wedge q$ y no $\neg(p \wedge q)$.

Ejemplo. Construya las tablas de verdad de las siguientes proposiciones

1. $p \vee \neg p$
2. $p \wedge \neg p$
3. $\neg (p \vee q)$
4. $\neg p \wedge \neg q$
5. $\neg (p \wedge q)$
6. $\neg p \vee \neg q$

Algunas proposiciones $P(p, q, ...)$ son siempre ciertas, no importa los valores de verdad de las variables $p, q, ...$

Tales proposiciones se conocen como *tautologías.*

De manera similar, algunas proposiciones $P(p, q, ...)$ son siempre falsas, no importa los valores de verdad de las variables $p, q, ...$

Tales proposiciones se conocen como *contradicciones.*

Equivalencias Lógicas

Diremos que dos proposiciones $P(p, q, ...)$ y $Q(p, q, ...)$ son *lógicamente equivalentes* si tienen tablas de verdad identidades.

En tal caso, escribimos

$$P(p, q, ..) \equiv Q(p, q, ...)$$

Ejemplo. Demostremos que

$$\neg (p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$$

Ejemplo. Reescriba la frase "No es cierto que: las rosas son rojas y las violetas son azules", usando la equivalencia anterior.

Por su utilidad, algunas equivalencias lógicas con llamadas *leyes para el álgebra de proposiciones.*

A continuación, enunciaremos algunas, pero es necesario verificar su validez a través de tablas de verdad.

Idempotent laws:	(1a) $p \vee p \equiv p$	(1b) $p \wedge p \equiv p$
Associative laws:	(2a) $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$	(2b) $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$
Commutative laws:	(3a) $p \vee q \equiv q \vee p$	(3b) $p \wedge q \equiv q \wedge p$
Distributive laws:	(4a) $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$	(4b) $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
Identity laws:	(5a) $p \vee F \equiv p$ (6a) $p \vee T \equiv T$	(5b) $p \wedge T \equiv p$ (6b) $p \wedge F \equiv F$
Involution law:	(7) $\neg\neg p \equiv p$	
Complement laws:	(8a) $p \vee \neg p \equiv T$ (9a) $\neg T \equiv F$	(8b) $p \wedge \neg p \equiv T$ (9b) $\neg F \equiv T$
DeMorgan's laws:	(10a) $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$	(10b) $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$

Figura 1.1: Leyes para el álgebra de proposiciones

Sentencias condicionales y bicondicionales

Muchas sentencias, particularmente en matemáticas, son de la forma `"si` p `entonces` q`"`. Tales sentencias son llamadas *condicionales* y son denotadas por

$$p \to q.$$

El condicional $p \to q$ es frecuentemente leído como *"p implica q"* o *"p sólo si q".* [4]

[4]

Tabla de Verdad 5 (Condicional)**.**

p	q	$p \to q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Otra sentencia común es de la forma *"p si y solo si q".* Tales sentencias son llamadas *bicondicionales* y se denota por $p \iff q$. [5]

Ejemplo. Demuestre que

$$p \to q \equiv \neg p \vee q.$$

[5]

Tabla de Verdad 6 (Bicondicional).

p	q	$p \longleftrightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Ejemplo. Determine cuales de las siguientes sentencias son tautologías, construyendo las correspondientes tablas de verdad.

1. $\neg(p \vee \neg q) \to \neg p$
2. $p \to (q \to r)$
3. $(p \to q) \to r$
4. $(p \to q) \to (q \to p)$
5. $(p \wedge (p \to q)) \to q$
6. $(p \wedge q) \to p$
7. $q \to (\neg p \vee \neg q)$
8. $((p \to q) \wedge (q \to r)) \to (p \to r)$

Argumentos

Un *argumento* es una afirmación de que un conjunto dado de proposiciones

$$P_1, P_2, ..., P_n,$$

llamadas *premisas*, tiene como consecuencia otra proposición Q, llamada *conclusión.*[6]

En otras palabras, es una sentencia de la forma

$$(P_1 \wedge P_2 \wedge ... \wedge P_n) \to Q$$

Tal argumento se denota por

$$P_1, P_2, ..., P_n \vdash Q.$$

La noción de *"argumento lógico"* o *"argumento válido"* se formaliza de la manera siguiente:

Definición. Un argumento $P_1, P_2, ..., P_n \vdash Q$ se dice que es *válido* si la proposición

$$(P_1 \wedge P_2 \wedge ... \wedge P_n) \to Q$$

es una tautología.

Si un argumento no es *válido,* diremos que es una *falacia.*

[6] Por ejemplo

Si sube el dólar, sube la gasolina.
Si sube la gasolina, entonces hay inflación.

$\therefore$ Si sube el dólar, entonces hay inflación.

Ejemplo.

1. Demuestre que $p, p \to q \vdash q$ es un argumento válido.
2. Demuestre que $p \to q, q \vdash p$ es una falacia.
3. Demuestre que $p \to q, \neg q \vdash \neg p$ es un argumento válido.

p	q	r	$[(p$	$\to$	$q)$	$\wedge$	$(q$	$\to$	$r)]$	$\to$	$(p$	$\to$	$r)$
T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	T	T	F	T	F	F	T	T	F	F
T	F	T	T	F	F	F	F	T	T	T	T	T	T
T	F	F	T	F	F	F	F	T	F	T	T	F	F
F	T	T	F	T	T	T	T	T	T	T	F	T	T
F	T	F	F	T	T	F	T	F	F	T	F	T	F
F	F	T	F	T	F	T	F	T	T	T	F	T	T
F	F	F	F	T	F	T	F	T	F	T	F	T	F
Step			1	2	1	3	1	2	1	4	1	2	1

Figura 1.2: Un principio fundamental del razonamiento lógico nos dice que: Si p implica q y q implica r, entonces p implica r. En otras palabras, el siguiente argumento es válido

$$p \to, q, q \to r \vdash p \to r.$$

Notación de conjuntos

Un conjunto se puede entender de forma intuitiva como una colección de objetos. Aunque la definición formal es mucho más complicada, para nuestros fines basta con esta idea sencilla.[7]

[7] Véase por ejemplo el artículo Axiomatic set theory.

Por convención, un conjunto se puede describir de manera *extensiva* escribiendo todos y cada uno de sus elementos entre paréntesis, o bien alguna característica que los defina. Por ejemplo, el conjunto de los dígitos se puede describir como

$$\{\texttt{dígitos}\} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} = \{0, 1, ..., 9\}.$$

El conjunto de los números naturales está dado por

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3...\},$$

mientras que los números naturales están dados por

$$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3...\},$$

. Al conjunto de enteros positivos los denotaremos por $\mathbb{Z}^+$.

Si un elemento x pertenece a un conjunto A, escribiremos $x \in A$. En caso contrario, $x \notin A$.

Funciones proposicionales y Cuantificadores

Una *función proposicional* (o *sentencia abierta* o *condición*) definida en un conjunto A es una expresión $p(x)$ que tiene la propiedad de que $p(a)$ es cierta o falsa para cada $a \in A$.

El conjunto A se conoce como dominio de $p(x)$, y el subconjunto de todos los elementos para los cuales $p(x)$ es cierto se conoce como el *conjunto de verdad* T_p de $p(x)$:

$$T_p = \{x \mid x \in A, p(x) = 1\},$$

o simplemente

$$T_p = \{x \mid p(x)\}.$$

Esta es la manera *intensiva* de describir un conjunto.

Ejemplo. Encuentre el conjunto de verdad para cada función en $\mathbb{N}$:

1. $p(x) : x + 2 > 7$
2. $p(x) : x + 5 < 3$
3. $p(x) : x + 5 > 1$

Cuantificador universal

Sea $p(x)$ una función proposicional definido en un conjunto A. La expresión

$$\forall x \in A : p(x)$$

se lee como `"para todo` $x \in A$, $p(x)$ `es verdadero."`

El símbolo $\forall$ (`"para todo"`) se llama cuantificador universal.

Mientras que $p(x)$ es una sentencia abierta (su valor de verdad depende de cada $x \in A$), la afirmación

$$\forall x \in A : p(x)$$

es verdadera si y solo si $p(x)$ se cumple para todo $x \in A$.

Por otro lado, si existe algún $x \in A$ tal que $p(x)$ es falso, entonces

$$\forall x \in A : p(x)$$

es falso.

Ejemplo. Verifique el valor de verdad de las siguientes afirmaciones:

1. $\forall n \in \mathbb{N} : n + 4 > 3.$
2. $\forall n \in \mathbb{N} : n + 2 > 8.$

Cuantificador existencial

Sea $p(x)$ una función proposicional definido en un conjunto A. La expresión

$$\exists x \in A : p(x)$$

se lee como `"existe` $x \in A$, `tal que` $p(x)$ `es verdadero."`

El símbolo $\exists$ (`"existe..."`) se llama cuantificador existencial.

Mientras que $p(x)$ es una sentencia abierta (su valor de verdad depende de cada $x \in A$), la afirmación

$$\exists x \in A : p(x)$$

es verdadera si y solo si $p(x)$ se cumple para algún elemento $x \in A$.

Por otro lado,

$$\exists x \in A : p(x)$$

es falso si y solo si para todo $x \in A$, se tiene que $p(x)$ es falso.

Verifique el valor de verdad de las siguientes afirmaciones:

1. $\exists n \in \mathbb{N} : n + 4 < 7$;
2. $\exists n \in \mathbb{N} : n + 6 < 4$.

Negación de Sentencias Cuantificadas

Considere la afirmación:

Todos los estudiantes de ingeniería saben programar.

¿Cómo podemos negar esta afirmación?

Al menos un estudiante de ingeniería no sabe programar.

De manera similar, la negación de la afirmación

Existe algún estudiante de ingeniería que sepa programar

es equivalente a afirmar que

Cada uno de los estudiantes de ingeniería no saben programar.

Estos son ejemplos de la siguiente proposición

Teorema 1.1 (DeMorgan)**.**

$$\neg\left(\forall x \in M : p(x)\right) \equiv \exists x \in M : \neg p(x) \tag{1.1}$$

$$\neg\left(\exists x \in M : p(x)\right) \equiv \forall x \in M : \neg p(x). \tag{1.2}$$

Ejemplo. La negación de la siguiente afirmación

Para todo entero positivo n, tenemos que $n + 2 > 8$

es

Existe un entero positivo n tal que $n + 2 \leq 8$.

Ejemplo. La negación de la siguiente afirmación

Existe una persona viva con 150 años o más.

es

Toda persona viva tiene menos de 150 años.

Observación. Para negar una afirmación del tipo

$$\forall x \in A : p(x)$$

sólo necesitamos encontrar un elemento $x_0 \in A$ tal que $p(x)$ sea *falso*.

A un elemento x_0 así se le conoce como *contraejemeplo*.

Ejemplo.

1. Un contraejemplo para $\forall x \in \mathbb{R} : |x| \neq 0$ es $x = 0$.
2. Un contraejemplo para $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 \geq x$ es $x = \frac{1}{2}$.
3. Sin embargo, $\forall x \in \mathbb{N} :: x^2 \leq x$ es siempre cierto.

Problemas

Problema 1.1. Sea p : `"Hace frío"` y q : `"Está lloviendo"`. Proponga un enunciado verbal simple que describa cada una de las siguientes proposiciones:

1. $\neg p$;
2. $p \wedge q$;
3. $p \vee q$;
4. $q \vee \neg p$.

Problema 1.2. Encuentre la tabla de verdad de $\neg p \wedge q$.

Problema 1.3. Demuestre que la propisición

$$p \vee \neg (p \wedge q)$$

es una tautología.

Problema 1.4. Muestre que las proposiciones $\neg (p \wedge q)$ y $\neg p \vee \neg q$ son lógicamente equivalentes.

Problema 1.5. Use las leyes en la tabla 1.1 para mostrar que

$$\neg (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge q) \equiv \neg p$$

Problema 1.6. Reescriba los siguientes enunciados sin usar el condicional:

1. Si hace frío, el usa sombrero.
2. Si la productividad se incrementa, entonces el salario aumenta.

Problema 1.7. Considere la proposición condicional $p \to q$. La proposiciones

$$q \to p, \neg p \to \neg q, \neg q \to \neg p$$

son llamadas conversa, inversa y contrapositiva, respectivamente.

¿Cuáles de estas proposiciones son lógicamente equivalente s a $p \to q$?

Problema 1.8. Determine la contrapositiva de cada enunciado:

1. Si Erik es poeta, entonces es pobre.
2. Solo si Marcos estudia, pasará el examen.

Problema 1.9. Escriba la negación de cada enunciado, tan simple como sea posible:

1. Si ella trabaja, ganará dinero.
2. El nada si y solo si el agua está tibia.
3. Si neva, entonce no manejaré.

Problema 1.10. Muestre que el siguiente argumento es una falacia:

$$p \to q, \neg p \vdash \neg q.$$

Problema 1.11. Muestre que el siguiente argumento es válido:

$$p \to q, \neg q \vdash \neg p.$$

Problema 1.12. Muestre que el siguiente argumento siempre es válido:

$$p \to \neg q, r \to q, r \vdash \neg p.$$

Problema 1.13. Determine la validez del siguiente argumento:

$$\begin{array}{l} \text{Si 7 es menor que 4, entonces 7 no es número primo} \\ \text{7 no es menor que 4} \\ \hline \text{7 no es número primo.} \end{array}$$

Problema 1.14. Determine la validez del siguiente argumento:

$$\begin{array}{l} \text{Si dos lados de un triángulo son iguales, entonces los respectivos ángulos opuestos son iguales} \\ \text{Dos lados de un triángulo no son iguales} \\ \hline \text{Los respectivos ángulos opuestos no son iguales.} \end{array}$$

Problema 1.15. Sea $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Determine el valor de verdad de cada uno de los siguientes enunciados:

1. $\exists x \in A : x + 3 = 10$;

2. $\forall x \in A : x + 3 < 10$;

3. $\exists x \in A : x + 3 < 5$;

4. $\forall x \in A : x + 3 \leq 7$.

Problema 1.16. Determine el valor de verdad de cada uno de las siguientes afirmaciones donde $U = \{1, 2, 3\}$ es el conjunto *"universo"* (de referencia):

1. $\exists x \forall y : x^2 < y + 1$;

2. $\forall x \exists y : x^2 + y^2 < 12$;

3. $\forall x \forall y : x^2 + y^3 < 12$.

Problema 1.17. Encuentre la negación de cada una de las siguientes afirmaciones:

1. $\exists x \forall y : p(x, y)$;

2. $\forall x \forall y : p(x, y)$;

3. $\exists x \exists y \forall z : p(x, y, z)$.

Problema 1.18. Sea

$$p(x) : x + 2 > 5.$$

Indique cuando $p(x)$ es una función proposicional o no en cada uno de los siguientes conjuntos:

1. $\mathbb{N}$

2. $\mathbb{Z}^- = \{-1, -2, -3, ...\}$

3. $\mathbb{C}$

Problema 1.19. Niegue cada uno de las siguientes afirmaciones:

1. Todos los estudiantes viven en los dormitorios.

2. A todos los estudiantes de ingeniería le gusta el futbol.

3. Algunos estudiantes tienen 25 años o más.

1.2 Teoría de Conjuntos

Conjuntos y Elementos. Subconjuntos

Un *conjunto* puede ser visto como un conjunto bien definido de objetos, llamados *elementos* o *miembros* de tal conjunto.

Usualmente, usaremos letras mayúsculas para denotar conjunto, y minúsculas para dlos elementos.

La pertenencia en un conjunto se denota de la siguiente manera:

$$a \in S \textit{ denota que } a \textit{ pertenece al conjunto } S.$$
$$a, b \in S \textit{ denota que tanto } a \textit{ como } b \textit{ pertenecen al conjunto } S.$$

El símbolo $\in$ significa `"es elemento de"`. Por el contrario, $\notin$ significa `"no es elemento de"`.

Especificación de Conjuntos

Básicamente, existen dos maneras de especificar un conjunto en particular. Por un lado, si es posible, enlistar todos los miembros. Por otro lado, caracterizando los elementos en el conjunto.

En cualquier caso, para declarar un conjunto se utilizan llaves:

$$A = \{\cdots\}$$

Por ejemplo, el conjunto

$$A = \{1, 3, 5, 6, 9\}$$

también se puede especificar como

$$A = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 10, 2 \nmid x\}$$

Un conjunto no depende del modo en que sus elementos se muestren. Este permanece igual si sus elementos se repiten o se reacomodan.

Ejemplo.

$$\begin{aligned}\left\{x \in \mathbb{R} | x^2 - 3x + 2 = 0\right\} &= \{1, 2\} \\ &= \{1, 2, 2, 1\}\end{aligned}$$

Subconjuntos

Supongamos que cada elemento en un conjunto A es también elemento del conjunto B, es decir,

$$x \in A \Rightarrow x \in B.$$

En ese caso, decimos que A es subconjunto de B. También podemos decir que A está contenido en B o que B contiene a A.

Esta relación se escribe como

$$A \subset B$$

o en ocasiones como $B \supset A$. Por el contrario, si es necesario indicar que A *no* es subconjunto de B, escribimos $A \not\subset B$.

Diremos que dos conjuntos son iguales si poseen los mismos elementos, es decir,

$$x \in A \iff x \in B.$$

De manera equivalente

$$A = B \text{ si y solo si } A \subset B \text{ y } B \subset A.$$

Ejemplo. Determine la relación entre los siguientes conjuntos

$$A = \{1, 3, 4, 7, 8, 9\}, \; B = \{1, 2, 3, 4, 5\}, \; C = \{1, 3\}.$$

Ejemplo. Demuestre que

1. $A \not\subset B$ si y solo $\exists x \in A : x \notin B$.
2. $A \subset A$.
3. $A \subset B, B \subset C \Rightarrow A \subset C$.

Símbolos especiales

Algunos conjuntos numéricos tienen una notación especial

- $\mathbb{N}$: números naturales (enteros positivos);
- $\mathbb{Z}$: números enteros;
- $\mathbb{Q}$: números racionales;
- $\mathbb{R}$: números reales;
- $\mathbb{C}$: números complejos.

Observe que

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C},$$

pero en ningún caso los conjuntos son iguales.

Conjunto Universal y Conjunto Vacío

Todos los conjuntos bajo investigación en una apliación de teoría de conjuntos se supone que pertenecen a un conjunto fijo más grande llamado *conjunto universo* $\mathbb{U}$, al menos que se indique otro caso.

Dado un conjunto universal $\mathbb{U}$ y una propiedad P, es posible que no existan elemento de $\mathbb{U}$ con la propiedad P.

Por ejemplo, el siguiente conjunto no tiene elementos

$$S = \left\{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 = 3\right\}.$$

A tal conjunto sin elementos $\{\}$ se le conoce como conjunto vacío y se denota como $\emptyset$.

Observación. Sólo existe un conjunto vacío. El conjunto vacío es subconjunto de cualquier otro conjunto.

Conjuntos disjuntos

Dos conjuntos A y B son *disjuntos* si no tienen elementos en común.

Ejemplo. Considere

$$A = \{1, 2\}, \; B = \{4, 5, 6\}, \; C = \{5, 6, 7, 8\}.$$

Determine que pares de conjuntos son disjuntos.

Diagramas de Venn

Un diagrama de Venn es una representación gráfica de conjuntos en el que cada conjunto está representado por áreas encerradas en el plano.

El conjunto universo $\mathbb{U}$ es representado por el interior de un rectángulo, y cualquier otro conjunto esta representado por discos que viven dentro del rectángulo.

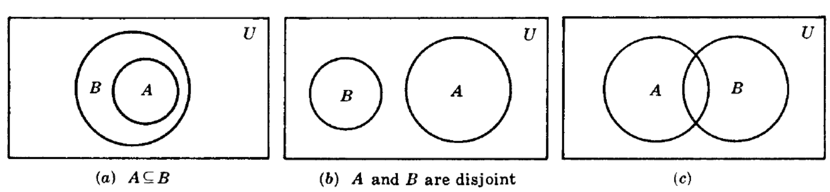


Figura 1.3: Representaciones con Diagramas de Venn

Operaciones con Conjuntos

En esta sección introduciremos la unión, la intersección y el complemento de conjuntos.

Unión e Intersección

La unión de dos conjuntos A y B es el conjunto de todos los elementos que pertenecen a A o a B, es decir

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}.$$

La intersección de dos conjuntos A y B es el conjunto de todos los elementos que pertenecen a A y a B, es decir

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}.$$

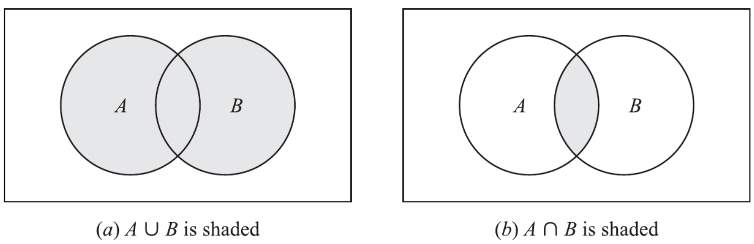


Figura 1.4: Unión e Intersección

Problemas

Problema 1.20. Sea $A = \{1,2,3,4\}$, $B = \{3,4,5,6,7\}$, $C = \{2,3,8,9\}$. Encuentre

1. $A \cup B =$
2. $A \cap B =$
3. $A \cup C =$
4. $A \cap C =$
5. $B \cup C =$
6. $B \cap C =$

Problema 1.21. Demuestre que para cualesquiera dos conjuntos A y B, tenemos:

$$A \cap B \subset A \subset A \cup B.$$

Problema 1.22. Demuestre que las siguientes proposiciones son equivalentes:

1. $A \subset B$
2. $A \cap B = A$
3. $A \cup B = B$

1.3 Particiones

Dos conjuntos A y B se dicen *disjuntos* si no tienen elementos en común, es decir $A \cap B = \emptyset$.

Supongamos que

$$S = A \cup B,\ A \cap B = \emptyset.$$

Diremos que S es la unión disjunta de A y B y se denota por

$$S = A \sqcup B.$$

Complementos, Diferencias y Diferencias Simétricas

En esta sección, consideraremos conjuntos que sean subconjuntos de un conjunto universo fijo $\mathbb{U}$.

El *complemento* A^C de un conjunto A es el conjunto de elementos que no pertenecen a A, es decir

$$A^C = \{x \in \mathbb{U} \mid x \notin A\}.$$

Algunos textos denotan A^C también como A' o $\bar{A}$.

El *complemento relativo* de un conjunto B con respecto a un conjunto A se define como

$$A \backslash B = \{x \mid x \in A, x \notin B\}.$$

Ejemplo. Demuestre que $A \backslash B = A \cap B^C$

El conjunto $A \backslash B$ se lee A `menos` B. Algunos textos lo denotan también como $A - B$.

La *diferencia simétrica* de los conjuntos A y B se define como

$$A \oplus B = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

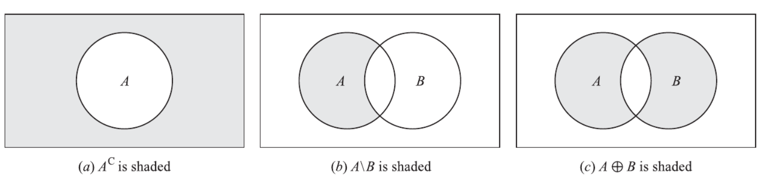


Figura 1.5: Complementos, diferencia y diferencia simétrica.

Conjuntos fundamentales

Dos conjuntos A y B se dicen *disjuntos* si no tienen elementos en común, es decir $A \cap B = \emptyset$.

Supongamos que

$$S = A \cup B,\ A \cap B = \emptyset.$$

Diremos que S es la unión disjunta de A y B y se denota por

$$S = A \sqcup B.$$

En general S es una unión disjunta de $P_1, P_2, ..., P_n$ si

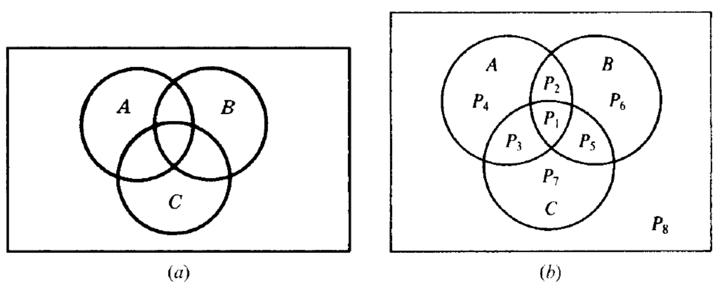
- $S = P_1 \cup P_2 \cup ... \cup P_n$ y
- $P_i \cap P_j = \emptyset$ siempre y cuando $i \neq j$.

En este caso, escribimos

$$S = P_1 \sqcup P_2 \sqcup ... \sqcup P_n.$$

Diremos que $P_1, P_2, ..., P_n$ es sistema de conjuntos fundamentales para $\mathbb{U}$ si

$$\mathbb{U} = P_1 \sqcup P_2 \sqcup ... \sqcup P_n.$$



Álgebra de conjuntos, dualidad

Los conjuntos bajo las operaciones de unión, intersección y complemento satisface varias leyes o identidad, que se enuncian en la siguiente tabla, y son similares a las leyes de lógica.

Idempotent laws:	(1a) $A \cup A = A$	(1b) $A \cap A = A$
Associative laws:	(2a) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	(2b) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
Commutative laws:	(3a) $A \cup B = B \cup A$	(3b) $A \cap B = B \cap A$
Distributive laws:	(4a) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	(4b) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
Identity laws:	(5a) $A \cup \emptyset = A$	(5b) $A \cap \mathbf{U} = A$
	(6a) $A \cup \mathbf{U} = \mathbf{U}$	(6b) $A \cap \emptyset = \emptyset$
Involution laws:	(7) $(A^C)^C = A$	
Complement laws:	(8a) $A \cup A^C = \mathbf{U}$	(8b) $A \cap A^C = \emptyset$
	(9a) $\mathbf{U}^C = \emptyset$	(9b) $\emptyset^C = \mathbf{U}$
DeMorgan's laws:	(10a) $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$	(10b) $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$

Figura 1.6: Leyes de Conjuntos

Cada ley de conjuntos se corresponde con una ley de lógica. Por ejemplo, la ley de DeMorgan:

$$\begin{aligned}(A \cup B)^C &= \{x \mid x \notin (A \cup B)\} \\ &= \{x \mid x \notin A \wedge x \notin B\} \\ &= A^C \cap B^C\end{aligned}$$

Dualidad El *principio de dualidad* establece que la equivalencia E^* obtenida a partir de una ley de lógica E reemplazando

$$\cup, \cap, \mathbb{U}, \emptyset$$

por

$$\cap, \cup, \emptyset, \mathbb{U}$$

sigue siendo una ley de lógica.

A la proposición E^* se le conoce como dual E.

Problemas

Problema 1.23. Definamos

$$p \veebar q \equiv (p \vee q) \wedge \neg (p \wedge q)$$

Demuestre que

1. $x \in A \oplus B \iff (x \in A) \veebar (x \in B)$
2. $p \veebar q \equiv (p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg p)$
3. $A \veebar B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$

Problema 1.24. Supongamos que $\mathbb{N}$ es el conjunto universo. Definamos $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{3, 4, 5, 6, 7\}$, $C = \{2, 3, 8, 9\}$, $E = \{2, 4, 6, ...\}$.

Determine:

1. $A \oplus B$
2. $A \oplus C$
3. $B \oplus C$
4. $A \oplus E$

Problema 1.25. Contruya un sistema de conjuntos fundamentales a partir de tres conjunto A, B, C.

Problema 1.26. Encuentre el dual de

$$(\mathbb{U} \cap A) \cup (B \cap A) = A$$

1.4 Inducción Matemática

Introducción

Una propiedad esencial de los naturales $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$ es la siguiente

Axioma (Principio de Inducción Matemática, versión I)**.** Sea P una proposición definida en $\mathbb{N}$, es decir, $P(n)$ toma valores de cierto o falso para cada $n \in \mathbb{N}$.

Supongamos que

1. $P(1)$ es cierto;
2. $\forall k \in \mathbb{N} : P(k) \Rightarrow P(k+1)$.

Entonces P es cierto para todo entero positivo $n \in \mathbb{N}$.

Ejemplo. Sea $P(n) : 1 + 3 + 5 + ... + (2n-1) = n^2$. Demostrar que $P(n)$ es cierta para toda $n \in \mathbb{N}$.

Axioma (Principio de Inducción Matemática, versión II)**.** Sea P una proposición definida en $\mathbb{N}$ tal que :

1. $P(1)$ es cierta;
2. $P(k)$ es cierta siempre que $P(j)$ para toda $1 \leq j < k$.

Entonces $P(n)$ es cierta para toda $n \in \mathbb{N}$.

Observación. Algunas veces, uno desea demostrar que una proposición es cierta para algún conjunto de enteros

$$\{a, a+1, a+2, ...\}$$

donde a es un entero positivo, posiblemente cero. Esto puede hacerse simplemente reemplazando 1 por a en cualquier versión del Principio de Inducción Matemática.

Ejemplo. Demostrar que

$$P(n) : 1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{1}{2} n (n+1)$$

es cierto para todo $n \in \mathbb{N}$.

Ejemplo. Demostrar que

$$P(n) : 1 + 2 + 2^2 + ... + 2^n = 2^{n+1} - 1$$

es cierto para todo $n \in \mathbb{N}$.

Notación "Sigma"

La letra griega Σ denota adición repetida:

$$\sum_{i=a}^{b} f(i) = f(a) + f(a+1) + ... + f(b),$$

siempre que $a \leq b$.

Ejemplo.

1. $\sum_{j=1}^{5} j = 1+2+3+4+5 = 15$
2. $\sum_{i=0}^{3} (2i+1) = 1+3+5+7$
3. $\sum_{i=2}^{10} i^2 = 2^2 + 3^2 + ... + 10^2$
4. $\sum_{j=1}^{4} \cos(j\pi) = \cos\pi + \cos 2\pi + \cos 3\pi + \cos 4\pi.$

Linealidad

Proposición 1.1.

$$\sum_{i=a}^{b} cf(i) = c\sum_{i=a}^{b} f(i)$$

$$\sum_{i=a}^{b} f(i) + g(i) = \sum_{i=a}^{b} f(i) + \sum_{i=a}^{b} g(i)$$

Propiedades

$$\sum_{k=a}^{b} f(k) = \sum_{j=a}^{b} f(j)$$

$$\sum_{j=a}^{a} f(j) = f(a)$$

$$\sum_{j=a}^{c} f(j) = \sum_{j=a}^{b} f(j) + \sum_{j=b}^{c} f(j)$$

$$\sum_{j=a}^{b+1} f(j) = \sum_{j=a}^{b} f(j) + f(b)$$

Ejemplo. Si $f(n) = (2n-1)$, entonces

$$\sum_{i=1}^{n} f(j) = 1 + 3 + ... + (2n-1)$$

es la suma hasta el $n-$ésimo natural impar. Observe que

1. $\sum_{j=1}^{1} f(j) = 2(1) - 1 = 1.$

2. $\sum_{i=1}^{n+1} f(j) = \left(\sum_{i=1}^{n} f(j)\right) + (2n+1)$

Ejemplo. Si $f(n) = 2^{n-1}$, entonces

$$\sum_{i=1}^{n} f(j) = 1 + 2 + ... + 2^{n-1}$$

es la suma de las primeras n potencias de 2 (incluyendo $1 = 2^0$). Observe que

1. $\sum_{i=1}^{n+1} f(j) = 1 + 2 + ... + 2^n$

2. $\sum_{j=1}^{1} f(j) = 2^{1-1} = 1.$

3. $\sum_{i=1}^{n+1} f(j) = \left(\sum_{i=1}^{n} f(j)\right) + 2^n.$

Ejemplos Resueltos

Ejemplo. Demostrar que

$$P(n) : 1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{1}{2} n \,(n+1)$$

es cierto para todo $n \in \mathbb{N}$.

Ejemplo. Demostrar que

$$P(n) : 1 + 2 + 2^2 + ... + 2^n = 2^{n+1} - 1$$

es cierto para todo $n \in \mathbb{N}$.

Funciones definidas de manera recursiva

Decimos que una función está *definida recursivamente* si la definición de la función se refiere a sí misma.

Para que la función esté bien definida, debe tener las siguientes dos propiedades:

1. Deben existir ciertos argumentos, llamados *valores base,* para los cuales la función no se refiera a sí misma.

2. Cada vez que la función se refiera a sí misma, el argumento de la función debe estár más cercano a un valor base.

La función factorial

El producto de enteros positivos de 1 hasta n (incluído) es llamado n *factorial,* $n!$

Es decir,

$$n! = n(n-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1.$$

Por razones combinatorias, es conveniente definir $0! = 1$, y de esta manera la función factorial quedará definida para todos los enteros no negativos.

Observación. 1. $1! = 1\cdot 0!$

2. $2! = 2\cdot 1!$

3. $3! = 3\cdot 2!$

4. $4! = 4\cdot 3!$

Es fácil observar que para $n\in\mathbb{N}$:

$$n! = n\cdot (n-1)!$$

Definición (Función factorial)**.**

$$n! = \begin{cases} 1 & n=0 \\ n\cdot (n-1)! & n>0 \end{cases}$$

Observación. 1. El valor de $n!$ factorial esta dado explicitamente para $n=0$, de manera que 0 es el valor base.

2. El valor de $n!, n>0$ está dado en términos de $n-1$, que es más cercano al valor base 0.

   Por tanto, $n!$ es una función recursiva bien definida.

```python
def factorial(n):
  result = 1
  for i in range(1, n+1):
    result *= i
  return result
```

Listing 1.1: Implementación iterativa del *factorial* en `Python`

```python
def factorial(n):
  z=1
  if n>1:
    z=n*factorial(n-1)
  return z
```

Listing 1.2: Implementación recursiva del *factorial* en `Python`

Para más implementaciones, visite Rosetta Code.

Suceción de Fibonacci

La celebre sucesión de Fibonacci (usualmente denotada por $F_0, F_1, F_2, ...$) es como sigue:

$$0, 0, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ...$$

Es decir, $F_0 = 0$ $F_1 = 1$ y cada término sucesor es la suma de los dos precedentes.

Por ejemplo, los siguientes dos términos de la sucesión son

$$34 + 55 = 89 \text{ y } 55 + 89 = 144.$$

Definición (Sucesión de Fibonacci)**.**

$$F_n = \begin{cases} n & n = 0, 1 \\ F_n = F_{n-2} + F_{n-1} & n > 1 \end{cases}$$

Este ejemplo es una función recursiva bien definida, ya que la función hace referencia a sí misma, cuando se usan F_{n-2} y F_{n-1}, y

1. los valores base son 0 y 1;
2. los valores de F_n están definidos en términos de valores más pequeños $n-2$ y $n-1$ que son más cercanos a los valores base.

```python
def fibIter(n):
  if n < 2:
    return n
  fibPrev = 1
  fib = 1
  for num in xrange(2, n):
    fibPrev, fib = fib, fib + fibPrev
  return fib
```

Listing 1.3: Implentación iterativa de *Fibonacci* en `Python`

```python
def fibRec(n):
  if n < 2:
    return n
  else:
    return fibRec(n-1) + fibRec(n-2)
```

Listing 1.4: Implentación recursiva de *Fibonacci* en `Python`

Para más implementaciones, visita Rosetta Code.

La función de Ackermann

Definición (Función (fallida) de Ackermann)**.**

$$A(m, n) = \begin{cases} n + 1 & m = 0 \\ A(m-1, n) & m \neq 0, n = 0 \\ A(m-1, A(m, n-1)) & m \neq 0, n \neq 0 \end{cases}$$

Definición (Función de Ackermann)**.**

$$A(m,n) = \begin{cases} n+1 & m=0 \\ A(m-1,1) & m \neq 0, n=0 \\ A(m-1, A(m,n-1)) & m \neq 0, n \neq 0 \end{cases}$$

```
def ack2(M, N):
  if M == 0:
    return N + 1
  elif N == 0:
    return ack2(M - 1, 1)
  else:
    return ack2(M - 1, ack2(M, N - 1))
```

Listing 1.5: Implentación recursiva de *Ackermann* en `Python`

Para más implementaciones, visite Rosetta Code.

Problemas

Problema 1.27. Sean a, b enteros positivos, y definamos la siguiente función de manera recursiva:

$$Q(a,b) = \begin{cases} 0 & a < b \\ Q(a-b, b)+1 & b \leq a \end{cases}$$

1. Encuentre (i) $Q(2,5)$; (ii) $Q(12,5)$
2. ¿Qué es lo que hace esta función? Encuentre $Q(5861, 7)$

Problema 1.28. Use la definición de la función de Ackermann para calcular $A(1,3)$.

Problema 1.29. Demuestre por inducción que $2+4+6+...+2n = n(n+1)$

Problema 1.30. Demuestre por inducción que $1+4+7+...+(3n-2) = \dfrac{n(3n-1)}{2}$

Problema 1.31. Demuestre por inducción que $1^2+2^2+...+n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Problema 1.32. Demuestre por inducción que $\dfrac{1}{1\cdot 3} + \dfrac{1}{3 \cdot 5} + ... + \dfrac{1}{(2n-1)\cdot(2n+1)} = \dfrac{n}{2n+1}$

Problema 1.33. Demuestre por inducción que $\dfrac{1}{1\cdot 5} + \dfrac{1}{5 \cdot 9} + ... + \dfrac{1}{(4n-3)\cdot(4n+1)} = \dfrac{n}{4n+1}$

Problema 1.34. Demuestre por inducción que $7^n - 2^n$ es divisible entre 5

Problema 1.35. Demuestre por inducción que $n^3 - 4n + 6$ es divisible entre 3

Problema 1.36. La función de Ackermann está definida de manera recursiva de las siguiente manera:

$$A(m,n) = \begin{cases} n+1 & m = 0 \\ A(m-1,1) & m \neq 0, n = 0 \\ A(m-1, A(m,n-1)) & m \neq 0, n \neq 0 \end{cases}$$

Encuentre $A(1,1)$.

1.5 *Relaciones*

Ejemplos de relaciones

- "menor que"
- "es paralelo a"
- "es un subconjunto de"

Formalmente, definiremos una relación en términos de *pares ordenados.*

Definición. Un *par ordenado* de elementos a y b, donde a es el primer elemento y b es el segundo se denota por (a,b).

Axioma. $(a,b) = (c,d)$ si y sólo si $a = c$ y $b = d$.

En particular $(a,b) \neq (b,a)$, al menos que $a = b$.

Esto es muy diferente al caso de un conjunto, dónde el orden es irrelevante:

$$\{a,b\} = \{b,a\}.$$

Producto de conjuntos

Consideremos dos conjuntos arbitrarios A y B. El conjunto de todos los pares ordenadors (a,b) donde $a \in A, b \in B$ es llamado *producto(cartesiano)* de A con B, y se denota por $A \times B$, es decir,

$$A \times B = \{(a,b) \mid a \in A,\ b \in B\}$$

Podemos construir el producto cartesiano de un conjunto A consigo mismo, y en ese caso denotaremos

$$A^2 = A \times A.$$

Ejemplo. Sea $A = \{x,y\}$, $B = 0,1$. Entonces

1. $A^2 = \{(x, x), (x, y), (y, x), (y, y)\}$
2. $A \times B = \{(x, 0), (x, 1), (y, 0), (y, 1)\}$
3. $B \times A = \{(0, x), (0, y), (1, x), (1, y)\}$
4. $B^2 = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$

Observación.
- En general, $A \times B \neq B \times A$.
- Si $n(A)$ denota el *número de elementos* en el conjunto A, entonces
$$n(A \times B) = n(A) \cdot n(B).$$

Sean $A = \{1, 2\}$ y $B = a, b, c$. Determine $A \times B$, $B \times A$ y A^2, y describa gráficamente estos productos.

Ejemplo. $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ es llamado frecuentemente el *plano Cartesiano.*

Definición. Definimos el producto cartesiano de un número finito de conjuntos $A_1, ..., A_n$ como
$$\prod_{i=1}^{n} A_i = A_1 \times \cdots \times A_n = \{(a_1, \ldots, a_n) \mid a_1 \in A_1, \ldots, a_n \in A_n\}$$

Observación. De manera análoga al caso $n = 2$, definiremos
$$A^n = \prod_{i=1}^{n} A.$$

Por ejemplo, $\mathbb{R}^3$ denota el espacio tridimensional.

Relaciones

Definición. Sean A y B conjuntos arbitrarios. Una *relación binaria* R, o simplemente relación, de A a B es un subconjunto de $A \times B$.

Para cada $(a, b) \in A \times B$ alguna de las siguientes condiciones (pero no ambas) es cierta:

1. $(a, b) \in R$; en cuyo caso diremos que *a está $R-$relacionado con b,* y escribiremos $a\mathbf{R}b$.
2. $(a, b) \notin R$; en cuyo caso diremos que *a no está $R-$relacionado con b,* y escribiremos $a\not\mathbf{R}b$.

Si R es una relación de A en sím mismo, es decir $R \subset A^2$, entonces diremos que R es una *relación en A.*

Definición. Si $R \subset A \times B$ es una relación, el *domino de R* es
$$\text{Dominio}\,(R) = \{a \in A \mid (a, b) \in R\},$$
mientras que la *imagen de R* es
$$\text{Imagen}\,(R) = \{b \in B \mid (a, b) \in R\}.$$

Ejemplos

Sean $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \subset x, y, z$ y

$$R = \{(1, y), (1, z), (3, y)\} .$$

Entonce R es una relación de A en B, porque $R \subset A \times B$.

Respecto a esta relación, por ejemplo,

$$1\mathbf{R}y,\ 1\mathbf{R}z,\ 3\mathbf{R}y,$$

pero

$$1\not\mathbf{R}x, 2\not\mathbf{R}x, 2\not\mathbf{R}y.$$

En este caso, Dominio $(R) = \{1, 3\}$ e Imagen $(R) = \{y, z\}$.

La propia inclusión $\subset$ es una relación en una colección de conjuntos $A_1, ..., A_n$.

Para cualquier par A_i, A_j en dicha colección $A \subset B$ o $A \not\subset B$.

Una relación en el conjunto $\mathbb{Z}$ de número enteros es *"m divide a n."*

La notación convencional para esta relación es $m \mid n$.

Consideremos el conjunto de lineas L en el plano. La perpendicularidad $\perp$ es una relación en L. De manera similar el paralelismo $\parallel$.

Sea A cualquier subconjunto. Una relación importante en A es la *igualdad*

$$\{(a, a) \mid a \in A\}$$

que usualmente se denota por

$$\text{“} =\text{''}$$

En ocasiones, también se le llama *entidad* o *diagonal* y se denota por $\triangle_A$, o simplemente por $\triangle$.

Sea A un conjunto arbitrario. Entonces tanto $A \times A$ como $\emptyset$ son subconjuntos de $A \times A$, y son llamados *relación universal* y *relación vacía,* respectivamente.

Relación inversa

Sea R una relación de A en B. La *relación inversa* de R, denotada por R^{-1}, es la relación de B en A que consiste en todos aquellos pares que al invertirlos, pertenecen a R.

En otras palabras

$$R^{-1} = \{(b, a) \mid (a, b) \in R\} .$$

Ejemplo. Sea $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{x, y, z\}$ y $R = \{(1, y), (1, z), (3, y)\}$. Entonces

$$R^{-1} = \{(y, 1), (z, 1), (y, 3)\} .$$

Observación.
- $\left(R^{-1}\right)^{-1} = R$.
- Dominio $\left(R^{-1}\right) =$ Imagen (R)
- Imagen $\left(R^{-1}\right) =$ Dominio (R)

Composición de Relaciones

Sean A, B, C conjuntos arbitrarios, R una relación de A en B y S una relación de B en S. Entonces podemos definir una nueva relación de A en C denotada por RS:

$$a\mathbf{RS}c \text{ si para alguna } b \in B,\ a\mathbf{R}b \text{ y } b\mathbf{S}c.$$

Esto es

$$RS = \{(a, c) \mid \exists b \in B : (a, b) \in R, (b, c) \in S\}$$

Supongamos que R es una relación en A. Entonces, definimos R^n de manera recursiva

$$R^1 = \begin{cases} R & n = 1 \\ R^{n-1}R & n > 1 \end{cases}$$

Teorema 1.2. *Supongamos que R es uan relación de A en B, y S una relación de B en C. Entonces*

$$(RS)T = R(ST).$$

Tipos de relaciones

Relaciones reflexivas Una relación R es un conjunto A es *reflexiva* si $a\mathbf{R}a$ para todo $a \in A$, es decir, $\forall a \in A : (a, a) \in \mathbb{R}$.

Relaciones simétricas y antisimétricas Una relación R en un conjunto A es simétrica si: Siempre que $a\mathbf{R}b$, entonces $b\mathbf{R}a$. En otras palabras,

$$(a, b) \in \mathbb{R} \Rightarrow (b, a) \in \mathbb{R}.$$

Una relación R en un conjunto A es antisimétrica si: Siempre que $a\mathbf{R}b$ y $b\mathbf{R}a$ entonces $a = b$. En otras palabras,

$$a \neq b, a\mathbf{R}b \Rightarrow b\not\mathbf{R}a.$$

Observación. Las propiedades de simetría y antisimetría no son excluyentes una de la otra.

Por ejemplo, la relación

$$R = \{(1, 3), (3, 1), (2, 3)\}$$

no es simétrica ni antisimétrica.

Por otro lado, la relación

$$S = \{(1, 1), (2, 2)\}$$

es tanto simétrica como antisimétrica.

Relación transitiva Una relación R en un conjunto A es transitiva si: Siempre que $a\mathbf{R}b$ y $b\mathbf{R}c$, entonces $a\mathbf{R}c$. En otras palabras,

$$(a, b) \in R, (b, c) \in R \Rightarrow (a, c) \in \mathbb{R}.$$

Propiedades de cerradura Consideremos un conjunto dado A y la colección de todas las relaciones en A, y sea P una propiedad en la colección de tales relaciones, por ejemplo, la simetría o la transitividad.

Si una relación satisface la propiedad P, diremos que es una $P-$relación.

Relaciones de Equivalencia

Considere un conjunto no-vacío S. Una relación R en S es una *relación de equivalencia* si R es reflexiva, simétrica y transitiva.

En otras palabras, R es una *relación de equivalencia* en S si satisface las siguientes propiedades:

1. Para cada $a \in S : a\mathbf{R}a$;

2. si $a\mathbf{R}b$, entonces $b\mathbf{R}a$;

3. si $a\mathbf{R}b$, $b\mathbf{R}c$, entonces $a\mathbf{R}c$.

La idea general detras de una relación de equivalencia que es una clasificación de objetos que son en cierto sentido *similares.*

Por ejemplo, la relación $=$ de igualdad en cualquier conjunto S es una relación de equivalencia, porque...

Ejemplo. Sea L el conjunto de líneas en el plano cartesiano y T el conjunto de triangulos en el mismo plano.

1. La relación de paralelidad es una relación de equivalencia en L;

2. La relación de congruencia o la de similaridad son relaciones de equivalencia en T.

Sea m un entero positivo fijo. Dos enteros a, b son llamados *congruentes módulo* m, si m divide la diferencia $a - b$, y en tal caso escribimos:

$$a \equiv b \mod m.$$

Por ejemplo $11 \equiv 3 \mod 4$ y $22 \equiv 6 \mod 4$.

La relación de congruencia módulo m es un relación de equivalencia.

Particiones y clases de equivalencia

Una paritición P de un conjunto no-vacío S es una colección $\{A_j\}$de subconjuntos no-vaciós de S con las siguientes propiedades de que cada $a \in S$ pertenece a uno y solo uno de los conjunto A_j de la partición.

En otras palabras,

1. Cada $a \in S$ pertenece a algún A_j;
2. si $A_i \neq A_j$, entonces $A_j \cap A_j = \emptyset$.

De manera equivalente, una partición P de S es una subdivisión de S en conjuntos disjuntos no vacíos A_j tal que

$$S = \sqcup_j A_j.$$

Supontamos que R es una relación de equivalencia en el conjunto S. Para cada $a \in S$, denotemos por $[a]$ el conjunto de elementos de S tales que están $R-$relacionados con a.

En otras palabras,

$$[a] = \{x \in S \mid (a, x) \in R\}.$$

La colección de clases de equivalencia de elementos de S bajo una relación de de equivalencias R se denota por S/R, es decir,

$$S/R = \{[a] \mid a \in S\}.$$

Diremos que S/R es el conjunto cociente de S por R.

Teorema 1.3. *Sea R* una relación de equivalencia en S. *Entonces* S/R es una partición de S. *De manera especifica:*

1. *Para cada $a \in S : a \in [a]$;*
2. *$[a] = [b]$ si y solo si $(a, b) \in R$;*
3. *Si $[a] \neq [b]$, entonces $[a]$ y $[b]$ son conjuntos disjuntos.*

De manera inversa, dada una partición $P = \{A_j\}$ de conjuntos S, existe una relación R en S tal que los conjuntos A_j son las clases de de equivalencia de R.

Ejemplo. Sea $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3)\}$ en $S = \{1, 2, 3\}$. Demuestre que R es una relación de equivalencia y calcule S/R.

Relaciones de orden parcial Una relación R en un conjunto S es llamada *orden parcial* de S en R si es reflexiva, antisimétrica y transitiva.

Un conjunto S con un orden parcial R es llamado *conjunto parcialmente ordenado* o *poset.*

Problemas

Problema 1.37. Sea $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{a, b, c, d\}$ y $C = \{x, y, z\}$ y definimos las relaciones:

$$R = \{(1, a), (2, d), (3, a), (3, b), (3, d)\}$$

$$S = \{(b, x), (b, z), (c, y), (d, z)\} .$$

Encuentre RS.

Problema 1.38. Determine cuando una relación R es *no-reflexiva*.

Problema 1.39. Sea $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Determine cuales de las siguientes relaciones son reflexivas:

- $R_1 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 3), (1, 3), (4, 4)\}$
- $R_2 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$
- $R_3 = \{(1, 3), (2, 1)\}$
- $R_4 = \emptyset$
- $R_5 = A \times A$

Problema 1.40. Determine cuales de las siguientes relaciones son reflexivas:

- $\leq$ en $\mathbb{Z}$
- $\subset$ en 2^A Aquí A es un conjunto y 2^A es la colección de todos sus subconjuntos (incluyendo tanto a $\emptyset$ como A)
- $\perp$ en el conjunto L de líneas en el plano
- $\|$ en el conjunto L de líneas en el plano
- $|$ (divisivilidad) en $\mathbb{N}$. Aquí $a \mid b$ significa que *a divide a b.*

Problema 1.41. Determine cuando una relación R no es simétrica.

Problema 1.42. 1. Determine cuales de las relaciones en el ejemplo 1.39 son simétricas.

2. Determine cuales de las relaciones en el ejemplo 1.40 son simétricas.

Problema 1.43. Determina cuando una relación R no es simétrica.

Problema 1.44. 1. Determine cuales de las relaciones en el ejemplo 1.39 son antisimétricas.

2. Determine cuales de las relaciones en el ejemplo 1.40 son antisimétricas.

Problema 1.45. Determina cuando una relación R no es transitiva.

Problema 1.46. 1. Determine cuales de las relaciones en el ejemplo 1.39 son transitivas.

2. Determine cuales de las relaciones en el ejemplo 1.40 son transitivas.

Problema 1.47. La relación $\subset$ no es una relación de equivalencia. Demuestra que aunque es reflexiva y transitiva, no es simétrica.

Problema 1.48. Para cada relación, verifique que se trata de una relación de equivalencia, y calcule sus clases de equivalencia.

- $R_0 = [[\mathtt{a}, \mathtt{a}], [\mathtt{b}, \mathtt{b}], [\mathtt{c}, \mathtt{c}]]$
- $R_1 = [[\mathtt{a}, \mathtt{a}], [\mathtt{a}, \mathtt{b}], [\mathtt{b}, \mathtt{a}], [\mathtt{b}, \mathtt{b}], [\mathtt{c}, \mathtt{c}]]$
- $R_2 = [[\mathtt{a}, \mathtt{a}], [\mathtt{a}, \mathtt{c}], [\mathtt{b}, \mathtt{b}], [\mathtt{c}, \mathtt{a}], [\mathtt{c}, \mathtt{c}]]$
- $R_3 = [[\mathtt{a}, \mathtt{a}], [\mathtt{b}, \mathtt{b}], [\mathtt{b}, \mathtt{c}], [\mathtt{c}, \mathtt{b}], [\mathtt{c}, \mathtt{c}]]$
- $R_4 = [[\mathtt{a}, \mathtt{a}], [\mathtt{a}, \mathtt{b}], [\mathtt{a}, \mathtt{c}], [\mathtt{b}, \mathtt{a}], [\mathtt{b}, \mathtt{b}], [\mathtt{b}, \mathtt{c}], [\mathtt{c}, \mathtt{a}], [\mathtt{c}, \mathtt{b}], [\mathtt{c}, \mathtt{c}]]$

Problema 1.49. Describa las clases de equivalencia de $\mathbb{Z} \mod 5$, y verifique que las operaciones

$$[a] + [b] = [a + b], \ [a] \cdot [b] = [a \cdot b]$$

están bien definidas.

Problema 1.50. Considere el conjunto $S = \left\{(a, b) \in \mathbb{Z}^2 \mid b \neq 0\right\}$ y la siguiente relación en este conjunto $(a, b)\mathbf{R}(c, d) \iff ad - bc = 0$.

1. Demuestre que R es una relación de equivalencia.
2. Demuestre que $[(a, b)] = [(c, d)]$ para todo $n \in \mathbb{Z}, n \neq 0$
$$[(a, b)] = [(n \cdot a, n \cdot b)]$$
3. Demuestre que las operaciones
$$\begin{cases} [(a, b)] + [(c, d)] = [(ad + bc, bd)] \\ [(a, b)] \cdot [(c, d)] = [(a \cdot c, b \cdot d)] \end{cases}$$
están bien definidas
4. Denote por $\frac{a}{b}$ la clase de equivalencia $[(a, b)]$ y reescriba los resultados anteriores usando esta notación.
5. ¿Qué conjunto de números representa el cociente S/R.?

Problema 1.51. Para cada una de las siguientes relaciones, verifique que es un orden parcial y dibuje su diagrama de Hasse.

- $R_1 = [[\mathtt{a}, \mathtt{a}], [\mathtt{b}, \mathtt{b}], [\mathtt{c}, \mathtt{c}]]$
- $R_2 = [[\mathtt{a}, \mathtt{a}], [\mathtt{a}, \mathtt{b}], [\mathtt{b}, \mathtt{b}], [\mathtt{c}, \mathtt{c}]]$
- $R_3 = [[\mathtt{a}, \mathtt{a}], [\mathtt{a}, \mathtt{c}], [\mathtt{b}, \mathtt{b}], [\mathtt{c}, \mathtt{c}]]$
- $R_4 = [[\mathtt{a}, \mathtt{a}], [\mathtt{a}, \mathtt{b}], [\mathtt{a}, \mathtt{c}], [\mathtt{b}, \mathtt{b}], [\mathtt{c}, \mathtt{c}]]$
- $R_6 = [[\mathtt{a}, \mathtt{a}], [\mathtt{b}, \mathtt{b}], [\mathtt{b}, \mathtt{c}], [\mathtt{c}, \mathtt{c}]]$
- $R_7 = [[\mathtt{a}, \mathtt{a}], [\mathtt{a}, \mathtt{c}], [\mathtt{b}, \mathtt{b}], [\mathtt{b}, \mathtt{c}], [\mathtt{c}, \mathtt{c}]]$
- $R_8 = [[\mathtt{a}, \mathtt{a}], [\mathtt{a}, \mathtt{b}], [\mathtt{a}, \mathtt{c}], [\mathtt{b}, \mathtt{b}], [\mathtt{b}, \mathtt{c}], [\mathtt{c}, \mathtt{c}]]$

Problema 1.52. Demuestre para cada par (S, R), el conjunto S es parcialmente ordenado respecto a R :

1. $(2^A, \subset)$.
2. $(\mathbb{R}, \leq)$
3. $(\mathbb{N}, |)$. Muestre que esto no es cierto para $(\mathbb{Z}, |)$.

1.6 *Funciones*

Funciones, gráficas y relaciones

Supongamos que para cada elemento de un conjunto A, asignamos un *único* elemento de un conjunto B; diremos que la colección de tales asignaciones es una *función* de A en B.

En tal caso, denotamos escribimos

$$f : A \to B,\ a \mapsto f(a)$$

donde $f(a) \in B$ es la asignación correspondiente a $a \in A$.

La conexión entre *funciones* y *relaciones* es la siguiente:

Definimos la gráfica de una función $f : A \to B$ como el subconjunto de $A \times B$

$$\Gamma_f = \{(a, f(a)) \mid a \in A\}.$$

$f : A \to B$ es una función si su gráfica es una relación tal que

$$(a, b), (a, b') \in \Gamma_f \Rightarrow b = b'.$$

Observe que Γ_f *es una relación en* $A \times B$.

En este caso, diremos que $a \in A$ es la *varible independiente,* mientras que $b \in B$ es la *variable dependiente.*

De manera reciproca, una relación $R \subset A \times B$ induce una función si

$$(a,b),(a,b') \in R \Rightarrow b = b'.$$

En tal caso (abusando de la notación), la función está definida por

$$R : A \to B,\ a \mapsto b := R(a).$$

Entonces, una relación no induce una función si...

El conjunto A es llamado *dominio* de la función, y al conjunto B se le conoce *codominio.*

La *imagen* de una función $f : A \to B$ se define como

$$\begin{aligned}\text{Imagen}\,(f) &= f(A)\\ &= \{b \in B \mid \exists a \in A : b = f(a)\}\\ &= \{f(a) \in B \mid a \in A\}\end{aligned}$$

Frecuentemente, una función puede expresarse por medio de una fórmula matemática. **Ejemplo.** Consideremos la función que asigna a cada número real su cuadrado. Podemos describir esta función escribiendo

$$f(x) = x^2 \text{ o } x \mapsto x^2 \text{ o } y = x^2.$$

En el ejemplo anterior, la gráfica de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ esta dada por

$$\Gamma_f = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2\right\}$$

y es una parábola.

Mientras que la imagen de f esta dada por

$$f(\mathbb{R}) = \left\{x^2 \mid x \in \mathbb{R}\right\} = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 0\}.$$

Ejemplo. La relación

$$R = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\right\}$$

no induce una función.

Ejemplo. Sea A un conjunto arbitrario. La función $: A \to A$ que asigna a cada elemento $a \in A$ el mismo elemento es llamada *identidad,* usualmente denotada por Id_A o simplemente Id

En otras palabras, la identidad está definida por

$$\text{Id} : A \to A,\ a \mapsto \text{Id}(a) = a.$$

Observe que

$$\Gamma_{\text{Id}_A} = \triangle_A.$$

Ejemplo. Supongamos que $S \subset A$. La *inclusión* de S en A, denotada por $i : S \hookrightarrow A$ esta dada por $i(x) = x$.

Observe que es la asignación es similar a la identidad, pero el dominio está restringido a $S \subset A$.

La *restricción* $f\ |_S$ de una función $f : A \to B$ a $S \subset A$ esta dada por

$$f\ |_S : S \to B,\ x \mapsto f(x).$$

Composición de Funciones

Consideremos dos funciones $f : A \to B$ y $g : B \to C$. Podemeos definir una nueva función $: A \to C$ de la siguiente manera

$$a \mapsto b = f(a) \mapsto c = g(b) = g(f(a)).$$

La función anterior se conoce como *composición* g con se f se describe de la siguiente manera

$$\begin{cases} g \circ f : A \to C \\ x \mapsto g(f(x)). \end{cases}$$

Funciones inyectivas, suprayectivas e inversas

Definición. Consideremos una función $f : A \to B$. Diremos que

1. f es *inyectiva* o *1:1* si $f(a) = f(a') \Rightarrow a = a'$.

2. f es *suprayectiva* o *sobre* si $f(A) = B$.

3. f es *biyectiva* o *invertible* si la relación inversa de la gráfica Γ_f induce una función.

Proposición 1.2. *La función $f : A \to B$ es invertible si y solo si es $1 : 1$ y sobre.*

En tal caso la relación inversa R^{-1} de $R = \Gamma_f$ induce una función denotada por $f^{-1} : B \to A$ tal que

$$\begin{cases} f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_A \\ f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_B \end{cases}$$

Como encontrar funciones inversas

Si $f : A \to B$ no es *sobre*, es decir, $f(A) \subset B$ pero $f(A) \neq B$, basta restringir su codominio a la imagen $f(A)$ para que se convierta en sobre:

$$f : A \to f(A).$$

Ejemplo. La función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$ no es sobre, pero como

$$f(A) = \left\{x^2 \mid x \in \mathbb{R}\right\} = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 0\}$$

la función $f : \mathbb{R} \to \{y \geq 0\}, x \mapsto x^2$ sí lo es.

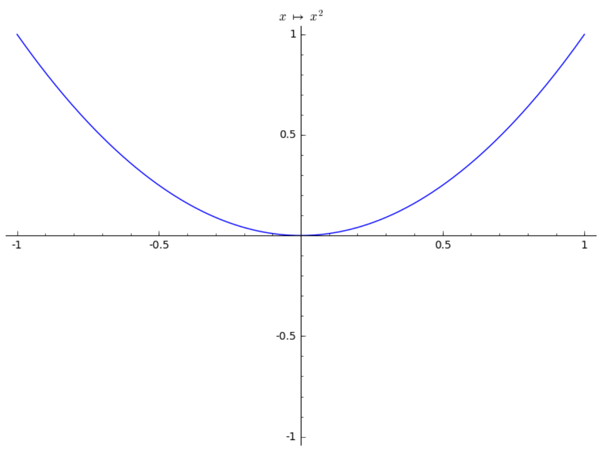


Figura 1.7: Gráfica de x^2

Proposición 1.3. *Si una función $f : A \to B$ es inyectiva, entonces*

$$f : A \to f(A)$$

es invertible.

Entonces, para encontrar la inversa de $y = f(x)$, tenemos que:

1. Verifique que $f(x)$ es un función $1 : 1$.
2. Despeje la variable independiente y en la ecuación $y = f(x)$ para obtener
$$x = f^{-1}(y).$$
3. Reescriba la ecuación anterior intercambiando las variables: $y = f^{-1}(x)$.

Caracterización geométrica

Considera ahora una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Representemos su gráfica

$$\Gamma_f = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = f(x)\right\} = \{(x, f(x))\}$$

en el plano.

Observación. ▪ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es $1:1$ si cada línea *horizontal* intersecta la gráfica de f a lo más en un punto.

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es *sobre* si cada línea horizontal intersecta la gráfica de f al menos en un punto.
- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es *invertible* si cada línea horizontal intersecta la gráfica de f...

Problemas

Problema 1.53. Considere las siguientes relaciones en $A = \{1, 2, 3\}$

1. $f = \{(1, 3), (2, 3), (3, 1)\}$
2. $g = \{(1, 2), (3, 1)\}$
3. $h = \{(1, 3), (2, 1), (1, 2), (3, 1)\}$

y determine cuales inducen funciones.

Problema 1.54. Sean $f(x) = x^2$ y $g(x) = x - 3$. Encuentre

1. $f \circ g$
2. $g \circ f$

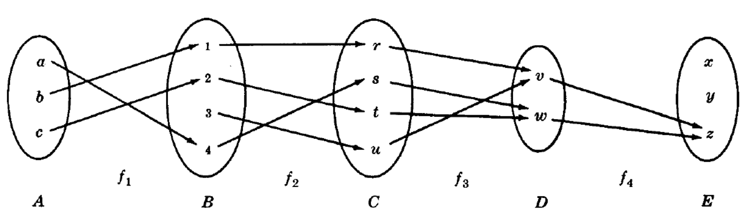
Problema 1.55. Sean $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = \sqrt{2 - x}$. Encuentre

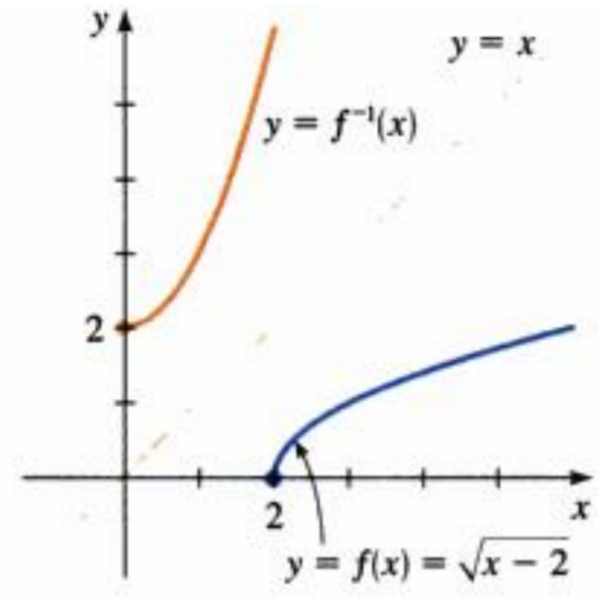
1. $f \circ g$
2. $g \circ f$
3. $f \circ f$
4. $g \circ g$

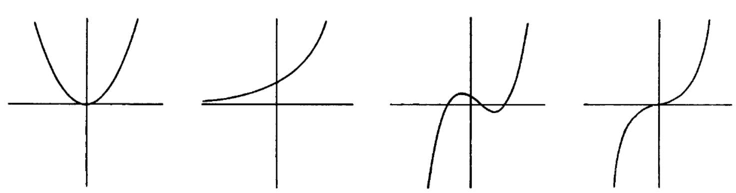
Problema 1.56. Si $f : A \to B$, y $i_S : S \hookrightarrow A$ es la inclusión de S en A, entonces

$$f\,|_S = f \circ i_S.$$

Problema 1.57. Considere las siguientes funciones y sus posibles composiciones, y determine si son inyectivas, suprayectivas o biyectivas:







$f_1(x) = x^2$ $f_2(x) = 2^x$ $f_3(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ $f_4(x) = x^3$

Problema 1.58. Encuentre la inversa de la función $f(x) = 3x - 2$,

Problema 1.59. Encuentre la inversa de $f(x) = \dfrac{x^5 - 3}{2}$.

Problema 1.60. Encuentre la inversa de $f(x) = \sqrt{x-2}$.

Problema 1.61. Considere las siguientes funciones : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

1. $x \mapsto x^2$
2. $x \mapsto 2^x$
3. $x \mapsto x^3 - 2x^2 - 5x + 6$
4. $x \mapsto x^3$

y determine si son $1:1$, sobre o invertibles.

1.7 *Análisis combinatorio*

El *análisis combinatorio* es una manera sofisticada de contar.

Proposición 1.4 (Principio fundamental del conteo y diagramas de árbol)**.** *Si una tarea se puede realizar en n formas diferentes y otra en m formas diferentes, entonces las dos tareas se pueden realizar en $n \times m$ formas diferentes.*

Ejemplo.

1. Si una persona tiene 2 camisas y 4 corbatas, ¿de cuantas formas puede combinarlas?
2. Construya un diagrama de árbol para representar todas estas opciones.

Permutaciones

Consideremos un conjunto finito $X = \{x_1, ..., x_N\}$, esto es, X tiene *cardinalidad* $n(X) = N < \infty$.

Una función biyectiva (invertible) $\sigma : X \to X$ es llamada *permutación* en X.

Observe que las composiciones e inversas de permutaciones, así como la identidad, son también permutaciones. En este caso, diremos que la permutación σ *actua* en X.

Supongamos que la permutación σ actúa en $X = x_1, x_2, x_3$ de la siguiente manera:

$$\sigma(x_1) = x_2,\ \sigma(x_2) = x_3,\ \sigma(x_3) = x_1.$$

Entonces, podemos representar la permutación de la siguiente manera

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1, \end{pmatrix},$$

es decir, sólo nos fijamos de que manera actúa en el índice j del elemento x_j.

De manera general, numerando los elementos de $X = \{x_1, ..., x_N\}$, podemos identificar este conjunto con $A_N = \{1, ..., N\}$ por medio de la biyección $x_i \mapsto i$.

Ahora, consideremos una permutación $\sigma : A_N \to A_N$, tal que $\sigma(i) = \sigma_i$. Entonces podemos representa σ por medio de

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & ... & N \\ \sigma_1 & ... & \sigma_N. \end{pmatrix}$$

El conjunto de todas las permutaciones : $A_N \to A_N$ se denota por S_N y tiene una cardinalidad $n(S_N) = N!$.

Cálculos con permutaciones

Si tenemos n objetos distintos y queremos ordenarlos tendremos

$$n \times (n-1) \times ...2 \times 1$$

formas diferentes de hacerlo.

Definición (n factorial)**.**

$$n! = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ n \times (n-1)! & n > 0 \end{cases}$$

Si tenemos n objetos distintos y queremos arreglar r de estos en una linea, entonces tendremos una *permutación* de n en r dada por

$$P_r^n = n \times (n-1) \times ... (n-r+1) \tag{1.3}$$

o de manera equivalente

$$P_r^n = \frac{n!}{(n-r)!} \tag{1.4}$$

Combinaciones

En una *permutación*, uno está interesado en el orden de los objetos. Así *abc* y *bca* son permutaciones diferentes. Pero en algunos problemas, uno está interesado sólo en elegir objetos sin importar su orden. Tales selecciones se llaman *combinaciones*. Por ejemplo, *abc* y *bca* representan la misma combinación.

El número de combinación C_r^n al elegir r objetos de una colección de n diferentes está dada por el *número combinatorio*

$$C_r^n = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!} \tag{1.5}$$

Algunas fórmulas combinatorias

$$\binom{n}{r} = \frac{P(n,r)}{r!} \tag{1.6}$$

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r} \tag{1.7}$$

$$\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r} \tag{1.8}$$

El Teorema del Binomio

Teorema 1.4 (Teorema del binomio)**.**

$$(x+y)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} x^r y^{n-r} \tag{1.9}$$

Problemas

Problema 1.62. Se requiere sentar a 5 hombres y 4 mujeres en una fila, de manera que estén alternados. ¿Cuantas manera hay de hacer tal arreglo?

Problema 1.63. ¿Cuantas permutaciones de longitud 3 se pueden formar con las letras A, B, C, D, E, F, G?

Problema 1.64. Encuentre el número de permutaciones diferentes de las 11 letras de la palabra *MISSISSIPPI*.

Problema 1.65. ¿De cuantas manera podemos formar un equipo de 11 personas de un total de 23?

Problema 1.66. Una caja contiene 8 canicas rojas, 3 blancas y 9 azules. Si 3 canicas son obtenidas al azar sin reemplazarse, determine la probabilidad de que

1. las tres sean rojas;
2. las tres sean blancas;
3. dos sean rojas y una blanca;
4. al menos una sea blanca;

5. una sea de cada color;
6. sean obtenidas en el siguiente orden: rojo, blanco y azul.

Problema 1.67. En un juego de *poker*, 5 cartas se obtienen al azar de una baraja inglesa. Encuentre la probabilidad de que

1. 4 sean A;
2. 4 sean A y una sea K;
3. 3 sean 10 y dos sean J;
4. $9, 10, J, Q, K$ en cualquier order;
5. 3 de un palo dado y 2 de otro palo;
6. al menos un A obtenido.

Problema 1.68. Determine la probabilidad de obtener tres 6 en cinco lanzamientos de un dado.

Problema 1.69. En una baraja inglesa, ¿cuantas formas hay de escoger dos cartas del mismo palo?

2 Fundamentos de Aritmética

2.1 Los números enteros

En esta sección analizaremos algunos conjuntos numéricos. Los números naturales son el conjunto de números

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\},$$

mientras que los números enteros son el conjunto de números

$$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, ...\}$$

Máximo Común Divisor

Definición. Diremos que un entero n divide a otro entero $c \in \mathbb{Z}$ si existe un tercer entero $p \in \mathbb{Z}$ tal que

$$c = n \cdot p.$$

Definición. Diremos que el entero d es el *máximo común divisor* de dos enteros a, b o $\mathtt{mcd}(a, b)$ si

- d divide tanto a a como b y;
- d es el número entero más grande con esta propiedad.

Ejemplo. Encontremos $\mathtt{mcd}(6, 15)$. Los divisores de 6 son $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$, mientras que los de 15 son $\pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 15$.

Entonces, los divisores en común de 6 y 15 son $\pm 1, \pm 3$. El más grande de todos estos es $d = 3$ y por tanto es

$$\mathtt{mcd}(6, 15) = 3.$$

Aunque este método para encontrar el `mcd` es útil cuando hay pocos divisores, puede resultar abrumador si ambos números tienes una gran cantidad de divisores.

Proposición 2.1 (Teorema del Residuo). [1] *Dados dos números enteros positivos a, b, existen otro par de enteros $q, r \geq 0$ tales que*

$$a = b \cdot q + r \tag{2.1}$$

$$r < b. \tag{2.2}$$

A q se le llama cociente, mientras que a r se le llama residuo.

[1] Consulta (Cárdenas, 1973, sección 7.2, teorema 1) para ver una demostración.

Ejemplo. Si $a = 7, b = 2$, entonces el cociente es $q = 3$ y el residuo es $r = 1$, porque

$$\begin{cases} 7 = 2 \cdot 3 + 1 \\ r = 1 < b = 2. \end{cases}$$

Observe que tambien podríamos tomar $q = 1, r = 5$ y escribir

$$7 = 2 \cdot 1 + 5,$$

pero como $5 > 2$, entonces $r = 5$ no satisface la condición del residuo (2.2), porque $r = 5 \geq b = 2$.

Algoritmo. (Algoritmo Euclidiano) [2] `Sean` $a, b \in \mathbb{Z}$ `dos números enteros positivos. Consideremos la siguiente sucesión de operaciones, en la que iteramos el teorema del residuo:`

$$\begin{aligned} a &= b \cdot q_0 + r_0 \\ b &= r_0 \cdot q_1 + r_1 \\ r_0 &= r_1 \cdot q_2 + r_2 \\ &\dots \\ r_{N-3} &= r_{n-2} \cdot q_{N-1} + r_{N-1} \\ r_{N-2} &= r_{N-1} \cdot q_N + 0. \end{aligned}$$

`Entonces el último cociente` r_{N-1} `es el mcd de` a `y` b.

[2] Consulta (Cárdenas, 1973, sección 7.4, prop. 1) para ver una demostración.

Como en el ejemplo 2.1, tenemos que

$$\begin{aligned} 15 &= 6 \cdot 2 + 3 \\ 6 &= 3 \cdot 2 + 0, \end{aligned}$$

Entonces $r = 3$ es igual a $\texttt{mcd}(15, 6)$.

Mínimo Común Múltiplo

Definición. Diremos que el entero positivo $m \in \mathbb{Z}$ es el *mínimo común multiplo* o `mcm` de dos enteros positivos a, b si

- m es múltiplo tanto de de $a \in \mathbb{Z}$ como $b \in \mathbb{Z}$ y;

- d es el número entero positivo más pequeño con esta propiedad.

Proposición 2.2. [3] *Si a, b son dos enteros positivos, entonces*

$$\texttt{mcm}(a,b)\texttt{mcd}(a,b) = a \cdot b$$

[3] Consulta (Cárdenas, 1973, sección 7.5, ejercicios del 10 al 12) para ver una demostración.

Ejemplo. Encontremos el `mcm` de $a = 6$ y $b = 15$. Como vimos anteriormente, $mcd(6,15) = 3$. Entonces,

$$mcm(6,15) = \frac{6 \cdot 15}{3} = 30$$

.

2.2 *Los números racionales*

Los números racionales son el conjunto de números

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$$

identificando $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ siempre que la *razón cruzada* sea igual

$$ad = bc$$

¿Para que nos sirve $\mathbb{Q}$?

Este conjunto de números nos sirve para *contar, sumar, restar, multiplicar y dividir.*

Definición. Dos números racionales $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ son equivalentes si

$$ad - bc = 0.$$

Problema 2.1. $\frac{1}{2}$ es equivalente a $\frac{2}{4}$ porque

$$(1)\,(4) - (2)\,(2) = 0.$$

Simplificación

Definición. 1. Diremos que dos enteros $p, q \in \mathbb{Z}$ son primos relativos si $\texttt{mcd}(p,q) = 1$.

2. Diremos que $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ es la forma *irreducible* de $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ si
   - $\frac{p}{q}$ es equivalente a $\frac{a}{b}$ y
   - p, q son primos relativos.

Por la definición 2.2, tenemos que para un número racional $\frac{a}{b}$:

$$\frac{n \cdot a}{n \cdot b} = \frac{a}{b},$$

siempre que $n \neq 0$.

Problema 2.2. $\frac{2}{4} = \frac{2*1}{2*2} = \frac{1}{2}.$

Observación. Sean a, b dos enteros positivos. Si $d = \texttt{mcd}(a, b)$ y

$$a = d \cdot p,\, b = d \cdot q,$$

entonces podemos simplificar de la siguiente manera

$$\frac{a}{b} = \frac{d \cdot p}{d \cdot q} = \frac{p}{q}.$$

Observación. Si d es el máximo común divisor de los enteros $a, b \neq 0$, entonces tenemos que p, q son los cocientes en las operaciones

$$\begin{cases} a = d \cdot p \\ b = d \cdot q \end{cases}$$

Problema 2.3. Encuentre la forma irreducible de $\frac{15}{10}$.

Solución.

1. Primero, muestre que $\texttt{mcd}(15, 10) = 5$;
2. Como
$$\frac{15}{10} = \frac{5 \cdot 3}{5 \cdot 2} = \frac{3}{2},$$
entonces $\frac{3}{2}$ es equivalente a $\frac{15}{10}$
3. Finalmente muestre que 3 y 2 son primos relativos. Concluimos que $\frac{3}{2}$ es la forma irreducible de $\frac{15}{10}$.

Problema 2.4. Encuentre la forma irreducible de la fracción

$$\frac{182}{910}$$

Conversión y comparación

Supongamos que una pizza se parte en 12 rebanadas iguales, mientras que otra similar se parte en 8. ¿Qué cantidad de pizza es mayor, 7 rebanadas de la primera o 5 de la segunda?

Para comparar dos fracciones, debemos convertirlas de manera que tenga un común denominador.

Algoritmo. (Conversión a común denominador) `Para convertir dos fracciones` $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ `a común denominador:`

1. `Encuentre` $m = \texttt{mcm}(b, d)$

2. Encuentre un entero p tal que $m = b \cdot p$ y convierta la primera fracción
$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot p}{b \cdot p} = \frac{ap}{m}$$

3. Encuentre un entero q tal que $m = d \cdot q$ y convierta la segunda fracción
$$\frac{c}{d} = \frac{c \cdot q}{d \cdot q} = \frac{cq}{m}$$

Observación. Si el común demoninador m de dos fracciones
$$\frac{x}{m}, \frac{y}{m}$$
es positivo, entonces
$$\frac{x}{m} < \frac{y}{m} \iff x < y.$$

Problema 2.5. Compare cada uno de los siguientes pares de fracciones:

1. $\frac{15}{11}, \frac{28}{37}$
2. $-\frac{35}{36}, \frac{1}{6}$
3. $\frac{3}{10}, -\frac{23}{33}$
4. $-\frac{17}{31}, -\frac{12}{7}$

Operaciones

Algoritmo. (Suma de fracciones) Para sumar dos fracciones $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$:

1. Convierta a común denominador, de manera que
$$\frac{a}{b} = \frac{x}{m}, \frac{c}{d} = \frac{y}{m};$$
2. sume ambos numeradores
$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{x}{m} + \frac{y}{m} = \frac{x+y}{m};$$
3. simplifique.

Problema 2.6.
$$\frac{2}{3} + \frac{4}{5} =$$

Observación. Cualquier suma se puede reescribir como una resta:

$$x + y = x - (-y),$$

y viceversa

$$x - y = x + (-y).$$

Por esta razón, en álgebra, no es muy útil distinguir entre estas dos operaciones. Utilizaremos el mismo algoritmo, para encontrar la resta de dos fracciones.

Problema 2.7.

$$\frac{2}{3} - \frac{4}{5} =$$

Problema 2.8. Realice las siguientes y escriba el resultado en su forma irreducible:

1. $\frac{5}{3} + \frac{5}{9}$
2. $\frac{7}{3} + \frac{4}{7}$
3. $\frac{5}{4} + \frac{3}{2}$
4. $\frac{1}{2} - \frac{1}{3}$
5. $\frac{3}{5} - \frac{4}{9}$

La multiplicación entre dos números racionales se define como

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}.$$

Problema 2.9. $\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} = \frac{8}{15}.$

Observación. En ocasiones, la división de fracciones se conoce como regla del “sandwich”:

$$\frac{\left(\frac{a}{b}\right)}{\left(\frac{c}{d}\right)} = \frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

La división entre dos números racionales se define como

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}.$$

siempre y cuando $c \neq 0$.

Problema 2.10. $\frac{2}{3} \div \frac{4}{5} = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 4} = \frac{10}{12}.$

2.3 Razones y proporciones

Proporciones entre números enteros La razón de dos números (enteros o racionales) a, b se escribe $a : b$ y se representa por la fracción $\frac{a}{b}$.

Problema 2.11. La razón de 4 a 6 se escribe 4 : 6 y se representa por la fracción $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

Proporciones entre fracciones

Problema 2.12. La razón de $\frac{2}{3}$ a $\frac{4}{5}$ se escribe

$$\frac{2}{3} : \frac{4}{5}$$

y se representa por la fracción

$$\frac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{5}} = \frac{2}{3} \div \frac{4}{5} = \frac{5}{6}.$$

Diremos que dos razones $a : b$ y $c : d$ son equivalente si

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

En ese caso, escribimos $a : b \sim c : d$.

Problema 2.13. ¿Cuál es el precio unitario de cada artículo?

- Una bote con 3 litros de aceite cuesta \$54.
- Una caja de cereales con 700 gramos cuesta \$63.

Problema 2.14. Exprese las siguientes razones por medio de una fracción simplificada

1. 96 : 128
2. $\frac{2}{3} : \frac{3}{4}$

Problema 2.15. Un segmento de 30 pulgadas se divide en dos partes cuyas longitudes están en razón de 2 : 3. Encuentre las longitudes de ambos segmentos.

Problema 2.16. Las edades actuales de dos hermanos son 5 y 8 años respectivamente. ¿Al cabo de cuantos años, sus edades estarán en razón 3 : 4?

Problema 2.17. Divida 253 en cuatro partes propocionales 2 : 5 : 7 : 9.

Razones inversas

Cuando tratamos de conservar una proporción $a : b$, hablamos de una *razón directa,* y podemos representarla por una equivalencia de fracciones:

$$a : b \sim c : d \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

Por ejemplo, en una recete de hotcakes, tenemos una razón $1 : \frac{3}{4}$ entre tazas de harina y tazas de leche.

Para mantener la receta, podemos multiplicar las cantidades, pero manteniendo la proporción.

Por ejemplo, podemos ocupar 4 tazas de harina para 3 tazas de leche, porque $1 : \frac{3}{4} \sim 4 : 3$.

En cambio, en ocasiones lo que buscamos es mantener una cantidad total, y no proporción. Generalmente, es una cantidad de trabajo.

Por ejemplo, considere el trabajo de pintar una pared de dimensiones fijas. Supongamos que una persona puede pintarla en 8 horas; pero suponiendo que contratamos un pintor más con una experiencia similar,

1. ¿cuantas horas se requerirán para terminar el trabajo?

2. ¿Y si contratáramos 4 pintores?

3. ¿Y si fueran 8?

En el ejemplo anterior, la pared requiere *8 horas-trabajador;* esta es la cantidad que debemos conservar, aunque no es permitido variar los trabajadores o las horas de trabajo por trabajador.

En este caso, hablamos de una *razón inversa.*

Problema 2.18. Sabiendo que 8 personas tardan 12 días en poner a punto 16 maquinas, encuentre el número de días que emplearán 16 personas en poner a punto 8 máquinas.

Problema 2.19. Sabiendo que 8 personas tardan 12 días en poner a punto 16 maquinas, encuentre el número de días que emplearán 15 personas en poner a punto 50 máquinas.

Ejemplos

Problema 2.20. ¿Cuál es la mejor compra entre 7 latas de sopas que cuestan \$22.50 y 3 latas del mismo producto, que cuestan \$9.50.

Problema 2.21. ¿Cuál es la mejor compra entre un paquete de 3 onzas de queso crema que cuesta \$4.30 y otro paquete de 8 onzas del mismo producto que cuesta \$8.70?

Problema 2.22. Si dos hombres pueden transportar 6 acres de tierra en 4 horas, ¿cuántos hombres se necesitan para transportar 18 acres en 8 horas?

Problema 2.23. Resuelva la proporción

$$\frac{x}{63} = \frac{5}{9}$$

Problema 2.24. Resuelva la siguiente ecuación usando productos cruzados

$$\frac{x-2}{5} = \frac{x+1}{3}$$

Problema 2.25. Enfermeras usan proporcoines para determinar la cantidad de medicina a administrar, cuando la dosis es medida en miligramos `(mg)`, pero la medicina es empacada en una forma diluida en milímetros `(mL)`.

Por ejemplo, para encontrar los mililitros de fluido necesario para administrar `300mg` de un medicamento de una medicina que viene empacada como `120mg` en `2mL` de un fluído, se plantean la proporción

$$\frac{\texttt{120mg}}{\texttt{2mL}} = \frac{\texttt{300mg}}{x\ \texttt{mL}}$$

donde x representa la cantidad a administrar en mililitros.

Resuelva la proporción anterior.

2.4 Teorema Fundamental de la Aritmética

Un número primo p es aquel que tiene exactamente cuatro divisores

$$\pm 1, \pm p.$$

Problema 2.26. Encuentre los números primos (positivos) entre 2 y 100.

Los números enteros siempre se pueden escribir como una multiplicación de números primos:

- $36 = 2^2 3^2$
- $1400 = 2^3 5^2 7$
- $187 = 11 \times 7$

Teorema Fundamental de la Aritmética

Teorema 2.1. *Todo número entero a mayor que 1 se puede expresar en la forma*

$$a = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \cdots p_L^{n_L} \tag{FP}$$

donde $p_i, i = 1, ..., L$ son números primos distintos y $n_i, i = 1, ..., L$ son exponentes enteros positivos.

Observación. La expresión FP se conoce como *factorización prima* del entero a y es única excepto por el orden.

Encuentre la factorización prima de

- $14700 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7^2$
- $1575 = 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7$

Proposición 2.3. *Si* $a = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \cdots p_L^{n_L}$ *y* $b = p_1^{m_1} p_2^{m_2} \cdots p_L^{m_L}$ *son respectivas factorizaciones primas de los enteros* a, b, *entonces*

$$mcd(a,b) = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \cdots p_L^{r_L}$$
$$mcm(a,b) = p_1^{R_1} p_2^{R_2} \cdots p_L^{R_L}$$

donde $r_i = \min(n_i, m_i)$ *y* $R_i = \max(n_i, m_i)$.

Encuentre

- $mcd(14700, 1575) = 3 \cdot 5^2 \cdot 7 = 525$
- $mcm(14700, 1575) = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2 = 44100$

Proposición 2.4. *Si* $p_1^{n_1} p_2^{n_2} \cdots p_L^{n_L}$ *es la factorización prima de* a, *entonces* a *tiene*

$$(n_1 + 1)(n_2 + 1) \cdots (n_L + 1)$$

divisores positivos.

Algoritmo. (Como encontrar todos los divisores de un número entero)

1. `Factorice el número entero` $n = p_1^{R_1} \cdots p_m^{R_m}$
2. `Enliste cada posible` $m-$`tupla` $(r_1, ..., r^m)$ `con` $0 \leq r_1 \leq R_1, ..., 0 \leq r_m \leq R_m$
3. `Enliste cada posible número entero de la forma`

$$\pm p_1^{r_1} \cdots p_m^{r_m},$$

`para cada elemento` $(r_1, ..., r_m)$ `de la lista anterior.`

Cálculo de divisores

Problema 2.27. Encuentre todos los divisores positivos de 24.

Los divisores son 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, y 24.

Problema 2.28. Encuentre todos los divisores positivos de 72.

Los divisores son 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36, y 72

Problema 2.29. Encuentre todos los divisores positivos de 600.

Los divisores son 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 20, 24, 25, 30, 40, 50, 60, 75, 100, 120, 150, 200, 300, y 600.

3 Sistemas numéricos

3.1 Números Reales

Conjuntos numéricos

Números naturales

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$$

Números enteros

$$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, ...\}$$

Números racionales

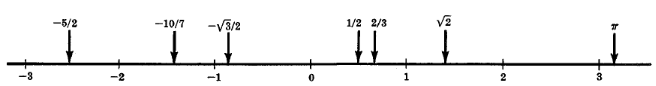
$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \middle| p, q \in Z, q \neq 0 \right\} \Big/ \sim$$

Equivalencia de fracciones

$$\frac{a}{b} \sim \frac{c}{d} \iff ad - bc = 0$$

Números irracionales Existen números en la recta numérica que no se pueden representar como fracciones.

Por ejemplo $\sqrt{2}, e, \pi....$



Números reales La unión de número racionales e irracionales se le conoce como *números reales* $\mathbb{R}$.

Orden

Los números reales se clasifican en

- Positivos $\{x \in \mathbb{R} | x > 0\}$
- Cero $\{0 \in \mathbb{R}\}$
- Negativos $\{x \in \mathbb{R} | x < 0\}$

Diremos que $b \in \mathbb{R}$ es mayor que $a \in \mathbb{R}$ si $b - a > 0$.
En ese caso escribimos $b > a$.
Diremos que $a \in \mathbb{R}$ es menor que $b \in \mathbb{R}$ si $a - b < 0$.
En ese caso escribimos $a < b$.

Proposición 3.1.

$$b > a \iff a < b$$

Desigualdades

Proposición 3.2. *Sean $a, b \in \mathbb{R}$. Entonces se cumple una y solo una de las siguientes condiciones:*

- $a > b$
- $a = b$
- $a < b$

Reglas de álgebra

Para cualesquiera $a, b, c \in \mathbb{R}$, se tienen las siguientes propiedades:

Axioma (Conmutatividad de la suma)**.**

$$a + b = b + a$$

Axioma (Asociatividad de la suma)**.**

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

Axioma (Conmutatividad del producto)**.**

$$ab = ba$$

Axioma (Asociatividad del producto)**.**

$$(ab)c = a(bc)$$

Axioma (Ley de la distribución)**.**

$$a(b + c) = ab + ac$$

Leyes de los exponentes

- $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
- $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-m}, a \neq 0$
- $(a^m)^n = a^{mn}$
- $a^1 = a$

- $a^0 = 1$
- $a^{-1} = \dfrac{1}{a}$
- $a^n = \dfrac{1}{a^n}$
- $a^{p/q} = \sqrt[q]{a^p}$

Ejemplos

Problema 3.1. Demuestra que $\sqrt{2}$ es un número irracional.

Solución Procedamos por contradicción:

1. Supongamos que $\sqrt{2} = \dfrac{p}{q}$ con $p, q \in \mathbb{Z}$ positivos y primos relativos.
2. Entonces $2 = \dfrac{p^2}{q^2}$, de manera que $p^2 = 2q^2$.
3. De manera que p es par, es decir, existe un entero m tal que $p = 2m$.
4. Sustituyendo obtenemos que $q^2 = 2m^2$, de manera que q también es par.
5. Pero por hipótesis, p y q son primos relativos, de manera que no pueden ser ambos pares. $\square$

Problema 3.2. ¿Qué número es más grande: $\sqrt{2}$ o $\sqrt[3]{3}$?

Solución Procedamos por contradicción:

1. Supongamos que $\sqrt{2} \geq \sqrt[3]{3}$.
2. Elevamos ambos lados a la sexta potencia.
3. De donde obtenemos que

$$2^3 \geq 3^2 \quad \square$$

Problema 3.3. Con base en los axiomas (3.1)-(3.1), demostrar que

$$(b + c)a = ba + ca$$

Solución

$$\begin{aligned}(b + c)a &= a(b + c)\\ &= ab + ac\\ &= ba + ca\end{aligned}$$

3.2 Funciones reales

Definición

Una *función* f es una regla que asigna a cada elemento x de un conjunto A un único elemento y de otro conjunto B.

En ese caso escribiremos $f : A \to B$

(I) Para indicar dicha correspondencia escribimos $y = f(x)$ y decimos que y es el *valor* de f en x.

(II) Al conjunto A se le conoce como dominio.

(III) Mientras que al conjunto B, se le conoce como contradominio.

Problema 3.4. Evaluar $f(x) = x^2 - 3x + 2$ en $x = 2$

Solución.

$$\begin{aligned} f(2) &= (2)^2 - 3(2) + 2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

□

Definición. La *gráfica* de una función $f : A \to B$ es el conjunto

$$\Gamma_f = \{ (a, b) \in A \times B | \, b = f(a) \}$$

(I) En el caso $A = B = \mathbb{R}^n$, diremos que la gráfica de $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una *curva*.

(II) Diremos que $x \in A$ es la variable *independiente*, mientras que $y \in B$ es la variable *dependiente*.

Polinomios

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_0$$

Si $a_n \neq 0$, diremos que n es el grado del polinomio y a_n, su coeficiente líder.

Denotaremos el grado del polinomio f por $\mathrm{grd}(f)$.

Si $\mathrm{grd}(f) = n$, la ecuación polinomial $f(x)$ tiene exactamente n raíces (posiblemente repetidas).

Problema 3.5. Como $x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 0$, se puede reescribir como $(x - 1)^3$, entonces la ecuación tiene una raíz $x = 1$ repetida 3 veces.

Teorema del Binomio

$$(a+x)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1}x + \binom{n}{2} a^{n-2}x^2 + \ldots + x^n$$

donde $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}$

Exponenciales y logaritmos

Funciones exponenciales

$$\exp_a(x) = a^x, a > 0$$

Leyes de los exponentes

$$\begin{aligned}
\exp_a(m+n) &= \exp_a(m) \cdot \exp_a(n) \\
\exp_a(m-n) &= \frac{\exp_a(m)}{\exp_a(n)} \\
\exp_a(nm) &= (\exp_a(m))^n \\
\exp_a(0) &= 1 \\
\exp_a(1) &= a
\end{aligned}$$

Logaritmos La función logarítmica $f(x) = \log_a(x)$ es la función inversa de $g(x) = \exp_a(x)$, es decir

$$\forall x \in \mathbb{R} : \log_a(\exp_a(x)) = x$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^+ : \exp_a(\log_a(x)) = x$$

Leyes de los logaritmos

$$\begin{aligned}
\log_a(mn) &= \log_a(m) \cdot \log_a(n) \\
\log_a\left(\frac{m}{n}\right) &= \log_a(m) - \log_a(n) \\
\log_a(m^p) &= p \log_a(m) \\
\log_a(1) &= 0 \\
\log_a(a) &= 1
\end{aligned}$$

Logaritmo natural En el caso de que la base sea la constante de Euler, es decir $a = e \approx 2.718$, entonces reescribimos

$$\begin{aligned}
\exp_e(x) &= \exp(x) \\
\log_e(x) &= \ln(x)
\end{aligned}$$

Esta última función se conoce como *logaritmo natural*.

Funciones trigonométricas

Relaciones fundamentales

$$\begin{aligned}
\sin(x) &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \\
\cos(x) &= \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \\
\tan(x) &= \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \\
\cot(x) &= \frac{\cos(x)}{\sin(x)} = \frac{1}{\tan(x)} \\
\sec(x) &= \frac{1}{\cos(x)} \\
\csc(x) &= \frac{1}{\sin(x)}
\end{aligned}$$

Identidades pitagóricas

$$\begin{aligned}
\sin^2(x) + \cos^2(x) &= 1 \\
\sec^2(x) - \tan^2(x) &= 1 \\
\csc^2(x) - \cot^2(x) &= 1
\end{aligned}$$

Paridad

$$\begin{aligned}
\sin(-x) &= -\sin(x) \\
\cos(-x) &= \cos(x) \\
\tan(-x) &= -\tan(x)
\end{aligned}$$

Sumas de ángulos

$$\begin{aligned}
\sin(x \pm y) &= \sin(x)\cos(y) \pm \cos(x)\sin(y) \\
\cos(x \pm y) &= \cos(x)\cos(y) \mp \sin(x)\sin(y) \\
\tan(x \pm y) &= \frac{\tan(x) \pm \tan(y)}{1 + \mp \tan(x)\tan(y)}
\end{aligned}$$

Ondas sinusoidales

$$\begin{cases} A\cos(x) + B\sin(x) = \sqrt{A^2 + B^2}\sin(x + \alpha) \\ \tan(\alpha) = \dfrac{A}{B} \end{cases}$$

Periodicidad Las funciones $\sin(x)$ y $\cos(x)$ tiene periodo $T = 2\pi$. Mientras que la función $\tan(x)$ tiene periodo $T = \pi$.

Inversas trigonométricas Las funciones inversas de funciones trigonométricas estás sólo definidas *localmente*: Por ejemplo,

$$y = \sin(x) \iff x = \sin^{-1}(y)$$

siempre y cuando

$$x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], y \in [-1, 1]$$

Funciones hiperbólicas

Relaciones fundamentales

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$
$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\begin{aligned} \tanh(x) &= \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} \\ &= \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \coth(x) &= \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)} \\ &= \frac{1}{\tanh(x)} \\ &= \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} sech(x) &= \frac{1}{\cosh(x)} \\ &= \frac{2}{e^x + e^{-x}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} csch(x) &= \frac{1}{\sinh(x)} \\ &= \frac{2}{e^x - e^{-x}} \end{aligned}$$

Identidades pitagóricas

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$$
$$sech^2(x) + \tanh^2(x) = 1$$
$$\coth^2(x) - csch^2(x) = 1$$

Sumas de ángulos

$$\sinh(x \pm y) = \sinh(x)\cosh(y) \pm \cosh(x)\sinh(y)$$
$$\cosh(x \pm y) = \cosh(x)\cosh(y) \pm \sinh(x)\sinh(y)$$
$$\tanh(x \pm y) = \frac{\tanh(x) \pm \tanh(y)}{1 \pm \tanh(x)\tanh(y)}$$

Ejemplos

Problema 3.6. Si $f(x) = 2x^2 - 3x + 5$, encontrar

(I) $f(h) - f(0)$

(II) $f(h-1) - f(-1)$

(III) $f(x+h)$

(IV) $f(x+h) - f(x)$

(V) $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$

Problema 3.7. Usando las leyes de los exponentes, demostrar las leyes de los logaritmos.

Problema 3.8. Demostrar que

(I) $\sin^2(x) = \dfrac{1}{2}(1 - \cos(2x))$

(II) $\cos^2(x) = \dfrac{1}{2}(1 + \cos(2x))$

Problema 3.9. Demostrar que

$$A\cos(x) + B\sin(x) = \sqrt{A^2 + B^2}\sin(x + \alpha)$$

donde $\tan(\alpha) = \dfrac{A}{B}$.

Problema 3.10. Demostrar que

(I) $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$

(II) $sech^2(x) + \tanh^2(x) = 1$

Problema 3.11. Demostrar que $\cosh^{-1}(x) = \pm\ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$

3.3 *Números complejos*

En estas notas, denotaremos por $\mathbb{R}$ el conjunto de números reales. En esta sección, procederemos de manera informal, para motivar la definición de un número complejo y formalizar sus propiedades, en secciones posteriores.

Supongamos que $a, b, c \in \mathbb{R}$, y queremos resolver la ecuación

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

De manera algebraíca encontramos que las soluciones estan dadas por la fórmula

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a},\ D = b^2 - 4ac.$$

Si $D \geq 0$, entonces D es un número real. Sin embargo, ¿qué sucede si $D < 0$?. Por la *ley de los signos* si $x, y \geq 0$, entonces $xy \geq 0$. De la misma manera, si $x, y < 0$, entonces $xy > 0$. En particular, para cualquier $x \in \mathbb{R}$, tenemos que $x^2 = x \cdot x \geq 0$. Por lo tanto, $\sqrt{D} \notin \mathbb{R}$ si $D < 0$.

Una solución a este problema es definir el número $i = \sqrt{-1}$. En este caso, si $D < 0$, entonces usando leyes de los exponentes tenemos que

$$\sqrt{D} = \sqrt{(-1)(-D)} = \sqrt{-1}\sqrt{-D} = \sqrt{-D}i.$$

En este caso, como $D < 0$, entonces $-D > 0$ y $\sqrt{-D} \in \mathbb{R}$.

Problema 3.12. Las soluciones de la ecuación $x^2 + 1 = 0$ son $x = 0 + i1$ y $x = 0 + i(-1)$, o simplemente, $x = \pm i$.

Problema 3.13. Encuentre las soluciones de la siguientes ecuaciones:

1. $x^4 + 16 = 0$,
2. $x^2 - 2x + 2 = 0$.

Entonces, diremos que un número complejo es una cantidad de la forma

$$z = x + iy,\ x, y \in \mathbb{R},\ i = \sqrt{-1}.$$

Observe que si $x \in \mathbb{R}$, podemos identificarlo con $x + i0$.

Definimos la suma de números complejos $z = x + iy, z' = x + iy'$ de la siguiente manera:

$$z + z' = (x + x') + i(y + y').$$

Problema 3.14. Demuestre que

1. $(x + iy) + (x' + iy') = (x' + iy') + (x + iy)$.
2. $[(x + iy) + (x' + iy')] + (x'' + iy'') = (x + iy) + [(x' + iy') + (x'' + iy'')]$
3. $0 + (x + iy) = x + iy$
4. $(x + iy) + ((-x) + i(-y)) = 0$

Diremos que $0 = 0 + i0$ es el *neutro aditivo* en los número complejos y que $-z := -x - iy$ es el *inverso aditivo* de $z = x + iy$.

Ahora queremos definir la multiplicación $(x + iy)(x' + iy')$. Sigamos las reglas algebraicas usuales para números reales, salvo por la identidad $i^2 = -1$.

$$\begin{aligned}
(x + iy)(x' + iy') &= x(x' + iy') + iy(x' + iy') \\
&= xx' + x(iy') + (iy)x' + (iy)(iy') \\
&= xx' + ixy + iyx' + i^2yy' \\
&= (xx' - yy') + i(xy' + yx').
\end{aligned}$$

En resumen,

$$zz' = (xx' - yy') + i(xy' + yx') \in \mathbb{C}.$$

Problema 3.15. Demostrar las siguientes propiedades de la multiplicación de número complejos

1. $(x+iy)(x'+iy') = (x'+iy')(x+iy)$.
2. $[(x+iy)(x'+iy')]\,(x''+iy'') = (x+iy)\,[(x'+iy')(x''+iy'')]$
3. $(1+i0)(x+iy) = x+iy$
4. $(x+iy)(x-iy) = x^2+y^2$.
5. $(x+iy)\left(\dfrac{x-iy}{x^2+y^2}\right) = 1$.

Diremos que $1 = 1+i0$ es el *neutro multiplicativo* en los número complejos y que

$$z^{-1} := \frac{x-iy}{x^2+y^2}$$

es el *inverso multiplicativo* de $z = x+iy$.

Si definimos $\bar{z} = x - iy$, para $z = x+iy$, podemos reescribir

$$z^{-1} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}}.$$

Diremos que $\bar{z}$ es el *conjugado* de z.

Observación. Los número reales se pueden identificar con una línea recta. Como i no se puede identificar con un número en la línea recta, se decía que este número era *imaginario*. Sin embargo, podemos visualizar los números complejos (es decir, ¡dibujarlos!), para lo cuál necesitaremos “más espacio”. Como requerimos dos números reales para describir un complejo, tendremos que dibujarlos en el plano.

Problema 3.16. Encuentre el resultado de las siguientes operaciones:

1. $\left(1+i\sqrt{3}\right)\left(-1+i\sqrt{3}\right)$
2. $\dfrac{\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}}{\sqrt{3}+i1}$
3. $\left(\sqrt{2}+i\sqrt{6}\right)^3$

Estructura algebraica de $\mathbb{C}$

Definición. El *plano* es el conjunto

$$\mathbb{R}^2 = \{(x,y) | x,y \in \mathbb{R}\},$$

de parejas ordenadas de números reales.

En este espacio, podemos definir varias operaciones. Cuando al conjunto lo dotamos de ciertas operaciones, decimos que es un *estructura (matemática)* en el plano. Una de las más importantes es la estructura de *espacio vectorial,* que a continuación presentamos.

Definición. El *plano euclideano* es $\mathbb{R}^2$ dotado de las siguiente operaciones:

1. $(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$,
2. Si $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \cdot (x, y) = (\alpha x, \alpha y)$,

Observación. En este caso, a los pares ordenados $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ les llamaremos *vectores (en el plano)*, mientras que a los números reales los llamaremos *escalares.* Entonces, nos referiremos a la primera operación como *suma de vectores,* mientras que a la segunda como *multiplicación por escalares.* Estas son las operaciones *usuales* en el plano euclideano.

Problema 3.17. Encuentre y grafique los vectores resultantes.

1. $2(1, 0) + 3(0, 1)$,
2. $\frac{1}{5}(5, 0) - 1(0, 2)$.

Con el plano euclideano en mente, podemos definir de manera formal el conjunto de número complejos. Observe que podríamos identificar $x + iy$ con el vector (x, y). Observe que con esta identificación, el resultado de la suma de números complejos coincide con la de vectores. De igual manera, podemos identificar la multiplicación entre número complejo. Esto nos lleva a la definición formal de *números complejos.*

Definición. El *campo* de número complejos $\mathbb{C}$ es el conjunto $\mathbb{R}^2$ dotado de las siguientes operaciones:

1. $(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$,
2. $(x, y)(x', y') = (xx' - yy', xy' + yx')$.

Si identificamos $\alpha \in \mathbb{R}$, con $(a, 0) \in \mathbb{C}$, resulta que la multiplicación por escalares coindice con la multiplicación de números complejos para escalares reales, es decir, si $a \in \mathbb{R}$,

$$a(x, y) = (a, 0)(x, y).$$

Problema 3.18. Verifique la afirmación anterior.

Problema 3.19. Verifque las siguiente propiedades. Si $u, v, w \in \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$, entonces

1. $u + v \in \mathbb{C}$

2. $(u+v)+w = u+(v+w)$
3. $u+v = v+u$
4. Existe $0 \in \mathbb{C}$, tal que $u+0=0$
5. Para cada $u \in \mathbb{C}$, existe $-u \in \mathbb{C}$, tal que $u+(-u)=0$
6. $uv \in \mathbb{C}$
7. $(uv)w = u(vw)$
8. $uv = vu$
9. Existe $1 \in \mathbb{C}$, tal que $1u = u$
10. Para cada $u \in C, u \neq 0$, existe $u^{-1} \in \mathbb{C}$, tal que $uu^{-1} = 1$
11. $u(v+w) = uv + uw$.

Observación. Cualquier conjunto S, con operaciones suma y multiplicación, que cumplan las propiedades anteriores, se conoce como un *campo.* Otros ejemplos de campos son las fracciones y los mismos números reales. En teoría número, ejemplos de campos son los enteros *módulo* p $\mathbb{Z}_p$, con p un número primo.

Forma polar de los números complejos

En la presente sección, suponemos que el lector tiene conocimientos elementales de trigonometría y geometría analítica.

Como los números complejos son vectores, podemos calculas su longitud o *norma.*

Definición. Si $z = x+iy \in \mathbb{C}$, entonces la norma de z se define como

$$\|z\| = \sqrt{x^2+y^2}.$$

Como hicimos antes, definimos de manera formal el *conjugado* de un número complejo.

Definición. Si $z=(x,y) \in \mathbb{C}$, su *conjugado* esta dado por

$$\bar{z} = (x,-y) \in \mathbb{C}.$$

De manera que $\|z\|^2 = z\bar{z}$.

De la misma manera, siendo un vector podemos medir el ángulo que abre respecto al vector $(1,0)$, en el sentido de las manecillas del reloj, al cual llamaremos *argumento* y definimos analíticamente de la siguiente forma.

Definición. El argumento $\theta(z)$ de $z = x+iy \in \mathbb{C}$ se define como

1. $\arctan\left(\frac{y}{x}\right)$ si $x > 0$
2. $\pi + \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$ si $x < 0$
3. $\frac{\pi}{2}$ si $x = 0, y > 0$
4. $-\frac{\pi}{2}$ si $x = 0, y < 0$

Definición. Si $z \in \mathbb{C}$ tiene norma $r > 0$ y argumento θ, decimos que

$$z = r\varphi(\theta),$$

es la *forma polar* de z, donde $\varphi(\cdot) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$,

$$\varphi(\theta) = \left(\cos(\theta), \sin(\theta)\right).$$

Problema 3.20. Demostrar que

1. $\varphi(0) = 1$
2. $\varphi(\theta + 2\pi) = \varphi(\theta)$
3. $\overline{\varphi(\theta)} = \varphi(-\theta)$
4. $\varphi(\theta + \tau) = \varphi(\theta)\varphi(\tau)$
5. $\varphi(n\theta) = \left(\varphi(\theta)\right)^n$

Problema 3.21. 1. Si $z = r\varphi(\theta) \in \mathbb{C}$, entonces

   a) $z^{-1} = r^{-1}\overline{\varphi(\theta)}$

   b) Si n es un número entero, $z^n = r^n\varphi(n\theta)$.

2. Si $z = r\varphi(\theta), w = s\varphi(\tau) \in \mathbb{C}$, entonces

   a) $zw = rs\varphi(\theta + \tau)$.

   b) $\frac{z}{w} = \frac{r}{s}\varphi(\theta - \tau)$

   Esta última identidad se conoce como *identidad de De Moivre.*

Problema 3.22. Convierta a su forma polar, cada uno de los números en el ejercicio 3.16 y realice las operaciones correspondientes, usando los resultados anteriores.

4 Sistemas lineales

4.1 Sistemas de Ecuaciones Lineales Simultáneas

Sistemas de Dos Ecuaciones Lineales

Supongamos que $a_i, b_i, c_i, i = 1, 2$ son número dados:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

En el sistema anterior, nuetro objetivos es encontrar dos números x, y tales que cumplan ambas ecuaciones simultaneamente.

Problema 4.1. La solución del sistema

$$\begin{cases} x + y = 7 \\ x - y = 3 \end{cases}$$

es $x = 5, y = 2$.

A continuación, ejemplificaremos algunos de los métodos más comunes para resolver sistemas de ecuaciones.

$$2x - y = 4$$

$$x + 2y = -3$$

Método de sustitución Despejando de (4.1), obtenemos

$$y = 2x - 4.$$

Sutituyendo en (**??**), obtenemos

$$x + 2(2x - 4) = -3.$$

Método de igualación Despejando de (4.1), obtenemos

$$y = 2x - 4.$$

Despejando de (**??**), obtenemos

$$y = -\frac{3 + x}{2}.$$

Igualando ambos lados derechos, obtenemos

$$2x - 4 = -\frac{3+x}{2}.$$

Método gráfico

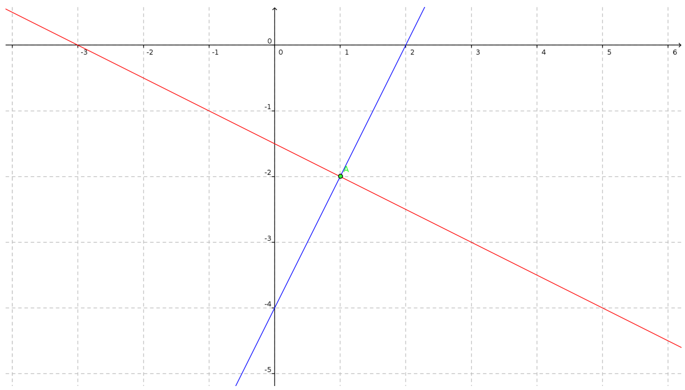
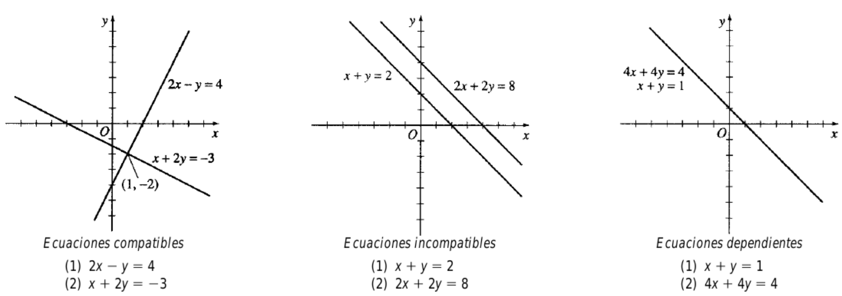


Figura 4.1:
$2x - y = 4\,, x + 2y = -3$

Tipos de sistemas



4.2 Determinantes

Determinantes de Segundo Orden

Definición

Definición.

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

Problema 4.2.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} =$$

Si consideremos el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \quad \ldots$$

...y definimos

$$\begin{aligned}
\Delta &= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \\
\Delta_x &= \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} \\
\Delta_y &= \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} \ldots
\end{aligned}$$

...entonces

$$\begin{aligned}
x &= \frac{\Delta_x}{\Delta} \\
y &= \frac{\Delta_y}{\Delta}
\end{aligned}$$

Problema 4.3. Resuelva el sistema

$$\begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ x - 2y = -3 \end{cases}$$

Ejemplos

El método de solución de sistemas de ecuaciones linales, por medio de determinantes, se conoce como Regla de Cramer.

Problema 4.4. Resuelva el siguiente sistema por la Regla de Cramer

$$\begin{cases} 4x + 2y = 5 \\ 3x - 4y = 1 \end{cases}$$

Problema 4.5. Resuelva el siguiente sistema por la Regla de Cramer

$$\begin{cases} 3u + 2v = 18 \\ -5u - v = 12 \end{cases}$$

Sistemas Indeterminados

Un sistema de n ecuaciones con n incognitas tiene una única solución si y solo si su determinante principal $\Delta \neq 0$.

En este caso, decimos que el sistema es consistente.

Si $\Delta = 0$, entonces o bien existen multiples soluciones, o bien no existe alguna en absoluto.

En cualquier caso, decimos que el sistema es inconsistente.

Determine si

$$\begin{cases} 5x - 2y = 10 \\ 10x - 4y = 20 \end{cases}$$

es consistente; y de no ser el caso, explique que sucede con las soluciones.

Determine si

$$\begin{cases} 5x + 3y = 15 \\ 10x + 6y = 60 \end{cases}$$

es consistente; y de no ser el caso, explique que sucede con las soluciones.

Ejemplos

Problema 4.6.

$$\begin{aligned} 2x - y &= 4 \\ x + y &= 5 \end{aligned}$$

Problema 4.7.

$$\begin{aligned} 5x + 2y &= 3 \\ 2x + 3y &= -1 \end{aligned}$$

Problema 4.8.

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 3 \\ 6y - 6x &= 1 \end{aligned}$$

Problema 4.9.

$$\begin{aligned} 5y &= 3 - 2x \\ 3x &= 2y + 1 \end{aligned}$$

Problema 4.10.

$$\begin{aligned} \frac{x-2}{3} + \frac{y+1}{6} &= 2 \\ \frac{x+3}{4} - \frac{2y-1}{2} &= 1 \end{aligned}$$

4.3 Fracciones parciales

La técnica de fracciones parciales se utiliza para integrar funciones racionales, es decir, aquellas de la forma

$$\frac{N(x)}{D(x)},$$

donde N, D son polinomios.

Por simplicidad, supondremos que

1. El coeficiente líder de $D(x)$ es igual a 1.

2. El grado de $D(x)$ es mayor que el de $N(x)$.

Sin embargo, ninguna de estas dos condiciones son esenciales.

Problema 4.11.

$$\int \frac{2x^3}{5x^8+3x-4}dx = \frac{1}{5}\int \frac{2x^3}{x^8+\frac{3}{5}x-\frac{4}{5}}$$

Problema 4.12.

$$\frac{2x^5+7}{x^2+3} = 2x^3-6x+\frac{18x+7}{x^2+3}$$

Definición. Un polinomio es irreducible si no se puede expresar como el producto de dos polinomios de grado menor.

1. Todo polinomio lineal es irreducible

2. Un polinomio cuadrático

$$g(x) = ax^2+bx+c,\ a \neq 0$$

   es irreducible si y solo $b^4-4ac<0$.

Problema 4.13. Verifique que

1. x^2+4 es irreducible;

2. x^2+x-4 es reducible.

Teorema 4.1. *Todo polinomio cuyo coeficiente líder sea igual a* 1 *se puede expresar como producto de factores lineales, o factores cuadráticos irreducibles.*

Problema 4.14. 1. $x^3-4x=$

2. $x^3+4x=$

3. $x^4-9=$

4. $x^3-3x^2-x+3=$

Método de Fracciones Parciales

Caso I. $D(x)$ es producto de factores lineales distintos

Problema 4.15. Resuelva

$$\int \frac{dx}{x^2-4}$$

Problema 4.16. Resuelva

$$\int \frac{(x+1)dx}{x^3+x^2-6x}$$

Regla General para Caso 1

El integrando se representa como una suma de términos de la form $\dfrac{A}{x-a}$, para cada factor $x-a$, y A una constante por determinar.

Caso 2. $D(x)$ es producto de factores lineales repetidos.

Problema 4.17. Encuentre

$$\int \frac{(3x+5)dx}{x^3-x^2-x+1}$$

Problema 4.18.

$$\int \frac{(x+1)dx}{x^3(x-2)^2}$$

Regla General para el Caso 2.

Para cada factor $x-c$ de multiplicidad k, se utiliza la expresión

$$\frac{A_1}{x-r}+\frac{A_2}{(x-r)^2}+...+\frac{A_k}{(x-r)^k}.$$

Caso 3. Factores cuadráticos irreducibles distintos, y lineales repetidos

A cada factor irreducible x^2+bx+c de $D(x)$ le corresponde el integrando

$$\frac{Ax+B}{x^2+bx+c}.$$

Problema 4.19. Encuentre

$$\int \frac{(x-1)dx}{x(x^2+1)(x^2+2)}$$

Caso IV. Factores cuadráticos irreducibles repetidos

A cada factor cuadráticos irreducible x^2+bx+c de mutiplicidad k le corresponde el integrando

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{A_i x+B_i}{(x^2+bx+c)^i}$$

Problema 4.20. Encuentre

$$\int \frac{2x^2+3}{(x^2+1)^2}dx.$$

Problemas

Problema 4.21. Encuentre la expresión en fracciones parciales de

$$\frac{-29\,x+143}{2\,x^2-22\,x+56}$$

$$\frac{-29\,x+143}{2\,x^2-22\,x+56}=-\frac{9}{2\,(x-4)}-\frac{10}{x-7}$$

Problema 4.22. Encuentre la expresión en fracciones parciales de

$$\frac{-10\,x-30}{7\,x^2+4\,x-3}$$

$$\frac{-10\,x-30}{7\,x^2+4\,x-3}=-\frac{24}{7\,x-3}+\frac{2}{x+1}$$

Problema 4.23. Encuentre la expresión en fracciones parciales de

$$\frac{171\,x+175}{15\,x^2+38\,x+7}$$

$$\frac{171\,x+175}{15\,x^2+38\,x+7}=\frac{22}{5\,x+1}+\frac{21}{3\,x+7}$$

Problema 4.24. Encuentre la expresión en fracciones parciales de

$$\frac{-10\,x+109}{x^2-20\,x+100}$$

$$\frac{-10\,x+109}{x^2-20\,x+100}=-\frac{10}{x-10}+\frac{9}{(x-10)^2}$$

Problema 4.25. Encuentre la expresión en fracciones parciales de

$$\frac{80\,x+31}{256\,x^2+96\,x+9}$$

$$\frac{80\,x+31}{256\,x^2+96\,x+9}=\frac{5}{16\,x+3}+\frac{16}{(16\,x+3)^2}$$

Problema 4.26. Encuentre la expresión en fracciones parciales de

$$\frac{30\,x-14}{25\,x^2-20\,x+4}$$

$$\frac{30\,x-14}{25\,x^2-20\,x+4}=\frac{6}{5\,x-2}-\frac{2}{(5\,x-2)^2}$$

5 *Álgebra*

5.1 *Reducción de términos semejantes*

En el álgebra, representamos cantidades desconocidas por símbolos; generalmente son letras como x, y, z, pero *no debe olvidarse que respresentan números.*

Para representar una multiplicación iterada, usamos el símbolo de potencia

$$x^n = \underbrace{x \cdot \cdots \cdot x}_{n\texttt{-veces}};$$

al número x le llamamos base y al número n le llamamos potencia.

Problema 5.1. 1. $3^2 = 3 \cdot 3 = 9$

2. $5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$

3. $2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$

Problema 5.2. 1. $x^2 = x \cdot x$

2. $x^3 = x \cdot x \cdot x$

3. $x^4 = x \cdot x \cdot x \cdot x$

4. $\cdots$

Observación. Observe que $x^1 = x$; mientras que, por convención, $x^0 = 1$.

Cuando multiplicamos x^n por un número diferente de x :

$$ax^n = a \cdot \underbrace{x \cdot \cdots * x},$$

diremos que a es el coeficiente de x^n.

A un número escrito en la forma ax^n se le llama *monomio;* y diremos que dos monomios son semejantes si tienen *exactamente* la misma base a la misma potencia.

Problema 5.3. Determine cual de los siguientes monomios es semejante a $2x^3$:

1. $3x^3$;
2. $2x^2$;
3. $2y^3$;

Dos términos semejantes pueden reducirse

$$\begin{cases} ax^n + bx^n = (a+b)\,x^n \\ ax^n - bx^n = (a-b)\,x^n \end{cases}$$

Problema 5.4. Reduzca los siguientes términos semejantes, escribiendo el coeficiente en forma irreducible.

1. $\left(4n^2 + 5n + 3\right) + \left(-3n^2 - 2n\right)$
2. $\left(-7a^3 - a^2 - 5a - 2\right) + \left(a^3 + a^2 - 4a + 7\right)$
3. $$\left(5u^5 - 3u^4 + 2u^3 - 5u^2 + 7u - 7\right) + \left(\frac{2u^5}{3} + \frac{3u^4}{2} - \frac{2u^2}{3} + \frac{5u}{6} + \frac{5}{4}\right).$$

Problema 5.5. Reduzca los siguientes términos semejantes, escribiendo el coeficiente en forma irreducible.

1. $\left(4n^2 + 5n + 3\right) - \left(-3n^2 - 2n\right)$
2. $\left(-7a^3 - a^2 - 5a - 2\right) - \left(a^3 + a^2 - 4a + 7\right)$
3. $$\left(5u^5 - 3u^4 + 2u^3 - 5u^2 + 7u - 7\right) - \left(\frac{2u^5}{3} + \frac{3u^4}{2} - \frac{2u^2}{3} + \frac{5u}{6} + \frac{5}{4}\right).$$

Observación. A la suma de dos o más monomios se le conoce como *polinomio.*

Por ejemplo $x^2 - 2x + 1$ o $x^2 - 2xy + y^2$.

5.2 *Supresión de signos de agrupación*

Cuando queremos quitar parentesis u otro signo de agrupación, en una suma o resta de polinomios, basta usar la regla de los signos.

Sin embargo, cuando un polinomio se multiplica por un coeficiente, se utiliza la siguiente regla

Proposición 5.1 (Ley de la distribución)**.**

$$a\,(b+c) = ab + ac \tag{5.1}$$

$$(a+b)\,(c+d) = ac + ad + bc + bd. \tag{5.2}$$

Problema 5.6. Simplifique

1. $(6-7a)(2-4a)$
2. $-4(-4w-5)(4w-2)$
3. $6(-5v-7)(4-5v)(-2v-1)v$

5.3 *Mutiplicación de polinomios*

Dos monomios se pueden multiplicar de la siguiente manera

$$(ax^n)(bx^m) = (ab)x^{n+m}.$$

Problema 5.7. 1. $\left(2x^3\right)\left(3x^2\right) = (2*3)\,x^{2+3} = 6x^5$.

Problema 5.8. Exprese su respuesta en la forma más simple posible:

1. $(6x^4)(4-3x-3x^2)$
2. $5w^3\left(-7w^3-7w^2+7w+3\right)$
3. $\dfrac{a^3}{3}\left(-7a^5-2a^4+3a^3+a^2-a-3\right)$

Problema 5.9. Exprese su respuesta en la forma más simple posible:

1. $$\left(n^2+5n\right)\left(-n^2+6n+1\right)$$
2. $$\left(-6a^2-3a-7\right)\left(a^3+a^2+6a-7\right)$$
3. $$\left(\frac{9w^4}{8}+\frac{8w^3}{9}-\frac{7w^2}{9}-\frac{w}{3}+\frac{5}{9}\right)\left(-2w^3-5w+7\right)$$

Problema 5.10. Exprese su respuesta en la forma más simple posible:

1. $\left(7u^4\right)\left(6-4u-7u^2\right)$
2. $\left(3s^4\right)\left(-7+s-s^2-5s^3\right)$
3. $\left(7x^4\right)\left(2+4x-7x^2\right)$

Problema 5.11. Simplifique

1. $\left(5w^4\right)\left(-1+5w+4w^2+6w^3\right)$
2. $\left(3m^4\right)\left(-1-6m-3m^2-7m^3-4m^4\right)$
3. $5a^5\left(a^3-3a^2+3a-5\right)$

Problema 5.12. Escriba su respuesta de la forma más simple posible

1. $\left(\frac{8n^4}{9}\right)\left(n^4-3n^3-4n^2+3n-1\right)$
2. $\left(\frac{2y^5}{5}\right)\left(-3y^4+5y^3-7y^2-2y-5\right)$
3. $\left(\frac{3s^3}{7}\right)\left(-2s^4-s^3-5s^2+2s+1\right)$

Problema 5.13. Exprese su respuesta en la forma más simple posible

1. $(-4x-5)\left(-3x^3+3x^2-4x-4\right)$
2. $\left(6y-7y^2\right)(y+3)$
3. $\left(\frac{7w^2}{9}+\frac{4w}{9}+\frac{9}{2}\right)\left(5w^2+6w-7\right)$

Problema 5.14. Simplifique

1. $\left(3x^2+2x+3\right)\left(6x^2-4x-3\right)$
2. $\left(4m^2+3m\right)\left(6m^3+6m^2-7m+6\right)$
3. $\left(-4x^2+5x+5\right)(3-4x)$

Problema 5.15. Simplifique

1. $\left(-2s^4-5s^3+3s^2+3s+2\right)\left(7s^3-3s^2-2s-7\right)$
2. $\left(5v-v^2\right)\left(2v^2+6v+5\right)$
3. $\left(7x^3+2x^2+5x-6\right)\left(6x^3+3x^2-4x-4\right)$

Problema 5.16. Simplifique

$$\left(\frac{2a^3}{5}-\frac{5a^2}{6}-\frac{9a}{8}+\frac{2}{3}\right)\left(3a^2-2a-4\right)$$

5.4 *Productos notables*

A continuación, aparecen algunos de los productos que se presentan con frecuencia en matemáticas.

Producto monomio-binomio

$$a(c+d)=ac+ad$$

Problema 5.17. 1. $2xy\left(3x^2y-4y^3\right)$

2. $3x^2y^3(2xy-x-2y)$
3. $\left(2st^3-4rs^2+3s^3t\right)\left(5rst^2\right)$

Diferencia de cuadrados

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$$

Problema 5.18. 1. $(3a+5b)(3a-5b)$

2. $(5xy+4)(5xy-4)$

3. $\left(2-5y^2\right)\left(2+5y^2\right)$

4. $\left(3a+5a^2b\right)\left(3a-5a^2b\right)$

Cuadrado de un binomio

$$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$$
$$(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$$

Problema 5.19. 1. $(x+6)^2$

2. $(y+3x)^2$

3. $(z-4)^2$

4. $\left(3-2x^2\right)^2$

5. $\left(x^2y-2z\right)^2$

Producto de dos binomios

$$(x+a)(x+b) = x^2+(a+b)x+ab$$
$$(ax+b)(cx+d) = acx^2+(ad+bc)x+bd$$

Problema 5.20. 1. $(x+2)(x+4)$

2. $(x-4)(x+7)$

3. $(y+3)(y-5)$

4. $(xy+6)(xy-4)$

5. $(2x-3)(4x+1)$

6. $(4+3r)(2-r)$

Cubo de un binomio

$$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$
$$(a-b)^3 = a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$$

Problema 5.21. 1. $(2x+1)^3$

2. $(3x+2y)^3$

3. $(r-2s)^3$

4. $\left(x^2-1\right)^3$

5. $\left(ab^2-2b\right)^3$

Cuadrado de un trinomio

$$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc.$$

Problema 5.22.

$$(x-2y+z)^2 .$$

5.5 *Sumas y diferencias de potencias*

Problema 5.23.

$$(a-b)\left(a^2+ab+b^2\right)$$
$$(a-b)\left(a^3+a^2b+ab^2+b^3\right)$$
$$(a-b)\left(a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4\right)$$

Problema 5.24.

$$(a+b)\left(a^2+ab+b^2\right)$$
$$(a+b)\left(a^3+a^2b+ab^2+b^3\right)$$
$$(a+b)\left(a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4\right)$$

Problema 5.25. 1. $(t-2)\left(t^2+2t+4\right)$

2. $(z-x)\left(x^2+xz+z^2\right)$

3. $(x+3y)\left(x^2-3xy+9y^3\right)$

Problema 5.26. 1. $(s-1)\left(s^3+s^2+s+1\right)$

2. $\left(1+t^2\right)\left(1-t^2+t^4-t^6\right)$

3. $(3x+2y)^2\,(3x-2y)^2$

4. $\left(x^2+2x+1\right)^2\left(x^2-2x+1\right)^2$

5. $(y-1)^3\,(y+1)^3$

6. $(u+2)(u-2)(u^2+4)(u^4+16)$

6 Factorización

6.1 Método de Horner y División Sintética

Problema 6.1. Consideremos evaluar el siguiente polinomio

$$p(x) = 6x^2 + 3x - 2$$

en $x = 9$.

$$\begin{aligned} p(9) &= 6(9)^2 + 3(9) - 2 \\ &= 6(81) + 3(9) - 2 \\ &= 486 + 27 - 2 \\ &= 513 - 2 = 511 \end{aligned}$$

Consideraremos una forma alternativa de evaluar, conocida como *método de Horner*.

Primero, reescribimos el polinomio de la siguiente manera

$$\begin{aligned} p(x) &= \left(6x^2 + 3x\right) - 2 \\ &= \left(6x + 3\right) x - 2 \\ &= \left((6)x + 3\right) x - 2 \end{aligned}$$

Al evaluar, realizamos las siguientes operaciones

$$\begin{aligned} p(9) &= \left((6)9 + 3\right) 9 - 2 \\ &= \left(54 + 3\right) 9 - 2 \\ &= \left(57\right) 9 - 2 \\ &= 513 - 2 \\ &= 511 \end{aligned}$$

Observación. Aunque con el método anterior, hemos realizado algunos pasos más, hemos evitado el uso de *exponentes*. Ahora, todo se reduce a *multiplicaciones y sumas*.

El método anterior se puede sintetizar de la siguiente manera

$$\begin{array}{c|ccc} 9 & 6 & +3 & -2 \\ & \downarrow & 54 & 513 \\ \hline & 6 & 57 & 511 \end{array}$$

De manera general,

$$\begin{array}{c|ccc} x & 6 & +3 & -2 \\ & \downarrow & 6x & (6x+3)x \\ \hline & 6 & 6x+3 & (6x+3)\,x-2 \end{array}$$

Observación. La última expresión $(6x+3)\,x-2$ es igual a nuestro polinomio

$$6x^2+3x-2.$$

Al procedimiento anterior se le conoce como *división sintética.*

Problema 6.2. Evalue $p(x)=2x^3-7x^2+5$ en $x=3$ utilizando

1. evaluación directa
2. el método de Horner
3. división sintética

Problema 6.3. Evalue $p(x)=3x^5+5x^4-4x^3+7x+3$ en $x=-2$ utilizando

1. evaluación directa
2. el método de Horner
3. división sintética

Problema 6.4. Evalue $p(x)=x^3-7x+6$ en $x=1$ utilizando

1. evaluación directa
2. el método de Horner
3. división sintética

Definición. Si al evaluar un polinomio $p(x)$ en $x=c$, obtenemos

$$p(c)=0,$$

diremso que c es un *raíz* o *"cero"* del polinomio $p(x)$.

Problema 6.5. Evalue $p(x)=x^4-3x^3-13x^2+15x$ en $x=-3,0,1,5$ utilizando

1. evaluación directa
2. el método de Horner
3. división sintética

y compruebe que son *ceros* del polinomio.

6.2 *Teorema de los ceros racionales*

Decimos que c es un *cero racional* del polinomio $p(x)$ si $p(c) = 0$ y c es un número racional, es decir, una fracción.

Observación. No todo cero de un polinomio es racional. Por ejemplo, los ceros del polinomio $p(x) = x^2 - 2$ son $c = \pm\sqrt{2}$, y desde los tiempos de Pitágoras es sabido que las raíces de números primos no son números racionales.

Teorema 6.1 (Teorema de los ceros racionales, caso particular)**.** *Si el polinomio* $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0$ *tiene coeficientes enteros, entonces* todo cero racional es divisor de término constante a_0.

Problema 6.6. Hallar los ceros racionales de

$$p(x) = x^3 - 3x + 2.$$

Teorema 6.2 (Teorema de los ceros racionales, caso particular)**.** *Si el polinomio*

$$p(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0, \ a_n \neq 0$$

tiene coeficientes enteros, entonces todo cero racional de la forma $\dfrac{p}{q}$ dónde p es divisor de coeficiente constante a_0 y q es divisor de coeficiente líder a_n.

Problema 6.7. Encuentre los ceros racionales del polinomio

$$p(x) = 2x^3 + x^2 - 13x + 6.$$

Definición. Un número entero p es llamado *primo* si tiene exactamente cuatro divisores, que en ese caso serán, $\pm 1, \pm p$.

Problema 6.8. Encuentre todos los número primos menores a 40.

Sugerencia. Utilice la *cripta de Eratóstenes.*

Como los números ± 1 reciben un nombre especial, y son llamados *unidades.*

Teorema 6.3 (Factorización prima)**.** *Para cada número entero* $n \neq \pm 1$*, existe una unidad* u*, una lista de números primos*

$$\{p_1, ..., p_m\}, m > 0$$

y una lista de potencias $\{R_1, ..., R_m\}$ *con cada* $R_i > 0$*, para* $i = 1, ..., m$ *tal que*

$$n = u \cdot p_1^{R_1} \cdots p_m^{R_m}.$$

Más aun, la elección de la unidad y de las listas es única.

Problema 6.9. Factorice los siguientes números:

1. $7840 = 2^5 \cdot 5 \cdot 7^2$
2. $4860 = 2^2 \cdot 3^5 \cdot 5$
3. $8624 = 2^4 \cdot 7^2 \cdot 11$
4. $2940 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7^2$
5. $4050 = 2 \cdot 3^4 \cdot 5^2$
6. $3234 = 2 \cdot 3 \cdot 7^2 \cdot 11$
7. $8575 = 5^2 \cdot 7^3$
8. $1512 = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 7$
9. $5850 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 13$
10. $6912 = 2^8 \cdot 3^3$

Problema 6.10. Factorice los siguientes números enteros:

1. 4116
2. 3150
3. 6600
4. 4212
5. 1920
6. 640
7. 3696
8. 4455
9. 9072
10. 6174

Algoritmo. ([) `Como encontrar todos los divisores de un número entero]`

1. `Factorice el número entero` $n = p_1^{R_1} \cdots p_m^{R_m}$
2. `Enliste cada posible` $m-$`tupla` $(r_1, ..., r^m)$ `con` $0 \leq r_1 \leq R_1, ..., 0 \leq r_m \leq R_m$
3. `Enliste cada posible número entero de la forma`

$$\pm p_1^{r_1} \cdots p_m^{r_m},$$

   `para cada elemento` $(r_1, ..., r_m)$ `de la lista anterior.`

Observación. Con la notación anterior, el número exacto de divisores positivos de n será

$$(R_1 + 1) \times \cdots \times (R_m + 1).$$

Problema 6.11. Encuentre todos los divisores positivos de

1. 288
2. 540
3. 600
4. 567
5. 896
6. 675
7. 504
8. 640
9. 810
10. 672

Problema 6.12. Encuentre todos los divisores positivos de

1. 324
2. 192
3. 840
4. 720
5. 980
6. 336
7. 420
8. 300
9. 972
10. 486

Problema 6.13. Encuentre los ceros racionales del polinomio

1. $x^3 + 3x^2 - 4$
2. $x^3 - x^2 - 8x + 12$
3. $x^4 - 5x^2 + 4$
4. $x^4 - x^3 - 5x^2 + 3x + 6$
5. $4x^3 - 7x + 3$
6. $6x^4 - 7x^3 - 12x^2 + 3x + 2$
7. $2x^6 - 3x^5 - 13x^4 + 29x^3 - 27x^2 + 32x - 12$

6.3 *Algoritmo de factorización*

Diferencias de potencias

Proposición 6.1.

$$x^n - c^n = (x-c)\left(x^{n-1} + x_{n-2}c + \dots + xc^{n-2} + c^{n-1}\right) \qquad \text{(dP)}$$

Problema 6.14.

$$\begin{aligned} x^2 - 121 &= \\ x^3 - 27 &= \\ x^4 - 256 &= \end{aligned}$$

Problema 6.15.

$$\begin{aligned} x^2 - c^2 &= (x-c)\left(x^1 + c^1\right) \\ &= (x-c)(x+c) \\ x^3 - c^3 &= (x-c)\left(x^2 + x^1c^1 + c^2\right) \\ &= (x-c)\left(x^2 + cx + c^2\right) \\ x^4 - c^4 &= (x-c)\left(x^3 + x^2c^1 + x^1c^1 + c^3\right) \\ &= (x-c)\left(x^3 + cx^2 + c^2x + c^3\right) \end{aligned}$$

El segundo factor en el lado derecho de (dP) se puede reescribir de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} & x^{n-1}+x^{n-2}c+...+xc^{n-2}+c^{n-1} \\ =\ & x^{n-1}c^0+x^{n-2}c^1+...+x^1c^{n-2}+x^0c^{n-1} \\ =\ & \sum_{i+j=n-1} x^ic^j =: S_{x,c}^{n-1} \end{aligned} \tag{pS}$$

donde $\sum_{i+j=M}$ denota la suma la suma sobre todas las parejas i, j de números naturales, cuya suma sea igual a M.

Diremos que $S_{x,c}^{M}$ es el polinomio simétrico de grado M (para x, c).

Problema 6.16. Calcule los siguientes polinomios simétricos

$$\begin{aligned} S_{x,11}^1 &= x+11 \\ S_{x,3}^2 &= x^2+3x+9 \\ S_{x,4}^3 &= x^3+4x^2+16x+64 \end{aligned}$$

Divisores de un polinomio

Definición. Decimos que un polinomio $D(x)$ divide a otro polinomio $P(x)$ si existe un tercer polinomio $Q(x)$ tal que $D(x)Q(x) = P(x)$.

En tal caso decimos que $D(x)$ divide a $P(x)$ y escribimos $D(x) \mid P(x)$. Al polinomio $Q(x)$ se le llama *polinomio cociente.*

Teorema 6.4. *Un número $x = c$ es un cero de $P(x)$ si y solo si $(x-c)$ divide a $P(x)$.*

Diremos que $D_c(x) = (x-c)$ es el divisor asociado *a $x = c$.*

Algoritmo. (Factorización de un divisor asociado) Supongamos que $x = c$ es un cero del polinomio $P(x) = a_nx^n + ... + a_1x + a_0$.

1. Rescribimos explicitamente $P(x) = P(x) - P(c)$
2. Factorizamos cada coeficiente
$$P(x) = a_n\left(x^n - c^n\right) + ... + a_1(x-c)$$
3. Aplicamos diferencias de cuadrados en cada término
$$P(x) = a_n(x-c)S_{x,c}^{n-1} + ... + a_1(x-c)$$
4. Factorizamos $D_c(x) = x - c$
$$P(x) = (x-c)\left(a_nS_{x,c}^{n-1} + ... + a_1\right)$$

Problema 6.17. Para cada uno de los siguientes polinomios, factorice los divisores asociados a cada uno de sus ceros racionales tantas veces como sea posible, utilizando diferencias de potencias:

1. $x^3 + 3x^2 - 4 = (x+2)^2(x-1)$
2. $x^4 - 5x^2 + 4 = (x+2)(x+1)(x-1)(x-2)$

Algoritmo. (Encontrar los ceros racionales de un polinomio)

1. *Enlistar los posibles ceros.* Enliste los posibles ceros racionales usando el teorema de los ceros racionales.
2. *Dividir.* Use la división sintética para evaluar el polinimio en cada uno de los candidatos para ceros racionales que encontró en el paso anterior. Cuando el residuo es 0, observe el cociente que obtuvo.
3. *Repetir.* Repita los pasos anteriores para el cociente. Pare cuando llegue al cociente que no tenga ceros racionales.

Problema 6.18. Para cada uno de los siguientes polinomios, factorice los divisores asociados a cada uno de sus ceros racionales tantas veces como sea posible:

1. $x^3 + 3x^2 - 4 = (x+2)^2(x-1)$
2. $x^4 - 5x^2 + 4 = (x+2)(x+1)(x-1)(x-2)$

Raíces irracionales

Un polinomio cuadrático

$$p(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0$$

tiene raíces r_1 y r_2 si y solo si

$$p(x) = a\left(x - r_1\right)\left(x - r_2\right)$$

Fórmula general

Proposición 6.2. *Las soluciones de la ecuación*

$$ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$$

están dadas por la fórmula

$$\begin{cases} D = b^2 - 4ac \\ r = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} \end{cases}$$

Discriminante El número $D = b^2 - 4ac$ se llama *discriminante* del polinomio cuadrático $p(x) = ax^2 + bx + c$.

Corolario. *1. Si $D > 0$, entonces $p(x) = 0$ tiene exactamente dos raíces reales y diferentes.*

2. Si $D = 0$, entonces $p(x) = 0$ tiene una única raíz real de multiplicidad 2.

3. Si $D < 0$, entonces $p(x) = 0$ tiene un par de raíces complejas conjugadas.

Problema 6.19. Factorice completamente el polinomio

$$P(x) = x^4 - 5x^3 - 5x^2 + 23x + 10$$

6.4 Criterios para evaluar raíces

Regla de los signos de Descartes

Variaciones de signo Si un polinomio $P(x)$ tiene coeficientes reales, escritos sus *exponentes en forma descendiente* y *omitiendo exponentes con coeficiente cero*, entonces una *variación de signo* ocurre siempre que dos signos opuestos.

Problema 6.20.
- $x^2 + 4x + 1$ tiene 0 variaciones de signo.
- $2x^3 + x - 6$ tiene 1 variación de signo.
- $x^4 - 3x^2 - x + 4$ tiene 2 variaciones de signo.
- $5x^7 - 3x^5 - x^4 + 2x^2 + x - 3$ tiene 3 variaciones de signo.

Regla de los signos de Descartes

Proposición 6.3. *Sea P un polinomio con coeficientes reales*

1. *El número de* ceros reales positivos *es o bien igual al número de variaciones de signo en $P(x)$ o bien menor este número por un número par.*
2. *El número de* ceros reales negativos *es o bien igual al número de variaciones de signo en $P(-x)$ o bien menor este número por un número par.*

Problema 6.21. Use la regla de los signos de Descartes para estimar el número posible de ceros reales negativos y positivos del polinomio

$$P(x) = 3x^6 + 4x^5 + 3x^3 - x - 3$$

Solución. $P(x) = 3x^6 + 4x^5 + 3x^3 - x - 3$ tiene una única raíz real positiva y o bien tres o bien una raíces real negativas.

Teorema de las Cotas

Diremos que $m \in \mathbb{R}$ es una *cota inferior* y $M \in \mathbb{R}$ es una cota superior para el conjunto de *ceros reales* de un polinomio si para cada raíz c tenemos que

$$m \leq c \leq M.$$

Teorema 6.5. *Sea $P(x)$ un polinomio con coeficientes reales.*

1. *Si se divide $P(x)$ entre $x - b$ con $b > 0$ usando división sintética, y si la fila de coeficientes del cociente y residuo tiene entradas* no negativas*, entonces b es una cota superior para los ceros reales de $P(x)$.*

2. *Si se divide $P(x)$ entre $x - a$ con $a < 0$ usando división sintética, y si la fila de coeficientes del cociente y residuo tiene entradas* alternantemente no positivas y no negativas*, entonces a es una cota inferior para los ceros reales de $P(x)$.*

Problema 6.22. Muestre que todos los ceros reales del polinomio

$$P(x) = x^4 - 3x^2 + 2x - 5$$

están entre -3 y 2.

Problema 6.23. Factorice completamente el polinomio $P(x) = 2x^5 + 5x^4 - 8x^3 - 14x^2 + 6x + 9$

Solución. $P(x) = (x-1)(2x-3)(x+1)^2(x+3)$

6.5 *Ecuaciones de segundo grado*

Una función cuadrática es de la forma

$$f(x) = ax^2 + bx + c;$$

su gráfica se llama *parábola.*

Complemento de cuadrados

Cualquier función cuadrática se puede reescribir en la forma

$$f(x) = a(x-h)^2 + k,$$

por el método de *complementos de cuadrado.*

El punto (h, k) se llama *vértice,* y corresponde al *extremo* de la parábola

$$y = a(x-h)^2 + k.$$

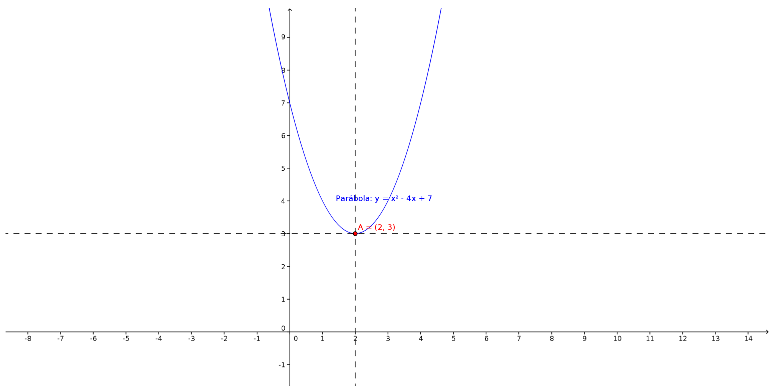


Figura 6.1: $y = x^2 - 4x + 7$

La fórmula para encontrar el vértice de la parábola $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ es

$$\begin{cases} h = -\dfrac{b}{2a} \\ k = f(h). \end{cases}$$

Para completar el cuadrado, podemos usar el *método de división sintética:*

$$\begin{array}{c|ccc} h & a & b & c \\ & \downarrow & +ah & \dots \\ \hline & a & \dots & k \end{array}$$

Problema 6.24. Complete el cuadrado de

$$y = x^2 - 4x + 7.$$

Problema 6.25. Complete el cuadrádo de

$$y = 3x^2 + 30x + 63.$$

Intersecciones con los ejes

Las raíces de un polinomio $p(x)$ son aquellos números reales r tales que $p(r) = 0$.

Para encontrar las raíces de una *polinomio cuadrático*, necesitamos resolver la *ecuación de segundo grado*

$$a(x-h)^2 + k = 0.$$

Si r es una raíz de $p(x) = a(x-h)^2 + k$, entonces la parábola $y = a(x-h)^2 + k$ cruza al eje x en el punto $(r, 0)$.

Observación. Si bien $a, k > 0$ o bien $a, k < 0$, entonces $a(x-h)^2 + k > 0$ y por tanto no existen raíces. Por lo tanto, la parábola $y = a(x-h)^2 + k$ *nunca* cruza el eje x.

Problema 6.26. Determine si existen raíces de

$$y = x^2 - 4x + 7,$$

Diferencia de cuadrados

Una identidad que es muy útil al momento de resolver ecuaciones es la *diferencia de cuadrados*

$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2.$$

Una ecuación de la forma

$$z^2 - c^2 = 0$$

se puede reescribir como

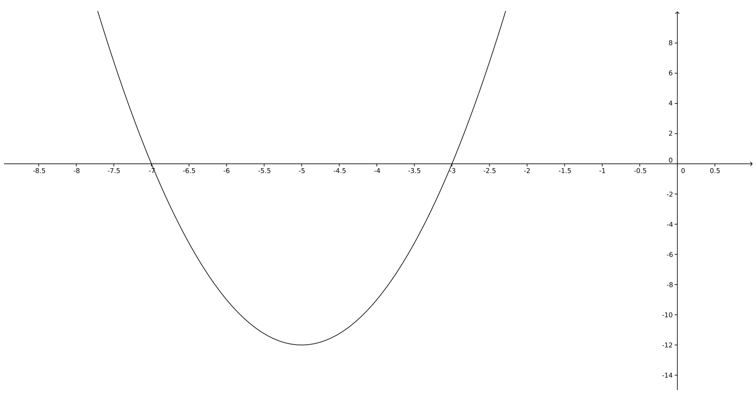
$$(z-c)(z+c) = 0...$$

...en cuyo caso tenemos que $z - c = 0$ o $z + c = 0$, y por tanto las soluciones son

$$z = \pm c.$$

Problema 6.27. Encuentre las raíces de

$$y = 3x^2 + 30x + 63.$$



Ejemplos

Problema 6.28. Resuelva las siguientes ecuaciones

1. $x^2 - 40 = 9$
2. $2x^2 - 400 = 0$
3. $x^2 + 36 = 9 - 2x^2$

Problema 6.29. Resuelva las siguientes ecuaciones

1. $\dfrac{x}{16} = \dfrac{4}{x}$
2. $\dfrac{y^2}{3} = \dfrac{y^2}{6} + 2$

Problema 6.30. Resuelva la siguiente ecuación

$$\frac{1-2x}{3-x} = \frac{x-2}{3x-1}.$$

Problema 6.31. Resuelva la siguiente ecuación

$$\frac{1}{2x-1} - \frac{1}{2x+1} = \frac{1}{4}.$$

Problema 6.32. Resuelva la siguiente ecuación

$$x - \frac{2x}{x+1} = \frac{5}{x+1} - 1.$$

Problema 6.33. Encuentre las raíces de los siguientes polinomios

1. $7x^2 - 5x$
2. $x^2 - 5x + 6$
3. $3x^2 + 2x - 5$
4. $x^2 - 4x + 4$

Problema 6.34. Encuentre las raíces de los siguientes polinomios

1. $x^2 - 6x - 2$
2. $3x^2 - 5x + 1$
3. $4x^2 - 6x + 3$

Factorización

Si un polinomio $p(x) = ax^2 + bx + c$ tiene raíces r_1, r_2 diferentes, entonces podemos factorizar de la siguiente manera

$$p(x) = a(x - r_1)\,(x - r_2)\,.$$

Si un polinomio $p(x) = ax^2 + bx + c$ tiene una única raź r_1, entonces podemos factorizar de la siguiente manera

$$p(x) = a\,(x - r_1)^2\,.$$

Problema 6.35. Factorice los siguientes polinomios

1. $7x^2 - 5x$
2. $x^2 - 5x + 6$
3. $3x^2 + 2x - 5$
4. $x^2 - 4x + 4$

Problema 6.36. Factorice los siguientes polinomios

1. $x^2 - 6x - 2$
2. $3x^2 - 5x + 1$
3. $4x^2 - 6x + 3$

Aplicaciones

Problema 6.37. Encuentre dos números positivos sabiendo que uno de ellos es igual al triple del otro más 5 y que el producto de ambos es igual a 68.

Problema 6.38. Encuentre un número sabiendo que la suma del triple del mismo con el doble de su recíproco es igual a 5.

Problema 6.39. Encuentre las dimensiones de un rectángulo cuto perímetro es de 50 pies y área es de 150 pies cuadrados.

Problema 6.40. La hipotenusa de un triángulo es igual a 34 pulgadas. Encuentre las longitudes de los catetos sabiendo que uno de ellos es 14 pulgadas mayor que el otro.

Problema 6.41. Las dimensiones exteriores de un marco de fotografía son 12 por 15 pulgadas. Sabiendo que el ancho permanece constante, encuentre su valor a) cuando la superficie de la fotografía es de 88 pulgadas y b) cuando dicha superficie vale 100 pulgadas cuadradas.

Problema 6.42. Un piloto realiza un vuelo de 600 millas. Sabiendo que si aumenta la velocidad en 40 millas/hora podría recorrer dicha distancia empleando 30 minutos menos, encuentre la velocidad promedio.

Problema 6.43. Un comerciante compra determinado número de camisas por \$180 y las vende todas menos 6 con una ganancia de \$2 en cada camisa. Sabiendo que con el dinero recaudado en la venta podría haber comprado 30 camisas más que antes, calcule el precio de cada camisa.

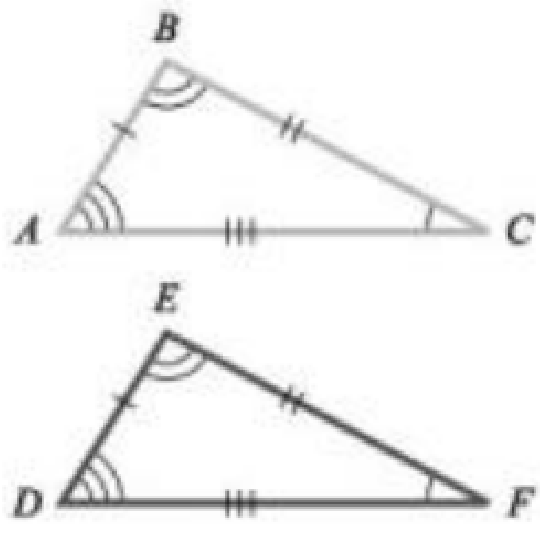
Problema 6.44. Dos operarios A y B juntos, realizan una tarea en 10 días. Trabajando por separado, A tardaría 5 días más que B. Encuentre el número de días que tardarían en hacer la tarea trabajando cada no por sí sólo.

7 Trigonometría

7.1 La geometría de los triángulos: congruencia, similitud y el teorema de Pitágoras

Triángulos congruentes

Los triángulos que tienen el mismo tamaño y la misma forma se llaman *triángulos congruentes*.



Si dos triángulos $\triangle ABC, \triangle DEF$ son congruentes, escribiremos

$$\triangle ABC \cong \triangle DEF.$$

Proposición 7.1 (Criterios de congruencia)**.**

- LAL*: Dos lados y su ángulo incluido iguales.*
- ALA*: Dos ángulos y su lado incluido iguales.*
- LLL*: Tres lados iguales.*

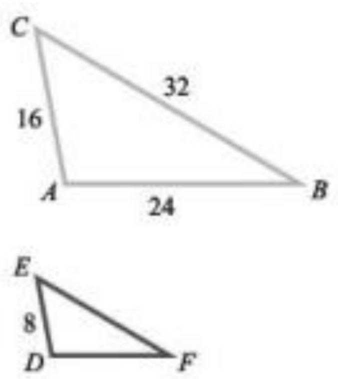
Triángulos semejantes

Diremos que dos triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle DEF$ son *similares* si existe un correspondencia $A \leftrightarrow D, B \leftrightarrow E, C \leftrightarrow F$ tal que $\frac{|AB|}{|DE|} = \frac{|BC|}{|EF|} = \frac{|CA|}{|FD|} =: \alpha$.

A tal *constante de proporcionalidad* α se conoce como *escala*.

Proposición 7.2 (Criterio AA)**.** *Si las medidas de dos ángulos de un triángulo son iguales a las de dos ángulos correspondientes de un segundo triángulo, entonces los dos triángulos son semejantes.*

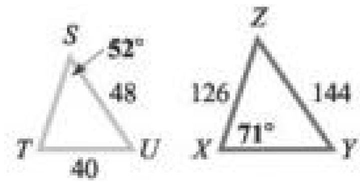
Problema 7.1.

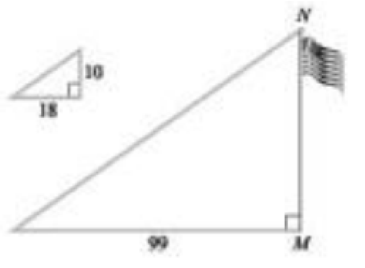


Suponga que en la figura, ambos triángulos son semejantes. Encuentre las longitudes desconocidas de los lados de $\triangle EDF$.

Encuentre las medidas de las partes desconocidas de los triángulos semejantes $\triangle STU$ y $\triangle ZXY$.

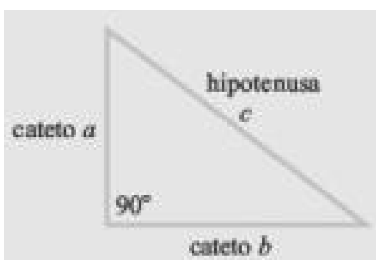
Problema 7.2.





Problema 7.3. La jefa de oficina de correos de una ciudad quiere medir la altura del asta de la bandera de la oficina. Observa que en el instante en el que la sombra de la estación mide $18fts$, la sombra del asta mide $99fts$. El edificio tiene $10fts$ de altura. ¿Cuál es la altura del asta?

El teorema de Pitágoras



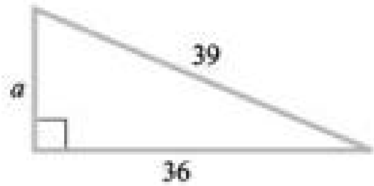
Teorema 7.1 (Pitágoras)**.**

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Los números naturales $\{3, 4, 5\}$ forman una *terna pitagórica*, ya que satisfacen las ecuaciones del teorema de Pitágoras.

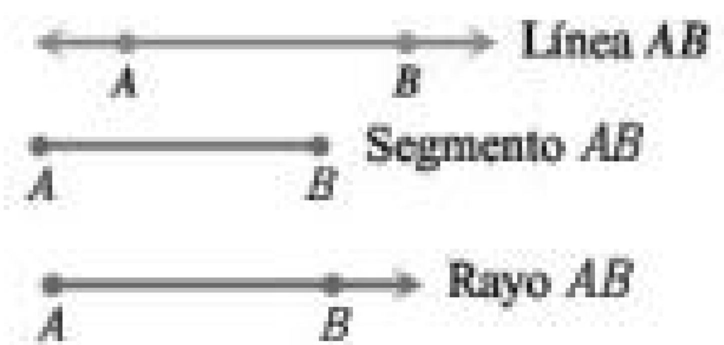
Problema 7.4. Determine la longitud a del triángulo rectángulo que se muestra.

Problema 7.5. Una escalera de 10 metros de longitud tiene su base a 6 metros de la pared. ¿Qué altura alcanza la escalera?



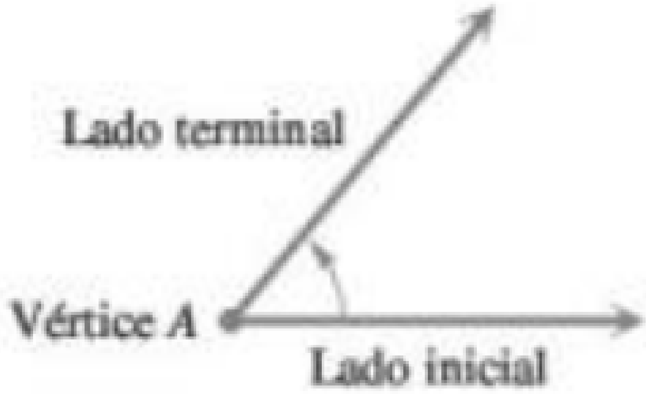
7.2 *Los ángulos y sus medidas*

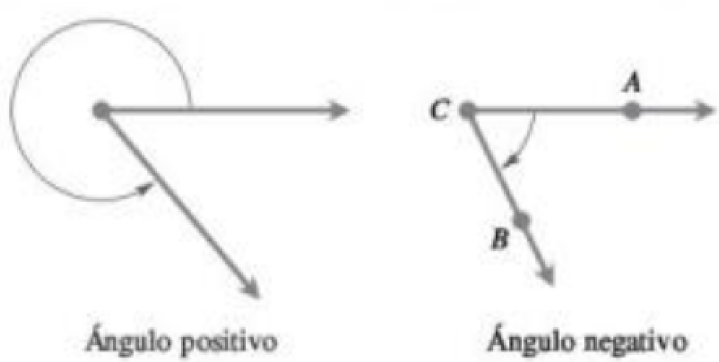
Terminología básica

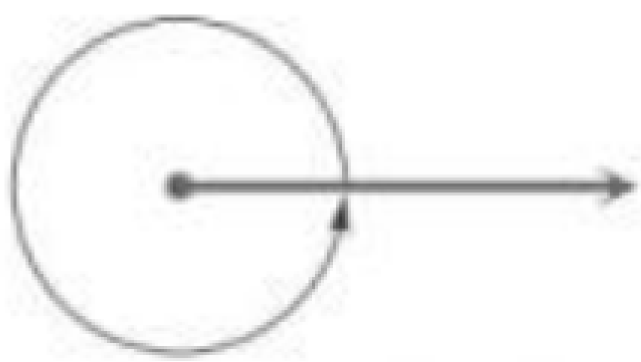


Si la suma de las medidas de dos ángulos es 90^o, los ángulos se llaman *complementarios*. En tanto que dos ángulos cuyas medidas sumen 180^o son *suplementarios*.

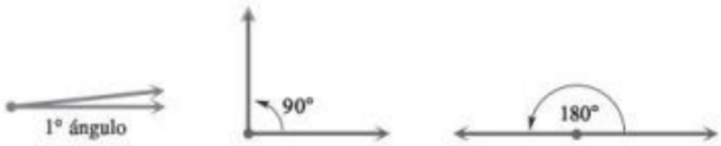
Problema 7.6. Diga cuál es el complemento y el suplemento de 50^o.

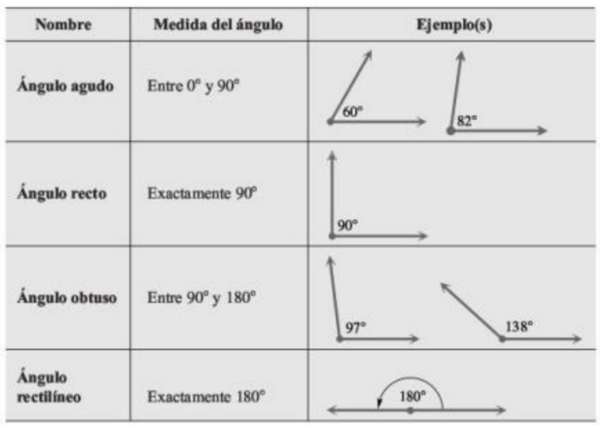






La rotación completa de un rayo genera un ángulo cuya medida es de 360°.

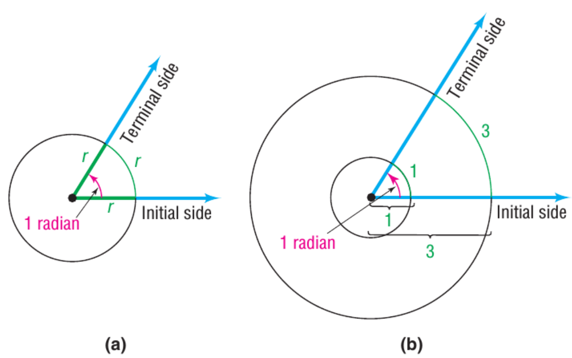




Nombre	Medida del ángulo	Ejemplo(s)
Ángulo agudo	Entre 0° y 90°	60° 82°
Ángulo recto	Exactamente 90°	90°
Ángulo obtuso	Entre 90° y 180°	97° 138°
Ángulo rectilíneo	Exactamente 180°	180°

Radianes

Un *ángulo central* es un ángulo positivo cuyo vértice esta en el centro de un círculo.



Teorema 7.2 (Longitud de arco)**.** *Para un círculo de radio r, un ángulo central de θ radianes subtiende un arco cuya longitud es*

$$s = r\theta \tag{7.1}$$

Problema 7.7. Encuentre la longitud de arco de un círculo de radio 2 subtendido por un ángulo central de 0.25 radianes.

Problema 7.8. Encuentre la longitud de arco de un círculo de radio 10 subtendido por un ángulo central de $\frac{1}{2}$ radianes.

Conversión entre grados y radianes

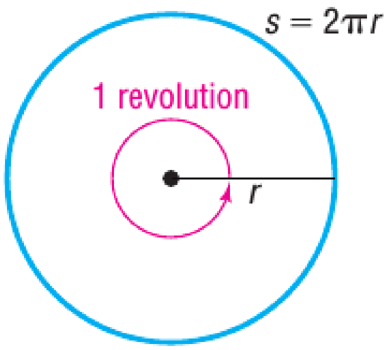


Figura 7.1: 1 revolución = 2π radianes

Como una revolución equivale a 360^o, entonces $1\texttt{rad} = 360^0$. De manera simplificada:

$$180^o = \pi\texttt{rad}$$

Problema 7.9. Convierta cada uno de los ángulos a radianes:

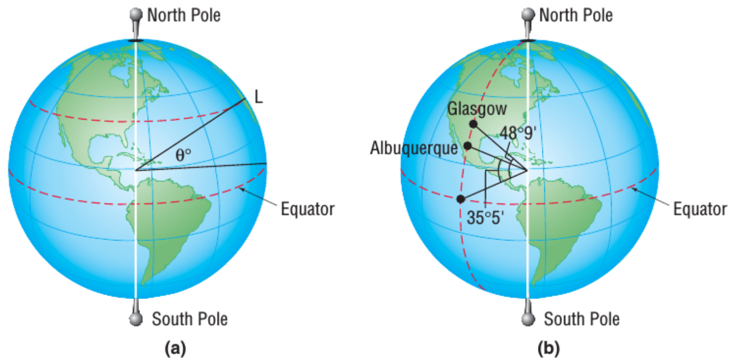
- $60^o =$
- $150^o =$
- $-45^o =$
- $90^o =$
- 107^o

Problema 7.10.
- Convierta 35^o a radianes, expresándolo como un múltiplo de π.
- Convierta -40^o a radianes, expresándolo en decimales.

Degrees	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
Radians	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
Degrees		210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
Radians		$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π

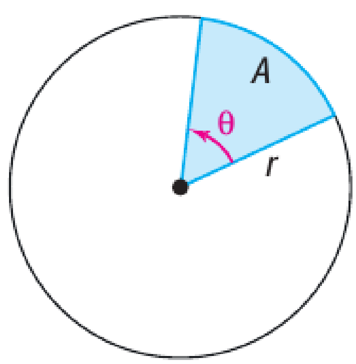
Problema 7.11. La latitud de una locación L es la medida del ángulo formado por un rayo dibujado desde el centro de la tierra al ecuador y un rayo dibujado del centro de la tierra a L.

Glasgow, Montana está al norte de Albuquerque, Nuevo México. Encuentre la distancia entre Glasgow, $48^o, 9'$, latitud Norte y Albuquerque, $35^o, 5'$. Suponga que el radio de la tierra es 3960 millas.



Problema 7.12. Memphis, Tennessee, está al norte de Nueva Orleans, Lousiana. Encuentre la distancia entre Memphis, $35^o, 9'$ latitud norte, y Nueva Orleans, $29^o, 57'$ latitud norte. Suponga que el radio de la tierra es 3960 millas.

Área de un sector de un círculo

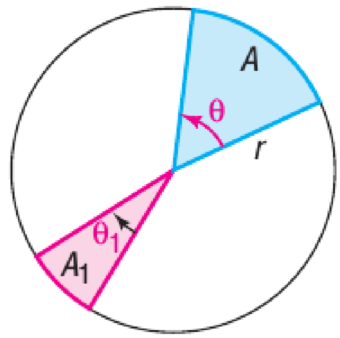


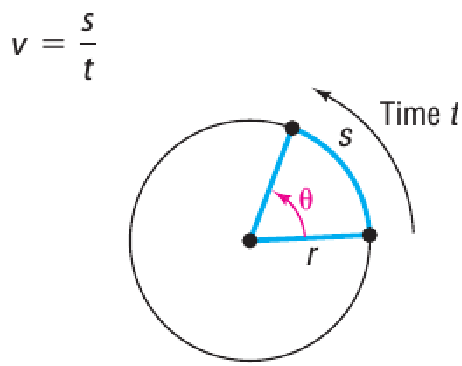
Teorema 7.3 (Área de un sector)**.** *El área A de un sector de un círculo de radio r formado por un ángulo central de θ radianes es*

$$A = \frac{1}{2}r^2\theta. \tag{7.2}$$

Problema 7.13. Encuentre el área del sector de un círculo de radio $2fts$ formado por un ángulo de 30^o. Redondee la respuesta dos decimales.

Problema 7.14. Encuentre el área del sector de un círculo de radio $10m$ formado por un ángulo de $\frac{1}{2}rad$. Redondee la respuesta dos decimales.





Movimiento circular

Supongamos que un objeto se mueve alrededor de un círculo de radio r a una rapidez constante. Si s es la distancia recorrida en un tiempo t alrededor del círculo, entonces la *rapidez lineal* v de este objeto se define como

$$v = \frac{s}{t} \tag{7.3}$$

La *rapidez angular* ω de este objeto es el ángulo θ (medido en radianes) barrido, dividido por el lapso t, es decir,

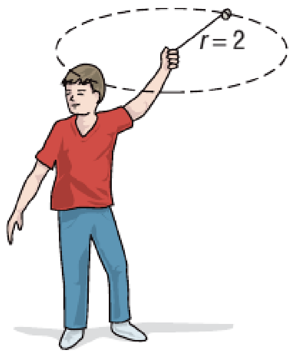
$$\omega = \frac{\theta}{t}. \tag{7.4}$$

De manera que

$$v = r\omega. \tag{7.5}$$

Problema 7.15. Una persona está haciendo una roca atada al extremo de un cuerda de $2fts$ a un ritmo de $180rpm$. Encuentre la rapidez lineal de la roca en el instante en que es liberada.

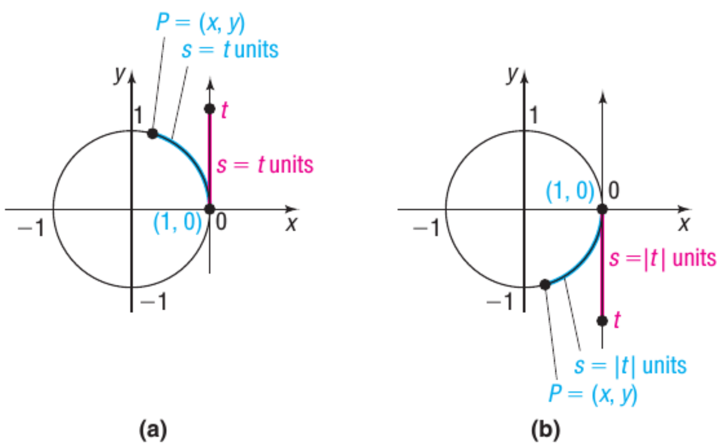
Problema 7.16. Un objeto está viajando alrededor de un círculo de radio $5cm$. Si en $20s$ un ángulo central de $\frac{1}{3}rad$ es barrido, ¿cuál es su rapidez angular? ¿Cuál es su rapidez lineal?



l6cm

7.3 Funciones trigonométricas: El enfoque del círculo unitario

El círculo unitario

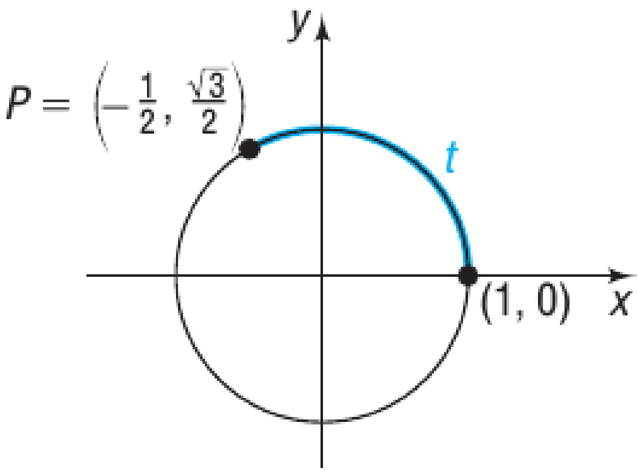


Definición (Funciones trigonométricas)**.** Sea t un número real y $P = (x, y)$ el punto en el círculo unitario que corresponde a t.

- $\sin(t) = y$
- $\cos(t) = x$
- $\tan(t) = \frac{y}{x}$
- $\csc(t) = \frac{1}{y}$
- $\sec(t) = \frac{1}{x}$
- $\cot(t) = \frac{x}{y}$

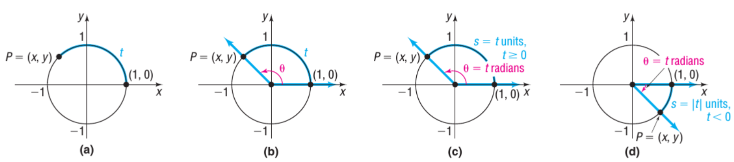
Problema 7.17. Sea t un número real y $P = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ un punto en el círculo unitario que corresponde a t. Encuentre los valores de las seis funciones trigonométricas.

Problema 7.18. Sea t un número real y $P = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ un punto



en el círculo unitario que corresponde a t. Encuentre los valores de las seis funciones trigonométricas.

Funciones trigonométricas de ángulos



Entonces, podemos definir una función trigonométrica en ángulos siempre y cuando este medido en radianes:

$$f(\theta) = f(t\ \texttt{radianes})$$

si $\theta = t\ \texttt{radianes}$.

Problema 7.19. Encuentre el valor exacto de las seis funciones trigonométricas en:

- $\theta = 0 = 0^o$
- $\theta = \frac{\pi}{2} = 90^o$
- $\theta = \pi = 180^o$
- $\theta = \frac{3\pi}{2} = 270^o$

Problema 7.20. Encuentre el valor exacto de:

- $\sin(3\pi)$

Quadrantal Angles							
θ (Radians)	θ (Degrees)	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$	$\csc\theta$	$\sec\theta$	$\cot\theta$
0	0°	0	1	0	Not defined	1	Not defined
$\frac{\pi}{2}$	90°	1	0	Not defined	1	Not defined	0
π	180°	0	-1	0	Not defined	-1	Not defined
$\frac{3\pi}{2}$	270°	-1	0	Not defined	-1	Not defined	0

- $\cos(-270^o)$

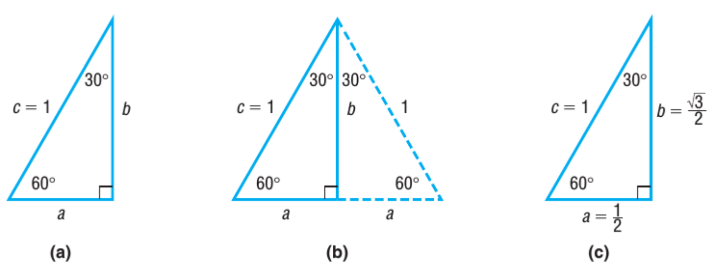
Problema 7.21. Encuentre el valor exacto de las seis funciones trigonométricas en $\frac{\pi}{4} = 45^o$.

Valor exacto en $\frac{\pi}{4}$

Problema 7.22. Encuentre el valor exacto de cada expresión:

- $\sin(45^o)\cos(180^o)$
- $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)$
- $\left(\sec\frac{\pi}{4}\right)^2 + \csc\frac{\pi}{2}$

Valor exacto en $\frac{\pi}{6}$ y $\frac{\pi}{3}$

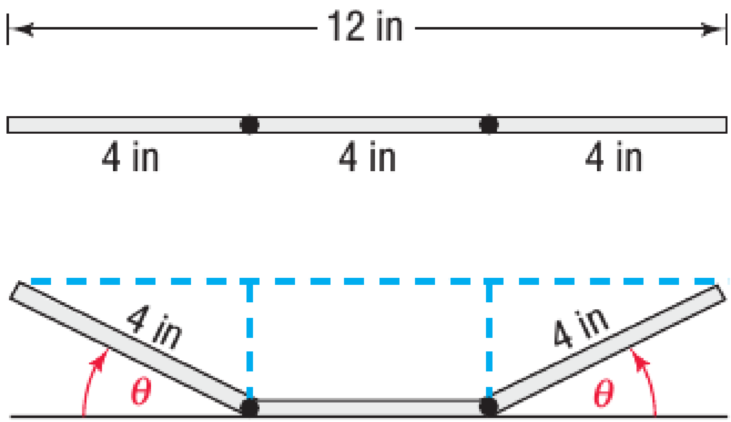


Problema 7.23. Encuentre el valor exacto de las seis funciones trigonométricas de $\frac{\pi}{3} = 60^o$.

Problema 7.24. Encuentre el valor exacto de las seis funciones trigonométricas de $\frac{\pi}{6} = 30^o$.

Problema 7.25. Un recolector de lluvia se construye a partir de planchas de aluminio de 12 pulgadas de ancho. Después de marcar 4 pulgadas a partir de cada extremo, está longitud se dobla a un ángulo θ. Encuentre el área transversal máxima del recolector.

θ (Radians)	θ (Degrees)	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$	$\csc\theta$	$\sec\theta$	$\cot\theta$
$\frac{\pi}{6}$	30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	1
$\frac{\pi}{3}$	60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{\sqrt{3}}{3}$



7.4 *Funciones trigonométricas inversas*

Funciones inversas

Sea $f : A \to B$ una función. Diremos que f es *invertible* si para cada $y \in B$ *siempre* corresponde un *único* $x \in A$, tal que

$$f(x) = y.$$

Si una función f es invertible, entonces existe una función $g : B \to A$ tal que $y = f(x)$ si y solo si $g(y) = x$. En otras palabras, podemos despejar x. Es usual denotar a tal función g por f^{-1} y llamarle *inversa de f*.

Propiedades del inversa

- $f^{-1}(f(p))$ para todo $p \in A$.
- $f\left(f^{-1}(p)\right)$ para todo $p \in B$.
- $\texttt{Dominio}(f) = \texttt{Rango}(f^{-1})$ y viceversa.
- La gráfica de f^{-1} es la reflexión a 45^o de la gráfica de f.

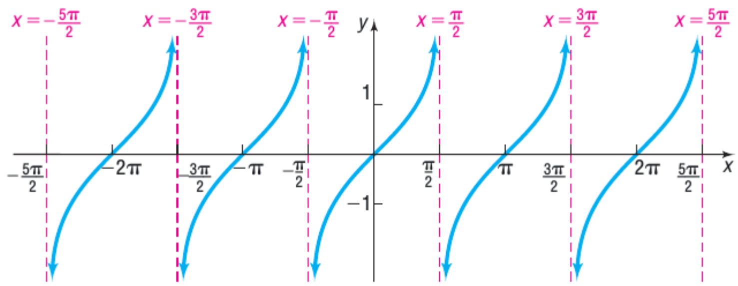


Figura 7.2: $y = \tan(x)$

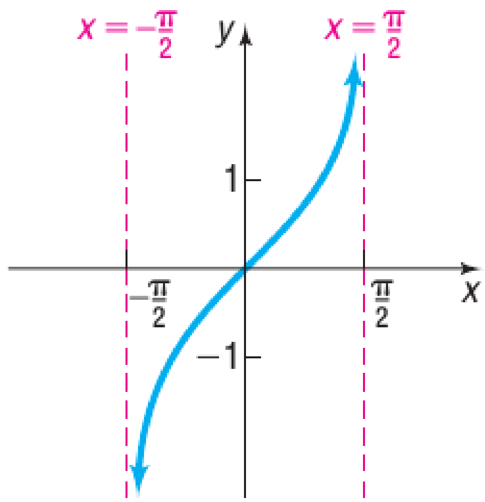
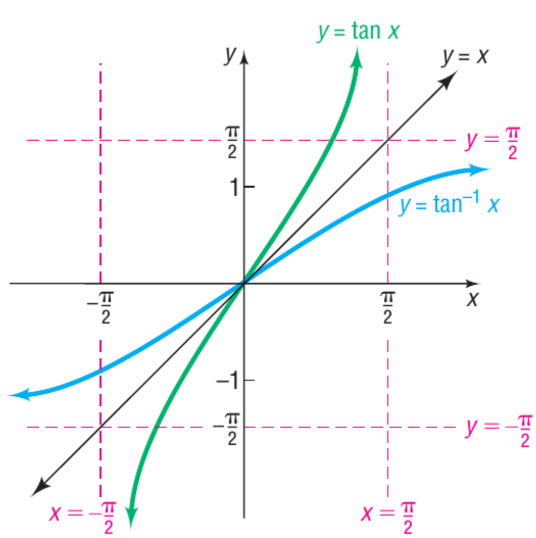


Figura 7.3: $y = \tan(x)$, $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$, $-\infty < x < \infty$



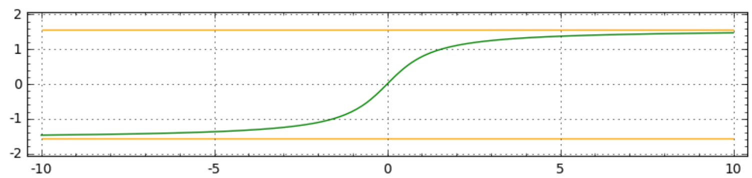


Figura 7.4: $y = \tan^{-1}(x)$

Tangente inversa

Tangente inversa

$$y = \tan^{-1}(x) \iff \begin{cases} x = \tan(y) \\ -\infty < x < \infty \\ -\dfrac{\pi}{2} < y < \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

Problema 7.26. Encuentre el valor exacto de

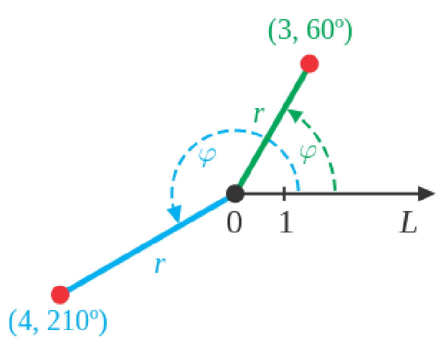
- $\tan^{-1} 1$
- $\tan(-\sqrt{3})$
- $\tan^{-1} 0$
- $\tan^{-1}\left(\tan \frac{4\pi}{5}\right)$

Vectores

Diremos que un vector $\langle x, y\rangle$ esta en su *forma polar (estándar)* $r \exp(\theta i)$ si

$$\begin{aligned} x =& r\cos(\theta) \\ y =& r\sin(\theta) \end{aligned}$$

con $-\pi < \theta \leq \pi$.



Problema 7.27. Escriba los siguientes vectores en su forma polar (estándar):

- $\langle 1, \sqrt{3} \rangle$
- $\langle 1, -\sqrt{3} \rangle$
- $\langle -1, \sqrt{3} \rangle$
- $\langle -1, -\sqrt{3} \rangle$

Optimización

Problema 7.28. Suponga que en una sala de cine, una pantalla tiene 28 pies de alto. Cuando un espectador se sienta, la parte inferior de la pantalla tiene una altura de 6 pies por encima de su nivel de visión. El ángulo formado al dibujar una linea desde la parte inferior de la pantalla a la parte superior se conoce como ángulo de visión. Encuentre el ángulo máximo de visión respecto a la distancia al muro que sostiene la pantalla.

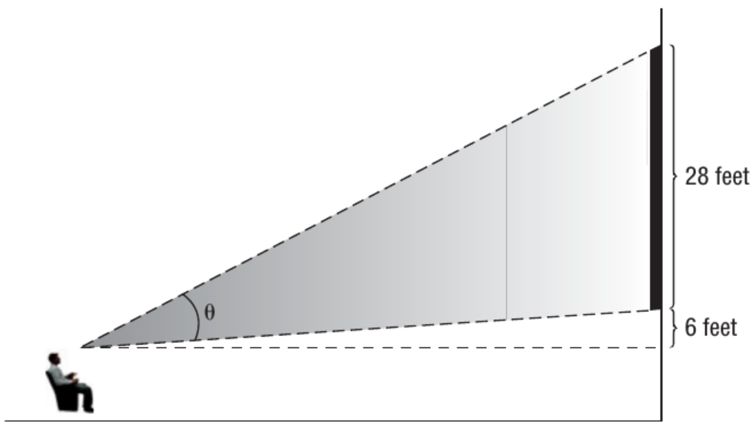


Figura 7.5: Ángulo de visión

Sugerencia

$$\frac{d}{dx}\left(\tan^{-1}\left(\frac{A}{x}\right)\right) = -\frac{A}{A^2 + x^2}$$

7.5 *Propiedades de funciones trigonométricas*

Problema 7.29.
- Grafique cada una de las seis funciones trigonométricas en `Sagemath`.
- Determine el dominio y el rango de cada una.

Definición. Una función se llama periódica si existe un número positivo p tal que siempre que θ esté en el dominio de f, entonces $\theta + p$ lo está y

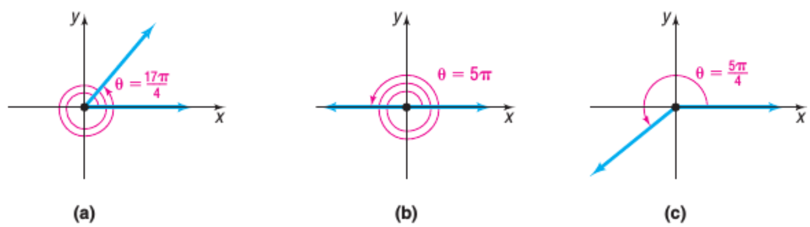
$$f(\theta + p) = f(\theta).$$

Si existe un número minimal p con tal propiedad, diremos que este es el *periodo fundamental* de f.

Problema 7.30. Determine el periodo respectivo de cada una de las seis funciones trigonométricas.

Problema 7.31. Encuentre el valor exacto de

- $\sin\left(\frac{17\pi}{4}\right)$
- $\cos\left(5\pi\right)$
- $\tan\left(\frac{5\pi}{4}\right)$



Problema 7.32. Determine el valor exacto de

- $\sin(405^o)$
- $\cot(390^o)$
- $\sec\left(\frac{17\pi}{4}\right)$

Identidades reciprocas

$$\csc(\theta) = \frac{1}{\sin(\theta)} \tag{7.6}$$

$$\sec(\theta) = \frac{1}{\cos(\theta)} \tag{7.7}$$

$$\cot(\theta) = \frac{1}{\tan(\theta)} \tag{7.8}$$

Problema 7.33. Dado

$$\sin(\theta) = \frac{\sqrt{5}}{5}$$
$$\cos(\theta) = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

encuentre el valor de las cuatro funciones trigonométricas restantes.

Problema 7.34. Dado

$$\sin(\theta) = -\frac{3}{5}$$
$$\cos(\theta) = \frac{4}{5}$$

encuentre el valor de las cuatro funciones trigonométricas restantes.

Identidades pitagóricas

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

$$\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$$

$$\cot^2\theta + 1 = \csc^2\theta$$

La función coseno es par:

$$\cos(-x) = \cos(x)$$

mientras que la función seno es impar:

$$\sin(-x) = -\sin(x).$$

Problema 7.35. Encuentre el valor exacto de cada expresión *sin usar calculadora*:

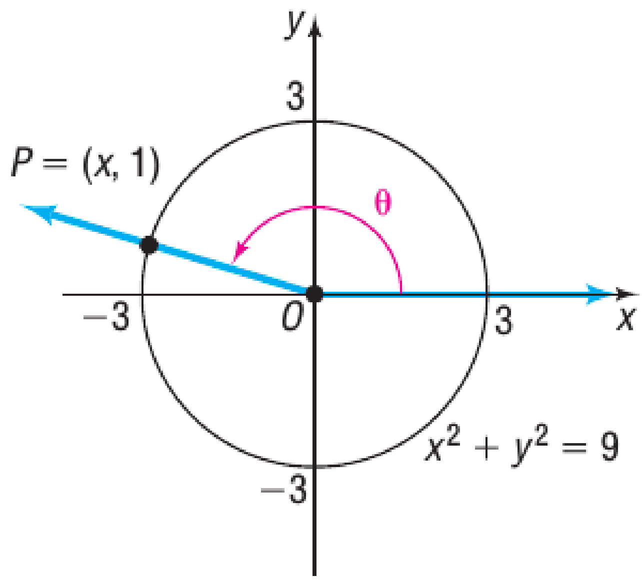
- $\tan(20^o) - \dfrac{\sin(20^o)}{\cos(20^o)}$
- $\sin^2\dfrac{\pi}{12} + \dfrac{1}{\sec^2\dfrac{\pi}{12}}$

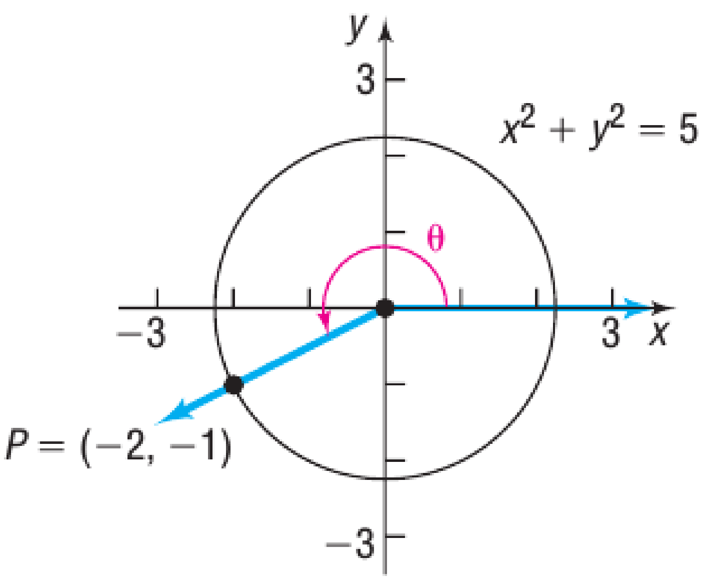
Problema 7.36. Encuentre el valor exacto de cada expresión *sin usar la calculadora*:

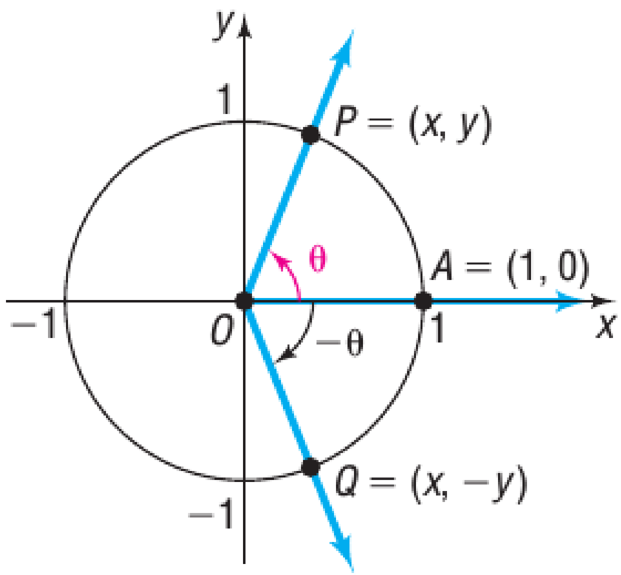
- $\sin(80^o)\csc(80^o)$
- $\cos(400^o)\sec(40^o)$
- $\dfrac{\sin(-20^o)}{\cos(380^o)} + \tan(200^o)$

Problema 7.37. Dado que $\sin\theta = \frac{1}{3}$ y $\cos\theta$, encuentre el valor exacto de cada una de las restantes cinco funciones trigonométricas.

Problema 7.38. Dado que $\tan\theta = \dfrac{1}{2}$ y $\sin\theta < 0$, encuentre el valor exacto de cada una de las restantes cinco funciones trigonométricas en θ.


y
3
P = (x, 1)
θ
−3
O
3
x
x² + y² = 9
−3


y
3
x² + y² = 5
θ
−3
3
x
P = (−2, −1)
−3



Problema 7.39. Encuentre el valor de cada una de las restantes funciones trigonométricas en θ conociendo que $\sin\theta = \frac{12}{13}$ y θ se encuentra en el segundo cuadrante.

Paridad e imparidad Por un lado, una función $f(\theta)$ es par si $f(-\theta) = f(\theta)$. Por otro lado, función $f(\theta)$ si $f(-\theta) = -f(\theta)$.

Proposición 7.3. *La función* cos *es par, pero la función* sin *es par.*

Problema 7.40. Determine si las funciones trigonométricas restantes son pares o impares.

Problema 7.41. Encuentre el valor exacto de

- $\sin(-45^o)$
- $\cos(-\pi)$
- $\cot\left(-\frac{3\pi}{2}\right)$
- $\tan\left(-\frac{37\pi}{4}\right)$

Problema 7.42.
- $\sin(-60^o)$
- $\csc(-30^o)$
- $\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)$
- $\sec(-\pi)$

7.6 *Suma y diferencias de ángulos*

Suma y diferencias para el coseno

$$\cos(s+t) = \cos(s)\cos(t) - \sin(s)\sin(t)$$
$$\cos(s-t) = \cos(s)\cos(t) + \sin(s)\sin(t)$$

Problema 7.43. Demuestre las siguientes identidades

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \sin(t)$$
$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \cos(t)$$

Suma y diferencias para el coseno

$$\sin(s+t) = \sin(s)\cos(t) + \cos(s)\sin(t)$$
$$\sin(s-t) = \sin(s)\cos(t) - \cos(s)\sin(t)$$

Problema 7.44. Establezca la siguiente identidad

$$\frac{\cos(s-t)}{\sin(s)\sin(t)} = \cot(s)\cot(t) + 1$$

Problema 7.45. Demuestre las siguientes identidades

1. $$\tan(s+t) = \frac{\tan s + \tan t}{1 - \tan s \tan t}$$
2. $$\tan(s-t) = \frac{\tan s - \tan t}{1 + \tan s \tan t}$$
3. $$\tan(s+\pi) = \tan(s)$$
4. $$\tan\left(s + \frac{\pi}{2}\right) = -\cot(s)$$

Problema 7.46. Demuestre las siguientes identidades

1. $$\sin\left(\frac{\pi}{2} + t\right) = \cos t$$
2. $$\frac{\sin(s+t)}{\sin(s)\cos(t)} = 1 + \cot(s)\tan(t)$$

8 *Bibliografía*

Cárdenas, H. (1973). *Álgebra superior*.