EVENTOS MUTUAMENTE EXCLUYENTES Y NO MUTUAMENTEEXCLUYENTES

En los experimentos relacionados con el azar, los cuales puede ser determinísticos (un solo resultado) o aleatorios(varios resultados), cuya técnica para mostrarlos es el espacio muestral (S), para los cuales utilizamos la PROBABILIDAD para definir con mayor precisión esos resultados. Cada punto del espacio muestral S, corresponde a un evento.

Estos eventos (puntos muestrales), los podemos organizar o clasificar de diferentes formas, dependiendo de la naturaleza y condiciones en que pueden ocurrir, así podemos determinar:

- Eventos simples, si solo corresponden a un resultado
- Eventos compuestos, corresponden a dos o más resultados
  - Eventos mutuamente excluyentes o disjuntos (considerando los eventos Ay B, se dice que ocurre A u ocurre B , es decir $A \cap B = \phi$, o evento imposible)
  - Eventos No mutuamente excluyentes o conjuntos (evento A y evento B ocurren simultáneamente, es decir $A \cap B \neq \phi$)
  - Eventos dependientes
  - Eventos independientes , caso especial de la probabilidad condicional, necesario conocer si ya ocurrió el evento A.

Cada uno están relacionados y obedecen a reglas o axiomas de la probabilidad, por lo cual denominamos probabilidad axiomática, a la probabilidad relacionada con este tipo de eventos.

Utilizamos tres leyes para el cálculo de la probabilidad de este tipo de eventos:

**Ley de la Adición o Aditiva**, para calcular la probabilidad de que ocurra el evento A u ocurra el evento B, A(UB); para su aplicación es necesario identificar si los eventos A y B son mutuamente excluyentes o no.

a) $P(AUB)=P(A) + P(B)$, para eventos mutuamente excluyentes
b) $P(AUB)=P(A) + P(B)- P(A \cap B)$, para eventos NO mutuamente excluyentes

**Ley de la Multiplicación o Multiplicativa**, para calcular la probabilidad de que ocurran los eventos A y B simultáneamente , es decir $A \cap B$ o A Y B, para su aplicación es necesario identificar si A y B son eventos independientes o dependientes.

a) $P(A \cap B)=P(A).\ P(B)$ , para eventos independientes
b) $P(A \cap B)=P(A).\ P(B)$, para eventos dependientes, por lo que es necesario conocer si ya ocurrió el evento A, es un caso especial de la probabilidad condicional ; $P(A \cap B)=P(A|B) / P(B)$ , $P(A \cap B)=P(B|A) / P(A)$

**Ley de la Diferencia**, para conocer la probabilidad de que ocurra el evento A y simultáneamente no ocurra el evento B.

a) $P(A-B)= P(A) - P(A \cap B) = P(A^c \cap B) = P(B \cap A^c)$

Adicionalmente a los Teoremas de la adición y la multiplicación, considerar los siguientes:

1.- La probabilidad de un evento es $0 \leq P(E)$

2.- Si $P(E) = 0$ , evento imposible; si $P(E)=1$ , evento posible

3.- La probabilidad de que no ocurra un evento E, conociendo la probabilidad que ocurra E,

$P(E^c)= 1- P(E)$

Ejemplo de eventos mutuamente excluyentes :

- Probabilidad de obtener sol, al lanzar una moneda al aire
- Lanzar dos dados, sean los eventos A=suma de los dados es 6, B= suma de los dados es 9; no se puede tener al mismo tiempo 6 o 9.
- En un grupo se tienen 50 alumnos, de los cuales 40 no adeudan ninguna materia, de los cuales 30 son mujeres y 10 son hombres; 10 adeudan cuando menos una materia, de los cuales 7 son hombres y 3 son mujeres. Si se elige un alumno, los siguientes eventos son mutuamente excluyentes:
    - Es un alumno regular, es un alumno irregular
    - Es un alumno mujer, es un alumno hombre

Ejemplos de eventos no mutuamente excluyentes:

- Un grupo de 40 estudiantes, 27 estudian inglés y 32 estudian francés. Los eventos estudiar inglés o estudiar francés no son mutuamente excluyentes , quiere decir que 19 estudiantes estudian inglés y francés
- Relacionado con el clima en una región del planeta, tenemos el evento A: que esté lloviendo , evento B, que haya sol, puede llover y salir el sol
- En un grupo se tienen 50 alumnos, de los cuales 40 no adeudan ninguna materia, de los cuales 30 son mujeres y 10 son hombres; 10 adeudan cuando menos una materia, de los cuales 7 son hombres y 3 son mujeres. Si se elige un alumno, los siguientes eventos son mutuamente excluyentes:
    - Es hombre que no adeuda ninguna materia
    - Es una mujer que adeuda al menos una materia
- En una encuesta de 300 personas, 130 manifestaron leer el periódico A, 150 manifestaron leer el B y 70 leer ambos. Evento no mutuamente excluyente, que lean el periódico A o lean el B.

Ejemplos de solución:

1.-Considere los sucesos A y B. Supóngase que $P(A)= 0,4$ ; $P(B)= p$ y $P(AUB)= 0,7$ . ¿Para que valor de p, los eventos A y B son mutuamente excluyentes? ¿Para que valor de p, los eventos A y B son independientes?

Solución:

Para que los sucesos A y B sean mutuamente excluyentes entonces P(AB) = 0
P(AUB) = P(A) + P(B) - P(A∩B) ..... probabilidad de la unión.
Sustituyendo los valores tenemos:
0.7 = 0.4 + P - 0 ;   P = 0.3
Para que los sucesos A y B sean mutuamente excluyentes P = 0.3.

Para que los sucesos Ay B sean independientes entonces P(A∩B) = P(A)●P(B), condición de eventos independientes.
Sustituyendo los valores tenemos: P(A∩B) = 0.4*P ;  P = P(A∩B) / 0.4
La relación anterior se cumple con la única condición que P(A∩B) ≠ 0 (no excluyentes).
Para que los sucesos A y B sean independientes P = P(A∩B) / 0.4 con P(A∩B) ≠ 0

2.- En el caso de los eventos E y F, tenemos que E=(1,5), F=(4,6,1) y la intersección de los dos eventos es E∩F={1}, de donde:
P{E}=2/6=1/3
P{F}=3/6=1/2
P(E∩F)=1/6
P{E}●P{F}=(1/3)(1/2)=1/6= P(E∩F)

Así, los eventos E y F son independientes ya que el producto de sus probabilidades es igual a la probabilidad de su intersección.

Definición: dos eventos E y F son independientes cuando P(E)●P(F)=P(E∩F)

3.- Supongase que en una caja cerrada se tienen 3 canicas rojas, 3 canicas azules y 4 canicas verdes. Se saca una sola canica ¿cual es la posibilidad de sacar una canica roja?

Canicas rojas: 3
Canicas azules: 3
Canicas verdes: 4
Total de canicas: 3 + 3 + 4 = 10

P (roja) = 3 / ( 3 + 3 + 4) = 3/10 = 0,3 = 30%

Existe un 30% de posiblidad de sacar una canica roja

4.- En una baraja de 52 cartas se toma una carta al azar luego se regresa (con reemplazo) y se toma otra.
Cual es la probabilidad de A la primera sea de diamantes, y B la segunda sea de tréboles.

P(AyB)=P(A) ● P(B) =(13/52) ● (13/52)= =169/2704

5.- En la urna A tenemos 7 bolas blancas y 13 negros y en la urna B, 12 blancas y 8 negras.

¿Cual es la probabilidad de que se extraiga una bola blanca de cada una?

P(AyB)=P(AUB)=P(A)●P(B)=(7/20)●(12/20)=84/400=21/100

6.- Dos sucesos A y B dependientes y compatibles:
En una baraja de 52 cartas, sacar dos cartas y que la primera sea el AS de trébol y la segunda un trébol. Son compatibles porque tienen un suceso en común: el trébol. Son dependientes, porque al realizarse la primera extracción (sacar el AS de trébol), se modifica la segunda, ya que no quedan 13 tréboles sino 12.

La probabilidad sería: (1/52) ● (12/51)

7.- Si un jugador apuesta en la casilla «Field» de la mesa de craps, entonces puede ganar el premio si en el lanzamiento de los dos dados la sumatoria de los puntos de ambos dados es 2 ó 3 ó 4 ó 9 ó 10 ó 11 ó 12, resultados que son mutuamente excluyentes entre sí porque los dos dados en un solo lanzamiento sólo suman un valor determinado y no suman dos o más valores a la vez.

Si identificamos a los siete resultados de los dos dados que favorecen al jugador (2, 3, 4, 9, 10, 11, 12) con una letra específica respectivamente (A, B, C, D, E, F, G), entonces la probabilidad de ganar por apostarle a la casilla Field de la mesa de craps se calcula como P(A,B,C,D,E,F,G). En este caso hay que tener en cuenta que la probabilidad de obtener un puntaje 2 en los dos dados es 1/36 (evento A), la probabilidad de obtener un puntaje 3 en los dos dados es de 2/36 (evento B), la probabilidad de obtener un puntaje 4 en los dos dados es de 3/36 (evento C), la probabilidad de obtener un puntaje 9 en los dos dados es de 4/36 (evento D), la probabilidad de obtener un puntaje 10 en los dos dados es de 3/36 (evento E), la probabilidad de obtener un puntaje 11 en los dos dados es de 2/36 (evento F), y la probabilidad de obtener un puntaje 12 en los dos dados es de 1/36 (evento G), por tanto la solución es la siguiente:

P(A,B,C,D,E,F,G) = P(A)+P(B)+P(C)+P(D)+P(E)+P(F)+P(G) = 1/36+2/36+3/36+4/36+3/36+2/36+1/36 = 16/36,
o lo que es lo mismo, el jugador al apostarle a la casilla Field en la mesa de craps tiene a su favor 16 combinaciones entre los puntos de los dos dados sobre 36 combinaciones posibles que pueden aparecer en un solo lanzamiento.

8.- Si un solo dado es lanzado al aire y el jugador puede ganar si obtiene el punto 1 o si obtiene el punto 6, entonces en tal caso estamos hablando de dos eventos que son «mutuamente excluyentes entre sí», porque en un solo lanzamiento del dado no pueden aparecer los dos eventos al mismo tiempo (o cae 1, o cae 6, o cae cualquier otro resultado del dado). Por consiguiente, si el jugador quiere calcular la probabilidad de ganar en el lanzamiento del dado puede asumir que el evento A es la aparición del punto 1 del dado que tiene una probabilidad de ocurrencia de 1/6, mientras que el evento B es la aparición del punto 6 del dado que tiene una probabilidad de ocurrencia de 1/6, y por lo tanto la probabilidad de ganar se calcula mediante el modelo establecido:
P(A,B) = P(A)+P(B) = 1/6+1/6 = 2/6, o lo que es lo mismo, el jugador para ganar en el lanzamiento del dado, tiene 2 eventos a su favor sobre 6 eventos posibles.

9.- Se tiene una urna con 50 papeles de colores 15 rojos, 5 morados, 9 verdes, 11 naranjas y 10 azules. Cual es la probabilidad de:

A sale un papel azul o B sale un papel rojo: P(AoB)=P(AUB)=P(A)+P(B)

P(AUB)=P(sale un azul)+P(sale 1 rojo)= 10/50 + 15/50=25/50=1/2

10.- Supóngase que en una caja cerrada se tienen 3 canicas rojas, 3 canicas azules y 4 canicas verdes. Se saca una sola canica ¿cual es la posibilidad de sacar una canica roja?

Canicas rojas: 3
Canicas azules: 3
Canicas verdes: 4
Total de canicas: 3 + 3 + 4 = 10

P (roja) = 3 / ( 3 + 3 + 4) = 3/10 = 0,3 = 30%

Existe un 30% de posiblidad de sacar una canica roja

11.- Se tira un dado, calcular la probabilidad de:
A caen 3 puntos o menos o
B caen 5 puntos o más
Como son Mutuamente excluyentes A∩B=0 , o A y B=0

P(AoB)=P(AUB)=P(A)+P(B) =P(salen 3 o menos)+P(salen 5 o mas) = 3/6 + 2/6 = 5/6

12.- Eventos de un espacio muestral son excluyentes si su intersección es el vacío y no son excluyentes si su intersección es distinta del vacío, es decir, si tienen elementos en común.

Por ejemplo, sea el experimento: se lanza un dado.
Definamos el evento E1 como E1=Sale el número dos. Y el evento E2 como E2=Sale un numero par. Por lo tanto, E1={2} y E2={2,4,6}

Como E1 ∩ E2 = { 2 } que es distinto del conjunto vació concluimos que E1 y E2 son eventos NO excluyentes.
Si definimos E3=Sale un numero impar, entonces E2 ∩ E3 = el conjunto vacio, pues no hay ningún número que pueda estar en E1 y en E3 (i.e. que pueda ser par e impar al mismo tiempo). Por lo tanto E2 y E3 son eventos excluyentes.

Plantea más ejemplos de experimentos, y defines eventos en el espacio muestral tales que su intersección sea no vacía.

13.- Se realiza el lanzamiento de tres monedas, el espacio muestral es S={AAA, AAS,ASS,ASA,SAA,SAS,SSA,SSS}, consideremos los eventos:
a) A primer lanzamiento fue águila
b) B segundo lanzamiento fue águila
c) C dos primeros lanzamientos son águilas

Solución:
Las probabilidades:
$P(A)= 4/8 = ½$ ; $P(B)=4/8 = ½$ ; $P(C)= 2/8 = ¼$

Del espacio muestral,la probabilidad de AyB, AyC, ByC se presente:
$P(A\cap B)=2/8=1/4$ ; $P(A\cap C)=2/8=1/4$; $P(B\cap C)=2/8=1/4$

Por otro lado, de acuerdo a la regla de la Multiplicación:

Si , $P(A\cap B)= P(A) \bullet P(B)= 1/2\bullet 1/2=1/4$ , por lo tanto se comprueba que A y B son eventos independientes.

Si , $P(A\cap C)= P(A) \bullet P(C)= 1/2\bullet 1/4=1/8$ , por lo tanto se comprueba que A y C NO son eventos independientes

Si , $P(B\cap C)= P(B) \bullet P(C)= 1/2\bullet 1/4=1/8$ , por lo tanto se comprueba que B y C NO son eventos independientes

14.- En un grupo de 10 estudiantes universitarios hay 3 que toman un curso de inglés, 4 que toman un curso de matemáticas y 2 que toman ambos cursos.
a).-¿Cual es la probabilidad de que al seleccionar uno de estos estudiantes al azar, el mismo tome el curso de inglés o el curso de matemáticas? ¿Que tipo de eventos representan?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que el estudiante seleccionado sea uno que tome el curso de inglés y el curso de matemáticas? ¿Que tipo de eventos representan?.

Solución:
a)De los 10 estudiantes hay 2 que toman ambos cursos. Por lo tanto, cuando nos dicen que 3 estudiantes toman el curso de inglés son éstos 2 y otro más. Además, cuando nos dicen que 4 estudiantes toman un curso de matemáticas son éstos 2 y otros 2 más. Por lo tanto, el número total de estudiantes que toman el curso de inglés o el curso de matemáticas son los 2 que toman ambos cursos, el otro que toma inglés y los otros 2 que toman matemáticas.

Por lo tanto, P(IUM)=P (inglés o matemáticas) = (2/10)+(1/10)+(2/10=5/10= 0.5, eventos no excluyentes

b) De los 10 estudiantes hay 2 que toman ambos cursos.
Por lo tanto, $P(I\cap M)= 2/10=0.2$ ,evento no excluyente

15.-En una encuesta de 300 personas, 130 manifestaron leer el periódico A, 150 manifestaron leer el B y 70 leer ambos. ¿Cuál es la probabilidad de que una persona lea el periódico A? ¿Cuál es la probabilidad de que una persona lea el periódico B? ¿Cuál es la probabilidad de uqe lea ambos periódicos? ¿Cuál es la probabilidad de que lea el periódico A o el periódico B?
Solución:
Que lean el periódico A.

P(A)= 130/300 =0.433

Que lean el periódico B.

P(B)=150/300=0.5

Que lean ambos periódicos.

P(AyB)= P(A∩B)=70/300=0.233

Que lea el periódico A o el periódico B (no son mutuamente excluyentes):

P(AoB)= P(AUB) = P(A) + P(B) – P(A∩B)= 0.433 + 0.5 -0.233 = 0.7

16.-En un grupo de 50 estudiantes, se sabe que 35 estudiantes estudian inglés y 42 francés . Sí se elige a un estudiante al azar, A)¿Cuál es la probabilidad de que solo estudie inglés? B) ¿Cuál es la probabilidad que estudie ambos? C)¿Cuál es la probabilidad que estudie inglés o francés? D) ¿Cuál es la probabilidad que estudie francés?

Solución:

A).-Estudiantes que estudian inglés y francés = (35+42)-50 = 27

Estudiantes que estudian solo inglés= 35-27=8

P(estudie inglés)=P(I)= 8/50

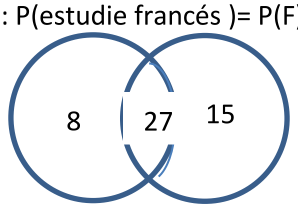
B).-Número de estudiantes que estudian ambos idiomas:

P(I ∩ F )= 27/50

C).- Que estudie inglés o francés

P(I o F)= 35/50 + 42/50 – 27/50 = 1

D).- Que estudie solo francés: P(estudie francés )= P(F)=(27-8)/15 = 15/50




17.-Una compañía le administra un examen a un grupo de 40 de sus empleados, que aspiran a cierta posición, para cualificarlos. La siguiente tabla resume los resultados divididos por género:

| | MASCULINO (M) | FEMENINO (F) |
|---|---|---|
| APROBÓ | 7 | 2 |
| FRACASÓ | 18 | 13 |

Si se selecciona uno de los empleados al azar, determinar la probabilidad de :

a) sea masculino o aprobó el examen

b) sea femenino o fracasó

Solución:

Son eventos no mutuamente excluyentes , por lo tanto, utilizamps la Regla de la Adición:

a) P(M o aprobó) = P(M U aprobó)= P (M) + P(aprobó) – P(M y aprobó) = 25/40 + 9/40 – 7/40 = 27/ 40
b) b).- P(F o fracasó) = P( F U fracasó)= P(F) + P(fracasó) – P(F y fracasó) = 15/40 + 31/40 - 13/40= 33 /40

18.- En el experimento de lanzar un dado al azar, el espacio muestral es S = {1, 2, 3, 4, 5, 6}. Si A es el evento de obtener un número par y B es el evento de obtener un número impar, entonces A y B son eventos mutuamente excluyentes pues no pueden ocurrir simultáneamente ( si uno ocurre el otro no puede ocurrir).

La regla de la suma ya discutida establece que $P(AoB)= P(AUB) = P(A) + P(B) – P(A\cap B)$, A y B mutuamente excluyentes por lo que $P(A\cap B)=0$
$P(AUB) = P(A) + P(B)= 3/6 + 3/6= 1$

Un evento cualquiera A y su $A^c$ son mutuamente excluyentes como en este caso, por lo tanto:
$P(A) + P(A^c) = 1$

19.- Una compañía que produce radios sabe que el 2.5% de los radios que produce salen defectuosos. Si seleccionamos al azar uno de estos radios, ¿cuál es la probabilidad de que el radio no esté defectuoso?

Solución:

Sea D el evento de que salga defectuoso. Notemos que su complemento D será que no salga defectuoso.

Como 2.5% = 0.025, entonces $P(D^c) =1 – P(D)= 1- 0.025= 0.975$