# Pourcentage, taux de variation

## A. Appliquer un pourcentage

Un pourcentage d'une quantité, c'est une fraction, exprimée en centièmes, de cette quantité.

$\frac{p}{100}$ se note $p$ % qui se lit « $p$ pour cent ».

Pour appliquer un pourcentage à une quantité, on multiplie la quantité par le pourcentage.

**Exemple** 45 % de 53 = $\frac{45}{100} \times 53 = 23{,}85$.

## B. Calculer un pourcentage

Le pourcentage d'une partie d'un ensemble est le rapport de cette partie à l'ensemble total exprimé sous la forme d'une fraction exprimée en centièmes.

**Exemple** Il y a 18 filles dans une classe de 30 élèves, soit $\frac{18}{30} = 0{,}6 = \frac{60}{100} = 60$ %.

## C. Augmentation, réduction en pourcentage

- Pour augmenter une valeur de $a$ %, on la multiplie par $1 + a$ %.
- Pour diminuer une valeur de $a$ %, on la multiplie par $1 - a$ %.

**Exemple** La France comptait 53 880 000 habitants en 1980. Sa population a augmenté de 5 % entre 1980 et 1990. On multiplie la population par $1 + \frac{5}{100} = 1{,}05$.

Il y avait donc 53 880 000 × 1,05 = 56 574 000 habitants en 1990.

## D. Taux de variation

Lorsqu'une quantité passe d'une valeur initiale à une valeur finale, le taux de variation $t$ entre ces deux valeurs est le quotient : $t = \frac{\text{valeur finale} - \text{valeur initiale}}{\text{valeur initiale}}$.

**Exemple** La France comptait 59 049 000 habitants en 2000 et 64 300 000 habitants en 2015. Le taux de variation a été de $t = \frac{64\,300\,000 - 59\,049\,000}{59\,049\,000} = 0{,}0889 = 8{,}89$ %

## EXERCICES D'APPLICATION

**1** Une classe comporte 30 élèves dont 12,5 % suivent la spécialité mathématiques. Combien d'élèves suivent cette spécialité ?

**2** Un questionnaire contient 50 questions dont 24 sont des QCM. Quel est le pourcentage de QCM dans le questionnaire ?

**3** Un article a vu son prix passer de 32 euros à 42 euros. Quel a été le taux de variation du prix ?

**4** Le prix d'un sac à dos valant initialement 45 euros a baissé de 30 %. Quel est son nouveau prix ?

**5**

Dans chaque cas, indiquer le taux d'évolution en pourcentage:

**a.** Un prix passe de 120€ à 144€.
**b.** Un stock de fruit baisse de 250kg à 180kg.
**c.** Un village de 300 habitants voit partir 60 habitants.

# Proportionnalité

**Définition**

Deux grandeurs sont proportionnelles lorsque les valeurs de l'une sont obtenues en multipliant par un même nombre non nul, appelé le **coefficient de proportionnalité**, les valeurs de l'autre.

**Exemple**

Le prix payé à la station-service est proportionnel au volume d'essence mis dans le réservoir du véhicule. Le coefficient de proportionnalité est le prix par litre.

**Propriété**

On peut toujours représenter une situation de proportionnalité à l'aide d'un tableau de proportionnalité.

**Exemple**

Chez le primeur, 5 kg de pommes coûtent 6 €. On peut représenter cette situation à l'aide d'un tableau.

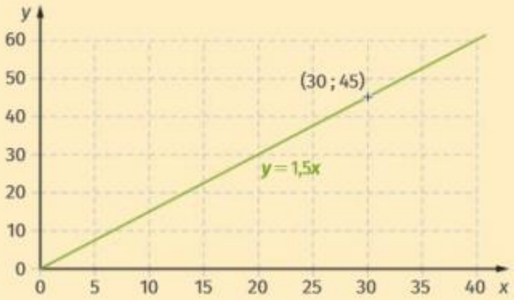
| | | |
|---|---|---|
| Masse (kg) | 5 | 15 |
| Prix (euros) | 6 | 18 |

**Propriété**

Une situation de proportionnalité est modélisée par une fonction linéaire. Dans un repère, celle-ci est représentée par une droite qui passe par l'origine. Le coefficient de proportionnalité correspond alors au coefficient directeur de cette droite.

**Exemple**

Pour un prix de 1,50 € par litre, on peut lier le volume d'essence ($x$) au prix payé ($y$) dans le graphique suivant :




**Définition**

Un pourcentage traduit une proportion. C'est une fraction dont le dénominateur vaut 100. Déterminer un pourcentage revient à calculer cette proportion.

**Exemple**

Dans une classe de 25 élèves, il y a 7 filles. Pour déterminer le pourcentage de filles, on peut remplir un tableau de proportionnalité. On trouve 28 % :

× 4

| | | |
|---|---|---|
| Numérateur | 7 | $x$ |
| Dénominateur | 25 | 100 |

× 4

**1 Identifier les grandeurs proportionnelles.**

a. La longueur du côté d'un carré et son périmètre.

b. Le nombre de sommets d'un polygone et la somme de ses angles.

c. La longueur du côté d'un carré et son aire.

d. Le nombre de lettres et le nombre de voyelles dans un mot.

**2 Compléter les tableaux de proportionnalité suivants :**

a. × 7

| | | | |
|---|---|---|---|
| 3 | 7 | 10 | 13 |
| | | | |

b. × 0,5

| | | | |
|---|---|---|---|
| 5 | 9 | 2 | 6 |
| | | | |

c. $\times \frac{2}{5}$

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 3,5 | 7 | 2,5 |
| | | | |

d. × ...

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 10 | 6 |
| | | 6 | |

e. × ...

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 5 | | 20 |
| 8 | | 12 | 16 |

f. × ...

| | | | |
|---|---|---|---|
| 2 | 5,5 | 7,5 | |
| | 0,55 | | 101,5 |

**3 Dimension d'une cellule.**

Une cellule mesure 4,5 cm sur une photographie. L'échelle est représentée à l'aide d'un trait de 1,0 cm de longueur sur lequel est indiqué : 10 µm.
Calculer la taille réelle de la cellule.

**4 La classe de $2^{de}$ 4 du lycée Victor-Duruy est composée de 38 élèves, dont 16 filles.**

Quel est le pourcentage de filles en $2^{de}$ 4 ?

**5 Le laiton jaune est un alliage métallique de cuivre et de zinc. Un morceau de 650 g de laiton jaune contient 403 g de cuivre.**

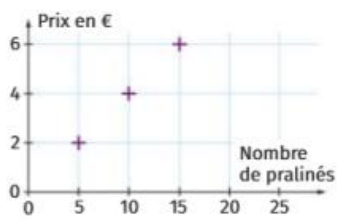
a. Quel est le pourcentage de cuivre contenu dans ce morceau de laiton jaune ?

b. Quel est le pourcentage de zinc contenu dans ce morceau de laiton jaune ?

**6 Cartographie.**

Sur une carte d'échelle $\frac{1}{200\,000}$, la distance en ligne droite entre la maison d'Abdel et son collège est de 1,25 cm. Déterminer la distance réelle, en ligne droite, entre ces deux endroits.

**7 Quel est le prix de 13 pralinés ?**




**Numérique**

Retrouvez plus d'exercices sur LLS.fr/ESTP257

# Puissances de dix

## A. La notation scientifique

Un nombre en notation scientifique s'écrit sous la forme :

$$a \times 10^n, \text{ avec } 1 \leq a < 10$$

- **Exemples** 1013 hPa = $1{,}013 \times 10^3$ hPa ; 0,022 mW = $2{,}2 \times 10^{-2}$ mW.

## B. L'ordre de grandeur

L'ordre de grandeur est la puissance de 10 la plus proche du nombre étudié.

On utilise la notation scientifique : $a \times 10^n$

$1 \leqslant a < 5$ : l'ordre de grandeur est $10^n$

$a \geqslant 5$ : l'ordre de grandeur est $10^{n+1}$

**Exemples**

– Flux radiatif solaire total reçu sur Terre : $P = 1{,}7 \times 10^{17}$ W ; $1{,}7 < 5$ donc $P \approx 1 \times 10^{17}$ soit $P \approx 10^{17}$ W.

– Résistance d'un conducteur électrique : $r = 7{,}5 \times 10^{-2}\ \Omega$ ; $7{,}5 > 5$ donc $r \approx 10 \times 10^{-2}$ soit $r \approx 10^{-1}\ \Omega$.

## C. Les opérations avec les puissances de 10

$10^n \times 10^p = 10^{n+p}$ $\qquad (10^n)^p = 10^{n \times p}$ $\qquad \dfrac{1}{10^n} = 10^{-n}$ $\qquad \dfrac{10^n}{10^p} = 10^{n-p}$

**Exemples**

– La durée de séjour du carbone $\Delta t$ dans un réservoir est donnée par la relation $\Delta t = \dfrac{\text{masse du réservoir } m}{\text{flux d'entrée P}}$.

Lorsque $m = 1{,}0$ Mt et $P = 4{,}1 \times 10^5$ t·an$^{-1}$ : $\Delta t = \dfrac{1{,}0 \times 10^6}{4{,}1 \times 10^5} = \dfrac{1{,}0}{4{,}1} \times 10^{6-5}$ soit $\Delta t = 2{,}4$ années.

– La surface d'une sphère est donnée par la relation : $S = 4\pi R^2$ où R est le rayon de la sphère. Le rayon de la Terre est $R = 6{,}4 \times 10^3$ km. La surface de la Terre est $S = 4\pi \times (6{,}4 \times 10^3)^2$ ou $S = 4\pi \times (6{,}4)^2 \times 10^{3 \times 2}$ soit $S = 5{,}1 \times 10^8$ km$^2$.

## D. Les opérations avec les puissances de 10 à la calculatrice

La touche EE sur Texas Instrument™ ou la touche $\times 10^x$ sur Casio ne conviennent qu'aux puissances entières de 10. Elles sont parfaitement adaptées aux calculs en notation scientifique.

**Exemples**

– $10^3$ sera noté 1EE 3 ou 1 $\times 10^x$ 3.

– $6{,}67 \times 10^{-11}$ sera noté 6,67 EE (–) 11 ou 6,67 $\times 10^x$ (–) 11.

## EXERCICES D'APPLICATION

**1** Calculer l'énergie totale reçue sur Terre en une année. Exprimer le résultat en notation scientifique et en donner un ordre de grandeur.

**Données**

- L'énergie E en fonction de la puissance P et de la durée $\Delta t$ est donnée par la relation :

$$E = P \times \Delta t,$$

avec E en joules (J), P en watts (W) et $t$ en secondes (s).

- Puissance solaire totale reçue sur Terre : $P = 1{,}7 \times 10^{17}$ W.

**2** Calculer l'intensité d'un courant I qui parcourt une ligne électrique. Exprimer I en notation scientifique puis en donner un ordre de grandeur.

**Données**

- La puissance P en fonction de l'intensité du courant I et de la tension U est donnée par la relation $P = U \times I$ avec P en watts (W), U en volts (V) et I en ampères (A).
- P = 500 MW, U = 20 kV.

**3** Une image numérique a une résolution de 4 000 × 3 000 pixels.
Calculer le nombre de pixels N que comporte l'image. Exprimer N en notation scientifique et en donner un ordre de grandeur.

# Conversions d’unités

- La méthode la plus rapide est d’utiliser les puissances de 10.

**Exemples**

– Rayon terrestre : 6 370 **k**m = 6,370 × $10^3$ **k**m = 6,370 × $10^3$ × $10^3$ m = 6,370 × $10^6$ m.

– Longueur d’onde d’une radiation UV : 270 **n**m = 2,70 × $10^2$ nm = 2,70 × $10^2$ × $10^{-9}$ m = 2,70 × $10^{-7}$ m.

– Surface de la Mer de glace : 40 **k**m² = 4,0 × 10 **k**m² = 4,0 × 10 × $(10^3)^2$ m² = 4,0 × $10^7$ m².

– Capacité crânienne d’*Homo sapiens* : 1 500 **c**m³ = 1,5 × $10^3$ cm³ = 1,5 × $10^3$ × $(10^{-2})^3$ m³ = 1,5 × $10^{-3}$ m³.

- Des correspondances existent entre les contenances et les volumes :

**1 mL = 1 cm³** et **1 L = 1 dm³**

**Exemple** Contenance d’une pile microbienne à plantes : 1 000 L.

$$1\,000 \text{ L} = 1\,000 \text{ dm}^3 = 10^3 \times (10^{-1})^3 \text{ m}^3 = 1 \text{ m}^3.$$

- Les valeurs peuvent être placées dans un tableau de conversions.

**Exemples**

Retrouvons les résultats des exemples précédents :

| Gm | | | Mm | | | km | | | m | | | mm | | | µm | | | nm |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | 6 | 3 | 7 | 0 | 0 | 0 | 0 | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 2 | 7 | 0 |

On lit :

– 6 370 km = 6 370 000 m soit 6,370 × $10^6$ m

– 270 nm = 0,000 000 270 m soit 2,70 × $10^{-7}$ m

| km² | | hm² | | dam² | | m² | | dm² | | cm² | | mm² | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 4 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | | | | | | |

On lit 40 km² = 40 000 000 m² soit 4,0 × $10^7$m²

| km³ | | | hm³ | | | dam³ | | | m³ | | | dm³ | | | cm³ | | | mm³ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | | | | | | | L | | | mL | | | |
| | | | | | | | | | | | 0 | 0 | 0 | 1 | 5 | 0 | 0 | | | |
| | | | | | | | | | | | 1 | 0 | 0 | 0 | | | | | | |

– On lit 1 500 cm³ soit 0,0015 m³.

– À l’aide des contenances indiquées en rose dans le tableau on retrouve également : 1 000 L = 1 000 dm³ ou encore 1 000 L = 1 m³.

**Définition**

Système international (SI) :

| **Grandeur** | Longueur | Masse | Temps | Courant électrique | Température | Quantité de matière | Intensité lumineuse |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Unité** | mètre (m) | kilogramme (kg) | seconde (s) | ampère (A) | kelvin (K) | mole (mol) | candela (cd) |

Les **multiples** sont : déca- ($10^1$, noté da-), hecto- ($10^2$, noté h-), kilo- ($10^3$, noté k-), méga- ($10^6$, noté M-), giga- ($10^9$, noté G-), téra- ($10^{12}$, noté T-), etc.

Les **sous-multiples** sont : déci- ($10^{-1}$, noté d-), centi- ($10^{-2}$, noté c-), milli- ($10^{-3}$, noté m-), micro- ($10^{-6}$, noté µ-), nano- ($10^{-9}$, noté n-), pico- ($10^{-12}$, noté p-), etc.

| **Multiples** | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Tm | | | Gm | | | Mm | | | km | hm | dam | m |
| $10^{12}$ m | | | $10^9$ m | | | $10^6$ m | | | $10^3$ m | $10^2$ m | $10^1$ m | $10^0$ m |
| | | | | | | | | | | | | |

| **Sous-multiples** | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| m | dm | cm | mm | | | µm | | | nm | | | pm |
| $10^0$ m | $10^{-1}$ m | $10^{-2}$ m | $10^{-3}$ m | | | $10^{-6}$ m | | | $10^{-9}$ m | | | $10^{-12}$ m |
| | | | | | | | | | | | | |

# Exercices : puissance de dix et conversions d'unités

**1 Opérations sur les puissances.**

Écrire sous la forme d'une puissance de 10 :

**a.** $10^7 \times 10^{-3}$ **b.** $10^{-5} \times 10^{-7}$

**2 Opérations sur les puissances.**

Écrire sous la forme d'une puissance de 10 :

**a.** $10^{23} \times 10^{-9} \times 10^5$ **b.** $10^{-5} \times \frac{10^{-5}}{10^{-7}}$

**3 Écrire en notation scientifique les nombres suivants.**

**a.** 232 **b.** 75,7

**c.** 0,958 **d.** 100 000

**4 Notation scientifique.**

Écrire en notation scientifique :

**a.** 4 580 000 **b.** 0,000 027

**5 Donner l'écriture scientifique des nombres suivants.**

**a.** 437 850 000 000 **b.** 0,000 004 16

**c.** 1593,28 **d.** 0,000 000 001 81

**e.** $17{,}4 \times 10^9$ **f.** $9{,}8 \times 100^{11}$

**g.** 56,753 219 **h.** $0{,}678\,42 \times 10^6$

**6 Écrire en notation scientifique les nombres suivants.**

**a.** 87 000 000 **b.** 0,000 45

**c.** $291 \times 10^{-7}$ **d.** $0{,}052 \times 10^5$

**e.** $89\,789 \times 10^9$ **f.** $3\,000\,006 \times 10^{-6}$

**7 Calculs scientifiques.**

Donner le résultat en notation scientifique :

**a.** $4{,}58 \times 10^2 \times 6{,}02 \times 10^{23}$ **b.** $7{,}81 \times 10^{-12} \times 3 \times 10^{-2}$

**8 Calculs scientifiques.**

Le Soleil se situe à 150 millions de km de la Terre et la vitesse de la lumière est estimée à 300 000 $km \cdot s^{-1}$.
Combien de temps (en seconde) la lumière du Soleil met-elle pour atteindre la Terre ? On donnera la réponse en notation scientifique.

**9 Calculs scientifiques.**

La Terre a une masse de $5{,}972 \times 10^{24}$ kg et le Soleil de $1{,}989 \times 10^{30}$ kg.
Comparer ces deux grandeurs en utilisant la notation scientifique.

**10 Conversions.**

Convertir en mètres (m) :

**a.** 191 000 000 cm **b.** $1{,}8 \times 10^{-2}$ mm

**c.** 7632 km **d.** $15{,}67 \times 10^3$ Gm

**11 Conversions.**

Convertir en joules (J) et donner la réponse en écriture scientifique :

**a.** 2 110 000 000 mJ **b.** $580 \times 10^9$ TJ

**12 Conversions.**

Convertir en watt-heure (W·h) :

**a.** 3,5 TW·h **b.** 1 270 kW·h

# Intervalle de confiance

Rappels de seconde :

- La fréquence $f$ d'apparition d'un caractère dans un échantillon d'une population dépend de l'échantillon. La théorie des probabilités permet de quantifier la confiance que l'on peut accorder à l'estimation de la proportion $p$ d'un caractère.
- Si l'on procède à un grand nombre de tirages d'échantillons de taille $n$, dans au moins 95 % des cas la proportion $p$ appartiendra à l'intervalle :

$$\left[f-\frac{1}{\sqrt{n}};f+\frac{1}{\sqrt{n}}\right]$$

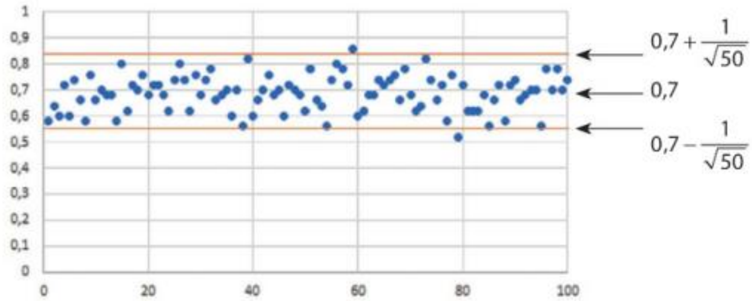
c'est l'intervalle de confiance à 95 %.

- Plus la taille de l'échantillon est grande et plus l'intervalle est resserré autour de la valeur de la proportion $p$ que l'on cherche à estimer.

**Exemple** On a lancé **50 fois** une pièce truquée et noté la fréquence de pile. On a répété l'expérience **100 fois**.

La fréquence moyenne observée est 0,7 et l'intervalle de confiance est $\left[0{,}7-\frac{1}{\sqrt{50}};0{,}7+\frac{1}{\sqrt{50}}\right]$.

Fréquence de "Pile" par échantillon




**Exemple** Dans une urne contenant des boules jaunes et des boules vertes en proportions inconnues, on effectue **100 tirages** avec remise et on obtient 56 boules jaunes. On a alors :

$$f-\frac{1}{\sqrt{n}}=\frac{56}{100}-\frac{1}{\sqrt{100}}=0{,}46 \text{ et } f+\frac{1}{\sqrt{n}}=\frac{56}{100}+\frac{1}{\sqrt{100}}=0{,}66$$

Il y a 95 % de chances que la proportion de boules jaunes soit comprise entre 0,46 et 0,66.

Cours :

**Propriété**

- Lorsque l'on réalise une expérience un grand nombre de fois et qu'un événement se réalise avec une fréquence $f$, alors la probabilité réelle que cet événement se réalise est en général (dans 95 % du temps) comprise dans l'intervalle :
$$\left[f-1{,}96\times\frac{\sqrt{f(1-f)}}{\sqrt{n}}\ ;\ f+1{,}96\times\frac{\sqrt{f(1-f)}}{\sqrt{n}}\right]$$
- Cet intervalle est appelé intervalle de confiance au seuil de 95 %.

**Exemple**

Lors d'un sondage sur 1066 personnes, 31 % se disaient optimistes pour l'avenir de l'écologie en France (sondage Harris du 29 août 2019).
On peut alors affirmer que la véritable proportion de personnes optimistes est située dans l'intervalle :

$$\left[0{,}31-1{,}96\times\frac{\sqrt{0{,}31(1-0{,}31)}}{\sqrt{1066}}\ ;\ 0{,}31+1{,}96\times\frac{\sqrt{0{,}31(1-0{,}31)}}{\sqrt{1066}}\right]\subset[0{,}28\ ;\ 0{,}34]$$

Exercices :

**2 Calcul d'intervalles de confiance.**

Pour $f=0{,}4$ et $n=250$, calculer l'intervalle de confiance au seuil de 95 %.

**3 Comparaison d'intervalles.**

L'estimation de la proportion d'un caractère dans une population est-elle plus précise dans un échantillon de 100 individus ou de 1000 individus ?

**4 Des maths en musique.**

11 % des élèves d'un lycée qui en compte 1600 affirment pratiquer régulièrement un instrument de musique.

Déterminer l'intervalle dans lequel se situe la proportion de pratiquants dans l'ensemble des lycées au seuil des 95 %.

**5 Des vacances écourtées.**

Un sondage affirme que 55 % des personnes interrogées prévoient de partir en vacances au moins deux semaines l'été prochain. Peut-on affirmer, au seuil des 95 %, que plus de la moitié des personnes en France est dans ce cas-là si :

**a.** le sondage porte sur 1030 personnes ?

**b.** le sondage porte sur 590 personnes ?