Modèles démographiques - Activités

Modèle linéaire

Parmi les nuages de points modélisant des évolutions, certains sont particulièrement simples, car formés de points sensiblement alignés.

DOC 1 Une évolution régulière

Année	2020	2021	2022	2023	2024	2025	2026	2027
Rang de l'année	0	1	2	3	4	5	6	7
Effectif	10 000	10 500	11 000	11 500	12 000	12 500	13 000	13 500

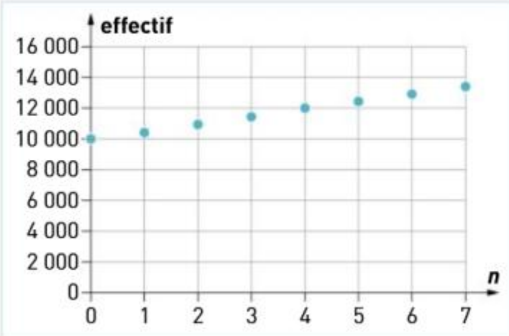
On suppose que la population d'une ville, qui est de 10 000 habitants au 1er janvier 2020, augmente régulièrement chaque année de 500 habitants. On peut alors construire un tableau traduisant l'évolution de la population dans cette ville.

Si on note $u(n)$ la population de cette ville au 1er janvier de l'année de rang n, on a ainsi :

$$u(0) = 10\,000 \; ; \; u(1) = 10\,500 \; ; \; u(2) = 11\,000...$$

La variation absolue de la population entre 2020 et 2021 est de 500 habitants, ce qui se traduit par : $u(1) - u(0) = 500$. Elle est aussi de 500 habitants entre 2021 et 2022, soit $u(2) - u(1) = 500$.

On peut construire le nuage de points associé à ce tableau de valeurs. On constate que les points semblent alignés.



Pour mener une investigation

- Montrer qu'une équation de la droite d passant par les deux premiers points du nuage est $y = 500x + 10\,000$.
- Justifier que les autres points appartiennent à d.

....

....

....

DOC 2 Une suite arithmétique

La population de la ville étudiée dans le **DOC. 1** augmente chaque année d'un nombre constant d'individus (500), c'est-à-dire que la variation absolue de la population d'une année à l'autre est constante et égale à 500.

On dit que la **croissance** est **linéaire**.

On a modélisé l'évolution de cette population en associant à chaque entier naturel n l'effectif de cette population, noté $u(n)$: on définit ainsi une fonction u de la variable entière n. Ce type de fonction est aussi appelé une **suite**.

On suppose que cette croissance va se poursuivre de la même façon et on veut prévoir quelle sera la population de cette ville en 2035.

Ainsi, $u(1) = u(0) + 500$; $u(2) = u(1) + 500$; etc.

De manière générale, pour tout entier naturel n, $\boldsymbol{u(n+1) = u(n) + 500}$.

Cette égalité permettant d'obtenir $u(n+1)$ en fonction de $u(n)$ par l'ajout d'une constante $c = 500$ définit une **suite arithmétique de raison c**. On peut schématiser ce processus de la façon suivante.

$$u(0) \xrightarrow{+500} u(1) \xrightarrow{+500} u(2) \xrightarrow{+500} u(3) \cdots\cdots u(n) \xrightarrow{+500} u(n+1)$$

On a alors : $u(3) = u(2) + 500 = u(1) + 500 + 500$
$u(3) = u(0) + 500 + 500 + 500 = u(0) + 3 \times 500$.

De la même façon, on exprime $u(10)$ en fonction de $u(9)$, puis de $u(8)$, et ainsi de suite, et on obtient $u(10)$ en fonction de $u(0)$: $u(10) = u(0) + 10 \times 500$.

Plus généralement, $\boldsymbol{u(n) = u(0) + n \times 500}$.

Calculer le nombre d'habitants prévus en 2035.

....

....

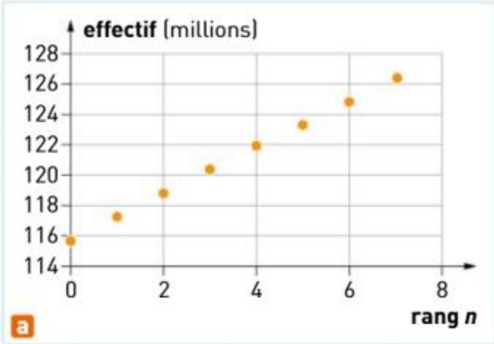
DOC 3 Ajustement par un modèle linéaire : le Mexique

On donne ci-dessous l'évolution de la population du Mexique, en millions d'habitants, entre 2011 et 2018.

Année	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018
Effectif	115,7	117,3	118,8	120,4	121,9	123,3	124,8	126,2

On peut représenter cette série de données (a).

On constate que les points paraissent alignés : on est certainement en présence d'une croissance linéaire.



1. Calculer la variation absolue d'une année à l'autre de 2011 à 2018. Que constate-t-on ?
2. On choisit l'année 2011 comme année de rang 0, et on définit la suite *u* qui, à un rang donné, associe l'effectif de la population, exprimée en millions, selon un modèle de croissance linéaire.
   - **a.** Déterminer l'équation une droite d'ajustement.
   - **b.** En déduire l'expression de *u(n)* en fonction de *n*.

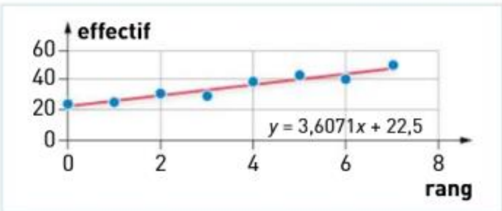
DOC 4 Une prévision sur la population des ours dans les Pyrénées

L'ours des Pyrénées est une espèce protégée depuis 1979. Depuis quelques années, les effectifs d'ours ont tendance à augmenter, comme le montre le tableau ci-dessous.

Année	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019
Rang	0	1	2	3	4	5	6	7
Effectif	24	25	31	29	39	43	40	50

La représentation graphique par un nuage de points indique une tendance que l'on peut utiliser pour faire des prévisions.

On fait alors l'hypothèse que le modèle donné par la droite d'ajustement reste valable dans les années futures.



Pour mener une investigation

- À l'aide de l'équation de la droite d'ajustement donnée par le tableur, estimer le nombre d'ours dans les Pyrénées en 2040 selon ce modèle.
- Que peut-on penser de la validité de ce modèle ?

Modèle exponentiel

Lorsque la variation absolue d'une grandeur augmente fortement d'un palier *n* au suivant, le modèle linéaire ne convient pas. On s'intéresse alors au taux de variation entre deux valeurs successives *u(n)* et *u(n+1)* .

DOC 1

Reconnaître une évolution exponentielle

Le Honduras est un pays d'Amérique centrale. Sa population était de 9 587 522 habitants en 2018.

Dans le tableau ci-dessous, on donne les chiffres entre 1975 et 1983. Pour décrire l'évolution de la population sur cette période, on a calculé la variation absolue du nombre d'habitants entre deux années consécutives, ainsi que le taux de variation.

Par exemple, entre 1975 et 1976, la population a augmenté de :

3 251 145 − 3 153 253 = 97 892 habitants.

Le taux de variation est égal à :

$$\frac{3\,251\,145 - 3\,153\,253}{3\,153\,253} = \frac{97\,892}{3\,153\,253} \approx 0{,}031,$$

soit environ 3,1 %.

On s'aperçoit que, sur la période étudiée, la variation absolue augmente, alors que le taux de variation est toujours très proche de 3,1 %.

Lorsque le taux de variation de la population entre deux années consécutives est constant, on dit que la **croissance** est **exponentielle**.

Année	Population	Variation absolue	Taux d'évolution
1975	3 153 253		
1976	3 251 145	97 892	3,10 %
1977	3 352 825	101 680	3,13 %
1978	3 458 095	105 270	3,14 %
1979	3 566 654		
1980	3 678 279	111 625	3,13 %
1981	3 792 919	114 640	3,12 %
1982	3 910 640	117 721	3,10 %
1983	4 031 325	120 685	3,09 %

Évolution de la population du Honduras (*données de la Banque mondiale*).

Compléter les deux cases manquantes.

………

………

DOC 2

Suite géométrique

En 2015, la population d'une ville était de 8 000 habitants. Depuis 2015, la population augmente chaque année de 16 %. On suppose que cette croissance va se poursuivre et on veut prévoir quelle sera la population en 2030.

Afin de modéliser son évolution, on note $u(n)$ la population en 2015 + n. Ainsi, $u(0)$ est la population en 2015 et $u(1)$ est la population en 2016.

Augmenter de 16 % revient à multiplier par 1 + 16/100, soit 1,16. Donc $u(1) = 1{,}16 \times u(0)$; $u(2) = 1{,}16 \times u(1)$; etc. Et, de manière générale, $\boldsymbol{u(n+1) = 1{,}16 \times u(n)}$.

Lorsque chaque terme d'une suite s'obtient en multipliant le précédent par un nombre constant *q*, on dit que la suite est géométrique de raison *q*.

Ici, la suite u est géométrique de raison $q = 1{,}16$.

On peut alors exprimer $u(n)$ en fonction de $u(0)$ et de n, ce qui permet de calculer n'importe quel terme de la suite sans avoir à calculer le terme précédent.

⇢ Pour mener une investigation

- Calculer $u(1)$, $u(2)$ et $u(3)$.
- Expliquer pourquoi $u(5) = 1{,}16^5 \times u(0)$. Que représente $u(5)$?
- Expliquer pourquoi la population en 2030 est $u(15)$.
- Expliquer pourquoi $u(15) = 1{,}16^{15} \times u(0)$, puis faire une prévision sur la population en 2030.

$$u(0) \xrightarrow{\times 1{,}16} u(1) \xrightarrow{\times 1{,}16} u(2) \xrightarrow{\times 1{,}16} u(3) \;\cdots\cdots\; u(n) \xrightarrow{\times 1{,}16} u(n+1)$$

………

………

………