Modèles démographiques - Cours

1 Évolution d'une population

En 1798, Thomas Malthus (1766-1834) publie son *Essai sur le principe de population*, dans lequel il expose l'idée selon laquelle la population croît beaucoup plus rapidement que les ressources.

Aujourd'hui, pour étudier une évolution, on peut dans un premier temps représenter les données par un nuage de points, puis on introduit une fonction u, dont la variable entière n est un palier (en général, une année).

En notant $u(0)$ la valeur à l'instant 0 (ou au palier 0) et $u(n)$ la valeur au palier n, on s'intéresse aux valeurs :

– de la **variation absolue** entre les paliers n et $n+1$: $u(n+1) - u(n)$.

– du **taux de variation** entre les paliers n et $n+1$: $\dfrac{u(n+1) - u(n)}{u(n)}$.

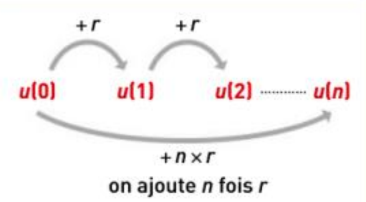

Fig. 1 : Principe d'une suite arithmétique.

2 Modèle linéaire

Suite arithmétique

Lorsque la variation absolue $u(n+1) - u(n)$ de la grandeur u entre deux paliers n et $n+1$ est constante, on dit que la croissance (ou décroissance) est linéaire.

Pour tout entier naturel n, on a : $u(n+1) = u(n) + r$, où r est une constante.

La suite u de nombres $u(0)$, $u(1)$, $u(2)$, etc. est une **suite arithmétique** (Fig. 1).

Le nombre r est appelé la raison de la suite u.

Pour tout entier naturel n, $\boxed{u(n) = u(0) + n \times r}$

Dans un repère, les points de coordonnées (n ; $u(n)$) sont alignés. Ils sont sur la droite d'équation $y = u(0) + r \times x$.

Année	Rang n	Production (tonnes)	Variation absolue
2015	0	12 000	
2016	1	12 101	101
2017	2	12 201	100
2018	3	12 300	99
2019	4	12 400	100

Fig. 2 : Production croissant de manière linéaire.

Ajustement par une suite arithmétique

Dans la réalité, la variation absolue n'est pas tout à fait constante et les points ne sont pas tout à fait alignés. Pour établir un modèle, on peut estimer la variation absolue du modèle lorsque c'est possible, ou bien utiliser la calculatrice ou un tableur pour obtenir une équation de la droite qui ajuste le nuage de points.

Exemple : On peut considérer que, depuis 2015, la production définie par la **figure 2** augmente de 100 tonnes par an.
Ainsi, $u(n+1) = u(n) + 100$ et $u(n) = 12\,000 + 100n$. On peut prévoir que la production en 2021 sera de 12 600 tonnes car $u(6) = 12\,600$. Grâce à un tableur ou une calculatrice, on peut déterminer une équation de la droite qui ajuste le nuage de points (Fig. 3).

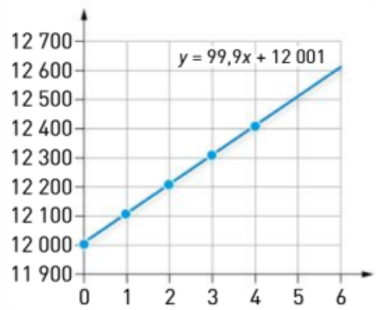

Fig. 3 : Ajustement d'un nuage de points par une droite (➤ fiche n° 9).

3 Modèle exponentiel

Suite géométrique

Lorsque le taux de variation t de la grandeur u est une constante, on dit que la croissance (ou décroissance) est exponentielle.

Pour tout entier naturel n, $u(n+1) = (1 + t) \times u(n)$. On pose : $q = 1 + t$. On a alors, pour tout entier naturel n, $u(n+1) = q \times u(n)$.

Pour tout entier naturel n, $\boxed{u(n) = u(0) \times q^n}$

La suite u de nombres $u(0)$, $u(1)$, $u(2)$, etc. est une **suite géométrique** (Fig. 4).

Le nombre q est appelé la raison de la suite u.

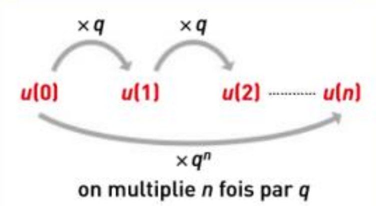

Fig. 4 : Principe d'une suite géométrique.

Vocabulaire :

- **Suite arithmétique :** suite de nombres dont chaque terme s'obtient en additionnant au précédent une constante.
- **Suite géométrique :** suite de nombres dont chaque terme s'obtient en multipliant le précédent par une constante.
- **Taux de variation** d'une grandeur entre deux paliers n et $n+1$: $\dfrac{u(n+1) - u(n)}{u(n)}$.
- **Variation absolue** d'une grandeur entre deux paliers n et $n+1$: $u(n+1) - u(n)$.