BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

EXERCICES D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Session 2024 Corrigés des exercices 0

Exercice 1

Partie I

On considère l'équation différentielle : $(E) : y' + y = \mathrm{e}^{-x}$.

1. Soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = x\,\mathrm{e}^{-x}$.
   $u'(x) + u(x) = (\mathrm{e}^{-x} + x \times (-1)\,\mathrm{e}^{-x}) + x\,\mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^{-x} - x\,\mathrm{e}^{-x} + x\,\mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^{-x}$
   Donc la fonction u est une solution de l'équation différentielle (E).
2. On considère l'équation différentielle $\left(E'\right) : y' + y = 0$ soit $\left(E'\right) \iff y' = -y$.
   L'équation différentielle $y' = ay$ a pour solutions les fonctions $x \longmapsto k\,\mathrm{e}^{ax}$ avec $k \in \mathbb{R}$, donc l'équation différentielle $\left(E'\right)$ a pour solutions les fonctions $x \longmapsto k\,\mathrm{e}^{-x}$ avec $k \in \mathbb{R}$.
3. La solution générale de l'équation (E) est la somme de la solution générale de l'équation sans second membre associée (E'), et d'une solution particulière de (E).
   On en déduit que les solutions de l'équation différentielle (E) sont les fonctions $x \longmapsto k\,\mathrm{e}^{-x} + x\,\mathrm{e}^{-x}$ avec $k \in \mathbb{R}$.
4. On cherche l'unique solution g de l'équation différentielle (E) telle que $g(0) = 2$.
   $g(0) = 2 \iff k\,\mathrm{e}^{0} + 0 = 2 \iff k = 2$; donc $g(x) = (x+2)\,\mathrm{e}^{-x}$.

Partie II

Dans cette partie, k est un nombre réel fixé que l'on cherche à déterminer.
On considère la fonction f_k définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_k(x) = (x+k)\,\mathrm{e}^{-x}$.
Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \mathrm{e}^{-x}$.
On note $\mathscr{C}_k$ la courbe représentative de la fonction f_k dans un repère orthogonal et $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction h.
On a représenté sur le graphique en annexe les courbes $\mathscr{C}_k$ et $\mathscr{C}$ sans indiquer les unités sur les axes ni le nom des courbes.

1. La fonction h est définie par $h(x) = \mathrm{e}^{-x}$. Sa dérivée h' est définie par $h'(x) = -\,\mathrm{e}^{-x}$. Donc $h'(x) < 0$ sur $\mathbb{R}$ donc la fonction h est décroissante. C'est donc la courbe en trait plein qui représente la fonction h.
2.
   - La courbe $\mathscr{C}_h$ coupe l'axe des ordonnées au point A. Le point A a donc pour coordonnées $(0\,;\,h(0))$. Or $h(0) = \mathrm{e}^{0} = 1$, donc le point A a pour ordonnée 1.
   - La courbe $\mathscr{C}_{f_k}$ coupe l'axe des ordonnées au point qui semble avoir pour ordonnée 2. Donc $f_k(0) = 2$, c'est-à-dire $(0+k)\,\mathrm{e}^{0} = 2$ donc $k = 2$. Donc la courbe en pointillés représente la fonction f_2 définie par $f_2(x) = (x+2)\,\mathrm{e}^{-x}$.
   - Les deux courbes se coupent au point C dont l'abscisse est solution de l'équation $f_2(x) = h(x)$.
     $f_2(x) = h(x) \iff (x+2)\,\mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^{-x}\left(\text{ car } \mathrm{e}^{-x} \neq 0\right) \iff x+2 = 1 \iff x = -1$
     Le projeté orthogonal H de C sur l'axe des abscisses a pour coordonnées $(-1\,;\,0)$, ce qui permet, par symétrie par rapport au point O, de placer le point I de coordonnées $(1\,;\,0)$.

Remarque des correcteurs *– La détermination de k repose sur une lecture graphique. Cette question a été posée en juin 2010 dans le sujet de terminale S de métropole ; à l'époque, les graduations figuraient sur le repère, sans les unités naturellement !*

Annexe

I $\mathscr{C}$ f_k

0 −1 1

Exercice 2

Partie I

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on désigne par f_n la fonction définie sur [0 ; 1] par : $f_n(x) = x^n\,\mathrm{e}^x$.
On note $\mathscr{C}_n$ la courbe représentative de la fonction f_n dans un repère $\left(\mathrm{O},\ \overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath}\right)$ du plan.

On désigne par (I_n) la suite définie pour tout entier $n \geqslant 1$ par : $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$.

1. **a.** On désigne par F_1 la fonction définie sur $[0;1]$ par : $F_1(x) = (x-1)\,\mathrm{e}^x$.
   $F_1'(x) = 1 \times \mathrm{e}^x + (x-1) \times \mathrm{e}^x = x\,\mathrm{e}^x$
   Donc F_1 est une primitive de la fonction f_1.

   b. $I_1 = \displaystyle\int_0^1 x\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \left[F_1(x)\right]_0^1 = F_1(1) - F_1(0) = 0 - \left(-1\,\mathrm{e}^0\right) = 1$

2. $I_{n+1} = \displaystyle\int_0^1 x^{n+1}\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$
   On pose $u(x) = x^{n+1}$ et $v'(x) = \mathrm{e}^x$; donc $u'(x) = (n+1)x^n$ et $v(x) = \mathrm{e}^x$.
   D'après la formule d'intégration par parties :
   $\displaystyle\int_0^1 u(x)\,v'(x)\,\mathrm{d}x = \left[u(x)\,v(x)\right]_0^1 - \int_0^1 u'(x)\,v(x)\,\mathrm{d}x$
   On en déduit que :
   $I_{n+1} = \displaystyle\int_0^1 x^{n+1}\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \left[x^{n+1}\,\mathrm{e}^x\right]_0^1 - \int_0^1 (n+1)x^n\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = (\mathrm{e}-0) - (n+1)\int_0^1 x^n\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$
   $= \mathrm{e} - (n+1)I_n$

3. Pour $n = 1$: $I_2 = \mathrm{e} - 2I_1 = \mathrm{e} - 2$.

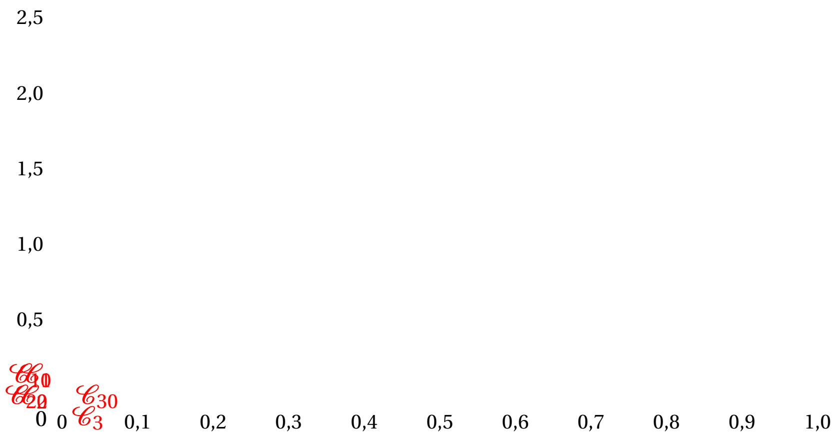
4. On considère la fonction `mystere` écrite dans le langage Python :

```
def mystere(n):
    a = 1
    L = [a]
    for i in range(1,n):
        a = e - (i + 1)*a
        L.append(a)
    return L
```

   L'appel `mystere(5)` va donner la liste $\left[I_1\,;\,I_2\,;\,I_3\,;\,I_4\,;\,I_5\right]$ (I_1 est mise au départ dans L et la boucle tournant de 1 à 4 va donner les quatre autres intégrales)

Partie II

1. Sur le graphique ci-dessous, on a représenté les courbes $\mathscr{C}_1, \mathscr{C}_2, \mathscr{C}_3, \mathscr{C}_{10}, \mathscr{C}_{20}$ et $\mathscr{C}_{30}$.



a. Sur $[0\,;\,1]$, $x^n\,\mathrm{e}^x \geqslant 0$ donc l'intégrale I_n représente l'aire de la portion de plan comprise entre la courbe $\mathscr{C}_n$, l'axe des abscisses, et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

b. D'après l'allure des courbes tracées, on peut conjecturer que la suite (I_n) tend vers 0.

2.
- $x^n\,\mathrm{e}^x \geqslant 0$ sur $[0\,;\,1]$, donc $\displaystyle\int_0^1 x^n\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x \geqslant 0$ donc $I_n \geqslant 0$.
- La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc si $0 \leqslant x \leqslant 1$, on a $\mathrm{e}^0 \leqslant \mathrm{e}^x \leqslant \mathrm{e}^1$ donc $\mathrm{e}^x \leqslant \mathrm{e}$.
  Sur $[0\,;\,1]$, on a $x^n \geqslant 0$ donc $x^n\,\mathrm{e}^x \leqslant \mathrm{e}x^n$.
  D'après la positivité de l'intégration, $\displaystyle\int_0^1 x^n\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 x^n\,\mathrm{e}\,\mathrm{d}x$, ce qui veut dire : $I_n \leqslant \mathrm{e}\displaystyle\int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x$.

On a donc démontré que : $0 \leqslant I_n \leqslant \mathrm{e}\displaystyle\int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x$.

3. $\displaystyle\int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$ donc $0 \leqslant I_n \leqslant \mathrm{e}\displaystyle\int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x$ équivaut à $0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{\mathrm{e}}{n+1}$.
$\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\mathrm{e}}{n+1} = 0$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 0 = 0$ donc, d'après le théorème des gendarmes, on peut dire que la suite (I_n) converge et que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$.

Exercice 3

Dans un examen, une épreuve notée sur dix points est constituée de deux exercices : le premier est noté sur deux points, le deuxième sur huit points.

Partie I

Le premier exercice est constitué de deux questions Q1 et Q2.
Chaque question est notée sur un point. Une réponse correcte rapporte un point; une réponse incorrecte, incomplète ou une absence de réponse rapporte zéro point.
On considère que :

- Un candidat pris au hasard a une probabilité 0,8 de répondre correctement à la question Q1.
- Si le candidat répond correctement à Q1, il a une probabilité 0,6 de répondre correctement à Q2; s'il ne répond pas correctement à Q1, il a une probabilité 0,1 de répondre correctement à Q2.

On prend un candidat au hasard et on note :

- A l'évènement : « le candidat répond correctement à la question Q1 »;
- B l'évènement : « le candidat répond correctement à la question Q2 ».

On note $\overline{A}$ et $\overline{B}$ les évènements contraires de A et de B.

1. On complète l'arbre pondéré ci-dessous.

$0,8$ A — $0,6$ B ; $\overline{B}$

$0,2$ $\overline{A}$ — $0,1$ B ; $\overline{B}$

2. La probabilité que le candidat réponde correctement aux deux questions Q1 et Q2 est : $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B) = 0,8 \times 0,6 = 0,48$

3. La probabilité que le candidat réponde correctement à la question Q2 est $p(B)$. D'après la formule des probabilités totales :
$P(B) = P(A \cap B) + P\left(\overline{A} \cap B\right) = 0,48 + 0,2 \times 0,1 = 0,5$

On note :

- X_1 la variable aléatoire qui, à un candidat, associe sa note à la question Q1;
- X_2 la variable aléatoire qui, à un candidat, associe sa note à la question Q2;
- X la variable aléatoire qui, à un candidat, associe sa note à l'exercice, c'est-à-dire $X = X_1 + X_2$.

4. La loi de probabilité de X_1 est :

x_i	0	1
$P(X_1 = x_i)$	0,2	0,8

Donc $E(X_1) = 0 \times 0,2 + 1 \times 0,8 = 0,8$.

La loi de probabilité de X_2 est :

x_i	0	1
$P(X_2 = x_i)$	0,5	0,5

Donc $E(X_2) = 0 \times 0,5 + 1 \times 0,5 = 0,5$.

$E(X) = E(X_1 + X_2) = E(X_1) + E(X_2)$ d'après la linéarité de l'espérance mathématique. Donc $E(X) = 0,8 + 0,5 = 1,3$. Un élève obtient, en moyenne, la note de 1,3 à l'exercice 1.

5. On souhaite déterminer la variance de X.

a.
- $P(X = 0) = P\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) = 0,2 \times 0,9 = 0,18$
- $P(X = 2) = P(A \cap B) = 0,48$
- $P(X = 1) = 1 - \big(P(X = 0) + P(X = 2)\big) = 1 - (0,18 + 0,48) = 1 - 0,66 = 0,34$

On peut donc en déduire la loi de probabilité de X :

x_i	0	1	2
$P(X = x_i)$	0,18	0,34	0,48

b. D'après la formule de König : $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$.
$E(X^2) = 0^2 \times 0{,}18 + 1^2 \times 0{,}34 + 2^2 \times 0{,}48 = 2{,}26$
Donc $V(X) = 2{,}26 - 1{,}3^2 = 0{,}57$

c. $V(X_1) = E(X_1^2) - [E(X_1)]^2 = \left(0^1 \times 0{,}2 + 1^2 \times 0{,}8\right) - (0{,}8)^2 = 0{,}8 - 0{,}64 = 0{,}16$
$V(X_2) = E(X_2^2) - [E(X_2)]^2 = \left(0^1 \times 0{,}5 + 1^2 \times 0{,}5\right) - (0{,}5)^2 = 0{,}5 - 0{,}25 = 0{,}25$
$V(X_1) + V(X_2) = 0{,}16 + 0{,}25 = 0{,}41$; or $V(X) = 0{,}57$ donc $V(X_1) + V(X_2) \neq V(X)$.
Ce n'est pas surprenant car les variables aléatoires X_1 et X_2 ne sont pas indépendantes.

Partie II

Le deuxième exercice est constitué de huit questions indépendantes.
Chaque question est notée sur un point. Une réponse correcte rapporte un point; une réponse incorrecte et une absence de réponse rapporte zéro point.
Les huit questions sont de même difficulté : pour chacune des questions, un candidat a une probabilité $\frac{3}{4}$ de répondre correctement, indépendamment des autres questions.
On note Y la variable aléatoire qui, à un candidat, associe sa note au deuxième exercice, c'est-à-dire le nombre de bonnes réponses.

1. On est dans le cas d'une répétition de 8 épreuves identiques et indépendantes, la probabilité du succès lors d'une épreuve étant $\frac{3}{4}$. Donc la variable aléatoire Y qui compte le nombre de succès suit la loi binomiale de paramètres $n = 8$ et $p = \frac{3}{4}$.
2. Pour une variable aléatoire Y suivant la loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$, on a :
$P(Y = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$, donc $P(Y = 8) = \binom{8}{8}\left(\frac{3}{4}\right)^8 \left(1 - \frac{3}{4}\right)^{8-8} = \left(\frac{3}{4}\right)^8$.
3. L'espérance de Y est $E(Y) = np = 8 \times \frac{3}{4} = 6$.
La variance de Y est $V(Y) = np(1-p) = 8 \times \frac{3}{4} \times \left(1 - \frac{3}{4}\right) = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$.

Partie III

On suppose que les deux variables aléatoires X et Y sont indépendantes. On note la variable aléatoire qui, à un candidat, associe sa note totale à l'examen : $Z = X + Y$.

1. $Z = X + Y$ donc $E(Z) = E(X) + E(Y) = 1{,}3 + 6 = 7{,}3$
$Z = X + Y$ et X et Y sont indépendantes donc $V(Z) = V(X) + V(Y) = 0{,}57 + 1{,}5 = 2{,}07$
2. Soit n un nombre entier strictement positif.
Pour i entier variant de 1 à n, on note Z_i la variable aléatoire qui, à un échantillon de n élèves, associe la note de l'élève numéro i à l'examen.
On admet que les variables aléatoires $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$ sont identiques à Z et indépendantes.
On note M_n la variable aléatoire qui, à un échantillon de n élèves, associe la moyenne de leurs n notes, c'est-à-dire : $M_n = \dfrac{Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_n}{n}$

a. Pour tout i entre 1 et n, on a $E(Z_i) = 7{,}3$.
$E(M_n) = \dfrac{E(Z_1) + E(Z_2) + \cdots + E(Z_n)}{n} = \dfrac{n \times 7{,}3}{n} = 7{,}3$

b. L'écart-type est : $\sigma(M_n) = \sqrt{V(M_n)}$
$V(M_n) = \dfrac{V(Z)}{n} = \dfrac{2{,}07}{n}$ donc $\sigma(M_n) = \sqrt{\dfrac{2{,}07}{n}}$

On cherche n tel que : $\sqrt{\dfrac{2{,}07}{n}} \leqslant 0{,}5$

$\sqrt{\dfrac{2{,}07}{n}} \leqslant 0{,}5 \iff \dfrac{2{,}07}{n} \leqslant 0{,}25 \iff \dfrac{2{,}07}{0{,}25} \leqslant n \iff n \geqslant 8{,}28$

Donc l'écart type de M_n est inférieur ou égal à 0,5 pour $n \geqslant 9$.

c. Pour les valeurs trouvées en **b.**, on va montrer que la probabilité que $6{,}3 \leqslant M_n \leqslant 8{,}3$ est supérieure ou égale à 0,75 .

- $P(6{,}3 \leqslant M_n \leqslant 8{,}3) = P(7{,}3-1 \leqslant M_n \leqslant 7{,}3+1) = P(-1 \leqslant M_n - 7{,}3 \leqslant 1)$
  $= P(-1 \leqslant M_n - E(M_n) \leqslant 1) = P\left(\left|M_n - E(M_n)\right| \leqslant 1\right)$
  $= 1 - P\left(\left|M_n - E(M_n)\right| > 1\right)$
- $P\left(\left|M_n - E(M_n)\right| > 1\right) + P\left(\left|M_n - E(M_n)\right| = 1\right) = P\left(\left|M_n - E(M_n)\right| \geqslant 1\right)$
  donc $P\left(\left|M_n - E(M_n)\right| > 1\right) \leqslant P\left(\left|M_n - E(M_n)\right| \geqslant 1\right)$.
- D'après l'inégalité de Bienaymé Tchebychev :
  $P\left(\left|X-\mu\right| \geqslant \delta\right) \leqslant \dfrac{V}{\delta^2}$ donc $P\left(\left|M_n - E(M_n)\right| \geqslant 1\right) \leqslant \dfrac{V(M_n)}{1^2}$.
  On déduit donc : $P\left(\left|M_n - E(M_n)\right| > 1\right) \leqslant V(M_n)$.
- D'après la question précédente, on peut prendre $n \geqslant 9$ donc
  $V(M_n) = \dfrac{2{,}07}{n} \leqslant \dfrac{2{,}07}{9}$ et donc $P\left(\left|M_n - E(M_n)\right| > 1\right) \leqslant \dfrac{2{,}07}{9}$.
- On déduit que : $1 - P\left(\left|M_n - E(M_n)\right| > 1\right) \geqslant 1 - \dfrac{2{,}07}{9}$.
  $1 - \dfrac{2{,}07}{9} = \dfrac{6{,}93}{9} \approx 0{,}77 \geqslant 0{,}75$

On a donc démontré que, pour $n \geqslant 9$, $P\left(6{,}3 \leqslant M_n \leqslant 8{,}3\right) \geqslant 0{,}75$.

Exercice 4

On considère le prisme droit ABFEDCGH tel que AB = AD.

Sa base ABFE est un trapèze rectangle en A, vérifiant $\overrightarrow{\text{BF}} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{\text{AE}}$.

On note I le milieu du segment [EF].

On note J le milieu du segment [AE].

On associe à ce prisme le repère orthonormé $\left(\text{A}\,;\ \vec{\imath}\,,\vec{\jmath}\,,\vec{k}\right)$ tel que :
$\vec{\imath} = \overrightarrow{\text{AB}}$; $\quad \vec{\jmath} = \overrightarrow{\text{AD}}$; $\quad \vec{k} = \overrightarrow{\text{AJ}}$

1. On donne les coordonnées de quatre vecteurs dans la base $\left(\vec{\imath}\,,\vec{\jmath}\,,\vec{k}\right)$.
   Lequel est un vecteur normal au plan (ABG) ?

   a. $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ **b.** $\vec{n}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$ **c.** $\vec{n}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$ **d.** $\vec{n}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

   Le plan (ABG) a pour vecteurs directeurs $\overrightarrow{\text{AB}}$ et $\overrightarrow{\text{BG}}$.

$\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ et

$\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AJ}$ donc $\overrightarrow{BG}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$.

On cherche donc, parmi les trois vecteurs proposés, celui qui est orthogonal à la fois à $\overrightarrow{AB}$ et à $\overrightarrow{BG}$. Pour $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$, on a :

$\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{AB} = 0\times 1 + (-1)\times 0 + 1\times 0 = 0$ donc $\overrightarrow{n} \perp \overrightarrow{AB}$;
$\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{BG} = 0\times 0 + (-1)\times 1 + 1\times 1 = 0$ donc $\overrightarrow{n} \perp \overrightarrow{BG}$

Réponse c.

2. Parmi les droites suivantes, laquelle est parallèle à la droite (IJ) ?

   a. (DG) **b.** (BD) **c.** (AG) **d.** (FG)

   La droite (IJ) est parallèle à la droite (AF) (droite des milieux dans le triangle AEF).

   Les vecteurs $\overrightarrow{AF}$ et $\overrightarrow{DG}$ sont égaux donc les droites (AF) et (DG) sont parallèles.

   On en déduit que les droites (IJ) et (DG) sont parallèles.

Réponse a.

3. Quels vecteurs forment une base de l'espace ?

   a. $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CG}\right)$ **b.** $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AD}\right)$ **c.** $\left(\overrightarrow{DA};\overrightarrow{DC};\overrightarrow{DG}\right)$ **d.** $\left(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CG};\overrightarrow{CE}\right)$

   Il faut trouver trois vecteurs non coplanaires.

   On peut éliminer la proposition **a** car il n'y a que deux vecteurs.

   On peut éliminer la proposition **b** car $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ donc les trois vecteurs sont coplanaires.

   On peut éliminer la proposition **d** car $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{CG}$ donc les trois vecteurs sont coplanaires.

Réponse c.

4. Une décomposition du vecteur $\overrightarrow{AG}$ comme somme de plusieurs vecteurs **deux à deux orthogonaux** est :

   a. $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{HG}$ **b.** $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AJ}$
   c. $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BJ} + \overrightarrow{JG}$ **d.** $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DH} + \overrightarrow{HG}$

   $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BG}$ et $\overrightarrow{BG} \neq \overrightarrow{HG}$; donc la proposition **a** est fausse.

   Les trois vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AJ}$ sont orthogonaux deux à deux puisqu'ils forment une base orthonormée.

   De plus $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AG}$.

Réponse b.

5. Le volume du prisme droit ABFEDCGH, est égal à :

   a. $\dfrac{5}{8}$ **b.** $\dfrac{8}{5}$ **c.** $\dfrac{3}{2}$ **d.** 2

   Si on appelle K le milieu de [DH], on peut dire que le prisme est composé du cube ABCDJFGK, de volume 1, surmonté du prisme JFGKHE, qui est la moitié du cube du dessous, donc qui a pour volume $\dfrac{1}{2}$. Le volume total fait donc $\dfrac{3}{2}$.

Réponse c.

Exercice 5

1. Sur l'intervalle $\left[0\ ;\ 2\pi\right]$, l'équation $\sin(x) = 0{,}1$ admet :

   a. zéro solution   **b.** une solution
   c. deux solutions   **d.** quatre solutions

   On peut par exemple dire que la courbe représentant la fonction sinus et la droite d'équation $y = 0{,}1$ ont deux points d'intersection sur l'intervalle $\left[0\ ;\ 2\pi\right]$.

   1
   0
   0   $\frac{\pi}{2}$ π $\frac{3\pi}{2}$ 2π
   -1

   Réponse c.

2. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $\left[0\ ;\ \pi\right]$ par $f(x) = x + \sin(x)$.

   a. La fonction f est convexe sur l'intervalle $[0\ ;\ \pi]$
   b. La fonction f est concave sur l'intervalle $[0\ ;\ \pi]$
   c. La fonction f admet sur l'intervalle $[0\ ;\ \pi]$ un unique point d'inflexion
   d. La fonction f admet sur l'intervalle $[0\ ;\ \pi]$ exactement deux points d'inflexion

   $f'(x) = 1 + \cos(x)$ et $f''(x) = -\sin(x) \leqslant 0$ sur $\left[0\ ;\ \pi\right]$, donc la fonction f est concave sur cet intervalle.

   Réponse b.

3. Une urne contient cinquante boules numérotées de 1 à 50. On tire successivement trois boules dans cette urne, **sans remise**. On appelle « tirage » la liste non ordonnée des numéros des trois boules tirées. Quel est le nombre de tirages possibles, **sans tenir compte de l'ordre des numéros** ?

   a. 50^3 **b.** $1 \times 2 \times 3$ **c.** $50 \times 49 \times 48$ **d.** $\dfrac{50 \times 49 \times 48}{1 \times 2 \times 3}$

   $\dbinom{50}{3} = \dfrac{50 \times 49 \times 48}{1 \times 2 \times 3}$

   Réponse d.

4. On effectue dix lancers d'une pièce de monnaie. Le résultat d'un lancer est « pile » ou « face ». On note la liste ordonnée des dix résultats.
   Quel est le nombre de listes ordonnées possibles ?

   a. 2×10 **b.** 2^{10}
   c. $1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times 10$ **d.** $\dfrac{1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times 10}{1 \times 2}$

   Il y a 2 résultats possibles si on effectue 1 lancer, 2^2 résultats possibles si on effectue 2 lancers, etc., 2^{10} résultats possibles si on effectue 10 lancers.

   Réponse b.

5. On effectue n lancers d'une pièce de monnaie équilibrée. Le résultat d'un lancer est « pile » ou « face ». On considère la liste ordonnée des n résultats.
   Quelle est la probabilité d'obtenir au plus deux fois « pile » dans cette liste ?

   a. $\dfrac{n(n-1)}{2}$ **b.** $\dfrac{n(n-1)}{2} \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$
   c. $1 + n + \dfrac{n(n-1)}{2}$ **d.** $\left(1 + n + \dfrac{n(n-1)}{2}\right) \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

   La variable aléatoire X qui donne le nombre de résultats « pile » sur n lancers suit la loi binomiale de paramètres n et $\dfrac{1}{2}$.

On cherche $P(X \leqslant 2)$ soit $P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)$.

- $P(X=0) = \binom{n}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(1-\frac{1}{2}\right)^{n-0} = \left(\frac{1}{2}\right)^n$
- $P(X=1) = \binom{n}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(1-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = n\left(\frac{1}{2}\right)^n$
- $P(X=2) = \binom{n}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(1-\frac{1}{2}\right)^{n-2} = \frac{n(n-1)}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n$

Donc $P(X \leqslant 2) = \left(\frac{1}{2}\right)^n + n\left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{n(n-1)}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(1+n+\frac{n(n-1)}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

Réponse d.

Exercice 6

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} u_{n+1} & = & \dfrac{u_n}{1+2u_n} \text{ pour tout entier naturel } n \\ u_0 & = & 1 \end{array}\right.$$

- **Affirmation 1 :** « $u_4 = \frac{1}{9}$. »

  $u_0 = 1$; $u_1 = \frac{u_0}{1+2u_0} = \frac{1}{1+2\times 1} = \frac{1}{3}$; $u_2 = \frac{u_1}{1+2u_1} = \frac{\frac{1}{3}}{1+2\times\frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{5}{3}} = \frac{1}{5}$;
  $u_3 = \frac{u_2}{1+2u_2} = \frac{\frac{1}{5}}{1+2\times\frac{1}{5}} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{7}{5}} = \frac{1}{7}$; $u_4 = \frac{u_3}{1+2u_3} = \frac{\frac{1}{7}}{1+2\times\frac{1}{7}} = \frac{\frac{1}{7}}{\frac{9}{7}} = \frac{1}{9}$

  Affirmation 1 vraie

- **Affirmation 2 :** « Pour tout entier naturel n, $u_n = \frac{1}{2n+1}$. »

  D'après la question précédente, la propriété « $u_n = \frac{1}{2n+1}$ » est vérifiée pour n entre 0 et 4. On va démontrer par récurrence qu'elle est vraie pour tout n.

  - **Initialisation**
    Pour $n=0$, on a : $u_0 = 1$ et $\frac{1}{2\times 0+1} = 1$; donc la propriété est vérifiée.
  - On suppose la propriété vraie à un rang $n \geqslant 0$, c'est-à-dire que $u_n = \frac{1}{2n+1}$.
    C'est l'hypothèse de récurrence.
    $u_{n+1} = \frac{u_n}{1+2u_n} = \frac{\frac{1}{2n+1}}{1+2\frac{1}{2n+1}} = \frac{\frac{1}{2n+1}}{\frac{2n+1+2}{2n+1}} = \frac{1}{2n+1} \times \frac{2n+1}{2n+3} = \frac{1}{2(n+1)+1}$
    Donc la propriété est vraie au rang $n+1$.
  - **Conclusion**
    La propriété est vraie au rang 0, et elle est héréditaire pour tout $n \geqslant 0$, donc, d'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout n.

  Affirmation 2 vraie

- **Affirmation 3 :** « La suite numérique (u_n) est minorée par 10^{-10}. »

  $\lim\limits_{n\to+\infty} 2n+1 = +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{2n+1} = 0$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.
  Si la suite (u_n) est minorée par 10^{-10} qui est un nombre strictement positif, elle ne peut pas avoir pour limite le nombre 0.

  Affirmation 3 fausse

Exercice 7

On considère les fonctions f_k définies sur $\mathbb{R}$ par $f_k(x) = x + k\,\mathrm{e}^{-x}$, où k est un réel strictement positif.

1. On s'intéresse dans cette question au cas $k = 0{,}5$, donc à la fonction $f_{0,5}$ définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_{0,5}(x) = x + 0{,}5\,\mathrm{e}^{-x}$.

a. $f'_{0,5}(x) = 1 + 0{,}5 \times (-1)\,\mathrm{e}^{-x} = 1 - 0{,}5\,\mathrm{e}^{-x}$

b. $f'_{0,5}(x) > 0 \iff 1 - 0{,}5\,\mathrm{e}^{-x} > 0 \iff 1 > 0{,}5\,\mathrm{e}^{-x} \iff \dfrac{1}{0{,}5} > \mathrm{e}^{-x}$

$\iff 2 > \mathrm{e}^{-x} \iff \ln(2) > -x \iff -\ln(2) < x \iff x > \ln\left(\dfrac{1}{2}\right)$

$\iff x > \ln(0{,}5)$

De même : $f'_{0,5}(x) = 0 \iff x = \ln(0{,}5)$, et $f'_{0,5}(x) < 0 \iff x < \ln(0{,}5)$.

On en déduit que la fonction $f_{0,5}$ admet un minimum en $\ln(0{,}5)$.

Soit k un réel strictement positif. On donne le tableau de variations de la fonction f_k.

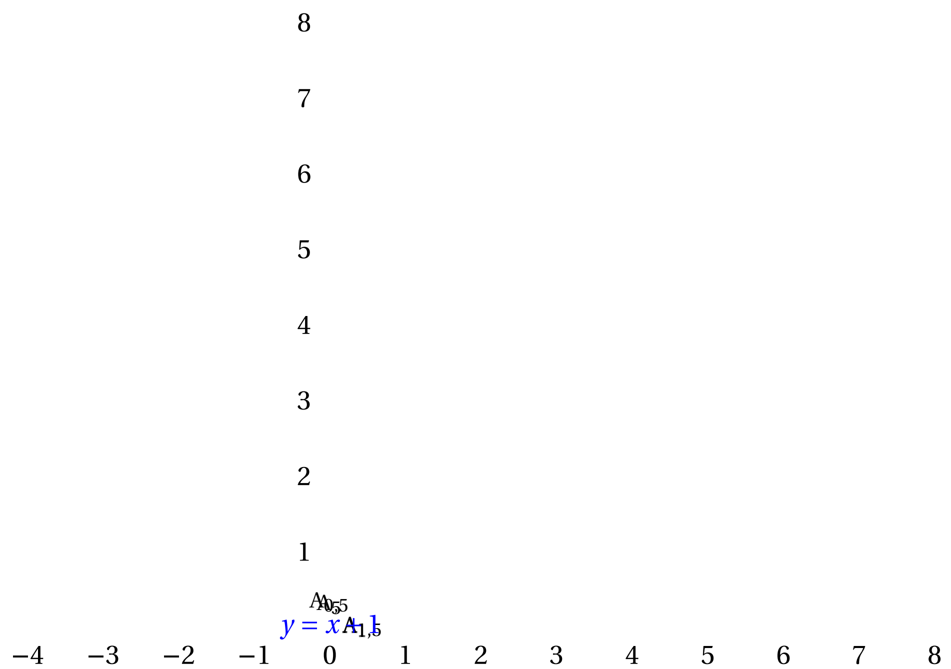
Valeurs de x	$-\infty$	$\ln(k)$	$+\infty$
Variations de f_k	$+\infty$	$f_k(\ln k)$	$+\infty$

2. $f_k(\ln k) = \ln(k) + k\,\mathrm{e}^{-\ln(k)} = \ln(k) + \dfrac{k}{\mathrm{e}^{\ln(k)}} = \ln(k) + \dfrac{k}{k} = \ln(k) + 1$

On note $\mathscr{C}_k$ la courbe représentative de la fonction f_k dans un plan muni d'un repère orthonormé.

On note A_k le point de la courbe $\mathscr{C}_k$ d'abscisse $\ln k$.

On a représenté ci-dessous quelques courbes $\mathscr{C}_k$ pour différentes valeurs de k.



3. Le point A_k a pour coordonnées $(\ln(k)\,;\, f_k(\ln(k)))$ soit $(\ln(k)\,;\, \ln(k)+1)$. Donc tous les points A_k sont situés sur la droite d'équation $y = x+1$.
   L'affirmation : « Pour tout réel k strictement positif, les points $A_{0,5}$, A_1 et A_k sont alignés. » est donc vraie.

Exercice 8

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = 3u_n + 1$ pour tout entier naturel n.

1. On considère la fonction `calcul` écrite dans le langage Python qui renvoie la valeur de u_n.

```
def calcul(n):
  u = 0
  for i in range(n):
    u = 3 * u + 1
  return u
```

On considère par ailleurs la fonction `liste` écrite dans le langage Python :

```
def liste(n):
  l = []
  for i in range(n):
    l.append(calcul(i))
  return l
```

Affirmation 1 : « l'appel `liste(6)` renvoie la liste `[0, 1, 4, 13, 42, 121]`. »
$u_0 = 0$, $u_1 = 3\times u_0 + 1 = 1$, $u_2 = 3\times u_1 + 1 = 4$, $u_3 = 3\times u_2 + 1 = 13$ et
$u_4 = 3\times u_3 + 1 = 40 \neq 42$.

Affirmation 1 fausse

2. **Affirmation 2 :** « pour tout entier naturel n, $u_n = \dfrac{1}{2}\times 3^n - \dfrac{1}{2}$. »
   Pour $n = 0$, on a $u_0 = 0$ et $\dfrac{1}{2}\times 3^0 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2} = 0$.
   Pour $n = 1$, on a $u_1 = 1$ et $\dfrac{1}{2}\times 3^1 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{2} = 1$.
   Pour $n = 2$, on a $u_2 = 4$ et $\dfrac{1}{2}\times 3^2 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{9}{2} - \dfrac{1}{2} = 4$.
   On conjecture que la propriété « $u_n = \dfrac{1}{2}\times 3^n - \dfrac{1}{2}$ » est vraie pour tout n, et on va démontrer cette conjecture en utilisant un raisonnement par récurrence.

   - **Initialisation**
     Pour $n = 0$, on a $u_0 = 0$ et $\dfrac{1}{2}\times 3^0 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2} = 0$; la propriété est vraie.
   - **Hérédité**
     On suppose la propriété vraie au rang n, c'est-à-dire $u_n = \dfrac{1}{2}\times 3^n - \dfrac{1}{2}$.
     $u_{n+1} = 3u_n + 1 = 3\left(\dfrac{1}{2}\times 3^n - \dfrac{1}{2}\right) + 1 = \dfrac{1}{2}\times 3^{n+1} - \dfrac{3}{2} + 1 = \dfrac{1}{2}\times 3^{n+1} - \dfrac{1}{2}$
     La propriété est donc vraie au rang $n+1$.
   - **Conclusion**
     La propriété est vraie au rang 0, et elle est héréditaire pour tout $n \geqslant 0$, donc, d'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout n.

Affirmation 2 vraie

3. **Affirmation 3 :** « pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n$ est une puissance de 3. »
   $u_{n+1} - u_n = \left(\dfrac{1}{2}\times 3^{n+1} - \dfrac{1}{2}\right) - \left(\dfrac{1}{2}\times 3^n - \dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{2}\times 3^{n+1} - \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\times 3^n + \dfrac{1}{2}$
   $= \dfrac{1}{2}\times 3^{n+1} - \dfrac{1}{2}\times 3^n = \dfrac{1}{2}\times 3^n(3-1) = \dfrac{1}{2}\times 3^n \times 2 = 3^n$ **Affirmation 3 vraie**