

Devoir Surveillé - 2h

Exercice 1 - suite de fonction - récurrence - france septembre 2019

10 points

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0; 4]$ par

$$f(x) = \frac{2+3x}{4+x}.$$

Partie A

On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 3 \text{ et pour tout entier naturel } n, u_{n+1} = f(u_n).$$

On admet que cette suite est bien définie.

1. Calculer u_1 .
2. Montrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $[0; 4]$.
3. Montrer que pour tout entier naturel n ,

$$1 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 3.$$

4.
 - a. Montrer que la suite (u_n) est convergente.
 - b. On appelle ℓ la limite de la suite (u_n) ; montrer l'égalité :

$$\ell = \frac{2+3\ell}{4+\ell}$$

- c. Déterminer la valeur de la limite ℓ .

Partie B

On considère la suite (v_n) définie par :

$$v_0 = 0, 1 \text{ et pour tout entier naturel } n, v_{n+1} = f(v_n).$$

1. On donne en **Annexe, à rendre avec la copie**, la courbe représentative, \mathcal{C}_f , de la fonction f et la droite D d'équation $y = x$.

Placer sur l'axe des abscisses par construction géométrique les termes v_1 , v_2 et v_3 sur l'**annexe, à rendre avec la copie**.

Quelle conjecture peut-on formuler sur le sens de variation et le comportement de la suite (v_n) quand n tend vers l'infini?

2.
 - a. Montrer que pour tout entier naturel n ,

$$1 - v_{n+1} = \left(\frac{2}{4+v_n} \right) (1 - v_n).$$

- b. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n ,

$$0 \leq 1 - v_n \leq \left(\frac{1}{2} \right)^n.$$

3. La suite (v_n) converge-t-elle? Si oui, préciser sa limite.

Exercice 2 - limites - à bien rédiger

2 points

- 1/ calculer la limite de $\frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + x + 2}$ en $+\infty$
- 2/ calculer la limite de $\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x}$ en $+\infty$

Exercice 3 - étude de fonction

8 points

on considère la fonction $f(x) = \frac{3x - 3}{x + 1}$ définie (à priori) sur \mathbf{R}

- 1/ donner Df , le domaine de définition de f
- 2/ déterminer 2 réels a et b tel que : $f(x) = a + \frac{b}{x + 1}$, $\forall x \in Df$
- 2/ en déduire les limites de f aux bornes du domaine Df
- 3/ en déduire que f admet une asymptote horizontale et une asymptote verticale, dont on donnera les équations
- 4/ calculer f' , la dérivée de f , sur Df ; en déduire le tableau de variation (complet : avec les limites) de f sur Df
- 5/ montrer que si $x > 5$ alors $2 < f(x) < 5$
- 6/ quels sont les entiers naturels non nuls n tels que $n + 1$ divise $3n - 3$?