Chapitre 12

Loi Continue de Probabilité

12.1 Introduction

Cas Discret : on lance 1 dé de 1 à 6 et on définit la V.A. ***discrète*** X associée au résultat

- $X(\Omega) = \{1, \dots, 6\}$
- à X, on associe 1 loi de probabilité : $\mathbb{P}(X = k) = \dfrac{1}{6}$ où $k \in [1..6]$
- $\Rightarrow$ ***il existe des évènements élémentaires*** dont la probabilité est ***non nulle***

Cas Continue : X la V.A.R. ***continue*** associée à la durée d'1 communication téléphonique

- $X(\Omega) = \mathbb{R}_+$
- $\Rightarrow$ ***pour chaque évènement élémentaire***, la probabilité est ***nulle*** : $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $\mathbb{P}(X = x) = 0$
- (pour contourner ce problème), ***on mesure les probabilités sur des intervalles***, ici de $\mathbb{R}_+$: $\Rightarrow \mathbb{P}(a \leqslant X \leqslant b)$ où $a, b \in \mathbb{R}_+$
- par exemple :
  - la probabilité qu'1 appel dure exactement 5 minutes est (toujours) nulle
  - mais la probabilité qu'1 appel dure entre 5 et 6 minutes vaut $\frac{1}{10}$ ...

L'objet de ce chapitre est donc de présenter les propriétés de ces "nouvelles" lois continues au travers de 2 lois importantes : ***la loi uniforme*** et ***la loi exponentielle***; la loi loi normale fera l'objet d'1 chapitre à part entière ...

12.2 Densité de Probabilité et Espérance Mathématique

Définition : soit 1 V.A.R. X continue

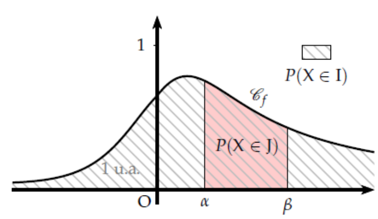
- la ***densité de probabilité*** de X est 1 fonction f continue et positive sur I intervalle de $\mathbb{R}$ tq :
    - $\mathbb{P}(X(\Omega)) = \displaystyle\int_I f(x)\,\mathrm{d}x = 1$
    - $\forall [a,b] \subset \mathbb{R}$, $\mathbb{P}(a \leqslant X \leqslant b) = \displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$
- la ***fonction de répartition*** de X est 1 fonction F tq :
    - $\forall x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \mathbb{P}(X \leqslant x) = \displaystyle\int_{-\infty}^x f(t)\,\mathrm{d}t$
- l'***espérance*** de X est $\mathbb{E}(X) = \displaystyle\int_I x f(x)\,\mathrm{d}x$

Remarque, exemple :

- pour une loi à densité continue, $\forall a, b \in \mathbb{R}$,
  $\mathbb{P}(a < X < b) = \mathbb{P}(a \leqslant X < b) = \mathbb{P}(a < X \leqslant b) = \mathbb{P}(a \leqslant X \leqslant b)$

- f est continue et positive ; donc :
    - $\displaystyle\int_I f(x)\,\mathrm{d}x = 1$

      dit que l'aire totale sous f vaut 1

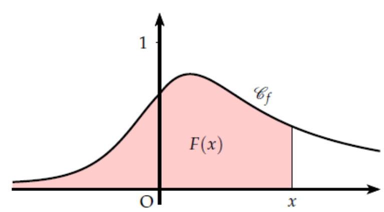


    - $\mathbb{P}(\alpha < X < \beta) = \displaystyle\int_\alpha^\beta f(x)\,\mathrm{d}x$

      calcule l'aire sous f entre α et β :

    - $F(x) = \mathbb{P}(X < x) = \displaystyle\int_{-\infty}^x f(t)\,\mathrm{d}t$

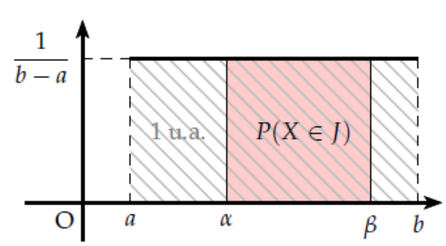
      indique l'aire sous f entre $-\infty$ et x :



12.3 Loi Uniforme sur [a,b] : $X \rightsquigarrow \mathscr{U}([a,b])$

Définition - Propriété : $a, b \neq \mathbb{R}$, I intervalle de $\mathbb{R}$

- ***X suit 1 loi uniforme sur l'intervalle [a,b]*** si sa fonction de densité f est constante
- ***notation :*** $X \rightsquigarrow \mathscr{U}([a,b])$
- des calculs rapides (AF) mq :
    - $\forall\, x \in [a,b]$, $f(x) = \dfrac{1}{b-a}$
    - $\forall\, \alpha, \beta \in [a,b]$, $\mathbb{P}(\alpha < X < \beta) = \dfrac{\beta - \alpha}{b-a}$
    - $\mathbb{E}(X) = \dfrac{a+b}{2}$ et $\mathbb{V}(X) = \dfrac{(b-a)^2}{12}$



Remarque, exemple :

- la formule de $\mathbb{P}(\alpha < X < \beta)$ se retient facilement en la voyant c'est $\dfrac{aire \quad favorable}{aire \quad totale}$
- on choisit au hasard 1 nombre X sur $[0\,;5]$; calculer $\mathbb{P}(X > 4)$ puis $\mathbb{P}(e < X < \pi)$

Approfondissement 1 : méthode de Monte-Carlo par Espérance

$a, b \neq \mathbb{R}$, I intervalle de $\mathbb{R}$

- ***Objectif :*** savoir utiliser la $\boxed{\text{méthode qui permet d'approximer 1 intégrale}}$ (dont le calcul est peut-être très compliqué)
  - on ***génère des valeurs*** $f(x_i)$ ***"au hasard sur*** $[a, b]$***"*** de la fonction f
  - la ***moyenne des valeurs*** tend vers $\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$
- ***H.P. :*** la théorie (simple) repose 2 théorèmes (compliqués) :
  - on pose $\boxed{X = f(U)}$ où $U \rightsquigarrow \mathscr{U}([a, b])$
  - la Loi des Grands Nombres montre que $\boxed{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{X_i}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathbb{E}(X)}$
  - le Théorème du Transfert montre que $\boxed{\mathbb{E}(X) = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}$

Approfondissement 1 (suite) : approximation de π

- ***Méthode MC en dimension 1 :***
  - vérifier que $\dfrac{\pi}{4} = \displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t$; estimer l'intégrale permet alors d'estimer π
  - générer 100 $U_i \rightsquigarrow \mathscr{U}([0, 1])$
  - calculer les 100 $X_i = f(U_i)$ puis calculer $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{X_i}{100}$
  - vérifier que vous obtenez 1 approximation de l'ordre $\pm\dfrac{1}{\sqrt{100}} = \pm 0.1$
  - recommencer pour $n = 1000$ puis $n = 10000$
- ***H.P. : Méthode MC en 2 dimensions :***
  - générer 100 $X_i \rightsquigarrow \mathscr{U}([0, 1])$
  - générer 100 $Y_i \rightsquigarrow \mathscr{U}([0, 1])$
  - comprendre que : $\dfrac{\pi}{4} = \displaystyle\int\int_{Disque} x^2 + y^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$
  - calculer les 100 $Z_i = f(X_i, Y_i) = X_i^2 + Y_i^2$ puis calculer $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{Z_i}{100}$
  - vérifier que vous obtenez 1 approximation de l'ordre $\pm\dfrac{1}{\sqrt{100}} = \pm 0.1$
  - recommencer pour $n = 1000$ puis $n = 10000$
  - complément : on peut montrer que cette méthode est légèrement moins performante que la précédente ; le constatez-vous numériquement ?

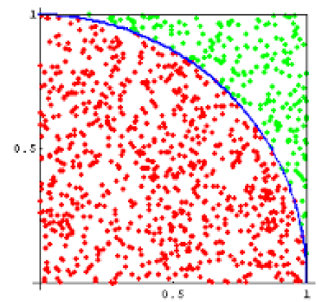
Remarque, exemple :

- la méthode de MC est bien moins performante en dimension 1 que la méthode rectangle ou trapèze
- elle peut être utilisée ***à l'identique*** dans n'importe quelle dimension et sur n'importe quel domaine d'intégration
- elle devient plus efficace à partir de la dimension 4
- elle est très simple à utiliser sur un domaine d'intégration implicite

Approfondissement 2 : méthode de Monte-Carlo par test IN/OUT

$a, b \neq \mathbb{R}$, I intervalle de $\mathbb{R}$

- ***Même objectif :*** savoir utiliser la $\boxed{\text{méthode pour approximer 1 intégrale}}$
  - on va créer une E.A. permettant d'estimer $\dfrac{\pi}{4}$
  - l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t$ correspond à l'aire sous la fonction $f(t) = \sqrt{1-t^2}$
  - on place cette aire dans le pavé [0,1]x[0,1]
    l'aire sous la courbe (donc l'intégrale) est associée au succès
    l'autre partie de l'aire à l'échec
  - $\dfrac{\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t}{Aire_{Pave}} = \dfrac{Aire_{Courbe}}{Aire_{Pave}} = \dfrac{\frac{\pi}{4}}{1 \times 1} = \dfrac{\pi}{4}$
    en créant n points aléatoires $(X_i\,,\,Y_i)$
    on crée n tests $\boxed{T_i \rightsquigarrow \mathscr{B}(\frac{\pi}{4})}$ associé à
    n succès ou échec d'être dans le $\dfrac{1}{4}$ cercle

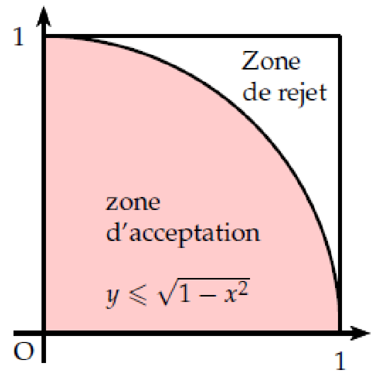


  - $\boxed{\text{la proportion } \dfrac{succes}{total} \text{ tend vers } \mathbb{E}(X) = \displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t = \dfrac{\pi}{4}}$ (résultat de seconde)
- ***H.P. :*** la théorie (simple) repose 1 théorème (compliqué) :
  - $X_i \rightsquigarrow \mathscr{B}(\frac{\pi}{4}) \Rightarrow$ la Loi des Grands Nombres montre que $\boxed{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{X_i}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathbb{E}(X) = \frac{\pi}{4}}$

Approfondissement 2 (suite) : approximation de π :

La seule difficulté maintenant est de générer les points. Pour cela, on considère 2 méthodes.

- ***Méthode 1 : sous la courbe***
  - générer 100 $X_i \rightsquigarrow \mathscr{U}([0,1])$ (abscisse du point) et 100 $Y_i \rightsquigarrow \mathscr{U}([0,1])$ (ordonnée du point)
  - effectuer 100 tests : $Y_i \leqslant f(X_i)$ qui correspondent à (attention pas évident à comprendre) le point est dans le cercle
  - compter le nombre de tests réussis et en déduire l'estimation
  - recommencer pour $n = 1000$ puis $n = 10000$



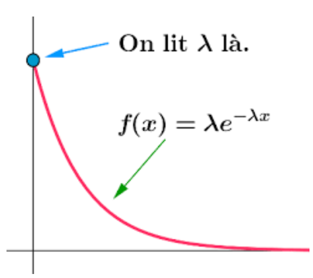
- ***Méthode 2 :*** $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$
  - générer 100 $X_i \rightsquigarrow \mathscr{U}([0,1])$
  - générer 100 $Y_i \rightsquigarrow \mathscr{U}([0,1])$
  - effectuer 100 tests : $X_i^2 + Y_i^2 \leqslant 1$ qui correspondent à le point est dans le cercle
  - compter le nombre de tests réussis et en déduire l'estimation
  - vérifier que vous obtenez 1 approximation de l'ordre $\pm\dfrac{1}{\sqrt{100}}$
  - recommencer pour $n = 1000$ puis $n = 10000$
- ***Visualisation de l'expérience*** d'approximation de π sous GeoGebra ou Python

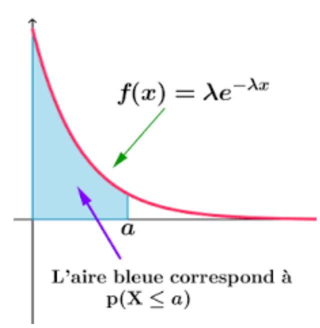
12.4 Loi Exponentielle : X $\rightsquigarrow \mathscr{E}(\lambda)$

Définition - Propriété : $a, b \neq \mathbb{R}$, I intervalle de $\mathbb{R}$

- ***X suit 1 loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$***

  si sa fonction de densité f est $\begin{cases} 0 & si \quad t \in \mathbb{R}_-^* \\ f(t) = \lambda e^{-\lambda t} & si \quad t \in \mathbb{R}_+ \end{cases}$
- ***notation :*** $X \rightsquigarrow \mathscr{E}(\lambda)$
- $\forall a \in \mathbb{R}_+$, $FR(a) = \mathbb{P}(X \leqslant a) = 1 - e^{-\lambda a}$
- $\mathbb{E}(X) = \dfrac{1}{\lambda}$ et $\mathbb{V}(X) = \dfrac{1}{\lambda^2}$





- ***la loi exponentielle est sans mémoire :***

  $\boxed{\forall t > 0 \text{ , } \forall h > 0 \text{ , } \mathbb{P}_{X \geqslant t}(X \geqslant t + h) = \mathbb{P}(X \geqslant h)}$

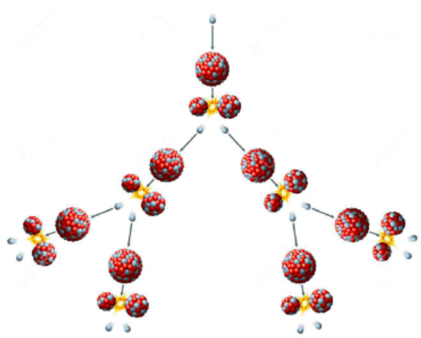
Remarque, exemple :

- AF : vérifier que f ainsi définie est bien une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$
- AF : retrouver la FR de f
- AF : retrouver l'espérance et la variance de X associée à f
  Preuve : loi exponentielle
- loi exponentielle $\Leftrightarrow$ loi sans mémoire :
  - AF $\Rightarrow$: la loi exponentielle vérifie cette propriété
  - Admis $\Leftarrow$: cette propriété est caractéristique de cette loi
    (si 1 loi vérifie cette propriété alors il s'agit obligatoirement d'1 loi exponentielle)
- ***Exemple :*** la durée de vie, en année, d'un composant électronique est une variable aléatoire notée T qui suit une loi sans vieillissement de paramètre λ. Une étude statistique a montré que pour ce type de composant, la durée de vie ne dépasse pas 5 ans avec une probabilité de 0.675.

  1) calculer la valeur λ
  2) quelle est la probabilité qu'un composant de ce type dure moins de 8 ans ? plus de 10 ans ? au moins 8 ans sachant qu'il fonctionne au bout de 3 ans ?
  3) quelle est l'espérance de vie de ce composant ?

12.5 Applications en Physique

La désintégration radioactive est un phénomène aléatoire. c'est à dire que l'on ne peut pas, à l'échelle « *microscopique* », dire quand un noyau va se désintégrer. Néanmoins, à l'échelle macroscopique, on a pu établir que la durée de vie d'un noyau radioactif suit une loi de durée de vie sans vieillissement c'est à dire une loi exponentielle de paramètre λ. λ étant la constante radioactive (en s^{-1}) qui caractérise un radionucléide.



On appelle T la variable aléatoire associée à la durée de vie d'un noyau. La probabilité p qu'un noyau ne soit pas désintégré à l'instant t est donc :

$$p = P(T \geqslant t) = e^{-\lambda t}$$

Si au départ on compte N_0 noyaux au bout d'un temps t, on en comptera $N(t)$ qui vérifie :

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$$

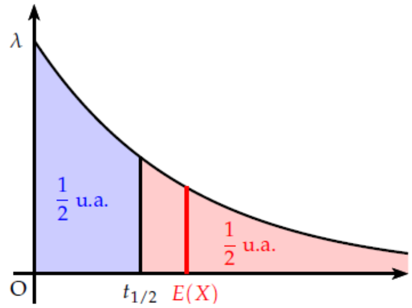
On appelle demi-vie $t_{1/2}$, le temps nécessaire pour que le nombre de radionucléides soit divisé par 2. On a alors :

$$e^{-\lambda t_{1/2}} = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad -\lambda t_{1/2} = -\ln 2 \quad \Leftrightarrow \quad t_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}$$

Enfin la durée de vie moyenne τ d'un radionucéide est donnée par l'espérance mathématique :

$$\tau = \frac{1}{\lambda} \quad \text{or} \quad \lambda = \frac{\ln 2}{t_{1/2}} \quad \text{donc} \quad \tau = \frac{t_{1/2}}{\ln 2} \simeq 1,44\, t_{1/2}$$

Remarque : La demi-vie $t_{1/2}$ n'est pas égale à la durée de vie moyenne $\tau = E(X)$ car la courbe de densité de probabilité $\mathscr{C}_f$ n'est pas symétrique par rapport à la droite verticale d'abscisse E(X).



12.6 Lien entre Loi discrète et Loi Continue

Discret	Continu
Univers Ω	Intervalle I ou $\mathbb{R}$
Événement E sous-ensemble de Ω	Événement J sous-intervalle de I
Probabilités p_i des événements élémentaires $\sum p_i = 1$	Densité de probabilité $\int_{(I)} f(t)\,dt = 1$
Espérance de la variable aléatoire X $E(X) = \sum p_i x_i$	Espérance de la variable aléatoire X $E(X) = \int_{(I)} t\,f(t)\,dt$
Équiprobabilité $P(E) = \dfrac{\text{nbre de cas favorables}}{\text{nbre de cas possibles}}$	Loi uniforme $P(X \in J) = \dfrac{\text{longueur de J}}{\text{longueur de I}}$

12.7 Sujet de Bac

Ex1 : Antilles 2015

Partie A

On considère une variable aléatoire X qui suit la loi exponentielle de paramètre λ avec $\lambda > 0$.
On rappelle que, pour tout réel a strictement positif,

$$P(X \leqslant a) = \int_0^a \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t.$$

On se propose de calculer l'espérance mathématique de X, notée $E(X)$, et définie par

$$E(X) = \lim_{x\to+\infty} \int_0^x \lambda t \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t.$$

On note $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels.
On admet que la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(t) = -\left(t + \dfrac{1}{\lambda}\right)\mathrm{e}^{-\lambda t}$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = \lambda t \mathrm{e}^{-\lambda t}$.

1. Soit x un nombre réel strictement positif. Vérifier que

$$\int_0^x \lambda t \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\lambda}\left(-\lambda x \mathrm{e}^{-\lambda x} - \mathrm{e}^{-\lambda x} + 1\right).$$

2. En déduire que $E(X) = \dfrac{1}{\lambda}$.

Partie B

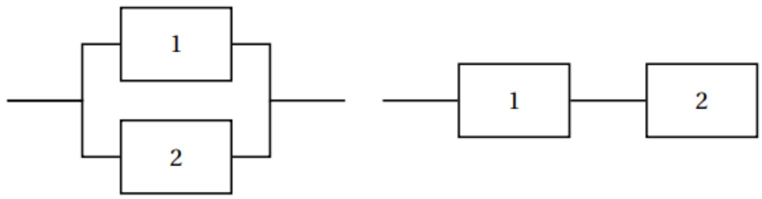
La durée de vie, exprimée en années, d'un composant électronique peut être modélisée par une variable aléatoire notée X suivant la loi exponentielle de paramètre λ avec $\lambda > 0$.
La courbe de la fonction densité associée est représentée en **annexe 2**.

1. Sur le graphique de l'annexe 2 (à rendre avec la copie) :
   - **a.** Représenter la probabilité $P(X \leqslant 1)$.
   - **b.** Indiquer où se lit directement la valeur de λ.
2. On suppose que $E(X) = 2$.
   - **a.** Que représente dans le cadre de l'exercice la valeur de l'espérance mathématique de la variable aléatoire X ?
   - **b.** Calculer la valeur de λ.
   - **c.** Calculer $P(X \leqslant 2)$. On donnera la valeur exacte puis la valeur arrondie à 0,01 près.
     Interpréter ce résultat.

d. Sachant que le composant a déjà fonctionné une année, quelle est la probabilité que sa durée de vie totale soit d'au moins trois années? On donnera la valeur exacte.

Partie C

Un circuit électronique est composé de deux composants identiques numérotés 1 et 2. On note D_1 l'évènement « le composant 1 est défaillant avant un an » et on note D_2 l'évènement « le composant 2 est défaillant avant un an ».
On suppose que les deux évènements D_1 et D_2 sont indépendants et que
$P(D_1) = P(D_2) = 0,39$.
Deux montages possibles sont envisagés, présentés ci-dessous :



Circuit en parallèle A Circuit en série B

1. Lorsque les deux composants sont montés « en parallèle », le circuit A est défaillant uniquement si les deux composants sont défaillants en même temps. Calculer la probabilité que le circuit A soit défaillant avant un an.
2. Lorsque les deux composants sont montés « en série », le circuit B est défaillant dès que l'un au moins des deux composants est défaillant. Calculer la probabilité que le circuit B soit défaillant avant un an.

Ex2 : (série ES) Centre Étranger 2013

Tous les jours, Guy joue à un jeu en ligne sur un site, avec trois amis.

1. Paul se connecte sur le site. La durée D (en seconde) qu'il faut pour réunir les quatre joueurs est une variable aléatoire qui suit une loi uniforme sur l'intervalle $[20 ; 120]$.
   a. Déterminer la probabilité que les quatre joueurs soient réunis au bout de 60 secondes.
   b. Calculer l'espérance mathématique de D. Interpréter ce résultat.
2. L'équipe est maintenant réunie et la partie peut commencer. La durée J (en minute) d'une partie est une variable aléatoire qui suit la loi normale $\mathcal{N}(120, 400)$.
   a. Déterminer l'espérance et l'écart-type de la variable aléatoire J.
   b. Montrer l'équivalence :
   $$90 < J < 180 \Leftrightarrow -1,5 < \frac{J-120}{20} < 3$$
   c. On définit la variable aléatoire X par $X = \frac{J-120}{20}$.
   Déterminer la loi suivie par la variable aléatoire X.
   d. Déterminer la probabilité que la partie dure entre 90 et 180 minutes, à 0,001 près.