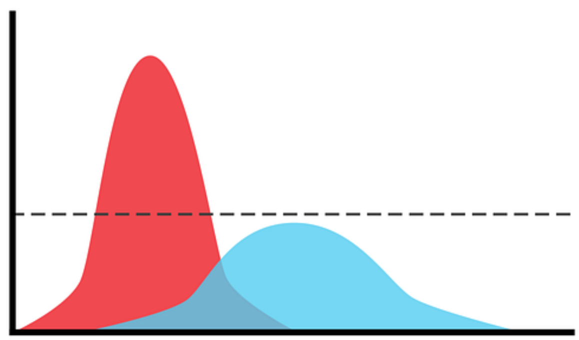
Chapitre 13

Loi Normale



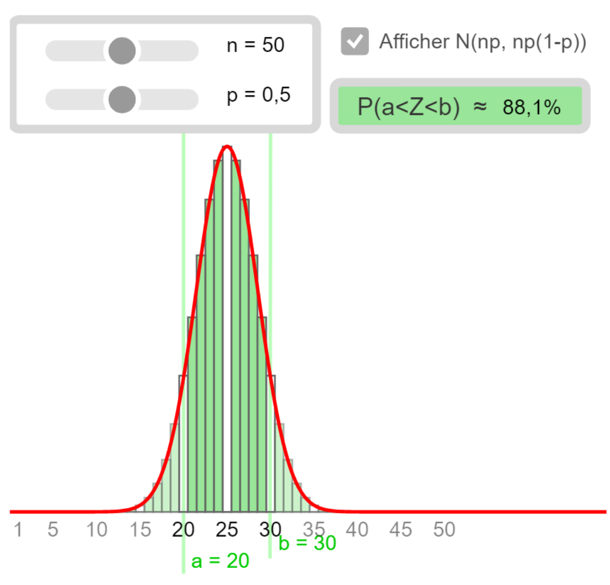
13.1 du Discret au Continu

Imaginons que l'on étudie une VA X qui suit une loi Binomiale (loi compliquée)

Si n est grand (à préciser), on approxime X par Y qui elle suit une loi Normale (plus simple) : c'est la courbe de Gauss, appelée aussi courbe en cloche

On passe alors d'une distribution discrète à une distribution continue, ce qui est plus simple pour les calculs (lorsqu'ils sont possibles)

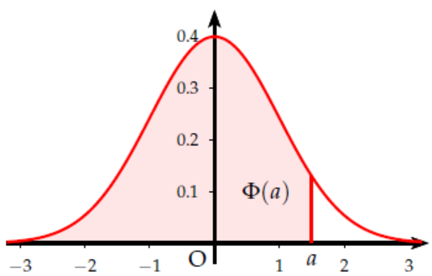
La loi Normale intervient dans de nombreuses situations : taille des arbres, longueur des pieds ... et mène au fameux Théorème Central Limit

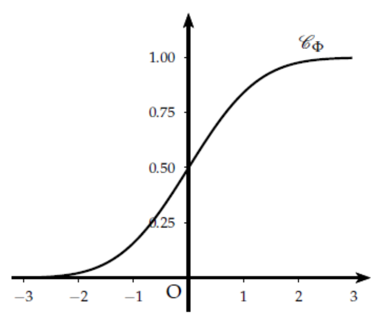


13.2 la loi Normale Centrée Réduite : $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(0,1)$

Définition : soit 1 V.A.R. X continue sur $\mathbb{R}$

- X suit une ***loi Normale Centrée Réduite*** si sa densité de probabilité est $\boxed{\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}}$
- on note alors $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(0,1)$ pour laquelle
l'espérance $\mathbb{E}(X) = 0$ (centrée)
la variance $\mathbb{V}(X) = 1$ (réduite)
- on admet que c'est 1 densité de probabilité :
$\mathbb{P}(X \in \mathbb{R}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} \, \mathrm{d}t = 1$
- $\forall [a,b] \subset \mathbb{R}$, $\mathbb{P}(a \leqslant X \leqslant b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{t^2}{2}} \, \mathrm{d}t$
- Φ la ***Fonction de Répartition*** de X est :
$\mathbb{P}(X \leqslant a) = \boxed{\Phi(a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{a} e^{-\frac{t^2}{2}} \, \mathrm{d}t \text{ , } \forall x \in \mathbb{R}}$





Remarque, exemple :

- on notera que φ est paire :
  - ceci facilite certains calculs : $\mathbb{P}(X \geqslant x) = \mathbb{P}(X \leqslant -x)$ ou bien $\mathbb{P}(X \leqslant 0) = \mathbb{P}(X \geqslant 0) = \dfrac{1}{2}$
  - cela confirme aussi que $\mathbb{E}(X) = 0$ (prouver le, sans calcul)
- ***A.F. :*** savoir utiliser sa calculatrice pour calculer $\mathbb{P}(a \leqslant X \leqslant b)$ et $\mathbb{P}(X \leqslant a)$ (***indispensable***)

Propriété :

- ***Si*** $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(0,1)$ ***Alors*** $\forall\, a\,,\, b \in \mathbb{R}$:

  $\mathbb{P}(a \leqslant X \leqslant b) = \Phi(b) - \Phi(a)$ et $\mathbb{P}(X \geqslant a) = 1 - \Phi(a)$
- ***Valeurs à connaître :***

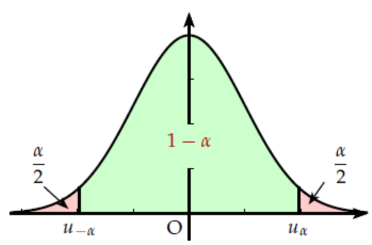
  $\mathbb{P}(-1 \leqslant X \leqslant 1) \approx 0.68$ $\mathbb{P}(-2 \leqslant X \leqslant 2) \approx 0.95$ $\mathbb{P}(-3 \leqslant X \leqslant 3) \approx 0.997$

Exemple :

- calculer : $\mathbb{P}(X \geqslant 1.35)$, $\mathbb{P}(X \leqslant -0.56)$, $\mathbb{P}(-0.56 \leqslant X \leqslant 1.35)$, $\mathbb{P}(-0.56 \leqslant X$ ou $X \geqslant 1.35)$

ROC - Propriété :

- ***Si :*** $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(0,1)$
- ***Alors :***
  $\forall\, \alpha \in]\,0\,;\,1\,[\;,\; \exists!\; u_\alpha > 0$ tq :
  $\mathbb{P}(-u_\alpha \leqslant X \leqslant u_\alpha) = 1 - \alpha$



Preuve, exemple :

- ***ROC - Preuve :*** on cherche $u_\alpha > 0$ tq :
  - $\mathbb{P}(-u_\alpha \leqslant X \leqslant u_\alpha) = 1 - \alpha \Leftrightarrow \Phi(u_\alpha) - \Phi(-u_\alpha) = 1 - \alpha \Leftrightarrow \Phi(u_\alpha) - (1 - \Phi(u_\alpha)) = 1 - \alpha$
    $\Leftrightarrow 2\Phi(u_\alpha) - 1 = 1 - \alpha \Leftrightarrow \Phi(u_\alpha) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} \in]\frac{1}{2}; 1[$ car $\alpha \in]0;1[$
  - on applique maintenant le Théorème des Valeurs Intermédiaires à Φ :
    - Φ est continue sur $\mathbb{R}$ (en tant que primitive d'1 fonction continue)
    - Φ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ (en temps que FdR d'1 loi à densité continue)
    - $\Phi(0) = \dfrac{1}{2}$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \Phi(x) = 1$
  - d'après le Théorème des Valeurs Intermédiaires, il existe une unique valeur $u_\alpha > 0$ tq $\Phi(u_\alpha) = 1 - \dfrac{\alpha}{2}$
  - $\Leftrightarrow \exists!\; u_\alpha > 0$ tq $\mathbb{P}(-u_\alpha \leqslant X \leqslant u_\alpha) = 1 - \alpha$
- ***Valeurs à connaître :*** $\mathbb{P}(-1.96 \leqslant X \leqslant 1.96) \approx 0.95$ et $\mathbb{P}(-2.58 \leqslant X \leqslant 2.58) \approx 0.99$
- $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(0,1)$; déterminer l'intervalle I centré en 0 tel que $\mathbb{P}(X \in I) = 0.8$

13.3 la loi Normale générale : $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

Définition : soit 1 V.A.R. X continue sur $\mathbb{R}$

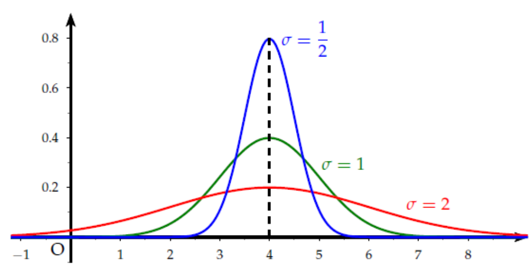
- $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ (espérance μ et variance σ^2) ***si*** $Z = \dfrac{x-\mu}{\sigma} \rightsquigarrow \mathcal{N}(0,1)$
- rappelons que : $\mathbb{E}(aX+b) = a\mathbb{E}(X)+b$ et $\mathbb{V}(aX+b) = a^2\mathbb{V}(X)$

Remarque, exemple :

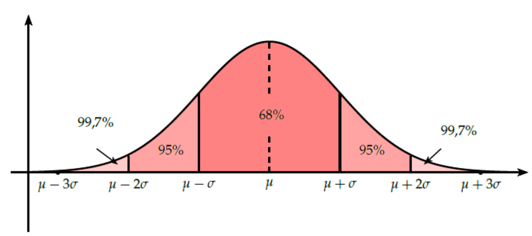
- ***Rq :*** pour une loi Normale, passer de X à Z s'appelle ***center-réduire*** la variable X
  - center : passer d'1 espérance $\mathbb{E}(X)$ à 0
  - réduire : passer d'1 écart-type $\sigma(X)$ à 1
  - cette opération est à savoir faire dans les 2 sens
  - voici une simulation des 2 opérations : Geogebra Center Réduire une loi Normale
- ***Ex :*** les températures de l'eau du mois de juillet en bord de lac suivent une loi normale d'espérance 18.2 °C et d'écart-type 3.6 °C ; si 1 personne part camper en juillet au bord du lac, que peut-on lui indiquer comme probabilité de température de l'eau des plages dans les cas suivants :
  - températures inférieures à 16 °C
  - températures comprises entre 20 °C et 24.5 °C
  - températures supérieures à 21 °C

13.4 Influence de l'écart type

- voici les courbes des densités pour 1 espérance de 4 et aux écarts types de : 1 , 2 et $\dfrac{1}{2}$
- plus l'écart type est important, plus la courbe de densité est aplatie et plus le maximum est petit
  écart type grand ⇔ dispersion données grande



- pour chaque loi normale, on a :
  - $\mathbb{P}(\mu - \sigma \leqslant X \leqslant \mu + \sigma) = 0.68$
  - $\mathbb{P}(\mu - 2\sigma \leqslant X \leqslant \mu + 2\sigma) = 0.95$
  - $\mathbb{P}(\mu - 3\sigma \leqslant X \leqslant \mu + 3\sigma) = 0.997$



13.5 Approximation de la loi Binomiale par la loi Normale (théorème Central-Limit)

- ***Contexte :*** soit 1 VA binomiale $X_n \rightsquigarrow \mathscr{B}(n,p)$; $\forall\, 0 \leqslant i \leqslant n$, $\mathbb{P}(X_n \leqslant k) = \displaystyle\sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}$
- ***Problème :*** lorsque n est grand, ce calcul est très lourd à cause des $\binom{n}{i}$
- ***Question :*** peut-on ***approximer cette loi par une autre*** plus simple : est-ce possible ? comment faire ? quelle est l'erreur d'approximation ?

- ***Réponse :***
  - oui, c'est possible, grâce au théorème de Moivre-Laplace
  - par commodité, on approxime plutôt la loi de la variable centrée réduite :
    $Z_n = \dfrac{X_n - \mathbb{E}(X_n)}{\sigma(X_n)} = \dfrac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$

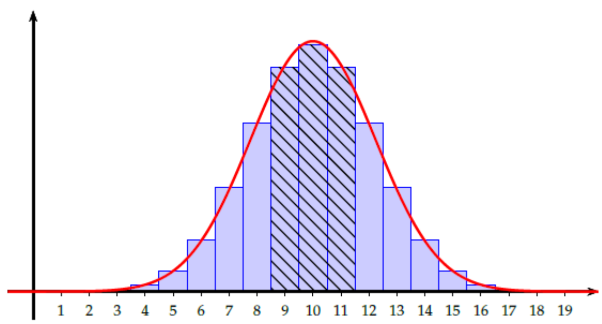
Théorème de Moivre - Laplace (cas particulier Central-Limit) - Admis :

- ***Si*** $X_n \rightsquigarrow \mathscr{B}(n,p)$
- ***Alors*** la ***loi de probabilité de*** $Z_n = \dfrac{X_n - \mathbb{E}(X_n)}{\sigma(X_n)} = \dfrac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathscr{N}(0,1)$
- ***en clair :*** $\boxed{\text{lorsque } n \text{ est grand, } \mathscr{B}(n,p) \approx \mathscr{N}(np, np(1-p))}$
- en pratique, l'approximation est valable pour $n \geqslant 30$ et $np \geqslant 5$ ou $n(1-p) \geqslant 5$
- pour plus de détails :
  - animation, voir : Geogebra Moivre-Laplace
  - explication, voir : Moivre-Laplace
- ***HP :*** c'est la loi de la VA qui est approximée, pas la VA elle-même (convergence en loi)

.

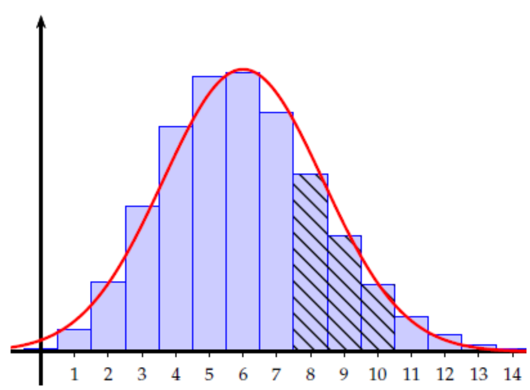
Exemple 1 :

- voici les lois de X_{20} et son approximation X :
  - $X_{20} \rightsquigarrow \mathscr{B}(20, 0.5)$
  - $X \rightsquigarrow \mathscr{N}(10, 5)$
- vérifier les conditions d'approximation
- calculer $\mathbb{P}(9 \leqslant X_{20} \leqslant 11)$
- comparer à son approximation
  ne pas oublier la discrétisation
  (réponse : erreur de 0.1%)



Exemple 2 :

- on a tracé X_{20} et son approximation X :
  - $X_{100} \rightsquigarrow \mathscr{B}(100, 0.06)$
  - préciser son approximation normale X
- vérifier les conditions d'approximation
- calculer $\mathbb{P}(8 \leqslant X_{100} \leqslant 10)$
- comparer à son approximation
  ne pas oublier la discrétisation
  (réponse : erreur de 2%)



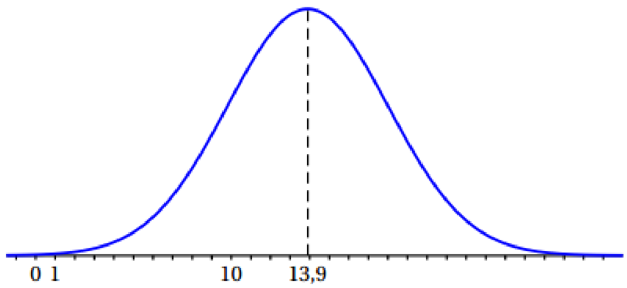
HP - Théorème Central-Limit) :

- lorsque l'on fait la somme d'1 très grand nombre de VAI, de loi quelconque, cette somme suit une loi normale.

13.6 Exercice Type Bac

Exercice 1 : Pondichéry 2016

Des études statistiques ont permis de modéliser le temps hebdomadaire, en heures, de connexion à internet des jeunes en France âgés de 16 à 24 ans par une variable aléatoire T suivant une loi normale de moyenne $\mu = 13,9$ et d'écart type σ.
La fonction densité de probabilité de T est représentée ci-dessous :



1. On sait que $p(T \geqslant 22) = 0,023$.
   En exploitant cette information :
   a. hachurer sur le graphique donné en annexe, deux domaines distincts dont l'aire est égale à $0,023$;
   b. déterminer $P(5,8 \leqslant T \leqslant 22)$. Justifier le résultat. Montrer qu'une valeur approchée de σ au dixième est $4,1$.
2. On choisit un jeune en France au hasard.
   Déterminer la probabilité qu'il soit connecté à internet plus de 18 heures par semaine.
   Arrondir au centième.

Exercice 2 : Asie 2016

Un maraîcher est spécialisé dans la production de fraises.
Cet exercice envisage dans la partie A la production de fraises, et dans la partie B leur conditionnement.

Les deux parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

Partie A : production de fraises

Le maraîcher produit ses fraises dans deux serres notées A et B ; 55 % des fleurs de fraisier se trouvent dans la serre A, et 45 % dans la serre B. Dans la serre A, la probabilité pour chaque fleur de donner un fruit est égale à 0,88 ; dans la serre B, elle est égale à 0,84.

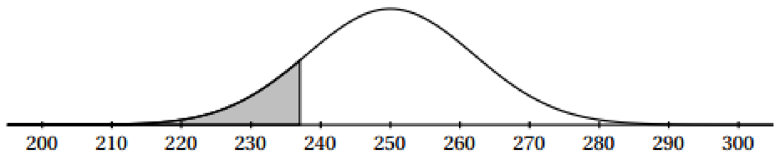
Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse. Une réponse non justifiée ne sera pas prise en compte.

Proposition 1 :
La probabilité qu'une fleur de fraisier, choisie au hasard dans cette exploitation, donne un fruit est égale à 0,862.

Proposition 2 :
On constate qu'une fleur, choisie au hasard dans cette exploitation, donne un fruit.
La probabilité qu'elle soit située dans la serre A, arrondie au millième, est égale à 0,439.

Partie B : conditionnement des fraises

Les fraises sont conditionnées en barquettes. La masse (exprimée en gramme) d'une barquette peut être modélisée par une variable aléatoire X qui suit la loi normale d'espérance $\mu = 250$ et d'écart-type σ.
La représentation graphique de la fonction densité de la loi de probabilité de la variable aléatoire X est donnée ci-après :



1. On donne $P(X237) = 0,14$. Calculer la probabilité de l'évènement « la masse de la barquette est comprise entre 237 et 263 grammes ».

2. On note Y la variable aléatoire définie par : $Y = \dfrac{X - 250}{\sigma}$.

a. Quelle est la loi de la variable aléatoire Y ?

b. Démontrer que $P\left(Y - \dfrac{13}{\sigma}\right) = 0,14$.

c. En déduire la valeur de σ arrondie à l'entier.

3. Dans cette question, on admet que σ vaut 12. On désigne par n et m deux nombres entiers.

a. Une barquette est conforme si sa masse, exprimée en gramme, se trouve dans l'intervalle $250 - n$; $250 + n$. Déterminer la plus petite valeur de n pour qu'une barquette soit conforme, avec une probabilité supérieure ou égale à 95 %.

b. On considère dans cette question qu'une barquette est conforme si sa masse, exprimée en gramme,se trouve dans l'intervalle 230 ; m. Déterminer la plus petite valeur de m pour qu'une barquette soit conforme, avec une probabilité supérieure ou égale à 95 %.

