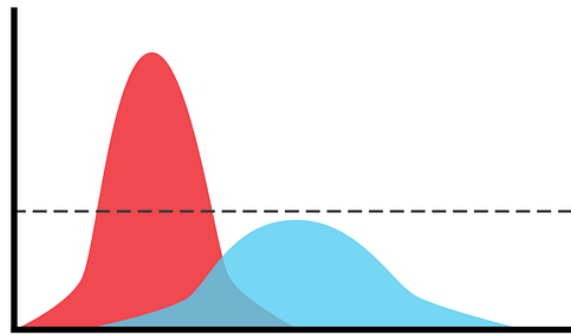


Chapitre 13

Loi Normale



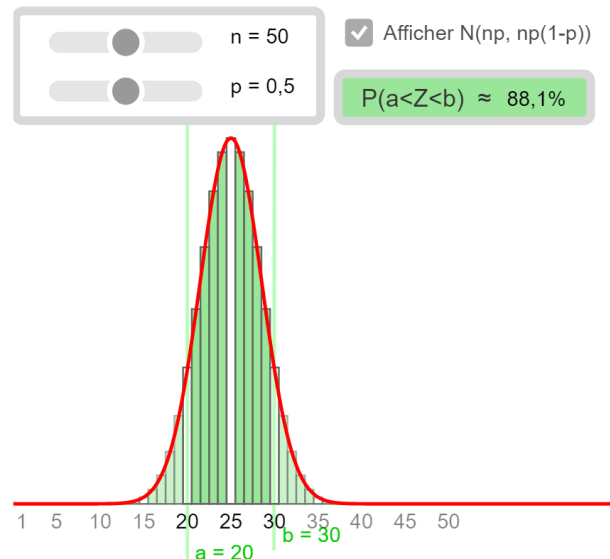
13.1 du Discret au Continu

Imaginons que l'on étudie une VA X qui suit une loi Binomiale (loi compliquée)

Si n est grand (à préciser), on approxime X par Y qui elle suit une loi Normale (plus simple) : c'est la courbe de Gauss, appelée aussi courbe en cloche

On passe alors d'une distribution discrète à une distribution continue, ce qui est plus simple pour les calculs (lorsqu'ils sont possibles)

La loi Normale intervient dans de nombreuses situations : taille des arbres, longueur des pieds ... et mène au fameux Théorème Central Limit



13.2 la loi Normale Centrée Réduite : $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, 1)$

Définition : soit 1 V.A.R. X continue sur \mathbb{R}

- X suit une **loi Normale Centrée Réduite** si sa densité de probabilité est

$$\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$$

- on note alors $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, 1)$ pour laquelle l'espérance $\mathbb{E}(X) = 0$ (centrée) la variance $\mathbb{V}(X) = 1$ (réduite)

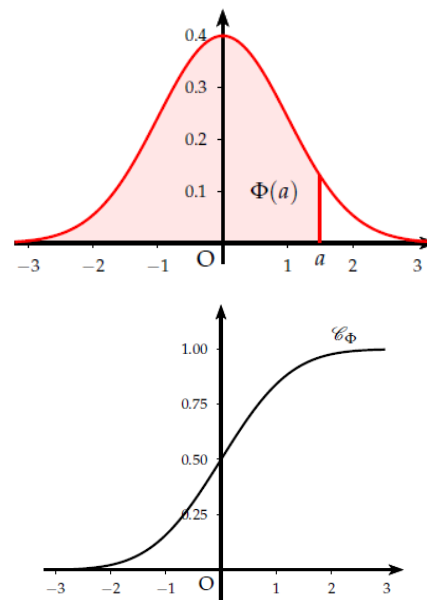
- on admet que c'est 1 densité de probabilité :

$$\mathbb{P}(X \in \mathbb{R}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 1$$

- $\forall [a, b] \subset \mathbb{R}, \mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{t^2}{2}} dt$

- Φ la **Fonction de Répartition** de X est :

$$\mathbb{P}(X \leq a) = \Phi(a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^a e^{-\frac{t^2}{2}} dt, \forall x \in \mathbb{R}$$



Remarque, exemple :

- on notera que φ est paire :
 - ceci facilite certains calculs : $\mathbb{P}(X \geq x) = \mathbb{P}(X \leq -x)$ ou bien $\mathbb{P}(X \leq 0) = \mathbb{P}(X \geq 0) = \frac{1}{2}$
 - cela confirme aussi que $\mathbb{E}(X) = 0$ (prouver le, sans calcul)
- A.F. :** savoir utiliser sa calculatrice pour calculer $\mathbb{P}(a \leq X \leq b)$ et $\mathbb{P}(X \leq a)$ (**indispensable**)

Propriété :

- Si** $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, 1)$ **Alors** $\forall a, b \in \mathbb{R}$:

$$\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \Phi(b) - \Phi(a) \text{ et } \mathbb{P}(X \geq a) = 1 - \Phi(a)$$

- Valeurs à connaître :**

$$\mathbb{P}(-1 \leq X \leq 1) \approx 0.68$$

$$\mathbb{P}(-2 \leq X \leq 2) \approx 0.95$$

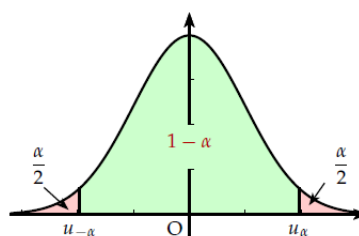
$$\mathbb{P}(-3 \leq X \leq 3) \approx 0.997$$

Exemple :

- calculer : $\mathbb{P}(X \geq 1.35)$, $\mathbb{P}(X \leq -0.56)$, $\mathbb{P}(-0.56 \leq X \leq 1.35)$, $\mathbb{P}(-0.56 \leq X \text{ ou } X \geq 1.35)$

ROC - Propriété :

- Si** : $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, 1)$
- Alors :**
 $\forall \alpha \in]0; 1[, \exists ! u_\alpha > 0$ tq :
 $\mathbb{P}(-u_\alpha \leq X \leq u_\alpha) = 1 - \alpha$



Preuve, exemple :

- **ROC - Preuve** : on cherche $u_\alpha > 0$ tq :
 - $\mathbb{P}(-u_\alpha \leq X \leq u_\alpha) = 1 - \alpha \Leftrightarrow \Phi(u_\alpha) - \Phi(-u_\alpha) = 1 - \alpha \Leftrightarrow \Phi(u_\alpha) - (1 - \Phi(u_\alpha)) = 1 - \alpha$
 $\Leftrightarrow 2\Phi(u_\alpha) - 1 = 1 - \alpha \Leftrightarrow \Phi(u_\alpha) = 1 - \frac{\alpha}{2} \in]\frac{1}{2}; 1[\text{ car } \alpha \in]0; 1[$
 - on applique maintenant le Théorème des Valeurs Intermédiaires à Φ :
 - Φ est continue sur \mathbb{R} (en tant que primitive d'une fonction continue)
 - Φ est strictement croissante sur \mathbb{R} (en tant que FdR d'une loi à densité continue)
 - $\Phi(0) = \frac{1}{2}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \Phi(x) = 1$
 - d'après le Théorème des Valeurs Intermédiaires, il existe une unique valeur $u_\alpha > 0$ tq $\Phi(u_\alpha) = 1 - \frac{\alpha}{2}$
 - $\Leftrightarrow \exists ! u_\alpha > 0$ tq $\mathbb{P}(-u_\alpha \leq X \leq u_\alpha) = 1 - \alpha$
- **Valeurs à connaître** : $\mathbb{P}(-1.96 \leq X \leq 1.96) \approx 0.95$ et $\mathbb{P}(-2.58 \leq X \leq 2.58) \approx 0.99$
- $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, 1)$; déterminer l'intervalle I centré en 0 tel que $\mathbb{P}(X \in I) = 0.8$

13.3 la loi Normale générale : $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

Définition : soit 1 V.A.R. X continue sur \mathbb{R}

- $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ (espérance μ et variance σ^2) **si** $Z = \frac{x - \mu}{\sigma} \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, 1)$
- rappelons que : $\mathbb{E}(aX + b) = a\mathbb{E}(X) + b$ et $\mathbb{V}(aX + b) = a^2\mathbb{V}(X)$

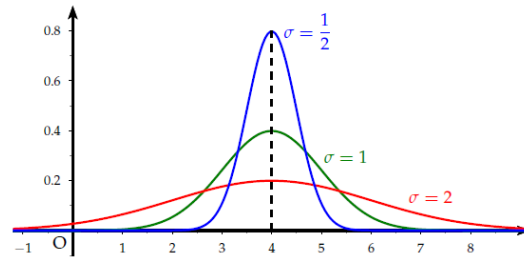
Remarque, exemple :

- **Rq** : pour une loi Normale, passer de X à Z s'appelle **center-réduire** la variable X
 - center : passer d'une espérance $\mathbb{E}(X)$ à 0
 - réduire : passer d'un écart-type $\sigma(X)$ à 1
 - cette opération est à savoir faire dans les 2 sens
 - voici une simulation des 2 opérations : Geogebra Center Réduire une loi Normale
- **Ex** : les températures de l'eau du mois de juillet en bord de lac suivent une loi normale d'espérance 18.2 °C et d'écart-type 3.6 °C ; si 1 personne part camper en juillet au bord du lac, que peut-on lui indiquer comme probabilité de température de l'eau des plages dans les cas suivants :
 - températures inférieures à 16 °C
 - températures comprises entre 20 °C et 24.5 °C
 - températures supérieures à 21 °C

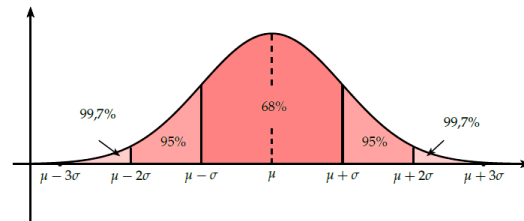
13.4 Influence de l'écart type

- voici les courbes des densités pour 1 espérance de 4 et aux écarts types de : 1, 2 et $\frac{1}{2}$
- plus l'écart type est important, plus la courbe de densité est aplatie et plus le maximum est petit

écart type grand \Leftrightarrow dispersion données grande



- pour chaque loi normale, on a :
 - $\mathbb{P}(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) = 0.68$
 - $\mathbb{P}(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) = 0.95$
 - $\mathbb{P}(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) = 0.997$



13.5 Approximation de la loi Binomiale par la loi Normale (théorème Central-Limit)

- Contexte** : soit 1 VA binomiale $X_n \rightsquigarrow \mathcal{B}(n, p)$; $\forall 0 \leq i \leq n$, $\mathbb{P}(X_n \leq k) = \sum_{i=0}^k \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}$
- Problème** : lorsque n est grand, ce calcul est très lourd à cause des $\binom{n}{i}$
- Question** : peut-on **approximer cette loi par une autre** plus simple : est-ce possible ? comment faire ? quelle est l'erreur d'approximation ?
- Réponse** :
 - oui, c'est possible, grâce au théorème de Moivre-Laplace
 - par commodité, on approxime plutôt la loi de la variable centrée réduite :

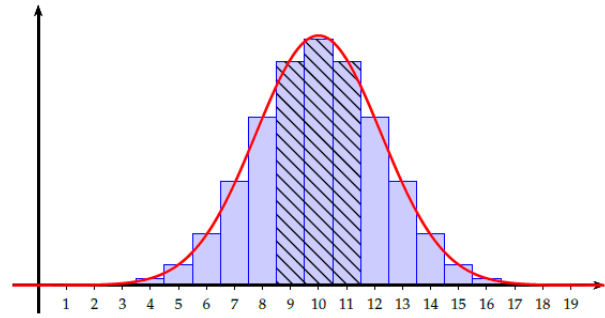
$$Z_n = \frac{X_n - \mathbb{E}(X_n)}{\sigma(X_n)} = \frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$$

Théorème de Moivre - Laplace (cas particulier Central-Limit) - Admis :

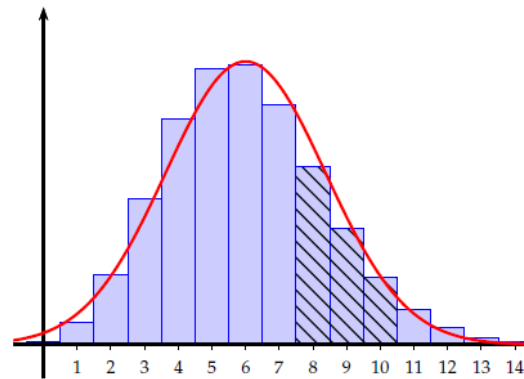
- Si** $X_n \rightsquigarrow \mathcal{B}(n, p)$
- Alors** la **loi de probabilité de** $Z_n = \frac{X_n - \mathbb{E}(X_n)}{\sigma(X_n)} = \frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \mathcal{N}(0, 1)$
- en clair** : lorsque n est grand, $\mathcal{B}(n, p) \approx \mathcal{N}(np, np(1-p))$
- en pratique, l'approximation est valable pour $n \geq 30$ et $np \geq 5$ ou $n(1-p) \geq 5$
- pour plus de détails :
 - animation, voir : Geogebra Moivre-Laplace
 - explication, voir : Moivre-Laplace
- HP** : c'est la loi de la VA qui est approximée, pas la VA elle-même (convergence en loi)

Exemple 1 :

- voici les lois de X_{20} et son approximation X :
 - $X_{20} \rightsquigarrow \mathcal{B}(20, 0.5)$
 - $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(10, 5)$
- vérifier les conditions d'approximation
- calculer $\mathbb{P}(9 \leq X_{20} \leq 11)$
- comparer à son approximation
ne pas oublier la discrétisation
(réponse : erreur de 0.1%)

**Exemple 2 :**

- on a tracé X_{20} et son approximation X :
 - $X_{100} \rightsquigarrow \mathcal{B}(100, 0.06)$
 - préciser son approximation normale X
- vérifier les conditions d'approximation
- calculer $\mathbb{P}(8 \leq X_{100} \leq 10)$
- comparer à son approximation
ne pas oublier la discrétisation
(réponse : erreur de 2%)

**HP - Théorème Central-Limit) :**

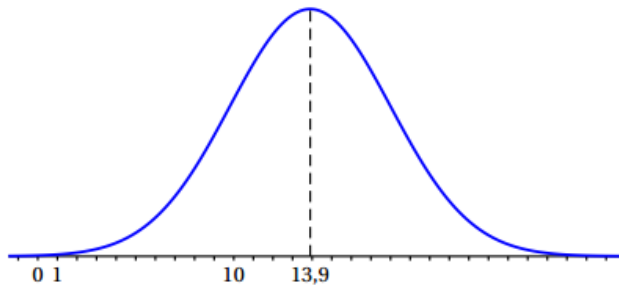
- lorsque l'on fait la somme d'un très grand nombre de VAI, de loi quelconque, cette somme suit une loi normale.

13.6 Exercice Type Bac

Exercice 1 : Pondichéry 2016

Des études statistiques ont permis de modéliser le temps hebdomadaire, en heures, de connexion à internet des jeunes en France âgés de 16 à 24 ans par une variable aléatoire T suivant une loi normale de moyenne $\mu = 13,9$ et d'écart type σ .

La fonction densité de probabilité de T est représentée ci-dessous :



1. On sait que $p(T \geq 22) = 0,023$.

En exploitant cette information :

- hachurer sur le graphique donné en annexe, deux domaines distincts dont l'aire est égale à 0,023 ;
- déterminer $P(5,8 \leq T \leq 22)$. Justifier le résultat. Montrer qu'une valeur approchée de σ au dixième est 4,1.

2. On choisit un jeune en France au hasard.

Déterminer la probabilité qu'il soit connecté à internet plus de 18 heures par semaine.

Arrondir au centième.

Exercice 2 : Asie 2016

Un maraîcher est spécialisé dans la production de fraises.

Cet exercice envisage dans la partie A la production de fraises, et dans la partie B leur conditionnement.

Les deux parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

Partie A : production de fraises

Le maraîcher produit ses fraises dans deux serres notées A et B ; 55 % des fleurs de fraisier se trouvent dans la serre A, et 45 % dans la serre B. Dans la serre A, la probabilité pour chaque fleur de donner un fruit est égale à 0,88 ; dans la serre B, elle est égale à 0,84.

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse. Une réponse non justifiée ne sera pas prise en compte.

Proposition 1 :

La probabilité qu'une fleur de fraisier, choisie au hasard dans cette exploitation, donne un fruit est égale à 0,862.

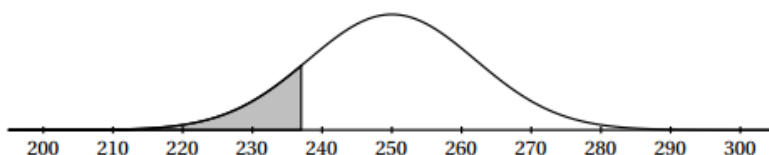
Proposition 2 :

On constate qu'une fleur, choisie au hasard dans cette exploitation, donne un fruit. La probabilité qu'elle soit située dans la serre A, arrondie au millième, est égale à 0,439.

Partie B : conditionnement des fraises

Les fraises sont conditionnées en barquettes. La masse (exprimée en gramme) d'une barquette peut être modélisée par une variable aléatoire X qui suit la loi normale d'espérance $\mu = 250$ et d'écart-type σ .

La représentation graphique de la fonction densité de la loi de probabilité de la variable aléatoire X est donnée ci-après :



1. On donne $P(X \leq 237) = 0,14$. Calculer la probabilité de l'évènement « la masse de la barquette est comprise entre 237 et 263 grammes ».
2. On note Y la variable aléatoire définie par : $Y = \frac{X - 250}{\sigma}$.
 - a. Quelle est la loi de la variable aléatoire Y ?
 - b. Démontrer que $P\left(Y \leq \frac{13}{\sigma}\right) = 0,14$.
 - c. En déduire la valeur de σ arrondie à l'entier.
3. Dans cette question, on admet que σ vaut 12. On désigne par n et m deux nombres entiers.
 - a. Une barquette est conforme si sa masse, exprimée en gramme, se trouve dans l'intervalle $250 - n$; $250 + n$. Déterminer la plus petite valeur de n pour qu'une barquette soit conforme, avec une probabilité supérieure ou égale à 95 %.
 - b. On considère dans cette question qu'une barquette est conforme si sa masse, exprimée en gramme, se trouve dans l'intervalle 230 ; m . Déterminer la plus petite valeur de m pour qu'une barquette soit conforme, avec une probabilité supérieure ou égale à 95 %.