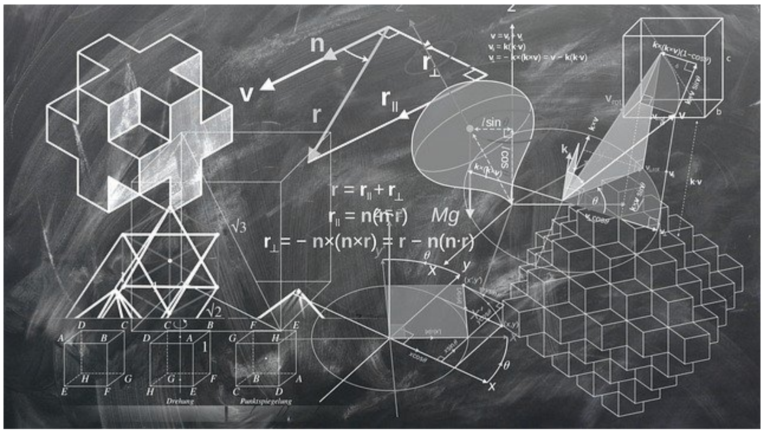
Chapitre 11

Produit Scalaire



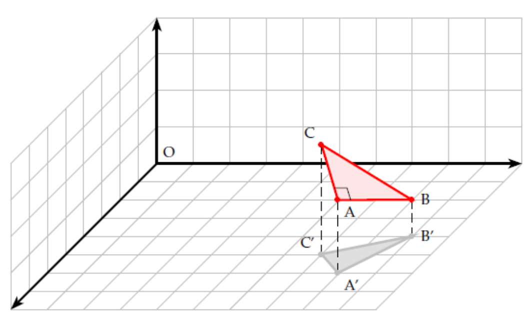
11.1 Définition - Propriété

Définition du Produit Scalaire (espace) : $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ 2 vecteurs de l'espace

- ***Analytique*** : $\vec{u}.\vec{v}$ $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = xx' + yy' + zz'$
- ***Vectorielle (identité du parallélogramme)*** : $\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}(||\overrightarrow{u+v}||^2$ - $||\vec{u}||^2$ - $||\vec{v}||^2)$
- ***Géométrique*** : $\vec{u}.\vec{v} = ||\vec{u}||.||\vec{v}||.\cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$

Remarque, exemple :

- vérifier que ces 3 définitions sont équivalentes
- vérifier que : $\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}(||\overrightarrow{u+v}||^2$ - $||\vec{u}||^2$ - $||\vec{v}||^2) = \frac{1}{2}(||\vec{u}||^2 + ||\vec{v}||^2$ - $||\overrightarrow{u-v}||^2) = \frac{1}{4}(||\overrightarrow{u+v}||^2$ - $||\overrightarrow{u-v}||^2)$
- A $\begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}$ et B $\begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix}$ et C $\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}$
  - déterminer la mesure géométrique de $\widehat{BAC}$
  - on projette orthogonalement A,B,et C sur le plan z=0 respectivement en A', B' et C' déterminer la mesure géométrique $\widehat{B'A'C'}$
  - que constatez vous ?



- ***idée :*** on a vu dans l'exercice précédent que : $\boxed{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow \text{ABC est rectangle en A}}$

Propriété : $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ 3 vecteurs de l'espace et λ un réel

- ***commutativité*** : $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$
- ***ditributivité*** : $\vec{u}(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}$
- ***bilinéarité*** : $\lambda(\vec{u}.\vec{v}) = (\lambda\vec{u}).\vec{v} = \vec{u}.(\lambda\vec{v})$
- ***Si*** $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont de même direction et de même sens ***Alors*** $\vec{u}.\vec{v} = ||\vec{u}||.||\vec{v}||$
- ***Si*** $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont de même direction et de sens contraires ***Alors*** $\vec{u}.\vec{v} = -||\vec{u}||.||\vec{v}||$
- ***orthogonalité*** : $\vec{u}.\vec{v} = 0 \Leftrightarrow \vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux
- ***une égalité très utile*** : $\vec{u}.\vec{u} = ||\vec{u}||^2$
- ***propriété de*** $\vec{0}$: c'est le seul vecteur orthogonal à lui-même : $\vec{u}.\vec{u} = ||\vec{u}||^2 = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$

Remarque, exemple :

- le vecteur nul $\vec{0}$ est orthogonal à tous vecteurs ; c'est d'ailleurs le seul
- $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ -\frac{1}{2} \\ 5 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} -\frac{2}{5} \\ 3 \\ \alpha \end{pmatrix}$; trouver α pour que $\vec{u}.\vec{v} = \vec{0}$
- A $\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$ et B $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ et la droite d définit par C $\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$
  mq (AB) et d sont perpendiculaires
- A $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, B $\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, C $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, D $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, E $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$
  Mq A , B , C ne sont pas alignés et que $\overrightarrow{DE}$ est normal au plan (ABC)

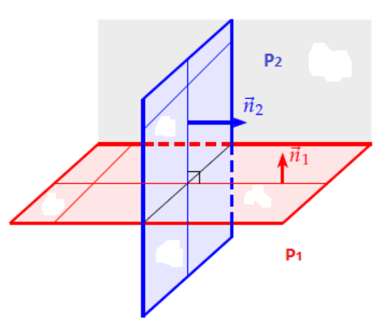
11.2 Équation cartésienne d'1 plan

Définition - Propriété :

- ***vecteur normal à un plan*** : $\vec{n}$ est normal à $\mathscr{P}$ ***si*** toute droite dirigée par $\vec{n}$ est orthogonale à $\mathscr{P}$
- l'équation du plan $\mathscr{P}$ passant par A et normal à $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est par : $\boxed{\overrightarrow{AM}.\vec{n} = \vec{0}}$ où $M \in \mathscr{P}$

  ROC 1 - équation analytique d'1 plan : ceci donne 1 équation de la forme : $ax+by+cz+d=0$
- ***ROC 2 - droite orthogonale à un plan*** :

  1 droite Δ est orthogonale à 1 plan $\mathscr{P} \Leftrightarrow \exists\, d_1$, d_2 sécantes de $\mathscr{P}$ orthogonales à Δ
- soient 2 plans $\mathscr{P}_1$ de vecteur normal $\vec{n}_1$ et $\mathscr{P}_2$ de vecteur normal $\vec{n}_2$: $\boxed{\mathscr{P}_1 \perp \mathscr{P}_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \perp \vec{n}_2}$



Remarque, exemple :

- ***Démo du ROC 2*** :

  - $\Rightarrow$ ***Si*** $\Delta \perp \mathscr{P}$ ***Alors*** Δ est orthogonale à toutes droites de $\mathscr{P}$
  - $\Leftarrow$ ***Si*** d_1 et d_2 sécantes de $\mathscr{P}$ sont orthogonales à Δ

    - ***Alors*** soit $\vec{n}$ la direction de Δ, $\vec{u}_1$ la direction de d_1 et $\vec{u}_2$ la direction de d_2
    - par définition, on a : $\vec{n} \perp u_1$ et $\vec{n} \perp u_2$
    - d_1 et d_2 sont sécantes $\Rightarrow u_1$ et u_2 sont non colinéaires (on dit "libres")
      ils donnent la direction de $\mathscr{P}$
    - $\forall d \in \mathscr{P}$ de vecteur directeur $\vec{u}$, $\exists a, b \in \mathbb{R}$ tq $a\vec{u}_1 + b\vec{u}_2 = \vec{u}$
    - clairement, $\vec{n}.\vec{u} = \vec{n}.(a\vec{u}_1 + b\vec{u}_2) = \vec{n}.a\vec{u}_1 + \vec{n}.b\vec{u}_2 = \vec{0} \Rightarrow \vec{n} \perp \vec{u}$ et donc $\Delta \perp d$

- ***Ex 1 :*** déterminer l'équation de $\mathscr{P}$ passant par $A \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et normal à $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

- ***Ex 2 :*** donner 1 équation de $\mathscr{Q}$ parallèle à $\mathscr{P}$ passant par $A \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$

- ***Ex 3 :*** déterminer l'équation du plan médiateur de A et B avec $A \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ et normal à $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

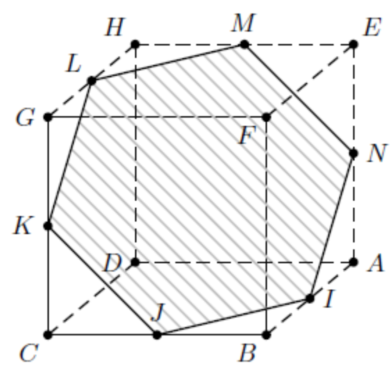
11.3 Sujet de Bac

Ex 1 :

$ABCDEFGH$ est un cube d'arête égale à 1.
L'espace est muni du repère orthonormé $(D\,;\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DH})$.

Dans ce repère, on a :
$D(0\,;\,0\,;\,0)$, $C(1\,;\,0\,;\,0)$, $A(0\,;\,1\,;\,0)$,
$H(0\,;\,0\,;\,1)$ et $E(0\,;\,1\,;\,1)$.

Soit I le milieu de $[AB]$.



Soit $\mathscr{P}$ le plan parallèle au plan (BGE) et passant par le point I.

On admet que la section du cube par le plan $\mathscr{P}$ représentée ci-dessus est un hexagone dont les sommets I, J, K, L, M, et N appartiennent respectivement aux arêtes $[AB]$, $[BC]$, $[CG]$, $[GH]$, $[HE]$ et $[AE]$.

1) a) Montrer que le vecteur $\overrightarrow{DF}$ est normal au plan (BGE).

b) En déduire une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$.

2) Montrer que le point N est le milieu du segment $[AE]$.

3) a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (HB).

b) En déduire que la droite (HB) et le plan $\mathscr{P}$ son sécants en un point T dont on précisera les coordonnées.

4) Calculer, en unités de volume, le volume du tétraèdre $FBGE$.

Ex 2 :

Un catadioptre est un dispositif optique formé de trois miroirs en forme de « coin de cube », les faces réfléchissantes tournées vers l'intérieur. On en trouve dans les réflecteurs de certains véhicules ainsi que dans les appareils de topographie.

Les points O, A, B et C sont des sommets d'un cube, de telle sorte que le repère $\left(O\,;\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}\right)$ soit un repère orthonormé.

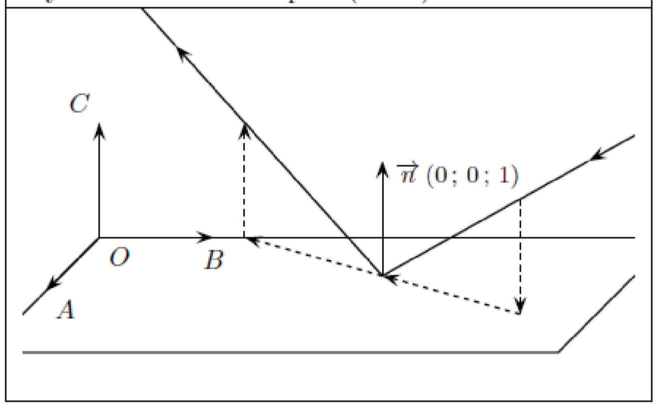
On utilisera ce repère dans tout l'exercice.

Les trois miroirs du catadioptre sont représentés par les plans (OAB), (OBC) et (OAC). Les rayons lumineux sont modélisés par des droites.

Règles de réflexion d'un rayon lumineux (admises) :

- lorsqu'un rayon lumineux de vecteur directeur $\vec{v}\,(a\,;\,b\,;\,c)$ est réfléchi par le plan (OAB), un vecteur directeur du rayon réfléchi est $\vec{v}\,(a\,;\,b\,;\,-c)$;
- lorsqu'un rayon lumineux de vecteur directeur $\vec{v}\,(a\,;\,b\,;\,c)$ est réfléchi par le plan (OBC), un vecteur directeur du rayon réfléchi est $\vec{v}\,(-a\,;\,b\,;\,c)$;
- lorsqu'un rayon lumineux de vecteur directeur $\vec{v}\,(a\,;\,b\,;\,c)$ est réfléchi par le plan (OAC), un vecteur directeur du rayon réfléchi est $\vec{v}\,(a\,;\,-b\,;\,c)$;

Vue en perspective cavalière de la réflexion d'un rayon lumineux sur le plan (OAB)



1) *Propriété des catadioptres*

En utilisant les règles précédentes, démontrer que si un rayon lumineux de vecteur directeur $\vec{v}\,(a\,;\,b\,;\,c)$ est réfléchi successivement par les plans (OAB), (OBC) et (OAC), le rayon final est parallèle au rayon initial.

Pour la suite, on considère un rayon lumineux modélisé par une droite d_1 de vecteur directeur $\vec{v_1}\,(-2\,;\,-1\,;\,-1)$ qui vient frapper le plan (OAB) au point $I_1\,(2\,;\,3\,;\,0)$. Le rayon réfléchi est modélisé par la droite d_2 de vecteur directeur $\vec{v_2}\,(-2\,;\,-1\,;\,1)$ et passant par le point I_1.

2) *Réflexion de d_2 sur le plan (OBC)*

a) Donner une représentation paramétrique de la droite d_2.

b) Donner, sans justification, un vecteur normal au plan (OBC) et une équation cartésienne de ce plan.

c) Soit I_2 le point de coordonnées $(0\,;\,2\,;\,1)$.
Vérifier que le plan (OBC) et la droite d_2 sont sécants en I_2.

On note d_3 la droite qui représente le rayon lumineux après réflexion sur le plan (OBC). d_3 est donc la droite de vecteur directeur $\vec{v_3}\,(2\,;\,-1\,;\,1)$ passant par le point $I_2\,(0\,;\,2\,;\,1)$.

3) *Rélexion de d_3 sur le plan (OAC)*

Calculer les coordonnées du point d'intersection I_3 de la droite d_3 avec le plan (OAC).

On note d_4 la droite qui représente le rayon lumineux après réflexion sur le plan (OAC). Elle est donc parallèle à la droite d_1.

4) *Étude du trajet de la lumière*

On donne le vecteur $\vec{u}\,(1\,;\,-2\,;\,0)$, et on note $\mathscr{P}$ le plan défini par les droites d_1 et d_2.

a) Démontrer que le vecteur $\vec{u}$ est un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$.

b) Les droites d_1, d_2 et d_3 sont-elles situées dans un même plan ?

c) Les droites d_1, d_2 et d_4 sont-elles situées dans un même plan ?

