

Chapitre 6

Fonction Exponentielle



QR.png

6.1 Construction et Premières Propriétés

6.1.1 Existence et Unicité de $x \mapsto e^x$

Théorème - ROC :

- il existe une unique fonction f dérivable sur \mathbb{R} solution du *problème de Cauchy* :
$$\begin{cases} f(0) = 1 \\ f' = f \end{cases}$$
- elle est appelée fonction exponentielle et notée $x \mapsto e^x$ ou $x \mapsto \exp x$
- e^x se prononce "e de x" ou "exponentielle x" ou "exponentielle de x"

Remarque, exemple :

- $x \mapsto e^x$ est très importante en mathématiques
- le nombre $e^1 = e \approx 2.71828182845904523536028747135266249775724709369995...$ est lui aussi important ; on retiendra $e^1 = e \approx 2.718$
- elle se prolonge naturellement sur \mathbb{C} (en fait c'est la fonction réelle qui est une restriction de l'exponentielle complexe) ; nous l'avons déjà "naturellement" rencontrée avec les nombres complexes (notation d'Euler)
- **HP : problème de Cauchy**
 - la 1^{ère} condition du problème de Cauchy est la condition initiale
 - la 2nd est l'équation différentielle proprement dite cad la relation que la fonction doit vérifier entre elle et ses dérivées (ici uniquement la dérivée d'ordre 1)
 - un problème de Cauchy consiste donc à trouver la ou les fonctions qui vérifie(nt) en même temps les 2 conditions
 - sous certaines conditions (ici elles sont réunies), il y a existence et unicité de la solution ...

• **Preuve du Théorème - ROC :**

1/ **existence** : $f(x) = e^x$ convient (admis)

2/ **unicité** :

i. mq $\forall x \in \mathbb{R}, f(x)f(-x) = 1$

ii. mq f ne s'annule pas sur \mathbb{R}

iii. mq f est unique

6.1.2 Construction approchée de $x \mapsto e^x$

Tout ceci est bien joli mais cela ne nous montre pas à quoi ressemble cette fameuse fonction $x \mapsto e^x$

Voici une possibilité pour construire de façon approchée $x \mapsto e^x$ qui sera approfondie en DM :

- méthode "explicite"
- majoration de l'erreur
- convergence de la méthode

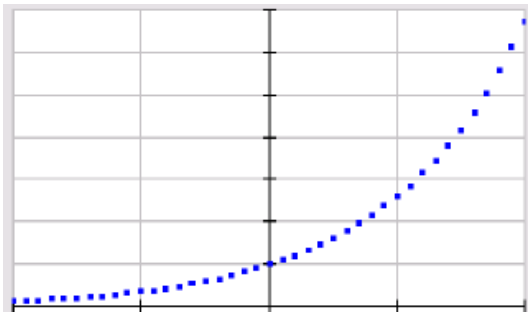
Il est intéressant de bien comprendre la méthode utilisée car elle se généralise et vous fait découvrir une nouvelle branche importante des mathématiques modernes : l'Analyse Numérique !

Méthode dite "explicite" : $f : x \mapsto e^x$

- on commence par placer le point d'abscisse 0 : $(0, f(0)) = (0, 1)$
- pour h petit, on approxime f par sa tangente en 0 : $f(0+h) \approx f(0) + hf'(0)$
- comme $f' = f$ et $f(h) = f(0+h)$, on a : $f(h) \approx f(0) + hf(0) = (1+h)f(0) = 1+h$
- on peut maintenant placer le point d'abscisse h : $(h, 1+h)$
- on réitère et on obtient les points de coordonnées $(nh, (1+h)^n)$ où $n \in \mathbb{Z}$

Remarque, exemple :

- h est appelé le pas (de combien on avance)
plus il est petit, plus la fonction approchée "colle" à la fonction théorique, mais plus il y a de calcul pour avoir un graphe "étendu"
- on obtient le graphe suivant sur $[-2, 2]$ avec $h = \frac{1}{10}$



- essayer de construire un algorithme permettant de construire ce graphique

- on reviendra sur cette construction en DM4 (en ligne)

6.1.3 Propriétés de $x \mapsto e^x$

Propriété : $\forall a, b \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z}$

- relation fonctionnelle : $e^{a+b} = e^a \times e^b$
- $e^{-a} = \frac{1}{e^a}$
- $e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$
- $e^{na} = (e^a)^n$

Remarque, exemple :

- on constate (et c'est pour cela que l'on a adopté la notation e^x) que les calculs exponentiels se font précisément avec les mêmes règles que celles des puissances : exponentielle de $x = e$ puissance x
- la 1^{ère} relation est appelée **relation fonctionnelle de l'exponentielle**
c'est 1 autre façon de définir $x \mapsto e^x$ (sans passer par Cauchy) ; on verra comment en approfondissement
- démontrer cette propriété caractéristique (aide : on pourra poser $\forall x \in \mathbb{R}, h(x) = \frac{e^{x+a}}{e^a}$)

6.1.4 Étude de $x \mapsto e^x$

Propriété :

- 1/ $x \mapsto e^x$ est C^∞
- 2/ $x \mapsto e^x$ est strictement positive sur \mathbb{R}
- 3/ $x \mapsto e^x$ est strictement croissante sur \mathbb{R}
- 4/ **ROC :** $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$
- 5/ $x \mapsto e^x$ est une bijection continue \mathbb{R} sur $]0; +\infty[$
- 6/ $\forall a, b \in \mathbb{R} : e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$ et $e^a < e^b \Leftrightarrow a < b$
- 7/ $\forall a \in \mathbb{R} : e^a = 1 \Leftrightarrow a = 0, e^a < 1 \Leftrightarrow a < 0$ et $e^a > 1 \Leftrightarrow a > 0$

Remarque, exemple :

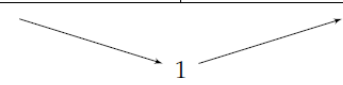
- prouver les propriétés 1/ 2/ 3/ 5/ 6/ et 7/

- résoudre dans \mathbb{R} , $e^{2x^2+3} = e^{7x}$

- résoudre dans \mathbb{R} , $e^{3x} \leq e^{x+6}$

- **Preuve du ROC :** $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$
A chercher (solution prochaine page)

- on pose $f(x) = e^x - x$
- on pose $f'(x) = e^x - 1$
- d'où, grâce à 7/ le tableau de variation suivant :

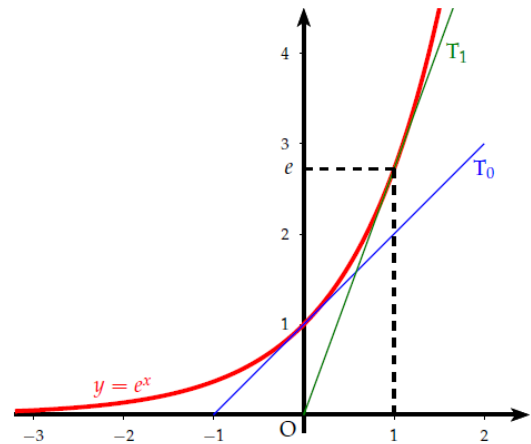
x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$			

- du tableau de variation, on déduit que : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) > 0$ cad $e^x > x$
- comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$, par comparaison, on déduit : $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$
- en posant $y = -x$ et grâce à la continuité de $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur \mathbb{R}_+^* , on obtient :

$$\lim_{y \rightarrow -\infty} e^y = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x} = 0$$

Tableau de variation et Courbe $x \mapsto e^x$:

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$\exp'(x)$		$+$		
$\exp(x)$	0	1	e	$+\infty$



6.1.5 Limite de référence avec $x \mapsto e^x$

Propriété :

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0$

Remarque, exemple :

- les 2 dernières propriétés sont appelées "croissance comparée" : elles indiquent qu'à l'infini, c'est l'exponentielle qui impose sa limite
- HP : on montre facilement avec $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ que $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{P(x)}{e^x} = 0$ où P est un polynôme quelconque

- étudier la fonction $f(x) = \frac{2e^x - 3}{e^x + 1}$

6.2 Dérivation composée de $x \mapsto e^{u(x)}$

Propriété : I intervalle de \mathbb{R}

- **Si** u est dérivable sur I
- **Alors** e^u aussi sur I et $(e^{u(x)})' = u'(x) \times e^{u(x)}$

6.3 Applications en Physique et SVT de $x \mapsto e^x$

6.3.1 HP - Résolution d'1 Équation Différentielle Linéaire du 1^{er} ordre (à coefficients constants)

Propriété : $a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}$

- les solutions de $y' = ay$ sont les fonctions du type $y(x) = Ce^{ax}$ où $C \in \mathbb{R}$
- les solutions de $y' = ay + b$ sont les fonctions du type $y(x) = Ce^{ax} - \frac{b}{a}$ où $C \in \mathbb{R}$

Remarque, exemple :

- ces résultats sont admis ; 1 preuve simple (utilisée plutôt par les physiciens que les matheux) passe par l'utilisation de la fonction logarithme (voir chapitre concerné)
- pour l'instant, le plus simple est juste de connaître ce résultat (déjà hors programme !)
- Résoudre : $y' = 3y$
- Résoudre : $y' + 3y = 5$

6.3.2 Radioactivité et Préhistoire

Si $N(t)$ est le nombre de noyaux d'un corps radioactif à l'instant t , la vitesse de variation $\frac{\Delta N(t)}{\Delta t}$ de ce nombre (par désintégration) est proportionnelle à $N(t)$

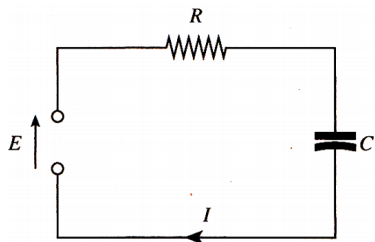
- 1/ en supposant N dérivable (pourquoi?), mq $\exists \lambda > 0$ tq $N'(t) = -\lambda N(t)$
- 2/ résoudre cette équation cad trouver la fonction N en fonction de t
- 3/ trouver la demi-vie en fonction de λ cad le temps qu'il faut pour que la moitié des noyaux se désintègrent (on admettra que : $e^x = y \Leftrightarrow x = \ln y$)
- 4/ Application : la datation au carbone 14
 - le carbone 14 est un isotope radioactif du carbone dont la demi-vie est d'environ 5734 ans
 - la concentration de carbone 14 par rapport au carbone total présent dans 1 organisme vivant est d'environ 10^{-12}
 - lorsque l'organisme meurt, la quantité de carbone reste constante alors que celle de carbone 14 se désintègre progressivement
 - la concentration en carbone 14 d'Ötzi (humain découvert congelé dans un glacier italo-autrichien en 1991) a été évaluée à $5,8 \cdot 10^{-13}$
 - quelle est approximativement la date de sa mort ?

6.3.3 Thermodynamique et Chaleur

La variation de la température $\frac{dT}{dt}$ (en $^{\circ}C$) d'un matériau est proportionnelle à la différence entre sa température T et la température extérieure T_{ext}

- 1/ mq $\frac{dT}{dt} = -k(T - T_{ext})$ où $k > 0$
- 2/ résoudre cette équation cad trouver la fonction N en fonction de t
- 3/ sachant que $T_{ext} = 30^{\circ}C$ et qu'à $t = 0$ le matériau est à $30^{\circ}C$, trouver T en fonction du temps t
- 4/ calculer $\lim_{t \rightarrow +\infty} T(t)$? est-ce logique ?

6.3.4 Électricité - Circuit RC

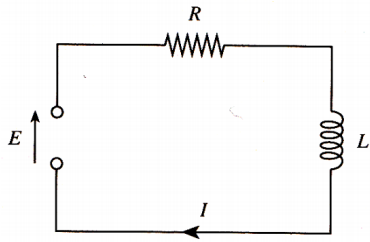


- voici 1 montage en série d'un condensateur C et d'une résistance R soumis à 1 tension E à partir de $t = 0$
- la quantité de courant est $q(t)$
- on sait que $i = \frac{dq}{dt}$ où i est l'intensité

- au borne de la résistance, la tension est $U = Ri$
- au borne du condensateur, la tension est $U_c = \frac{q(t)}{C}$
- en convention générateur (ici E), U et i sont le même sens
- en convention récepteur (ici R et C), U et i sont en sens inverse
- on pose $\tau = RC$ appelé constante de temps du dipôle RC

- 1/ mq la quantité de courant $q(t)$ vérifie l'équation $\frac{dq}{dt} = -\frac{1}{\tau}q + \frac{E}{R}$
 - 2/ en déduite $q(t)$ puis $u_C(t)$
 - 3/ mq $\lim_{t \rightarrow +\infty} u_C(t) = E$; quelle est alors la situation du circuit ?
 - 4/ on considère qu'un condensateur est chargé lorsque u_C vaut 99% de E ; les physiciens utilisent alors 3 règles rapides pour trouver τ :
 - le condensateur est chargé lorsque $t = 4,6\tau$
 - lorsque $t = \tau$, la tension u_C vaut 63% de E
 - τ est l'abscisse de l'intersection entre la tangente à l'origine de $y = u_C(t)$ et $y = E$
- vérifier ces 3 règles

6.3.5 Électricité - Circuit RL



- voici 1 montage en série d'un condensateur C et d'une résistance R soumis à 1 tension E à partir de $t = 0$
- la quantité de courant est $q(t)$
- on sait que $i = \frac{dq}{dt}$ où i est l'intensité

- au borne de la résistance, la tension est $U = Ri$
- au borne de la bobine, la tension est $U_b = Lq(t)$
- en convention générateur (ici E), U et i sont le même sens
- en convention récepteur (ici R et L), U et i sont en sens inverse
- on pose $\tau = \frac{L}{R}$ appelé constante de temps du dipôle RL

1/ mq la quantité de courant $q(t)$ vérifie l'équation $\frac{dq}{dt} + \frac{1}{\tau}q + \frac{E}{L}$

2/ en déduite $q(t)$ puis $u_L(t)$

6.3.6 Médecine et Population

Pour 1 population vivant dans 1 milieu clos (ex : bactéries dans 1 coupelle de culture), la croissance est dans 1 premier temps exponentielle mais ensuite freinée par surpopulation (manque de nourriture, d'oxygène, ...).

Ce phénomène se modélise par l'équation logistique : $y' = \lambda y(1 - y)$ où $y(t) = \frac{\text{population}(t)}{\text{population max}}$

- 1/ vérifier, qu'au début, la croissance est bien exponentielle
- 2/ poser $z = \frac{1}{y}$ et résoudre l'équation logistique
- 3/ si $y(0) = 0,01$ et $\lambda = 1$, exprimer $y(t)$
- 4/ observer la courbe sur votre calculatrice et commenter