

Le terme méthode de Monte-Carlo désigne toute méthode visant à calculer une valeur numérique en utilisant des procédés aléatoires, c'est-à-dire des techniques probabilistes (ou plus généralement stochastiques).

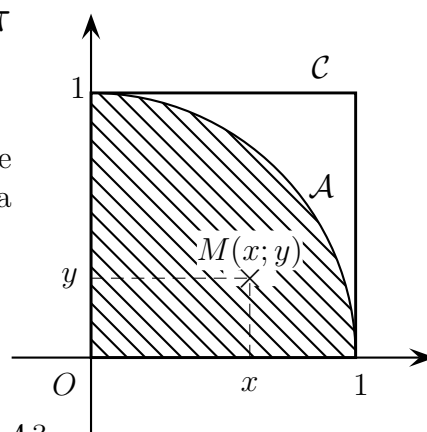
Les méthodes de Monte-Carlo, en référence aux jeux de hasard pratiqués à Monte-Carlo, ont été développées notamment sous l'impulsion de John von Neumann et Stanislas Ulam, lors de la Seconde Guerre mondiale et des recherches sur la fabrication de la bombe atomique.

Ces méthodes sont particulièrement utilisées pour calculer des intégrales (en dimensions 1 ou plus, calculs de surfaces et de volumes) et en physique des particules, où des simulations probabilistes permettent d'estimer la forme d'un signal ou la sensibilité d'un détecteur. La comparaison des données mesurées à ces simulations peut permettre de mettre en évidence des caractéristiques inattendues, par exemple de nouvelles particules.

Les simulations par des méthodes de Monte-Carlo permettent aussi d'introduire une approche statistique du risque dans une décision financière. Elle consiste à isoler un certain nombre de variables-clés du projet, tels que le chiffre d'affaires ou la marge, et à leur affecter une distribution de probabilités. Pour chacun des facteurs, un grand nombre de tirages aléatoires est effectué avec ces distributions de probabilité, afin de trouver la probabilité d'occurrence de chacun des résultats.

## I - Calcul d'aire - Approximation de $\pi$

On considère le carré  $\mathcal{C}$  de côté 1 et le quart de disque  $\mathcal{A}$  de centre l'origine  $O$  du repère, de rayon 1, comme illustrés sur la figure ci-contre.



1. On prend au hasard un point  $M$  à l'intérieur du carré  $\mathcal{C}$ .  
Quelle est la probabilité que  $M$  soit dans le quart de disque  $\mathcal{A}$ ?
2. On note  $M(x; y)$  les coordonnées du point  $M$ .
  - a. Quelles conditions doivent vérifier les coordonnées du point  $M$  pour que celui-ci soit dans le carré  $\mathcal{C}$  ?
  - b. Quelles conditions doivent vérifier les coordonnées du point  $M$  pour que celui-ci soit dans le quart de disque  $\mathcal{C}$  ?
  - c. Dans l'algorithme ci-contre, à quoi correspond la valeur de la variable  $\mathcal{C}$  ?  
Que fait cet algorithme ?  
A quelle valeur peut-on s'attendre, approximativement, en sortie ?  
A quel comportement du résultat affiché en sortie peut-on s'attendre lorsque la valeur de  $N$  augmente ?
- d. Modifier cet algorithme afin d'obtenir une approximation de  $\pi$ .

```

Affecter à N la valeur 1000
Affecter à C la valeur 0
Pour i allant de 1 à N
  Affecter à x une valeur aléatoire de [0; 1]
  Affecter à y une valeur aléatoire de [0; 1]
  Si  $x^2 + y^2 < 1$ 
    Affecter à C la valeur C+1
  Fin Si
Fin Pour
Afficher C/N
  
```

#### Programme Casio

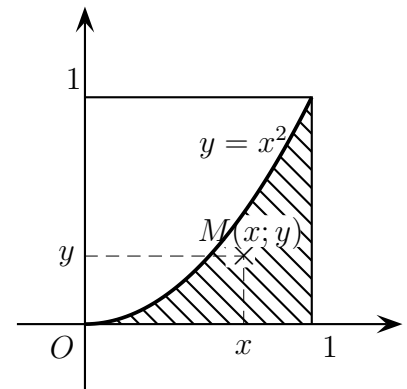
```
1000→N ↵  
0→C ↵  
For 1→I To N ↵  
Ran#→X ↵  
Ran#→Y ↵  
If X2+Y2<1 ↵  
Then C+1→C ↵  
IfEnd ↵  
Next ↵  
C/N↵
```

#### Programme Python

```
import random  
N=1000  
C=0  
for i in range(N):  
    x=random.random()  
    y=random.random()  
    if x**2+y**2<1:  
        C=C+1  
print(C/N)
```

## II - Calcul d'une intégrale

1. Calculer l'aire exacte du domaine hachuré ci-contre.
2. Reprendre la démarche précédente et modifier l'algorithme précédent pour calculer une approximation de cette aire.



## III - Calcul de probabilités

On considère la variable aléatoire  $X$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ , et dont la densité de probabilité  $f$  est définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ .

1. Donner l'expression de la probabilité  $P(0 \leq X \leq 1)$  en fonction de la densité de probabilité  $f$ .
2. En appliquant la même démarche que précédemment, calculer une valeur approchée de cette probabilité.

