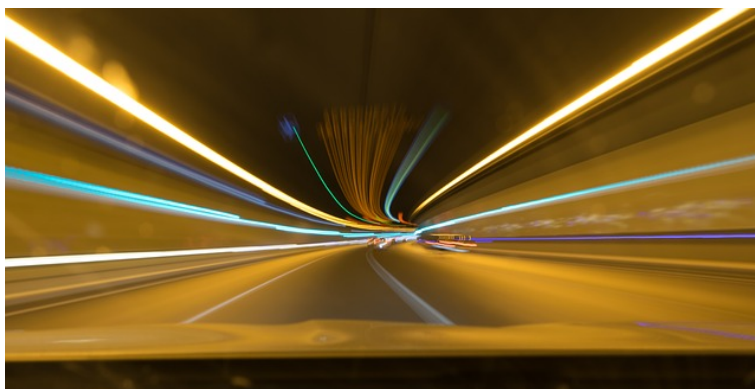


Chapitre 4

Continuité - Dérivation



QR3.png

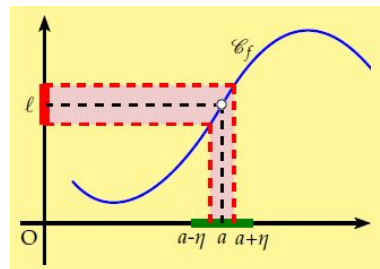
4.1 Continuité d'une fonction

4.1.1 Limite finie en 1 point

Définition (rappel) : $l, a \in \mathbb{R}$ et $f : I \mapsto \mathbb{R}$

f tend vers l en a si :

- $\forall J$ intervalle ouvert contenant l
- $\exists I$ ouvert contenant a tq :
 $x \in I \Rightarrow f(x) \in J$
- on note : $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$



Remarque, exemple :

- la notion de limite nous conduit naturellement vers la notion de continuité
- **H.P. :** dans le supérieur, on écrit plutôt :

$f : I \mapsto \mathbb{R}$ où I est un intervalle de \mathbb{R}

f est continue en a si : $\forall \epsilon > 0 \quad \exists \alpha > 0 \quad \forall a \in I \quad (|x - a| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon)$

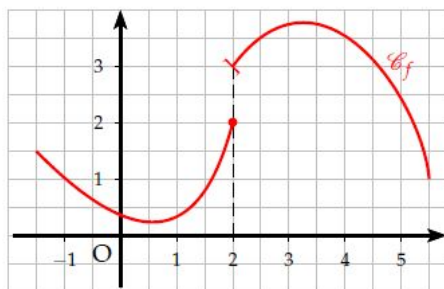
4.1.2 Continuité en un point

Définition : $l, a \in \mathbb{R}$ et $f : I \mapsto \mathbb{R}$

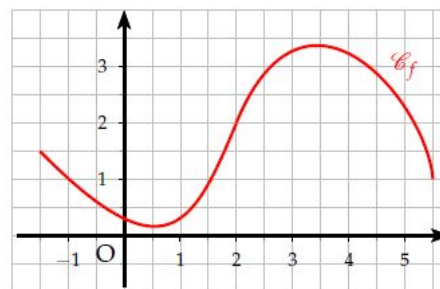
- f est continue en a si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$
- f continue sur $I \Leftrightarrow f$ continue en tout point de I
- si f n'est pas continue en a , on parle de **discontinuité en a**

Remarque, exemple :

- en gros (faux attention), 1 fonction continue est 1 fonction "que l'on peut tracer sans lever le stylo" ou bien "qui reste en 1 seul morceau"

Fonction f discontinue en 2

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 3 \neq f(2)$$

Fonction f continue sur $[-1, 5; 5, 5]$

- toutes les fonctions polynômes sont continues sur \mathbb{R} (famille de fonctions très utilisées car très régulières : bien plus que continues, elles sont indéfiniment dérivables ...)
- la fonction inverse $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ est une fonction continue sur \mathbb{R}^* mais ne l'est pas sur \mathbb{R}
si f est continue, il faut donc bien préciser où (sinon problème potentiel ...)
dans le cas où on ne dit rien, c'est que l'on parle de \mathbb{R}
- **ce qu'il faut bien comprendre** : pour 1 valeur a , vous pouvez regarder f à 3 endroits \neq :

- à gauche cad que vous regardez $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$
- à droite cad vous regardez $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$
- pile sur a cad vous regardez $f(a)$

f est continue en a si ces 3 valeurs existent et sont égales :

$$f \text{ continue en } a \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$$

- il est possible de parler de :

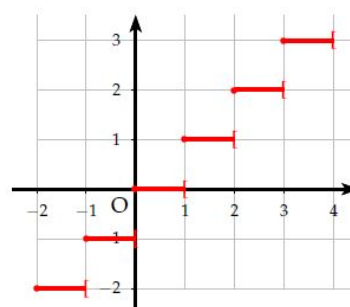
- f continue à gauche : $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$
- f continue à droite : $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{si } x \in \mathbb{R}^* \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases} \text{ est continue sur } \mathbb{R} \text{ (vérifier le !!)}$$

- voici la fonction partie entière $x \mapsto E(x)$

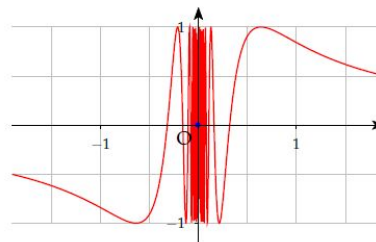
elle est continue à droite sur \mathbb{R}

elle est continue à gauche uniquement sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$



$$\bullet f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & \text{si } x \in \mathbb{R}^* \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

f n'est pas continue en 0 : pourquoi ?



- travail à faire : trouver tous les cas possibles de non continuité d'une fonction f en 1 point
- H.P. : vous pouvez rencontrer la notation : $f \in C([0,1], \mathbb{R})$ ou $f \in C^0([0,1], \mathbb{R})$ qui veut dire : f est 1 fonction continue de $[0,1]$ sur \mathbb{R}

4.1.3 Continuité des fonctions usuelles

Propriété : (admis - assez intuitif)

- les fonctions polynômes sont continues sur \mathbb{R}
- $x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue sur \mathbb{R}^*
- la fonction valeur absolue $x \mapsto |x|$ est continue sur \mathbb{R}
- $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur \mathbb{R}^+
- $x \mapsto \sin x$ et $x \mapsto \cos x$ sont continues sur \mathbb{R}
- $x \mapsto \tan x$ est continue sur son domaine de définition : $\mathbb{R} \setminus \{k\frac{\pi}{2} | k \in \mathbb{Z}\}$

Remarque, exemple :

- $x \mapsto \frac{1}{x-a}$ est continue sur son domaine de définition : $\mathbb{R} \setminus \{a\} =]-\infty; a[\cup]a; +\infty[$
- $x \mapsto \sqrt{x+a}$ est continue sur son domaine de définition : $[-a; +\infty[$
- H.P. : 1 fraction rationnelle $\frac{P(x)}{Q(x)}$ est continue sauf au niveau de ses pôles cad les racines de $Q(x)$
- H.P. : prolongement par continuité
intéressons nous à la fonction $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ définie sur \mathbb{R}^*
on remarque que cette fonction est "presque continue" en 0 car $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$
il suffirait qu'elle soit définie en 0 ... ce qui n'est pas encore le cas ... et que sa valeur soit 0
on répare ce "problème" en décidant que $f(0) = 0$ et f devient continue sur \mathbb{R} cette fois-ci !

4.1.4 HP (approfondissement) : lien entre Continuité et Suite

Propriété : (u_n) 1 suite, f 1 fonction ; de plus, on suppose que tout est bien définie

- **Si** : f est continue
- **Alors** : $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = f(\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n) = f(l)$

Remarque, exemple :

- ex d'utilisation : 1 suite réursive

$$(u_n) = \begin{cases} u_0 &= 1 \\ u_{n+1} &= \sqrt{3u_n + 4} \end{cases}$$

l'étude de (u_n) montre que (u_n) est croissante, majorée par 4 $\Rightarrow (u_n)$ CV : l sa limite

d'une part, $f(u_n) = \sqrt{3u_n + 4} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{3u_n + 4}$

d'autre part, f est continue $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{3u_n + 4} = \sqrt{3 \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n}$

de ces 2 informations, on obtient l'équation de la limite :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = f(\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n) = f(l)$$

bref : $f(l) = l \Rightarrow \sqrt{3l + 4} = l \Rightarrow l^2 - 3l - 4 = 0 \Rightarrow l = -1$ ou $l = 4 \Rightarrow l = 4$ car (u_n) est croissante

- 1 point essentiel, dans l'exemple précédent est de bien comprendre que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = l \quad u_{n+1} = f(u_n)$$

mais seul la continuité de f apporte l'égalité (par passage à la limite) $f(l) = l$

4.1.5 Continuité et Dérivabilité

Propriété : (admis - assez intuitif)

- Si : f est dérivable en a Alors : f est continue en a
- Attention la réciproque est fausse (ex : $x \mapsto |x|$ en 0)

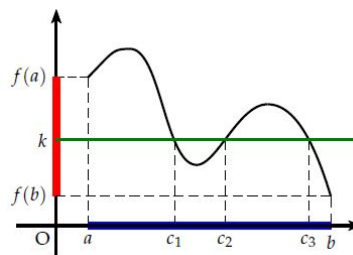
Remarque, exemple : même principe entre "ensemble de définition" et la "continuité"

- Si : f est continue en a Alors : f est définie en a (réciproque fausse évidemment)

4.1.6 Théorème des Valeurs Intermédiaires

Théorème des Valeurs Intermédiaires :

- Si :
 $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$
 f est continue
- Alors :
 $\forall k$ entre $f(a)$ et $f(b)$,
 $\exists c \in [a, b]$ tq $f(c) = k$



Noter que le c n'est pas forcément unique (dans le cas général)

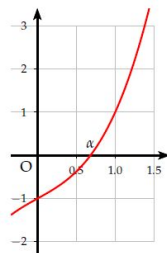
Remarque, exemple :

- dans le théorème, on n'écrit pas $k \in [f(a); f(b)]$ car on ne sait pas qui est le plus grand ($f(a)$ ou $f(b)$)
- on n'a pas besoin de la continuité de f pour arriver à la même conclusion :
trouver 1 ex où f n'est pas continue et tq $\forall k$ entre $f(a)$ et $f(b)$, $f(x) = k$ admet 1 solution sur $[a; b]$
- par contre, l'hypothèse de continuité est obligatoire si on veut que le résultat soit toujours vrai
trouver 1 contre-exemple

- Si f est continue sur $[a; b]$ et $f(a) \times f(b) < 0$

Alors l'équation $f(x) = 0$ admet au moins 1 solution sur $[a; b]$

On verra des algorithmes de recherche de solution approchée : dichotomie, newton, ...



TVI strictement monotone : unicité du c

Si :

$f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$

f est continue

f strictement monotone

Alors :

$\forall k$ entre $f(a)$ et $f(b)$,

$\exists ! c \in [a, b]$ tq $f(c) = k$

Méthode de Dichotomie : Résoudre de façon approchée $f(x) = 0$

- $f(x) = x^3 + x - 1$ admet 1 unique solution sur \mathbb{R}
ceci peut être prouvé grâce au TVI
elle est comprise entre 0 et 1
(voir graphique ci-dessus)
- on peut appliquer l'algorithme de dichotomie pour obtenir 1 valeur approchée de la racine α
- programmer cet algorithme : (ne pas regarder - le programme est à la page suivante)

```

1 import math
2
3 def f(x):
4     return x**3+x-1
5
6
7 def dichotomie(a, b, f, epsilon=1e-6):
8     if(math.fabs(a - b) <= epsilon):
9         return (a+b)/2.0
10    else:
11        fa = f(a)
12        fb = f(b)
13        fab = f((a+b)/2.0)
14        if(fa * fab <= 0):
15            return dichotomie(a, (a+b)/2.0, f, epsilon)
16        elif(fb * fab <= 0):
17            return dichotomie((a+b)/2.0, b, f, epsilon)
18        else:
19            raise Exception("Domaine invalide pour trouver un z ro par ←
20                                dichotomie")
21
22 a = 0
23 b = 1
24 print("Z ro de x**3+x-1 sur [{},{}] : {}".format(a, b, round(dichotomie(a, b←
25                                , f),6)))

```

4.2 Dérivée d'une fonction

4.2.1 Dérivée : de la définition aux formules classiques

Définition : $a, l \in \mathbb{R}$ et $f : I \mapsto \mathbb{R}$

- **Si :** $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = l$ **Alors :** f est **dérivable** en a
- le **nombre dérivé** de f en a est $f'(a)$
- géométriquement, il représente la pente de la courbe de f en $(a, f(a))$ (cad la pente de la tangente en ce point)
- plus généralement, on note f' ou $f'(x)$ la **dérivée** de f sur un intervalle I

Exemple 1 : calcul de limite (rappel chap fonction)

- | | |
|---|--|
| • $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$ | • $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$ |
| • $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x}$ | • $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^n - 1}{x}$ |
| • $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x}$ | • $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$ |

Exemple 2 : étude de la continuité et de la dérivabilité d'une fonction

- $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x - 2 & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{x-4}{x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$
- étudier la continuité de f

- étudier la dérivabilité de f

Exemple 3 : mais où sont pas les bonnes vieilles formules ... si simples à retenir !

- démontrer que $(x^2)' = 2x$
- démontrer que $(\sin x)' = \cos x$

- moralité : on garde les "formules" qui fonctionnent quasiment tout le temps et on utilise le nombre dérivée pour les cas plus délicats ...

4.2.2 Les formules à connaître

Fonction	\mathcal{D}_f	Dérivée	\mathcal{D}'_f
$f(x) = k$	\mathbb{R}	$f'(x) = 0$	\mathbb{R}
$f(x) = x$	\mathbb{R}	$f'(x) = 1$	\mathbb{R}
$f(x) = x^n \quad n \in \mathbb{N}^*$	\mathbb{R}	$f'(x) = nx^{n-1}$	\mathbb{R}
$f(x) = \frac{1}{x}$	\mathbb{R}^*	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$	$] -\infty; 0[\text{ ou }] 0; +\infty[$
$f(x) = \frac{1}{x^n} \quad n \in \mathbb{N}^*$	\mathbb{R}^*	$f'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}}$	$] -\infty; 0[\text{ ou }] 0; +\infty[$
$f(x) = \sqrt{x}$	$] 0; +\infty[$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$] 0; +\infty[$
$f(x) = \sin x$	\mathbb{R}	$f'(x) = \cos x$	\mathbb{R}
$f(x) = \cos x$	\mathbb{R}	$f'(x) = -\sin x$	\mathbb{R}

Remarque, exemple : pour aller 1 peu plus loin ...

- $(\tan x)' = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \text{ sur } \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2}\}$
- $(e^x)' = e^x \text{ sur } \mathbb{R}$
- $(\ln x)' = \frac{1}{x} \text{ sur } \mathbb{R}^*_+$

Dérivée de la somme	$(u + v)' = u' + v'$
Dérivée du produit par un scalaire	$(ku)' = ku'$
Dérivée du produit	$(uv)' = u'v + uv'$
Dérivée de l'inverse	$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$
Dérivée du quotient	$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$
Dérivée de la puissance	$(u^n)' = nu'u^{n-1}$
Dérivée de la racine	$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$
Dérivée autre	$[f(ax + b)]' = a \times f'(ax + b)$

Remarque, exemple :

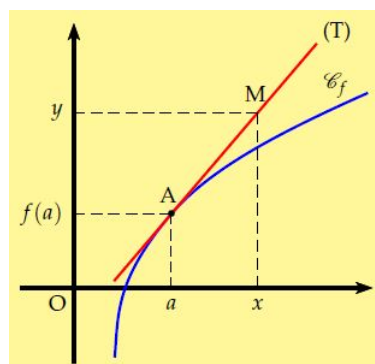
- dérivée d'1 fonction composée : $(f \circ g)'(x) = f'[g(x)] \times g'(x)$
dérivée "grande - petite" égale "dérivée grande" appliquée à "petite" fois "dérivée petite"
- H.P. dérivée fonction réciproque : $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'[f^{-1}(y)]}$ là où elle existe ... (preuve : dériver $f \circ f^{-1}$)

4.2.3 Interprétation - Application

Propriété :

- comme vu supra, le nombre dérivée représente la pente de la tangente en 1 point
- équation de la tangente à f en $A(a, f(a))$:**

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$
 (si elle existe)
- localement en a , on peut "approximer f " à cette droite : $h \rightarrow 0, f(a + h) \approx f(a) + hf'(a)$



Remarque, exemple :

- ex 1 :** valeur approchée de $\sqrt{4.03}$
 - on pose $f(x) = \sqrt{x}$, $a = 4$, $h = 0.03$
 - $f(4) = 2$ et $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow f'(4) = \frac{1}{4}$
 - donc $\sqrt{4.03} \approx 2 + 0.03 \times \frac{1}{4} = 2.0075$
 - la calculatrice nous donne 2.00786; nous sommes (sans calculatrice) déjà à 10^{-4} près!!
- ex 2 :** énergie cinétique relativiste
 - en mécanique relativiste, la masse m de vitesse v est :

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}}$$
 où c est la vitesse de la lumière et m_0 la masse du corps au repos (à l'arrêt)
 - l'énergie cinétique est alors : $E_c = (m - m_0)c^2 = m_0c^2(\frac{1}{\sqrt{1 - x}} - 1)$ où $x = (\frac{v}{c})^2$ (le vérifier)
 - quand x est petit, c'est la mécanique classique avec Newton et sa "pompe"; on voudrait alors retrouver la formule classique : $E_c = \frac{1}{2}m_0c^2$
 - on vérifie facilement que : $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x}} - 1$ est dérivable en 0 et $f'(x) = \frac{1}{2(1 - x)\sqrt{1 - x}}$
 - on peut alors faire l'approximation affine en zéro : $f(x) \approx f(0) + f'(0) \times x = \frac{x}{2}$
 - $\Rightarrow E_c \approx m_0c^2 \times \frac{x}{2} \approx \frac{1}{2}m_0c^2 \times (\frac{v}{c})^2 = \frac{1}{2}m_0v^2$

4.2.4 Signe de la dérivée - Sens de Variation

Propriété : soit $f : I \mapsto \mathbb{R}$ dérivable sur I intervalle de \mathbb{R}

- Si** f' est nulle **Alors** f est constante
- Si** f' est strictement positive (sauf en des points isolés) sur I **Alors** f est strictement croissante sur I
- Si** f' est strictement négative (sauf en des points isolés) sur I **Alors** f est strictement décroissante sur I
- Étude des variations de $f \Rightarrow$ Étude du signe de f'

Remarque, exemple :

- ex :** étudier les variations sur \mathbb{R} de $f(x) = x^3 - 6x^2 + 1$

- en étudiant le signe de f' , on obtient (faites le!!) :

x	$-\infty$	0	4	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$		1			$+\infty$
	$-\infty$		-31		

4.2.5 Dérivée et Extremum local

Propriété : soit $f : I \mapsto \mathbb{R}$ dérivable sur I intervalle de \mathbb{R} et $a \in I$

- Si f admet un extremum local en a Alors $f'(a) = 0$
- Si $f'(a) = 0$ en changeant de signe Alors f admet un extremum local en a

Remarque, exemple :

- stratégie : on cherchera donc les extremum local de f parmi les zéros de la dérivée
- attention : chaque zéro de f' n'est pas forcément un extremum de f ; donner 1 exemple!!