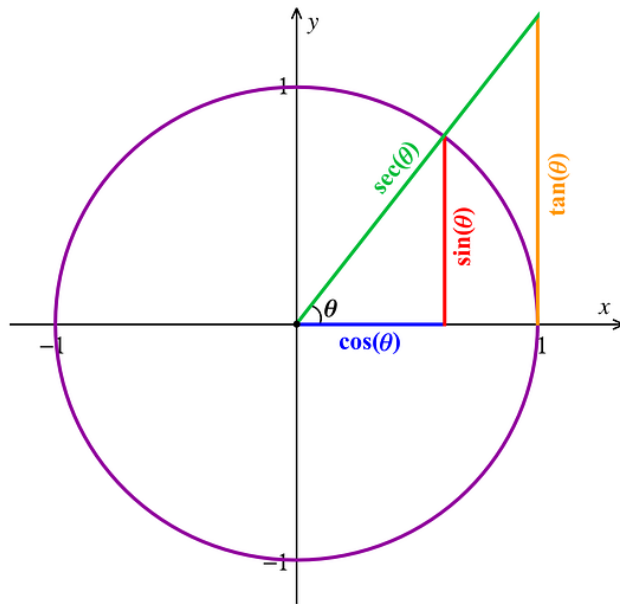


Chapitre 9

Trigonométrie - $x \mapsto \sin x$ et $x \mapsto \cos x$



QR.png

9.1 Rappel

Mesure principale d'un angle α :

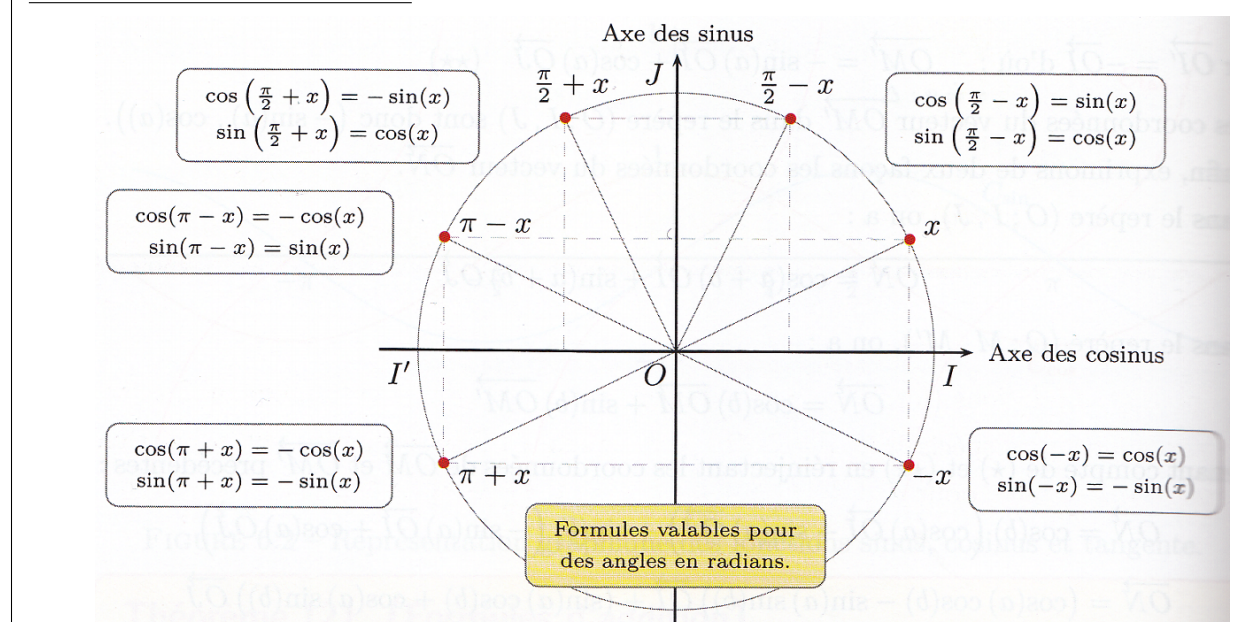
- en fonction des besoins
 - soit on considère la valeur dans $]-\pi; \pi]$
 - soit on considère la valeur de l'angle dans $[0; 2\pi[$, noté $\alpha[2\pi]$
- dans les 2 cas, pour trouver cette valeur, on effectue la division euclidienne de α par 2π , ce qui permet de "retirer" à l'angle α les tours inutiles

Propriétés fondamentales :

- $(\sin \alpha)^2 + (\cos \alpha)^2 = 1$
- $-1 \leq \sin \alpha \leq 1$
- $-1 \leq \cos \alpha \leq 1$
- $0 \leq \sin \alpha \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq \alpha \leq \pi$ (pour une mesure principale α)
- $0 \leq \cos \alpha \leq 1 \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ (pour une mesure principale α)
- $\sin(\alpha + 2\pi) = \sin \alpha$: si on fait un tour, on a la même valeur de sinus
- $\cos(\alpha + 2\pi) = \cos \alpha$: si on fait un tour, on a la même valeur de cosinus

Valeurs de Sinus - Cosinus - Tangente :

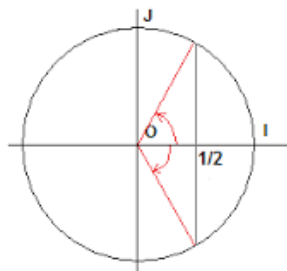
angle	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
sinus	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
cosinus	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
tangente	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	indéfinie	0

Formule de transformation :**Exemple :**

- trouver les mesures principales des angles suivants : $\frac{17\pi}{4}$ et $-\frac{31\pi}{6}$
- positionner sur le cercle trigonométrique les angles suivants : $\frac{35\pi}{4}$ et $-\frac{2531\pi}{6}$
- trouver 2 mesures principales associées à l'angle $\frac{35\pi}{4}$ dont les cosinus sont égaux
- trouver 2 mesures principales associées à l'angle $\frac{35\pi}{4}$ dont les sinus sont égaux
- HP : trouver 2 mesures principales associées à l'angle $\frac{35\pi}{4}$ dont les tangentes sont égales

Résoudre une équation en Cosinus (exemple) : résoudre $\cos x = -\frac{1}{2}$ sur \mathbb{R}

- **1^{ère} étape :** dessiner votre cercle trigonométrique et placer la valeur sinus recherchée ; tracer la droite verticale permettant de visualiser les solutions



- **2^{ème} étape :** retrouver la mesure principale de l'angle associée au cosinus ; si la valeur n'est pas connue, utiliser "cos⁻¹ de la valeur"

$$\text{ici, } \frac{1}{2} = \cos \frac{\pi}{3} \Rightarrow \cos x = \cos \frac{\pi}{3}$$

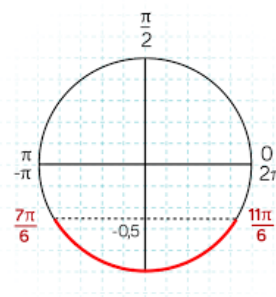
- **3^{ème} étape :** les solutions de l'équation sont alors $-\frac{\pi}{3}[2\pi]$ et $\frac{\pi}{3}[2\pi]$

$$\text{ici, } S = \left\{ \frac{\pi}{3} + 2k\pi ; \frac{5\pi}{3} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Résoudre une inéquation en Sinus (exemple) : résoudre $\sin x \leq -\frac{1}{2}$ sur \mathbb{R}

• **1^{ère} étape :**

- dessiner votre cercle
- placer la valeur sinus recherchée
- tracer la droite horizontale de la valeur sinus
- surligner la partie du cercle trigonométrique permettant de visualiser les solutions



- **2^{ème} étape :** retrouver la mesure principale de l'angle associée au sinus ; si la valeur n'est pas connue, utiliser " \sin^{-1} de la valeur"

ici, $\frac{1}{2} = \sin \frac{\pi}{6} \Rightarrow -\frac{1}{2} = \sin -\frac{\pi}{6} \Rightarrow \sin x = \sin -\frac{\pi}{6}$

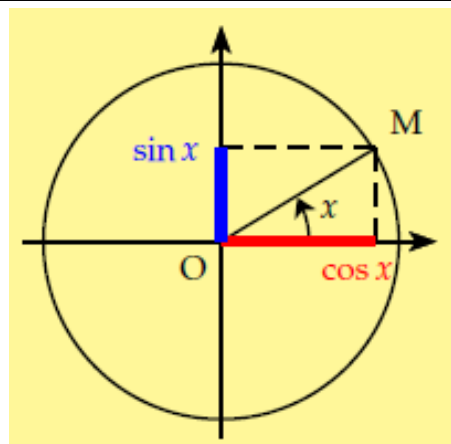
- **3^{ème} étape :** calculer les 2 valeurs intéressantes : $-\frac{\pi}{6}[2\pi]$ et $\pi - (-\frac{\pi}{6})[2\pi] = \frac{7\pi}{6}[2\pi]$

- écrire la solution : $S = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} [\frac{7\pi}{6} + 2k\pi; \frac{11\pi}{6} + 2k\pi]$

9.2 Étude des fonctions $x \mapsto \sin x$ et $x \mapsto \cos x$

Définition :

- on considère le cercle trigonométrique
- le point M du cercle, associé l'angle x , a des coordonnées
- on pose (c'est donc une définition) :
 - $x_M = \cos x$
 - $y_M = \sin x$
- lorsque $x \in \mathbb{R}$, on crée ainsi 2 fonctions :
 - $\mathbb{R} \mapsto [-1,1]$ et $\mathbb{R} \mapsto [-1,1]$
 $x \mapsto \cos x$ et $x \mapsto \sin x$



Propriété :

- (1) sinus est impaire : $\forall x \in \mathbb{R}, \sin(-x) = -\sin x$
- (2) cosinus est paire : $\forall x \in \mathbb{R}, \cos(-x) = \cos x$
- (3) sinus et cosinus sont 2π -périodique :
 - $\forall x \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{Z}, \sin(x + 2k\pi) = \sin x$
 - $\forall x \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{Z}, \cos(x + 2k\pi) = \cos x$
- (4) $\forall x \in \mathbb{R}, (\sin x)' = \cos x$
- (5) $\forall x \in \mathbb{R}, (\cos x)' = -\sin x$
- (6) ROC : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$
- HP (7) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{Z}, \sin(x + k\pi) = (-1)^k \sin x$
- HP (8) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{Z}, \cos(x + k\pi) = (-1)^k \cos x$

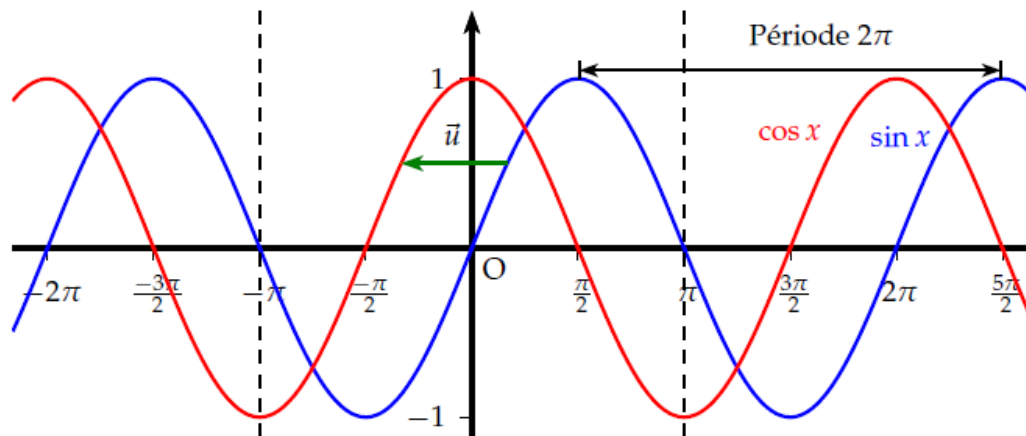
Remarque, exemple :

- (1) , (2) , (3) sont immédiates par visualisation du cercle trigonométrique
- preuve HP mais facile : (4) , (5) peuvent se prouver simplement en dérivant e^{ix}
- (6) est à connaître (ROC) ; voir le chapitre 2 : limite (penser au nombre dérivée)
- (7) et (8) résultat HP mais très utile : encore une fois, le passage par les complexes clarifie tout ...

Tableau de Variation et Graphe :

x	$-\pi$	0	π
$\cos' x = -\sin x$	+	0	-
$\cos x$	-1	1	-1

x	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin' x = \cos x$	-	0	+	0
$\sin x$	0	-1	1	0



9.3 Exemple sujet BAC

9.3.1 Centre Étranger 2017

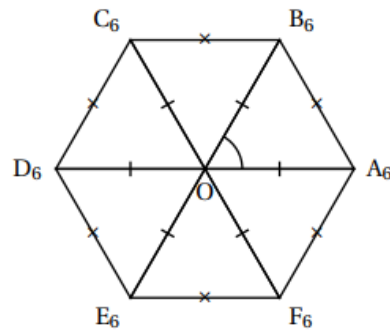
Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, \vec{u}, \vec{v}) .

Pour tout entier $n \geq 4$, on considère P_n un polygone régulier à n côtés, de centre O et dont l'aire est égale à 1. On admet qu'un tel polygone est constitué de n triangles superposables à un triangle OA_nB_n donné, isocèle en O .

On note $r_n = OA_n$ la distance entre le centre O et le sommet A_n d'un tel polygone.

Partie A : étude du cas particulier $n = 6$

On a représenté ci-contre un polygone P_6 .

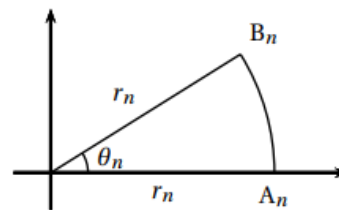


1. Justifier le fait que le triangle OA_6B_6 est équilatéral, et que son aire est égale à $\frac{1}{6}$.
2. Exprimer en fonction de r_6 la hauteur du triangle OA_6B_6 issue du sommet B_6 .
3. En déduire que $r_6 = \sqrt{\frac{2}{3\sqrt{3}}}$.

Partie B : cas général avec $n \geq 4$

Dans cette partie, on considère le polygone P_n avec $n \geq 4$, construit de telle sorte que le point A_n soit situé sur l'axe réel, et ait pour affixe r_n .

On note alors $r_n e^{i\theta_n}$ l'affixe de B_n où θ_n est un réel de l'intervalle $]0; \frac{\pi}{2}[$.



1. Exprimer en fonction de r_n et θ_n la hauteur issue de B_n dans le triangle OA_nB_n puis établir que l'aire de ce triangle est égale à $\frac{r_n^2}{2} \sin(\theta_n)$.
2. On rappelle que l'aire du polygone P_n est égale à 1.
Donner, en fonction de n , une mesure de l'angle $(\overrightarrow{OA_n}, \overrightarrow{OB_n})$, puis démontrer que :

$$r_n = \sqrt{\frac{2}{n \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)}}.$$

Partie C : étude de la suite (r_n)

On considère la fonction f définie pour tout réel x de l'intervalle $]0; \pi[$ par

$$f(x) = \frac{x}{\sin x}.$$

Ainsi, le nombre r_n , défini dans la partie B pour $n \geq 4$, s'exprime à l'aide de la fonction f par :

$$r_n = \sqrt{\frac{1}{\pi} f\left(\frac{2\pi}{n}\right)}.$$

On admet que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $]0; \pi[$.

1. Montrer que la suite (r_n) est décroissante. On pourra pour cela commencer par démontrer que pour tout $n \geq 4$, on a : $0 < \frac{2\pi}{n+1} < \frac{2\pi}{n} < \pi$.
2. En déduire que la suite (r_n) converge. On ne demande pas de déterminer sa limite L , et on admet dans la suite de l'exercice que $L = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$.
3. On considère l'algorithme suivant.

VARIABLES :	n est un nombre entier
TRAITEMENT :	n prend la valeur 4 Tant que $\sqrt{\frac{2}{n \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)}} > 0,58$ faire n prend la valeur $n + 1$ Fin Tant que
SORTIE :	Afficher n

Quelle valeur numérique de n va afficher en sortie cet algorithme ?

9.3.2 Polynésie 2017

On rappelle que pour tout réel a et tout réel b ,

$$\cos(a - b) = \cos(a) \cos(b) + \sin(a) \sin(b).$$

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) .

On considère la droite \mathcal{D} d'équation $y = -x + 2$.

1. Montrer que si le réel θ appartient à l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$, alors $\cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) > 0$.
2. Soit M un point du plan complexe d'affixe z non nulle. On note $\rho = |z|$ le module de z et $\theta = \arg(z)$ un argument de z ; les nombres ρ et θ sont appelés coordonnées polaires du point M .

Montrer que le point M appartient à la droite \mathcal{D} si et seulement si ses coordonnées polaires sont liées par la relation :

$$\rho = \frac{\sqrt{2}}{\cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)}, \text{ avec } \theta \in \left]-\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right[\text{ et } \rho > 0.$$

3. Déterminer les coordonnées du point de la droite \mathcal{D} le plus proche de l'origine O du repère.