Devoir Maison n° 3

Exercice 1 - *Étude d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2 (SRL2)* points

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 3$, $u_1 = 6$ et, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+2} = \frac{5}{4}u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n.$$

Le but de cet exercice est d'étudier la limite éventuelle de la suite (u_n).

Partie A :

On souhaite calculer les valeurs des premiers termes de la suite (u_n) à l'aide d'un tableur.
On a reproduit ci-dessous une partie d'une feuille de calcul, où figurent les valeurs de u_0 et de u_1.

	A	B
1	n	u_n
2	0	3
3	1	6
4	2	
5	3	
6	4	
7	5	

1. Donner une formule qui, saisie dans la cellule B4, puis recopiée vers le bas, permet d'obtenir des valeurs de la suite (u_n) dans la colonne B.
2. Recopier et compléter le tableau ci-dessus. On donnera des valeurs approchées à 10^{-3} près de u_n pour n allant de 2 à 5.
3. Que peut-on conjecturer à propos de la convergence de la suite (u_n) ?

Partie B : Étude de la suite

On considère les suites (v_n) et (w_n) définies pour tout entier naturel n par :

$$v_n = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n \quad \text{et} \quad w_n = u_n - 7.$$

1. a. Démontrer que (v_n) est une suite constante.

b. En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + \frac{21}{4}$.

2. a. En utilisant le résultat de la question **1. b.**, montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n < u_{n+1} < 15$.

b. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

3. a. Démontrer que (w_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

b. En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = 7 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$.

c. Calculer la limite de la suite (u_n).

Exercice 2 - *Travail de recherche sur internet* points

1. regarder la vidéo suivante : SRL2 à racines réelles
2. retrouvez directement, dans l'exercice précédent, l'expression de U_n (donnée en partie B question 3b) et donc aussi sa limite

Exercice 3 - *Un autre exemple* : la suite de Léonard de Pise points

La suite de Fibonacci (1202)

Léonard de Pise, surnommé Fibonacci seulement bien après sa mort, naît vers 1170 dans la république de Pise qui est alors au sommet de sa puissance militaire et commerciale dans le bassin méditerranéen. C'est par exemple en 1173 que commence la construction de la célèbre tour de Pise. Vers 1192, le père de Fibonacci est envoyé par la république à Béjaïa[1], un port d'Afrique du Nord, pour y diriger un comptoir commercial. Peu après, il fait venir son fils pour y apprendre le calcul et le préparer ainsi à devenir marchand. C'est là que Léonard apprend le système de numération d'origine indienne utilisé par les Arabes, avec des chiffres qui sont presque sous leur forme actuelle : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 et 9. En voyage d'affaires sur le pourtour méditerranéen, il compare les différents systèmes de calcul et étudie les mathématiques arabes. Il rentre vers 1200 à Pise. En 1202, il achève d'écrire un livre en latin intitulé *Liber abaci* (Le livre de l'abaque) dans lequel il expose le nouveau système de numération et montre comment l'utiliser pour la comptabilité, la conversion de poids et mesures, le calcul d'intérêts, le calcul de change et de nombreuses autres applications. Il rassemble également la plupart des résultats en algèbre et en arithmétique connus des arabes.

Dans son livre, Fibonacci considère par ailleurs ce qu'on appellerait aujourd'hui un problème de dynamique des populations, mais qui n'apparaît parmi une multitude d'autres problèmes[2] que comme un exercice de calcul. En voici une traduction approximative :

1. Aujourd'hui en Algérie. En français, cette ville est également appelée Bougie.
2. Le paragraphe précédent traite des nombres « parfaits » qui sont

Un homme possède un couple de lapins dans un lieu clos et souhaite savoir combien il y aura de couples au bout d'un an si par nature chaque couple de lapins donne naissance à partir de deux mois de vie à un nouveau couple de lapins tous les mois.

S'il y a un couple de lapins nouveau-nés au début du premier mois, ce couple ne sera pas encore fertile au bout d'un mois ; il y aura donc encore un seul couple. Au début du troisième mois, ce couple de lapins donnera naissance à un autre couple ; il y aura donc deux couples de lapins au total. Au début du mois suivant, le premier couple de lapins donne encore naissance à un nouveau couple, tandis que l'autre couple n'est pas encore fertile. Il y aura donc au total 3 couples de lapins.

En utilisant des notations modernes, notons P_n le nombre de couples de lapins le mois n. Le nombre de couples de lapins le mois $n+1$ (autrement dit P_{n+1}) est égal à la somme du nombre de couples de lapins du mois n (qui est P_n) et du nombre de couples de lapins nouveau-nés le mois $n+1$. Or seuls les couples de lapins âgés de deux mois ou plus donnent naissance à un nouveau couple de lapins le mois $n+1$. Ce sont donc les couples de lapins qui étaient présents le mois $n-1$, qui sont au nombre de P_{n-1}. Ainsi,

$$P_{n+1} = P_n + P_{n-1}.$$

C'est ce qu'on appelle une relation de récurrence : elle donne la population du mois $n+1$ par une formule dépendant de la population des mois antérieurs. À partir de là, Fibonacci construit facilement le tableau suivant :

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
P_n	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233

où effectivement $1+1=2$, $1+2=3$, $2+3=5$, $3+5=8$, etc. En réalité, Fibonacci considère comme situation initiale celle du

la somme de leurs diviseurs comme par exemple 28 (28=14+7+4+2+1) ; le suivant donne la solution d'un problème de répartition d'argent entre quatre personnes (équivalent à un système linéaire de quatre équations à quatre inconnues).

mois $n = 2$ dans le tableau. Comme $P_{14} = 144 + 233 = 377$, il trouve donc finalement douze mois après son point de départ 377 couples de lapins. Il remarque que cette suite de nombres peut se poursuivre indéfiniment.

Après 1202, Fibonacci écrira encore plusieurs livres, notamment *Practica geometriae* en 1220 et *Liber quadratorum* (Le livre des carrés) en 1225. Sa réputation lui vaut alors d'être présenté à l'empereur Frédéric II, également amateur de science. En 1241, la république de Pise l'honore en lui versant une pension annuelle. L'année de sa mort n'est pas connue.

Dans les siècles qui suivirent, le problème des lapins de Fibonacci tomba dans l'oubli et n'eut pas d'influence sur les modèles mathématiques développés pour la dynamique de populations. Plusieurs savants rencontrèrent la même suite dans leurs recherches mais sans se référer à Fibonacci ou à une quelconque population. C'est ainsi que dans plusieurs livres de Johannes Kepler, on trouve la remarque selon laquelle le rapport P_{n+1}/P_n converge quand n augmente indéfiniment vers une valeur limite qui se trouve être le nombre d'or $\phi = (1+\sqrt{5})/2$. C'est là un cas particulier d'une propriété commune à la plupart des populations : la tendance à croître de manière géométrique (cf. chap. 3 et 25). En 1765, Leonhard Euler démontre au détour d'un mémoire la formule plus précise

$$P_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right]^n.$$

Au XIX^e^ siècle est publiée une édition complète des œuvres de Fibonacci. Dès lors, la suite (P_n) se retrouve dans les livres de récréation mathématique sous le nom de suite de Fibonacci.

Il est clair que pour représenter une population de lapins, les hypothèses conduisant à la suite de Fibonacci sont loin d'être réalistes : absence de mortalité, absence de distinction entre les sexes... L'intérêt des dernières décennies pour cette suite dans le domaine de la biologie vient plutôt du fait que l'on a découvert sur quelques plantes des structures faisant intervenir certains des nombres P_n (en particulier les nombres 8, 13 et 21), par exemple dans les spirales à la base des pommes de pin ou dans les fleurs de tournesol (fig. 1). Un journal scientifique, *The Fibonacci Quarterly*, est même entièrement consacré à la suite de Fibonacci, à ses propriétés et à ses applications !

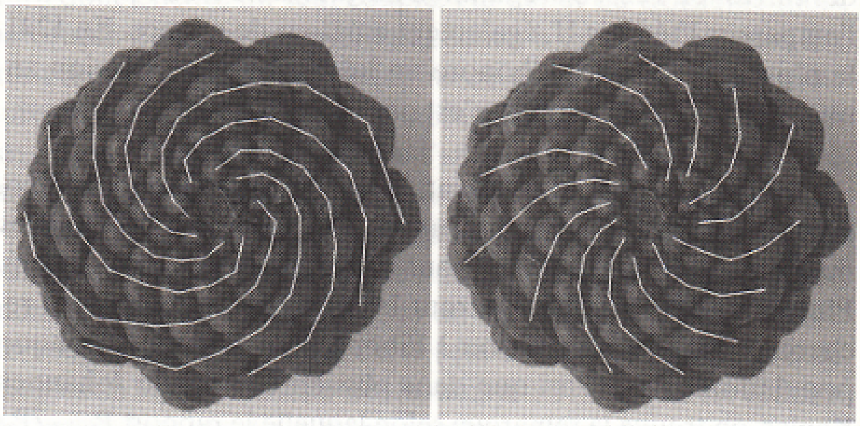

Fig. 1. *Pomme de pin avec 8 spirales dans un sens et 13 dans l'autre.*

1. lire l'article dans sa globalité et prendre le temps de le comprendre
2. retrouver l'expression du terme générique de la suite (fournie dans l'article) grâce à sa définition fonctionnelle
3. en déduire la limite du rapport de 2 termes consécutifs