Chapitre 6

Fonction Exponentielle

6.1 Construction et Premières Propriétés

6.1.1 Existence et Unicité de $x \mapsto e^x$

<u>Théorème - ROC :</u>

- il ***<u>existe</u>*** une ***<u>unique</u>*** fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$
  solution du *problème de Cauchy* : $\left\{ \begin{array}{l} f(0) = 1 \\ f' = f \end{array} \right.$
- elle est appelée fonction exponentielle et notée $\boxed{x \mapsto e^x}$ ou $x \mapsto \exp x$
- e^x se prononce "e de x" ou "exponentielle x" ou "exponentielle de x"

<u>Remarque, exemple :</u>

- $x \mapsto e^x$ est très importante en mathématiques
- le nombre $e^1 = e \approx 2.71828182845904523536028747135266249775724709369995...$ est lui aussi important ; on retiendra $e^1 = \boxed{e \approx 2.718}$
- elle se prolonge naturellement sur $\mathbb{C}$ (en fait c'est la fonction réelle qui est une restriction de l'exponentielle complexe) ; nous l'avons déjà "naturellement" rencontrée avec les nombres complexes (notation d'Euler)
- ***<u>HP : problème de Cauchy</u>***
  - la $1^{\text{ère}}$ condition du problème de Cauchy est la condition initiale
  - la 2^{nd} est l'équation différentielle proprement dite <u>cad</u> la relation que la fonction doit vérifier entre elle et ses dérivées (ici uniquement la dérivée d'ordre 1)
  - un problème de Cauchy consiste donc à trouver la ou les fonctions qui vérifie(nt) en même temps les 2 conditions
  - sous certaines conditions (ici elles sont réunies), il y a existence et unicité de la solution ...

- ***Preuve du Théorème - ROC :***

  1/ ***existence :*** $f(x) = e^x$ convient (admis)

  2/ ***unicité :***

  i. mq $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x)f(-x) = 1$

  ii. mq f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$

  iii. mq f est unique

6.1.2 Construction approchée de $x \mapsto e^x$

Tout ceci est bien joli mais cela ne nous montre pas à quoi ressemble cette fameuse fonction $x \mapsto e^x$

Voici une possibilité pour construire de façon approchée $x \mapsto e^x$ qui sera approfondie en DM :

- méthode "explicite"
- majoration de l'erreur
- convergence de la méthode

Il est intéressant de bien comprendre la méthode utilisée car elle se généralise et vous fait découvrir une nouvelle branche importante des mathématiques modernes : l'Analyse Numérique !

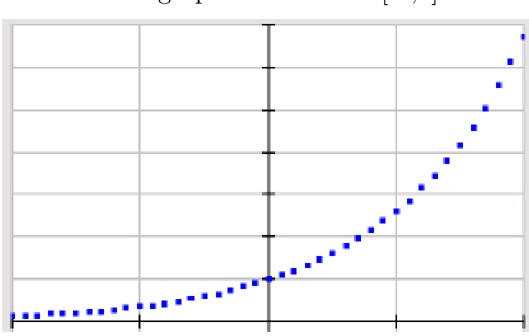
Méthode dite "explicite" : $f : x \mapsto e^x$

- on commence par placer le point d'abscisse 0 : $(0, f(0)) = (0, 1)$
- pour h petit, on approxime f par sa tangente en 0 : $f(0 + h) \approx f(0) + hf'(0)$
- comme $f' = f$ et $f(h) = f(0 + h)$, on a : $f(h) \approx f(0) + hf(0) = (1 + h)f(0) = 1 + h$
- on peut maintenant placer le point d'abscisse h : $(h, 1 + h)$
- on réitère et $\boxed{\text{on obtient les points de coordonnées } (nh, (1 + h)^n) \text{ \underline{où} } n \in \mathbb{Z}}$

Remarque, exemple :

- h est appelé le pas (de combien on avance)
  plus il est petit , plus la fonction approchée "colle" à la fonction théorique, mais plus il y a de calcul pour avoir un graphe "étendu"

- on obtient le graphe suivant sur [-2,2] avec $h = \dfrac{1}{10}$



- essayer de construire un algorithme permettant de construire ce graphique

- on reviendra sur cette construction en DM4 (en ligne)

6.1.3 Propriétés de $x \mapsto e^x$

Proriété : $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{Z}$

- ***relation fonctionnelle*** : $e^{a+b} = e^a \times e^b$
- $e^{-a} = \dfrac{1}{e^a}$
- $e^{a-b} = \dfrac{e^a}{e^b}$
- $e^{na} = (e^a)^n$

Remarque, exemple :

- on constate (et c'est pour cela que l'on a adopté la notation e^x) que les calculs exponentiels se font précisément avec les mêmes règles que celles des puissances : $\boxed{\text{exponentielle de } x = e \text{ puissance } x}$
- la 1ère relation est appelée **relation fonctionnelle de l'exponentielle**
  c'est 1 autre façon de définir $x \mapsto e^x$ (sans passer par Cauchy) ; on verra comment en approfondissement
- démontrer cette propriété caractéristique (aide : on pourra poser $\forall x \in \mathbb{R}$, $h(x) = \dfrac{e^{x+a}}{e^a}$)

6.1.4 Étude de $x \mapsto e^x$

Propriété :

1/ $x \mapsto e^x$ est C^∞
2/ $x \mapsto e^x$ est strictement positive sur $\mathbb{R}$
3/ $x \mapsto e^x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$
4/ ***ROC :*** $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$
5/ $x \mapsto e^x$ est une bijection continue $\mathbb{R}$ sur $]0\,;+\infty[$
6/ $\forall a, b \in \mathbb{R}$: $e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$ et $e^a < e^b \Leftrightarrow a < b$
7/ $\forall a \in \mathbb{R}$: $e^a = 1 \Leftrightarrow a = 0$, $e^a < 1 \Leftrightarrow a < 0$ et $e^a > 1 \Leftrightarrow a > 0$

Remarque, exemple :

- prouver les propriétés 1/ 2/ 3/ 5/ 6/ et 7/

- résoudre dans $\mathbb{R}$, $e^{2x^2+3} = e^{7x}$

- résoudre dans $\mathbb{R}$, $e^{3x} \leqslant e^{x+6}$

- ***Preuve du ROC :*** $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$
  A chercher (solution prochaine page)

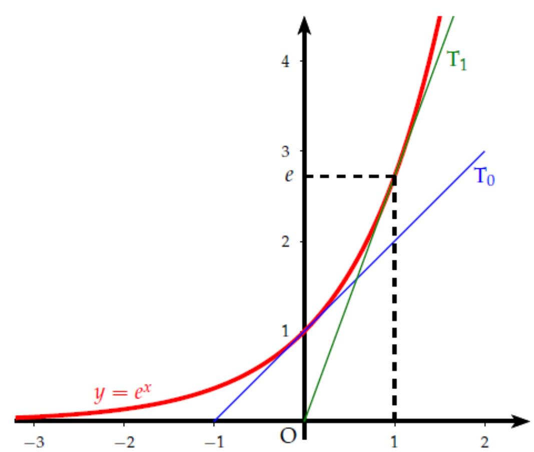
- on pose $f(x) = e^x - x$
- on pose $f'(x) = e^x - 1$
- d'où, grâce à 7/ le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	1	$\nearrow$	

- du tableau de variation, on déduit que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) > 0$ cad $e^x > x$
- comme $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$, par comparaison, on déduit : $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$
- en posant $y = -x$ et grâce à la continuité de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$, on obtient :
  $\lim\limits_{y \to -\infty} e^y = \lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{e^x} = \dfrac{1}{\lim\limits_{x \to +\infty} e^x} = 0$

Tableau de variation et Courbe $x \mapsto e^x$:

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$\exp'(x)$		$+$		
$\exp(x)$	0 $\nearrow$	1 $\nearrow$	e $\nearrow$	$+\infty$



6.1.5 Limite de référence avec $x \mapsto e^x$

Propriété :

- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = 0$

Remarque, exemple :

- les 2 dernières propriétés sont appelées "croissance comparée" : elles indiquent qu'à l'infini, c'est l'exponentielle qui impose sa limite
- HP : on montre facilement avec $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$ que $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{P(x)}{e^x} = 0$ où P est un polynôme quelconque

- étudier la fonction $f(x)=\dfrac{2e^x-3}{e^x+1}$

6.2 Dérivation composée de $x \mapsto e^{u(x)}$

Propriété : I intervalle de $\mathbb{R}$

- ***Si*** u est dérivable sur I
- ***Alors*** e^u aussi sur I et $\boxed{(e^{u(x)})' = u'(x)\times e^{u(x)}}$

6.3 Applications en Physique et SVT de $x \mapsto e^x$

6.3.1 HP - Résolution d'1 Équation Différentielle Linéaire du 1^er ordre (à coefficients constants)

Propriété : $a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}$

- les solutions de $\boxed{y' = ay}$ sont les fonctions du type $\boxed{y(x) = Ce^{ax} \text{ \underline{où} } C \in \mathbb{R}}$
- les solutions de $y' = ay + b$ sont les fonctions du type $y(x) = Ce^{ax} - \dfrac{b}{a}$ où $C \in \mathbb{R}$

Remarque, exemple :

- ces résultats sont admis ; 1 preuve simple (utilisée plutôt par les physiciens que les matheux) passe par l'utilisation de la fonction logarithme (voir chapitre concerné)
- pour l'instant, le plus simple est juste de connaître ce résultat (déjà hors programme !)
- Résoudre : $y' = 3y$
- Résoudre : $y' + 3y = 5$

6.3.2 Radioactivité et Préhistoire

Si $N(t)$ est le nombre de noyaux d'1 corps radioactif à l'instant t, la vitesse de variation $\dfrac{\Delta N(t)}{\Delta t}$ de ce nombre (par désintégration) est proportionnelle à $N(t)$

1/ en supposant N dérivable (pourquoi ?), mq $\exists \lambda > 0$ tq $N'(t) = -\lambda N(t)$

2/ résoudre cette équation cad trouver la fonction N en fonction de t

3/ trouver la demi-vie en fonction de λ cad le temps qu'il faut pour que la moitié des noyaux se désintègrent (on admettra que : $e^x = y \Leftrightarrow x = \ln y$)

4/ Application : la datation au carbone 14
- le carbone 14 est un isotope radioactif du carbone dont la demi-vie est d'environ 5734 ans
- la concentration de carbone 14 par rapport au carbone total présent dans 1 organisme vivant est d'environ 10^{-12}
- lorsque l'organisme meurt, la quantité de carbone reste constante alors que celle de carbone 14 se désintègre progressivement
- la concentration en carbone 14 d'Ötzi (humain découvert congelé dans un glacier italo-autrichien en 1991) a été évaluée à $5,8.10^{-13}$
- quelle est approximativement la date de sa mort ?

6.3.3 Thermodynamique et Chaleur

La variation de la température $\dfrac{dT}{dt}$ (en $^\circ C$) d'1 matériau est proportionnelle à la différence entre sa température T et la température extérieure T_{ext}

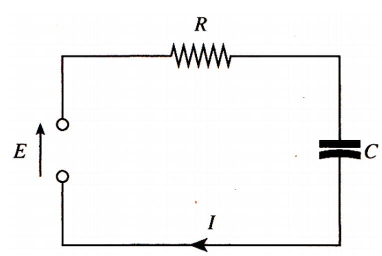
1/ mq $\dfrac{dT}{dt} = -k(T - T_{ext})$ où $k > 0$

2/ résoudre cette équation cad trouver la fonction N en fonction de t

3/ sachant que $T_{ext} = 30\,^\circ C$ et qu'à $t = 0$ le matériau est à $30\,^\circ C$, trouver T en fonction du temps t

4/ calculer $\lim\limits_{t \to +\infty} T(t)$? est-ce logique ?

6.3.4 Électricité - Circuit RC



- voici 1 montage en série d'1 condensateur C et d'1 résistance R soumis à 1 tension E à partir de $t = 0$
- la quantité de courant est $q(t)$
- on sait que $i = \dfrac{dq}{dt}$ où i est l'intensité

- au borne de la résistance, la tension est $U = Ri$
- au borne du condensateur, la tension est $U_c = \dfrac{q(t)}{C}$
- en convention générateur (ici E), U et i sont le même sens
- en convention récepteur (ici R et C), U et i sont en sens inverse
- on pose $\tau = RC$ appelé constante de temps du dipôle RC

1/ mq la quantité de courant $q(t)$ vérifie l'équation $\dfrac{dq}{dt} = -\dfrac{1}{\tau}q + \dfrac{E}{R}$

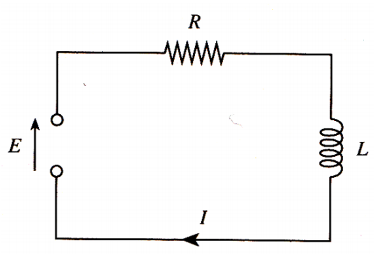
2/ en déduite $q(t)$ puis $u_C(t)$

3/ mq $\lim\limits_{t \to +\infty} u_C(t) = E$; quelle est alors la situation du circuit ?

4/ on considère qu'1 condensateur est chargé lorsque u_C vaut 99% de E ; les physiciens utilisent alors 3 règles rapides pour trouver τ :
- le condensateur est chargé lorsque $t = 4,6\tau$
- lorsque $t = \tau$, la tension u_C vaut 63% de E
- τ est l'abscisse de l'intersection entre la tangente à l'origine de $y = u_C(t)$ et $y = E$

vérifier ces 3 règles

6.3.5 Électricité - Circuit RL



- voici 1 montage en série d'1 condensateur C et d'1 résistance R soumis à 1 tension E à partir de $t = 0$
- la quantité de courant est $q(t)$
- on sait que $i = \dfrac{dq}{dt}$ <u>où</u> i est l'intensité

- au borne de la résistance, la tension est $U = Ri$
- au borne de la bobine, la tension est $U_b = Lq(t)$
- en convention générateur (ici E), U et i sont le même sens
- en convention récepteur (ici R et L), U et i sont en sens inverse
- on pose $\tau = \dfrac{L}{R}$ appelé constante de temps du dipôle RL

1/ mq la quantité de courant $q(t)$ vérifie l'équation $\dfrac{dq}{dt} + \dfrac{1}{\tau}q + \dfrac{E}{L}$

2/ en déduite $q(t)$ puis $u_L(t)$

6.3.6 Médecine et Population

Pour 1 population vivant dans 1 milieu clos (ex : bactéries dans 1 coupelle de culture), la croissance est dans 1 premier temps exponentielle mais ensuite freinée par surpopulation (manque de nourriture, d'oxygène, ...).
Ce phénomène se modélise par l' $\boxed{\text{équation logistique : } y' = \lambda y(1-y)}$ <u>où</u> $y(t) = \dfrac{population(t)}{population \quad max}$

1/ vérifier, qu'au début, la croissance est bien exponentielle

2/ poser $z = \dfrac{1}{y}$ et résoudre l'équation logistique

3/ si $y(o) = 0,01$ et $\lambda = 1$, exprimer y(t)

4/ observer la courbe sur votre calculatrice et commenter

