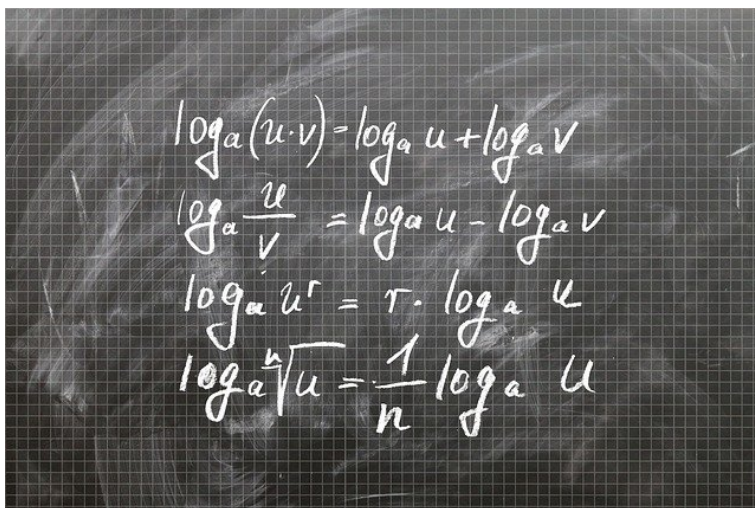


## Chapitre 8

# Fonction Logarithme Népérien



### 8.1 Définition et Représentation de $x \mapsto \ln x$

**Définition :**

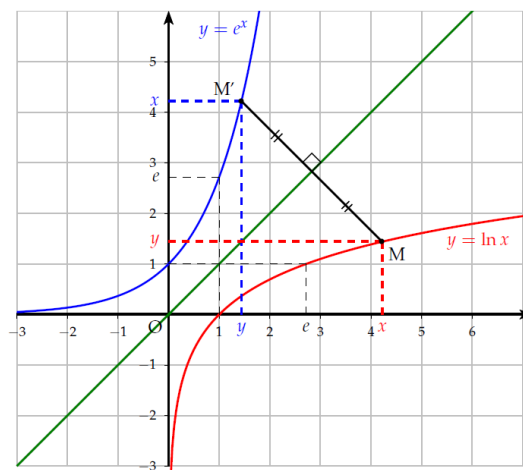
- $x \mapsto e^x$  est 1 bijection de  $\mathbb{R}$  sur  $\mathbb{R}_+^*$
- on peut donc définir sa bijection réciproque de  $\mathbb{R}_+^*$  sur  $\mathbb{R}$ , notée  $x \mapsto \ln x$
- par définition, on a :  $y = \ln x \Leftrightarrow x = e^y$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$  et  $y \in \mathbb{R}$

**Remarque, exemple :**

- clairement, en réfléchissant avec  $x \mapsto e^x$ , on a :  $\ln 1 = 0$  et  $\ln e = 1$
- un peu moins évident, mais tout aussi clair est :  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$   
en effet, en posant  $x = e^y$ , on obtient par exemple :  
 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = \lim_{e^y \rightarrow 0^+} \ln e^y = \lim_{e^y \rightarrow 0^+} y = -\infty$ , (la dernière affirmation grâce au graphe de  $y \mapsto e^y$ )

**Représentation de  $x \mapsto \ln x$  :**

- par définition,  $x \mapsto \ln x$  et  $x \mapsto e^x$  sont réciproques l'une de l'autre
- la représentation graphique de la fonction  $x \mapsto \ln x$  est donc la même que celle  $x \mapsto e^x$  : il suffit de permuter les axes  $x$  et  $y$
- bref, les 2 fonctions  $x \mapsto \ln x$  et  $x \mapsto e^x$  sont symétriques par rapport à la droite  $y = x$

**Propriété :**

- $x \mapsto \ln x$  est strictement croissante
- $\forall a, b \in \mathbb{R}_+^*$ , on a :
 

• $\ln a = \ln b \Leftrightarrow a = b$	• $\ln a < 0 \Leftrightarrow a < 1$	• $\ln a = 0 \Leftrightarrow a = 1$
• $\ln a < \ln b \Leftrightarrow a < b$	• $\ln a > 0 \Leftrightarrow a > 1$	• $\ln a = 1 \Leftrightarrow a = e$

**Remarque, exemple :**

- Résoudre :  $\ln(2 - 2x) = 1$
- Résoudre :  $\ln(2x + 1) < -1$

**8.2 Propriétés de  $x \mapsto \ln x$** **Propriété :**  $\forall a, b \in \mathbb{R}_+^*, \forall n \in \mathbb{Z}$ 

- **relation fonctionnelle** :  $\ln(ab) = \ln a + \ln b$
- $\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$
- $\ln(a^n) = n \ln a$
- $\ln \frac{1}{a} = -\ln a$
- $\ln \sqrt{a} = \frac{1}{2} \ln a$

Remarque, exemple :

- exprimer  $\ln 200$  en fonction de  $\ln 2$  et  $\ln 5$
- Déterminer le plus petit entier  $n$  tq :  $2^n > 10000$
- $\ln \sqrt{2x+3} = \ln(6-x) - \frac{1}{2} \ln x$

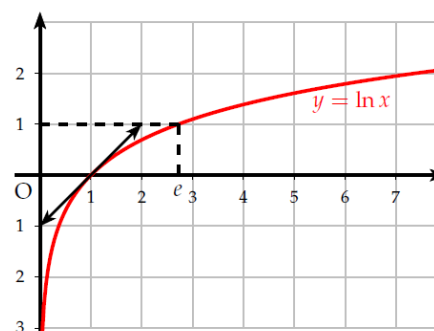
8.3 Étude de  $x \mapsto \ln x$ Propriété :

- Dérivée :  $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $(\ln x)' = \frac{1}{x}$
- comme vu en début de cours,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$
- Limite de référence :  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$
- Croissance comparée :  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$
- Dérivée d'1 fonction composée :  $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$  où  $u$  est 1 fonction strictement positive

Remarque, exemple :

- il faut s'entraîner à démontrer ces différentes propriétés
- voici le tableau de variations de la fonction  $x \mapsto \ln x$  ainsi que son graphe :

$x$	0	1	$e$	$+\infty$
$\frac{1}{x}$		+		
$\ln$	$-\infty$	0	1	$+\infty$



- étudier  $f(x) = \ln(1 + x^2)$

- étudier  $g(x) = x^2 - 4x - 4 \ln x$

- $(u_n)$  tq :  $\forall n \leq 1, u_n = (1 + \frac{1}{n})^n$

- mq  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = e$

- mq  $(u_n)$  est croissante

- que fait l'algorithme ci-dessous ? retrouver (en le programmant) les résultats affichés par Python

- que pensez-vous de la vitesse de CV de la suite ?

```
1 from math import *  
2 u,k = 2,1  
3 while abs(u-exp(1))>0.001:  
4     k+=1  
5     u=(1+1/k)**k  
6 print("rang :",k)  
7 print("U_n :",u)
```

```
rang : 1359  
U_n : 2.7172823988811725
```

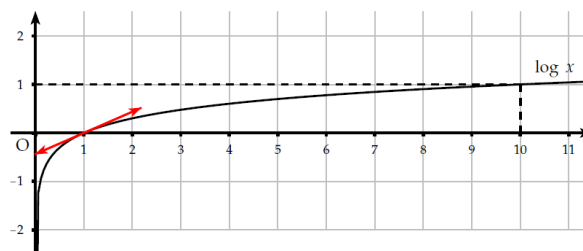
## 8.4 Logarithme Décimal

### Définition - Propriété :

- on appelle *logarithme décimal* la fonction :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \log x = \ln_{10} x = \frac{\ln x}{\ln 10}$$

- on dit aussi *logarithme en base 10*  
très utile en physique / chimie
- comme  $\ln 10 \simeq 2.3$ , la courbe de  $x \mapsto \log x$  est la même que celle de  $x \mapsto \ln x$  en "écrasée"



### Remarque, exemple :

- quel est le nombre de chiffre de  $2017^{2017}$  ?
- une très belle application du logarithme décimal en probabilité est la loi de Benford (traité partie : simulation en TS) et que nous verrons en DM si nous en avons le temps ...

## 8.5 Bac Type 2017

### 8.5.1 Amérique du Sud 2017

La chocolaterie Delmas décide de commercialiser de nouvelles confiseries : des palets au chocolat en forme de goutte d'eau. Pour cela, elle doit fabriquer des moules sur mesure qui doivent répondre à la contrainte suivante : pour que cette gamme de bonbons soit rentable, la chocolaterie doit pouvoir en fabriquer au moins 80 avec 1 litre de pâte liquide au chocolat.



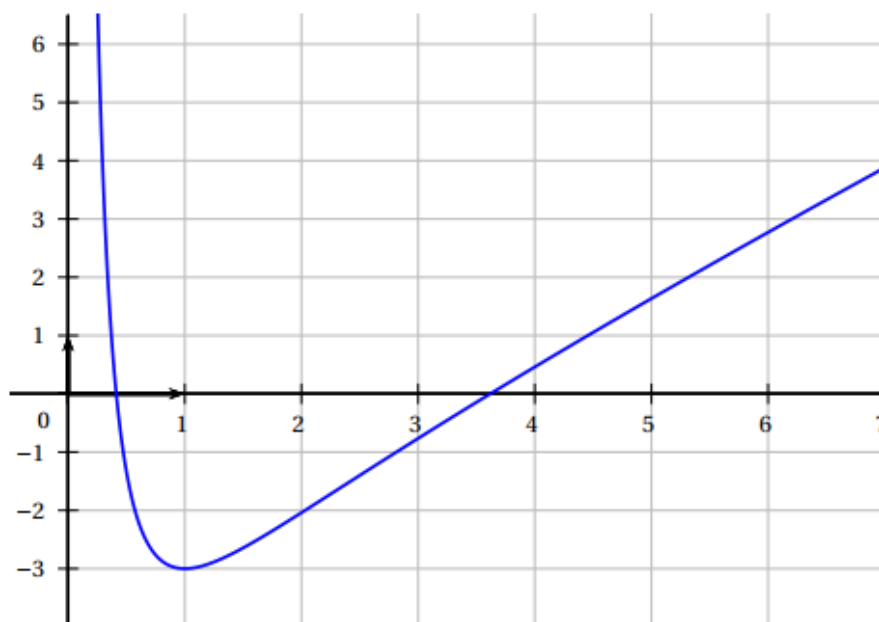
#### Partie A : modélisation par une fonction

#### Partie A : modélisation par une fonction

Le demi contour de la face supérieure du palet sera modélisé par une portion de la courbe de la fonction  $f$  définie sur  $]0; +\infty[$  par :

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x - 2 - 3\ln x}{x}.$$

La représentation graphique de la fonction  $f$  est donnée ci-dessous.



Le repère est orthogonal d'unité 2 cm en abscisses et 1 cm en ordonnées.

1. Soit  $\varphi$  la fonction définie sur  $]0; +\infty[$  par :

$$\varphi(x) = x^2 - 1 + 3 \ln x.$$

- a. Calculer  $\varphi(1)$  et la limite de  $\varphi$  en 0.
- b. Étudier les variations de  $\varphi$  sur  $]0; +\infty[$ .  
En déduire le signe de  $\varphi(x)$  selon les valeurs de  $x$ .

2. a. Calculer les limites de  $f$  aux bornes de son ensemble de définition.

- b. Montrer que sur  $]0; +\infty[$  :  $f'(x) = \frac{\varphi(x)}{x^2}$ .  
En déduire le tableau de variation de  $f$ .

- c. Prouver que l'équation  $f(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha$  sur  $]0; 1]$ .

Déterminer à la calculatrice une valeur approchée de  $\alpha$  à  $10^{-2}$  près.

On admettra que l'équation  $f(x) = 0$  a également une unique solution  $\beta$  sur  $[1; +\infty[$  avec  $\beta \approx 3,61$  à  $10^{-2}$  près.

- d. Soit  $F$  la fonction définie sur  $]0; +\infty[$  par :

$$F(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x - 2 \ln x - \frac{3}{2}(\ln x)^2.$$

Montrer que  $F$  est une primitive de  $f$  sur  $]0; +\infty[$ .

### Partie B : résolution du problème

Dans cette partie, les calculs seront effectués avec les valeurs approchées à  $10^{-2}$  près de  $\alpha$  et  $\beta$  de la partie A.

Pour obtenir la forme de la goutte, on considère la courbe représentative  $C$  de la fonction  $f$  restreinte à l'intervalle  $[\alpha; \beta]$  ainsi que son symétrique  $C'$  par rapport à l'axe des abscisses.

Les deux courbes  $C$  et  $C'$  délimitent la face supérieure du palet. Pour des raisons esthétiques, le chocolatier aimerait que ses palets aient une épaisseur de 0,5 cm. Dans ces conditions, la contrainte de rentabilité serait-elle respectée?

## 8.5.2 Antilles - Guyane 2017

Dans tout l'exercice,  $n$  désigne un entier naturel strictement positif. Le but de l'exercice est d'étudier l'équation

$$(E_n): \quad \frac{\ln(x)}{x} = \frac{1}{n}$$

ayant pour inconnue le nombre réel strictement positif  $x$ .

### Partie A

Soit la fonction  $f$  définie et dérivable sur  $[1; +\infty[$  telle que, pour tout nombre réel  $x$  supérieur ou égal à 1,

$$f(x) = \frac{1}{x} \ln(x).$$

On note  $\mathcal{C}$  la courbe représentative de  $f$  dans un repère orthonormé.

1. Démontrer que la courbe  $\mathcal{C}$  admet une asymptote horizontale.
2. Déterminer la fonction dérivée  $f'$  de la fonction  $f$  sur  $[1; +\infty[$ .
3. Étudier les variations de la fonction  $f$  sur  $[1; +\infty[$ .

### Partie B

On considère la suite  $(u_n)$  définie par

$$u_n = \int_1^2 \frac{1}{x^{n+1}} \ln(x) \, dx \text{ pour tout entier naturel } n.$$

1. Démontrer que  $u_0 = \frac{1}{2} [\ln(2)]^2$ .  
Interpréter graphiquement ce résultat.
2. Prouver que, pour tout entier naturel  $n$  et pour tout nombre réel  $x$  de l'intervalle  $[1; 2]$ , on a

$$0 \leq \frac{1}{x^{n+1}} \ln(x) \leq \frac{1}{x^{n+1}} \ln(2).$$

3. En déduire que, pour tout entier naturel<sup>1</sup>  $n$ , on a

$$0 \leq u_n \leq \frac{\ln(2)}{n} \left(1 - \frac{1}{2^n}\right).$$

4. Déterminer la limite de la suite  $(u_n)$ .