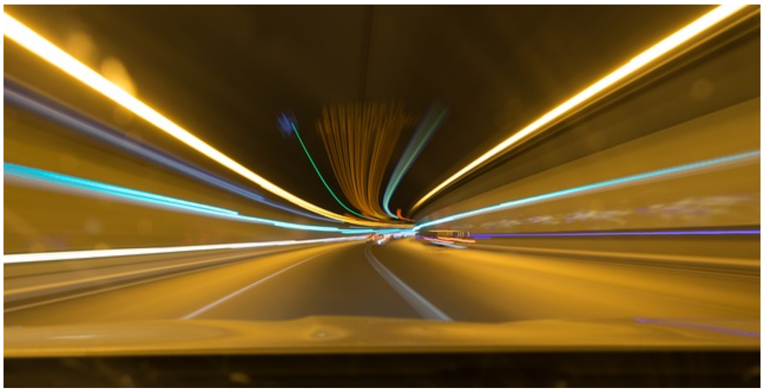
Chapitre 4

Continuité - Dérivation



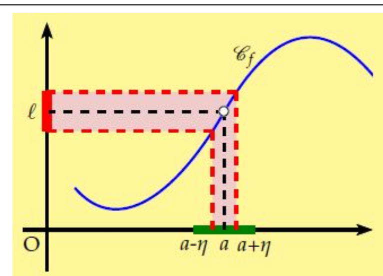
4.1 Continuité d'1 fonction

4.1.1 Limite finie en 1 point

Définition (rappel) : l , $a \in \mathbb{R}$ et $f : I \mapsto \mathbb{R}$

f ***tend vers*** l ***en*** a si :

- $\forall J$ intervalle ouvert contenant l
- $\exists\, I$ ouvert contenant a tq :
  $x \in I \Rightarrow f(x) \in J$
- on note : $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$



Remarque, exemple :

- la notion de limite nous conduit naturellement vers la notion de continuité
- ***H.P. :*** dans le supérieur, on écrit plutôt :
  $f : I \mapsto \mathbb{R}$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$
  $\boxed{f \text{ est continue en a si : } \forall \epsilon > 0 \quad \exists \alpha > 0 \quad \forall a \in I \quad (|x - a| < \epsilon \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \alpha)}$

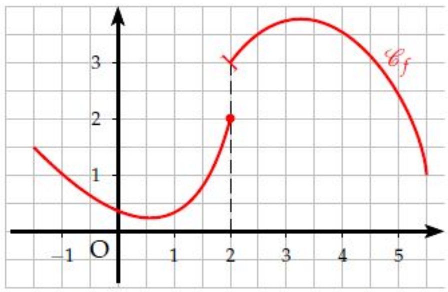
4.1.2 Continuité en un point

Définition : l , $a \in \mathbb{R}$ et $f : I \mapsto \mathbb{R}$

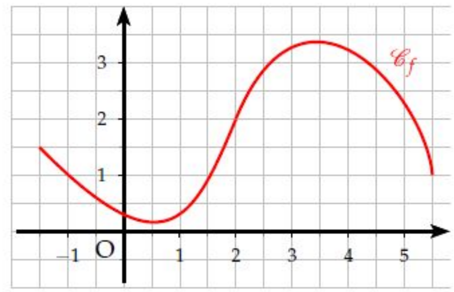
- f ***est continue en*** a si $\boxed{\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)}$
- f continue sur $I \Leftrightarrow f$ continue en tout point de I
- si f n'est pas continue en a, on parle de **discontinuité en** a

Remarque, exemple :

- en gros (faux attention), 1 fonction continue est 1 fonction "que l'on peut tracer sans lever le stylo" ou bien "qui reste en 1 seul morçeau"



Fonction f discontinue en 2
$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = 3 \neq f(2)$



Fonction f continue sur $[-1,5\,;5,5]$

- toutes les <u>fonctions polynômes sont continues sur $\mathbb{R}$</u> (famille de fonctions très utilisées car très régulières : bien plus que continues, elles sont indéfiniment dérivables ...)

- la fonction inverse $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}^*$ mais ne l'est pas sur $\mathbb{R}$
  si f est continue, il faut donc bien préciser où (sinon problème potentiel ...)
  dans le cas où on ne dit rien, c'est que l'on parle de $\mathbb{R}$

- **<u>ce qu'il faut bien comprendre :</u>** pour 1 valeur a, vous pouvez regarder f à 3 endroits $\neq$:

  - à gauche <u>cad</u> que vous regardez $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$

  - à droite <u>cad</u> vous regardez $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$

  - pile sur a <u>cad</u> vous regardez $f(a)$

    f est continue en a si ces 3 valeurs existent et sont égales :
    $\boxed{f \text{ continue en } a \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = f(a)}$

- il est possible de parler de :

  - <u>f continue à gauche :</u> $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = f(a)$

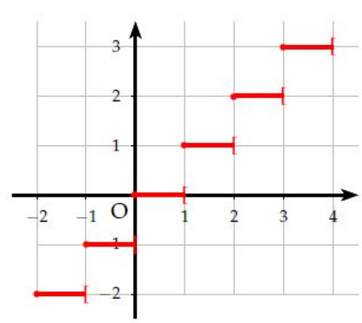
  - <u>f continue à droite :</u> $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = f(a)$

- $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & si \quad x \in \mathbb{R}^* \\ 1 & si \quad x = 0 \end{cases}$ est continue sur $\mathbb{R}$ (vérifier le !!)

- voici la fonction partie entière $x \mapsto E(x)$

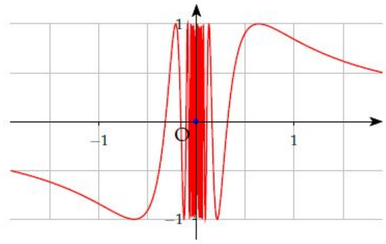
  elle est <u>continue à droite</u> sur $\mathbb{R}$

  elle est <u>continue à gauche</u> uniquement sur $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$



- $f(x) = \begin{cases} \sin\dfrac{1}{x} & si \quad x \in \mathbb{R}^* \\ 0 & si \quad x = 0 \end{cases}$

  f n'est pas continue en 0 : pourquoi ?



- travail à faire : trouver tous les cas possibles de non continuité d'1 fonction f en 1 point

- H.P. : vous pouvez rencontrer la notation : $f \in C([0{,}1],\mathbb{R})$ ou $f \in C^0([0{,}1],\mathbb{R})$
  qui veut dire : f est 1 fonction continue de $[0{,}1]$ sur $\mathbb{R}$

4.1.3 Continuité des fonctions usuelles

Propriété : (admis - assez intuitif)

- les fonctions polynômes sont continues sur $\mathbb{R}$
- $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$
- la fonction valeur absolue $x \mapsto |x|$ est continue sur $\mathbb{R}$
- $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$
- $x \mapsto \sin x$ et $x \mapsto \cos x$ sont continues sur $\mathbb{R}$
- $x \mapsto \tan x$ est continue sur son domaine de définition : $\mathbb{R}\backslash\{k\dfrac{\pi}{2}|k \in \mathbb{Z}\}$

Remarque, exemple :

- $x \mapsto \dfrac{1}{x-a}$ est continue sur son domaine de définition : $\mathbb{R}\backslash\{a\} =]-\infty\,;\, a\,[\,\cup\,]\,a\,;\,+\infty[$

- $x \mapsto \sqrt{x+a}$ est continue sur son domaine de définition : $[\,-a\,;\,+\infty\,[$

- H.P. : 1 fraction rationnelle $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ est continue sauf au niveau de ses pôles cad les racines de $Q(x)$

- H.P. : prolongement par continuité
  intéressons nous à la fonction $x \mapsto \dfrac{\sin x}{x}$ définie sur $\mathbb{R}^*$
  on remarque que cette fonction est "presque continue" en 0 car $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0$
  il suffirait qu'elle soit définie en 0 ... ce qui n'est pas encore le cas ... et que sa valeur soit 0
  on répare ce "problème" en décidant que $f(0) = 0$ et f devient continue sur $\mathbb{R}$ cette fois-ci !

4.1.4 HP (approfondissement) : lien entre Continuité et Suite

Propriété : (u_n) 1 suite, f 1 fonction ; de plus, on suppose que tout est bien définie

- **Si :** f est continue
- **Alors :** $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = f(\lim\limits_{n\to+\infty} u_n) = f(l)$

Remarque, exemple :

- ***ex d'utilisation :*** 1 suite récursive
  $(u_n) = \begin{cases} u_0 & = & 1 \\ u_{n+1} & = & \sqrt{3u_n + 4} \end{cases}$
  l'étude de (u_n) montre que (u_n) est croissante, majorée par 4 $\Rightarrow$ (u_n) CV : l sa limite
  d'une part, $f(u_n) = \sqrt{3u_n + 4} \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{3u_n + 4}$
  d'autre part, f est continue $\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{3u_n + 4} = \sqrt{3 \lim\limits_{n\to+\infty} u_n}$
  de ces 2 informations, on obtient l'équation de la limite :
  $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = f(\lim\limits_{n\to+\infty} u_n) = f(l)$
  bref : $f(l) = l \Rightarrow \sqrt{3l + 4} = l \Rightarrow l^2 - 3l - 4 = 0 \Rightarrow l = -1$ ou $l = 4 \Rightarrow l = 4$ car (u_n) est croissante

- 1 point essentiel, dans l'exemple précédent est de bien comprendre que :
  $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l \qquad \lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = l \qquad u_{n+1} = f(u_n)$
  mais seul la continuité de f apporte l'égalité (par passage à la limite) $f(l) = l$

4.1.5 Continuité et Dérivabilité

Propriété : (admis - assez intuitif)

- ***Si :*** f est dérivable en a ***Alors :*** f est continue en a
- ***Attention*** la réciproque est fausse (ex : $x \mapsto |x|$ en 0)

Remarque, exemple : même principe entre "ensemble de définition" et la "continuité"

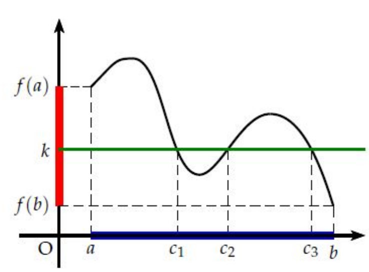
- ***Si :*** f est continue en a ***Alors :*** f est définie en a (réciproque fausse évidement)

4.1.6 Théorème des Valeurs Intermédiaires

Théorème des Valeurs Intermédiaires :

- ***Si :***
  $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$
  f est continue

- ***Alors :***
  $\forall k$ entre $f(a)$ et $f(b)$,
  $\exists c \in [a, b]$ tq $f(c) = k$



Noter que le c n'est pas forcément unique (dans le cas général)

Remarque, exemple :

- dans le théorème, on n'écrit pas $k \in [f(a);\ f(b)\ ]$ car on ne sait pas qui est le plus grand ($f(a)$ ou $f(b)$)

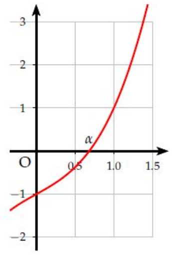
- on n'a pas besoin de la continuité de f pour arriver à la même conclusion :
  trouver 1 ex où f n'est pas continue et tq $\forall k$ entre $f(a)$ et $f(b)$, $f(x) = k$ admet 1 solution sur $[a; b\ ]$

- par contre, l'hypothèse de continuité est obligatoire si on veut que le résultat soit toujours vrai
  trouver 1 contre-exemple

- ***Si*** f est continue sur $[a;\ b\ ]$ et $f(a) \times f(b) < 0$

  Alors l'équation $f(x) = 0$ admet au moins 1 solution sur $[a;\ b\ ]$

  On verra des algorithmes de recherche de solution approchée : dichotomie, newton, ...



TVI strictement monotone : unicité du c	
Si :	***Alors :***
$f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$	$\forall k$ entre $f(a)$ et $f(b)$,
f est continue	$\exists !\ c \in [a, b]$ tq $f(c) = k$
f strictement monotone	

Méthode de Dichotomie : Résoudre de façon approchée $f(x) = 0$

- $f(x) = x^3 + x - 1$ admet 1 unique solution sur $\mathbb{R}$
  ceci peut être prouver grâce au TVI
  elle est comprise entre 0 et 1
  (voir graphique ci-dessus)

- on peut appliquer l'algorithme de dichotomie pour obtenir 1 valeur approchée de la racine α

- programmer cet algorithme : (ne pas regarder - le programme est à la page suivante)


```python
import math

def f(x):
    return x**3+x-1


def dichotomie(a, b, f, epsilon=1e-6):
    if(math.fabs(a - b) <= epsilon):
        return (a+b)/2.0
    else:
        fa = f(a)
        fb = f(b)
        fab = f((a+b)/2.0)
        if(fa * fab <= 0):
            return dichotomie(a, (a+b)/2.0, f, epsilon)
        elif(fab * fb <= 0):
            return dichotomie((a+b)/2.0, b, f, epsilon)
        else:
            raise Exception("Domaine invalide pour trouver un z ro par dichotomie")

a = 0
b = 1
print("Z ro de x**3+x-1 sur [{},{}] : {}".format(a, b, round(dichotomie(a, b, f),6)))
```

4.2 Dérivée d'une fonction

4.2.1 Dérivée : de la définition aux formules classiques

Définition : a , $l \in \mathbb{R}$ et $f : I \mapsto \mathbb{R}$

- ***Si :*** $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = l$ ***Alors :*** f est **dérivable** en a
- le **nombre dérivé** de f en a est $f'(a)$
- géométriquement, il représente la pente de la courbe de f en $(a{,}f(a))$ (cad la pente de la tangente en ce point)
- plus généralement, on note f' ou $f'(x)$ la **dérivée** de f sur un intervalle I

Exemple 1 : calcul de limite (rappel chap fonction)

- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$
- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x-1}{x}$
- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan x}{x}$
- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x}$
- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(1+x)^n-1}{x}$
- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$

Exemple 2 : étude de la continuité et de la dérivabilité d'1 fonction

- $f(x) = \begin{cases} x^2-2x-2 & si \quad x \leqslant 1 \\ \dfrac{x-4}{x} & si \quad x > 1 \end{cases}$
- étudier la continuité de f

- étudier la dérivabilité de f

Exemple 3 : mais où sont pas les bonnes vieilles formules ... si simples à retenir !

- démontrer que $(x^2)' = 2x$

- démontrer que $(\sin x)' = \cos x$

- moralité : on garde les "formules" qui fonctionne quasiment tout le temps et on utilise le nombre dérivée pour les cas plus délicats ...

4.2.2 Les formules à connaître

Fonction	$\mathscr{D}_f$	Dérivée	$\mathscr{D}'_f$
$f(x) = k$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 0$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 1$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n \quad n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \dfrac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$	$]-\infty;0[$ ou $]0;+\infty[$
$f(x) = \dfrac{1}{x^n} \quad n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}^*$	$f'(x) = -\dfrac{n}{x^{n+1}}$	$]-\infty;0[$ ou $]0;+\infty[$
$f(x) = \sqrt{x}$	$[0;+\infty[$	$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0;+\infty[$
$f(x) = \sin x$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = \cos x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \cos x$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = -\sin x$	$\mathbb{R}$

Remarque, exemple : pour aller 1 peu plus loin ...

- $\boxed{(\tan x)' = 1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x} \text{ sur } \mathbb{R} \backslash \{\mathbb{Z}\dfrac{\pi}{2}\}}$
- $(e^x)' = e^x$ sur $\mathbb{R}$
- $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$ sur ${\mathbb{R}^*}_+$

Dérivée de la somme	$(u+v)' = u' + v'$
Dérivée du produit par un scalaire	$(ku)' = ku'$
Dérivée du produit	$(uv)' = u'v + uv'$
Dérivée de l'inverse	$\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{u'}{u^2}$
Dérivée du quotient	$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$
Dérivée de la puissance	$(u^n)' = nu'u^{n-1}$
Dérivée de la racine	$(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$
Dérivée autre	$[f(ax+b)]' = a \times f'(ax+b)$

Remarque, exemple :

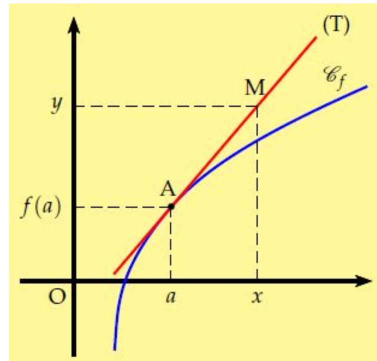
- dérivée d'1 fonction composée : $\boxed{(fog)'(x) = f\,[g(x)] = f'\,[g(x)] \times g'(x)}$

  dérivée "grande - petite" égale "dérivée grande" appliquée à "petite" fois "dérivée petite"

- H.P. dérivée fonction réciproque : $\boxed{(f^{-1})'(y) = \dfrac{1}{f'\,[f^{-1}(y)]}}$ là où elle existe ... (preuve : dériver fof^{-1})

4.2.3 Interprétation - Application

Propriété :



- comme vu supra, le nombre dérivée représente la pente de la tangente en 1 point
- ***équation de la tangente à f en $A(a, f(a))$*** : $\boxed{y = f'(a)(x-a) + f(a)}$ (si elle existe)
- localement en a, on peut "approximer f" à cette droite : $\boxed{h \to 0\ ,\ f(a+h) \approx f(a) + hf'(a)}$

Remarque, exemple :

- ***ex 1 :*** valeur approchée de $\sqrt{4.03}$
  - on pose $f(x) = \sqrt{x}$, $a = 4$, $h = 0.03$
  - $f(4) = 2$ et $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow f'(4) = \dfrac{1}{4}$
  - donc $\sqrt{4.03} \approx 2 + 0.03 \times \dfrac{1}{4} = 2.0075$
  - la calculatrice nous donne 2.00786 ; nous sommes (sans calculatrice) déjà à 10^{-4} près ! !
- ***ex 2 :*** énergie cinétique relativiste
  - en mécanique relativiste, la masse m de vitesse v est : $m = \dfrac{m_0}{\sqrt{1-(\dfrac{v}{c})^2}}$ où c est la vitesse de la lumière et m_0 la masse du corps au repos (à l'arrêt)
  - l'énergie cinétique est alors : $E_c = (m - m_0)c^2 = m_0c^2(\dfrac{1}{\sqrt{1-x}} - 1)$ où $x = (\dfrac{v}{c})^2$ (le vérifier)
  - quand x est petit, c'est la mécanique classique avec Newton et sa "pomme" ; on voudrait alors retrouver la formule classique : $E_c = \dfrac{1}{2}m_0c^2$
  - on vérifie facilement que : $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x}} - 1$ est dérivable en 0 et $f'(x) = \dfrac{1}{2(1-x)\sqrt{1-x}}$
  - on peut alors faire l'approximation affine en zéro : $f(x) \approx f(0) + f'(0) \times x = \dfrac{x}{2}$
  - $\Rightarrow E_c \approx m_0c^2 \times \dfrac{x}{2} =\approx \dfrac{1}{2}m_0c^2 \times (\dfrac{v}{c})^2 = \dfrac{1}{2}m_0v^2$

4.2.4 Signe de la dérivée - Sens de Variation

Propriété : soit $f : I \mapsto \mathbb{R}$ **dérivable** sur I intervalle de $\mathbb{R}$

- ***Si*** f' est nulle ***Alors*** f est constante
- ***Si*** f' est strictement positive (sauf en des points isolés) sur I ***Alors*** f est strictement croissante sur I
- ***Si*** f' est strictement négative (sauf en des points isolés) sur I ***Alors*** f est strictement décroissante sur I
- $\boxed{\textbf{Étude des variations de } f \Rightarrow \textbf{Étude du signe de } f'}$

Remarque, exemple :

- ***ex :*** étudier les variations sur $\mathbb{R}$ de $f(x) = x^3 - 6x^2 + 1$

- en étudiant le signe de f', on obtient (faites le!!) :

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	-31	$\nearrow$	$+\infty$

4.2.5 Dérivée et Extremum local

Propriété : soit $f : I \mapsto \mathbb{R}$ **dérivable** sur I intervalle de $\mathbb{R}$ et $a \in I$

- ***Si*** f admet un extremum local en a ***Alors*** $f'(a) = 0$
- ***Si*** $f'(a) = 0$ en changeant de signe ***Alors*** f admet un extremum local en a

Remarque, exemple :

- ***stratégie :*** on cherchera donc les extremum local de f parmi les zéros de la dérivée
- ***attention :*** chaque zéro de f' n'est pas forcément un extremum de f ; donner 1 exemple!!

