

# Chapitre 8

## Intégrale et Primitive

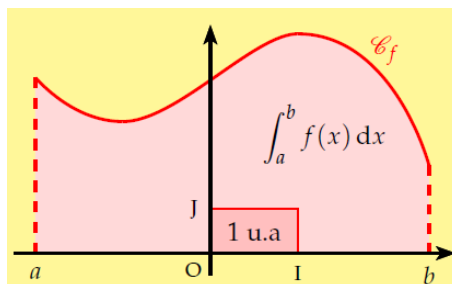


### 8.1 Notion d'intégrale

#### 8.1.1 Définition

**Définition :** ( O ; I ; J ) 1 repère orthogonal ;  $a, b \in \mathbb{R}$  ; u.a. : unité d'aire

- $f : \begin{matrix} [a, b] & \mapsto & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & f(x) \end{matrix}$  une fonction continue positive sur le segment  $[a, b]$
- **Intégrale de  $f$  sur  $[a, b]$  :**  
c'est la mesure, en u.a., de l'aire située :
  - "sous" la fonction  $f$
  - "au-dessus" de l'axe des abscisses
  - "entre"  $x = a$  et  $x = b$
- **Notation :** ce nombre est notée  $\int_a^b f(x) dx$

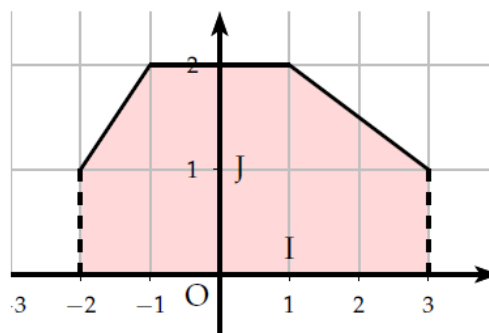


**Remarque, exemple :**

- $\int_a^b f(x) dx$  se lit "somme de  $a$  à  $b$  de  $f$ " ou "intégrale de  $a$  à  $b$  de  $f$ "
- dans ,  $\int_a^b f(x) dx$  :
  - $\int$  représente un "S" (employé par Leibniz) pour Somme car cette intégrale (de Riemann) "est" la somme des aires de petits rectangles sous la courbe ... : voir l'activité sur  $x \mapsto x^2$  infra
  - $a$  et  $b$  sont les bornes d'intégration
  - $x$  est 1 variable "muette" cad que l'on peut remplacer :  $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(u) du = \int_a^b f$
  - **HP :**  $dx$  spécifie la "mesure" associée à l'intégrale ; ici, elle représente en gros la largeur (infinitement petite) de chaque rectangle sous la courbe

• Ex :

- calculer l'aire en comptant les carreaux
- calculer l'aire par le calcul intégral



### 8.1.2 Intégrale et Méthode des Rectangles

#### Activité 1 : aire sous la courbe d'une parabole

- $f : \begin{matrix} \mathbb{R}_+ & \mapsto & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & x^2 \end{matrix}$  ; on veut estimer  $I = \int_0^1 x^2 dx$

- pour cela, nous allons encadrer  $I$ , par 2 suites  $(S_n)$  et  $(T_n)$ 
  - $\forall n \in \mathbb{N}^*$ , on découpe  $[0, 1]$  en  $n$  intervalles de largeur  $\frac{1}{n}$
  - la hauteur des rectangles est définie par les images de  $f$  aux points considérés
  - $S_n$ , l'aire en rouge, est inférieure à  $I$
  - $T_n$ , l'aire en blue, est supérieure à  $I$

1) écrire  $S_n$  et  $T_n$  sous la forme de somme, en utilisant l'opérateur  $\sum$

2) mq  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $S_n \leq I \leq T_n$

3) graphiquement, mq  $T_n - S_n = \frac{1}{n}$ , ceci donne 1 estimation de l'erreur d'approx.

4) on admet que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

préciser alors  $S_n$  et  $T_n$  en fonction de  $n$

5) mq  $(S_n)$  est croissante

6) mq  $(S_n)$  CV

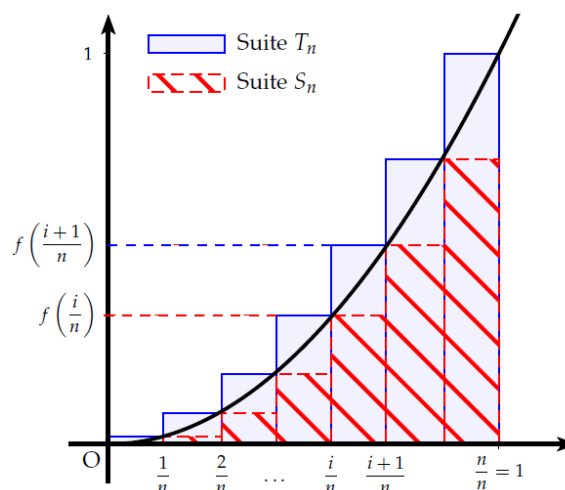
7) mq  $(T_n)$  est décroissante et CV

8) mq  $\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n - S_n = 0$

HP :  $(S_n)$  et  $(T_n)$  sont dites adjacentes

9) mq  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} T_n = I$

10) comment calculer  $I$  à  $10^{-3}$  près ?



**Activité 2 : analyser le programme Python suivant, puis le faire tourner**

programme disponible sur Math13Net

```

1  # int gration : m thode des rectangles et des trap zes
2  # f(x) = x^2 sur [0,5]
3
4  from math import *
5  import numpy as np
6
7  # d finition de la fonction
8  def f(x):
9      return x**2
10
11 # bornes int gration
12 a, b = 0, 5
13
14 # M thode des Rectangles   Gauche
15 def rectangle_gauche(a,b,n,f):
16     x=np.linspace(a, b, n+1)[: -1]
17     return((b-a)/n*np.sum(f(x)))
18
19 # M thode des Rectangles   Droite
20 def rectangle_droite(a,b,n,f):
21     x=np.linspace(a, b, n+1)[1:]
22     return((b-a)/n*np.sum(f(x)))
23
24 # M thode des Trap zes
25 def trapeze(a,b,n,f):
26     x=np.linspace(a,b,n+1)
27     return ((b-a)/n*(1/2*f(x[0])+np.sum(f(x[1:n]))+1/2*f(x[n])))
28
29 # affichage des r sultats
30 print('-'*60)
31 print('{0:>10s} | {1:^12s} | {2:^14s} | {3:^15s}'.format('n', 'Rect_Gauche', '↔
    Rect_Droite', 'Trap ze'))
32 print('-'*60)
33 for i in range(1, 7):
34     n = 10**i
35     rg = rectangle_gauche(a,b,n,f)
36     rd = rectangle_droite(a,b,n,f)
37     t = trapeze(a,b,n,f)
38     print('{0:10d} | {1:11f} | {2:13f} | {3:14f}'.format(n,rg,rd,t))
39 print('-'*60)

```

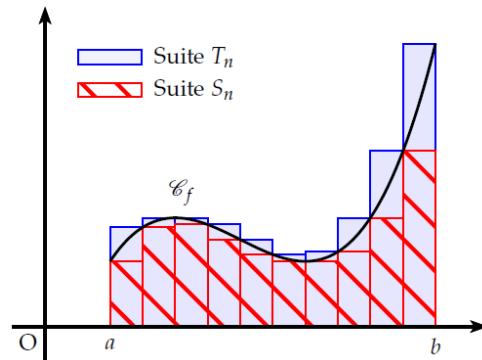
n	Rect_Gauche	Rect_Droite	Trapèze
10	35.625000	48.125000	41.875000
100	41.043750	42.293750	41.668750
1000	41.604188	41.729188	41.666688
10000	41.660417	41.672917	41.666667
100000	41.666042	41.667292	41.666667
1000000	41.666604	41.666729	41.666667

### 8.1.3 Intégrale d'1 fonction continue positive

On généralise cet encadrement à 1 fonction  $f$  quelconque continue et positive :

- on divise l'intervalle  $[a; b]$  en  $n$  parties égales
- sur chaque petit intervalle, on détermine la valeur minimale et maximale de la fonction  $f$
- l'aire sous la courbe est alors encadrée par 2 suites d'aire (rouge et bleu)
- ces 2 suites  $(S_n)$  et  $(T_n)$  qui CV :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} T_n = \int_a^b f(x) dx \quad (\text{admis})$$

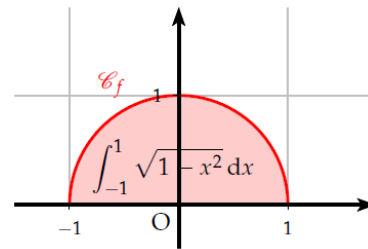


#### Remarque, exemple :

- on peut, grâce à la géométrie, faire des calculs d'intégrales efficaces :

- évaluer  $\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx$  géométriquement

- HP : calculer  $\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx$  (plus dur)



- idée : utiliser la symétrie de la figure (fonction paire) :

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx = 2 \times \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = 2 \times \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

- intégration de fonction paire, impaire ou périodique :

## 8.2 Primitive

### 8.2.1 Théorème Important

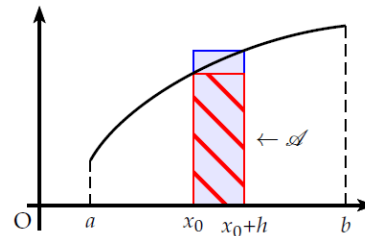
**Théorème - ROC :**  $a, b \in \mathbb{R}$

- Si  $f : \begin{matrix} [a, b] & \mapsto & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & f(x) \end{matrix}$  est 1 fonction continue positive sur le segment  $[a, b]$
- Alors  $F : x \mapsto \int_a^x f(t) dt$  est dérivable sur le segment  $[a, b]$  et  $F' = f$

**Preuve - ROC :**

- on admet le théorème dans le cas général
- on se concentre sur le cas :  $f$  croissante
- nous allons mq  $\forall x_0 \in [a, b]$ ,  $F$  est dérivable en  $x_0$  et  $F'(x_0) = f(x_0)$
- pour cela, revenons à la définition du nombre dérivé et mq :  $F'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f(x_0)$
- 1<sup>er</sup> cas :  $h > 0$

$$\begin{aligned}
 & \bullet F(x_0 + h) - F(x_0) \\
 &= \int_a^{x_0+h} f(t) dt - \int_a^{x_0} f(t) dt \\
 &= \int_{x_0}^{x_0+h} f(t) dt = \mathcal{A} \quad (1)
 \end{aligned}$$



- par la méthode des rectangles, nous pouvons maintenant encadrer  $\mathcal{A}$  :

$$f(x_0) \times h \leq \mathcal{A} \leq f(x_0 + h) \times h \Leftrightarrow f(x_0) \leq \frac{\mathcal{A}}{h} \leq f(x_0 + h)$$

$$\bullet (1) \Rightarrow f(x_0) \leq \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} \leq f(x_0 + h)$$

- par passage à la limite (à droite car  $h > 0$ ), on a :

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} f(x_0) = f(x_0) \leq \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} \leq \lim_{h \rightarrow 0^+} f(x_0 + h)$$

$$\bullet f \text{ étant continue : } f(x_0) \leq \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} \leq f(x_0)$$

$$\Rightarrow \boxed{\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} = F'(x_0) = f(x_0)}$$

- 2<sup>ème</sup> cas :  $h < 0$

$$\bullet \text{ de même, on mq : } f(x_0 + h) \leq \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} \leq f(x_0)$$

$$\bullet \text{ et donc que : } \boxed{\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} = f(x_0)}$$

- Conclusion :

$$\bullet \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} = \boxed{\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} = F'(x_0) = f(x_0)}$$

## 8.2.2 Définition - Propriété

### Avertissement :

nous allons maintenant étudier la possibilité pour une fonction pas forcément positive d'avoir une primitive et donc d'être capable de l'intégrer.

### Définition :

- $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$
- $f$  admet une primitive sur  $I \Leftrightarrow \exists F$  dérivable sur  $I$  tq  $\forall x \in I, F'(x) = f(x)$
- si elle existe, une primitive de  $f$  est notée  $\int f(t) dt$  (sans les bornes)

### Remarque, exemple :

- on ne confondra pas "primitive" qui est une fonction et "intégrale" qui est un nombre
- habituellement, si  $f$  est la fonction, on note  $F$  l'une de ses primitives cad avec 1 majuscule
- petite subtilité dans la définition :  
on ne parle pas de "la" primitive de  $f$  mais d'"une" primitive de  $f$  : voir l'ex suivant
- ex :
  - $\forall x \in \mathbb{R}, (x^2)' = 2x \Rightarrow x \mapsto x^2$  est 1 primitive de  $2x$  sur  $\mathbb{R}$
  - mais  $\forall x \in \mathbb{R}, (x^2 + 8)' = 2x \Rightarrow x \mapsto x^2 + 8$  est aussi 1 primitive de  $2x$  sur  $\mathbb{R}$
  - trouver une primitive des fonctions suivantes, en précisant le domaine de validité associé :

$$\bullet x \mapsto (x+1)^3$$

$$\bullet x \mapsto e^{2x}$$

$$\bullet x \mapsto \frac{1}{1-x}$$

$$\bullet x \mapsto \ln x$$

### Propriété :

- Si  $f$  1 fonction admet 1 primitive  $F$  sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$
- Alors toute primitive  $G$  de  $f$  est de la forme :  
 $\forall x \in I, G(x) = F(x) + k$  où  $k$  est une constante de  $\mathbb{R}$

### Preuve :

- soit  $F$  et  $G$  2 primitives de  $f$  sur  $I$
- clairement,  $\forall x \in I, G'(x) = F'(x) = f(x)$
- $\Rightarrow \forall x \in I, (G - F)'(x) = 0 \Rightarrow G - F$  est constante sur  $\mathbb{R}$
- $\Rightarrow \exists k \in \mathbb{R}, \forall x \in I, (G - F)(x) = k \Rightarrow \forall x \in I, G(x) = F(x) + k$

### Propriété :

- Si  $f$  possède 1 primitive sur  $I$  intervalle de  $\mathbb{R}$
- Alors "la" primitive de  $f$  s'annulant en  $x_0 \in I$  est :  $\forall x \in I, F : x \mapsto \int_{x_0}^x f(t) dt$
- cette primitive est unique

**Preuve :**

- d'1 part,  $\forall x \in I$ , la fonction  $F : x \mapsto \int_{x_0}^x f(t) dt$  convient
- d'autre part, soit  $F$  et  $G$  2 primitives de  $f$  sur  $I$  s'annulant en  $x_0$
- clairement,  $\exists k \in \mathbb{R}$ ,  $\forall x \in I$ ,  $G(x) = F(x) + k$  ( puisque  $F$  et  $G$  sont des primitives de  $f$  )
- pour  $x = x_0$ ,  $0 = G(x_0) = F(x_0) + k = 0 + k = k \Rightarrow k = 0 \Rightarrow F = G$

**Théorème - ROC :**  $a, b \in \mathbb{R}$ 

- **Si**  $f$  est 1 fonction **continue** sur un intervalle  $I$
- **Alors**  $f$  admet des primitives sur  $I$

**Preuve - ROC :**

- on se limite à 1 fonction  $f$  continue sur un intervalle fermé  $[a, b]$   
comprenons bien ici la difficulté :  $f$  n'est pas forcément positive
- $f$  est continue sur 1 intervalle borné fermé  $[a, b] \Rightarrow f$  admet 1 minimum  $m$  sur  $[a, b]$
- on définit  $g : \begin{matrix} [a, b] & \mapsto & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & f(x) - m \end{matrix} ; \Rightarrow \forall x \in [a, b], \boxed{g(x) = f(x) - m \Leftrightarrow f(x) = g(x) + m}$
- $g$  est 1 fonction **continue** (comme somme de fonction continue) **positive** sur le segment  $[a, b]$   
(son minimum sur  $[a, b]$  vaut d'ailleurs 0)
- par théorème supra (applicable à  $g$  continue positive),  $G : x \mapsto \int_a^x g(t) dt$  est 1 primitive de  $g$  sur  $[a, b]$
- ainsi :  $F : \begin{matrix} [a, b] & \mapsto & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & G(x) + mx \end{matrix}$  est 1 primitive de  $F$
- en effet, il suffit de remarquer que :  $F'(x) = G'(x) + m = g(x) - m = f(x) + m - m = f(x)$   
c'est gagné!

**8.2.3 Primitive Usuelle et Règle d'Intégration**

Par lecture inverse du tableau des dérivées, on obtient (constante d'intégration  $k = 0$ ) :

Fonction	Primitive	Intervalle
$f(x) = a$	$F(x) = ax$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x$	$F(x) = \frac{x^2}{2}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n$	$F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$F(x) = \ln x$	$]0; +\infty[$
$f(x) = \frac{1}{x^n} \quad n \neq 1$	$F(x) = -\frac{1}{(n-1)x^{n-1}}$	$] -\infty; 0[ \text{ ou } ]0; +\infty[$
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x) = 2\sqrt{x}$	$\mathbb{R}_+^*$
$f(x) = \sin x$	$F(x) = -\cos x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \cos x$	$F(x) = \sin x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x$	$\mathbb{R}$

D'après les règles de dérivation, on obtient (constante d'intégration  $k = 0$ ) :

Primitive de la somme	$\int (u + v) = \int u + \int v$
Primitive du produit par un scalaire	$\int (au) = a \int u$
Primitive de $u'u^n$	$\int u'u^n = \frac{u^{n+1}}{n+1}$
Primitive de $\frac{u'}{u}$	$\int \frac{u'}{u} = \ln  u $
Primitive de $\frac{u'}{u^n} \quad n \neq 1$	$\int \frac{u'}{u^n} = -\frac{1}{(n-1)u^{n-1}}$
Primitive de $\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$\int \frac{u'}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u}$
Primitive de $u'e^u$	$\int u'e^u = e^u$
Primitive de $u(ax+b)$	$\int u(ax+b) = \frac{1}{a}U(ax+b)$

**Exercice d'application :** chercher les primitives des fonctions suivantes

- $x^3 - 2x^2 + 4x - 1$
- $\frac{2x+1}{(x^2+x+3)^3}$
- $\frac{1}{x^2-1}$
- $\ln x$
- $2x(x^2-1)^3$
- $\frac{1}{x^2-x-2}$
- $xe^x$
- $\frac{2}{2x-3}$
- $\frac{1}{\sqrt{x+4}}$
- $e^{4x+1}$
- $\cos x \times e^x$

## 8.3 Intégrale d'1 fonction continue sur 1 segment

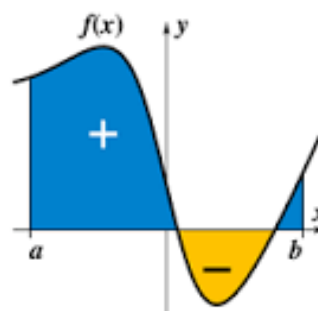
### 8.3.1 Lien entre Intégrale et Primitive

**Théorème fondamental du calcul intégral :**

- **Si**  $f$  est 1 fonction continue sur 1 intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  contenant  $a$  et  $b$
- **Alors**  $\int_a^b f(t) dt = [f(x)]_a^b = F(b) - F(a)$  où  $F$  est 1 primitive quelconque de  $f$  sur  $I$

**Remarque, exemple :**

- nous venons d'étendre la notion d'intégrale aux fonctions de signes quelconques
- la notion d'aire "sous la courbe" devient algébrique cad avec un signe :
  - + au-dessus de l'axe des abscisses
  - - en dessous





• Preuve :

- comprenons bien la difficulté : on veut montrer le résultat avec  $F$  1 primitive quelconque et non pas forcément celle qui s'annule en  $a$
- $f$  étant continue sur  $I$ , elle admet  $G : x \mapsto \int_a^x f(t) dt$  comme primitive qui s'annule en  $a \in I$
- ainsi  $\forall a, b \in I$ ,  $G(a) = \int_a^a f(t) dt = 0$  et  $G(b) = \int_a^b f(t) dt$
- soit  $F$  1 primitive quelconque de  $f \Rightarrow \exists k \in \mathbb{R}$  tq  $\forall x \in \mathbb{R} F(x) = G(x) + k$
- $\Rightarrow F(a) = G(a) + k = 0 + k = k$  et  $F(b) = G(b) + k = G(b) + F(a)$
- ainsi  $G(b) = \int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a)$  où  $F$  est une primitive quelconque de  $f$
- ex : calculer  $\int_{-1}^2 -x^2 + 4x - 3 dx$  puis  $\int_0^2 \frac{3x}{(x^2 + 1)^2} dx$

## 8.4 Intégrale d'1 fonction continue sur 1 segment

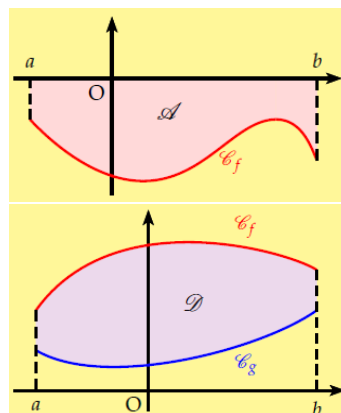
### 8.4.1 Aire entre 2 courbes

Propriété :

- Si  $f$  est continue sur 1 intervalle  $[a, b]$  tq  $f \leq 0$
- Alors l'aire "en-dessous" vaut :  

$$\mathcal{A} = - \int_a^b f(t) dt$$
- Si  $f, g$  continues sur 1 intervalle  $[a, b]$  tq  $f \geq g$
- Alors l'aire "entre les courbes" vaut :  

$$\mathcal{A} = \int_a^b (f - g)(t) dt$$



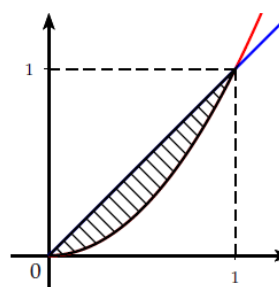
Remarque, exemple :

- trouver l'aire coincée entre  $y = x^2$  et  $y = x$ , de  $x = 0$  et  $x = 1$  :  

$$\mathcal{A} = \int_0^1 x - x^2 dx$$

$$\mathcal{A} = \left[ \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 \right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - (0 - 0)$$

$$\mathcal{A} = \frac{1}{6}$$



**Propriété :**  $f$  continue sur 1 intervalle  $I$

- $\forall a \in I, \int_a^a f(u) du = 0$
- $\forall a, b \in I, \int_b^a f(u) du = - \int_a^b f(u) du$
- **Relation de Chasles :**  $\forall a, b, c \in I, \int_a^c f(u) du = \int_a^b f(u) du + \int_b^c f(u) du$
- **Géométrie :**
  - $\forall a \in I, \text{Si } f \text{ est paire}, \int_{-a}^a f(u) du = 2 \int_0^a f(u) du$
  - $\forall a \in I, \text{Si } f \text{ est impaire}, \int_{-a}^a f(u) du = 0$
  - $\forall a \in I, \forall T \in \mathbb{R}, \text{Si } f \text{ est périodique de période } T, \int_a^{a+T} f(u) du = \int_0^T f(u) du$
- **Linéarité :**  $\forall a, b \in I, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \int_a^b f(u) + \lambda g(u) du = \int_a^b f(u) du + \lambda \int_a^b g(u) du$

**Remarque, exemple :**

- attention, contrairement à la linéarité, intégrale du produit  $\neq$  produit des intégrales :  

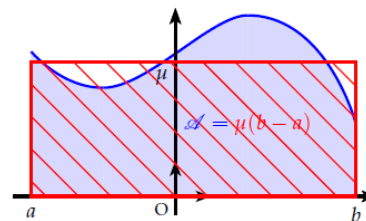
$$\int_a^b f(u) \times g(u) du \neq \int_a^b f(u) du \times \int_a^b g(u) du$$
- calculer :  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (4 \cos 2x - 5 \sin \frac{x}{2}) dx$

**Propriété :**  $f$  et  $g$  continues sur 1 intervalle  $[a, b]$

- **Positivité :**  $0 \leq f \Rightarrow 0 \leq \int_a^b f(u) du$
- **Inégalité 1 :**  $f \leq g \Rightarrow \int_a^b f(u) du \leq \int_a^b g(u) du$
- **Inégalité 2 :**  $|\int_a^b f(u) du| \leq \int_a^b |f(u)| du$
- **Inégalité de la moyenne :**  
 $\text{Si } \forall a \leq x \leq b, m \leq f(x) \leq M \text{ Alors } m(b-a) \leq \int_a^b f(u) du \leq M(b-a)$
- **Valeur Moyenne :** Valeur Moyenne de  $f = \mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(u) du$

**Remarque, exemple :**

- **Valeur moyenne  $\mu$  de  $f$  :**
  - **Si**  $f$  est une fonction continue positive
  - **Alors**  $\mu$  est précisément la valeur de  $f$  qui donne la hauteur du rectangle qui permet de calculer l'aire  $\mathcal{A}$  sous la courbe :
  - $\mathcal{A} = \mu \times (b-a) = \int_a^b f(u) du$



- cette idée (importante) est le coeur des **méthodes Monte-Carlo** en probabilité, permettant d'estimer de façon probabiliste, la valeur d'intégrale ou de paramètre de loi de VA : DM Monte Carlo ou vidéo MC

## 8.5 Sujet de Bac 2017

### 8.5.1 Asie 2017

L'objet du problème est l'étude des intégrales  $I$  et  $J$  définies par :

$$I = \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx \quad \text{et} \quad J = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx.$$

#### Partie A : valeur exacte de l'intégrale $I$

1. Donner une interprétation géométrique de l'intégrale  $I$ .
2. Calculer la valeur exacte de  $I$ .

#### Partie B : estimation de la valeur de $J$

Soit  $g$  la fonction définie sur l'intervalle  $[0; 1]$  par  $g(x) = \frac{1}{1+x^2}$ .

On note  $\mathcal{C}_g$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé du plan.

On a donc :  $J = \int_0^1 g(x) dx$ .

Le but de cette partie est d'évaluer l'intégrale  $J$  à l'aide de la méthode probabiliste décrite ci-après.

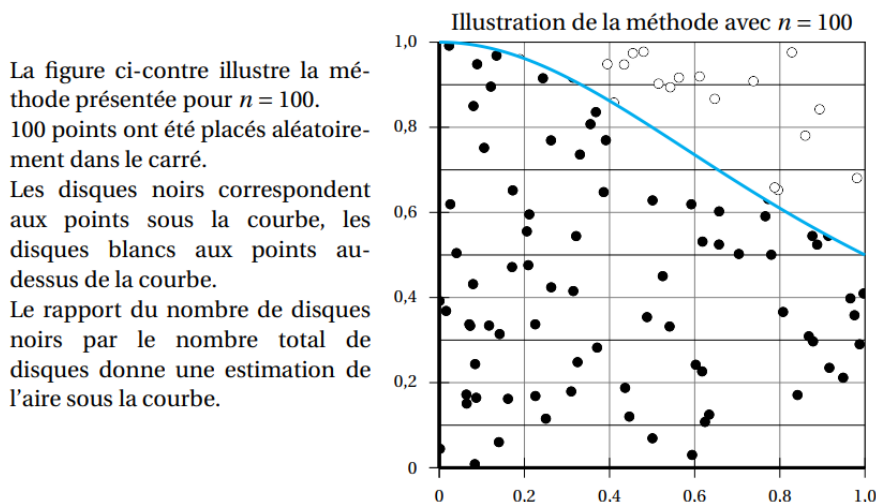
On choisit au hasard un point  $M(x; y)$  en tirant de façon indépendante ses coordonnées  $x$  et  $y$  au hasard selon la loi uniforme sur  $[0; 1]$ .

On admet que la probabilité  $p$  qu'un point tiré de cette manière soit situé sous la courbe  $\mathcal{C}_g$  est égale à l'intégrale  $J$ .

En pratique, on initialise un compteur  $c$  à 0, on fixe un entier naturel  $n$  et on répète  $n$  fois le processus suivant :

- on choisit au hasard et indépendamment deux nombres  $x$  et  $y$ , selon la loi uniforme sur  $[0; 1]$ ;
- si  $M(x; y)$  est au-dessous de la courbe  $\mathcal{C}_g$  on incrémente le compteur  $c$  de 1.

On admet que  $f = \frac{c}{n}$  est une valeur approchée de  $J$ . C'est le principe de la méthode dite de Monte-Carlo.



1. Recopier et compléter l'algorithme ci-après pour qu'il affiche une valeur approchée de  $J$ .

<b>Variables</b>	$n, c, f, i, x, y$ sont des nombres
<b>Traitement</b>	Lire la valeur de $n$ $c$ prend la valeur ... Pour $i$ allant de 1 à ... faire $x$ prend une valeur aléatoire entre 0 et 1 $y$ prend ... Si ... alors ...prend la valeur ... Fin si Fin pour $f$ prend la valeur ...
<b>Sortie</b>	Afficher $f$

- Pour  $n = 1000$ , l'algorithme ci-dessus a donné pour résultat :  $f = 0,781$ .  
Donner un intervalle de confiance, au niveau de confiance de 95 %, de la valeur exacte de  $J$ .
- Quelle doit-être, au minimum, la valeur de  $n$  pour que l'intervalle de confiance, au niveau de confiance de 95 %, ait une amplitude inférieure ou égale à 0,02 ?

That's All Folks!!