

# Chapitre 12

## Loi Continue de Probabilité



### 12.1 Introduction

Cas Discret : on lance 1 dé de 1 à 6 et on définit la V.A. discrète  $X$  associée au résultat

- $X(\Omega) = \{1, \dots, 6\}$
- à  $X$ , on associe 1 loi de probabilité :  $\mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{6}$  où  $k \in [1..6]$
- $\Rightarrow$  *il existe des évènements élémentaires* dont la probabilité est non nulle

Cas Continue :  $X$  la V.A.R. continue associée à la durée d'un communication téléphonique

- $X(\Omega) = \mathbb{R}_+$
- $\Rightarrow$  *pour chaque évènement élémentaire*, la probabilité est nulle :  $\forall x \in \mathbb{R}_+, \mathbb{P}(X = x) = 0$
- (pour contourner ce problème), on mesure les probabilités sur des intervalles, ici de  $\mathbb{R}_+$  :  
 $\Rightarrow \mathbb{P}(a \leq X \leq b)$  où  $a, b \in \mathbb{R}_+$
- par exemple :
  - la probabilité qu'un appel dure exactement 5 minutes est (toujours) nulle
  - mais la probabilité qu'un appel dure entre 5 et 6 minutes vaut  $\frac{1}{10}$  ...

L'objet de ce chapitre est donc de présenter les propriétés de ces "nouvelles" lois continues au travers de 2 lois importantes : la loi uniforme et la loi exponentielle; la loi normale fera l'objet d'un chapitre à part entière ...

## 12.2 Densité de Probabilité et Espérance Mathématique

**Définition :** soit 1 V.A.R.  $X$  continue

- la **densité de probabilité** de  $X$  est 1 fonction  $f$  continue et positive sur  $I$  intervalle de  $\mathbb{R}$  tq :

- $\mathbb{P}(X(\Omega)) = \int_I f(x) dx = 1$

- $\forall [a, b] \subset \mathbb{R}, \mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) dx$

- la **fonction de répartition** de  $X$  est 1 fonction  $F$  tq :

- $\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$

- l'**espérance** de  $X$  est  $\mathbb{E}(X) = \int_I x f(x) dx$

**Remarque, exemple :**

- pour une loi à densité continue,  $\forall a, b \in \mathbb{R}$ ,  
 $\mathbb{P}(a < X < b) = \mathbb{P}(a \leq X < b) = \mathbb{P}(a < X \leq b) = \mathbb{P}(a \leq X \leq b)$

- $f$  est continue et positive; donc :

- $\int_I f(x) dx = 1$

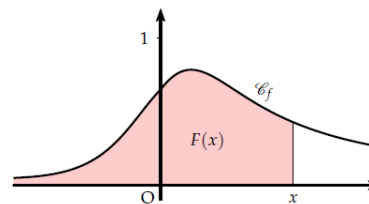
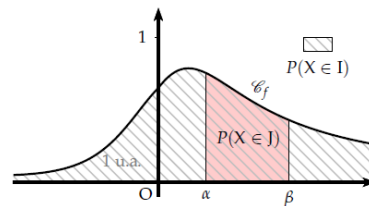
dit que l'aire totale sous  $f$  vaut 1

- $\mathbb{P}(\alpha < X < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$

calcule l'aire sous  $f$  entre  $\alpha$  et  $\beta$  :

- $F(x) = \mathbb{P}(X < x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$

indique l'aire sous  $f$  entre  $-\infty$  et  $x$  :



## 12.3 Loi Uniforme sur $[a, b]$ : $X \rightsquigarrow \mathcal{U}([a, b])$

**Définition - Propriété :**  $a, b \in \mathbb{R}, I$  intervalle de  $\mathbb{R}$

- $X$  suit 1 loi uniforme sur l'intervalle  $[a, b]$**  si sa fonction de densité  $f$  est constante

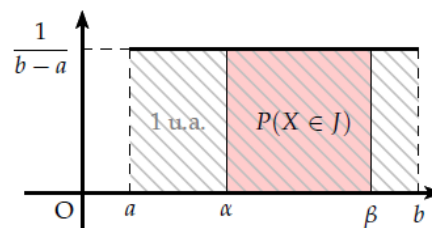
- notation :**  $X \rightsquigarrow \mathcal{U}([a, b])$

- des calculs rapides (AF) mq :

- $\forall x \in [a, b], f(x) = \frac{1}{b-a}$

- $\forall \alpha, \beta \in [a, b], \mathbb{P}(\alpha < X < \beta) = \frac{\beta - \alpha}{b - a}$

- $\mathbb{E}(X) = \frac{a+b}{2}$  et  $\mathbb{V}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$



**Remarque, exemple :**

- la formule de  $\mathbb{P}(\alpha < X < \beta)$  se retient facilement en la voyant c'est  $\frac{\text{aire favorable}}{\text{aire totale}}$
- on choisit au hasard 1 nombre  $X$  sur  $[0;5]$ ; calculer  $\mathbb{P}(X > 4)$  puis  $\mathbb{P}(e < X < \pi)$

**Approfondissement 1 : méthode de Monte-Carlo par Espérance**

$a, b \neq \mathbb{R}$ ,  $I$  intervalle de  $\mathbb{R}$

- Objectif** : savoir utiliser la méthode qui permet d'approximer 1 intégrale (dont le calcul est peut-être très compliqué)
  - on **génère des valeurs**  $f(x_i)$  "au hasard sur  $[a, b]$ " de la fonction  $f$
  - la **moyenne des valeurs** tend vers  $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$
- H.P.** : la théorie (simple) repose 2 théorèmes (compliqués) :
  - on pose  $X = f(U)$  où  $U \rightsquigarrow \mathcal{U}([a, b])$
  - la Loi des Grands Nombres montre que  $\sum_{i=1}^n \frac{X_i}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(X)$
  - le Théorème du Transfert montre que  $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$

**Approfondissement 1 (suite) : approximation de  $\pi$** 

- Méthode MC en dimension 1 :**
  - vérifier que  $\frac{\pi}{4} = \int_0^1 \sqrt{1-t^2} dt$ ; estimer l'intégrale permet alors d'estimer  $\pi$
  - générer 100  $U_i \rightsquigarrow \mathcal{U}([0, 1])$
  - calculer les 100  $X_i = f(U_i)$  puis calculer  $\sum_{i=1}^n \frac{X_i}{100}$
  - vérifier que vous obtenez 1 approximation de l'ordre  $\pm \frac{1}{\sqrt{100}} = \pm 0.1$
  - recommencer pour  $n = 1000$  puis  $n = 10000$
- H.P. : Méthode MC en 2 dimensions :**
  - générer 100  $X_i \rightsquigarrow \mathcal{U}([0, 1])$
  - générer 100  $Y_i \rightsquigarrow \mathcal{U}([0, 1])$
  - comprendre que :  $\frac{\pi}{4} = \int \int_{Disque} x^2 + y^2 dx dy$
  - calculer les 100  $Z_i = f(X_i, Y_i) = X_i^2 + Y_i^2$  puis calculer  $\sum_{i=1}^n \frac{Z_i}{100}$
  - vérifier que vous obtenez 1 approximation de l'ordre  $\pm \frac{1}{\sqrt{100}} = \pm 0.1$
  - recommencer pour  $n = 1000$  puis  $n = 10000$
  - complément : on peut montrer que cette méthode est légèrement moins performante que la précédente; le constatez-vous numériquement ?

**Remarque, exemple :**

- la méthode de MC est bien moins performante en dimension 1 que la méthode rectangle ou trapèze
- elle peut être utilisée à l'identique dans n'importe quelle dimension et sur n'importe quel domaine d'intégration
- elle devient plus efficace à partir de la dimension 4
- elle est très simple à utiliser sur un domaine d'intégration implicite

**Approfondissement 2 : méthode de Monte-Carlo par test IN/OUT**

$a, b \neq \mathbb{R}$ ,  $I$  intervalle de  $\mathbb{R}$

- **Même objectif** : savoir utiliser la méthode pour approximer 1 intégrale

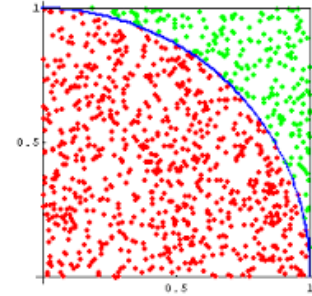
- on va créer une E.A. permettant d'estimer  $\frac{\pi}{4}$
- l'intégrale  $\int_0^1 \sqrt{1-t^2} dt$  correspond à l'aire sous la fonction  $f(t) = \sqrt{1-t^2}$
- on place cette aire dans le pavé  $[0,1] \times [0,1]$   
l'aire sous la courbe (donc l'intégrale) est associée au succès  
l'autre partie de l'aire à l'échec

$$\frac{\int_0^1 \sqrt{1-t^2} dt}{Aire_{Pave}} = \frac{Aire_{Courbe}}{Aire_{Pave}} = \frac{\frac{\pi}{4}}{1 \times 1} = \frac{\pi}{4}$$

en créant  $n$  points aléatoires  $(X_i, Y_i)$

on crée  $n$  tests  $T_i \rightsquigarrow \mathcal{B}\left(\frac{\pi}{4}\right)$  associé à

$n$  succès ou échec d'être dans le  $\frac{1}{4}$  cercle



- la proportion  $\frac{succes}{total}$  tend vers  $\mathbb{E}(X) = \int_0^1 \sqrt{1-t^2} dt = \frac{\pi}{4}$  (résultat de seconde)

- **H.P.** : la théorie (simple) repose 1 théorème (compliqué) :

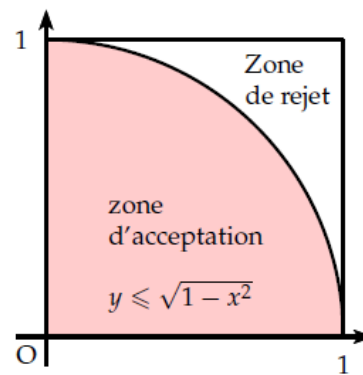
- $X_i \rightsquigarrow \mathcal{B}\left(\frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow$  la Loi des Grands Nombres montre que  $\sum_{i=1}^n \frac{X_i}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(X) = \frac{\pi}{4}$

**Approfondissement 2 (suite) : approximation de  $\pi$  :**

La seule difficulté maintenant est de générer les points. Pour cela, on considère 2 méthodes.

- **Méthode 1 : sous la courbe**

- générer 100  $X_i \rightsquigarrow \mathcal{U}([0, 1])$  (abscisse du point) et 100  $Y_i \rightsquigarrow \mathcal{U}([0, 1])$  (ordonnée du point)
- effectuer 100 tests :  $Y_i \leq f(X_i)$  qui correspondent à (attention pas évident à comprendre) le point est dans le cercle
- compter le nombre de tests réussis et en déduire l'estimation
- recommencer pour  $n = 1000$  puis  $n = 10000$



- **Méthode 2 :  $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$**

- générer 100  $X_i \rightsquigarrow \mathcal{U}([0, 1])$
- générer 100  $Y_i \rightsquigarrow \mathcal{U}([0, 1])$
- effectuer 100 tests :  $X_i^2 + Y_i^2 \leq 1$  qui correspondent à le point est dans le cercle
- compter le nombre de tests réussis et en déduire l'estimation
- vérifier que vous obtenez 1 approximation de l'ordre  $\pm \frac{1}{\sqrt{100}}$
- recommencer pour  $n = 1000$  puis  $n = 10000$

- **Visualisation de l'expérience** d'approximation de  $\pi$  sous GeoGebra ou Python

## 12.4 Loi Exponentielle : $X \rightsquigarrow \mathcal{E}(\lambda)$

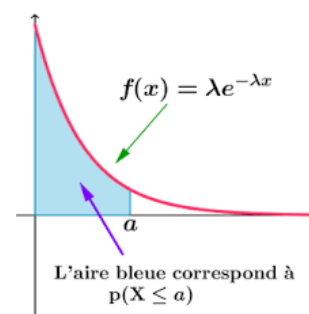
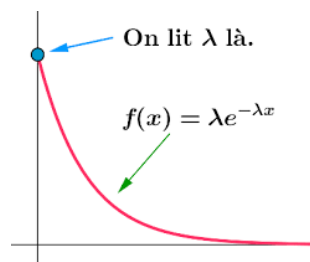
**Définition - Propriété** :  $a, b \neq \mathbb{R}$ ,  $I$  intervalle de  $\mathbb{R}$

- **$X$  suit 1 loi exponentielle de paramètre  $\lambda > 0$**

si sa fonction de densité  $f$  est  $\begin{cases} 0 & \text{si } t \in \mathbb{R}_-^* \\ f(t) = \lambda e^{-\lambda t} & \text{si } t \in \mathbb{R}_+ \end{cases}$

- **notation** :  $X \rightsquigarrow \mathcal{E}(\lambda)$

- $\forall a \in \mathbb{R}_+, FR(a) = \mathbb{P}(X \leq a) = 1 - e^{-\lambda a}$  •  $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda}$  et  $\mathbb{V}(X) = \frac{1}{\lambda^2}$



- **la loi exponentielle est sans mémoire :**

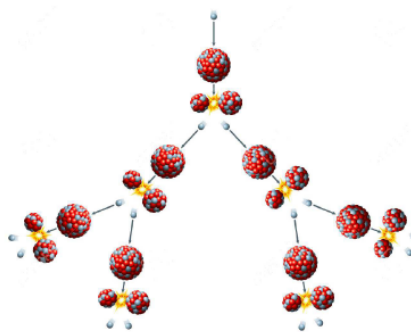
$$\forall t > 0, \forall h > 0, \mathbb{P}_{X \geq t}(X \geq t + h) = \mathbb{P}(X \geq h)$$

**Remarque, exemple :**

- AF : vérifier que  $f$  ainsi définie est bien une densité de probabilité sur  $\mathbb{R}$
  - AF : retrouver la FR de  $f$
  - AF : retrouver l'espérance et la variance de  $X$  associée à  $f$   
Preuve : loi exponentielle
  - loi exponentielle  $\Leftrightarrow$  loi sans mémoire :
    - AF  $\Rightarrow$  : la loi exponentielle vérifie cette propriété
    - Admis  $\Leftarrow$  : cette propriété est caractéristique de cette loi  
(si 1 loi vérifie cette propriété alors il s'agit obligatoirement d'1 loi exponentielle)
  - **Exemple** : la durée de vie, en année, d'un composant électronique est une variable aléatoire notée  $T$  qui suit une loi sans vieillissement de paramètre  $\lambda$ . Une étude statistique a montré que pour ce type de composant, la durée de vie ne dépasse pas 5 ans avec une probabilité de 0.675.
- 1) calculer la valeur  $\lambda$
  - 2) quelle est la probabilité qu'un composant de ce type dure moins de 8 ans ? plus de 10 ans ? au moins 8 ans sachant qu'il fonctionne au bout de 3 ans ?
  - 3) quelle est l'espérance de vie de ce composant ?

## 12.5 Applications en Physique

La désintégration radioactive est un phénomène aléatoire. c'est à dire que l'on ne peut pas, à l'échelle « *microscopique* », dire quand un noyau va se désintégrer. Néanmoins, à l'échelle macroscopique, on a pu établir que la durée de vie d'un noyau radioactif suit une loi de durée de vie sans vieillissement c'est à dire une loi exponentielle de paramètre  $\lambda$ .  $\lambda$  étant la constante radioactive (en  $s^{-1}$ ) qui caractérise un radionucléide.



On appelle  $T$  la variable aléatoire associée à la durée de vie d'un noyau. La probabilité  $p$  qu'un noyau ne soit pas désintégré à l'instant  $t$  est donc :

$$p = P(T \geq t) = e^{-\lambda t}$$

Si au départ on compte  $N_0$  noyaux au bout d'un temps  $t$ , on en comptera  $N(t)$  qui vérifie :

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$$

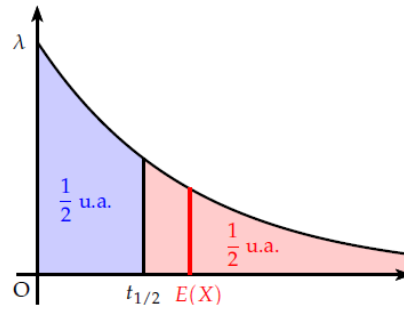
On appelle demi-vie  $t_{1/2}$ , le temps nécessaire pour que le nombre de radionucléides soit divisé par 2. On a alors :

$$e^{-\lambda t_{1/2}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\lambda t_{1/2} = -\ln 2 \Leftrightarrow t_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}$$

Enfin la durée de vie moyenne  $\tau$  d'un radionucléide est donnée par l'espérance mathématique :

$$\tau = \frac{1}{\lambda} \quad \text{or} \quad \lambda = \frac{\ln 2}{t_{1/2}} \quad \text{donc} \quad \tau = \frac{t_{1/2}}{\ln 2} \simeq 1,44 t_{1/2}$$

**Remarque :** La demi-vie  $t_{1/2}$  n'est pas égale à la durée de vie moyenne  $\tau = E(X)$  car la courbe de densité de probabilité  $\mathcal{C}_f$  n'est pas symétrique par rapport à la droite verticale d'abscisse  $E(X)$ .



## 12.6 Lien entre Loi discrète et Loi Continue

Discret	Continu
Univers $\Omega$	Intervalle $I$ ou $\mathbb{R}$
Événement $E$ sous-ensemble de $\Omega$	Événement $J$ sous-intervalle de $I$
Probabilités $p_i$ des événements élémentaires $\sum p_i = 1$	Densité de probabilité $\int_{(I)} f(t) dt = 1$
Espérance de la variable aléatoire $X$ $E(X) = \sum p_i x_i$	Espérance de la variable aléatoire $X$ $E(X) = \int_{(I)} t f(t) dt$
Équiprobabilité $P(E) = \frac{\text{nbre de cas favorables}}{\text{nbre de cas possibles}}$	Loi uniforme $P(X \in J) = \frac{\text{longueur de } J}{\text{longueur de } I}$

## 12.7 Sujet de Bac

### Ex1 : Antilles 2015

#### Partie A

On considère une variable aléatoire  $X$  qui suit la loi exponentielle de paramètre  $\lambda$  avec  $\lambda > 0$ .  
On rappelle que, pour tout réel  $a$  strictement positif,

$$P(X \leq a) = \int_0^a \lambda e^{-\lambda t} dt.$$

On se propose de calculer l'espérance mathématique de  $X$ , notée  $E(X)$ , et définie par

$$E(X) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x \lambda t e^{-\lambda t} dt.$$

On note  $\mathbb{R}$  l'ensemble des nombres réels.

On admet que la fonction  $F$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $F(t) = -\left(t + \frac{1}{\lambda}\right)e^{-\lambda t}$  est une primitive sur  $\mathbb{R}$  de la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(t) = \lambda t e^{-\lambda t}$ .

1. Soit  $x$  un nombre réel strictement positif. Vérifier que

$$\int_0^x \lambda t e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda} \left( -\lambda x e^{-\lambda x} - e^{-\lambda x} + 1 \right).$$

2. En déduire que  $E(X) = \frac{1}{\lambda}$ .

#### Partie B

La durée de vie, exprimée en années, d'un composant électronique peut être modélisée par une variable aléatoire notée  $X$  suivant la loi exponentielle de paramètre  $\lambda$  avec  $\lambda > 0$ .  
La courbe de la fonction densité associée est représentée en **annexe 2**.

1. Sur le graphique de l'annexe 2 (à rendre avec la copie) :
  - a. Représenter la probabilité  $P(X \leq 1)$ .
  - b. Indiquer où se lit directement la valeur de  $\lambda$ .
2. On suppose que  $E(X) = 2$ .
  - a. Que représente dans le cadre de l'exercice la valeur de l'espérance mathématique de la variable aléatoire  $X$  ?
  - b. Calculer la valeur de  $\lambda$ .
  - c. Calculer  $P(X \leq 2)$ . On donnera la valeur exacte puis la valeur arrondie à 0,01 près.  
Interpréter ce résultat.



- d. Sachant que le composant a déjà fonctionné une année, quelle est la probabilité que sa durée de vie totale soit d'au moins trois années? On donnera la valeur exacte.

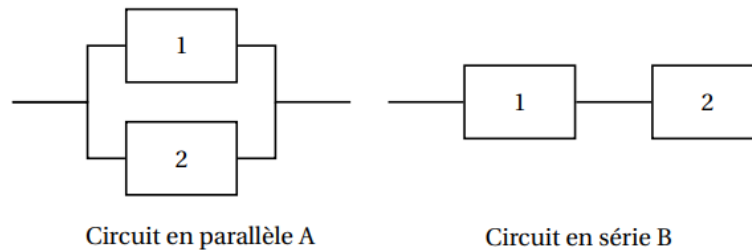
### Partie C

Un circuit électronique est composé de deux composants identiques numérotés 1 et 2. On note  $D_1$  l'évènement « le composant 1 est défaillant avant un an » et on note  $D_2$  l'évènement « le composant 2 est défaillant avant un an ».

On suppose que les deux évènements  $D_1$  et  $D_2$  sont indépendants et que

$$P(D_1) = P(D_2) = 0,39.$$

Deux montages possibles sont envisagés, présentés ci-dessous :



1. Lorsque les deux composants sont montés « en parallèle », le circuit A est défaillant uniquement si les deux composants sont défaillants en même temps. Calculer la probabilité que le circuit A soit défaillant avant un an.
2. Lorsque les deux composants sont montés « en série », le circuit B est défaillant dès que l'un au moins des deux composants est défaillant. Calculer la probabilité que le circuit B soit défaillant avant un an.

### Ex2 : (série ES) Centre Étranger 2013

Tous les jours, Guy joue à un jeu en ligne sur un site, avec trois amis.

1. Paul se connecte sur le site. La durée  $D$  (en seconde) qu'il faut pour réunir les quatre joueurs est une variable aléatoire qui suit une loi uniforme sur l'intervalle  $[20 ; 120]$ .
  - a. Déterminer la probabilité que les quatre joueurs soient réunis au bout de 60 secondes.
  - b. Calculer l'espérance mathématique de  $D$ . Interpréter ce résultat.
2. L'équipe est maintenant réunie et la partie peut commencer. La durée  $J$  (en minute) d'une partie est une variable aléatoire qui suit la loi normale  $\mathcal{N}(120, 400)$ .
  - a. Déterminer l'espérance et l'écart-type de la variable aléatoire  $J$ .
  - b. Montrer l'équivalence :

$$90 < J < 180 \Leftrightarrow -1,5 < \frac{J-120}{20} < 3$$

- c. On définit la variable aléatoire  $X$  par  $X = \frac{J-120}{20}$ .  
Déterminer la loi suivie par la variable aléatoire  $X$ .
- d. Déterminer la probabilité que la partie dure entre 90 et 180 minutes, à 0,001 près.