Devoir Surveillé - 2h

Exercice 1 - *complexe - suite - récurrence - limite - France 2018* 10 points

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{u},\,\vec{v}\right)$.
On pose $z_0 = 8$ et, pour tout entier naturel n :

$$z_{n+1} = \frac{3 - \mathrm{i}\sqrt{3}}{4} z_n.$$

On note A_n le point du plan d'affixe z_n.

1. **a.** Vérifier que :

$$\frac{3 - \mathrm{i}\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}.$$

b. En déduire l'écriture de chacun des nombres complexes z_1, z_2 et z_3 sous forme exponentielle et vérifier que z_3 est un imaginaire pur dont on précisera la partie imaginaire.

c. Représenter graphiquement les points A_0 , A_1 , A_2 et A_3 ; on prendra pour unité le centimètre.

2. **a.** Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n,

$$z_n = 8 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{n\pi}{6}}.$$

b. Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = |z_n|$.
Déterminer la nature et la limite de la suite (u_n).

3. **a.** Démontrer que, pour tout entier naturel k,

$$\frac{z_{k+1} - z_k}{z_{k+1}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{i}.$$

En déduire que, pour tout entier naturel k, on a l'égalité : $A_k A_{k+1} = \frac{1}{\sqrt{3}} \mathrm{O}A_{k+1}$.

b. Pour tout entier naturel n, on appelle ℓ_n la longueur de la ligne brisée reliant dans cet ordre les points $A_0,\ A_1,\ A_2, \ldots,\ A_n$.
On a ainsi : $\ell_n = A_0A_1 + A_1A_2 + \ldots + A_{n-1}A_n$.
Démontrer que la suite (ℓ_n) est convergente et calculer sa limite.

Exercice 2 - *suite - limite - récurrence - algo - Polynésie 2017* 10 points

Les parties **A** et **B** sont indépendantes.

On s'intéresse à une population de tortues vivant sur une île et dont le nombre d'individus diminue de façon inquiétante.

Partie A

Au début de l'an 2000, on comptait 300 tortues. Une étude a permis de modéliser ce nombre de tortues par la suite (u_n) définie par :

$$\left\{\begin{array}{rcl} u_0 & = & 0,3 \\ u_{n+1} & = & 0,9u_n\left(1-u_n\right) \end{array}\right.$$

où pour tout entier naturel n, u_n modélise le nombre de tortues, en milliers, au début de l'année $2000+n$.

1. Calculer, dans ce modèle, le nombre de tortues au début de l'année 2001 puis de l'année 2002.
2. On admet que, pour tout entier naturel n, u_n et $1-u_n$ appartiennent à l'intervalle $[0\,;\,1]$.
   a. Montrer que, pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant 0,9u_n$.
   b. Montrer que, pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_n \leqslant 0,3\times 0,9^n$.
   c. Déterminer la limite de la suite (u_n). Que peut-on en conclure sur l'avenir de cette population de tortues ?

3. Des études permettent d'affirmer que, si le nombre de tortues à une date donnée est inférieur au seuil critique de 30 individus, alors l'espèce est menacée d'extinction.

On souhaite qu'à la fin de son exécution, l'algorithme ci-dessous affiche la dernière année **avant** laquelle il reste au moins 30 tortues.

Recopier et compléter l'algorithme afin qu'il satisfasse cette exigence.

Variables :	u est un réel
	n est un entier naturel
Traitement :	u prend la valeur $0,3$
	n prend la valeur 0
	Tant que … faire :
	Fin Tant que
Sortie :	Afficher …

Partie B

Au début de l'année 2010, il ne reste que 32 tortues. Afin d'assurer la pérennité de l'espèce, des actions sont menées pour améliorer la fécondité des tortues. L'évolution de la population est alors modifiée et le nombre de tortues peut être modélisé par la suite (v_n) définie par :

$$\left\{\begin{array}{rcl} v_{10} & = & 0,032 \\ v_{n+1} & = & 1,06v_n(1-v_n) \end{array}\right.$$

où pour tout entier naturel $n \geqslant 10$, v_n modélise le nombre de tortues, en milliers, au début de l'année $2000+n$.

1. Calculer le nombre de tortues au début de l'année 2011 puis de l'année 2012.

2. On admet que, dans ce modèle, la suite (v_n) est croissante et convergente. On appelle ℓ sa limite. Montrer que ℓ vérifie :

$$\ell = 1,06\ell(1-\ell).$$

3. La population de tortues est-elle encore en voie d'extinction ?