DM 1 - à rendre pour le 27/09/19

Exercice 1

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 & = & 1 \quad \text{et, pour tout entier naturel } n, \\ u_{n+1} & = & \left(\dfrac{n+1}{2n+4}\right)u_n. \end{cases}$$

On définit la suite (v_n) par : pour tout entier naturel n, $v_n = (n+1)u_n$.

1) La feuille de calcul ci-contre présente les valeurs des premiers termes des suites (u_n) et (v_n), arrondies au cent-millième.
Quelle formule, étirée ensuite vers le bas, peut-on écrire dans la cellule B3 de la feuille de calcul pour obtenir les termes successifs de (u_n) ?

2) a) Conjecturer l'expression de v_n en fonction de n.

b) Démontrer cette conjecture.

3) Déterminer la limite de la suite (u_n).

	A	B	C
1	n	u_n	v_n
2	0	1,000 00	1,000 00
3	1	0,250 00	0,500 00
4	2	0,083 33	0,250 00
5	3	0,031 25	0,125 00
6	4	0,012 50	0,062 50
7	5	0,005 21	0,031 25
8	6	0,002 23	0,015 63
9	7	0,000 98	0,007 81
10	8	0,000 43	0,003 91
11	9	0,000 20	0,001 95

Exercice 2

On administre à un patient un médicament par injection intraveineuse. La quantité de médicament dans le sang diminue en fonction du temps.

Le but de l'exercice est d'étudier pour différentes hypothèses, l'évolution de cette quantité minute par minute.

1) On effectue à l'instant 0 une injection de 10 mL de médicament. On estime que 20 % du médicament est éliminé par minute. Pour tout entier naturel n, on note u_n la quantité de médicament, en mL, restant dans le sang au bout de n minutes. Ainsi $u_0 = 10$.

a) Quelle est la nature de la suite (u_n) ?

b) Pour tout entier naturel n, donner l'expression de u_n en fonction de n.

c) Au bout de combien de temps la quantité de médicament restant dans le sang devient-elle inférieure à 1 % de la quantité initiale ? Justifier la réponse.

2) Une machine effectue à l'instant 0 une injection de 10 mL de médicament. On estime que 20 % du médicament est éliminé par minute. Lorsque la quantité de médicament tombe en-dessous de 5 mL, la machine réinjecte 4 mL de produit.
Au bout de 15 minutes, on arrête la machine.
Pour tout entier naturel n, on note v_n la quantité de médicament, en mL, restant dans le sang à la minute n.
L'algorithme suivant donne la quantité restante de médicament minute par minute.

Variables :	n est un entier naturel v est un nombre réel
Initialisation :	Affecter à v la valeur 10
Traitement	Pour n allant de 1 à 15 Affecter à v la valeur $0,8 \times v$ Si $v < 5$ alors affecter à v la valeur $v + 4$ Afficher v Fin de boucle

a) Calculer les éléments manquants du tableau ci-dessous donnant, arrondie à 10^{-2} et pour n supérieur ou égal à 1, la quantité restante de médicament minute par minute obtenue avec l'algorithme.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
v_n	10	8	6,4					8,15	6,52	5,21	8,17	6,54	5,23	8,18	6,55	5,24

b) Au bout de 15 minutes, quelle quantité totale de médicament a été injectée dans l'organisme ?

c) On souhaite programmer la machine afin qu'elle injecte 2 mL de produit lorsque la quantité de médicament dans le sang est inférieure ou égale à 6 mL et qu'elle s'arrête au bout de 30 minutes.
Recopier l'algorithme précédent en le modifiant pour qu'il affiche la quantité de médicament, en mL, restant dans le sang minute par minute avec ce nouveau protocole.

3) On programme la machine de façon que :

- à l'instant 0, elle injecte 10 mL de médicament,
- toutes les minutes, elle injecte 1 mL de médicament.

On estime que 20 % du médicament présent dans le sang est éliminé par minute.

Pour tout entier naturel n, on note w_n la quantité de médicament, en mL, présente dans le sang du patient au bout de n minutes.

a) Justifier que pour tout entier naturel n, $w_{n+1} = 0,8w_n + 1$.

b) Pour tout entier naturel n, on pose $z_n = w_n - 5$.
Démontrer que (z_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

c) En déduire l'expression de w_n en fonction de n.

d) Quelle est la limite de la suite (w_n) ? Quelle interprétation peut-on en donner ?