Devoir Surveillé - 2h

Exercice 1 - *suite de fonction - récurrence - france septembre 2019* 10 points

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0; 4]$ par

$$f(x) = \frac{2+3x}{4+x}.$$

Partie A

On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 3 \text{ et pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = f(u_n).$$

On admet que cette suite est bien définie.

1. Calculer u_1.

2. Montrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $[0; 4]$.

3. Montrer que pour tout entier naturel n,

$$1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 3.$$

4. **a.** Montrer que la suite (u_n) est convergente.

b. On appelle ℓ la limite de la suite (u_n) ; montrer l'égalité :

$$\ell = \frac{2+3\ell}{4+\ell}$$

c. Déterminer la valeur de la limite ℓ.

Partie B

On considère la suite (v_n) définie par :

$$v_0 = 0,1 \text{ et pour tout entier naturel } n,\ v_{n+1} = f(v_n).$$

1. On donne en **Annexe, à rendre avec la copie**, la courbe représentative, $\mathscr{C}_f$, de la fonction f et la droite D d'équation $y = x$.

Placer sur l'axe des abscisses par construction géométrique les termes v_1, v_2 et v_3 sur l'**annexe, à rendre avec la copie**.

Quelle conjecture peut-on formuler sur le sens de variation et le comportement de la suite (v_n) quand n tend vers l'infini ?

2. **a.** Montrer que pour tout entier naturel n,

$$1 - v_{n+1} = \left(\frac{2}{4+v_n}\right)(1 - v_n).$$

b. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n,

$$0 \leqslant 1 - v_n \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

3. La suite (v_n) converge-t-elle ? Si oui, préciser sa limite.

Exercice 2 - *limites - à bien rédiger* 2 points

1/ calculer la limite de $\dfrac{x^2-3x+2}{x^2+x+2}$ en $+\infty$

2/ calculer la limite de $\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x}$ en $+\infty$

Exercice 3 - *étude de fonction* 8 points

on considère la fonction $f(x)=\dfrac{3x-3}{x+1}$ définie (à priori) sur $\mathbf{R}$

1/ donner Df, le domaine de définition de f

2/ déterminer 2 réels a et b tel que : $f(x)=a+\dfrac{b}{x+1}$, $\forall x\in Df$

2/ en déduire les limites de f aux bornes du domaine Df

3/ en déduire que f admet une asymptote horizontale et une asymptote verticale, dont on donnera les équations

4/ calculer f', la dérivée de f, sur Df ; en déduire le tableau de variation (complet : avec les limites) de f sur Df

5/ montrer que si $x>5$ alors $2<f(x)<3$

6/ quels sont les entiers naturels non nuls n tels que $n+1$ divise $3n-3$?