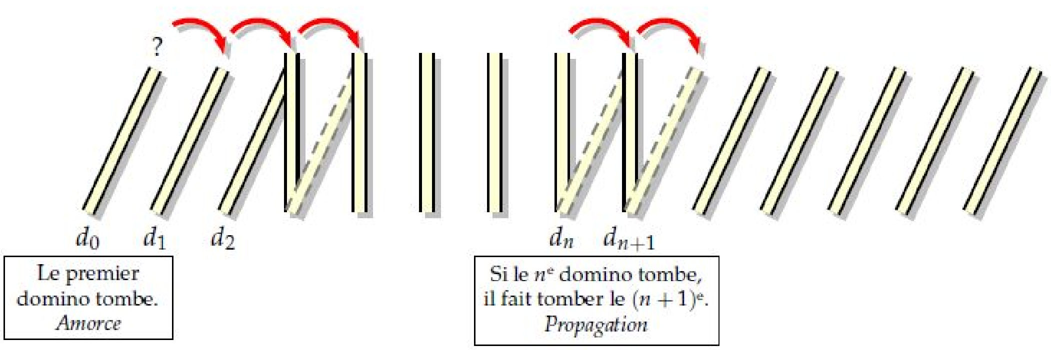
Chapitre 1

Raisonnement par récurrence
Limite d'1 suite

1.1 Raisonnement par récurrence

1.1.1 Effet domino

Pour comprendre le raisonnement par récurrence, regardons l'exemple des dominos :



Pourquoi tous les dominos tombent ? Pour 2 raisons :
- parce que le 1$^{\text{er}}$ tombe (point de départ appelé ***initialisation***)
- parce lorsque le $n^{\text{ième}}$ tombe, il entraine avec lui le $(n+1)^{\text{ième}}$ (c'est la propagation appelée ***hérédité***)

On remarque tout de suite que ces 2 raisons sont nécessaires :
- sans initialisation, il n'y a pas de chute de dominos
- sans hérédité, la chute peut s'arrêter à tout moment

Et c'est comme cela qu'il faut comprendre le raisonnement par récurrence : un résultat vrai, à partir d'un certain point de départ, puis qui reste toujours vrai.

On pourra comparer le ***raisonnement par récurrence*** à un escalier infini (sur lequel nous préfèrons avoir toutes les marches pour marcher dessus!!) :
- initialisation : 1$^{\text{ère}}$ marche
- grâce à la n$^{\text{ième}}$ marche (et éventuellement aux précédentes), on peut construire la (n+1)$^{\text{ème}}$ marche

Voilà construit un bel escalier infini ...

1.1.2 Intérêt sur un exemple (suite arithmético-géométrique)

$(u_n) : \begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = 2u_n + 1 \quad \forall n \geqslant 0 \end{cases}$

On souhaite obtenir une formule explicite de (u_n). Comment faire?

Méthode :

1. regarder les premiers termes de (u_n)
2. "trouver" une formule générale
3. prouver que cette formule est vraie, par exemple grâce au raisonnement par récurrence

1.1.3 Raisonnement par récurrence

Méthode et rédaction attendue : Montrer qu'1 propriété (P_n) est vraie $\forall n \geqslant n_0$:

1/ ***Propriété :*** Énnoner correctement la propriété (P_n) à prouver

2/ ***Initialisation :*** Vérifier que la propriété est vraie au rang n_0

3/ ***Hérédité :*** En supposant la propriété vraie au rang n, prouver qu'elle est vraie au rang $n+1$

4/ ***Conclusion :*** $\forall n \geqslant n_0$: (P_n) est vraie

Remarque :

- ⚠ Je le répète : il faut l'***initialisation*** et l'***hérédité*** pour pour que la preuve soit complète!!
- la propriété à prouver démarre au rang de votre choix : 0, 1, 10 ... puis continue jusqu'à l'infini
- il est possible de supposer que toutes les (P_0) ... (P_n) sont vraies pour montrer (P_{n+1})
- si c'est plus simple, au lieu de mq $(P_n) \Rightarrow (P_{n+1})$, vous pouvez mq $(P_{n-1}) \Rightarrow (P_n)$

1.1.4 Propriété, application, contre-exemple

Propriété : inégalité de Bernoulli - ROC :

$\forall \alpha > 0$, $\forall n \geqslant 0$: $(1+\alpha)^n \geqslant 1 + \alpha n$

Démontrons cette inégalité par récurrence.

- ***Propriété :*** $\forall \alpha > 0$, $\forall n \geqslant 0$: $(1+\alpha)^n \geqslant 1 + \alpha n$
- ***Initialisation :*** $(1+\alpha)^0 = 1$ et $1 + 0 \times \alpha = 1$, comme $1 \geqslant 1 \Rightarrow (P_0)$ est vraie

- ***Hérédité :***
  Supposons (P_n) vraie et mq (P_{n+1}) est vraie
  Par hypothèse, $(1+\alpha)^n \geqslant 1+n\alpha$
  $(1+\alpha)^{n+1} = (1+\alpha)\times(1+\alpha)^n = (1+\alpha)^n + \alpha(1+\alpha)^n \geqslant 1+n\alpha+\alpha = 1+(n+1)\alpha$
  Donc (P_{n+1}) est vraie

- ***Conclusion :*** $\forall\alpha > 0$, $\forall n \geqslant 0$: (P_n) est vraie

Ex AF sur les suites : (u_n) : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2} \quad \forall n \geqslant 0 \end{cases}$

1/ Mq $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n < 2$

2/ Mq (u_n) est strictement croissante

⚠ ***2 contre-exemples intéressants ...***

1/ $\forall n \geqslant 0$: 3 divise 2^n

2/ $\forall n \geqslant 0$: $u_n = n^2 - n + 41$

1/ Cette propriété est fausse bien que l'hérédité soit vérifiée :

Si $3|2^n \Rightarrow 6|2^{n+1} \Rightarrow 2^{n+1} = 3\times(2\times k) \Rightarrow$ Alors $3|2^{n+1}$

Mais cette proposition n'est jamais initialisée, elle est donc fausse.

2/ Il semblerait que cette suite (fonction polynomiale à coefficients entiers) ne génère que des nombres premiers. En effet, voici les 40 $^{\text{ère}}$ valeurs : voir tableau.

Mais, comme l'a montré Euler en 1772, les apparences sont trompeuses ; en effet : $u_{40} = 41^2$ et la propriété générale est donc fausse !

Rq 1 : on peut montrer qu'il n'existe pas de suite de ce type qui ne génère que des nombres entiers.

Rq 2 : la suite (moins connue) va plus loin : $\forall n \geqslant 0$: $u_n = 36n^2 - 810n + 2753$ (45 nb 1$^{\text{er}}$)

n	u_n	n	u_n	n	u_n	n	u_n
0	41	11	151	22	503	33	1097
1	41	12	173	23	547	34	1163
2	43	13	197	24	593	35	1231
3	47	14	223	25	641	36	1301
4	53	15	251	26	691	37	1373
5	61	16	281	27	743	38	1447
6	71	17	313	28	797	39	1523
7	83	18	347	29	853	40	1601
8	97	19	383	30	911		
9	113	20	421	31	971		
10	131	21	461	32	1033		

1.2 Limite d'1 suite

1.2.1 Limite finie

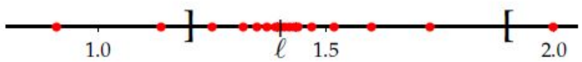
Définiton : (u_n) a pour limite $l \in \mathbb{R}$ si tout intervalle ouvert I contenant l contient aussi tous les termes de la suite à partir d'un certain rang. On note alors : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l$

Proriété : Lorsqu'elle existe cette limite est unique (preuve admise, par l'absurde)

Définiton : Si (u_n) n'est pas convergente ***Alors*** on dit qu'elle est ***divergente***

Remarque :

- en terme de notation, on note (u_n) converge ou (u_n) CV ; de même (u_n) diverge ou (u_n) DIV
- visualiser le phénomène de CV d'1 suite par le dessin suivant :



  On constate 1 phénomène d'accumulation autour de la limite.
  La notion de point d'accumulation est HP.
- les suites $(\frac{1}{n})_{n \geqslant 1}$, $(\frac{1}{n^2})_{n \geqslant 1}$, $(\frac{1}{\sqrt{n+1}})_{n \geqslant 0}$ ont pour limite 0
  N'hésiter pas à tester le phénomène de CV (ou de DIV) grâce à votre calculatrice !
- les suites $(\cos n)_{n \geqslant 0}$ et $((-1)^n)_{n \geqslant 0}$ sont DIV

Algorithme de précision pour la CV d'1 suite : lorsqu'on parle de valeur approchée d'1 nombre, il faut impérativement associer 1 précision à cette valeur. Pour bien comprendre la notion de précision, voici 1 exemple concret sur lequel nous reviendrons en probabilité :

- si je dis que j'ai 55% de chance à ±1% de gagner ⇒ tout le monde est persuadé que je vais gagner
- par contre, si je dis que j'ai 55% de chance à ±20% de gagner ⇒ la situation est beaucoup moins claire

- ***Modélisation :***

.

$$(u_n) : \begin{cases} u_0 = 0.1 \\ u_{n+1} = 2u_n(1-u_n) \end{cases}$$

Admis : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0.5$

Trouver le rang N tq :
$\forall n \geqslant N \quad |u_n - 0.5| < 10^{-3}$

Réponse : $N = 5$

- ***Python :***

écrire 1 fonction à 2 paramètres (limite et precision) répondant à la question

solution : Math13Net/TS/TS Cours 01.py

1.2.2 Limite infinie

Définition :

- (u_n) a pour limite $+\infty$ si tout intervalle ouvert de la forme $]\,A\,; +\infty\,[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang ; noté : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$
- (u_n) a pour limite $-\infty$ si tout intervalle ouvert de la forme $]-\infty\,; B\,[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang ; noté : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$
- dans les 2 cas, on dit que la suite ***DIV***

Remarque :

- par exemple, la 1$^{\text{ère}}$ définition explique que :
  $\forall A$ choisi aussi grand que l'on veut, on peut toujours trouver un N tq $\forall n \geqslant N$, $u_n \geqslant A$
  on se "rapproche" donc inexorablement de l'infini ...
- les suites $(n)_{n \geqslant 0}$, $(n^2)_{n \geqslant 0}$, $(\sqrt{n+1})_{n \geqslant 0}$ ont pour limite $+\infty$
  N'hésiter pas à tester le phénomène de CV (ou de DIV) grâce à votre calculatrice !

Algorithme de dépassement d'1 valeur : déterminer N tq $(u_n) > A$ donné

- ***Modélisation :***

$(u_n) : \begin{cases} u_0 = -2 \\ u_{n+1} = \frac{4}{3}u_n + 1 \quad \forall n \geqslant 0 \end{cases}$

Admis : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

Trouver N tq :
$\forall n \geqslant N \quad u_n \geqslant 10^3$

Réponse :
$N = 25$ et $u_{25} = 1325,83$

- ***Python :***

écrire 1 fonction à 1 paramètre A (valeur à dépasser) répondant à la question

solution : Math13Net/TS/TS Cours 01.py

1.2.3 Limite par comparaison et encadrement

Soient (u_n) , (v_n) , (w_n) et $l \in \overline{\mathbb{R}}$ (cad $l \in \mathbb{R}$ ou $\pm\infty$) et $n_0 \in \mathbb{N}$.

- ***Théorème d'encadrement ou des gendarmes :***

Si $\begin{pmatrix} 1/ \ \forall n \geqslant n_0 : u_n \leqslant v_n \leqslant w_n \\ 2/ \ \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l \\ 3/ \ \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = l \end{pmatrix}$ ***Alors*** $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l$

- ***Théorème de comparaison (ROC) :***

Si $\begin{pmatrix} 1/ \ \forall n \geqslant n_0 : u_n \geqslant v_n \\ 2/ \ \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty \end{pmatrix}$ ***Alors*** $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

Si $\begin{pmatrix} 1/ \ \forall n \geqslant n_0 : u_n \leqslant v_n \\ 2/ \ \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty \end{pmatrix}$ ***Alors*** $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$

Démonstration du Théorème de Comparaison - ROC :
Seule la preuve du théorème de comparaison en $+\infty$ est exigible.

- ***On sait que :*** $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geqslant n_0 : u_n \geqslant v_n$
- ***De plus :*** $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$ ***c'est-à-dire*** $\forall A \in \mathbb{R} \quad \exists N \in \mathbb{N}$ tq $(n \geqslant N \Rightarrow v_n \in \,]\,A\,;+\infty\,[\,)$
- ***Donc pour*** $n >\max(N,n_0)$ ***on a alors*** $\left.\begin{matrix} u_n \geqslant v_n \\ v_n \in \,]\,A\,;+\infty\,[\end{matrix}\right) \Rightarrow u_n \in \,]\,A\,;+\infty\,[$
- ***Donc :*** $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

Exemple :

- Mq $(\frac{\sin n}{n+1})_{n\geqslant 0}$ est CV vers 0 :

- Mq $(n + \sin n)_{n\geqslant 0}$ est DIV vers $+\infty$.

1.2.4 Opérations sur les limites

Les propriétés suivantes sont admises (et assez intuitives). Dans le cas des formes indéterminées (F.I.), il faut travailler au cas par cas pour lever l'indéterminée. Il existe des techniques à connaître pour cela que nous verrons au cours des exercices.

Limite d'1 somme :

Si (u_n) a pour limite	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
Si (v_n) a pour limite	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
alors $(u_n + v_n)$ a pour limite	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F. Ind.

Limite d'1 produit :

Si (u_n) a pour limite	ℓ	$\ell \neq 0$	0	∞
Si (v_n) a pour limite	ℓ'	∞	∞	∞
alors $(u_n \times v_n)$ a pour limite	$\ell \times \ell'$	∞*	F. ind.	∞*

*Appliquer la règle des signes

Limite d'1 quotient :

Si (u_n) a pour limite	ℓ	$\ell \neq 0$	0	ℓ	∞	∞
Si (v_n) a pour limite	$\ell' \neq 0$	0 (1)	0	∞	ℓ'	∞
alors $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ a pour limite	$\frac{\ell}{\ell'}$	∞*	F. ind.	0	∞*	F. ind.

*Appliquer la règle des signes (1) 0 signe constant

Exemple de recherche de limite de suite :

- $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = (\frac{1}{3})^n + 5 - \frac{1}{n}$

- $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = n^2 - n + 2$

- $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $w_n = \frac{n^2+3}{n+1}$

1.2.5 Limite d'1 suite géométrique

Propriété : soit $q \in \mathbb{R}$

- ***ROC*** Si $q > 1$ Alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$
- Si $q = 1$ Alors $\forall n \geqslant 0 \quad u_n = 1$; en particulier $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 1$
- Si $-1 < q < 1$ Alors (u_n) CV et $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$
- Si $q \leq -1$ $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n$ n'existe pas (bien comprendre pourquoi)

Démonstration ROC :

- puisque $q>1$, on peut poser : $q=1+\alpha$ où $\alpha>0$
- on démontre ensuite l'inégalité de Bernouilli par récurrence :
  $\forall \alpha>0$, $\forall n \geqslant 0$: $(1+\alpha)^n \geqslant 1+\alpha n \Rightarrow q^n \geqslant 1+\alpha n$
- ***donc :*** $\left.\begin{array}{c} q^n \geqslant 1+\alpha n \\ \lim\limits_{n\to+\infty} 1+\alpha n=+\infty \text{ car } \alpha>0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} q^n=+\infty$ d'après le théorème de comparaison.

Remarque, exemple :

- pour trouver la 3^ème limite (lorsque $q\neq 0$ sinon c'est évident), il suffit de poser : $m=\frac{1}{q}$
  on revient ainsi (au signe près) au cas 1, d'où le résultat ...
- Soit (u_n) : $\left\{\begin{array}{l} u_0=2 \\ u_{n+1}=2u_n+5 \quad \forall n\geqslant 0 \end{array}\right.$

  On pose (v_n) tq $v_n=u_n+5$

  1/ mq (v_n) est géométrique

  2/ exprimer v_n puis u_n en fonction de n

  3/ en déduire la limite de (u_n)

1.2.6 Convergence, divergence d'1 suite monotone

Définition : soit (u_n) une suite réelle

- (u_n) est ***majorée*** si $\exists M\in\mathbb{R}$ tq $\forall n\geqslant 0 \quad u_n\leqslant M$
- (u_n) est ***minorée*** si $\exists m\in\mathbb{R}$ tq $\forall n\geqslant 0 \quad u_n\geqslant m$
- (u_n) est ***bornée*** si elle est majorée et minorée

Ces notions vont nous aider à conclure facilement sur la CV ou la DIV de certaines suites.

Exemple :

On pose (u_n) tq $\forall n\geqslant 1 \quad u_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{2n}=\sum\limits_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}$. Mq (u_n) est bornée.

Théorème de CV et de DIV : soit (u_n) une suite réelle

- $\left.\begin{array}{l} (u_n) \text{ croissante} \\ (u_n) \text{ majorée} \end{array}\right\} \Rightarrow (u_n)$ CV
- $\left.\begin{array}{l} (u_n) \text{ décroissante} \\ (u_n) \text{ minorée} \end{array}\right\} \Rightarrow (u_n)$ CV
- $\left.\begin{array}{l} (u_n) \text{ croissante} \\ (u_n) \text{ NON majorée} \end{array}\right\} \Rightarrow (u_n)$ DIV ***ROC***
- $\left.\begin{array}{l} (u_n) \text{ décroissante} \\ (u_n) \text{ NON minorée} \end{array}\right\} \Rightarrow (u_n)$ DIV

Démonstration ROC :

- (u_n) croissante, non majorée
- comme (u_n) n'est pas majorée, $\forall A \in \mathbb{R}$, $\exists N \in \mathbb{N}$ tq $u_N \in \,]\,\mathrm{A}\,;\,+\infty\,[$
- de plus, comme (u_n) est croissante $\Rightarrow \forall n \geqslant N$, $u_n \in \,]\,\mathrm{A}\,;\,+\infty\,[$
- $\Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

Remarque, exemple :

- erreur fréquente : (u_n) croissante majorée par 2 ne CV pas forcément vers 2 ; ex : $(-\frac{1}{n})$
- Soit (u_n) : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \sqrt{3u_n + 4} \quad \forall n \geqslant 0 \end{cases}$

  1/ (u_n) est croissante et majorée par 4

  2/ en déduire que (u_n) CV

  3/ on admet que (u_n) CV vers 4 ; proposer 1 algo / 1 prog permettant de trouver N à partir duquel $u_n > 3,99$; vérifier avec votre calculatrice

1.2.7 Activité de Recherche

(u_n) : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = u_n + 2n - 11 \quad \forall n \geqslant 0 \end{cases}$

1/ calculer u_{10^6} ; que constatez-vous ?

2/ en utilisant Geogebra par ex, représenter graphiquement les 20 premiers termes de cette suite
le nuage de points obtenus a-t-il une particularité ? si oui laquelle ?

3/ on souhaite avoir u_n directement en fonction de n (et non pas de u_{n-1} comme actuellement) :
à l'aide des observations faites dans la première question, conjecturer une formule donnant, pour n'importe quelle valeur de l'entier naturel n, u_n en fonction de n

4/ démontrer cette formule

5/ recalculer u_{10^6}

6/ donner la limite de cette suite