Chapitre 8

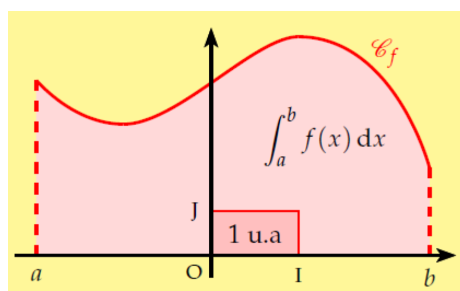
Intégrale et Primitive

8.1 Notion d'intégrale

8.1.1 Définition

Définition : (O ; I ; J) 1 repère orthogonal ; a , $b \in \mathbb{R}$; u.a. : unité d'aire

- $f : \begin{array}{ccc} [\ a\ ,\ b\ ] & \mapsto & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$ une fonction ***continue positive*** sur le segment $[\ a\ ,\ b\ ]$
- ***Intégrale de f sur*** $[\ a\ ,\ b\ ]$ **:**
  c'est la mesure, en u.a., de l'aire située :
  - "sous" la fonction f
  - "au-dessus" de l'axe des abscisses
  - "entre" $x = a$ et $x = b$
- ***Notation :*** ce nombre est notée $\boxed{\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}$

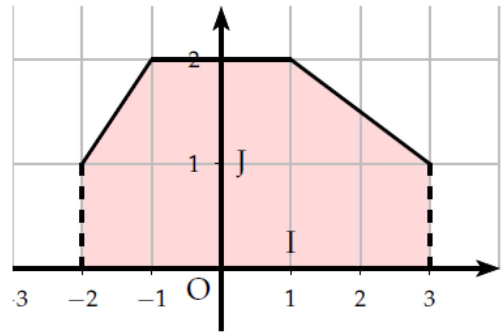


Remarque, exemple :

- $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ se lit "somme de a à b de f" ou "intégrale de a à b de f"
- dans , $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$:
  - $\displaystyle\int$ représente un "S" (employé par Leibniz) pour Somme ***car*** cette intégrale (de Riemann) "est" la somme des aires de petits rectangles sous la courbe ... : voir l'activité sur $x \mapsto x^2$ infra
  - a et b sont les ***bornes d'intégration***
  - x est 1 variable "muette" cad que l'on peut remplacer : $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(u)\,\mathrm{d}u = \int_a^b f$
  - ***HP :*** $\mathrm{d}x$ spécifie la "mesure" associée à l'intégrale ; ici, elle représente en gros la largeur (infiniment petite) de chaque rectangle sous la courbe

- ***Ex :***

  - calculer l'aire en comptant les carreaux
  - calculer l'aire par le calcul intégral

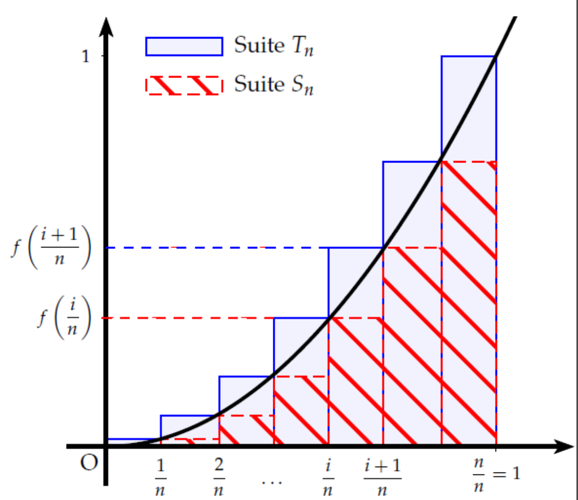


8.1.2 Intégrale et Méthode des Rectangles

Activité 1 : aire sous la courbe d'une parabole

- $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \mapsto & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$; on veut estimer $\boxed{I = \int_0^1 x^2 \, \mathrm{d}x}$
- pour cela, nous allons encadrer I, par 2 suites (S_n) et (T_n)
  - $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on découpe $[\ 0,\ 1\ ]$ en n intervalles de largeur $\dfrac{1}{n}$
  - la hauteur des rectangles est définie par les images de f aux poins considérés
  - S_n, l'aire en rouge, est inférieure à I
  - T_n, l'aire en blue, est supérieure à I

1) écrire S_n et T_n sous la forme de somme, en utilisant l'opérateur $\sum$
2) mq $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_n \leqslant I \leqslant T_n$
3) graphiquement, mq $T_n - S_n = \dfrac{1}{n}$
ceci donne 1 estimation de l'erreur d'approx.
4) on admet que :
$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
préciser alors S_n et T_n en fonction de n
5) mq (S_n) est croissante
6) mq (S_n) CV
7) mq (T_n) est décroissante et CV
8) mq $\lim\limits_{x\to+\infty} T_n - S_n = 0$
HP : (S_n) et (T_n) sont dites ***adjacentes***
9) mq $\lim\limits_{x\to+\infty} S_n = \lim\limits_{x\to+\infty} T_n = I$
10) comment calculer I à 10^{-3} près ?



Activité 2 : analyser le programme Python suivant, puis le faire tourner

programme disponible sur Math13Net

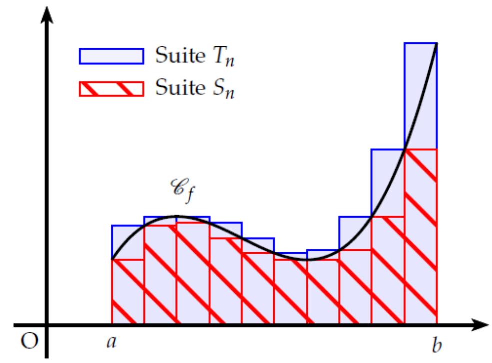
```python
# int gration : m thode des rectangles et des trap zes
# f(x) = x^2 sur [0,5]

from math import *
import numpy as np

# d finition de la fonction
def f(x):
  return x**2

# bornes int gration
a, b = 0, 5

# M thode des Rectangles   Gauche
def rectangle_gauche(a,b,n,f):
  x=np.linspace(a, b, n+1)[:-1]
  return((b-a)/n*np.sum(f(x)))

# M thode des Rectangles   Droite
def rectangle_droite(a,b,n,f):
  x=np.linspace(a, b, n+1)[1:]
  return((b-a)/n*np.sum(f(x)))

# M thode des Trap zes
def trapeze(a,b,n,f):
  x=np.linspace(a,b,n+1)
  return ((b-a)/n*(1/2*f(x[0])+np.sum(f(x[1:n]))+1/2*f(x[n])))

# affichage des r sultats
print('-'*60)
print('{0:>10s} | {1:^12s} | {2:^14s} | {3:^15s} '.format('n', 'Rect_Gauche', 'Rect_Droite', 'Trap ze'))
print('-'*60)
for i in range(1, 7):
  n = 10**i
  rg = rectangle_gauche(a,b,n,f)
  rd = rectangle_droite(a,b,n,f)
  t = trapeze(a,b,n,f)
  print('{0:10d} | {1:11f}  | {2:13f}  | {3:14f}'.format(n,rg,rd,t))
print('-'*60)
```

```
------------------------------------------------------------
         n | Rect_Gauche  |  Rect_Droite    |     Trapèze
------------------------------------------------------------
        10 |   35.625000  |      48.125000  |      41.875000
       100 |   41.043750  |      42.293750  |      41.668750
      1000 |   41.604188  |      41.729188  |      41.666688
     10000 |   41.660417  |      41.672917  |      41.666667
    100000 |   41.666042  |      41.667292  |      41.666667
   1000000 |   41.666604  |      41.666729  |      41.666667
------------------------------------------------------------
```


8.1.3 Intégrale d'1 fonction continue positive

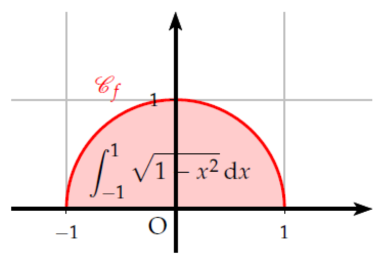
On généralise cet encadrement à 1 fonction f quelconque continue et positive :

- on divise l'intervalle $[\ a\ ;\ b\ ]$ en n parties égales
- sur chaque petit intervalle, on détermine la valeur minimale et maximale de la fonction f
- l'aire sous la courbe est alors encadrée par 2 suites d'aire (rouge et bleu)
- ces 2 suites (S_n) et (T_n) qui CV : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} S_n = \lim\limits_{x\to+\infty} T_n = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}$ (admis)



Remarque, exemple :

- on peut, grâce à la géométrie, faire des calculs d'intégrales efficaces :
  - évaluer $\displaystyle\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$ géométriquement
  - HP : calculer $\displaystyle\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$ (plus dur)



- ***idée :*** utiliser la symétrie de la figure (fonction paire) :
  - $\displaystyle\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = 2 \times \int_{0}^{1} \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = 2 \times \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$
  - intégration de fonction paire, impaire ou périodique :

8.2 Primitive

8.2.1 Théorème Important

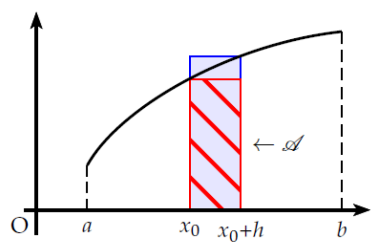
Théorème - ROC : $a\ ,\ b \in \mathbb{R}$

- ***Si*** $f : \begin{array}{ccc} [\ a\ ,\ b\ ] & \mapsto & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$ est 1 fonction ***continue positive*** sur le segment $[\ a\ ,\ b\ ]$
- ***Alors*** $F : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est dérivable sur le segment $[\ a\ ,\ b\ ]$ et $F' = f$

Preuve - ROC :

- on admet le théorème dans le cas général
- on se concentre sur le cas : f croissante
- $\boxed{\text{nous allons mq } \forall x_0 \in [\, a\,,\, b\,]\,,\, F \text{ est dérivable en } x_0 \text{ et } F'(x_0) = f(x_0)}$
- pour cela, revenons à la définition du nombre dérivé et mq : $F'(x_0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f(x_0)$
- ***1^er cas :*** $h > 0$

  - $F(x_0+h) - F(x_0)$
    $= \displaystyle\int_a^{x_0+h} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^{x_0} f(t)\,\mathrm{d}t$
    $= \displaystyle\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,\mathrm{d}t = \mathcal{A} \qquad (1)$



  - par la méthode des rectangles, nous pouvons maintenant encadrer $\mathcal{A}$:
    $f(x_0) \times h \leqslant \mathcal{A} \leqslant f(x_0+h) \times h \Leftrightarrow f(x_0) \leqslant \dfrac{\mathcal{A}}{h} \leqslant f(x_0+h)$
  - $(1) \Rightarrow f(x_0) \leqslant \dfrac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} \leqslant f(x_0+h)$
  - par passage à la limite (à droite car $h > 0$), on a :
    $\lim\limits_{h\to 0^+} f(x_0) = f(x_0) \leqslant \lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} \leqslant \lim\limits_{h\to 0^+} f(x_0+h)$
  - f étant continue : $f(x_0) \leqslant \lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} \leqslant f(x_0)$
    $\Rightarrow \boxed{\lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} = F'(x_0) = f(x_0)}$

- ***2^ème cas :*** $h < 0$

  - de même, on mq : $f(x_0+h) \leqslant \dfrac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} \leqslant f(x_0)$
  - et donc que : $\boxed{\lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} = f(x_0)}$

- ***Conclusion :***

  - $\lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} = \boxed{\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} = F'(x_0) = f(x_0)}$

8.2.2 Définition - Propriété

Avertissement :
nous allons maintenant étudier la possibilité pour un fonction **pas forcément positive** d'avoir une primitive et donc d'être capable de l'intégrer.

Définition :
- f une fonction définie sur 1 intervalle I de $\mathbb{R}$
- f admet une ***primitive*** sur $I \Leftrightarrow \exists\, F$ dérivable sur I tq $\forall x \in I$, $F'(x) = f(x)$
- si elle existe, une primitive de f est notée $\displaystyle\int f(t)\,\mathrm{d}t$ (sans les bornes)

Remarque, exemple :

- on ne confondra pas "primitive" qui est une fonction et "intégrale" qui est un nombre
- habituellement, si f est la fonction, on note F 1 de ses primitives ***cad*** avec 1 majuscule
- petite subtilité dans la définition :
  on ne parle pas de "la" primitive de f" mais d'"une" primitive de f : voir l'ex suivant
- ***ex :***
  - $\forall x \in \mathbb{R}$, $(x^2)' = 2x \Rightarrow x \mapsto x^2$ est 1 primitive de $2x$ sur $\mathbb{R}$
  - mais $\forall x \in \mathbb{R}$, $(x^2+8)' = 2x \Rightarrow x \mapsto x^2+8$ est aussi 1 primitive de $2x$ sur $\mathbb{R}$
  - trouver une primitive des fonctions suivantes, en précisant le domaine de validité associé :
    - $x \mapsto (x+1)^3$
    - $x \mapsto e^{2x}$
    - $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$
    - $x \mapsto \ln x$

Propriété :
- ***Si*** f 1 fonction admet 1 primitive F sur 1 intervalle I de $\mathbb{R}$
- ***Alors*** toute primitive G de f est de la forme :
  $\forall x \in I$, $G(x) = F(x) + k$ ***où*** k est une constante de $\mathbb{R}$

Preuve :

- soit F et G 2 primitives de f sur I
- clairement, $\forall x \in I$, $G'(x) = F'(x) = f(x)$
- $\Rightarrow \forall x \in I$, $(G-F)'(x) = 0 \Rightarrow G - F$ est constante sur $\mathbb{R}$
- $\Rightarrow \exists\, k \in \mathbb{R}$, $\forall x \in I$, $(G-F)(x) = k \Rightarrow \forall x \in I$, $G(x) = F(x) + k$

Propriété :
- ***Si*** f possède 1 primitive sur I intervalle de $\mathbb{R}$
- ***Alors*** "la" primitive de f s'annulant en $x_0 \in I$ est : $\forall x \in I$, $F : x \mapsto \displaystyle\int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$
- cette primitive est unique

Preuve :

- d'1 part, $\forall x \in I$, la fonction $F : x \mapsto \int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$ convient
- d'autre part, soit F et G 2 primitives de f sur I s'annulant en x_0
- clairement, $\exists\, k \in \mathbb{R}$, $\forall x \in I$, $G(x) = F(x) + k$ (puisque F et G sont des primitives de f)
- pour $x = x_0$, $0 = G(x_0) = F(x_0) + k = 0 + k = k \Rightarrow k = 0 \Rightarrow F = G$

Théorème - ROC : a , $b \in \mathbb{R}$

- ***Si*** f est 1 fonction ***continue*** sur un intervalle I
- ***Alors*** f admet des primitives sur I

Preuve - ROC :

- on se limite à 1 fonction f continue sur un intervalle fermé [a,b]
  comprenons bien ici la difficulté : $\boxed{f \text{ n'est pas forcément positive}}$
- f est continue sur 1 intervalle borné fermé [a,b] $\Rightarrow f$ admet 1 minimum m sur [a,b]
- on définit $g : \begin{array}{ccc} [\,a\,,\,b\,] & \mapsto & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & f(x) - m \end{array}$; $\Rightarrow \forall x \in$ [a,b] , $\boxed{g(x) = fx) - m \Leftrightarrow f(x) = g(x) + m}$
- g est 1 fonction ***continue*** (comme somme de fonction continue) $\boxed{\textbf{\textit{positive}}}$ sur le segment $[\ a\ ,\ b\ ]$
  (son minimum sur [a,b] vaut d'ailleurs 0)
- par théorème supra (applicable à g continue positive), $G : x \mapsto \int_{a}^{x} g(t)\,\mathrm{d}t$ est 1 primitive de g sur [a,b]
- ainsi : $F : \begin{array}{ccc} [\,a\,,\,b\,] & \mapsto & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & G(x) + mx \end{array}$ est 1 primitive de F
- en effet, il suffit de remarquer que : $F'(x) = G'(x) + m = g(x) - m = f(x) + m - m = f(x)$
  c'est gagné !

8.2.3 Primitive Usuelle et Règle d'Intégration

Par lecture inverse du tableau des dérivées, on obtient (constante d'intégration $k = 0$) :

Fonction	Primitive	Intervalle
$f(x) = a$	$F(x) = ax$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x$	$F(x) = \dfrac{x^2}{2}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n$	$F(x) = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \dfrac{1}{x}$	$F(x) = \ln x$	$]0;+\infty[$
$f(x) = \dfrac{1}{x^n} \quad n \neq 1$	$F(x) = -\dfrac{1}{(n-1)x^{n-1}}$	$]-\infty;0[$ ou $]0;+\infty[$
$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x) = 2\sqrt{x}$	$\mathbb{R}_+^*$
$f(x) = \sin x$	$F(x) = -\cos x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \cos x$	$F(x) = \sin x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x$	$\mathbb{R}$

D'après les règles de dérivation, on obtient (constante d'intégration $k = 0$) :

Primitive de la somme	$\int (u+v) = \int u + \int v$
Primitive du produit par un scalaire	$\int (au) = a \int u$
Primitive de $u'u^n$	$\int u'u^n = \dfrac{u^{n+1}}{n+1}$
Primitive de $\dfrac{u'}{u}$	$\int \dfrac{u'}{u} = \ln \lvert u \rvert$
Primitive de $\dfrac{u'}{u^n}$ $n \neq 1$	$\int \dfrac{u'}{u^n} = -\dfrac{1}{(n-1)u^{n-1}}$
Primitive de $\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$	$\int \dfrac{u'}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u}$
Primitive de $u'e^u$	$\int u'e^u = e^u$
Primitive de $u(ax+b)$	$\int u(ax+b) = \dfrac{1}{a}U(ax+b)$

Exercice d'application : chercher les primitives des fonctions suivantes

- $x^3 - 2x^2 + 4x - 1$
- $2x(x^2-1)^3$
- $\dfrac{2}{2x-3}$
- $\dfrac{x+1}{(x^2+x+3)^3}$
- $\dfrac{1}{\sqrt{x+4}}$
- $\dfrac{1}{x^2-1}$
- $\dfrac{1}{x^2-x-2}$
- e^{4x+1}
- $\ln x$
- xe^x
- $\cos x \times e^x$

8.3 Intégrale d'1 fonction continue sur 1 segment

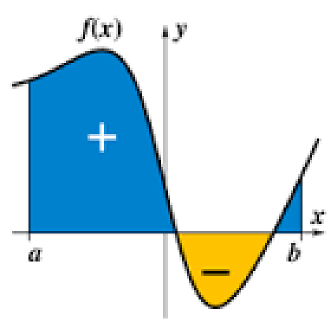
8.3.1 Lien entre Intégrale et Primitive

Théorème fondamental du calcul intégral :

- ***Si*** f est 1 fonction ***continue*** sur 1 intervalle I de $\mathbb{R}$ contenant a et b
- ***Alors*** $\boxed{\int_a^b f(t)\,dt = [\ f(x)\ ]_a^b = F(b) - F(a)}$ où F est 1 primitive ***quelconque*** de f sur I

Remarque, exemple :

- nous venons d'étendre la notion d'intégrale aux fonctions de ***signes quelconques***
- la notion d'***aire*** "sous la courbe" devient ***algébrique*** cad avec un signe :
  - + au-dessus de l'axe des abscisses
  - - en dessous



- ***Preuve :***

  - comprenons bien la difficulté : on veut montrer le résultat avec F 1 primitive quelconque et non pas forcément celle qui s'annule en a
  - f étant continue sur I, elle admet $G : x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ comme primitive qui s'annule en $a \in I$
  - ainsi $\forall a, b \in I$, $G(a) = \int_a^a f(t)\,\mathrm{d}t = 0$ et $G(b) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$
  - soit F 1 primitive quelconque de $f \Rightarrow \exists k \in \mathbb{R}$ tq $\forall x \in \mathbb{R}$ $F(x) = G(x) + k$
  - $\Rightarrow F(a) = G(a) + k = 0 + k = k$ et $F(b) = G(b) + k = G(b) + F(a)$
  - ainsi $G(b) = \boxed{\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b) - F(a)}$ où F est une primitive quelconque de f

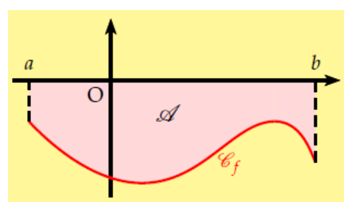
- ***ex :*** calculer $\int_{-1}^2 -x^2 + 4x - 3\,\mathrm{d}x$ puis $\int_0^2 \frac{3x}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x$

8.4 Intégrale d'1 fonction continue sur 1 segment

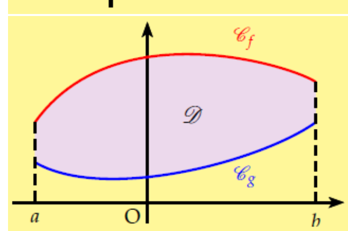
8.4.1 Aire entre 2 courbes

Propriété :

- ***Si*** f est continue sur 1 intervalle [a,b] tq $f \leqslant 0$
- ***Alors*** l'aire "en-dessous" vaut :
  $\mathcal{A} = -\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$

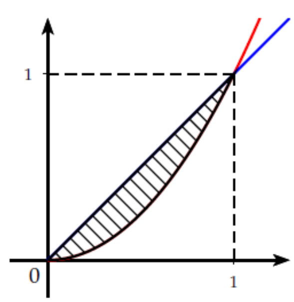


- ***Si*** f, g continues sur 1 intervalle [a,b] tq $f \geqslant g$
- ***Alors*** l'aire "entre les courbes" vaut :
  $\mathcal{A} = \int_a^b (f-g)(t)\,\mathrm{d}t$



Remarque, exemple :

- trouver l'aire coincée entre $y = x^2$ et $y = x$, de $x = 0$ et $x = 1$:
  $\mathcal{A} = \int_0^1 x - x^2\,\mathrm{d}x$
  $\mathcal{A} = [\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - (0 - 0)$
  $\boxed{\mathcal{A} = \frac{1}{6}}$



Propriété : f continue sur 1 intervalle I

- $\forall a \in I$, $\displaystyle\int_a^a f(u)\,\mathrm{d}u = 0$
- $\forall a\ ,\ b \in I$, $\displaystyle\int_b^a f(u)\,\mathrm{d}u = -\int_a^b f(u)\,\mathrm{d}u$
- ***Relation de Chasles :*** $\forall a\ ,\ b\ ,\ c \in I$, $\displaystyle\int_a^c f(u)\,\mathrm{d}u = \int_a^b f(u)\,\mathrm{d}u + \int_b^c f(u)\,\mathrm{d}u$
- ***Géométrie :***
  - $\forall a \in I$, ***Si*** f est paire , $\displaystyle\int_{-a}^a f(u)\,\mathrm{d}u = 2\int_0^a f(u)\,\mathrm{d}u$
  - $\forall a \in I$, ***Si*** f est impaire , $\displaystyle\int_{-a}^a f(u)\,\mathrm{d}u = 0$
  - $\forall a \in I$, $\forall T \in \mathbb{R}$, ***Si*** f est périodique de période T , $\displaystyle\int_a^{a+T} f(u)\,\mathrm{d}u = \int_0^T f(u)\,\mathrm{d}u$
- ***Linéarité :*** $\forall a\ ,\ b \in I$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_a^b f(u) + \lambda g(u)\,\mathrm{d}u = \int_a^b f(u)\,\mathrm{d}u + \lambda\int_a^b g(u)\,\mathrm{d}u$

Remarque, exemple :

- attention, contrairement à la linéarité, intégrale du produit $\neq$ produit des intégrales :
  $\displaystyle\int_a^b f(u) \times g(u)\,\mathrm{d}u \neq \int_a^b f(u)\,\mathrm{d}u \times \int_a^b g(u)\,\mathrm{d}u$
- calculer : $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (4\cos 2x - 5\sin\frac{x}{2})\,\mathrm{d}x$

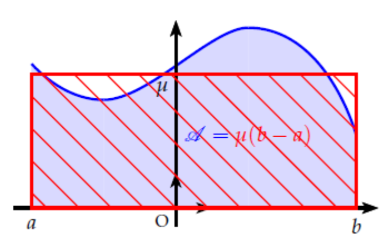
Propriété : f et g continues sur 1 intervalle $[a, b]$

- ***Positivité :*** $\boxed{0 \leqslant f \Rightarrow 0 \leqslant \displaystyle\int_a^b f(u)\,\mathrm{d}u}$
- ***Inégalité 1 :*** $\boxed{f \leqslant g \Rightarrow \displaystyle\int_a^b f(u)\,\mathrm{d}u \leqslant \int_a^b g(u)\,\mathrm{d}u}$
- ***Inégalité 2 :*** $\boxed{|\displaystyle\int_a^b f(u)\,\mathrm{d}u| \leqslant \int_a^b |f(u)|\,\mathrm{d}u}$
- ***Inégalité de la moyenne :***

  Si $\forall a \leqslant x \leqslant b$, $m \leqslant f(x) \leqslant M$ ***Alors*** $\boxed{m(b-a) \leqslant \displaystyle\int_a^b f(u)\,\mathrm{d}u \leqslant M(b-a)}$
- ***Valeur Moyenne :*** $\boxed{\text{Valeur Moyenne de } f = \mu = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(u)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}u}$

Remarque, exemple :

- ***Valeur moyenne μ de f :***
  - ***Si*** f est une fonction continue positive
  - ***Alors*** μ est précisément la valeur de f qui donne la hauteur du rectangle qui permet de calculer l'aire $\mathcal{A}$ sous la courbe :
  - $\mathcal{A} = \mu \times (b-a) = \displaystyle\int_a^b f(u)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}u$



- cette idée (importante) est le coeur des ***méthodes Monte-Carlo*** en probabilité, permettant d'estimer de façon probabiliste, la valeur d'intégrale ou de paramètre de loi de VA : DM Monte Carlo ou vidéo MC

8.5 Sujet de Bac 2017

8.5.1 Asie 2017

L'objet du problème est l'étude des intégrales I et J définies par :

$$I = \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad J = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Partie A : valeur exacte de l'intégrale *I*

1. Donner une interprétation géométrique de l'intégrale I.
2. Calculer la valeur exacte de I.

Partie B : estimation de la valeur de *J*

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ par $g(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.
On note $\mathscr{C}_g$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé du plan.
On a donc : $J = \displaystyle\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x$.
Le but de cette partie est d'évaluer l'intégrale J à l'aide de la méthode probabiliste décrite ci-après.
On choisit au hasard un point M$(x\,;\,y)$ en tirant de façon indépendante ses coordonnées x et y au hasard selon la loi uniforme sur $[0\,;\,1]$.
On admet que la probabilité p qu'un point tiré de cette manière soit situé sous la courbe $\mathscr{C}_g$ est égale à l'intégrale J.
En pratique, on initialise un compteur c à 0, on fixe un entier naturel n et on répète n fois le processus suivant :

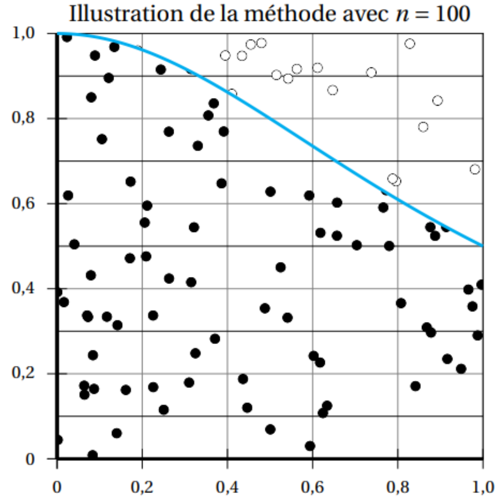
— on choisit au hasard et indépendamment deux nombres x et y, selon la loi uniforme sur $[0\,;\,1]$;

— si M$(x\,;\,y)$ est au-dessous de la courbe $\mathscr{C}_g$ on incrémente le compteur c de 1.

On admet que $f = \dfrac{c}{n}$ est une valeur approchée de J. *C'est le principe de la méthode dite de Monte-Carlo.*

La figure ci-contre illustre la méthode présentée pour $n = 100$.
100 points ont été placés aléatoirement dans le carré.
Les disques noirs correspondent aux points sous la courbe, les disques blancs aux points au-dessus de la courbe.
Le rapport du nombre de disques noirs par le nombre total de disques donne une estimation de l'aire sous la courbe.

Illustration de la méthode avec $n = 100$



1. Recopier et compléter l'algorithme ci-après pour qu'il affiche une valeur approchée de J.

Variables	n, c, f, i, x, y sont des nombres

Traitement	Lire la valeur de n
	c prend la valeur …
	Pour i allant de 1 à … faire
	    x prend une valeur aléatoire entre 0 et 1
	    y prend …
	    Si … alors
	    … prend la valeur …
	    Fin si
	Fin pour
	f prend la valeur …

Sortie	Afficher f

2. Pour $n = 1\,000$, l'algorithme ci-dessus a donné pour résultat : $f = 0{,}781$.
Donner un intervalle de confiance, au niveau de confiance de 95 %, de la valeur exacte de J.

3. Quelle doit-être, au minimum, la valeur de n pour que l'intervalle de confiance, au niveau de confiance de 95 %, ait une amplitude inférieure ou égale à 0,02 ?

That's All Folks ! !

