petit challenge entre amis

extrait de inside interesting integrals - paul nahin - springer

une intégrale sympathique

question :

$$\int_{-1}^{1} \frac{\cos x}{e^{\frac{1}{x}}+1}\,\mathrm{d}x = ?$$

réponse :

réflexe 1 :

- cela semble très compliqué
- si on nous demande de faire cela, c'est qu'il doit y avoir 1 astuce ; oui, mais laquelle ?
- pour trouver la faille, il faut observer et faire le point sur ce que l'on a cad en général pas grand chose

réflexe 2 :

personnellement, j'ai eu 2 idées :

- on intègre sur 1 intervalle symétrique par rapport à 0 : intéressant en cas fonction paire ou impaire
- 1 idée sur le résultat nous met souvent sur 1 piste intéressante : calculatrice/ordinateur nous donne immédiatement (et malheureusement) 0.8414709 ... valeur actuellement non répertoriée dans mon cerveau

réflexe 3 :

- parfois, il faut savoir rester confiant, et se mettre au travail
- à priori, la seule chose intéressante est que nous intégrons sur 1 intervalle symétrique
- creusons l'idée de ce côté là : $\boxed{\text{si } f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} \text{ alors } f(x) = f_{paire}(x) + f_{impaire}(x)}$
- regardons donc à quoi ressemble $f_{paire}(x)$ et $f_{impaire}(x)$

réflexe 4 :

- oups, je dis des bêtises ! nous n'avons pas besoins de regarder $f_{impaire}(x)$; en effet :
- $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} [\, f_{paire}(x) + f_{impaire}(x)\,]\,\mathrm{d}x = 2 \times \int_{0}^{1} f_{paire}(x)\,\mathrm{d}x + 0 = 2 \times \int_{0}^{1} f_{paire}(x)\,\mathrm{d}x$
- regardons donc à quoi ressemble $f_{paire}(x)$

réflexe 5 :

- on rappelle que : $f_{paire}(x) = \dfrac{f(x) + f(-x)}{2}$ et $f_{impaire}(x) = \dfrac{f(x) - f(-x)}{2}$
- $f_{paire}(x) = \dfrac{\dfrac{\cos x}{e^{\frac{1}{x}} + 1} + \dfrac{\cos(-x)}{e^{\frac{1}{-x}} + 1}}{2} = \dfrac{\cos x}{2} \times [\, \dfrac{1}{e^{\frac{1}{x}} + 1} + \dfrac{1}{e^{-\frac{1}{x}} + 1}\,] = \dfrac{\cos x}{2} \times \dfrac{e^{-\frac{1}{x}} + 1 + e^{\frac{1}{x}} + 1}{(e^{\frac{1}{x}} + 1) \times (e^{-\frac{1}{x}} + 1)}$

  $= \dfrac{\cos x}{2} \times \dfrac{e^{-\frac{1}{x}} + 1 + e^{\frac{1}{x}} + 1}{e^{-\frac{1}{x}} + 1 + e^{\frac{1}{x}} + 1} = \dfrac{\cos x}{2} \Longrightarrow \boxed{\text{WOW ! it's a miracle !}}$

réflexe 6 : end of the story

$$\int_{-1}^{1} \frac{\cos x}{e^{\frac{1}{x}} + 1}\,\mathrm{d}x = 2 \times \int_{0}^{1} \frac{\cos x}{2}\,\mathrm{d}x = [\,\sin x\,]_0^1 = \sin 1 \approx 0.8414709\ldots$$