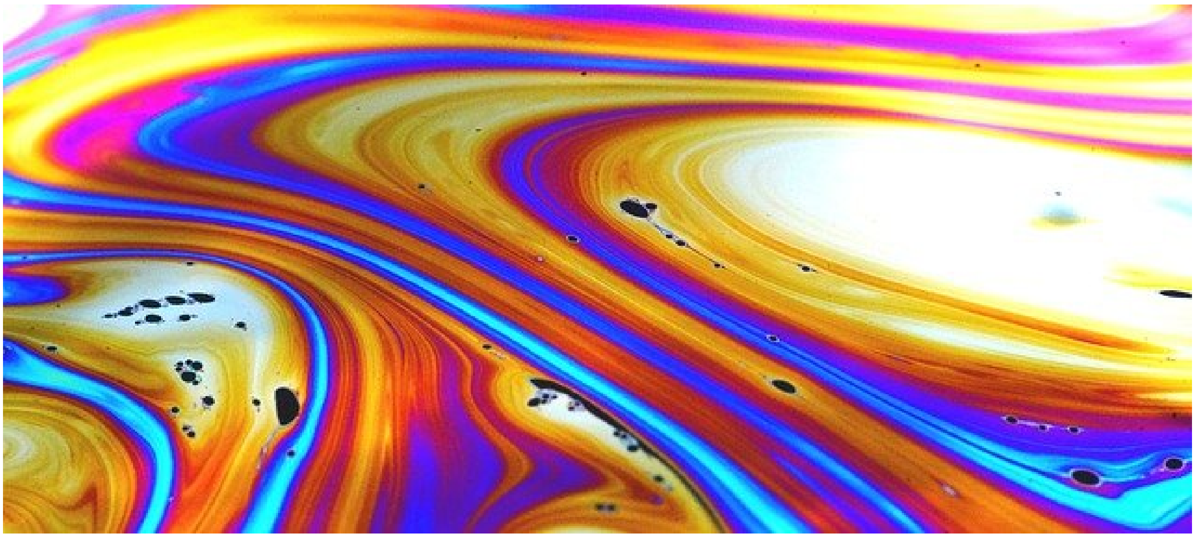
petit challenge entre amis



initiation aux probabilités - sheldon ross - p54

une urne, des boules et le grand méchant l∞up ...

question :

- considérons **1 urne vide de taille ∞**
- nous plaçons et retirons des boules, de 3 façons différentes
- **combien-y-a-t-il de boules dans l'urne à minuit** pour chaque méthode :
  - méthode 1 :
    - à minuit moins 1 min , on place les boules numérotées de 1 à 10 et on retire la 10 (ajout et retrait instantanés)
    - à minuit moins 30 s , on place 11 à 20 et on retire la 20 (")
    - à minuit moins 15 s , on place 21 à 30 et on retire la 30 (")
    - ainsi de suite, en divisant le temps par 2 à chaque étape
  - méthode 2 :
    - à minuit moins 1 min , on place 1 à 10 et on retire la 1 (")
    - à minuit moins 30 s , on place 11 à 20 et on retire la 2 (")
    - à minuit moins 15 s , on place 21 à 30 et on retire la 3 (")
    - ...
  - méthode 3 :
    - à minuit moins 1 min , on place 1 à 10 et on enlève 1 boule au hasard (")
    - à minuit moins 30 s , on place 11 à 20 et on enlève 1 boule au hasard (")
    - à minuit moins 15 s , on place 21 à 30 et on enlève 1 boule au hasard (")
    - ...

réponse :

méthode 1 : facile

- après un temps de réflexion, je pense que tout un chacun arrive à la même conclusion :
  $\boxed{\text{il y a une } \infty \text{ de boules dans l'urne à minuit}}$
- remarque : on fera attention au raisonnement (simpliste) faux suivant : "j'en mets 10, j'en enlève 1, clairement le nombre de boules est ∞ à minuit"
- la méthode 2 va clarifier ce point ...

méthode 2 : faisable

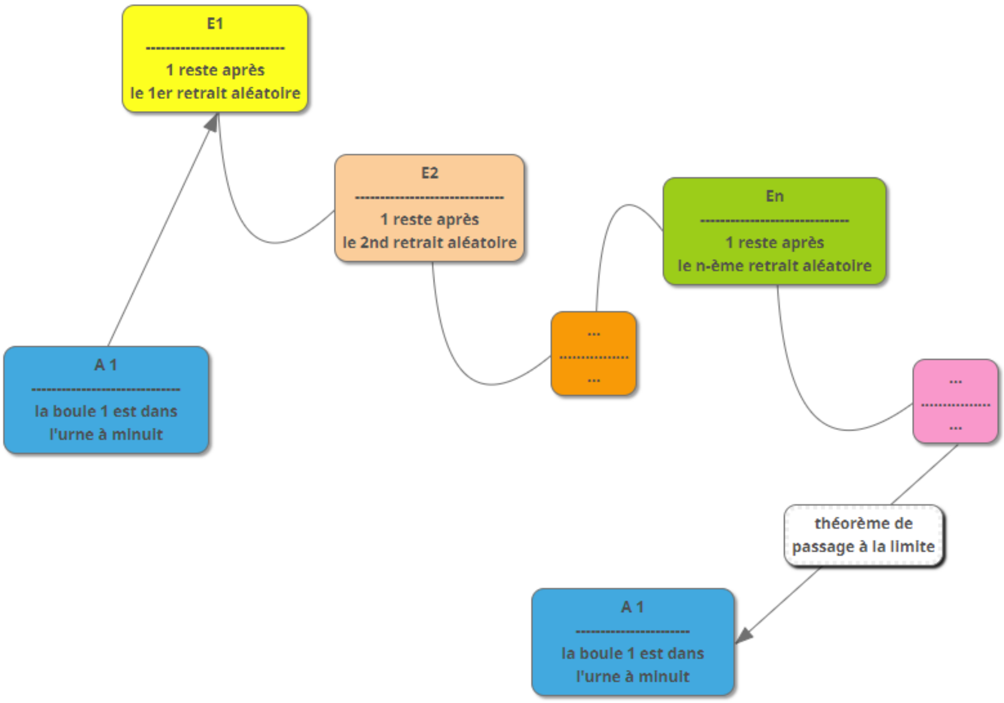
- comme dit supra, j'en mets 10, j'en enlève 1 est faux
- contrairement à ce que notre intuition nous laisse entrevoir : $\boxed{\text{à minuit l'urne est vide !}}$
- ce qui conforte (si j'ose dire) "à la limite" un dicton bien connu "méfions nous des évidences"
- en effet, en réfléchissant un peu, il apparaît clairement que :
  - la boule 1 est sortie au 1-er tour : minuit - 60 $\times \left(\frac{1}{2}\right)^0$ s = minuit - 60 s
  - la boule 2 au 2-nd tour : minuit - 60 $\times \left(\frac{1}{2}\right)^1$ s = minuit - 30 s
  - $\forall n \geq 1$, la boule n au n-ème tour : minuit - 60 $\times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ s
  - bref, à minuit, quel que soit le numéro de la boule, elle n'est plus là : $\boxed{\text{l'urne est vide !}}$

méthode 3 : wtf is this ?!

- après 1 petit (et long) temps de réflexion, pschitt ... nous sommes si peu de chose ...
- comme on dit, "ce n'est pas le but qui compte, c'est le chemin"
- la preuve est intéressante
  - je trouve qu'il y a qq idées ingénieuses
  - 2 rappels de cours (théorème de passage à la limite et reste d'1 série, ici divergente)
- j'ai aussi fait 1 simulation python, histoire de vérifier si tout tient vraiment la route ... pas forcément concluant ...
- mais sans plus attendre, allons-y !

preuve :

- pré-requis : le **théorème de passage à la limite - T.P.L.**
    - (E_n) 1 suite d'évènements emboîtée ($\searrow$ ou $\nearrow$) $\Longrightarrow$ $\boxed{p(\lim_{n\to+\infty} E_n) = \lim_{n\to+\infty} p(E_n)}$
    - preuve : long mais pas dur - voir ici par ex
- que faire ?
    - honnêtement, cela semble dur
    - dans ce cas, avançons doucement en nous inspirant des 2 cas précédents (surtout du 2-nd)
- que fait la boule 1 ?
    - A_1 : la boule 1 est dans l'urne à minuit
    - E_n : la boule 1 est dans l'urne après le n-ième retrait
    - peut-on calculer $p(A_1)$?



- lucky chance !
    - $E_2 \subset E_1$: pour être dans l'urne après le 2-nd retrait, il faut être dans l'urne après le 1-er
    - $... E_n \subset E_{n-1} \subset ... \subset ...E_2 \subset E_1 \Longrightarrow$ (E_n) est "emboîtée" (suite $\searrow$ d'évènements)
    - or $A_1 = \bigcap_{n=1}^{+\infty} E_n$: être dans l'urne à minuit, c'est rester dans l'urne après chaque retrait
- calcul de $p(A_1)$:
    - $p(E_n) = \dfrac{9}{9+1} \times \dfrac{18}{18+1} \times ... \times \dfrac{9n}{9n+1}$
      où le $+1$ représente la boule 1 (que je ne peux pas prendre)
    - $p(A_1) = p(\bigcap_{n=1}^{+\infty} E_n) = \text{T.P.L.} = \lim_{n\to+\infty} p(E_n) = \prod_{n=1}^{+\infty} \dfrac{9n}{9n+1}$
      dont l'inverse se calcule facilement ...

- $\frac{1}{p(A_1)} = \prod_{n=1}^{+\infty} \frac{9n+1}{9n} = \prod_{n=1}^{+\infty} (1 + \frac{1}{9n}) = (1 + \frac{1}{9}) \times (1 + \frac{1}{18}) \times (1 + \frac{1}{27}) \times ...$
- $\frac{1}{p(A_1)} > 1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{18} + \frac{1}{27} ... > \frac{1}{9} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{i} \longrightarrow +\infty$ (SH div) $\Longrightarrow \boxed{\mathrm{p(A_1) = 0}}$
- généralisation : que fait la boule i ?
  - ok nice, let's do it again : c'est quasi-pareil !
  - $p(A_i) = p(\bigcap_{n=i}^{+\infty} E_n) =$ T.P.L. $= \lim_{n \to +\infty} p(E_n) = \prod_{n=i}^{+\infty} \frac{9n}{9n+1}$
  - $\frac{1}{p(A_1)} > \frac{1}{9i} + \frac{1}{9(i+1)} ...$
  - la seule chose importante dans la série (de films) divergente, c'est le reste qui (peut importe l'indice de départ) diverge
  - $\Longrightarrow \boxed{\forall i \in \mathbb{N}^* \, , \, p(A_i) = 0}$
- end of the game : montrons que l'urne est vide à minuit !
  - l'urne est vide si elle ne contient aucune boule ...
  - $0 \leq p(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n) \underset{(1)}{\leq} \sum_{n=1}^{+\infty} p(A_i) \underset{(2)}{=} 0$
  - (1) : d'après le programme (généralisé) du CC de seconde ;))
  - (2) : comme vu, $\forall i \, , \, p(A_i) = 0$
  - $\boxed{\text{l'urne est vide à minuit !}}$
- 1 extra pour la route :
  - l'égalité (2) à l'air évidente, il n'en est rien ...
  - comme le reste de la SA est équivalent à "ln n", nous avons en gros dit que : $\forall i \, p(A_i) < \frac{1}{\ln n}$
  - pour n boules cela donne : $\sum_{i=1}^{n} p(A_i) < \underset{+\infty}{\sim} n \times \frac{1}{\ln n} \underset{+\infty}{\sim} +\infty$: pas très utile ...
  - OUPS : what's going on here ?!

test python

- j'ai fait quelques essais python, voici ce que j'ai obtenu :
  - nombre d'essai : 5 essais
  - taille d'un essai : 50 000 étapes (n = 50 000)
  - low : numéro le plus bas encore dans l'urne
  - len : nombre de boules dans l'urne
- clairement, si avec la méthode 3, l'urne est vide à midi, ça prend son temps ...
- le programme est disponible sur math13net

```
test(nb_essai=5, nb_etape=50000)
```

```
       meth_1          |         meth_2          |         meth_3
low:1.0  len:450000 | low:50001.0 len:450000 | low:4.0  len:450000
low:1.0  len:450000 | low:50001.0 len:450000 | low:11.0 len:450000
low:1.0  len:450000 | low:50001.0 len:450000 | low:1.0  len:450000
low:1.0  len:450000 | low:50001.0 len:450000 | low:2.0  len:450000
low:1.0  len:450000 | low:50001.0 len:450000 | low:4.0  len:450000
```