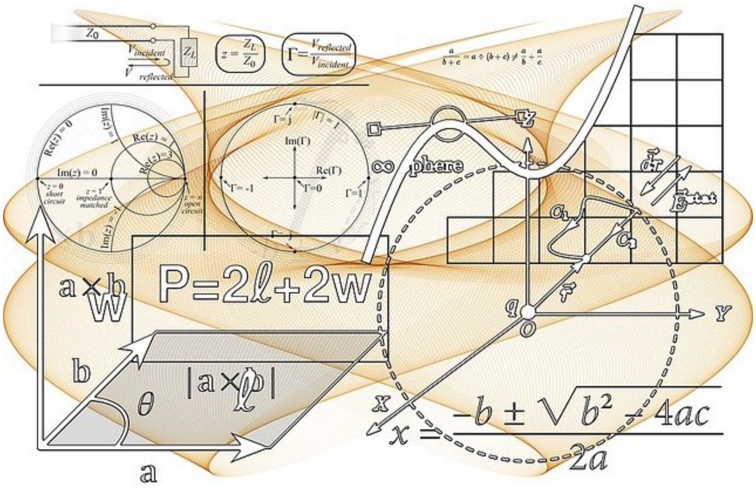
# Chapitre 5 :
# variation et extremum de fonction




nbre d'info mini nécessaires pour résoudre 1 sudoku

## 1 variation d'1 fonction

### 1.1 lien avec le signe de la dérivée

- $f$ une fonction définie et dérivable sur un intervalle $I$
- $f$ croissante $\Longleftrightarrow$ $f' \geq 0$
- $f$ strictement croissante $\Longleftrightarrow$ $f' > 0$
- $f$ décroissante $\Longleftrightarrow$ $f' \leq 0$
- $f$ strictement décroissante $\Longleftrightarrow$ $f' < 0$

### 1.2 méthode

- $f$ une fonction définie et dérivable sur un intervalle $I$
- pour trouver les **variations** de $f$ sur $I$, construire le tableau de signe de $f'$
- un exemple traité en vidéo

### 1.3 un exemple complet

- $f(x) = 5x^2 - 3x + 9$ définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ ; calculer la dérivée de $f$

- résoudre $f'(x) = 0$

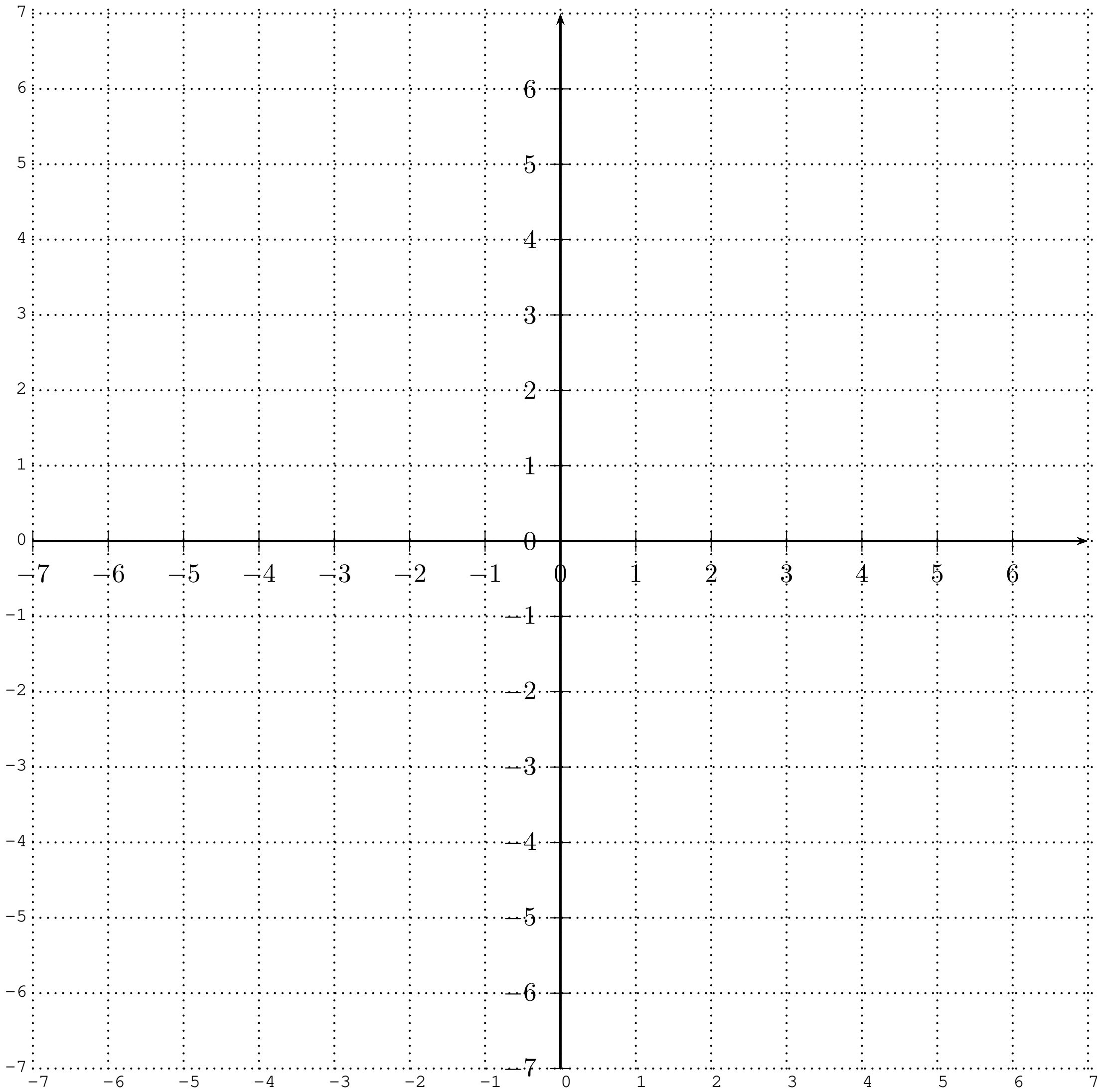
- construire le tableau de variation de $f(x) = 5x^2 - 3x + 9$

| $x$ | $-\infty$ $+\infty$ |
|---|---|
| signe de $f'$ | |
| variation de $f$ | |

- remplir le tableau de valeurs $f$

| x | -4 | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f(x) | | | | | | | | | |

- tracer $f$ et vérifier la la cohérence de vos résultats



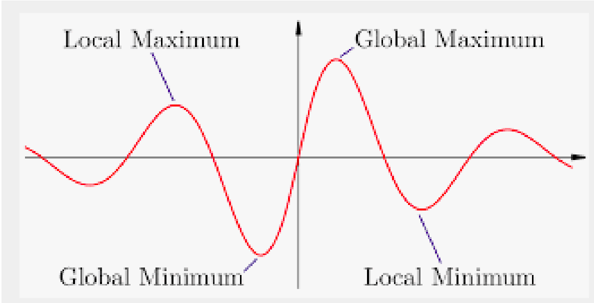
## 1.4 preuve

- au programme : $f$ croissante $\Longrightarrow f' \geq 0$

- hors programme : $f$ croissante $\Longleftarrow f' \geq 0$
  - admis (théorème des accroissements finis)
  - pour les aventuriers, voir ce cours sur la dérivation - page 6

# 2 localisation des extremums d'une fonction

## 2.1 qu'est-ce qu'un extremum ?




### maximum - minimum

- $f$ une fonction dérivable sur un intervalle $I$ de $\mathbb{R}$
- $M$ est un maximum de $f$ sur $I$ intervalle de $\mathbb{R}$ si $\begin{cases} \exists\, a \in I & f(a) = M \\ \forall\, x \in I & f(x) \leq M \end{cases}$
- idem pour 1 **minimum** $N$
- 1 minimum ou 1 maximum est appelé 1 **extremum**

### global - local

- on suppose que $M$ est un extremum de $f$
- si $M$ est un maximum de $f$ sur $D_f$ alors on dit que c'est un **maximum global**
- sinon on parle de **maximum local**
- idem pour les termes **minimum local** et **extremum local**

### exemple

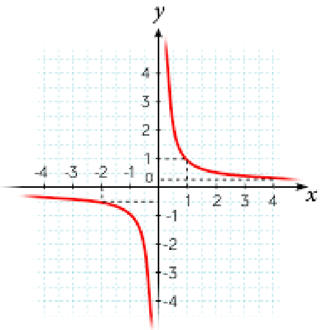
- $f$ la parabole définie par : $f(-2) = 20$ - $f'(2) = 4$ - $f''(5) = 4$
  préciser $f$ ainsi que son extremum (valeur et nature)

### remarque HP

- on distinguera la notion d'extremum et les notions (HP) de borne supérieure et borne inférieure
- 1 extremum (maximum ou minimum) est **atteint** cad $\exists\, a\ ,\ b\ \in\ I$ tq $f(a) = M$ ou $f(b) = m$
- 1 borne supérieure est (grosso modo) 1 majorant qui colle à la fonction en 1 (ou plusieurs) endroit mais qui n'est jamais atteint (sinon cela devient un maximum)
- 1 borne inférieure est (grosso modo) 1 minorant qui colle à la fonction en 1 (ou plusieurs) endroit mais qui n'est jamais atteint (sinon cela devient un minimum)
- on a alors 1 propriété intéressante (simplifiée pour être comprise) : toute fonction continue sur 1 intervalle fermé $I$ de longueur fini possède 1 max et 1 min sur $I$
- donc si on veut mettre en évidence la différence entre BS/BI et max/min avec 1 fonction continue, il faut chercher avec 1 intervalle infinie ou non fermé

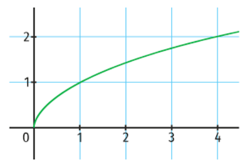
**ex 1 :**

- $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ n'a pas d'extremum sur $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}_-^*$ ou $\mathbb{R}_+^*$
- 0 est 1 borne supérieure de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_-^*$
- 0 est 1 borne inférieure de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$
- regarder la figure puis le démontrer




**ex 2 :**

- $x \mapsto \sqrt{x}$ n'a pas d'extremum sur $]0, 4[$
- 0 est 1 borne inférieure
- 2 est 1 borne supérieure
- essayer de le démontrer !




## 2.2 comment trouver un extremum ?

### condition nécessaire

- $f$ dérivable sur 1 intervalle ouvert $I$ ; $a \in I$
- $\boxed{f \text{ admet 1 extremum local en } a \Rightarrow f'(a) = 0}$

### condition nécessaire et suffisante

- $f$ dérivable sur 1 intervalle ouvert $I$ ; $a \in I$
- $\boxed{f \text{ admet 1 extremum local en } a \iff \begin{cases} f'(a) = 0 \\ f' \text{ change de signe en } a \end{cases}}$

### quelques subtilités

- pourquoi préciser $I$ **intervalle** ? (ex et contre-ex)

- pourquoi préciser $I$ intervalle **ouvert** ? (ex et contre-ex)

### méthode

- $f$ 1 fonction dérivable sur un intervalle I admettant 1 extremum $M$ atteint en $a$ ($f(a) = M$)
- calculer $f'$ puis rechercher ses zéros
- $\Longrightarrow$ $\boxed{a \in \{\text{zéros de } f + \text{bornes de } I\}}$

### exemple

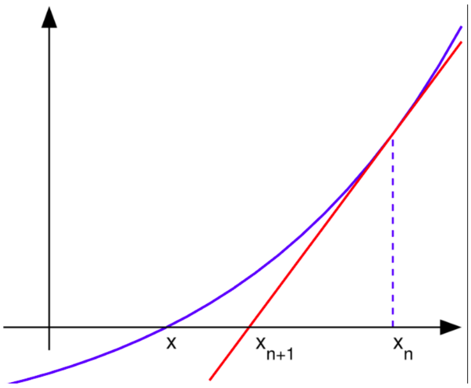
- trouver et décrire les extremums de $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 10$ sur I = [-5,3]
  on pourra ensuite synthétiser l'information sous la forme d'1 TdV

### HP : approfondissement dimension 3

- en dimension 2, pour 1 fonction de 2 variables $z = f(x, y)$, c'est pareil
- pour comprendre la situation, consulter :
  - cette page html : exemple complet corrigé
  - cette série de vidéos : cours 1 - cours 2 - cours 3 - cours 4 - ex 1 - ex 2 - ex 3

## 2.3 un peu de python

### zéro d'1 fonction : méthode de Newton




- explication de la méthode de Newton en vidéo
- comment appliquer la méthode de Newton pour approximer $\sqrt{2}$ ?
- programmer cette méthode (ultra-rapide) sous python pour avoir une approximation de $\sqrt{2}$ à 10 chiffres après la virgule