Chapitre 4 : Dérivée

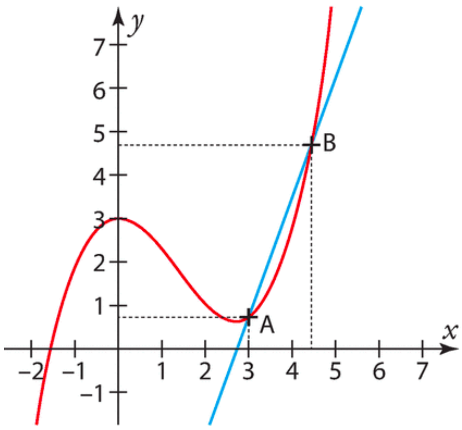
notion de série de Taylor - arte : le calcul infinitésimal

1 le nombre dérivé - la tangente à une courbe

1.1 nombre dérivée

définition

- f une fonction définie sur $\mathbb{R}$
- taux de variation de f sur $[a, b]$:
  - c'est le calcul de la "rapidité" de changement de f sur $[a, b]$
  - il correspond en fait à la pente de la droite qui passe par les points $A(a, f(a))$ et $B(b, f(b))$
  - cette pente vaut $\dfrac{\Delta f}{\Delta x}(a, b) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$



- nombre dérivé de f en a :
  - en poussant cette notion à l'extrême (notion de limite) autour du point $A(a, f(a))$, obtient le nombre dérivée de f en a, si il existe
  - il correspond en fait à la pente de la courbe f en $A(a, f(a))$
  - cette pente vaut $\lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)$

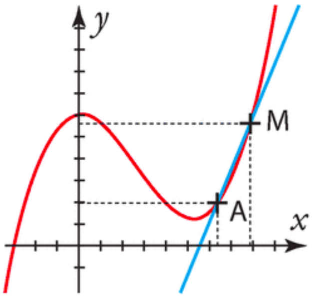


Figure 1

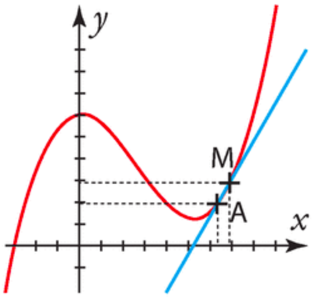
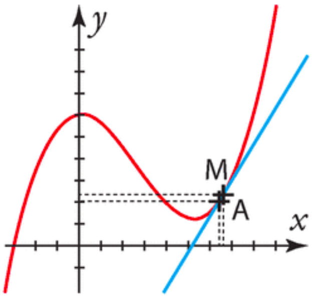
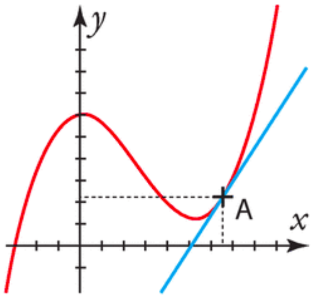


Figure 2





exemple

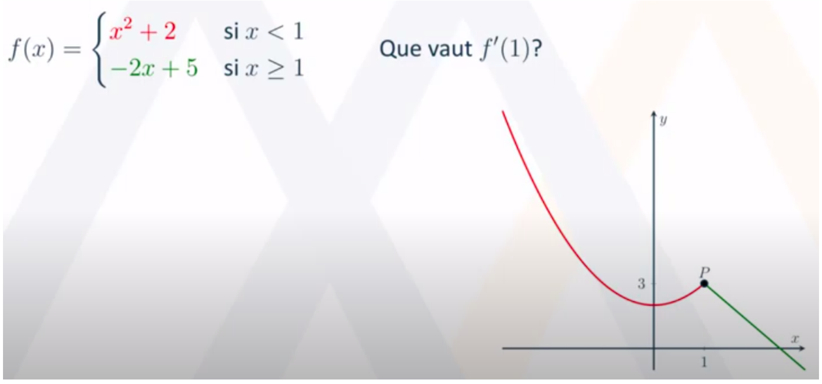
- calculer le taux d'accroissement de $f(x) = 8x^2 + 6x - 17$ entre $[-2, 4]$

- calculer le nombre dérivé de f en 0, 4 et -2

- calculer le nombre dérivé de f en z fixé sur $\mathbb{R}$; peut-on exploiter ce résultat ?

subtilité sur le nombre dérivée

- dans la définition de $f'(a)$, le nombre h se rapproche de 0
- parfois, il est important de préciser comment : par la gauche, par la droite ou cela n'a pas d'importance
- visuellement, cela correspond à une pente différente de la fonction à droite et à gauche
- par exemple, si h doit arriver par la gauche, on parle de nombre dérivée à gauche
- voyons un exemple :



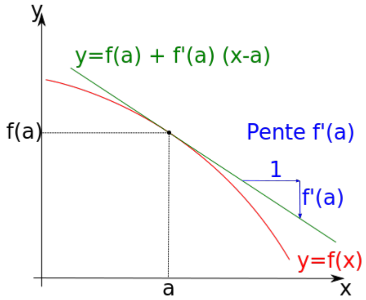
- calculer la dérivée à droite de f en 1 : $f'_d(1) = f'(1^+) = \lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h>0}} \dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}$

- calculer la dérivée à gauche de f en 1 : $f'_g(1) = f'(1^-) = \lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h<0}} \dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}$

1.2 équation d'une tangente

définition et propriété

- f une fonction dérivable en $a \in \mathbb{R}$
- la dérivée de f en a est la droite passant par $A(a, f(a))$ et ayant pour pente $f'(a)$
- l'équation de la tangente à f en a est : $\boxed{y = f'(a) \times (x - a) + f(a)}$



exemple

- soit f une fonction tq $f(1) = 2$ et $f'(1) = 3$; donner l'équation de sa tangente en 1

- problème ouvert :
  - $f(x) = x^2$ dont le nombre dérivé en z est : $f'(z) = 2z$
  - $g(x) = \dfrac{1}{x}$ dont le nombre dérivé en z est : $g'(z) = -\dfrac{1}{z^2}$
  - les fonctions f et g peuvent-elles avoir une tangente commune ? si oui, préciser

remarque HP

- si f est une fonction dérivable en $a \in \mathbb{R}$
- l'équation de la tangente est la "meilleure approximation polynomiale d'ordre 1"
- en clair, c'est la droite (polynôme d'ordre 1) qui approxime le mieux la fonction en ce point
- on aborde par ce biais la notion de développement limité de f à l'ordre 1

2 la dérivée vue comme une fonction

2.1 la dérivée

définition et propriété

- f une fonction définie sur $[a, b]$
- si f possède un nombre dérivé pour chaque $x \in [a, b]$, on peut considérer la fonction f' suivante :

$$f' \ : \ \begin{array}{ccc} [a,b] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f'(x) \end{array}$$

- cette fonction f' s'appelle la dérivée de f sur [a,b]
- comme nous l'avons vu précédemment, elle donne la pente de f en tout $x \in [a, b]$

exemple

- $f(x) = 2x + 1$; calculer la dérivée de f sur $\mathbb{R}$

- $f(x) = -3x^2 + 5$; calculer la dérivée de f sur $\mathbb{R}$

2.2 dérivée de base

propriété (à connaître par coeur, dans les 2 sens)

Fonction f	D_f	Fonction dérivée f'	$D_{f'}$
Cte	$\mathbb{R}$	0	$\mathbb{R}$
x	$\mathbb{R}$	1	$\mathbb{R}$
x^2	$\mathbb{R}$	$2x$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$-\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$\sqrt{x}$	$\mathbb{R}^+$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}^{*+}$
x^n , $n \in \mathbb{Z}^+$	$\mathbb{R}$	$n \times x^{n-1}$	$\mathbb{R}$
x^n , $n \in \mathbb{Z}^{*-}$	$\mathbb{R}^*$	$n \times x^{n-1}$	$\mathbb{R}^*$
$sin(x)$	$\mathbb{R}$	$cos(x)$	$\mathbb{R}$
$cos(x)$	$\mathbb{R}$	$-sin(x)$	$\mathbb{R}$
$tan(x)$	$\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2}[\pi]\}$	$\frac{1}{cos^2(x)} = 1 + tan^2(x)$	$\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2}[\pi]\}$

exemple : calculer les dérivée suivantes

- $f(x) = x^5$

- $f(x) = 2x^3$

- $f(x) = -\frac{2}{x}$ de 2 façons différentes

- $f(x) = 2\sqrt{x}$

- $f(x) = -x^{-5}$

zoom sur $(\sqrt{x})$'

- on rappelle que : $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$
- en utilisant la dérivée de x^n , trouver une autre méthode pour calculer la dérivée de $\sqrt{x}$

3 opération sur les dérivées

3.1 somme, produit, quotient de dérivée

propriété

- f et g 2 fonctions dérivables sur un intervalle de $\mathbb{R}$
- au précaution d'usage près en ce qui concerne division par zéro ou autre, on obtient les résultats importants supra, à connaître par coeur, si possible dans les 2 sens

Fonction	Fonction dérivée
$k \times f \, avec \, k = Cte$	$k \times f'$
$f + g$	$f' + g'$
$f \times g$	$f' \times g + f \times g'$
$\frac{f}{g}$	$\frac{f' \times g - f \times g'}{g^2}$

exemple : calculer les dérivée suivantes

- $f(x) = x^5 + x^2 - 18x + 2$

- $g(x) = 2x \times sin(x)$

- $h(x) = -\dfrac{x+1}{x+2}$ de 2 façons différentes

- $i(x) = \sqrt{x} \times x^3$ de 2 façons différentes

3.2 composition de fonction

propriété

- f et g 2 fonctions dérivables sur un intervalle de $\mathbb{R}$ suivant le schéma de composition suivant :
- $\begin{array}{ccccccc} [f \circ g] = [f(g(x))] & : & [a,b] & \mapsto & [c,d] & \mapsto & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & g(x) & \mapsto & f(g(x)) \end{array}$
- au précaution d'usage (en particulier $[c,d] \subset D_f$), on obtient : $\boxed{[f(g(x))]' = f'(g(x)) \times g'(x)}$

exemple : calculer les dérivée suivantes

- $f(x) = (x+1)^5$

- $g(x) = 2(2x+1)^3$

- $h(x) = -\dfrac{2}{3x^2+1}$

- $i(x) = -2\sqrt{5x^3+6}$

- $k(x) = sin(3x+2)$

- HP - idée :
  - f une fonction ; trouver la dérivée de f^{-1}
  - en déduire 1 nouvelle méthode pour calculer la dérivée de $x \longrightarrow \sqrt{x}$

3.3 un peu de graphique avec python jusqu'au dérivée

qq vidéos pour explorer les math via python

- 1 - introduction
- 2 - les bases du graphique
- 3 - priorité opératoire
- 4 - tracer une fraction rationnelle
- 5 - tracer les racines complexes de l'unité
- 6 - tracer de l'équation différentielle discrète logistique (suite récursive)
- 7 - tracer des tangentes
- 8 - tracer de loi de probabilités jointes

tous ces sujets sont accessibles avec un peu de temps, une bonne tasse de thé et quelques biscuits ...
bonne lecture