

# Chapitre 3

## Probabilité Conditionnelle et Indépendance



les boules de minuit ...

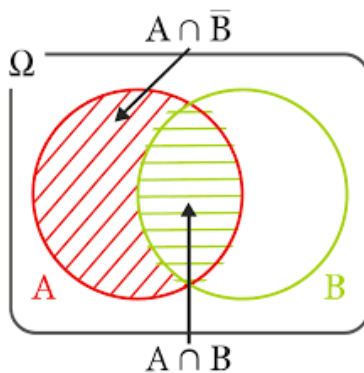
### 1 probabilité conditionnelle

#### 1.1 vocabulaire de base

##### vocabulaire et notation

- univers : représente l'ensemble des possibles ; on le note (en général)  $\Omega$
- évènement : une partie de  $\Omega$
- probabilité : 1 fonction  $p$ 
  1.  $p : \Omega \longrightarrow [0, 1]$
  2.  $p(\Omega) = 1$  et  $p(\emptyset) = 0$
  3. HP ( $\Sigma$ -additivité) : pour tout  $I$  dénombrable, et les  $A_i$  disjoints 2 à 2,  $p(\bigcup_{i \in I} A_i) = \sum_{i \in I} p(A_i)$

##### représentation graphique

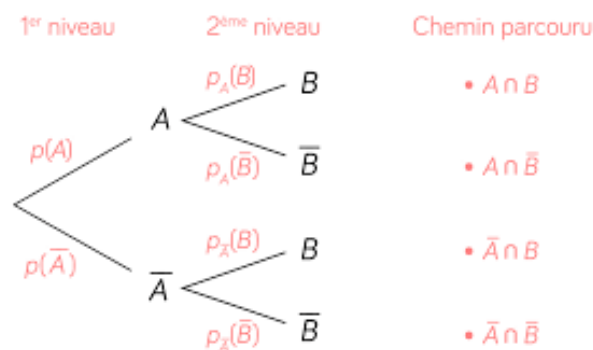


**exemple**

- définir l'espace probabilisé associé au lancé d'un dé équilibré
- définir l'espace probabilisé associé au lancé d'un dé pipé où le 6 à 2 fois plus de chance de sortir
- définir un espace probabilisé associé au lancé de 2 dés équilibrés

**1.2 probabilité conditionnelle****définition et propriété**

- $(\Omega, p)$  un espace probabilisé
- $A$  un évènement tel que :  $p(A) \neq 0$
- la probabilité conditionnelle de  $B$  si  $A$  est la probabilité que B se réalise si A s'est réalisé
- on la note  $p_A(B)$  ou  $p(B|A)$
- $p_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}$

**ex 1 : représentation graphique via les arbres****ex 2 : cas particulier dimension 2 - représentation via un tableau**

	$A$	$\bar{A}$	Total
$B$	0,4	0,2	0,6
$\bar{B}$	0,3	0,1	0,4
Total	0,7	0,3	1

**exemple**

- on tire un objet au hasard dans le stock d'une usine constitué de claviers (C) et de souris (S)
- il y a (à chaque fois) 2 versions : familial (F) ou gamer (G)
- 30 % du stock est constitué de souris
- 40 % des souris sont des gamers
- 63 % du stock est constitué de claviers familiaux
- on tire un objet au hasard dans le stock ; calculer la probabilité que ce soit une souris

- calculer la probabilité qu'une souris produite soit une gamer

- calculer la probabilité de tirer une souris gamer

- calculer la probabilité qu'un clavier produit soit familial

**1.3 résolution des exercices de ce type****méthode de résolution**

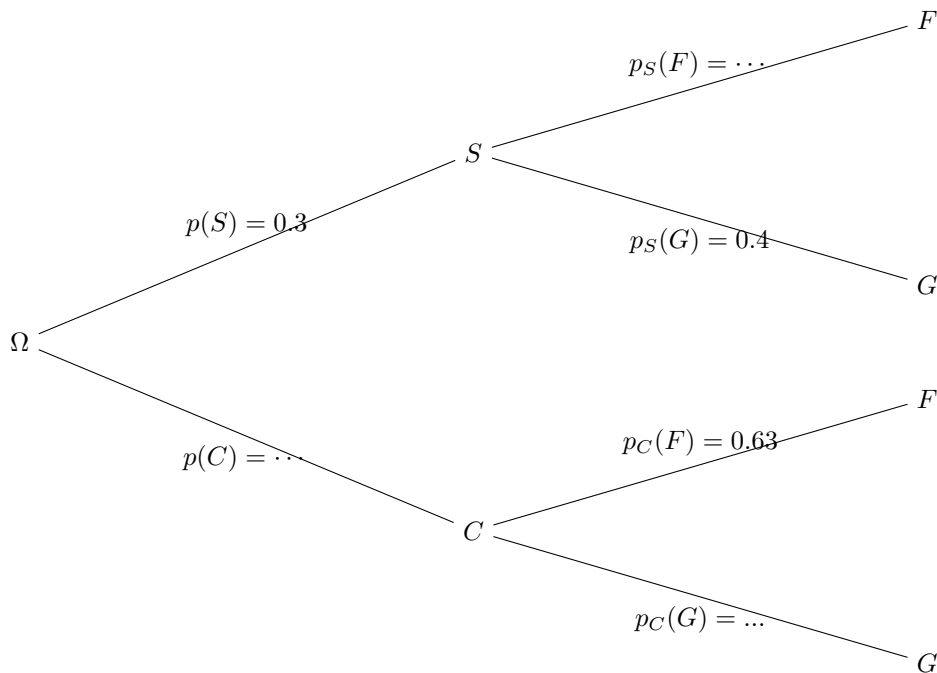
- tous les exercices de ce type se résolvent de la même façon
- il y a 2 calculs très simples à connaître par coeur
- ils utilisent la formule des probabilités totales (voir chapitre suivant)
- grâce à l'énoncé, on construit un arbre (plus ou moins complet) des probabilités puis on calcule ce qui est demandé
- on pourra regarder les 2 vidéos suivantes pour retenir l'essentiel : probabilité conditionnelle et formule des probabilités totales

**vision globale : partition ou arbre dual**

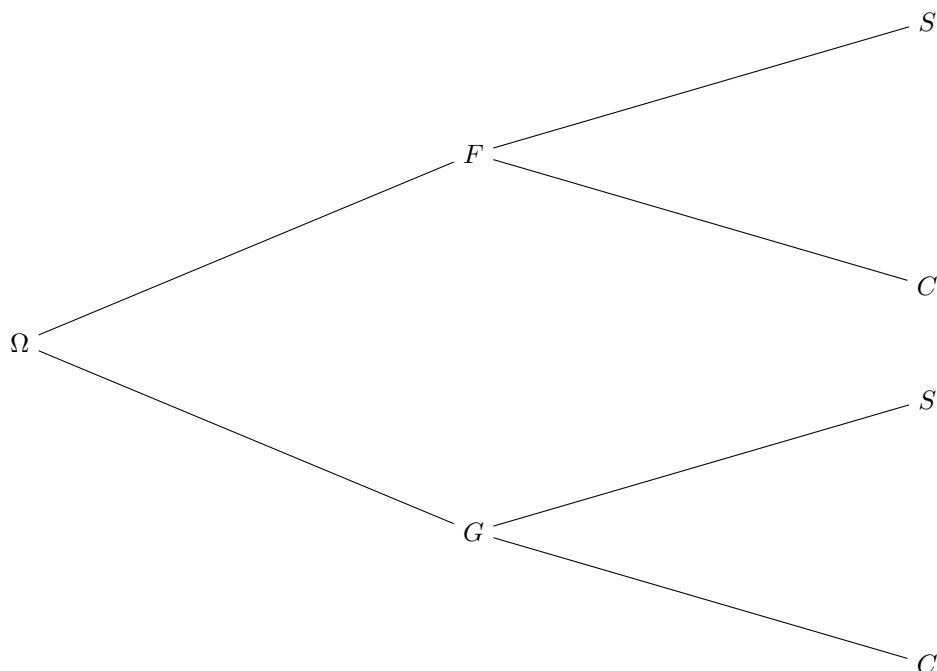
en reprenant l'exercice précédent, on s'aperçoit que :

- on peut voir le problème de 2 façons différentes en fonction de comment on choisit de découper  $\Omega$  au départ (partition de l'univers : voir chapitre suivant)
- l'énoncé du problème vous guide vers l'un des 2 arbres à construire (choix de la première partition)
- les questions sont en général alors liées à l'autre arbre (non construit)

premier arbre (celui que vous pouvez construire) grâce aux informations de l'énoncé



deuxième arbre (caché) mais qui est associé aux questions posées



## 2 formule des probabilités totales

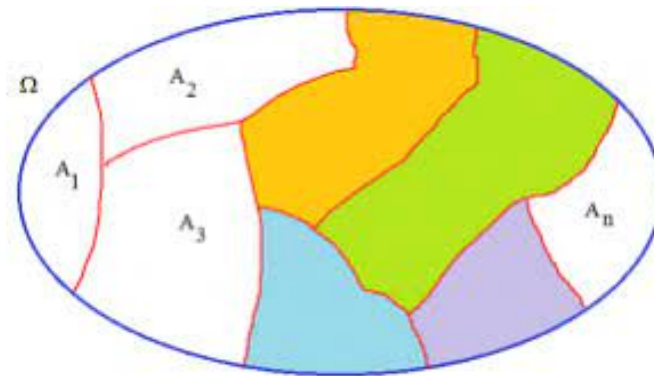
### 2.1 partition de l'univers $\Omega$

#### définition

- $n \geq 2$  et  $A_i$  où  $i \in [1..n]$  une liste d'événements de  $\Omega$
- $(A_i)$  forme 1 partition de l'univers (ou 1 système complet d'événements) s'elle vérifie 3 conditions :
  - $\forall i \in [1..n], A_i \neq \emptyset$
  - $\sum_{i=1}^n p(A_i) = 1$
  - $\forall i \neq j, p(A_i \cap A_j) = 0$

#### visualisation graphique

l'idée est de découper l'univers d'1 façon libre (et donc d'en choisir 1 intéressante) sans qu'aucune pièce ne se superpose



#### remarque

- $A$  et  $\bar{A}$  constituent une partition simple mais importante de l'univers
- dans 1 arbre pondéré, à chaque noeud vous choisissez 1 partition pour aller à l'étape suivante

### 2.2 formule des probabilités totales

#### cas de la partition $A$ et $\bar{A}$

- $A$  un événement de  $\Omega$  tq  $p(A) \neq 0$
- $B$  un événement
- on a alors :  $p(B) = p(B \cap A) + p(B \cap \bar{A})$

preuve :

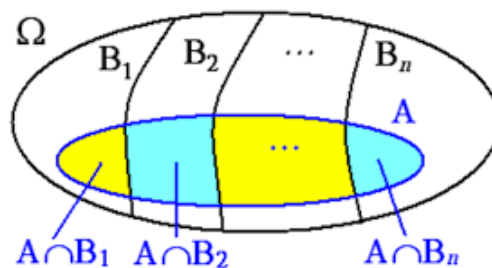
**cas général**

- $(A_i)_{i \in I}$  une partition de l'univers  $\Omega$
- $B$  un évènement
- on a alors :  $p(B) = \sum_{i \in I} p(B \cap A_i)$

preuve : immédiate par récurrence (programme de terminale)

**visualisation graphique**

en gros,  $A$  est saucissonné en plusieurs morceaux ; pour calculer  $p(A)$ , il suffit de recoller les morceaux



on pourra aussi visualiser cette vidéo : formule des probabilités totales

**3 indépendance d'évènements****3.1 indépendance de 2 évènements****définition**

- $A$  et  $B$  2 évènements de  $\Omega$  tq  $p(A) \neq 0$  et  $p(B) \neq 0$
- $A$  et  $B$  sont indépendants si  $p_A(B) = p(B)$  ou si  $p_B(A) = p(A)$
- en gros,  $A$  et  $B$  sont indépendants si le fait que  $A$  se réalise (ou pas) n'a pas d'impact sur la réalisation de  $B$  (et vice versa)

**exemple**

	Adulte	Enfant	Total
Handball	73	174	247
Basket-ball	45	135	180
Gymnastique	14	87	101
Total	132	396	528

- $A$  : la personne est adulte
- $B$  : la personne pratique le basket-ball
- mq  $A$  et  $B$  sont indépendants

### 3.2 indépendance et intersection

#### propriété caractéristique

- $A$  et  $B$  2 évènements de  $\Omega$  tq  $p(A) \neq 0$  et  $p(B) \neq 0$
- $A$  et  $B$  sont indépendants  $\iff p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$

preuve : immédiate via l'arbre des probabilités

#### exemple

- on reprend l'exercice précédent
- $A$  : la personne est adulte
- $B$  : la personne pratique le basket-ball
- mq  $A$  et  $B$  sont indépendants, cette fois-ci en construisant l'arbre des probabilités

### 3.3 indépendance et évènement contraire

#### propriété

- $A$  et  $B$  2 évènements indépendants, alors :
- $A$  et  $\overline{B}$  sont aussi indépendants (idem pour  $\overline{A}$  et  $\overline{B}$ )

preuve :

### 3.4 expériences et/ou épreuves indépendantes

#### définition

- (rappel) 1 expérience aléatoire (EA) est 1 expérience qui a les propriétés suivantes :
  - on ne connaît pas à l'avance le résultat de l'expérience (hasard)
  - les cas possibles (issues de l'EA) ainsi que leurs probabilités sont fixes (mais pas forcément connues)
  - on peut la répéter indéfiniment à l'identique (dans les mêmes conditions)
- lorsque l'on réalise successivement plusieurs EA indépendantes, on parle d'expériences indépendantes (ou d'épreuves indépendantes) si le résultat de l'une ne dépend pas du résultat des précédentes

#### représentation

- on peut visualiser cette succession d'épreuves indépendantes grâce à un arbre de probabilités
- les épreuves étant indépendantes, chaque branche est associée à 1 probabilité non conditionnelle
- dans le cas de 2 épreuves, on pourra aussi utiliser un tableau double entrée, souvent plus pratique

### 3.5 un peu de python

#### un exercice important : somme de 2 dés

somme des 2 dés

#### à vous de jouer : produit de 2 dés

faire un programme permettant d'obtenir la loi de probabilité associée à la variable aléatoire  $X =$  produit du résultat du lancé aléatoire de 2 dés