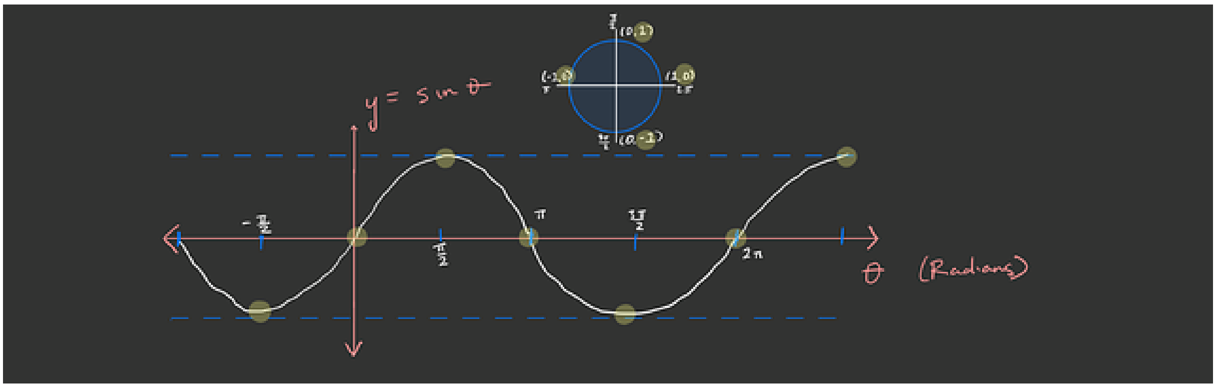
Chapitre 7 : trigonométrie



qu'est-ce que le sinus, le cosinus et la tangente par Ben Sparks - petit tour de magie avec le nombre 5

1 découverte des fonctions trigonométriques

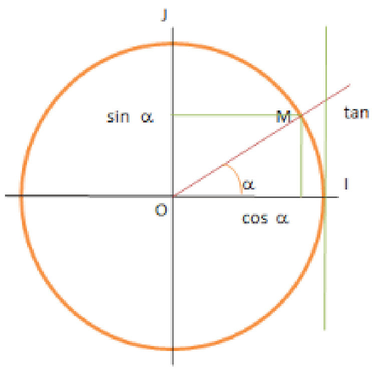
1.1 déplacement d'1 point sur 1 cercle

simulation

- voici la simulation du déplacement d'1 point sur 1 cercle

définition

- le **cercle trigonométrique** est le cercle de centre $O(0;0)$ et de rayon 1
- le **sens trigonométrique** est le sens inverse des aiguilles d'1 montre
- $M(x)$ 1 point pouvant se déplacer sur le cercle
- x correspond à l'angle (en radian) $\widehat{IOM}$ (enroulement de la droite $\mathbb{R}$ sur le cercle)



- comme vu dans la simulation supra, le déplacement de M sur le cercle définit 3 fonctions :
  - **sinus** : ordonnée du point M, notée $x \mapsto sin(x)$
  - **cosinus** : abscisse du point M, notée $x \mapsto cos(x)$
  - **tangente** : $T = (OM) \cap (x = 1)$ où (x=1) est la tangente en I, , notée $x \mapsto tan(x)$

1.2 premières propriétés

propriété visuelle

- $\forall x \in \mathbb{R}\,,\ -1 \leq \sin x \leq 1$ **preuve** :
- $\forall x \in \mathbb{R}\,,\ -1 \leq \cos x \leq 1$ **preuve** :
- $\forall x \in \mathbb{R}\,,\ \sin^2 x + \cos^2 x = 1$ **preuve** :
- $x \mapsto tan(x)$ est définie sur $\mathbb{R} \backslash \{n\frac{\pi}{2} \,|\, n \in \mathbb{Z}\}$ **preuve** :
- $\forall x \in D_{tan}\,,\ \tan x \in \mathbb{R}$ **preuve** :

valeurs de sinus cosinus tangente à retenir

$x\,(rad)$	$x\,(°)$	$\sin x$	$\cos x$	$\tan x$
0	0	0	1	0
$\frac{\pi}{2}$	90	1	0	∞
$\frac{\pi}{6}$	30	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
$\frac{\pi}{3}$	60	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	45	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1
π	180	0	-1	0

preuve :

1.3 formule de transformation

transformer l'angle $-x$

- $\sin(-x) = -\sin(x) \Longrightarrow$ c'est 1 fonction impaire
- $\cos(-x) = \cos(x) \Longrightarrow$ c'est 1 fonction paire
- $\tan(-x) = -\tan(x) \Longrightarrow$ c'est 1 fonction impaire

preuve immédiate : (faire 1 graphique)

transformer ($\sin$ en $\cos$) ou ($\cos$ en $\sin$) avec $\frac{\pi}{2} - x$

- $\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos(x)$
- $\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin(x)$
- $\tan(\frac{\pi}{2} - x) = \frac{1}{\tan(x)}$

preuve immédiate : (faire 1 graphique)

transformer l'angle $x + \frac{\pi}{2}$

- $\sin(x + \frac{\pi}{2}) =$
- $\cos(x + \frac{\pi}{2}) =$
- $\tan(x + \frac{\pi}{2}) =$

preuve immédiate : (faire 1 graphique)

transformer l'angle $\pi + x$

- $\sin(\pi + x) =$
- $\cos(\pi + x) =$
- $\tan(\pi + x) =$

preuve immédiate : (faire 1 graphique)

transformer l'angle $\pi - x$

- $\sin(\pi - x) =$
- $\cos(\pi - x) =$
- $\tan(\pi - x) =$

preuve immédiate : (faire 1 graphique)

2 étude des fonctions trigonométriques

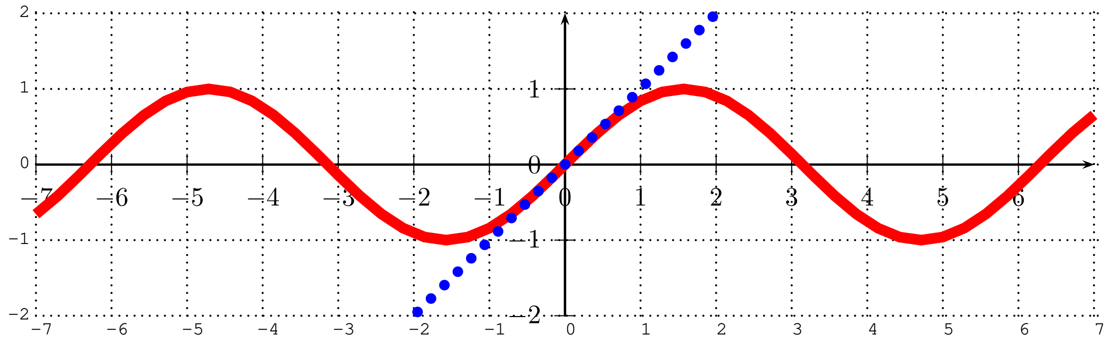
2.1 étude de $x \mapsto \sin x$

propriété

- $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & [-1\,;1] \\ x & \longrightarrow & \sin x \end{array} \right.$
- elle est impaire et périodique, de période 2π
- $(\sin x)' = \cos x$

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
signe de $\cos(x)$		$+$	0	$-$	
variation de $\sin(x)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

graphique



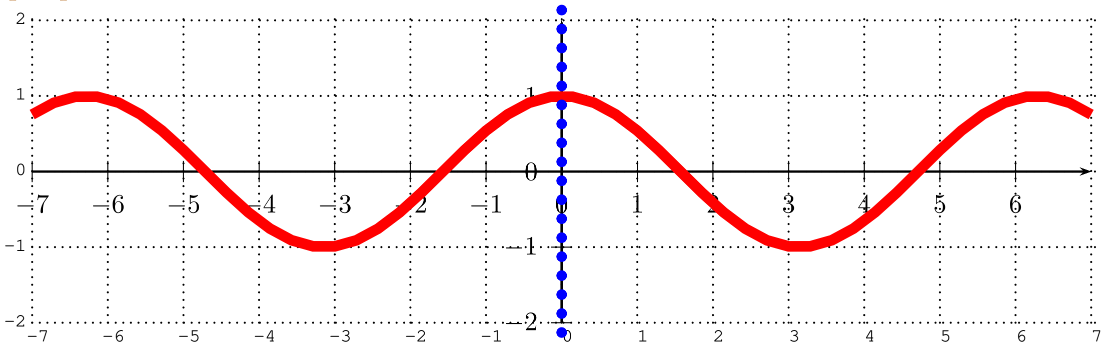
2.2 étude de $x \mapsto \cos x$

propriété

- $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & [-1\,;\,1] \\ x & \longrightarrow & \cos x \end{array} \right.$
- elle est paire et périodique, de période 2π
- $(\cos x)' = -\sin x$

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$-\sin(x)$		$-$	
$\cos(x)$	1 ↘	0 ↘	-1

graphique



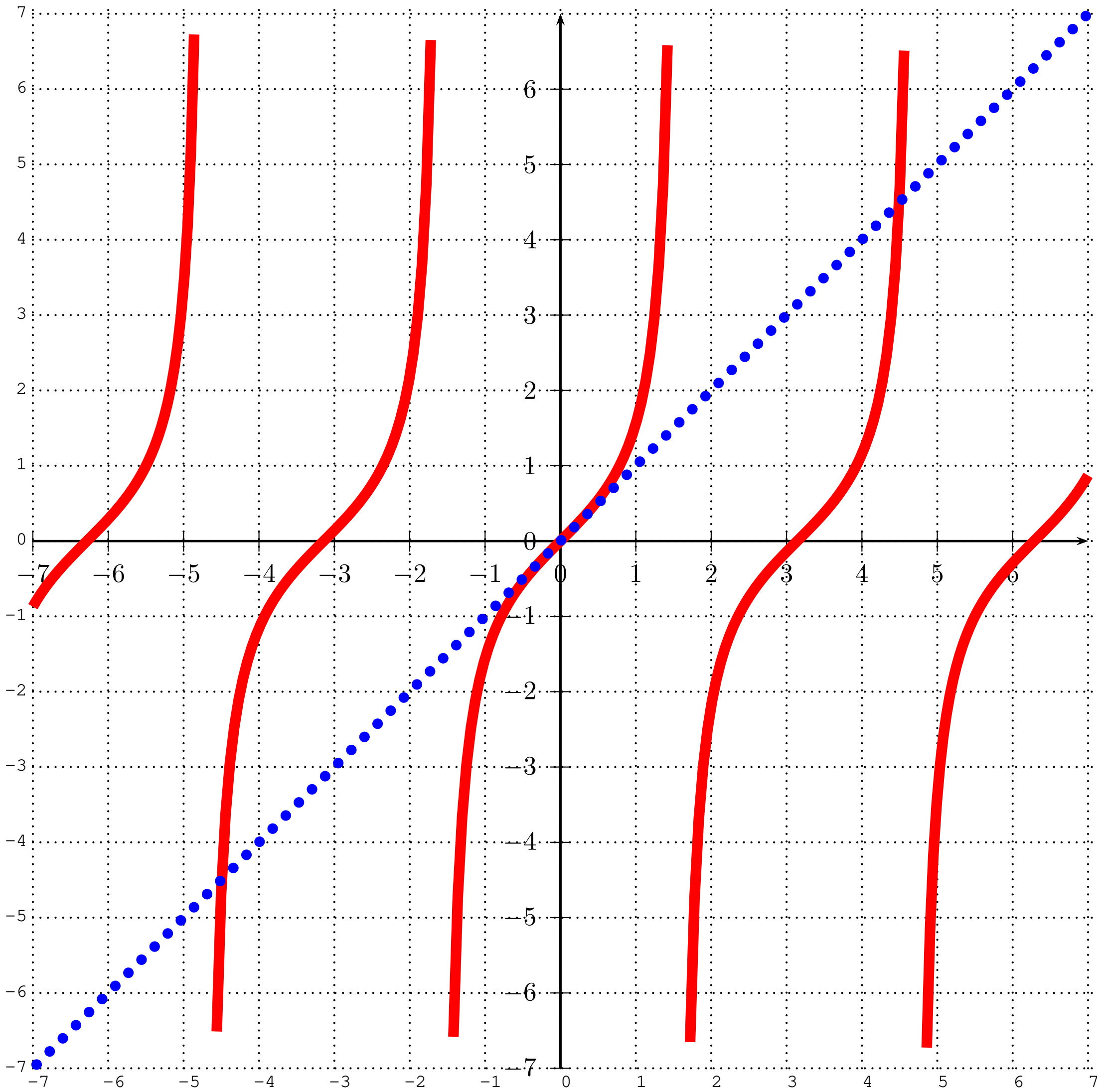
2.3 HP : étude de $x \mapsto \tan x$

propriété

- $f : \left| \begin{array}{rcl} \mathbb{R}\backslash\{n\frac{\pi}{2}\,|\,n \in \mathbb{Z}\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow & \tan x \end{array} \right.$
- elle est impaire et périodique, de période π
- $(\tan x)' = 1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

x	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$
$1+\tan^2 x$		$+$	
$\tan(x)$	$-\infty$ ↗	0 ↗	$+\infty$

graphique



2.4 un peu de geogebra ou python

retour sur la simulation de Ben Sparks

grâce à geogebra ou python, réaliser la simulation pour :

- 2 points
- 3 points
- 10 points
- on pourra s'inspirer de ce qu'a pu faire Ben Sparks