Chapitre 2 - Suite Numérique

encyclopédie en ligne des suites connues

1 généralité sur les suites

1.1 qu'est-ce qu'une suite, comment la définir ?

vocabulaire et notation

- 1 suite $u = (u_n)_{n\geq 0}$ est 1 liste de nombres qui peut être vu comme 1 fonction $u : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$
- u (qui est donc 1 fonction) est le **nom de la suite**
- $n \in \mathbb{N}$ est son **indice** ou son **rang** ; il permet de déterminer la position de chaque nombre dans la liste
- $u_n \in \mathbb{R}$ est le **terme générique** de la suite

exemple - calcul de termes - calculatrice

- **ex 1 :** $(u_n) = (-1)^n$ pour $n \in \mathbb{N}$ (suite explicite)

- **ex 2 :** $(u_n) = (\dfrac{1}{n-5})$ pour $n \geq 6$ (suite explicite)

- **ex 3 :** (u_n) tel que : $u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + 1}$ et $u_0 = 1$ (suite implicite)

1.2 représentation d'une suite (u_n)

suite définie de façon explicite

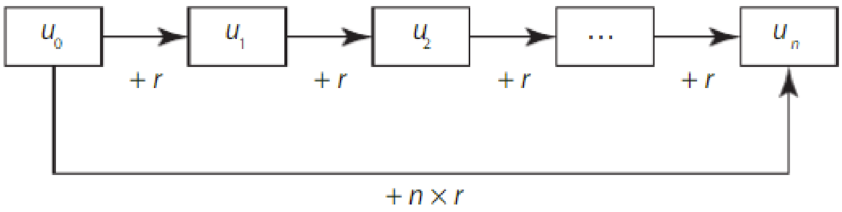
suite définie de façon implicite

2 suite arithmétique

2.1 définition et ex

définition

- (u_n) est 1 suite arithmétique si $\forall n \geq 0 : u_{n+1} = u_n + r$ où $r \neq 0$
- r est appelée la raison de la suite (u_n)
- concrètement, on passe d'un terme à l'autre en ajoutant le nombre r



exemple

- N
- l'ensemble des entiers naturels pairs
- l'ensemble des entiers naturels impairs
- $(u_n) = \begin{cases} u_0 & = 10 \\ u_{n+1} & = u_n + 4 \, , \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$ (définition implicite de la suite)

question

- pourquoi la suite 1 5 10 15 20 ... n'est pas une suite arithmétique ?
- déduire 1 méthode simple pour prouver qu'1 suite est arithmétique :

2.2 propriété importante

expression explicite et somme de termes consécutifs

- soit $(u_n) = \begin{cases} u_0 & \\ u_{n+1} & = u_n + r \, , \forall n \in \mathbb{N} \text{ où } r \neq 0 \end{cases}$
- $\boxed{u_n = u_0 + n \times r \, , \forall n \in \mathbb{N}}$
- $\boxed{\sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n = \frac{u_0 + u_n}{2} \times (n+1)}$
- $\sum_{k=p}^{q} u_k = u_p + u_{p+1} + u_{p+1} + ... + u_q = \frac{premier\_terme + dernier\_terme}{2} \times Nbre\_de\_termes$
(cette formule généralise la formule précédente et reste relativement simple à retenir)

exemple

- calculer la somme des nombres de 1 à 100 : $\sum_{k=1}^{100} k$

- calculer la somme des nombres pairs entre 0 à 100 (et écrire cette somme avec le signe $\sum$)

- calculer la somme des nombres impairs entre 0 à 100 (et écrire cette somme avec le signe $\sum$)

- calculer la somme des nombres de 1 à n (et écrire cette somme avec le signe $\sum$)

=> ce dernier résultat est à connaître par coeur

comme dirait Gauss : la preuve est là - lol !

2.3 rédaction attendue au devoir

monter que (u_n) est arithmétique

monter que (u_n) n'est pas arithmétique

2.4 représentation graphique

ex 1 : $(u_n) = \begin{cases} u_0 & = 10 \\ u_{n+1} & = u_n + 4\,,\ \forall\, n \in \mathbb{N} \end{cases}$ (définition implicite de la suite)

- montrer que (u_n) est arithmétique
- donner l'expression explicite de la suite
- calculer les premiers termes (en utilisant la calculatrice facile ...)
- tracer sa représentation graphique ; que constate-t-on ; équation du support de la suite ?

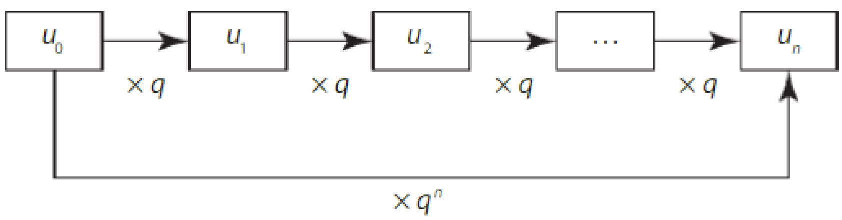
ex 2 : même question avec $(u_n) = \begin{cases} u_0 & = 5 \\ u_{n+1} & = u_n - 2\,,\ \forall\, n \in \mathbb{N} \end{cases}$ (définition implicite de la suite)

3 suite géométrique

3.1 définition et ex

définition

- (u_n) est 1 suite géométrique si $\forall n \geq 0 : u_{n+1} = q \times u_n$ où $q \neq 1$
- q est appelée la raison de la suite (u_n)
- concrètement, on passe d'un terme à l'autre en multipliant le nombre q



exemple

- $(2^n)_{n\geq 0}$
- $((-1)^n)_{n\geq 0}$
- $(u_n) = \begin{cases} u_0 & = 10 \\ u_{n+1} & = 4 \times u_n\,,\ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$ (définition implicite de la suite)
- $(v_n) = \begin{cases} v_0 & = -2 \\ v_{n+1} & = \dfrac{v_n}{3}\,,\ \forall n \in \mathbb{N} \text{ où } q \neq 1 \end{cases}$

question

- trouver une méthode simple pour prouver qu'une suite est arithmétique :

3.2 propriété (très) importante

- dans la pratique, les suites géométriques sont plus utilisées que les suites arithmétiques
- vous devez donc bien connaître les formules associées et savoir les démontrer facilement

expression explicite et somme de termes consécutifs

- soit $(u_n) = \begin{cases} u_0 & \\ u_{n+1} & = q \times u_n\,,\ \forall n \in \mathbb{N} \text{ où } q \neq 1 \end{cases}$
- $\boxed{u_n = u_0 \times q^n\,,\ \forall n \in \mathbb{N}}$
- $\boxed{\sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n = u_0 \times \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}}$
  => pour savoir si c'est q^n ou q^{n+1}, penser : puissance = Nbre_de_termes

exemple

- calculer, de 2 façons, la somme des puissances de 2 jusqu'à 100 : $\sum_{k=0}^{100} 2^k$

- calculer la somme des puissances de q de 0 à n (et écrire cette somme avec le signe $\sum$)

  => ce dernier résultat est à connaître par coeur

preuve

- <u>ex d'utilisation (approfondissement) :</u>
  - <u>notion de développements limités</u>
    - expliquer comment nous pourrions tracer une approximation la courbe de fonction $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ au voisinage $x = 0$ en utilisant des polynômes ...
    - cette méthode très fructueuse est utilisée par votre calculatrice pour "casser les fonctions complexes" de type racine, cosinus, sinus, exponentielle ... en un famille de fonction simples et malléables : les polynômes ...
  - <u>ordre ou paquet dans une somme</u>
    - alors que l'ordre de sommation ou la réalisation de paquet de nombres dans une somme **finie** n'a pas d'importance, on peut se demander si c'est toujours le cas pour une somme **infinie** ? (réponse oui) ; arrive-t-on au même résultat ? (réponse : pas forcément) ; quelle valeur choisir ? (réponse : ça dépend du problème posé, et là ça peut devenir très dur ...)
    - ex 1 : $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k$
      - cette somme infinie qui est : $1 - 1 + 1 - 1$ ... DIV réarrangée : $(1 - 1) + (1 - 1)$ ... $= 0$
    - ex 2 : la série harmonique $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}$
      - cette somme infinie qui est : $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$ ... DIV
      - mais réarrangée : $(1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4})$ ... CV
  - <u>on retiendra que :</u>
    - l'ordre et les paquets ont une importance
    - la notation $\sum$ est claire : on doit additionner les nombres dans l'ordre et un par un

3.3 représentation graphique

- **ex 1 :** $(u_n) = \begin{cases} u_0 & = 3 \\ u_{n+1} & = 4 \times u_n \text{ , } \forall\, n \in \mathbb{N} \end{cases}$ (définition implicite de la suite)
- donner l'expression explicite de la suite
- calculer les premiers termes (en utilisant la calculatrice facile ...)
- tracer sa représentation graphique ; que constate-t-on ? équation du support de la suite ?

- **ex 2 :** même question avec $(u_n) = \begin{cases} u_0 & = 10 \\ u_{n+1} & = 0.5 \times u_n \text{ , } \forall\, n \in \mathbb{N} \end{cases}$ (définition implicite de la suite)

4 sens de variation de la suite

4.1 définition et ex

définition - propriété

(u_n) est **croissante** : $u_{n+1} \geq u_n$, $\forall n \geq 0 \Longleftrightarrow \boxed{u_{n+1} - u_n \geq 0}$

(u_n) est **strictement croissante** : $u_{n+1} > u_n$, $\forall n \geq 0 \Longleftrightarrow \boxed{u_{n+1} - u_n > 0}$

(u_n) est **décroissante** : $u_{n+1} \leq u_n$, $\forall n \geq 0 \Longleftrightarrow \boxed{u_{n+1} - u_n \leq 0}$

(u_n) est **strictement décroissante** : $u_{n+1} < u_n$, $\forall n \geq 0 \Longleftrightarrow \boxed{u_{n+1} - u_n < 0}$

(u_n) est **monotone** : (u_n) est croissante ou décroissante (attention, pas les deux)

(u_n) est **strictement monotone** : (u_n) est strict. croissante ou strict. décroissante (pas les deux)

(u_n) est **constante** : toutes les termes ont la même valeur

remarque : toutes ces propriétés concernant la suite peuvent être définies, soit pour tous les termes de la suite, soit à partir d'un certain rang qu'il faudra alors préciser

propriété spécifique

(u_n) est à termes strictement positifs :

- (u_n) est **strict. croissante** $\iff \dfrac{u_{n+1}}{u_n} > 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$
- (u_n) est **strict. décroissante** $\iff \dfrac{u_{n+1}}{u_n} < 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$

(u_n) est une suite arithmétique :

- (u_n) est **(resp. strict.) croissante** $\iff r \geq 0$ (resp. r>0)
- (u_n) est **(resp. strict.) décroissante** $\iff r \leq 0$ (resp. r<0)

(u_n) est une suite géométrique :

- (u_n) est **(resp. strict.) croissante** $\iff r \geq 1$ (resp. q>1)
- (u_n) est **(resp. strict.) décroissante** $\iff 0 \leq q \leq 1$ (resp. 0<q<1)

analyse de qq ex

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier $n \geqslant 1$ par $u_n = \dfrac{2^n}{n}$

1. Calculer $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$

2. Résoudre l'inéquation $\dfrac{2n}{n+1} > 1$

3. En déduire les variations de la suite (u_n)

Déterminer le sens de variation des suites suivantes.

a) (u_n) est une suite géométrique de raison 2 et de premier terme $u_0 = 3$

b) (v_n) est définie par $v_0 = -2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = 0{,}5 \times v_n$

5 limite d'une suite

5.1 définition

- la limite d'une suite (u_n) consiste à analyser le comportement de la suite lorsque $n \longrightarrow +\infty$
- **limite finie** : (u_n) admet une limite finie $a \in \mathbb{R}$ ce que l'on note $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = a$
- **limite infini +** : (u_n) tend vers $+\infty$ ce que l'on note $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$
- **limite infini -** : (u_n) tend vers $-\infty$ ce que l'on note $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$

exemples

Conjecturer, si elle existe, la limite des suites dont certaines valeurs sont données ci-dessous.

a) $u_1 = -1$, $u_{10} = -20$, $u_{1000} = -4\,000$, $u_{10000} = -5\,000$
b) $v_1 = 3$, $v_{10} = -2$, $v_{100} = 3$, $v_{1000} = -2$, $v_{10000} = 3$
c) $w_1 = -1$, $w_{100} = -1{,}95$, $w_{1000} = -1{,}98$, $w_{10000} = -1{,}99$

Conjecturer la limite des suites ci-dessous.

a) la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = n$
b) la suite (v_n) définie pour tout entier $n \geqslant 1$ par $v_n = \dfrac{1}{n}$

6 Exploring maths

6.1 sequence exercices

- ex1 : you have a log which is 7 m long; how long does it take to cut the log into pieces 1 m long, assuming that a single cut takes half a minute?
- ex2 : how many subset does the set $1, 2, 3, ..., n$ have?

- ex3 : in how many ways can you cover a rectangle of size $2 \times n$ with dominoes of size 1×2 ?

- ex4 : suppose you draw n straight lines in the plane, no 2 of which are parallel and no 3 of which meet at a point ; these lines subdivide the plane regions ; how many regions are there ? (use ex1)

- ex5 :
  - you can have an explicite answer to the so-called fibonacci sequence (a_n)
    $a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \times ((\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n+1} - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{n+1})$
  - in 1961, independently, (kasteleyn) and (temperly & fisher) solved the more general problem of tilings for an arbitrary rectangle of size $m \times n$: $\sqrt{2} \prod_{j=1}^{m} \prod_{k=1}^{n} (\cos^2 \frac{j\pi}{m+1} + \cos^2 \frac{k\pi}{n+1})^{\frac{1}{4}}$
  - strange cos , root and fraction appear in the result to give us an interger !

- ex6 : let's have fun on the fibonacci sequence

6.2 python : la mystérieuse suite de syracuse

- télécharger le tp_syracuse
- vidéo : programmer en python la suite
- vidéo approfondissement : limite de cette suite

6.3 exercice recherche

- trouver l'expression de a_n tel que : $(a_n) = \begin{cases} a_1 & = 2 \\ a_2 & = 6 \\ a_{n+1} & = \dfrac{a_n}{a_{n-1}} \text{ , } \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$ (définition implicite de la suite)
- solution