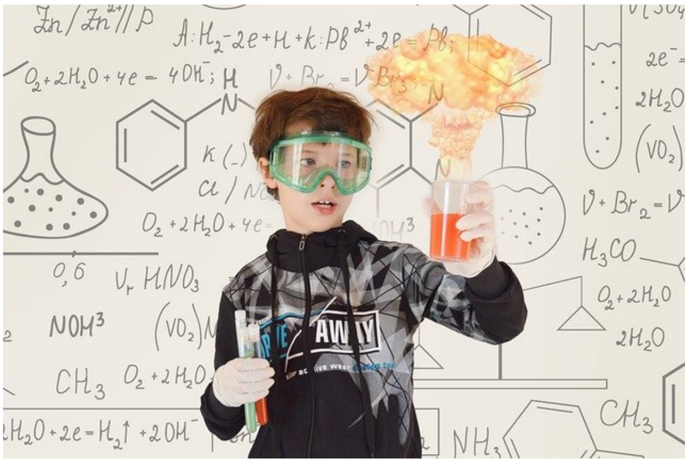
Chapitre 8 - VAR : variable aléatoire réelle



définition simple d'1 VA - définition d'1 espace probabilisé et d'1 var (dur mais précis)

remarque

- les termes tribu ou σ-algèbre sont HP
- l'espace initial Ω sera donc toujours probabilisé avec l'ensemble de ses parties $\mathcal{P}(\Omega)$

1 VAR

1.1 rappel : espace probabilisé

définition précise

1 espace probabilisé est 1 triplet $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), p)$ où :

- Ω est l'univers (l'ensemble des possibles)
- $\mathcal{P}(\Omega)$, l'ensemble des parties Ω
- p est 1 fonction telle que :
  1. $p : \mathcal{P}(\Omega) \mapsto [0, 1]$
  2. $p(\Omega) = 1$ et $p(\emptyset) = 0$
  3. $\forall I$ dénombrable, $\forall A_i$ disjoints 2 à 2 : $p(\bigcup\limits_{i \in I} A_i) = \sum\limits_{i \in I} p(A_i)$

explication de la définition - vulgarisation

1 espace probabilisé est 1 triplet $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), p)$ où :

- Ω est l'univers (ce qui peut arriver)
- $\mathcal{P}(\Omega)$ les parties de Ω
  - $\mathcal{P}(\Omega)$ est stable par passage au complémentaire, réunion et intersection
  - on peut maintenant créer la fonction p
- p est la fonction de probabilité proprement dite :
  1. elle associe à chaque élément de $\mathcal{P}(\Omega)$ sa probabilité d'arriver
  2. p prend donc des valeurs entre 0 et 1
  3. de plus, $p(\Omega) = 1$ et $p(\emptyset) = 0$

1.2 VAR

définition d'1 VAR

- $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), p)$ 1 espace probabilisé
- 1 VAR X sur Ω est 1 fonction $X : \mathcal{P}(\Omega) \mapsto \mathbb{R}$
- c'est donc 1 fonction qui a 1 élément de Ω associe un réel

loi de probabilité associé à 1 VAR

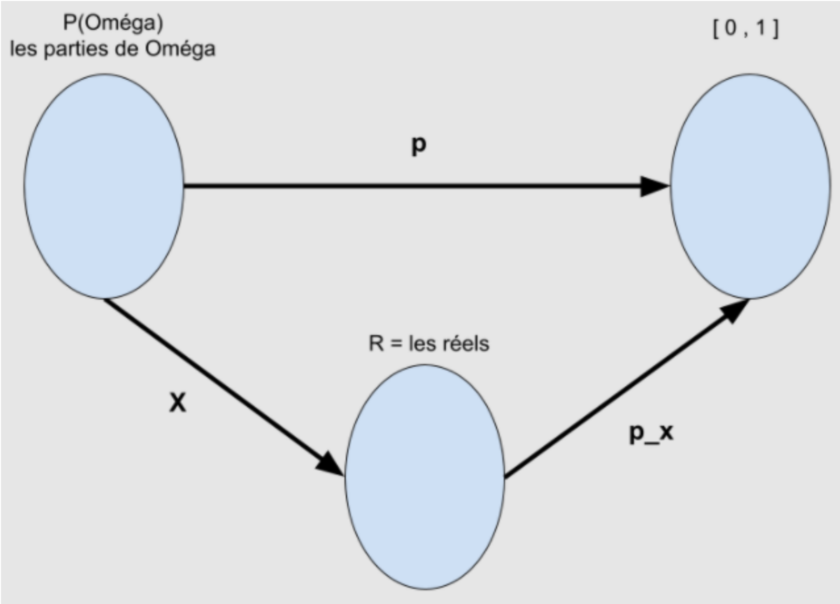
- $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), p)$ 1 espace probabilisé
- X 1 VAR sur Ω
- la loi de probabilité associée à X est la loi qui va découler du fait que l'espace Ω est lui déjà probabilisé
- voyons 2 exemples pour comprendre ce qui se passe

ex1 : résultat pair ou impair d'1d6

ex1 : somme de 2 dés

bilan :

- la VAR X donne naissance à 1 nouvel espace probabilisé $(\mathbb{R}\ ,\ \mathcal{P}(\mathbb{R})\ ,\ p_X)$
- voici maintenant le lien entre p et p_X :



- $X : \mathcal{P}(\Omega) \mapsto \mathbb{R}$
- $X^{-1} : \mathbb{R} \mapsto \mathcal{P}(\Omega)$
- $p : \mathcal{P}(\Omega) \mapsto [\,0\,,\,1\,]$
- $p_X : \mathbb{R} \mapsto [\,0\,,\,1\,]$

  comme $p = p_X \circ X$, on a : $\boxed{p_X = p \circ X^{-1}}$

pour aller plus loin : la statistique expliquée à mon chat

1. VA
2. opération sur les VA
3. type de VA
4. TCL

1.3 espérance - variance - écart-type

- $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$, 1 espace probabilisé
- X 1 VAR qui opère sur Ω
- $\mathcal{E}$ l'ensemble de ses valeurs prises par X (ici dans $\mathbb{R}$)
- $n = |\mathcal{E}|$ le cardinal de $\mathcal{E}$
- p_X la loi de probabilité associée à X

définition

- **espérance** : $\mathbb{E}(X) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_i \times x_i$ qui traduit la valeur "moyenne" des valeurs de X
- **variance** : $\mathbb{V}(X) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_i \times (x_i - \mathbb{E}(X))^2$
- **écart type** : $\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}(X)}$ qui traduit comment cela "bouge" autour de la moyenne

propriété

- $\mathbb{E}(a \times X + b)) = a \times \mathbb{E}(X) + b$
- $\mathbb{V}(a \times X + b) = a^2 \times \mathbb{V}(X)$
- $\sigma(a \times X + b) = |a| \times \sigma(X)$

loi des grands nombres

- LGN : lorsqu'on crée 1 échantillon de taille suffisamment grand de valeurs prises par une VA, la moyenne de ses valeurs tend vers l'espérance de cette VA
- application : estimation de la probabilité associée à 1 VA suivant 1 loi de bernoulli

1.4 un peu de python

quelques exercices (corrigés) pour progresser en python

estimer 1 probabilité rapidement par grâce à 1 programme python