

Chapitre 9 : produit scalaire



utilisation du produit scalaire

1 produit scalaire : le cours

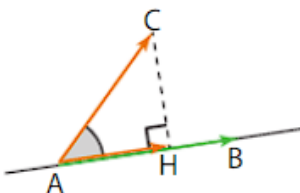
1.1 définition - notation - propriété

rappel - notation

- soit $\vec{u} \begin{vmatrix} a \\ b \end{vmatrix}$ et $\vec{v} \begin{vmatrix} c \\ d \end{vmatrix}$
- norme (longueur) : $\|\vec{u}\| = \sqrt{a^2 + b^2}$
- angle de 2 vecteurs : l'angle que forment les \vec{u} et \vec{v} est noté $(\widehat{\vec{u}; \vec{v}})$
- $\cos(\widehat{\vec{u}; \vec{v}}) = \cos(\widehat{\vec{v}; \vec{u}})$

définition du produit scalaire

- définition 1 : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\widehat{\vec{u}; \vec{v}})$
- définition 2 : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \begin{vmatrix} a \\ b \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c \\ d \end{vmatrix} = ac + bd$
- définition 3 : $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = AB \times AH$ où H est le projeté orthogonal de C sur (AB)



propriété

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
- si \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires alors :
 - $\vec{u} \cdot \vec{v} = ||\vec{u}|| \times ||\vec{v}||$ si \vec{u} et \vec{v} sont de même sens
 - $\vec{u} \cdot \vec{v} = -||\vec{u}|| \times ||\vec{v}||$ si \vec{u} et \vec{v} sont de sens contraire
 - en effet, $\cos 0 = 1$ et $\cos \pi = -1$
- **propriété importante :**
 - $\vec{u} \perp \vec{v} \iff \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$
 - en effet, $\cos \frac{\pi}{2} = 0$

1.2 application du produit scalaire à la droite**droite : vecteur directeur et vecteur normal**

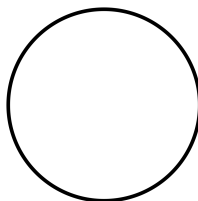
- (d) : $y = ax + b \implies$ vecteur directeur $\begin{vmatrix} 1 \\ a \end{vmatrix}$ et vecteur normal $\begin{vmatrix} -a \\ 1 \end{vmatrix}$
- (d) $ax + by + c = 0 \implies$ vecteur directeur $\begin{vmatrix} -b \\ a \end{vmatrix}$ et vecteur normal $\begin{vmatrix} a \\ b \end{vmatrix}$

droite : parallélisme et orthogonalité

- (d) : $y = ax + b$ et (d') : $y = a'x + b'$
 - $(d) // (d') \iff a = a'$
 - $(d) \perp (d') \iff a \times a' = -1$
- (d) : $ax + by + c = 0$ et (d') : $a'x + b'y + c' = 0$
 - $(d) // (d') \iff a \times b' = b \times a'$ (vecteurs normaux proportionnels)
 - $(d) \perp (d') \iff a \times a' + b \times b' = 0$ (vecteurs normaux normaux donc produit scalaire nul)

1.3 cercle et norme**équation d'un cercle**

- (C) un cercle de centre A $\begin{vmatrix} x_A \\ y_A \end{vmatrix}$ et de rayon r
- M $\begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix}$ un point de ce cercle (C)
- **l'équation de (C) est :**
 - $||\overrightarrow{AM}|| = r \iff ||\overrightarrow{AM}||^2 = r^2 \iff (x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 = r^2$
 - penser à pythagore :



propriété

- $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2 \times \vec{u} \cdot \vec{v}$
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$
- $\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2 \times \vec{u} \cdot \vec{v}$
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2)$
- $\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 = \frac{1}{2}(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 + \|\vec{u} - \vec{v}\|^2)$
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{4}(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2)$

2 produit scalaire : ensemble de points**2.1 lieu mystère 1**

- trouver l'ensemble M des points qui vérifient : $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = 12$

2.2 lieu mystère 2

- trouver l'ensemble M des points qui vérifient : $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$

2.3 lieu mystère 3

- trouver l'ensemble M des points qui vérifient : $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 5$

2.4 lieu mystère 4

- trouver l'ensemble M des points qui vérifient : $MA^2 + MB^2 = 10$

2.5 lieu mystère 5

- trouver l'ensemble M des points qui vérifient : $MA^2 - MB^2 = -16$

2.6 lieu mystère 6

- trouver l'ensemble M des points qui vérifient : $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AM} = 64$

3 produit scalaire : geogebra

3.1 retour sur les lieux de points

- grâce à geogebra et la fonction trace, retrouver (ou découvrir) les lieux de points de 1 à 6 supra