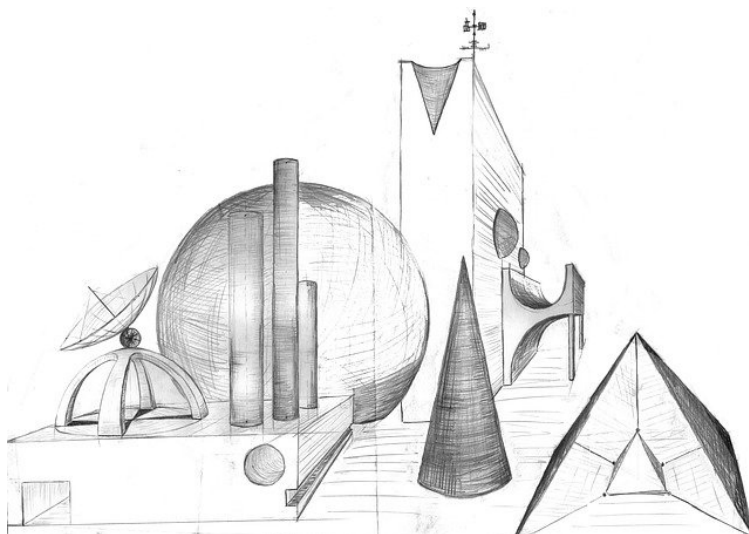


# Chapitre 1 - Second Degré



vidéo résumé du chapitre

## 1 polynôme du 2<sup>nd</sup> degré

### 1.1 fonction polynôme de degré 2 et forme développée

#### Définition

- $f(x) = ax^2 + bx + c$  où  $a \neq 0$  est appelé fonction polynomiale du second degré
- par abus de langage, on pourra dire polynôme du 2<sup>nd</sup> degré
- attention, polynôme et fonction sont des objets différents ...mais c'est une autre histoire ...
- il s'agit de la forme développée de la fonction  $f$
- elle existe toujours et est pratique pour évaluer la fonction (en particulier en 0)
- la courbe associée à cette fonction est une parabole
- on pourra remarquer qu'elle a une bosse (degré 2 - 1 = 1 bosse) ce qui n'est pas un hasard ...

#### Exemple

- ex :  $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$

$$f(1) =$$

$$f(-2) =$$

$$\text{résoudre } f(x) = 1$$

## 1.2 visualisation de $f$ et forme canonique

### Définition

- soit  $f(x) = ax^2 + bx + c$  où  $a \neq 0$
- il existe (toujours) 2 réels  $\alpha$  et  $\beta$  tel que :  $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$
- cette présentation de la fonction  $f$  s'appelle la forme canonique de  $f$
- extrêmement pratique, elle permet de visualiser en un clin d'oeil l'allure de  $f$
- pour trouver  $\alpha$  et  $\beta$ , on appliquera la méthode de reconstitution du carré

### Exemples

- ex 1 :  $f(x) = 3x^2 - 6x + 1$  ; trouver la forme canonique puis tracer l'allure de la fonction

- ex 2 :  $f(x) = -x^2 - 2x - 1$  ; trouver la forme canonique puis tracer l'allure de la fonction

### Preuve

### 1.3 sens de variation

#### Cas $a > 0$

- soit  $f(x) = ax^2 + bx + c$  où  $a > 0$

$x$	$-\infty$	$\alpha = -\frac{b}{2a}$	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\beta = f(\alpha)$	$+\infty$

#### Cas $a < 0$

- soit  $f(x) = ax^2 + bx + c$  où  $a < 0$

$x$	$-\infty$	$\alpha = -\frac{b}{2a}$	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\beta = f(\alpha)$	$-\infty$

#### Exemples à faire

- $f(x) = 3x^2 + 2x + 1$

$x$	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$		

- $f(x) = 3(x+2)^2 + 2$

#### Remarque

- le point de coordonnées  $(\alpha, \beta)$  est le sommet de la parabole
- $f$  présente un axe de symétrie d'équation  $x = \alpha$

## Preuve du sens de variation

## 2 Équation du 2<sup>nd</sup> degré

### 2.1 Définitions

- équation du 2<sup>nd</sup> degré :  $ax^2 + bx + c = 0$  où  $a \neq 0$
- racine (ou zéro) de l'équation : un réel  $t$  tel que  $at^2 + bt + c = 0$

### 2.2 Résolution dans $\mathbb{R}$

#### Méthode

- soit  $f(x) = ax^2 + bx + c$  où  $a \neq 0$
- on calcule  $\Delta = b^2 - 4ac$
- 1<sup>er</sup> cas :  $\Delta > 0$  ; les 2 racines sont alors  $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$
- 2<sup>nd</sup> cas :  $\Delta = 0$  ; la racine double est  $x_1 = -\frac{b}{2a}$  (carré parfait  $\Rightarrow$  identité remarquable)
- 3<sup>ème</sup> cas :  $\Delta < 0$  ; l'équation n'a pas de racine

#### Exemple

- soit  $f(x) = x^2 - 5x + 6$

### Preuve

## 3 quelques propriétés de $ax^2 + bx + c$ où $a \neq 0$

### 3.1 relations coefficients racines

#### Propriété

- soit  $ax^2 + bx + c = 0$  où  $a \neq 0$  et  $\Delta \geq 0$
- les 2 racines sont alors  $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$  (éventuellement identiques si )
- on pose  $S = x_1 + x_2$  et  $P = x_1 \times x_2$
- on a alors :  $ax^2 + bx + c = 0 \iff x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \iff \boxed{x^2 - Sx + P = 0}$
- remarque HP : cette propriété est une propriété générale lié aux polynômes de tous de degré (somme de Newton)

### Preuve

### 3.2 factorisation de $f$

#### Factorisation

- soit  $f(x) = ax^2 + bx + c$  où  $a \neq 0$
- si  $\Delta > 0$  alors  $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$
- si  $\Delta = 0$  alors  $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2$

**Exemple**

- factoriser  $f$  et  $g$

$$f(x) = x^2 - 5x + 6$$

$$g(x) = 3x^2 + 12x - 15$$

**Preuve****3.3 signe de  $f$  grâce à la factorisation de  $f$** **Signe de  $f$** 

- soit  $f(x) = ax^2 + bx + c$  où  $a \neq 0$  et
- si  $\Delta > 0$  alors  $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$  et on a :
  - cas  $a > 0$

$x$	$-\infty$	$x_1$	$x_2$	$+\infty$	
$f(x)$	+	0	-	0	+

- cas  $a < 0$

$x$	$-\infty$	$x_1$	$x_2$	$+\infty$
$f(x)$				

- si  $\Delta = 0$  alors  $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2$  et on a :
  - cas  $a > 0$

$x$	$-\infty$	$x_1$	$+\infty$
$f(x)$	$\vdots$ $0$ $\vdots$		

- cas  $a < 0$

$x$	$-\infty$	$x_1$	$+\infty$
$f(x)$			

- si  $\Delta < 0$  alors  $f(x) = ax^2 + bx + c$  est du signe de  $a$  (ou de  $c$ )
- remarque HP : dans ce dernier cas ( $\Delta < 0$ ), la droite  $y = 0$  appelée hyperplan (dimension de l'espace - 1 = 2-1 = 1 => droite) partage le plan (c'est ici notre espace de travail) en 2 parties de signe distinct ( + et - );  $f$  se situe entièrement dans l'une des 2 parties et est donc soit positive soit négative ; on essaye alors la valeur en 0 pour trouver son signe)

### Exemple

- faire les tableaux de signes de  $f$ ,  $g$  et  $h$

$$f(x) = x^2 - 5x + 6$$

$$g(x) = 3x^2 - 15$$

$$h(x) = x^2 + 2x + 1$$

### Preuve

## Visualisation graphique

## 4 Un peu de python

### 4.1 recherche de racines

---

```
1 from math import sqrt
2
3 def f(a, b, c):
4     #
5     delta = b**2-4*a*c
6     if delta < 0:
7         print("f n'a pas de racines")
8     elif delta == 0:
9         print("f possède une racine double : ",-b/(2*a))
10    else:
11        print("f possède 2 racines distinctes : x1 = ",(-b+sqrt(delta))/(2*a),"et x2 ↔
          = ",(-b-sqrt(delta))/(2*a))
12
13 print(f(1,-5,6))
14 print(f(1,2,1))
15 print(f(1,3,6))
```

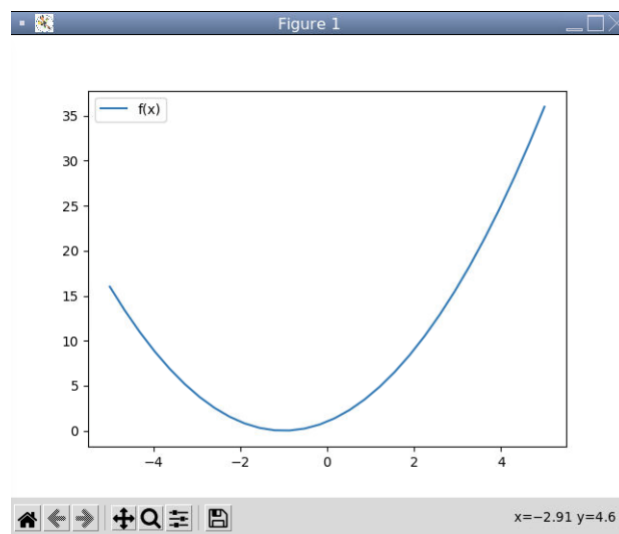
---

- améliorer le programme pour proposer la factorisation (si elle existe)
- proposer un programme qui donne le tableau de signe de f (travailler par intervalle)



## 4.2 tracer une courbe en python

```
1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3
4 def trace_courbes(a, b, c, debut, fin, nbre_de_point):
5     x = np.linspace(debut, fin, nbre_de_point)
6     y_1 = a*x**2+b*x+c
7     # mettre une autre fonction ici
8
9     plt.plot(x, y_1, label="f(x)")
10    # mettre le 2ème tracé ici
11    plt.legend()
12
13    plt.show()
14
15 trace_courbes(1,2,1,-5,5,30)
16 # la figure est pro-active (on peut lire les points en direct)
```



### Tracer une courbe sans python

- utiliser votre calculatrice graphique
- le logiciel gratuit geogebra est aussi un bon outil graphique
- enfin, il existe des traceurs en ligne , par exemple solumaths