Chapitre 3
Probabilité Conditionnelle et Indépendance

les boules de minuit ...

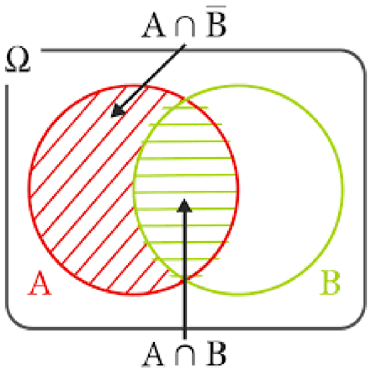
1 probabilité conditionnelle

1.1 vocabulaire de base

vocabulaire et notation

- univers : représente l'ensemble des possibles ; on le note (en général) Ω
- évènement : une partie de Ω
- probabilité : 1 fonction p
  1. $p : \Omega \longrightarrow [0, 1]$
  2. $p(\Omega) = 1$ et $p(\emptyset) = 0$
  3. HP ($\sum$-additivité) : pour tout I dénombrable, et les A_i disjoints 2 à 2, $p(\bigcup\limits_{i \in I} A_i) = \sum\limits_{i \in I} p(A_i)$

représentation graphique



exemple

- définir l'espace probabilisé associé au lancé d'un dé équilibré

- définir l'espace probabilisé associé au lancé d'un dé pipé où le 6 à 2 fois plus de chance de sortir

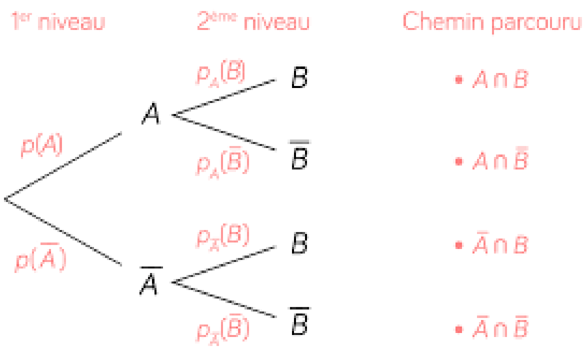
- définir un espace probabilisé associé au lancé de 2 dés équilibrés

1.2 probabilité conditionnelle

définition et propriété

- (Ω, p) un espace probabilisé
- A un évènement tel que : $p(A) \neq 0$
- la probabilité conditionnelle de B si A est la probabilité que B se réalise si A s'est réalisé
- on la note $p_A(B)$ ou $p(B|A)$
- $p_A(B) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(A)}$

ex 1 : représentation graphique via les arbres



ex 2 : cas particulier dimension 2 - représentation via un tableau

	A	$\overline{A}$	Total
B	0,4	0,2	0,6
$\overline{B}$	0,3	0,1	0,4
Total	0,7	0,3	1

exemple

- on tire un objet au hasard dans le stock d'une usine constitué de claviers (C) et de souris (S)
- il y a (à chaque fois) 2 versions : familial (F) ou gamer (G)
- 30 % du stock est constitué de souris
- 40 % des souris sont des gamers
- 63 % du stock est constitué de claviers familiaux
- on tire un objet au hasard dans le stock ; calculer la probabilité que ce soit une souris

- calculer la probabilité qu'une souris produite soit une gamer

- calculer la probabilité de tirer une souris gamer

- calculer la probabilité qu'un clavier produit soit familial

1.3 résolution des exercices de ce type

méthode de résolution

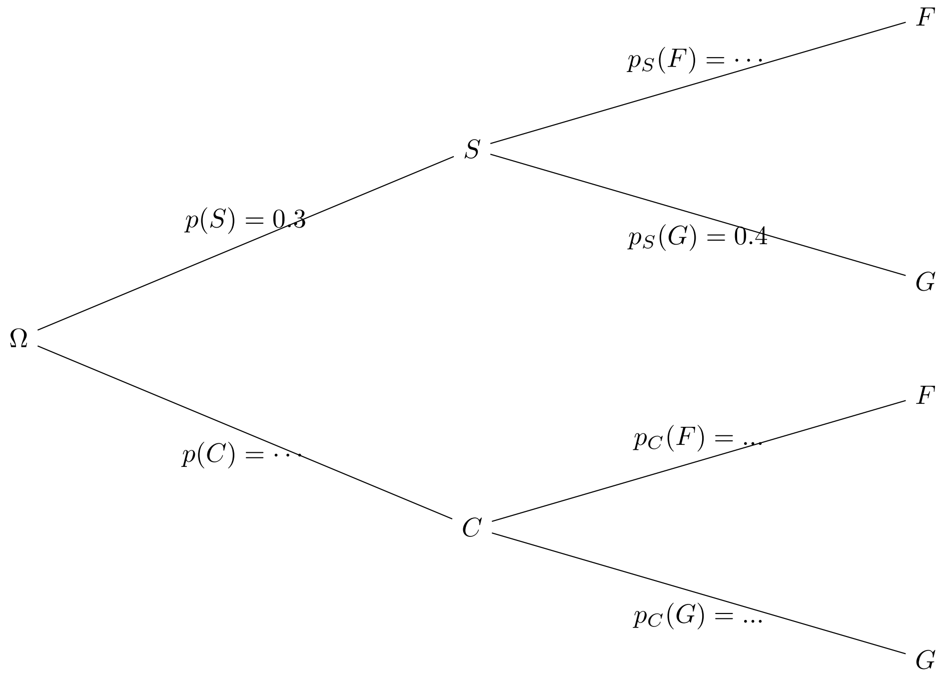
- tous les exercices de ce type se résolvent de la même façon
- il y a 2 calculs très simples à connaître par coeur
- ils utilisent la formule des probabilités totales (voir chapitre suivant)
- grâce à l'énoncé, on construit un arbre (plus ou moins complet) des probabilités puis on calcule ce qui est demandé
- on pourra regarder les 2 vidéos suivantes pour retenir l'essentiel : probabilité conditionnelle et formule des probabilités totales

vision globale : partition ou arbre dual

en reprenant l'exercice précédent, on s'aperçoit que :

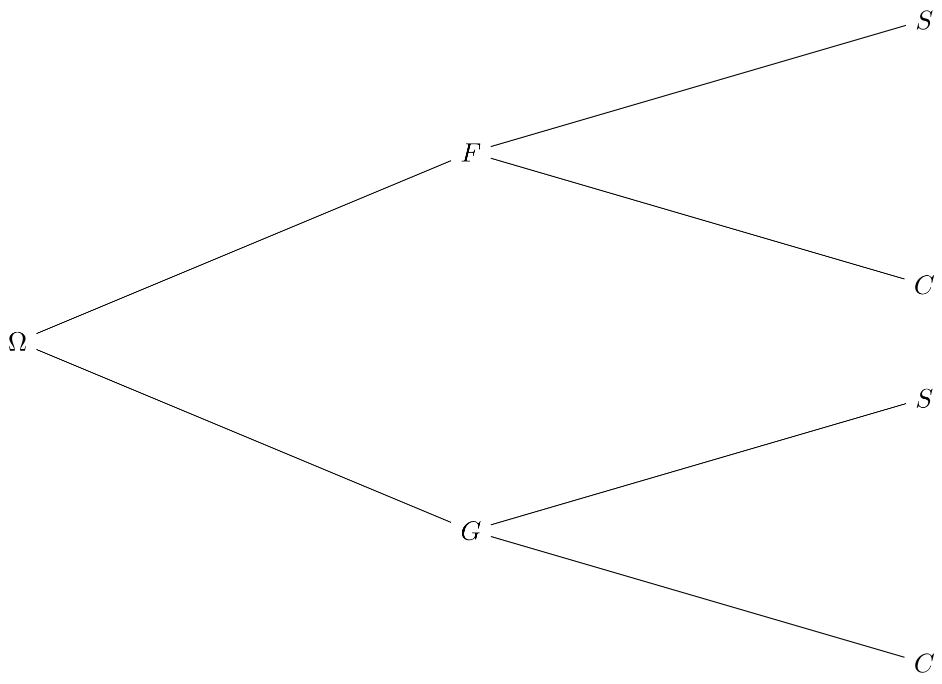
- on peut voir le problème de 2 façons différentes en fonction de comment on choisit de découper Ω au départ (partition de l'univers : voir chapitre suivant)
- l'énoncé du problème vous guide vers l'un des 2 arbres à construire (choix de la première partition)
- les questions sont en général alors liées à l'autre arbre (non construit)

premier arbre (celui que vous pouvez construire) grâce aux informations de l'énoncé



- p(S $\bigcap$ G) = 0.63 est au bout la branche $\Omega - C - F$

deuxième arbre (caché) mais qui est associé aux questions posées



2 formule des probabilités totales

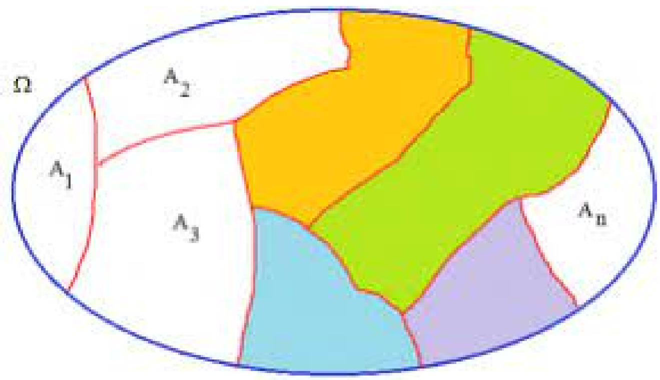
2.1 partition de l'univers Ω

définition

- $n \geq 2$ et A_i où $i \in [1..n]$ une liste d'évènements de Ω
- (A_i) forme 1 partition de l'univers (ou 1 système complet d'évènements) s'elle vérifie 3 conditions :
  - $\forall i \in [1..n]$, $A_i \neq \emptyset$
  - $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} p(A_i) = 1$
  - $\forall i \neq j$, $p(A_i \cap A_j) = 0$

visualisation graphique

l'idée est de découper l'univers d'1 façon libre (et donc d'en choisir 1 intéressante) sans qu'aucune pièce ne se superpose



remarque

- A et $\overline{A}$ constituent une partition simple mais importante de l'univers
- dans 1 arbre pondéré, à chaque noeud vous choisissez 1 partition pour aller à l'étape suivante

2.2 formule des probabilités totales

cas de la partition A et $\overline{A}$

- A un évènement de Ω tq $p(A) \neq \emptyset$
- B un évènement
- on a alors : $p(B) = p(B \cap A) + p(B \cap \overline{A})$

preuve :

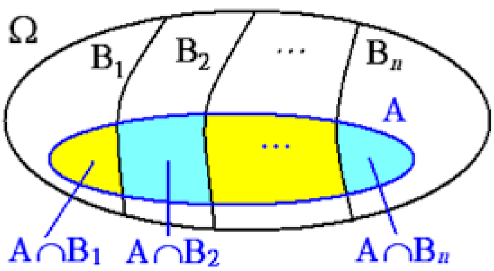
cas général

- $(A_i)_{i \in I}$ une partition de l'univers Ω
- B un évènement
- on a alors : $p(B) = \sum\limits_{i \in I} p(B \cap A_i)$

preuve : immédiate par récurrence (programme de terminale)

visualisation graphique

en gros, A est saucissonné en plusieurs morceaux ; pour calculer $p(A)$, il suffit de recoller les morceaux



on pourra aussi visualiser cette vidéo : formule des probabilités totales

3 indépendance d'évènements

3.1 indépendance de 2 évènements

définition

- A et B 2 évènements de Ω tq $p(A) \neq 0$ et $p(B) \neq 0$
- A et B sont indépendants si $p_A(B) = p(B)$ ou si $p_B(A) = p(A)$
- en gros, A et B sont indépendants si le fait que A se réalise (ou pas) n'a pas d'impact sur la réalisation de B (et vice versa)

exemple

	Adulte	Enfant	Total
Handball	73	174	247
Basket-ball	45	135	180
Gymnastique	14	87	101
Total	132	396	528

- A : la personne est adulte
- B : la personne pratique le basket-ball
- mq A et B sont indépendants

3.2 indépendance et intersection

propriété caractéristique

- A et B 2 évènements de Ω tq $p(A) \neq 0$ et $p(B) \neq 0$
- A et B sont indépendants $\iff p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$

preuve : immédiate via l'arbre des probabilités

exemple

- on reprend l'exercice précédent
- A : la personne est adulte
- B : la personne pratique le basket-ball
- mq A et B sont indépendants, cette fois-ci en construisant l'arbre des probabilités

3.3 indépendance et évènement contraire

propriété

- A et B 2 évènements indépendants, alors :
- A et $\overline{B}$ sont aussi indépendants (idem pour $\overline{A}$ et $\overline{B}$)

preuve :

3.4 expériences et/ou épreuves indépendantes

définition

- (rappel) 1 expérience aléatoire (EA) est 1 expérience qui a les propriétés suivantes :
  - on ne connaît pas à l'avance le résultat de l'expérience (hasard)
  - les cas possibles (issues de l'EA) ainsi que leurs probabilités sont fixes (mais pas forcément connues)
  - on peut la répéter indéfiniment à l'identique (dans les mêmes conditions)
- lorsque l'on réalise successivement plusieurs EA indépendantes, on parle d'expériences indépendantes (ou d'épreuves indépendantes) si le résultat de l'une ne dépend pas du résultat des précédentes

représentation

- on peut visualiser cette succession d'épreuves indépendantes grâce à un arbre de probabilités
- les épreuves étant indépendantes, chaque branche est associée à 1 probabilité non conditionnelle
- dans le cas de 2 épreuves, on pourra aussi utiliser un tableau double entrée, souvent plus pratique

3.5 un peu de python

un exercice important : somme de 2 dés

somme des 2 dés

à vous de jouer : produit de 2 dés

faire un programme permettant d'obtenir la loi de probabilité associée à la variable aléatoire X = produit du résultat du lancé aléatoire de 2 dés