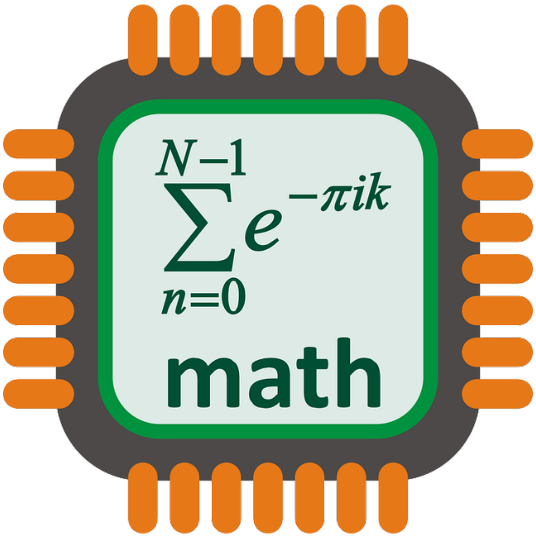
Chapitre 6 : $x \longrightarrow e^x$



l'histoire du nombre e - number e history

1 la fonction exponentielle

1.1 unicité

définition de la fonction exponentielle

- **problème :** trouver les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ tq :

$$\begin{cases} f(0) = 1 \\ f' = f & \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

- **existence :** f existe (admis - peut être fait de plusieurs façons mais reste compliqué)
- **unicité :** f est unique
- **notation :** cette fonction unique est notée $x \longrightarrow exp(x)$ ou plus simplement $x \longrightarrow e^x$

preuve de l'unicité

1.2 propriété e^x pour le calcul

$x \longrightarrow e^x$ est solution d'1 problème précis

- $e^0 = 1$
- $\forall x \in R\ :\ (e^x)' = e^x$
- $(e^x)'(0) = 1$

autre propriété de e^x

- $e^{a+b} = e^a \times e^b$
- $e^{-a} = \dfrac{1}{e^a}$
- $e^{a-b} = \dfrac{e^a}{e^b}$
- $(e^a)^b = e^{a\times b}$

HP : 1 remarque importante

- par définition, $\forall n \in \mathbb{N}$, $(e^x)^{(n)}(0) = 1$
- ainsi, par la formule de Taylor en 0 : $e^x = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ et $e = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$

1.3 lien avec les suites géométriques

la suite $(e^{a\times n})_{n\geq 0}$

- rappel : $e^{an} = (e^a)^n$
- $\boxed{\Longrightarrow \forall a \in \mathbb{R}\ ,\ (e^{an})_{n\geq 0} \text{ est 1 SG de raison } e^a}$
- il y a donc 1 passerelle entre exponentielle et SG

les intérêts composés

- plaçons 10 000 à 4% à la banque
  - chaque début d'année la banque verse 4 % d'intérêt
  - ces intérêts vont eux aussi rapporter des intérêts l'année suivante ...
  - d'où le nom d'intérêts composés
- on passe d'1 année à l'autre en multipliant la somme en cours par 1,04
  - $(somme)_{n\geq 0}$ est 1 SG de raison 1.04 et de premier terme 10 000
  - remarquons que $1.04 \simeq e^0.03922$
  - on a donc : $\boxed{somme = 10000 \times 1.04^n = 10000 \times e^{0.03922n}}$
- la somme peut donc être modélisée par 1 fonction exponentielle

2 propriété de la fonction exponentielle

2.1 l'exponentielle est strictement positive

$e^x > 0$

- $\boxed{\forall x \in \mathbb{R} : e^x > 0}$

  preuve :

conséquence

- $\boxed{x \longrightarrow e^x \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}}$

  preuve :

2.2 dérivée composée

propriété

- rappel : $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \times g'(x)$
- appliqué à l'exponentielle : $(e^{f(x)})' = f'(x) \times e^{f(x)}$

exemple

- calculer les dérivées des fonctions suivantes :
  - $f(x) = e^{2x}$
  - $g(x) = e^{-3x+1}$
  - $h(x) = e^{\frac{1}{x}}$
  - $i(x) = e^{\sqrt{2x+1}}$

2.3 un problème ouvert

tangente en 0

- trouver l'équation de la tangente à $x \longrightarrow e^x$ en 0
- mq $x \longrightarrow e^x$ est au-dessus de sa tangente en 0

tangente et exponentielle

- mq $x \longrightarrow e^x$ est au-dessus de ses tangentes (on dit que $x \longrightarrow e^x$ est **convexe** sur $\mathbb{R}$) - solution

3 graphe de la fonction exponentielle

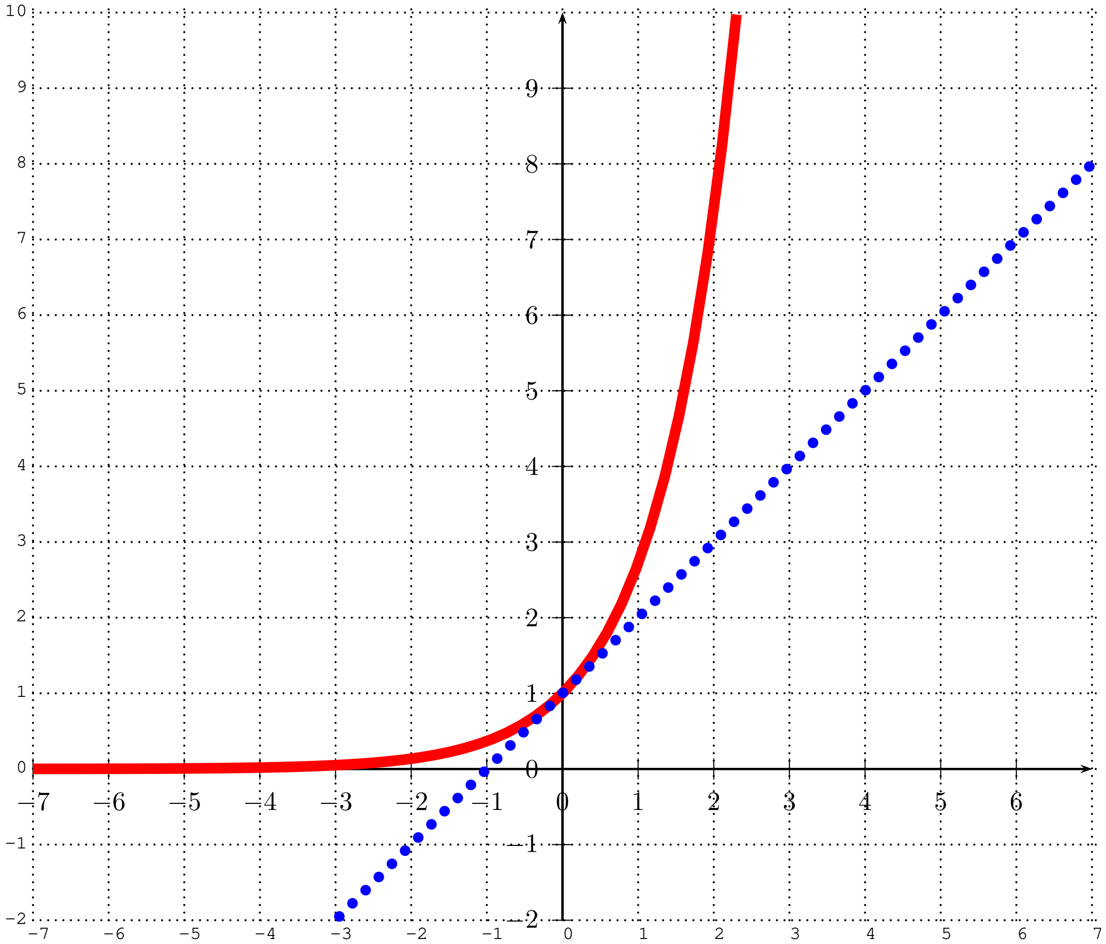
3.1 $x \longrightarrow e^x$

forme algébrique et tableau de valeurs

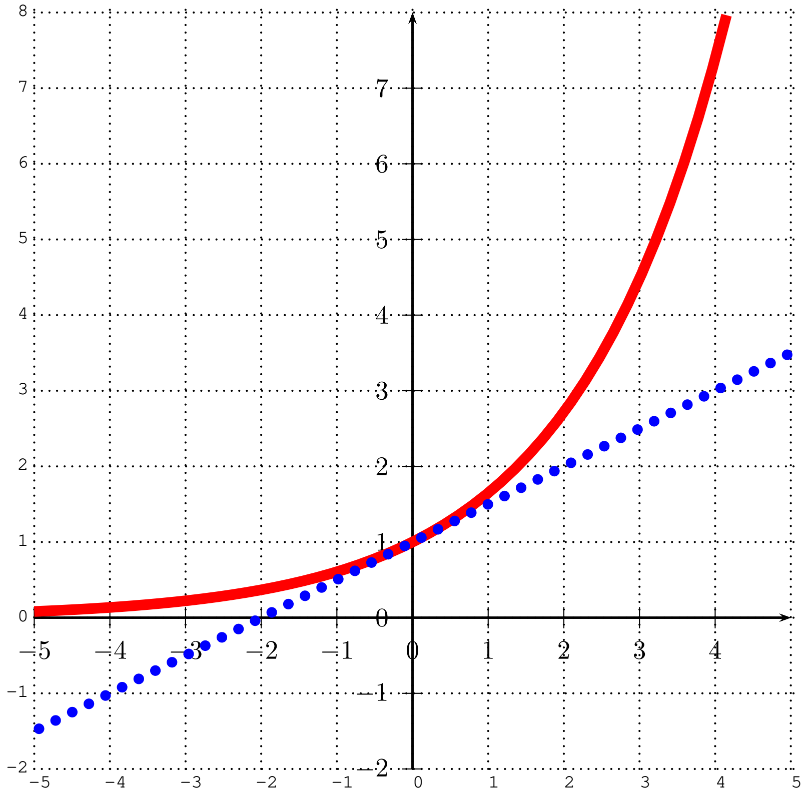
- $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ x & \longrightarrow & e^x \end{array} \right.$
- HP : c'est 1 fonction convexe
-

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
f(x)									

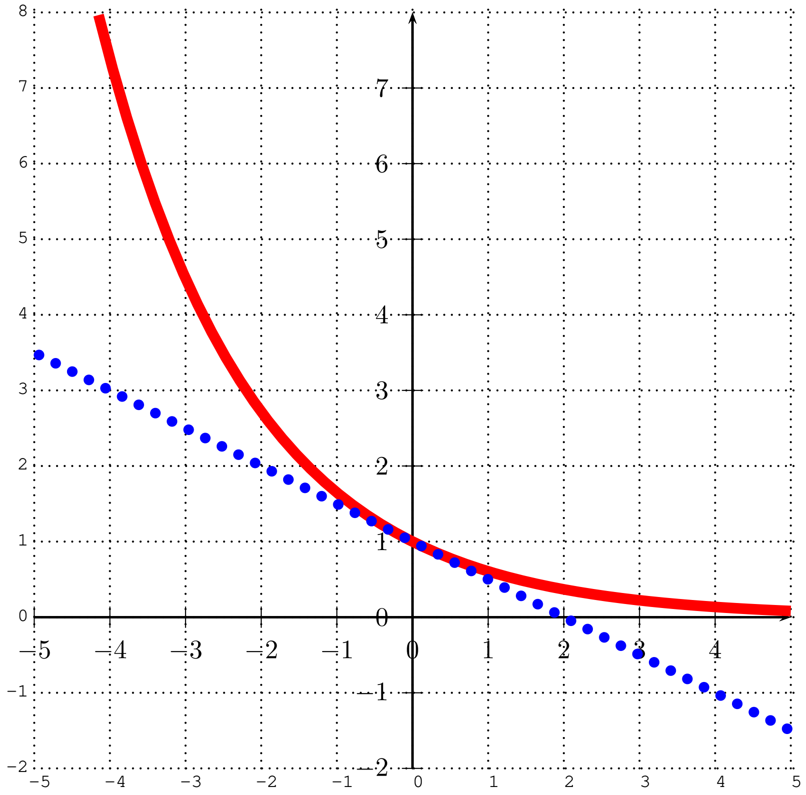
graphique



3.2 $x \longrightarrow e^{ax}$ où a>0



3.3 $x \longrightarrow e^{ax}$ où a<0



3.4 un peu de python

1 autre façon d'écrire 1 nombre : les fractions continues

$$e = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{6 + \ddots}}}}}}}}$$

- une multitude de calculatrice à votre disposition
- mettre e sous forme de fraction continue
- le programme python associé à la calculatrice est fourni ; tester le !
- rechercher l'écriture de $\sqrt{2}$, de $\sqrt{3}$ et de π
- conjecturer 1 propriété générale concernant l'écriture en fraction continue d'1 nombre réel **algébrique** (par opposition à **transcendant**) ?