

## Chapitre 4 : Dérivée



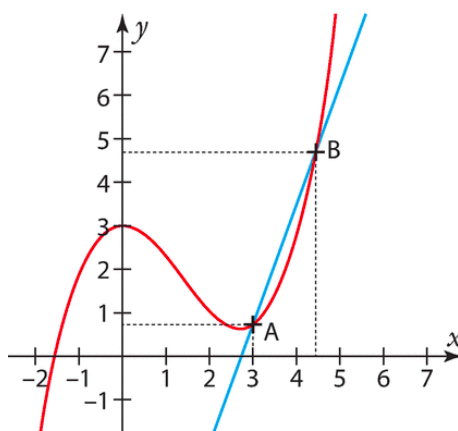
notion de série de Taylor - arte : le calcul infinitésimal

### 1 le nombre dérivé - la tangente à une courbe

#### 1.1 nombre dérivée

définition

- $f$  une fonction définie sur  $\mathbb{R}$
- taux de variation de  $f$  sur  $[a, b]$  :
  - c'est le calcul de la "rapidité" de changement de  $f$  sur  $[a, b]$
  - il correspond en fait à la pente de la droite qui passe par les points  $A(a, f(a))$  et  $B(b, f(b))$
  - cette pente vaut  $\frac{\Delta f}{\Delta x}(a, b) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$



- nombre dérivé de  $f$  en  $a$  :

- en poussant cette notion à l'extrême (notion de limite) autour du point  $A(a, f(a))$ , obtient le nombre dérivé de  $f$  en  $a$ , si il existe
- il correspond en fait à la pente de la courbe  $f$  en  $A(a, f(a))$
- cette pente vaut  $\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)$

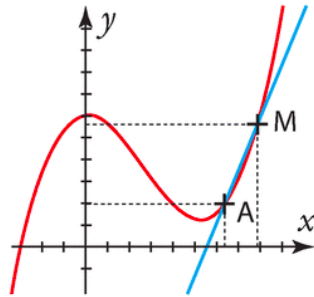


Figure 1

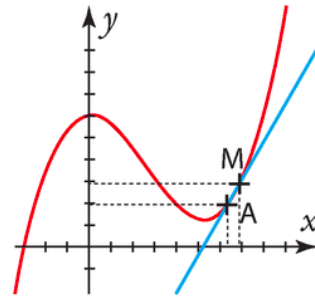
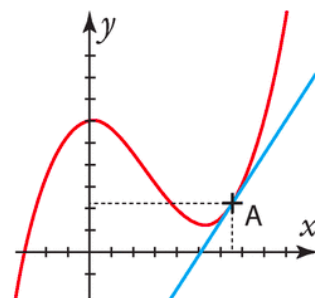
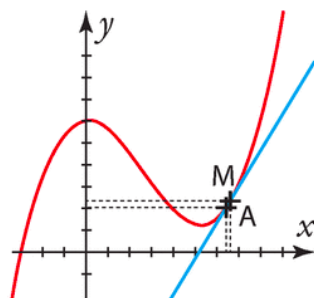


Figure 2

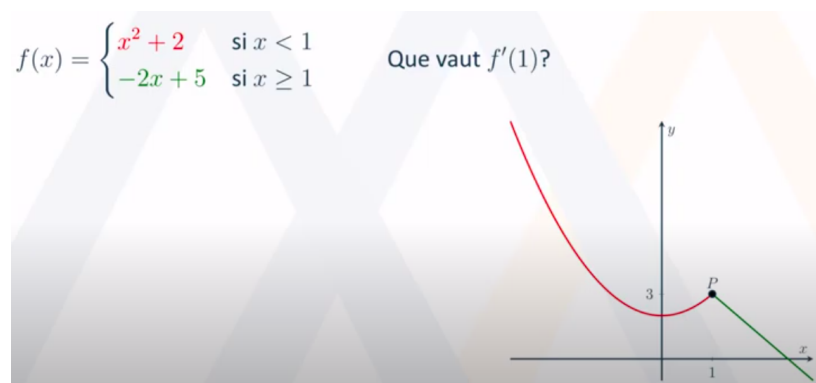


### exemple

- calculer le taux d'accroissement de  $f(x) = 8x^2 + 6x - 17$  entre  $[-2, 4]$
- calculer le nombre dérivé de  $f$  en 0, 4 et -2
- calculer le nombre dérivé de  $f$  en  $z$  fixé sur  $\mathbb{R}$  ; peut-on exploiter ce résultat ?

### subtilité sur le nombre dérivée

- dans la définition de  $f'(a)$ , le nombre  $h$  se rapproche de 0
- parfois, il est important de préciser comment : par la gauche, par la droite ou cela n'a pas d'importance
- visuellement, cela correspond à une pente différente de la fonction à droite et à gauche
- par exemple, si  $h$  doit arriver par la gauche, on parle de nombre dérivée à gauche
- voyons un exemple :

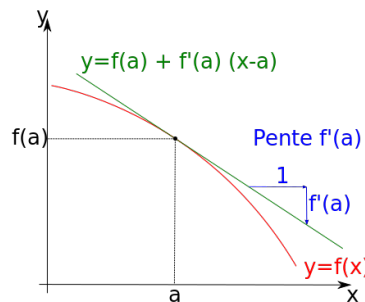


- calculer la dérivée à droite de  $f$  en 1 :  $f'_d(1) = f'(1^+) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$
- calculer la dérivée à gauche de  $f$  en 1 :  $f'_g(1) = f'(1^-) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h < 0}} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$

## 1.2 équation d'une tangente

### définition et propriété

- $f$  une fonction dérivable en  $a \in \mathbb{R}$
- la dérivée de  $f$  en  $a$  est la droite passant par  $A(a, f(a))$  et ayant pour pente  $f'(a)$
- l'équation de la tangente à  $f$  en  $a$  est :  $y = f'(a) \times (x - a) + f(a)$



### exemple

- soit  $f$  une fonction tq  $f(1) = 2$  et  $f'(1) = 3$ ; donner l'équation de sa tangente en 1
- problème ouvert :
  - $f(x) = x^2$  dont le nombre dérivé en  $z$  est :  $f'(z) = 2z$
  - $g(x) = \frac{1}{x}$  dont le nombre dérivé en  $z$  est :  $g'(z) = -\frac{1}{z^2}$
  - les fonctions  $f$  et  $g$  peuvent-elles avoir une tangente commune ? si oui, préciser

### remarque HP

- si  $f$  est une fonction dérivable en  $a \in \mathbb{R}$
- l'équation de la tangente est la "meilleure approximation polynomiale d'ordre 1"
- en clair, c'est la droite (polynôme d'ordre 1) qui approxime le mieux la fonction en ce point
- on aborde par ce biais la notion de développement limité de  $f$  à l'ordre 1

## 2 la dérivée vue comme une fonction

### 2.1 la dérivée

#### définition et propriété

- $f$  une fonction définie sur  $[a, b]$
- si  $f$  possède un nombre dérivé pour chaque  $x \in [a, b]$ , on peut considérer la fonction  $f'$  suivante :
$$\begin{array}{ccc} f' & : & [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \\ & & x \mapsto f'(x) \end{array}$$
- cette fonction  $f'$  s'appelle la dérivée de  $f$  sur  $[a, b]$
- comme nous l'avons vu précédemment, elle donne la pente de  $f$  en tout  $x \in [a, b]$

#### exemple

- $f(x) = 2x + 1$  ; calculer la dérivée de  $f$  sur  $\mathbb{R}$
  
- $f(x) = -3x^2 + 5$  ; calculer la dérivée de  $f$  sur  $\mathbb{R}$

## 2.2 dérivée de base

propriété (à connaître par coeur, dans les 2 sens)

Fonction $f$	$D_f$	Fonction dérivée $f'$	$D_{f'}$
$Cte$	$\mathbb{R}$	0	$\mathbb{R}$
$x$	$\mathbb{R}$	1	$\mathbb{R}$
$x^2$	$\mathbb{R}$	$2x$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$-\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$\sqrt{x}$	$\mathbb{R}^+$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}^{*+}$
$x^n, n \in \mathbb{Z}^+$	$\mathbb{R}$	$n \times x^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$x^n, n \in \mathbb{Z}^{*-}$	$\mathbb{R}^*$	$n \times x^{n-1}$	$\mathbb{R}^*$
$\sin(x)$	$\mathbb{R}$	$\cos(x)$	$\mathbb{R}$
$\cos(x)$	$\mathbb{R}$	$-\sin(x)$	$\mathbb{R}$
$\tan(x)$	$\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2}[\pi]\}$	$\frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$	$\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2}[\pi]\}$

exemple : calculer les dérivée suivantes

- $f(x) = x^5$
- $f(x) = 2x^3$
- $f(x) = -\frac{2}{x}$  de 2 façons différentes

- $f(x) = 2\sqrt{x}$

- $f(x) = -x^{-5}$

**zoom sur  $(\sqrt{x})'$**

- on rappelle que :  $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$
- en utilisant la dérivée de  $x^n$ , trouver une autre méthode pour calculer la dérivée de  $\sqrt{x}$

### 3 opération sur les dérivées

#### 3.1 somme, produit, quotient de dérivée

**propriété**

- $f$  et  $g$  2 fonctions dérivables sur un intervalle de  $\mathbb{R}$
- au précaution d'usage près en ce qui concerne division par zéro ou autre, on obtient les résultats importants supra, à connaître par coeur, si possible dans les 2 sens

Fonction	Fonction dérivée
$k \times f$ avec $k = Cte$	$k \times f'$
$f + g$	$f' + g'$
$f \times g$	$f' \times g + f \times g'$
$\frac{f}{g}$	$\frac{f' \times g - f \times g'}{g^2}$

**exemple : calculer les dérivée suivantes**

- $f(x) = x^5 + x^2 - 18x + 2$

- $g(x) = 2x \times \sin(x)$

- $h(x) = -\frac{x+1}{x+2}$  de 2 façons différentes

- $i(x) = \sqrt{x} \times x^3$  de 2 façons différentes



## 3.2 composition de fonction

### propriété

- $f$  et  $g$  2 fonctions dérivables sur un intervalle de  $\mathbb{R}$  suivant le schéma de composition suivant :
- $[f \circ g] = [f(g(x))]$  :  $\begin{array}{ccccc} [a, b] & \mapsto & [c, d] & \mapsto & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & g(x) & \mapsto & f(g(x)) \end{array}$
- au précaution d'usage (en particulier  $[c, d] \subset D_f$ ), on obtient :  $\boxed{[f(g(x))]' = f'(g(x)) \times g'(x)}$

### exemple : calculer les dérivée suivantes

- $f(x) = (x + 1)^5$
- $g(x) = 2(2x + 1)^3$
- $h(x) = -\frac{2}{3x^2 + 1}$
- $i(x) = -2\sqrt{5x^3 + 6}$
- $k(x) = \sin(3x + 2)$

- HP - idée :
  - $f$  une fonction ; trouver la dérivée de  $f^{-1}$
  - en déduire 1 nouvelle méthode pour calculer la dérivée de  $x \rightarrow \sqrt{x}$

### 3.3 un peu de graphique avec python jusqu'au dérivée

#### qq vidéos pour explorer les math via python

- 1 - introduction
- 2 - les bases du graphique
- 3 - priorité opératoire
- 4 - tracer une fraction rationnelle
- 5 - tracer les racines complexes de l'unité
- 6 - tracer de l'équation différentielle discrète logistique (suite récursive)
- 7 - tracer des tangentes
- 8 - tracer de loi de probabilités jointes

tous ces sujets sont accessibles avec un peu de temps, une bonne tasse de thé et quelques biscuits ...  
bonne lecture