Chapitre 9 : produit scalaire

utilisation du produit scalaire

1 produit scalaire : le cours

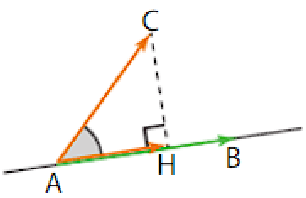
1.1 définition - notation - propriété

rappel - notation

- soit $\vec{u}\begin{vmatrix} a \\ b \end{vmatrix}$ et $\vec{v}\begin{vmatrix} c \\ d \end{vmatrix}$
- **norme** (longueur) : $||\vec{u}|| = \sqrt{a^2+b^2}$
- **angle de 2 vecteurs** : l'angle que forment les $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est noté $(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}})$
- $\cos(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}}) = \cos(\widehat{\vec{v}\,;\vec{u}})$

définition du produit scalaire

- **définition 1** : $\vec{u}\,.\,\vec{v} = ||\vec{u}|| \times ||\vec{v}|| \times \cos(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}})$
- **définition 2** : $\vec{u}\,.\,\vec{v} = \begin{vmatrix} a \\ b \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} c \\ d \end{vmatrix} = ac + bd$
- **définition 3** : $\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC} = AB \times AH$ où H est le projeté orthogonal de C sur (AB)



propriété

- $\vec{u}\,.\,\vec{v} = \vec{v}\,.\,\vec{u}$
- si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires alors :
  - $\vec{u}\,.\,\vec{v} = ||\vec{u}|| \times ||\vec{v}||$ si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont de même sens
  - $\vec{u}\,.\,\vec{v} = -||\vec{u}|| \times ||\vec{v}||$ si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont de sens contraire
  - en effet, $\cos 0 = 1$ et $\cos \pi = -1$
- **propriété importante** :
  - $\boxed{\vec{u} \perp \vec{v} \iff \vec{u}\,.\,\vec{v} = 0}$
  - en effet, $\cos \dfrac{\pi}{2} = 0$

1.2 application du produit scalaire à la droite

droite : vecteur directeur et vecteur normal

- (d) : $y = ax + b \Longrightarrow$ vecteur directeur $\left| \begin{matrix} 1 \\ a \end{matrix} \right.$ et vecteur normal $\left| \begin{matrix} -a \\ 1 \end{matrix} \right.$
- (d) $ax + by + c = 0 \Longrightarrow$ vecteur directeur $\left| \begin{matrix} -b \\ a \end{matrix} \right.$ et vecteur normal $\left| \begin{matrix} a \\ b \end{matrix} \right.$

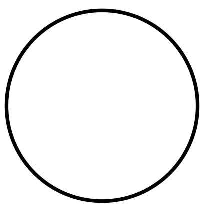
droite : parallélisme et orthogonalité

- (d) : $y = ax + b$ et (d') : $y = a'x + b'$
  - $\boxed{\text{(d) // (d')} \iff a = a'}$
  - $\boxed{\text{(d)} \perp \text{(d')} \iff a \times a' = -1}$
- (d) : $ax + by + c = 0$ et (d') : $a'x + b'y + c' = 0$
  - (d) // (d') $\iff a \times b' = b \times a'$ (vecteurs normaux proportionnels)
  - (d) $\perp$ (d') $\iff a \times a' + b \times b' = 0$ (vecteurs normaux normaux donc produit scalaire nul)

1.3 cercle et norme

équation d'un cercle

- (C) un cercle de centre A $\left| \begin{matrix} x_A \\ y_A \end{matrix} \right.$ et de rayon r
- M $\left| \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \right.$ un point de ce cercle (C)
- **l'équation de (C) est** :
  - $||\overrightarrow{AM}|| = r \iff ||\overrightarrow{AM}||^2 = r^2 \iff \boxed{(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 = r^2}$
  - penser à pythagore :



propriété

- $||\vec{u}+\vec{v}||^2 = ||\vec{u}||^2 + ||\vec{v}||^2 + 2\times\vec{u}\,.\,\vec{v}$
- $||\vec{u}-\vec{v}||^2 = ||\vec{u}||^2 + ||\vec{v}||^2 - 2\times\vec{u}\,.\,\vec{v}$
- $||\vec{u}||^2 + ||\vec{v}||^2 = \dfrac{1}{2}(||\vec{u}+\vec{v}||^2 + ||\vec{u}-\vec{v}||^2)$
- $\vec{u}\,.\,\vec{v} = \dfrac{1}{2}(||\vec{u}+\vec{v}||^2 - ||\vec{u}||^2 - ||\vec{v}||^2)$
- $\vec{u}\,.\,\vec{v} = \dfrac{1}{2}(||\vec{u}||^2 + ||\vec{v}||^2 - ||\vec{u}-\vec{v}||^2)$
- $\vec{u}\,.\,\vec{v} = \dfrac{1}{4}(||\vec{u}+\vec{v}||^2 - ||\vec{u}-\vec{v}||^2)$

2 produit scalaire : ensemble de points

2.1 lieu mystère 1

- trouver l'ensemble M des points qui vérifient : $\overrightarrow{AM}\,.\,\overrightarrow{AB} = 12$

2.2 lieu mystère 2

- trouver l'ensemble M des points qui vérifient : $\overrightarrow{MA}\,.\,\overrightarrow{MB} = 0$

2.3 lieu mystère 3

- trouver l'ensemble M des points qui vérifient : $\overrightarrow{MA}\,.\,\overrightarrow{MB} = 5$

2.4 lieu mystère 4

- trouver l'ensemble M des points qui vérifient : $MA^2 + MB^2 = 10$

2.5 lieu mystère 5

- trouver l'ensemble M des points qui vérifient : $MA^2 - MB^2 = -16$

2.6 lieu mystère 6

- trouver l'ensemble M des points qui vérifient : $\overrightarrow{AM} \, . \, \overrightarrow{AM} = 64$

3 produit scalaire : geogebra

3.1 retour sur les lieux de points

- grâce à geogebra et la fonction trace, retrouver (ou découvrir) les lieux de points de 1 à 6 supra