

# Chapitre 8 - VAR : variable aléatoire réelle



définition simple d'1 VA - définition d'1 espace probabilisé et d'1 var (dur mais précis)

## 1 VAR

### 1.1 rappel : espace probabilisé

définition précise

un espace probabilisé est 1 triplet  $(\Omega, A, p)$  où :

- $\Omega$  est l'univers (l'ensemble des possibles)
- $A$  l'ensemble des parties de  $\Omega$  (cela doit-être 1  $\sigma$ -algèbre)
- $p$  1 fonction telle que :
  1.  $p : A \mapsto [0, 1]$
  2.  $p(\Omega) = 1$  et  $p(\emptyset) = 0$
  3.  $\sigma$ -additive :  $\forall I$  dénombrable,  $\forall A_i$  disjoints 2 à 2,  $p(\bigcup_{i \in I} A_i) = \sum_{i \in I} p(A_i)$

vulgarisation

un espace probabilisé est 1 triplet  $(\Omega, A, p)$  où :

- $\Omega$  est l'univers (ce qui peut arriver)
- $A$  les parties de  $\Omega$  qui auront une probabilité  
( $A$  doit être stable par passage au complémentaire, réunion et intersection)
- $p$  la fonction de probabilité proprement dite :
  1. elle associe à élément de  $A$  sa probabilité d'arriver
  2.  $p$  prend donc des valeurs entre 0 et 1
  3. de plus,  $p(\Omega) = 1$  et  $p(\emptyset) = 0$

remarque : simplification

- en vue de simplifier les choses,  $A = \mathcal{P}(\Omega)$  qui est 1  $\sigma$ -algèbre
- concrètement cela veut dire que l'on peut associer 1 probabilité à n'importe quelle partie de  $\Omega$  (ce qui à priori n'est pas obligatoire ou même possible)

## 1.2 VAR

### définition d'un VAR

- $(\Omega, A, p)$  un espace probabilisé
- un VAR  $X$  sur  $\Omega$  est une fonction  $X : \Omega \mapsto \mathbb{R}$
- c'est donc une fonction qui à un élément de  $\Omega$  associe un réel

### loi de probabilité associée à un VAR

- $(\Omega, A, p)$  un espace probabilisé
- $X$  un VAR sur  $\Omega$
- la loi de probabilité associée à  $X$  est la loi qui va découler du fait que l'espace  $\Omega$  est lui déjà probabilisé
- voyons 2 exemples pour comprendre ce qui se passe

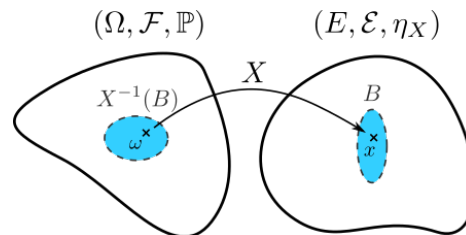
### ex1 : résultat pair ou impair d'un d6

### ex1 : somme de 2 dés

**remarque : bilan**

une fois la VAR  $X$  créée, cette fonction fait la jonction entre 2 espaces probabilisés :

- $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ , 1 espace inconnu (inconnu nous ne voyons que les images de  $X$ )
- $(E, \mathcal{E}, \eta_X)$ , l'espace des états (1 état est 1 valeur possible de  $X$ )
- source : wikipédia

**pour aller plus loin : la statistique expliquée à mon chat**

1. VA
2. opération sur les VA
3. type de VA
4. TCL

**1.3 espérance - variance - écart-type**

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ , 1 espace probabilisé sur lequel opère 1 VAR  $X$   
 $\mathcal{E}$  l'espace des états de  $X$ ,  $p_X$  sa loi de probabilité

**définition**

- **espérance** :  $\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^n p_i \times x_i$  où  $n = |\mathcal{E}|$  qui traduit la valeur "moyenne" des états de  $X$
- **variance** :  $\mathbb{V}(X) = \sum_{i=1}^n p_i \times (x_i - \mathbb{E}(X))^2$  où  $n = |\mathcal{E}|$
- **écart type** :  $\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}(X)}$  qui traduit comment cela "bouge" autour de la moyenne

**propriété**

- $\mathbb{E}(a \times X + b) = a \times \mathbb{E}(X) + b$
- $\mathbb{V}(a \times X + b) = a^2 \times \mathbb{V}(X)$
- $\sigma(a \times X + b) = |a| \times \sigma(X)$

**loi des grands nombres**

- LGN : lorsqu'on crée 1 échantillon de taille suffisamment grand de valeurs prises par une VA, la moyenne de ses valeurs tend vers l'espérance de cette VA
- application : estimation de la probabilité associée à 1 VA suivant 1 loi de bernoulli

**1.4 un peu de python****quelques exercices (corrigés) pour progresser en python**

estimer 1 probabilité rapidement par grâce à 1 programme python