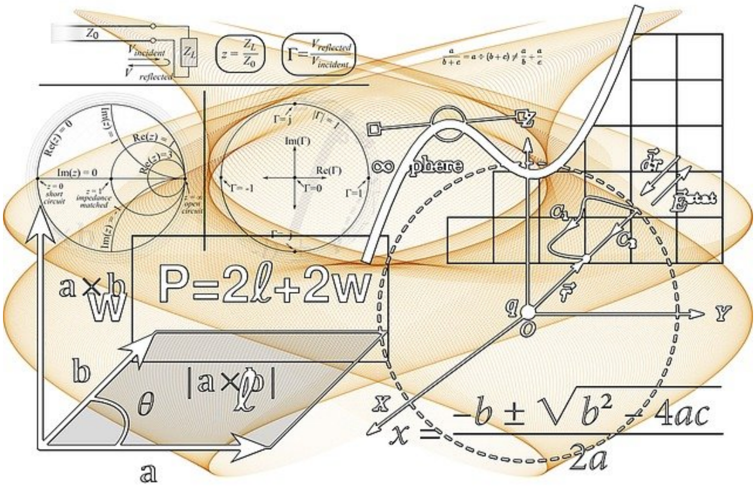
Chapitre 5 : variation et extremum de fonction



nbre d'info mini nécessaires pour résoudre 1 sudoku

1 variation d'1 fonction

1.1 lien avec le signe de la dérivée

- f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I
- f croissante $\iff f' \geq 0$
- f strictement croissante $\iff f' > 0$
- f décroissante $\iff f' \leq 0$
- f strictement décroissante $\iff f' < 0$

1.2 méthode

- f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I
- pour trouver les **variations** de f sur I, construire le tableau de signe de f'
- un exemple traité en vidéo

1.3 un exemple complet

- $f(x) = 5x^2 - 3x + 9$ définie et dérivable sur $\mathbb{R}$; calculer la dérivée de f

- résoudre $f'(x) = 0$

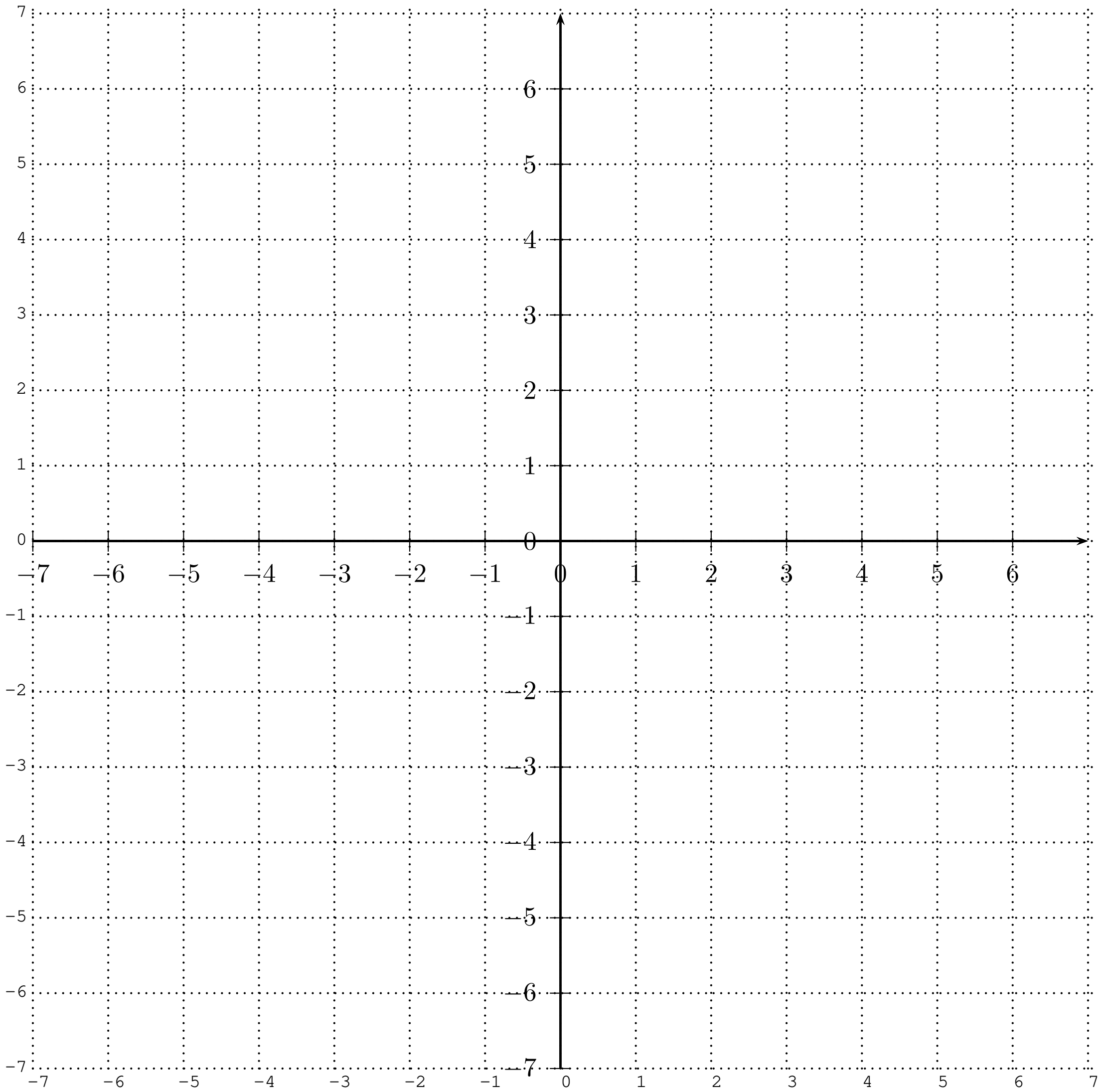
- construire le tableau de variation de $f(x) = 5x^2 - 3x + 9$

x	$-\infty$ $+\infty$
signe de f'	
variation de f	

- remplir le tableau de valeurs f

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
f(x)									

- tracer f et vérifier la la cohérence de vos résultats



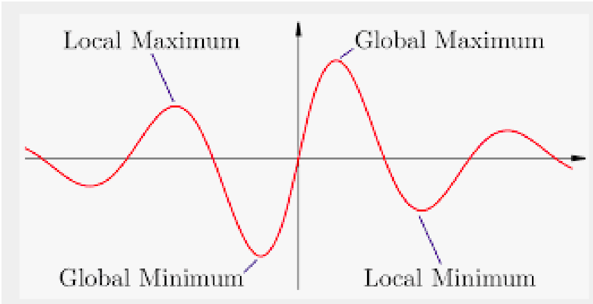
1.4 preuve

- au programme : f croissante $\Longrightarrow f' \geq 0$

- hors programme : f croissante $\Longleftarrow f' \geq 0$
  - admis (théorème des accroissements finis)
  - pour les aventuriers, voir ce cours sur la dérivation - page 6

2 localisation des extremums d'une fonction

2.1 qu'est-ce qu'un extremum ?



maximum - minimum

- f une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$
- M est 1 **maximum** de f sur I si $\forall x \in I : f(x) \leq M$
- idem pour 1 **minimum** N
- 1 minimum ou 1 maximum est appelé 1 **extremum**

global - local

- si $\forall x \in Df : f(x) \leq M$ alors M est **maximum global** de f
- si $\exists J$ intervalle ouvert $\subset Df$ tq $\forall x \in J : f(x) \leq M$ alors M est **maximum local** de f
- idem pour les termes **minimum local** et **extremum local**

extremum atteint

- si $\exists a \in Df$ tq $\forall x \in Df$, $f(x) \leq M$, $\boxed{\text{M est 1 maximum global de } f \text{ atteint en a}}$
- idem pour local

exemple

- f la parabole définie par : $f(-2) = 20$ - $f'(2) = 4$ - $f''(5) = 4$
  préciser f ainsi que son extremum (valeur et nature)

- donner 1 ex de fonction f dérivable sur 1 intervalle I admettant 1 extremum qui n'est pas atteint

2.2 comment trouver un extremum ?

condition nécessaire

- f dérivable sur 1 intervalle ouvert I ; $a \in I$
- $\boxed{f \text{ admet 1 extremum local en } a \Rightarrow f'(a) = 0}$

condition nécessaire et suffisante

- f dérivable sur 1 intervalle ouvert I ; $a \in I$
- $\boxed{f \text{ admet 1 extremum local en } a \Leftrightarrow \begin{cases} f'(a) = 0 \\ f' \text{ change de signe en } a \end{cases}}$

quelques subtilités

- pourquoi préciser I **<u>intervalle</u>** ? (ex et contre-ex)
- pourquoi préciser I intervalle **<u>ouvert</u>** ? (ex et contre-ex)

méthode

- f 1 fonction dérivable sur un intervalle I admettant 1 extremum M atteint en a $(f(a) = M)$
- calculer f' puis rechercher ses zéros
- $\Longrightarrow \boxed{a \in \{\text{zéros de } f + \text{bornes de } I\}}$

exemple

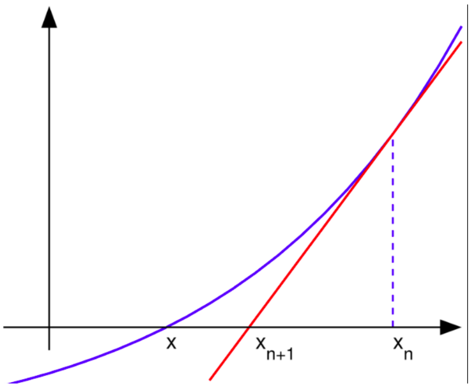
- trouver et décrire les extremums de $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 10$ sur I = [-5,3]
  on pourra ensuite synthétiser l'information sous la forme d'1 TdV

HP : approfondissement dimension 3

- en dimension 2, pour 1 fonction de 2 variables $z = f(x, y)$, c'est pareil
- pour comprendre la situation, consulter :
  - cette page html : exemple complet corrigé
  - cette série de vidéos : cours 1 - cours 2 - cours 3 - cours 4 - ex 1 - ex 2 - ex 3

2.3 un peu de python

zéro d'1 fonction : méthode de Newton



- explication de la méthode de Newton en vidéo
- comment appliquer la méthode de Newton pour approximer $\sqrt{2}$?
- programmer cette méthode (ultra-rapide) sous python pour avoir une approximation de $\sqrt{2}$ à 10 chiffres après la virgule