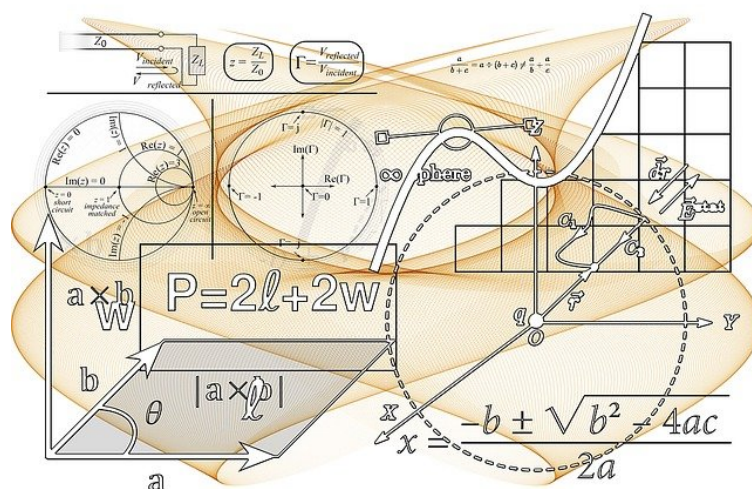


Chapitre 5 : variation et extremum de fonction



nbre d'info mini nécessaires pour résoudre 1 sudoku

1 variation d'1 fonction

1.1 lien avec le signe de la dérivée

- f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I
- f croissante $\iff f' \geq 0$
- f strictement croissante $\iff f' > 0$
- f décroissante $\iff f' \leq 0$
- f strictement décroissante $\iff f' < 0$

1.2 méthode

- f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I
- pour trouver les **variations** de f sur I , construire le tableau de signe de f'
- un exemple traité en vidéo

1.3 un exemple complet

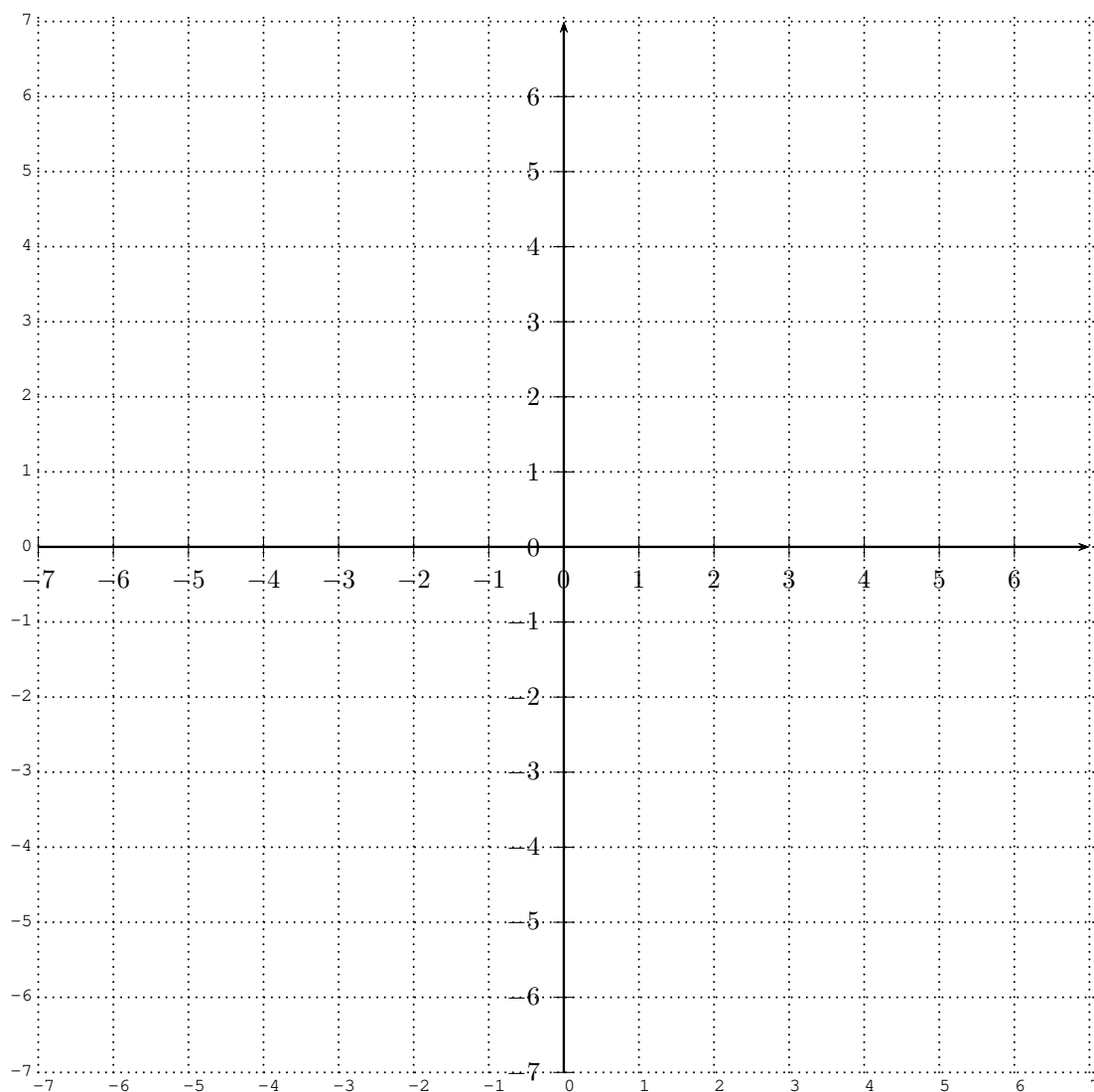
- $f(x) = 5x^2 - 3x + 9$ définie et dérivable sur \mathbb{R} ; calculer la dérivée de f
- résoudre $f'(x) = 0$
- construire le tableau de variation de $f(x) = 5x^2 - 3x + 9$

x	$-\infty$	$+\infty$
signe de f'		
variation de f		

- remplir le tableau de valeurs f

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
f(x)									

- tracer f et vérifier la cohérence de vos résultats

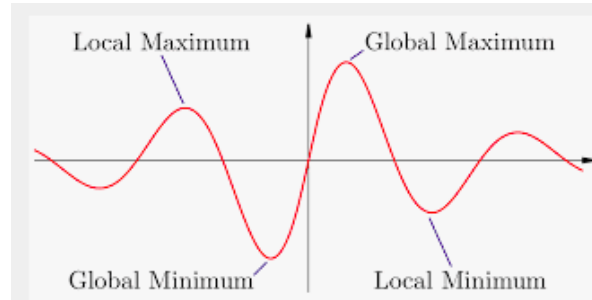


1.4 preuve

- au programme : f croissante $\implies f' \geq 0$
- hors programme : f croissante $\iff f' \geq 0$
 - admis (théorème des accroissements finis)
 - pour les aventuriers, voir ce cours sur la dérivation - page 6

2 localisation des extremums d'une fonction

2.1 qu'est-ce qu'un extremum ?



maximum - minimum

- f une fonction dérivable sur un intervalle I de \mathbb{R}
- M est un maximum de f sur I intervalle de \mathbb{R} si $\begin{cases} \exists a \in I & f(a) = M \\ \forall x \in I & f(x) \leq M \end{cases}$
- idem pour 1 minimum N
- 1 minimum ou 1 maximum est appelé 1 extremum

global - local

- on suppose que M est un extremum de f
- si M est un maximum de f sur D_f alors on dit que c'est un maximum global
- sinon on parle de maximum local
- idem pour les termes minimum local et extremum local

exemple

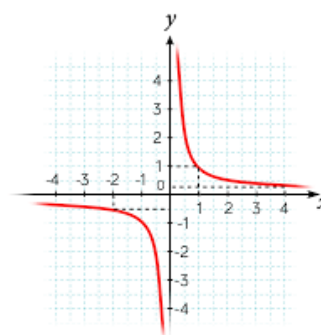
- f la parabole définie par : $f(-2) = 20$ - $f'(2) = 4$ - $f''(5) = 4$
préciser f ainsi que son extremum (valeur et nature)

remarque HP

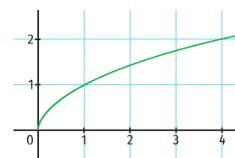
- on distinguera la notion d'extremum et les notions (HP) de borne supérieure et borne inférieure
- 1 extremum (maximum ou minimum) est **atteint** cad $\exists a, b \in I$ tq $f(a) = M$ ou $f(b) = m$
- 1 borne supérieure est (grosso modo) 1 majorant qui colle à la fonction en 1 (ou plusieurs) endroit mais qui n'est jamais atteint (sinon cela devient un maximum)
- 1 borne inférieure est (grosso modo) 1 minorant qui colle à la fonction en 1 (ou plusieurs) endroit mais qui n'est jamais atteint (sinon cela devient un minimum)
- on a alors 1 propriété intéressante (simplifiée pour être comprise) : toute fonction continue sur 1 intervalle fermé I de longueur finie possède 1 max et 1 min sur I
- donc si on veut mettre en évidence la différence entre BS/BI et max/min avec 1 fonction continue, il faut chercher avec 1 intervalle infini ou non fermé

ex 1 :

- $x \mapsto \frac{1}{x}$ n'a pas d'extremum sur $\mathbb{R}, \mathbb{R}_-^*$ ou \mathbb{R}_+^*
- 0 est 1 borne supérieure de $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur \mathbb{R}_-^*
- 0 est 1 borne inférieure de $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur \mathbb{R}_+^*
- regarder la figure puis le démontrer

**ex 2 :**

- $x \mapsto \sqrt{x}$ n'a pas d'extremum sur $]0, 4[$
- 0 est 1 borne inférieure
- 2 est 1 borne supérieure
- essayer de le démontrer !

**2.2 comment trouver un extremum ?****condition nécessaire**

- f dérivable sur 1 intervalle ouvert I ; $a \in I$
- f admet 1 extremum local en $a \Rightarrow f'(a) = 0$

condition nécessaire et suffisante

- f dérivable sur 1 intervalle ouvert I ; $a \in I$
- f admet 1 extremum local en $a \Leftrightarrow \begin{cases} f'(a) = 0 \\ f' \text{ change de signe en } a \end{cases}$

quelques subtilités

- pourquoi préciser I **intervalle**? (ex et contre-ex)
- pourquoi préciser I intervalle **ouvert**? (ex et contre-ex)

méthode

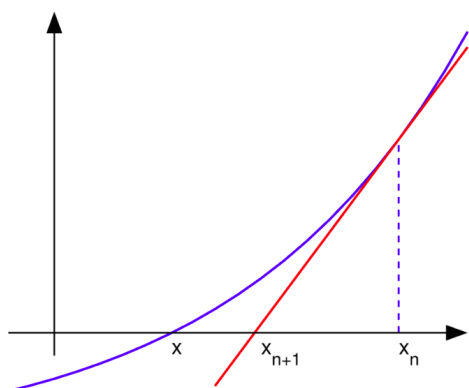
- f 1 fonction dérivable sur un intervalle I admettant 1 extremum M atteint en a ($f(a) = M$)
- calculer f' puis rechercher ses zéros
- $\Rightarrow \boxed{a \in \{\text{zéros de } f' + \text{bornes de } I\}}$

exemple

- trouver et décrire les extremums de $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 10$ sur $I =]-5, 5]$
- synthétiser l'information sous la forme d'1 TdS/TdV de f'/f

HP : approfondissement dimension 3

- en dimension 2, pour 1 fonction de 2 variables $z = f(x, y)$, c'est pareil
- pour comprendre la situation, consulter :
 - cette page html : exemple complet corrigé
 - cette série de vidéos : cours 1 - cours 2 - cours 3 - cours 4 - ex 1 - ex 2 - ex 3

2.3 un peu de python**zéro d'une fonction : méthode de Newton**

- explication de la méthode de Newton en vidéo
- comment appliquer la méthode de Newton pour approximer $\sqrt{2}$?
- programmer cette méthode (ultra-rapide) sous python pour avoir une approximation de $\sqrt{2}$ à 10 chiffres après la virgule