

## Chapitre 2 - Suite Numérique



encyclopédie en ligne des suites connues

### 1 généralité sur les suites

#### 1.1 qu'est-ce qu'une suite, comment la définir ?

vocabulaire et notation

- 1 suite  $u = (u_n)_{n \geq 0}$  est 1 liste de nombres qui peut être vu comme 1 fonction  $u : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$
- $u$  (qui est donc 1 fonction) est le **nom de la suite**
- $n \in \mathbb{N}$  est son **indice** ou son **rang** ; il permet de déterminer la position de chaque nombre dans la liste
- $u_n \in \mathbb{R}$  est le **terme générique** de la suite

exemple - calcul de termes - calculatrice

- **ex 1** :  $(u_n) = (-1)^n$  pour  $n \in \mathbb{N}$  (suite explicite)

- **ex 2** :  $(u_n) = \left(\frac{1}{n-5}\right)$  pour  $n \geq 6$  (suite explicite)

- **ex 3 :**  $(u_n)$  tel que :  $u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + 1}$  et  $u_0 = 1$  (suite implicite)

## 1.2 représentation d'une suite $(u_n)$

suite définie de façon explicite

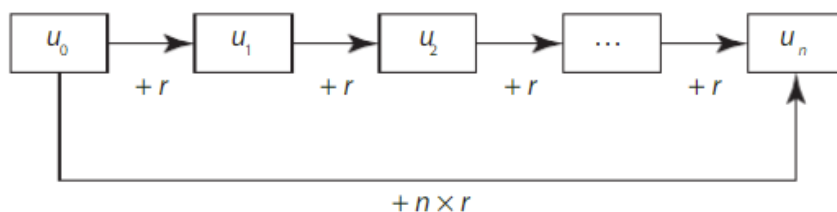
suite définie de façon implicite

## 2 suite arithmétique

### 2.1 définition et ex

#### définition

- $(u_n)$  est 1 suite arithmétique si  $\forall n \geq 0 : u_{n+1} = u_n + r$  où  $r \neq 0$
- $r$  est appelée la raison de la suite  $(u_n)$
- concrètement, on passe d'un terme à l'autre en ajoutant le nombre  $r$



#### exemple

- $\mathbb{N}$
- l'ensemble des entiers naturels pairs
- l'ensemble des entiers naturels impairs
- $(u_n) = \begin{cases} u_0 &= 10 \\ u_{n+1} &= u_n + 4, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$  (définition implicite de la suite)

#### question

- pourquoi la suite 1 5 10 15 20 ... n'est pas une suite arithmétique ?
- déduire 1 méthode simple pour prouver qu'1 suite est arithmétique :

### 2.2 propriété importante

#### expression explicite et somme de termes consécutifs

- soit  $(u_n) = \begin{cases} u_0 \\ u_{n+1} = u_n + r, \forall n \in \mathbb{N} \text{ où } r \neq 0 \end{cases}$
- $u_n = u_0 + n \times r, \forall n \in \mathbb{N}$
- $\sum_{k=0}^n u_k = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n = \frac{u_0 + u_n}{2} \times (n+1)$
- $\sum_{k=p}^q u_k = u_p + u_{p+1} + u_{p+1} + \dots + u_q = \frac{\text{premier\_terme} + \text{dernier\_terme}}{2} \times \text{Nb\_de\_termes}$   
(cette formule généralise la formule précédente et reste relativement simple à retenir)

**exemple**

- calculer la somme des nombres de 1 à 100 :  $\sum_{k=1}^{100} k$
- calculer la somme des nombres pairs entre 0 à 100 (et écrire cette somme avec le signe  $\sum$  )
- calculer la somme des nombres impairs entre 0 à 100 (et écrire cette somme avec le signe  $\sum$  )
- calculer la somme des nombres de 1 à n (et écrire cette somme avec le signe  $\sum$  )

=> ce dernier résultat est à connaître par coeur

**comme dirait Gauss : la preuve est là - lol !**

## 2.3 représentation graphique

- **ex 1 :**  $(u_n) = \begin{cases} u_0 &= 10 \\ u_{n+1} &= u_n + 4, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$  (définition implicite de la suite)
- donner l'expression explicite de la suite
- calculer les premiers termes (en utilisant la calculatrice facile ...)
- tracer sa représentation graphique ; que constate-t-on ; équation du support de la suite ?

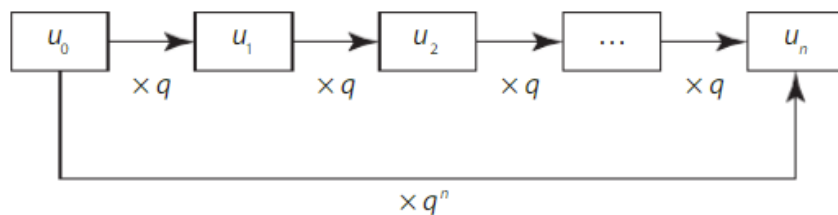
- **ex 2 :** même question avec  $(u_n) = \begin{cases} u_0 &= 5 \\ u_{n+1} &= u_n - 2, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$  (définition implicite de la suite)

## 3 suite géométrique

### 3.1 définition et ex

#### définition

- $(u_n)$  est 1 suite géométrique si  $\forall n \geq 0 : u_{n+1} = q \times u_n$  où  $q \neq 1$
- $q$  est appelée la raison de la suite  $(u_n)$
- concrètement, on passe d'un terme à l'autre en multipliant le nombre  $q$



**exemple**

- $(2^n)_{n \geq 0}$
- $((-1)^n)_{n \geq 0}$
- $(u_n) = \begin{cases} u_0 & = 10 \\ u_{n+1} & = 4 \times u_n, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases} \quad (\text{définition implicite de la suite})$
- $(v_n) = \begin{cases} v_0 & = -2 \\ v_{n+1} & = \frac{v_n}{3}, \forall n \in \mathbb{N} \text{ où } q \neq 1 \end{cases}$

**question**

- trouver une méthode simple pour prouver qu'une suite est arithmétique :

**3.2 propriété (très) importante**

- dans la pratique, les suites géométriques sont plus utilisées que les suites arithmétiques
- vous devez donc bien connaître les formules associées et savoir les démontrer facilement

**expression explicite et somme de termes consécutifs**

- soit  $(u_n) = \begin{cases} u_0 \\ u_{n+1} = q \times u_n, \forall n \in \mathbb{N} \text{ où } q \neq 1 \end{cases}$
- $u_n = u_0 \times q^n, \forall n \in \mathbb{N}$
- $\sum_{k=0}^n u_k = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n = u_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$   
 $\Rightarrow$  pour savoir si c'est  $q^n$  ou  $q^{n+1}$ , penser : puissance = Nbre\_de\_termes

**exemple**

- calculer, de 2 façons, la somme des puissances de 2 jusqu'à 100 :  $\sum_{k=0}^{100} 2^k$
- calculer la somme des puissances de q de 0 à n (et écrire cette somme avec le signe  $\sum$ )

$\Rightarrow$  ce dernier résultat est à connaître par coeur

### preuve

- ex d'utilisation (approfondissement) :
  - notion de développements limités
    - expliquer comment nous pourrions tracer une approximation la courbe de fonction  $f(x) = \frac{1}{1-x}$  au voisinage  $x = 0$  en utilisant des polynômes ...
  - cette méthode très fructueuse est utilisée par votre calculatrice pour "casser les fonctions complexes" de type racine, cosinus, sinus, exponentielle ... en une famille de fonction simples et malléables : les polynômes ...
- ordre ou paquet dans une somme
  - alors que l'ordre de sommation ou la réalisation de paquet de nombres dans une somme **finie** n'a pas d'importance, on peut se demander si c'est toujours le cas pour une somme **infinie** ? (réponse oui) ; arrive-t-on au même résultat ? (réponse : pas forcément) ; quelle valeur choisir ? (réponse : ça dépend du problème posé, et là ça peut devenir très dur ...)
  - ex 1 :  $\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k$ 
    - cette somme infinie qui est :  $1 - 1 + 1 - 1 \dots$  DIV réarrangée :  $(1 - 1) + (1 - 1) \dots = 0$
  - ex 2 : la série harmonique  $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{n}$ 
    - cette somme infinie qui est :  $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \dots$  DIV
    - mais réarrangée :  $(1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4}) \dots$  CV
- on retiendra que :
  - l'ordre et les paquets ont une importance
  - la notation  $\sum$  est claire : on doit additionner les nombres dans l'ordre et un par un

### 3.3 représentation graphique

- **ex 1 :**  $(u_n) = \begin{cases} u_0 &= 3 \\ u_{n+1} &= 4 \times u_n, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$  (définition implicite de la suite)
- donner l'expression explicite de la suite
- calculer les premiers termes (en utilisant la calculatrice facile ...)
- tracer sa représentation graphique ; que constate-t-on ? équation du support de la suite ?

- **ex 2 :** même question avec  $(u_n) = \begin{cases} u_0 &= 10 \\ u_{n+1} &= 0.5 \times u_n, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$  (définition implicite de la suite)

## 4 sens de variation de la suite

### 4.1 définition et ex

#### définition - propriété

$(u_n)$  est **croissante** :  $u_{n+1} \geq u_n, \forall n \geq 0 \iff \boxed{u_{n+1} - u_n \geq 0}$

$(u_n)$  est **strictement croissante** :  $u_{n+1} > u_n, \forall n \geq 0 \iff \boxed{u_{n+1} - u_n > 0}$

$(u_n)$  est **décroissante** :  $u_{n+1} \leq u_n, \forall n \geq 0 \iff \boxed{u_{n+1} - u_n \leq 0}$

$(u_n)$  est **strictement décroissante** :  $u_{n+1} < u_n, \forall n \geq 0 \iff \boxed{u_{n+1} - u_n < 0}$

$(u_n)$  est **monotone** :  $(u_n)$  est croissante ou décroissante (attention, pas les deux)

$(u_n)$  est **strictement monotone** :  $(u_n)$  est strict. croissante ou strict. décroissante (pas les deux)

$(u_n)$  est **constante** : toutes les termes ont la même valeur

remarque : toutes ces propriétés concernant la suite peuvent être définies, soit pour tous les termes de la suite, soit à partir d'un certain rang qu'il faudra alors préciser



### propriété spécifique

$(u_n)$  est à termes strictement positifs :

- $(u_n)$  est **strict. croissante**  $\iff \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$  ,  $\forall n \in \mathbb{N}$
- $(u_n)$  est **strict. décroissante**  $\iff \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$  ,  $\forall n \in \mathbb{N}$

$(u_n)$  est une suite arithmétique :

- $(u_n)$  est (**resp. strict.**) **croissante**  $\iff r \geq 0$  (resp.  $r > 0$ )
- $(u_n)$  est (**resp. strict.**) **décroissante**  $\iff r \leq 0$  (resp.  $r < 0$ )

$(u_n)$  est une suite géométrique :

- $(u_n)$  est (**resp. strict.**) **croissante**  $\iff r \geq 1$  (resp.  $q > 1$ )
- $(u_n)$  est (**resp. strict.**) **décroissante**  $\iff 0 \leq q \leq 1$  (resp.  $0 < q < 1$ )

### analyse de qq ex

Soit  $(u_n)$  la suite définie pour tout entier  $n \geq 1$  par

$$u_n = \frac{2^n}{n}$$

1. Calculer  $\frac{u_{n+1}}{u_n}$

2. Résoudre l'inéquation  $\frac{2n}{n+1} > 1$

3. En déduire les variations de la suite  $(u_n)$

Déterminer le sens de variation des suites suivantes.

a)  $(u_n)$  est une suite géométrique de raison 2 et de premier terme  $u_0 = 3$

b)  $(v_n)$  est définie par  $v_0 = -2$  et, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $v_{n+1} = 0,5 \times v_n$

## 5 limite d'une suite

### 5.1 définition

- la limite d'une suite  $(u_n)$  consiste à analyser le comportement de la suite lorsque  $n \rightarrow +\infty$
- limite finie** :  $(u_n)$  admet une limite finie  $a \in \mathbb{R}$  ce que l'on note  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a$
- limite infini +** :  $(u_n)$  tend vers  $+\infty$  ce que l'on note  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$
- limite infini -** :  $(u_n)$  tend vers  $-\infty$  ce que l'on note  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$

### exemples

Conjecturer, si elle existe, la limite des suites dont certaines valeurs sont données ci-dessous.

- a)  $u_1 = -1, u_{10} = -20, u_{1000} = -4\,000, u_{10000} = -5\,000$   
 b)  $v_1 = 3, v_{10} = -2, v_{100} = 3, v_{1000} = -2, v_{10000} = 3$   
 c)  $w_1 = -1, w_{100} = -1,95, w_{1000} = -1,98, w_{10000} = -1,99$

Conjecturer la limite des suites ci-dessous.

- a) la suite  $(u_n)$  définie pour tout  $n \in \mathbb{N}$  par  $u_n = n$   
 b) la suite  $(v_n)$  définie pour tout entier  $n \geq 1$  par  $v_n = \frac{1}{n}$

## 6 Exploring maths

### 6.1 sequence exercises

- ex1 : you have a log which is 7 m long ; how long does it take to cut the log into pieces 1 m long, assuming that a single cut takes half a minute ?
- ex2 : how many subset does the set  $1, 2, 3, \dots, n$  have ?

- ex3 : in how many ways can you cover a rectangle of size  $2 \times n$  with dominoes of size  $1 \times 2$ ?
- ex4 : suppose you draw  $n$  straight lines in the plane, no 2 of which are parallel and no 3 of which meet at a point ; these lines subdivide the plane regions ; how many regions are there ? (use ex1)
- ex5 :
  - you can have an explicite answer to the so-called fibonacci sequence ( $a_n$ )  

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \times \left( \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right)$$
  - in 1961, independently, (kasteleyn) and (temperley & fisher) solved the more general problem of tilings for an arbitrary rectangle of size  $m \times n$  :  $\sqrt{2} \prod_{j=1}^m \prod_{k=1}^n \left( \cos^2 \frac{j\pi}{m+1} + \cos^2 \frac{k\pi}{n+1} \right)^{\frac{1}{4}}$
  - strange cos , root and fraction appear in the result to give us an interger !
- ex6 : let's have fun on the fibonacci sequence

## 6.2 python : la mystérieuse suite de syracuse

- télécharger le tp\_syracuse
- vidéo : programmer en python la suite
- vidéo approfondissement : limite de cette suite