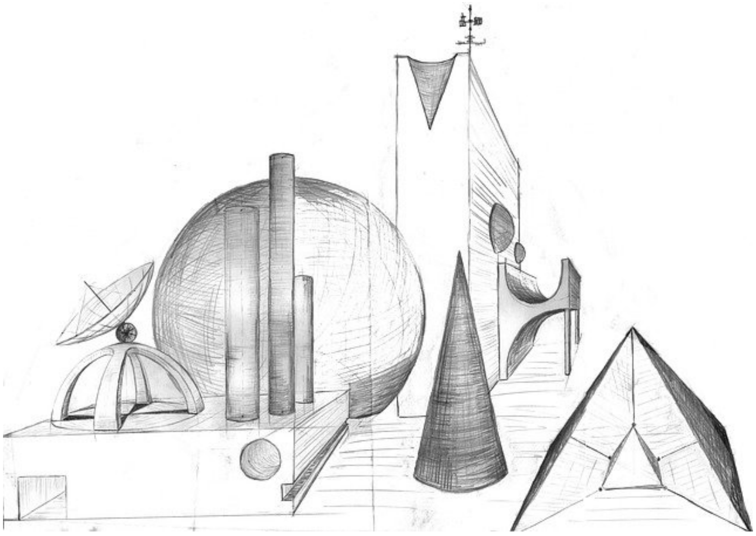
Chapitre 1 - Second Degré



vidéo résumé du chapitre

1 polynôme du 2$^{\text{nd}}$ degré

1.1 fonction polynôme de degré 2 et forme développée

Définition

- $f(x) = ax^2 + bx + c$ où $a \neq 0$ est appelé **fonction polynomiale du second degré**
- par abus de langage, on pourra dire **polynôme du 2$^{\text{nd}}$ degré**
- attention, polynôme et fonction sont des objets différents ...mais c'est une autre histoire ...

- il s'agit de la **forme développée** de la fonction f
- elle existe toujours et est pratique pour évaluer la fonction (en particulier en 0)
- la courbe associée à cette fonction est une **parabole**
- on pourra remarquer qu'elle a une bosse (degré 2 - 1 = 1 bosse) ce qui n'est pas un hasard ...

Exemple

- **ex :** $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$

  $f(1) =$

  $f(-2) =$

  résoudre $f(x) = 1$

1.2 visualisation de f et forme canonique

Définition

- soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ où $a \neq 0$
- il existe (toujours) 2 réels α et β tel que : $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$
- cette présentation de la fonction f s'appelle la **forme canonique** de f
- extrêmement pratique, elle permet de visualiser en un clin d'oeil l'allure de f
- pour trouver α et β, on appliquera la **méthode de reconstitution du carré**

Exemples

- **ex 1 :** $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$; trouver la forme canonique puis tracer l'allure de la fonction

- **ex 2 :** $f(x) = -x^2 - 2x - 1$; trouver la forme canonique puis tracer l'allure de la fonction

Preuve

1.3 sens de variation

Cas a > 0

- soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ où $a > 0$

x	$-\infty$		$\alpha = -\dfrac{b}{2a}$		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\beta = f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

Cas a < 0

- soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ où $a < 0$

x	$-\infty$		$\alpha = -\dfrac{b}{2a}$		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\beta = f(\alpha)$	$\searrow$	$-\infty$

Exemples à faire

- $f(x) = 3x^2 + 2x + 1$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$		

- $f(x) = 3(x+2)^2 + 2$

Remarque

- le point de coordonnées (α, β) est le **sommet de la parabole**
- f présente un axe de symétrie d'équation $y = \alpha$

Preuve du sens de variation

2 Équation du 2nd degré

2.1 Définitions

- équation du 2nd degré : $ax^2 + bx + c = 0$ où $a \neq 0$
- racine (ou zéro) de l'équation : un réel t tel que $at^2 + bt + c = 0$

2.2 Résolution dans R

Méthode

- soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ où $a \neq 0$
- on calcule $\Delta = b^2 - 4ac$
- 1er cas : $\Delta > 0$; les 2 racines sont alors $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$
- 2nd cas : $\Delta = 0$; la racine double est $x_1 = -\frac{b}{2a}$ (carré parfait => identité remarquable)
- 3ème cas : $\Delta < 0$; l'équation n'a pas de racine

Exemple

- soit $f(x) = x^2 - 5x + 6$

Preuve

3 quelques propriétés de $ax^2 + bx + c$ où $a \neq 0$

3.1 relations coefficients racines

Propriété

- soit $ax^2 + bx + c = 0$ où $a \neq 0$ et $\Delta \geq 0$
- les 2 racines sont alors $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ (éventuellement identiques si)
- on pose $S = x_1 + x_2$ et $P = x_1 \times x_2$
- on a alors : $ax^2 + bx + c = 0 \iff x^2 + \dfrac{b}{a}x + \dfrac{c}{a} = 0 \iff \boxed{x^2 - Sx + P = 0}$
- remarque HP : cette propriété est une propriété générale lié aux polynômes de tous de degré (somme de Newton)

Preuve

3.2 factorisation de f

Factorisation

- soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ où $a \neq 0$
- si $\Delta > 0$ alors $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$
- si $\Delta = 0$ alors $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2$

Exemple

- factoriser f et g

$f(x) = x^2 - 5x + 6$

$g(x) = 3x^2 = 12x - 15$

Preuve

3.3 signe de f grâce à la factorisation de f

Signe de f

- soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ où $a \neq 0$ et
- si $\Delta > 0$ alors $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ et on a :
  - cas $a > 0$

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

  - cas $a < 0$

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f(x)$							

- si $\Delta = 0$ alors $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2$ et on a :
  - cas $a > 0$

x	$-\infty$		x_1		$+\infty$
$f(x)$			0		

  - cas $a < 0$

x	$-\infty$	x_1	$+\infty$
$f(x)$			

- si $\Delta < 0$ alors $f(x) = ax^2 + bx + c$ est du signe de a (ou de c)
- remarque HP : dans ce dernier cas ($\Delta < 0$), la droite $y = 0$ appelée hyperplan (dimension de l'espace - 1 = 2-1 = 1 => droite) partage le plan (c'est ici notre espace de travail) en 2 parties de signe distinct (+ et -) ; f se situe entièrement dans l'une des 2 parties et est donc soit positive soit négative ; on essaye alors la valeur en 0 pour trouver son signe)

Exemple

- faire les tableaux de signes de f, g et h

$f(x) = x^2 - 5x + 6$ $\qquad$ $g(x) = 3x^2 = 12x - 15$ $\qquad$ $h(x) = x^2 + 2x + 1$

Preuve

Visualisation graphique

4 Un peu de python

4.1 recherche de racines

```
from math import sqrt

def f(a, b, c):
#
  delta = b**2-4*a*c
  if delta < 0:
    print("f n'a pas de racines")
  elif delta == 0:
    print("f possède une racine double : ",-b/(2*a))
  else:
    print("f possède 2 racines distinctes : x1 = ",(-b+sqrt(delta))/(2*a),"et x2 = ",(-b-sqrt(delta))/(2*a))

print(f(1,-5,6))
print(f(1,2,1))
print(f(1,3,6))
```

- améliorer le programme pour proposer la factorisation (si elle existe)
- proposer un programme qui donne le tableau de signe de f (travailler par intervalle)

4.2 tracer une courbe en python

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def trace_courbes(a, b, c, debut, fin, nbre_de_point):
  x = np.linspace(debut, fin, nbre_de_point)
  y_1 = a*x**2+b*x+c
  # mettre une autre fonction ici

  plt.plot(x, y_1, label="f(x)")
  # mettre le 2ème tracé ici
  plt.legend()

  plt.show()

trace_courbes(1,2,1,-5,5,30)
# la figure est pro-active (on peut lire les points en direct)
```

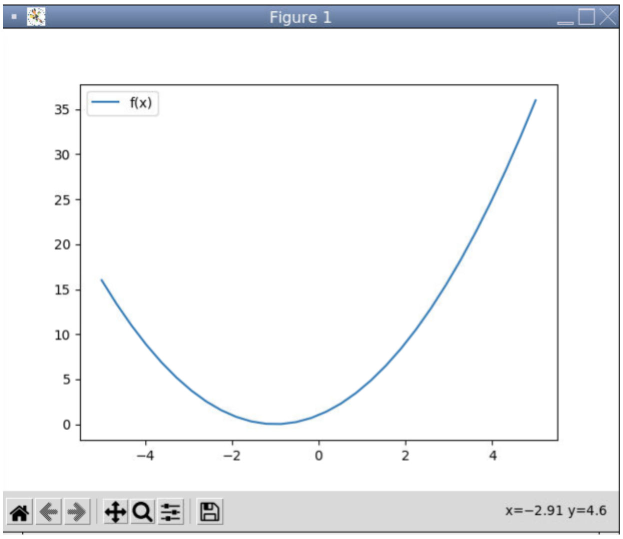


Figure 1
f(x)
35
30
25
20
15
10
5
0
−4
−2
0
2
4
x=−2.91 y=4.6