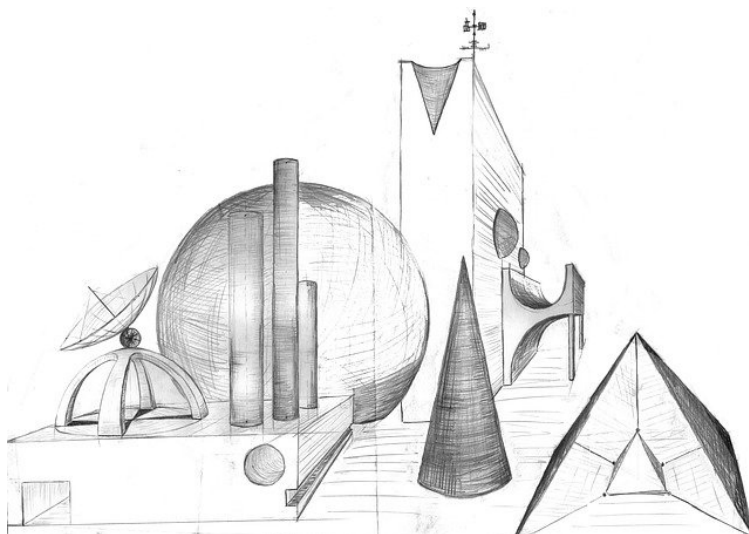


Chapitre 1 - Second Degré



vidéo résumé du chapitre

1 polynôme du 2nd degré

1.1 fonction polynôme de degré 2 et forme développée

Définition

- $f(x) = ax^2 + bx + c$ où $a \neq 0$ est appelé fonction polynomiale du second degré
- par abus de langage, on pourra dire polynôme du 2nd degré
- attention, polynôme et fonction sont des objets différents ...mais c'est une autre histoire ...
- il s'agit de la forme développée de la fonction f
- elle existe toujours et est pratique pour évaluer la fonction (en particulier en 0)
- la courbe associée à cette fonction est une parabole
- on pourra remarquer qu'elle a une bosse (degré 2 - 1 = 1 bosse) ce qui n'est pas un hasard ...

Exemple

- ex : $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$

$$f(1) =$$

$$f(-2) =$$

$$\text{résoudre } f(x) = 1$$

1.2 visualisation de f et forme canonique

Définition

- soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ où $a \neq 0$
- il existe (toujours) 2 réels α et β tel que : $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$
- cette présentation de la fonction f s'appelle la forme canonique de f
- extrêmement pratique, elle permet de visualiser en un clin d'oeil l'allure de f
- pour trouver α et β , on appliquera la méthode de reconstitution du carré

Exemples

- ex 1 : $f(x) = 3x^2 - 6x + 1$; trouver la forme canonique puis tracer l'allure de la fonction

- ex 2 : $f(x) = -x^2 - 2x - 1$; trouver la forme canonique puis tracer l'allure de la fonction

Preuve

1.3 sens de variation

Cas $a > 0$

- soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ où $a > 0$

x	$-\infty$	$\alpha = -\frac{b}{2a}$	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\beta = f(\alpha)$	$+\infty$

Cas $a < 0$

- soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ où $a < 0$

x	$-\infty$	$\alpha = -\frac{b}{2a}$	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\beta = f(\alpha)$	$-\infty$

Exemples à faire

- $f(x) = 3x^2 + 2x + 1$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$		

- $f(x) = 3(x+2)^2 + 2$

Remarque

- le point de coordonnées (α, β) est le sommet de la parabole
- f présente un axe de symétrie d'équation $y = \alpha$

Preuve du sens de variation

2 Équation du 2nd degré

2.1 Définitions

- équation du 2nd degré : $ax^2 + bx + c = 0$ où $a \neq 0$
- racine (ou zéro) de l'équation : un réel t tel que $at^2 + bt + c = 0$

2.2 Résolution dans \mathbb{R}

Méthode

- soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ où $a \neq 0$
- on calcule $\Delta = b^2 - 4ac$
- 1^{er} cas : $\Delta > 0$; les 2 racines sont alors $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$
- 2nd cas : $\Delta = 0$; la racine double est $x_1 = -\frac{b}{2a}$ (carré parfait \Rightarrow identité remarquable)
- 3^{ème} cas : $\Delta < 0$; l'équation n'a pas de racine

Exemple

- soit $f(x) = x^2 - 5x + 6$

Preuve

3 quelques propriétés de $ax^2 + bx + c$ où $a \neq 0$

3.1 relations coefficients racines

Propriété

- soit $ax^2 + bx + c = 0$ où $a \neq 0$ et $\Delta \geq 0$
- les 2 racines sont alors $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ (éventuellement identiques si)
- on pose $S = x_1 + x_2$ et $P = x_1 \times x_2$
- on a alors : $ax^2 + bx + c = 0 \iff x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \iff \boxed{x^2 - Sx + P = 0}$
- remarque HP : cette propriété est une propriété générale lié aux polynômes de tous de degré (somme de Newton)

Preuve

3.2 factorisation de f

Factorisation

- soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ où $a \neq 0$
- si $\Delta > 0$ alors $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$
- si $\Delta = 0$ alors $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2$

Exemple

- factoriser f et g

$$f(x) = x^2 - 5x + 6$$

$$g(x) = 3x^2 = 12x - 15$$

Preuve**3.3 signe de f grâce à la factorisation de f** **Signe de f**

- soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ où $a \neq 0$ et
- si $\Delta > 0$ alors $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ et on a :
 - cas $a > 0$

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$	
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

- cas $a < 0$

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
$f(x)$				

- si $\Delta = 0$ alors $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2$ et on a :
 - cas $a > 0$

x	$-\infty$	x_1	$+\infty$
$f(x)$	$\begin{array}{c} \vdots \\ 0 \\ \vdots \end{array}$		

- cas $a < 0$

x	$-\infty$	x_1	$+\infty$
$f(x)$			

- si $\Delta < 0$ alors $f(x) = ax^2 + bx + c$ est du signe de a (ou de c)
- remarque HP : dans ce dernier cas ($\Delta < 0$), la droite $y = 0$ appelée hyperplan (dimension de l'espace - 1 = 2-1 = 1 => droite) partage le plan (c'est ici notre espace de travail) en 2 parties de signe distinct (+ et -); f se situe entièrement dans l'une des 2 parties et est donc soit positive soit négative ; on essaye alors la valeur en 0 pour trouver son signe)

Exemple

- faire les tableaux de signes de f , g et h

$$f(x) = x^2 - 5x + 6$$

$$g(x) = 3x^2 - 15$$

$$h(x) = x^2 + 2x + 1$$

Preuve

Visualisation graphique

4 Un peu de python

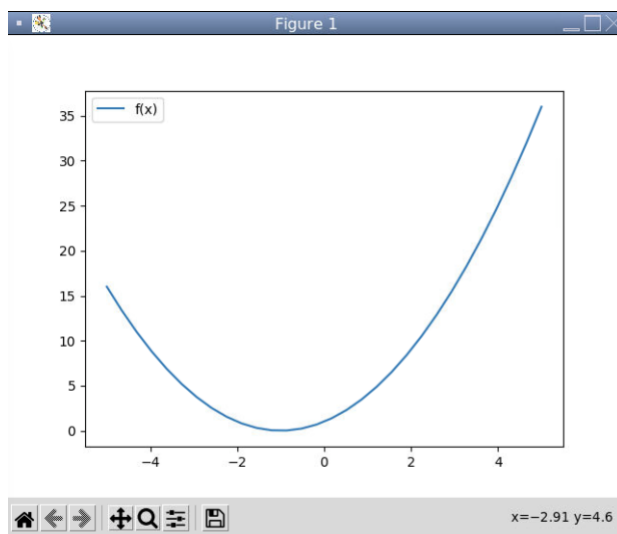
4.1 recherche de racines

```
1 from math import sqrt
2
3 def f(a, b, c):
4     #
5     delta = b**2-4*a*c
6     if delta < 0:
7         print("f n'a pas de racines")
8     elif delta == 0:
9         print("f possède une racine double : ",-b/(2*a))
10    else:
11        print("f possède 2 racines distinctes : x1 = ",(-b+sqrt(delta))/(2*a),"et x2 ↔
          = ",(-b-sqrt(delta))/(2*a))
12
13 print(f(1,-5,6))
14 print(f(1,2,1))
15 print(f(1,3,6))
```

- améliorer le programme pour proposer la factorisation (si elle existe)
- proposer un programme qui donne le tableau de signe de f (travailler par intervalle)

4.2 tracer une courbe en python

```
1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3
4 def trace_courbes(a, b, c, debut, fin, nbre_de_point):
5     x = np.linspace(debut, fin, nbre_de_point)
6     y_1 = a*x**2+b*x+c
7     # mettre une autre fonction ici
8
9     plt.plot(x, y_1, label="f(x)")
10    # mettre le 2ème tracé ici
11    plt.legend()
12
13    plt.show()
14
15 trace_courbes(1,2,1,-5,5,30)
16 # la figure est pro-active (on peut lire les points en direct)
```



Tracer une courbe sans python

- utiliser votre calculatrice graphique
- le logiciel gratuit geogebra est aussi un bon outil graphique
- enfin, il existe des traceurs en ligne , par exemple solumaths