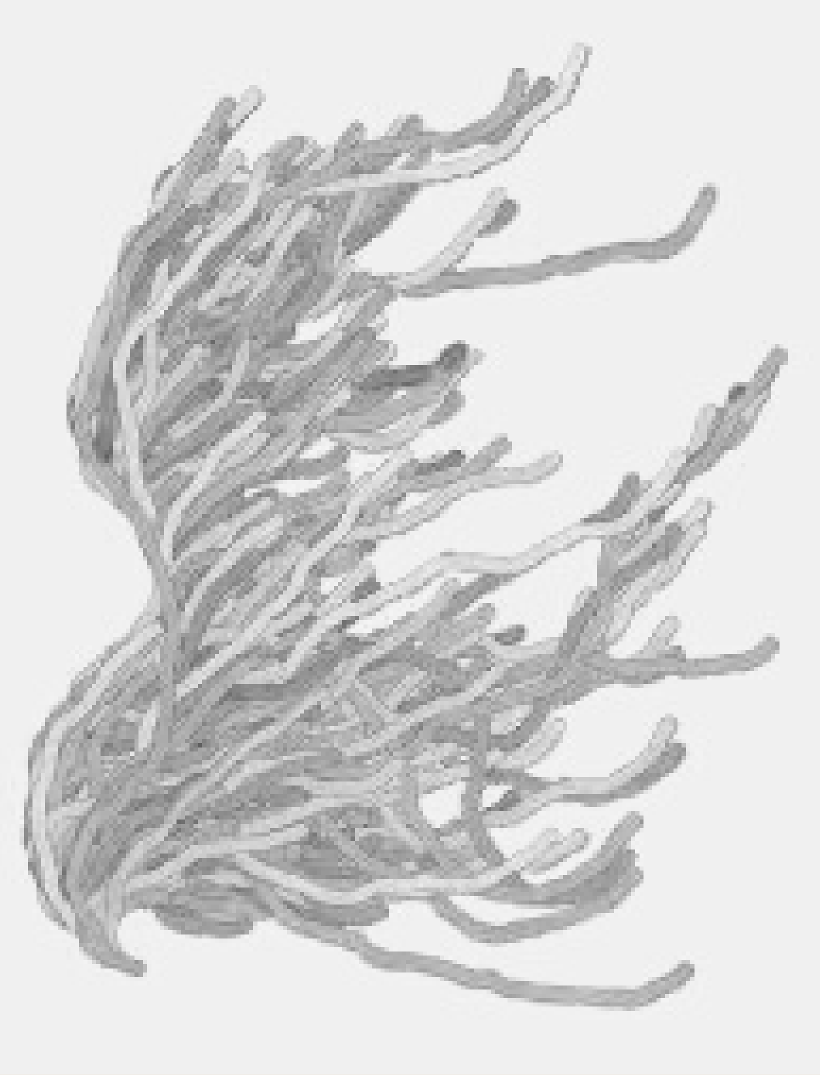
01

Conjecture de Collatz



Parmi tous les problèmes mathématiques actuellement non résolus, quel est celui dont l'énoncé est le plus élémentaire ? C'est peut-être bien le problème présenté ici : accessible à tout écolier de 8 ans, il défie les chercheurs depuis des décennies

EL AMRANI Morjane MAURIN Ulysse EZZEDAMI Nada

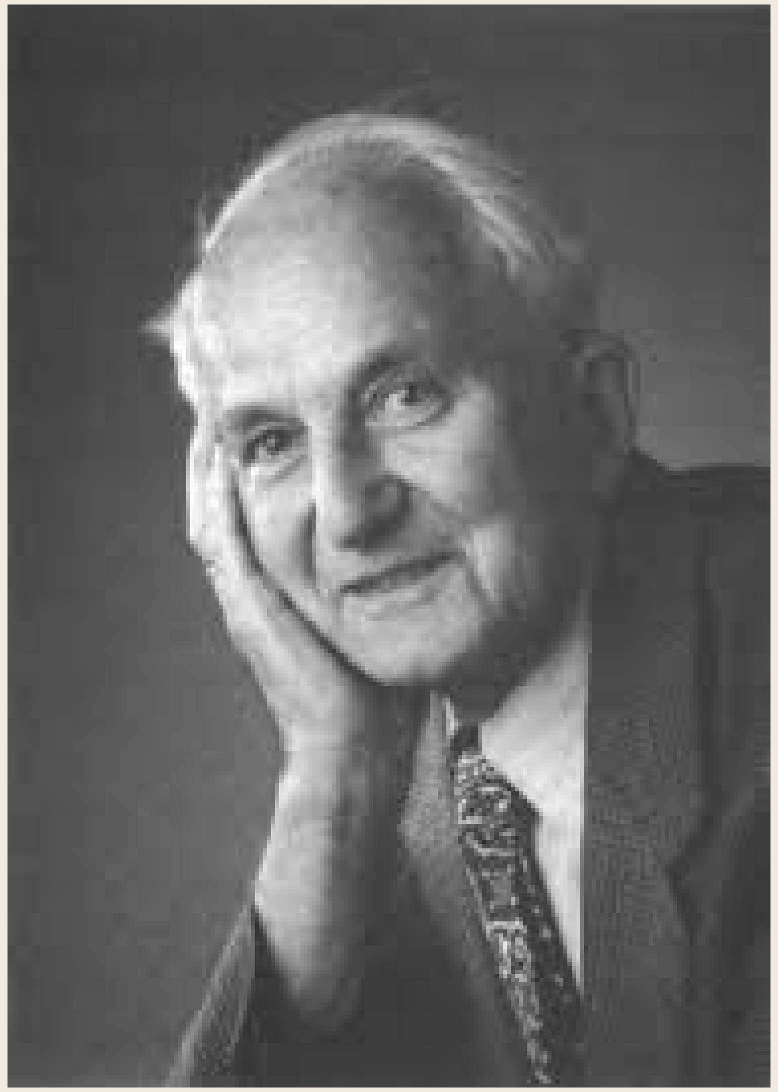
Sommaire

→

INTRODUCTION

HISTOIRE :

La conjecture de Collatz voit le jour en 1927 par le mathématicien allemand Lothar Collatz avant d'être rendue célèbre à l'université de Syracuse, aux États-Unis, dans les années 1950.



Introduction

Concept de la conjecture :

La conjecture de Syracuse ressemble à un jeu de calcul. On prend n'importe quel nombre entier plus grand que 1 (2, 3, 73, 153...); s'il est pair, on le divise par 2; s'il est impair, on le multiplie par 3 et on ajoute 1. En réitérant l'opération plusieurs fois, on obtient une suite de nombres... qui finit toujours par aboutir à 1.

Elle se définit de la manière suivante :

$$(\forall n \in IN): \quad u_{n+1} = \begin{cases} \dfrac{u_n}{2} & \text{si } u_n \text{ est pair} \\ \dfrac{u_n + 1}{2} & \text{sinon} \end{cases}$$

Introduction

Exemple:

Prenons par exemple le nombre 6.

6 étant un entier pair on le divise par 2 → 3, c'est impair on le multiplie donc par 3 puis on ajoute 1 → 10 → 5 → 16 → 8 → 4 → 2 → 1

- *Le problème 3n+1 est donc le suivant : partons d'un nombre entier positif quelconque, et appliquons-lui cette transformation de façon répétée. Est-il vrai que l'on finira tôt ou tard par tomber sur 1 ?*

I- Premières démarches

Essai avec chiffre appartenant à] 1-9] :

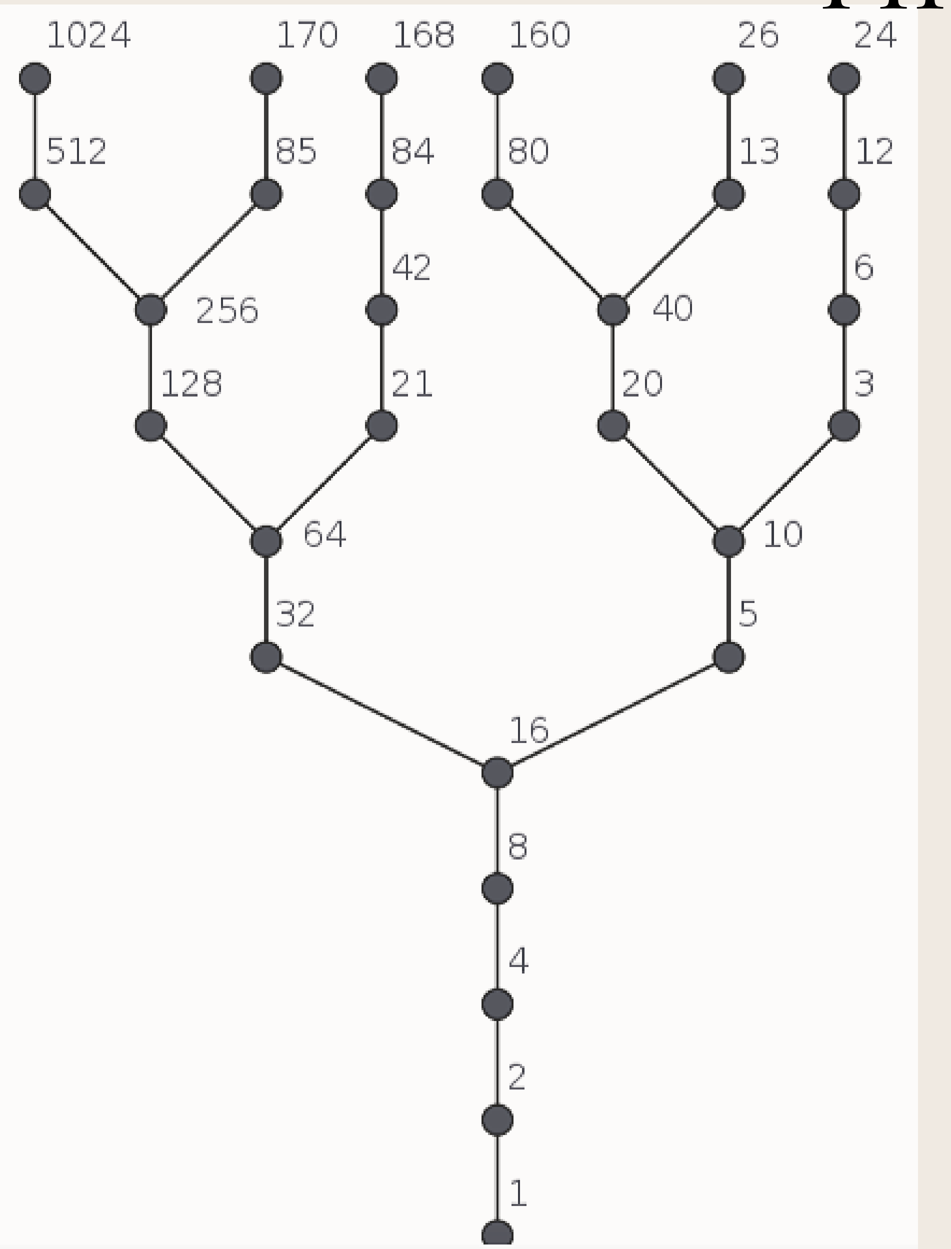
- $u_0 = 6$. C'est un nombre pair, donc $u_1 = u_0/2 = 3$
- $u_1 = 3$. Ce terme est impair, donc $u_2 = 3u_1 + 1 = 10$
- $u_2 = 10$. Nous retrouvons un nombre pair. $u_3 = u_2/2 = 5$
- $u_3 = 5$. Le terme est impair. $u_4 = 3u_3 + 1 = 16$
- $u_4= 16$. C'est une puissance de 2, donc $u_5 = 8$, $u_6 = 4$, $u_7 = 2$,et $u_8 = 1$

La suite de Syracuse (ou Collatz) de premier terme $u_0 = 6$ semble donc également converger vers 1 .

Le "vol" pour N = 6 est donc { 6, 3, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1 }

→

Essais avec tous les chiffres de l'intervalle:



L'arbre représente le "cheminement de la suite" à partir de x nombre de départ, si l'on cherche à déterminer ce cheminement à partir de 3 par exemple , il suffit de suivre les branches. À petite échelle, la suite semble également converger vers 1, mais est- ce le cas pour des nombres plus importants ?

Essais à plus grande échelle

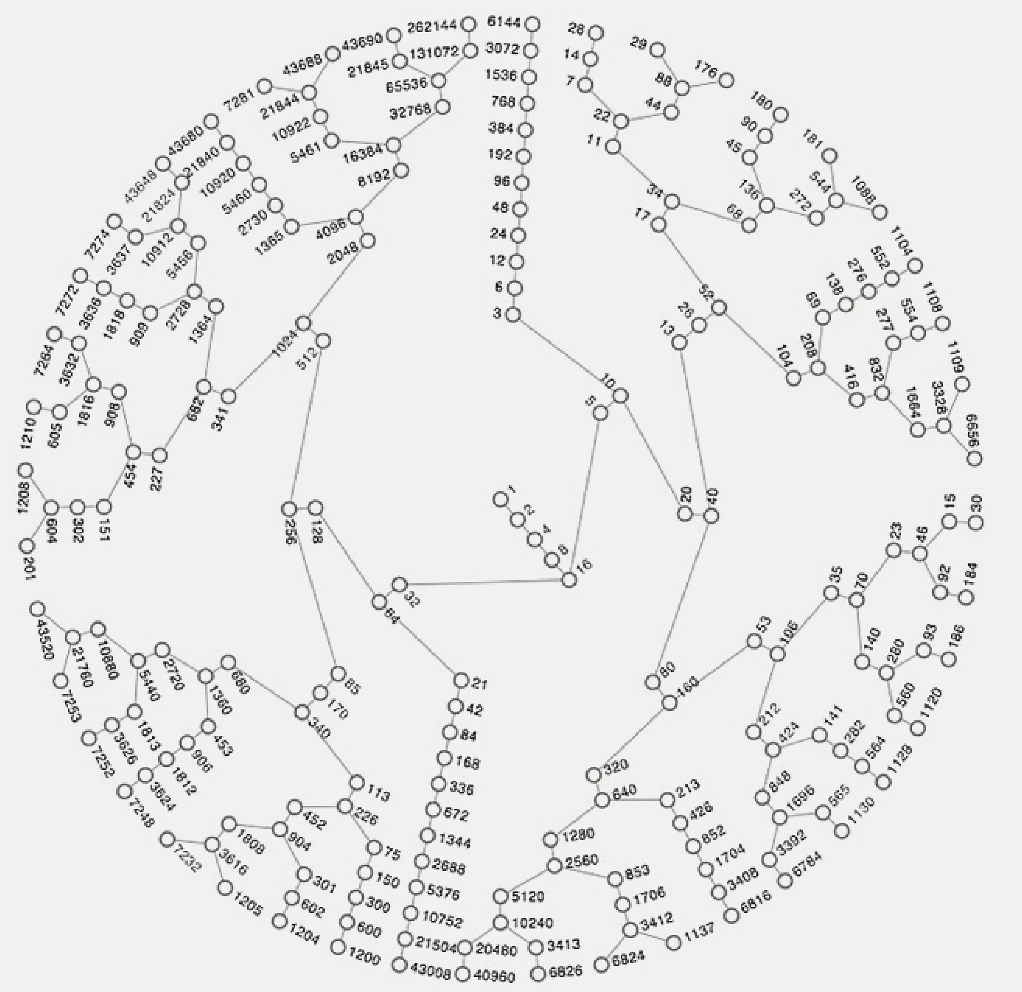
Pour observer des récurrences ou diverses propriétés on applique la suite à plusieurs nombres, le travail à la main serait trop fastidieux, d'où l'interêt de l'utilisation de programmes,(on peut donc voir un certain intérêt à cette énigme, elle étend nos connaissances jusque l'informatique): celui ci permet de déterminer la trajectoire détaillée de la suite pour n'importe quel nombre.

(voir pj pour document programme)

```
N=int(input("Valeur de N? "))
U=N
L=[N]
T=0
Z=0
while U!=1:
      if U%2==0:
         U=(U//2)
      else :
         U=(3*U+1)
      L.append(U)
      T=T+1
      if U>N:
         Z=Z+1
      ln=len(L)
      A=max(L)
print ("Trajectoire",L)
print ("Longueur", ln )
print ("Altitude", A)
print ("Temps de vol",T)
print ("Temps de vol en altitude", Z-1)
```

ARBRES

On obtient donc à grande échelle un pattern dont plusieurs propriétés ressortent



Comme attendu, certains points se répètent, au moins jusque 5×1018 vérifié par Tomás Oliveira e Silva en 2009.

On remarque en effet, en plus de constamment converger vers 1 qu' il semble que peu importe le nombre choisi, la suite finit toujours par retomber sur cette boucle 4-2-1.. ce qui est parfaitement logique compte tenu de l'équation de la suite.

QUELQUE SOIT LA TRAJECTOIRE, CELLE DE 5 , DE 21 DE 32 OU MÊME DE 40 , LE RÉSULTAT EST LE MÊME.

CETTE BOUCLE DE LONGUEUR 3 SEMBLE INÉVITABLE

5	16	8	4	2	1			
21	64	32	16	8	4	2	1	
32	16	8	4	2	1			
40	20	10	5	16	8	4	2	1

VOCABULAIRE

Nous utiliserons dans ce document, un vocabulaire propre à cette suite dont les termes sont à expliquer:

temps de vol: c'est le plus petit indice n tel que $u_n = 1$

Il est de 17 pour la suite de Syracuse 15 et de 46 pour la suite de Syracuse 127

temps de vol en altitude : c'est le plus petit indice n tel que $u_{n+1} < N$

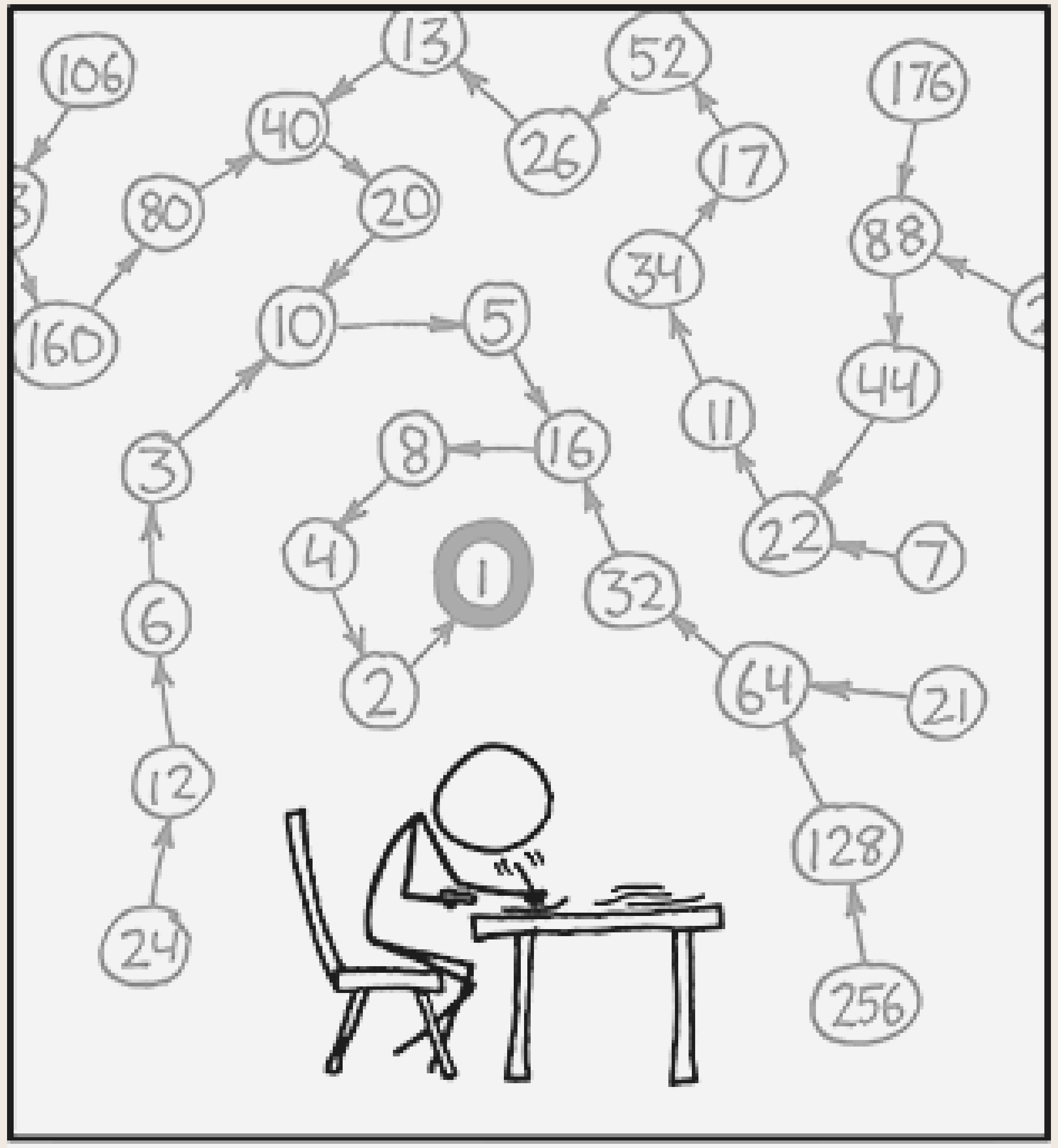
Il est de 10 pour la suite de Syracuse 15 et de 23 pour la suite de Syracuse 127

altitude maximale : c'est la valeur maximale de la suite

Elle est de 160 pour la suite de Syracuse 15 et de 4372 pour la suite de Syracuse 127

facteur d'expansion: c'est le rapport entre le nombre de départ et l'altitude maximale

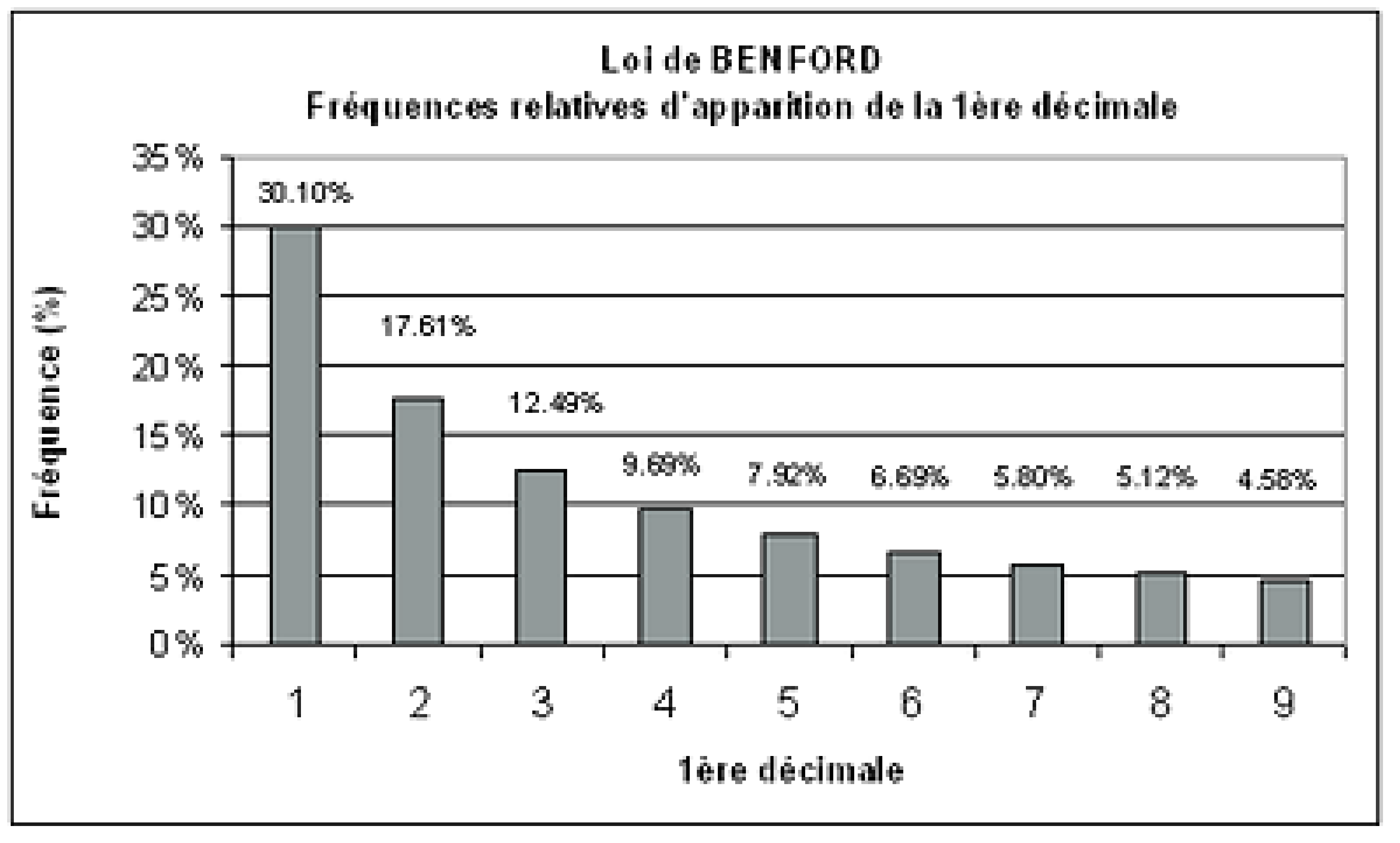
Intérêt à la résolution



La suite de Syracuse est connue pour la dangereuse importance de quantité de temps qu'elle consomme pour les mathématiciens autant que pour les simples amateurs.
Elle suscite cependant l'immense curiosité mathématique alors qu'elle n'a à première vue aucune réelle applications dans le "vrai monde", alors pourquoi essayer de la résoudre ?

- intellectuellement stimulant
- indication de notre degré de compréhension des nombres
- les différentes tentatives d'essais nous ont permis d'accéder à d'autres aspects des mathématiques (voir diapos suivantes)
- récompenses (très peu) ($50, Harold Coxeter; $500, Paul Erdős; £1000, Sir Bryan Thwaites)
- possibilité de se vanter :)

LOI DE BENFORD



DÉFINITION:

La loi de Benford, fait référence à une fréquence de distribution statistique observée empiriquement sur de nombreuses sources de données dans la vraie vie (comme les journaux) , ainsi qu'en mathématiques.

L'histogramme ci contre représente la récurrence statistique des chiffres de 1 à 9, selon cette loi, le chiffre 1 par exemple reviendrait donc naturellement1 30,1% .

LIEN AVEC COLLATZ :

On observe lorsqu'on choisit un important nombre de départ que les valeurs produites par la suite, suit approximativement la loi de Benford, on a donc des statistiques similaires quant à la récurrence des chiffres.

Amusons nous à vérifier ce processus à l'aide d'un programme python:

```
from math import log10, floor

def leading_digit(x):
    y = log10(x) % 1
    return int(floor(10**y))

# 3n+1 iteration
def iterates(seed):
    s = set()
    n = seed
    while n > 1:
        n = 3*n + 1
        while n % 2 == 0:
            n = n / 2
        s.add(n)
    return s
```

comme prévu nous commençons avec un grand nombre :

243963882982396137355964322146256

Nous obtenons ainsi, ce tableau.

On observe dans la première colonne les chiffres concernées et dans les colonnes suivantes la récurrence observée et prédite, on remarque que les écarts entre les valeurs prédite et observées sont très faibles (>3%), on peut donc en déduire que la suite suit effectivement la loi de Benford.

Leading digit	Observed	Predicted
1	44	41
2	22	24
3	15	17
4	12	13
5	11	11
6	9	9
7	11	8
8	6	7
9	7	6

Fractran

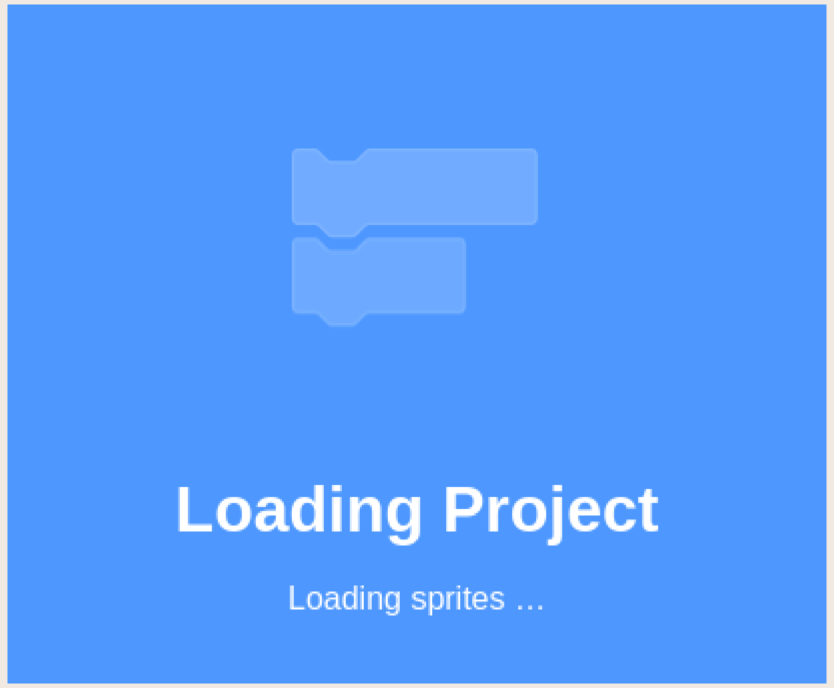
Le fractran est un langage de programmation dit complet de Turing (grossièrement, cela signifie que n'importe quel calcul pouvant être effectué par un ordinateur peut également être performé par lui) inventé par le mathématicien John Conway en 1987.

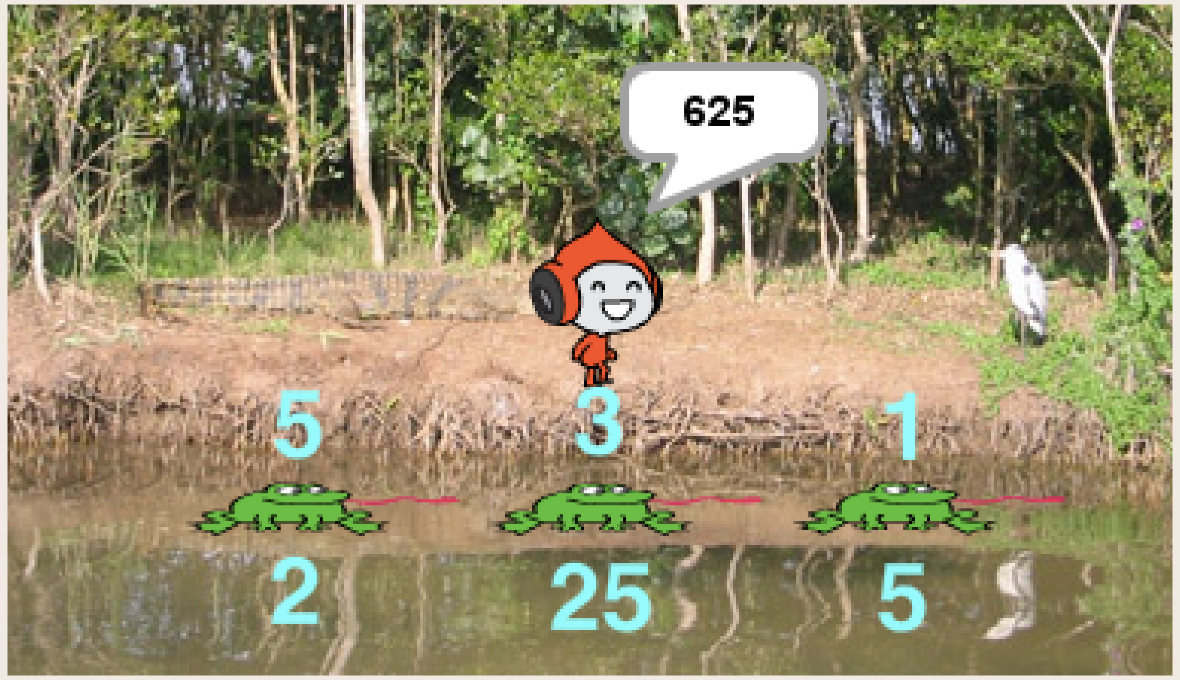
Un programme FRACTRAN est une liste de fractions positives avec un nombre entier positif initial en entrée n .

Pour chercher l'image de n , on regarde dans la liste la première des fractions qui multipliée par n donne un autre entier x , puis on applique de nouveau la procédure sur l'entier x . Si aucune des fractions de la liste multipliée par n ne donne un entier, la procédure s'arrête.

Tout ceci , peut à première vue sembler confus, nous illustrerons donc nos propos à l'aide d'une animation par Alain Busser : Dans cette animation , On donne à Pico un nombre de la forme 2^a et quand Pico a fini sa balade, il se retrouve avec le nombre 3^b où $2 \times b = a$ (ou a-1 selon la parité de a). dès que le résultat est entier, Pico remplace le nombre par le produit entier, et se téléporte au début du programme (juste avant la première fraction), avec ce nouveau nombre dans la tête ; sinon, il finit par arriver au bout sans avoir réussi une seule multiplication, et le programme s'arrête sur le nombre entier qu'il a avec lui.

Prenons 16 comme nombre de départ, Pico a 4 fois de suite réussi la multiplication de son nombre par 5 / 2 et se retrouve avec 625 (après avoir successivement eu 16, 40, 100 et 250) et a été à chaque fois téléporté au départ. La multiplication de 625 par 5/ 2 ayant échoué (ne donna pasun résultat entier) , Pico se dirige vers 3/25 qui va accepter la multiplication, ce qui aura pour effet de téléporter Pico au départ, avec 75 pour nouveau nombre à soumettre :





Tout cela ne va pas trop mal, nous pourrions continuer à nous amuser avec longtemps   mais alors quel est le rapport avec la suite de Syracuse ?

Un aspect intéressant de ce théorème est que sa démonstration est basée sur le caractère Turing-complet de ces suites de Collatz généralisées, et cela a amené Conway à inventer un langage de programmation plutôt original : FRACTRAN (nommé par contraction de "fractions" et "Fortran") , dans ce language tous les programmes sont des variatins de la fonction collatz " col" . On remarque en effet dans les diapositives précédentes une certaine ressemblance entre le fractran et avec les fonctions de Collatz généralisées (au delà de ça, l'aspect jeu mathématiques fait automatiquement penser à la conjecture).

II- Simplification par 3n+1/2

a_Explication

Les mathématiciens ont essayé de résoudre cette conjecture via maintes et maintes méthodes, une d'entre elles est d'essayer de simplifier cette conjecture, pour ainsi la rendre plus simple a résoudre. Une de ces simplification consiste à se dire que, pour tout nombre entier positif N, tel que N est impair, la conjecture est simplifiable par (3n+1) /2 . Ce qui semble logique , puisque quand on a un nombre impair, et qu'on le multiplie par 3 en ajoutant 1, on tombe nécessairement sur un nombre pair.

Ainsi , prenons l'exemple de 15, étant un nombre impair on le soumet a (3n+1) /2 et gagnons du temps dans l'opération des calculs. Le résultat est donc , (3x15) +1 = 46 /2 = 23

b_Intérêt

On a maintenant compris que la conjecture de Collatz peut s'écrire sous une forme comprimée telle que

si N pair ==> N/2

si N impair ==> (3*N+1)/2

Au-delà du fait que cela rend les calculs plus rapides, et de sorte le temps de vol plus court, cette forme comprimée a également un autre intérêt. Nous savons déjà que quand on a un nombre impair et qu'on le multiplie par 3 puis rajoutons 1 , on tombe obligatoirement sur un nombre pair. Admettons maintenant qu'en prenant un nombre N,pair ou impair, le nombre sur lequel on tombe après avoir appliqué la conjecture de Collatz sera à 50% de chance pair et à 50% de chance impair.

Après K opérations, le nombre initial a en moyenne été multiplié K/2 fois (50% des fois) par (½) et K/2 fois par (3/2). = Après K opérations , le nombre initial a en moyenne été multiplié par (¾)^K/2. Et puisque ¾ <1 , on doit en moyenne toujours décroitre.

Évidemment cet argument n'est pas une démonstration ou une preuve quelconque puisque les probabilités ne sont pas exactement égales à 50% en réalité mais il montre seulement qu'un contre-exemple allant a l'infini est assez improbable même s'il peut très bien exister.

c_Démonstration graphique : temps de vol

Nous allons maintenant démontrer graphiquement que la forme comprimée de la conjecture de Collatz :

si N pair ==> N/2

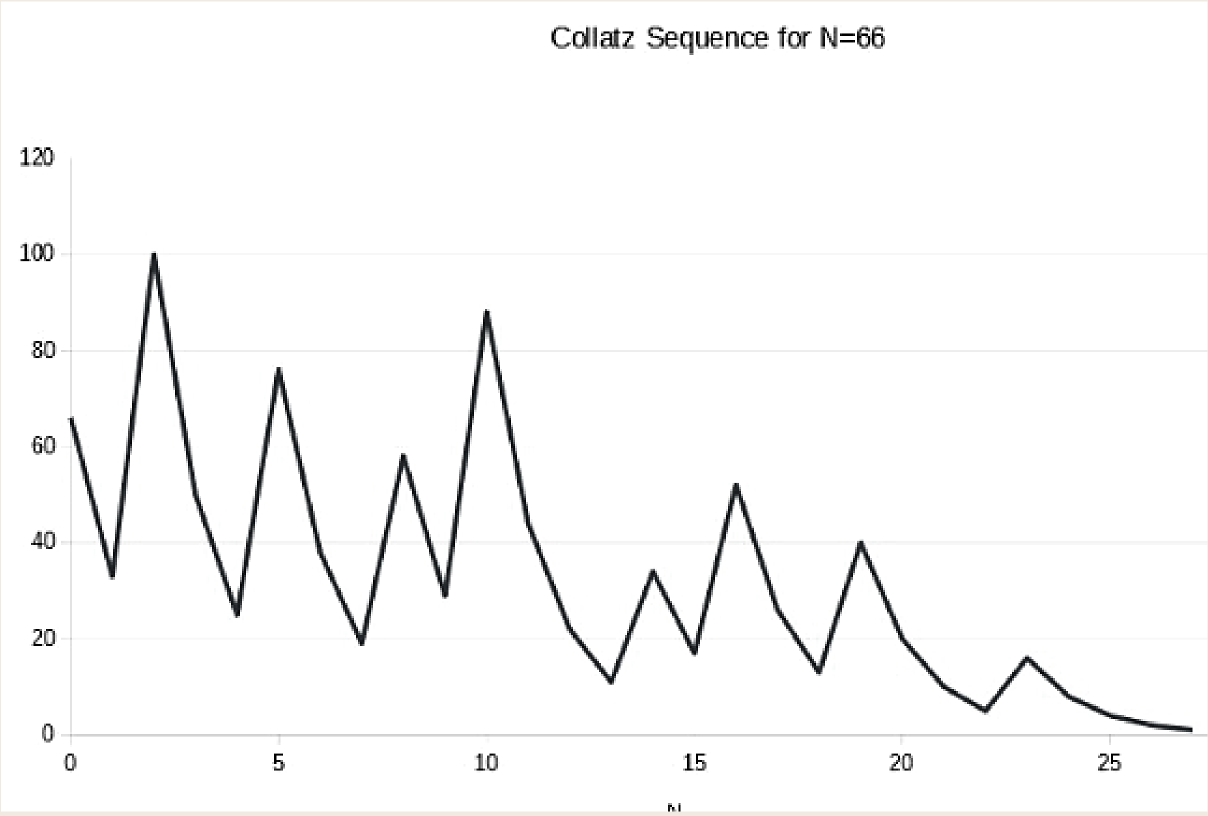
si N impair ==> (3*N+1)/2

Permet effectivement de réduire le temps de vol.

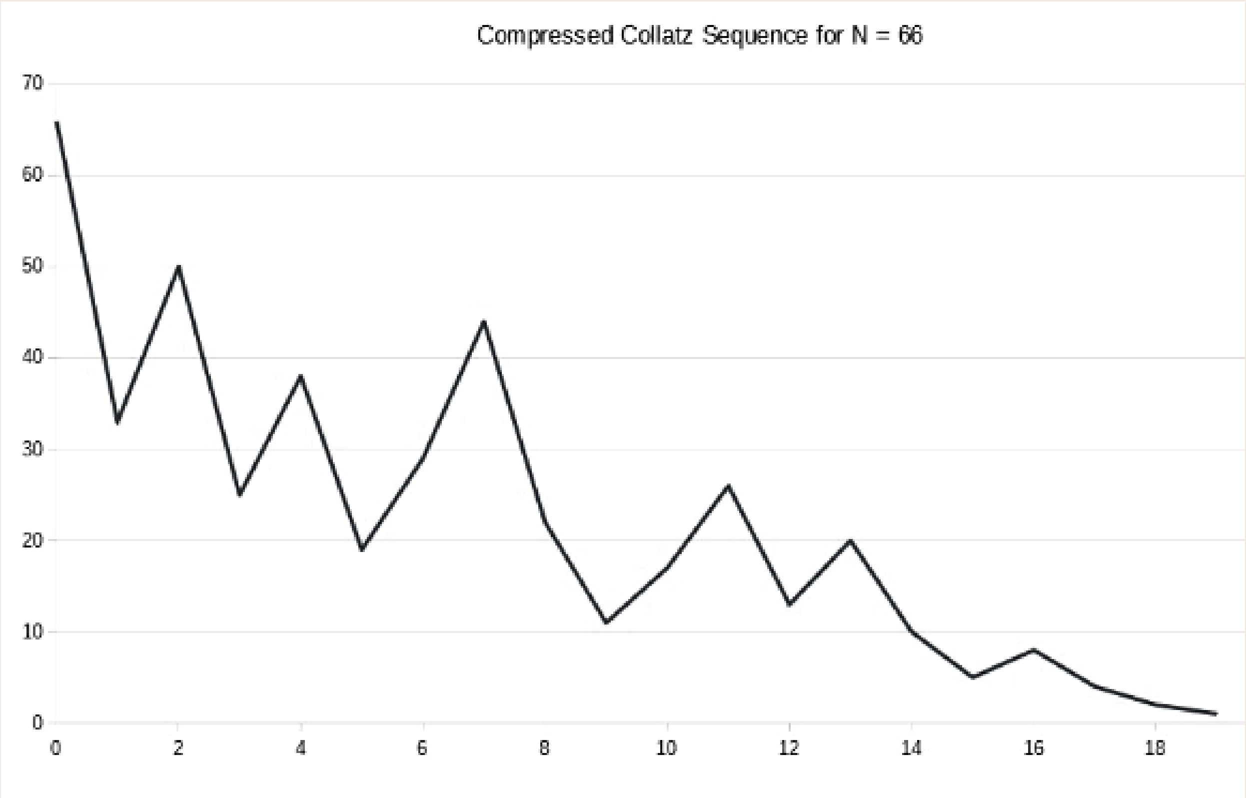
Prenons par exemple N = 66.

Le vol pour N=66 est {33, 100, 50, 25, 76, 38, 19, 58, 29, 88, 44, 22, 11, 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1} et le temps de vol de 27.

Graphique pour N=66:



Continuons avec N = 66 mais cette fois-ci avec sa forme comprimée.
Le vol devient alors {33 , 50 , 25 , 38 , 19 , 29, 44, 22, 11, 17, 26, 13, 20, 10, 5, 8, 4, 2, 1} et le temps de vol alors de 19 (Temps de vol qui passe de 27 à 19 pour le même N de départ)nous obtenons :



On constate directement que le temps de vol est plus court puisque le graphique de la forme compressé s'arrête à U19 , contre U27.

III- Variants

A_3n -1

Pour tenter de trouver une méthode afin d'avancer dans les recherches ,beaucoup de mathématiciens ont essayé de trouver des variants a la suite , ne s'éloignant pas trop de l'énoncé de base pour essayer de trouver un rapport avec la suite de Syracuse "originel" ou une avancée, un contre exemple. Certains ont essayé de remplacer 3n+1 par 3n-1 par exemple. Essayons alors :

Prenons par exemple 5, la suite donne alors: 14 → 7 → 20 → 10 → 5 → 14

Ce qui nous donne ici un cycle non trivial de longueur 5

Nous pouvons également essayer avec 3 : 8 → 4 → 2 → 1 → 4 …

Et encore une fois un cycle non trivial.

Or, il n'existe aucun cycle non trivial de longueur < 10^20 pour la conjecture de Collatz d'origine. Intriguant, non ? Tous les nombres entiers compris de 1 à 10^20, finissent par le cycle 4;2;1.

B_5N + 1

Une autre variante de la conjecture de Syracuse est très intéressante car elle permet d'illustrer simultanément les deux sous-problèmes de cette suite, c'est a dire :

- Est-il vrai que le seul cycle est le cycle 1,4,2,1 ?
- Est-il vrai qu'il n'y a aucune trajectoire divergente ?

Cette variante consiste à se dire, et si au lieu de multiplier par 3n lorsque le nombre est impair, on multipliait par 5.

Cette fois les suites ont des comportements bien différents

En partant de 6 on remarque le cycle 6;3;16;8;4;2;1 de longueur 7.

En partant de 5 , on a cette fois si un autre cycle: {26; 13; 66; 33; 166; 83; 416; 208; 104; 52; 26} de longueur 10 mais surtout qui ne retombe jamais sur 1.

Nous avons essayé 5 et 6 pourquoi pas essayer 7 ?

Cette variante de la suite de Syracuse en partant de 7 à un vol complètement différent. La suite grandit sans arrêt et diverge vers +∞

Nous avons donc ici trois cas de figures différents
Un premier ou la suite tombe sur un cycle qui termine par 1
Un second où la suite tombe également sur un cycle mais qui ne termine pas par 1
Et un dernier ou la suite semble diverger.
Pour expliquer ces cas de figures et particulièrement le dernier, il faut retourner s'appuyer sur le raisonnement probabiliste utilisé plus tôt. Nous avions vu qu'en moyenne les nombres de la suite de Syracuse était multiplié par environ ¾ et donc que cela expliquait l'aspect globalement décroissant de la suite de Syracuse. Si l'on fait maintenant le même raisonnement avec la variante ou l'on multiplie par 5 au lieu de 3. On s'aperçoit que chaque terme sera multiplié en moyenne par 5/4 : (5/2 x ½) (On néglige le +1 car il devient insignifiant quand on s'attaque à de grands nombre et cherchons à étudier l'allure de la suite.)
Ce qui expliquerait la tendance de la suite a plutôt croitre que décroitre. Ce que l'on observe effectivement en partant par exemple du nombre 7.

C_AVEC DES ENTIERS NÉGATIFS

Pour proclamer résoudre la Conjecture de Collatz, il faudrait donc réussir à trouver soit , un nombre qui diverge jusqu'à +∞ , un nombre qui rentre dans un cycle autre que 4;2;1, ou prouver que tout les entiers positifs finissent par 4;2;1.Mais pourquoi exclure les entiers négatifs? Et bien essayons avec ces nombres.

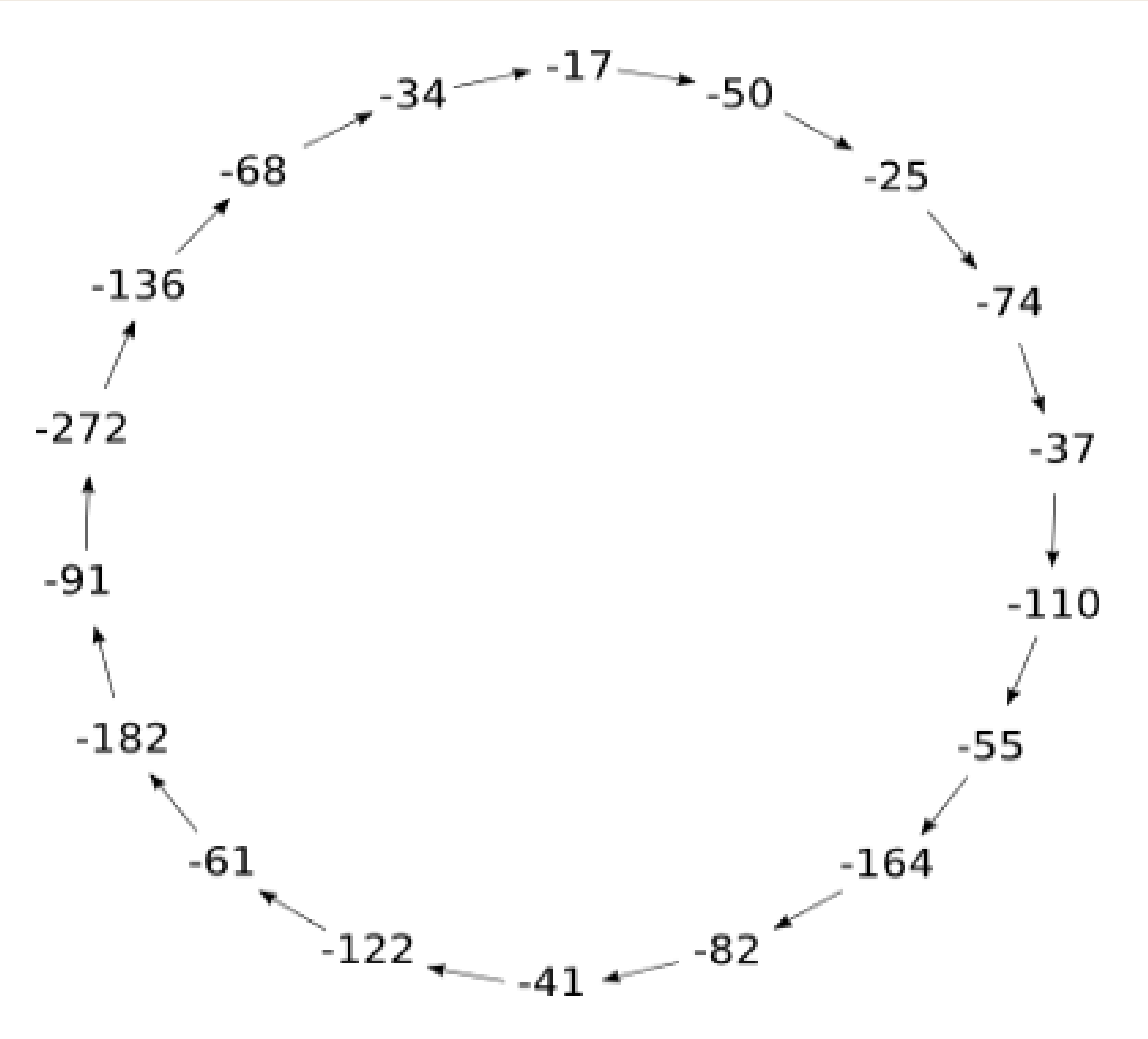
Pour -1 par exemple: -1 étant impair → 3x(-1) +1 → -2. Continuons le cycle : -2/2 → -1 .On constate alors un cycle de longueur 2. Cependant ce n’est pas le seul.

La trajectoire de -5 notamment : -5 → -14 → -7 → -20 → -10 → -5

Et on observe donc un cycle de longueur 5

D’autre cycles existent aussi tel que celui de la trajectoire de -17, de longueur 18

Voici une représentation de ce cycle :



Nous avons donc vu que des cycles existent dans les entiers négatifs comme celui de trajectoire -5 et de longueur 5 , mais existe-il d'autre cycle que celui de longueur 3: 4;2;1, dans les entiers positifs cette fois-ci? Par exemple , y'a t-il la possibilité qu'un autre cycle de longueur 3 existe dans la suite ?

PREUVE QU'IL N'Y A QU'UN CYCLE DE LONGUEUR 3

Nous allons raisonner sur la parité des termes qui composent ces suites.

Nous nous appuierons une fois de plus sur le fait que si un nombre est impair , son successeur sera nécessairement pair et plus grand. Tandis que si un nombre est pair son successeur sera plus petit mais peut être pair comme impair.

Cherchons un cycle A → B → C ou via l'application de Syracuse , A donne B , B donne C et C donne A .

Admettons que A est le plus petit du cycle , nous pouvons donc affirmer que A est impair

Preuve que le plus petit nombre d'un cycle est nécessairement un réel impair:

Notons C = le cycle

m = son plus petit élément

m' = le nombre obtenu par la CC a partir de m

m' ∈ C

m' > m puisque m = minimum dans C

Si m pair alors m' = m/2

→ m/2 < m : → m est impair

Retour a la preuve ≠ cycle de longueur 3

B = 3A + 1 et est pair

C = B/2 → (3A+1)/2

Puisque C donne A et que C est nécessairement > A.

C est pair

A= ((3A+1)/2)/2

A = (3A+1)/4

Résolvons maintenant l'équation :

4A=3A+1

4A-3A=1

A=1

Ainsi , si un cycle de longueur 3 existe, il commence par 1. Donc on retombe sur : 1 → 4 → 2 → 1

Preuve ≠ cycle de longueur 5

En utilisant la même logique que précédemment mais cette fois avec un cycle de longueur 5 c'est-à-dire un cycle ou A donne B , B donne C etc jusqu'à ce que E donne A. Nous constatons que :

$B = 3A+1$

$C= B/2$

$D= 3C+1$, $E= D/2$ et

$A=E/2$

$A=(3(3A+1)/2+1)/4$

$4A-1=3(3A+1)/2$

$8A-2=9A+3$

$-A=5$

$A=-5$

Donc, un cycle de longueur 5 existe effectivement, mais dans les entiers négatifs.

En appliquant la même logique mais en poussant les calculs plus loin , on arrive à démontrer qu’il n’existe aucun cycle d’entier positifs de longueur inférieure ou égale à 180 000 000 000

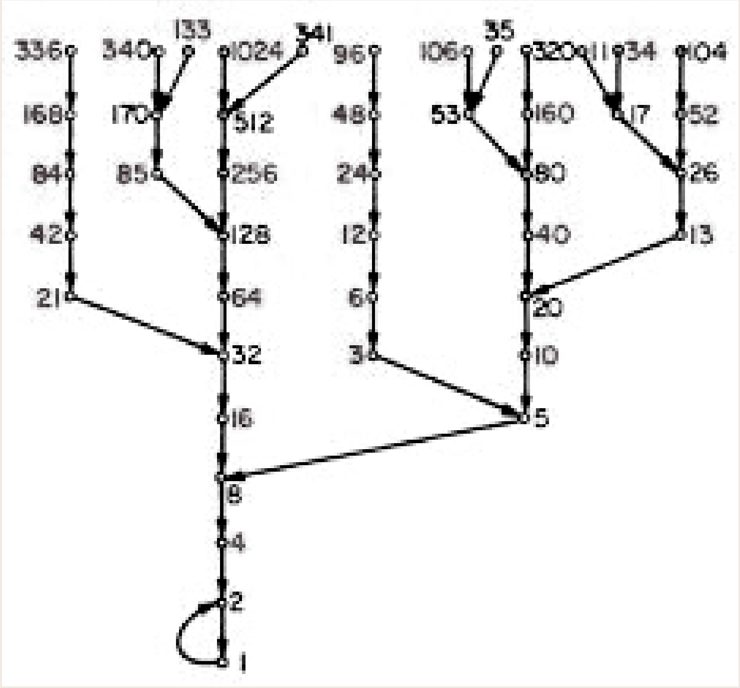
IV- Applications externes

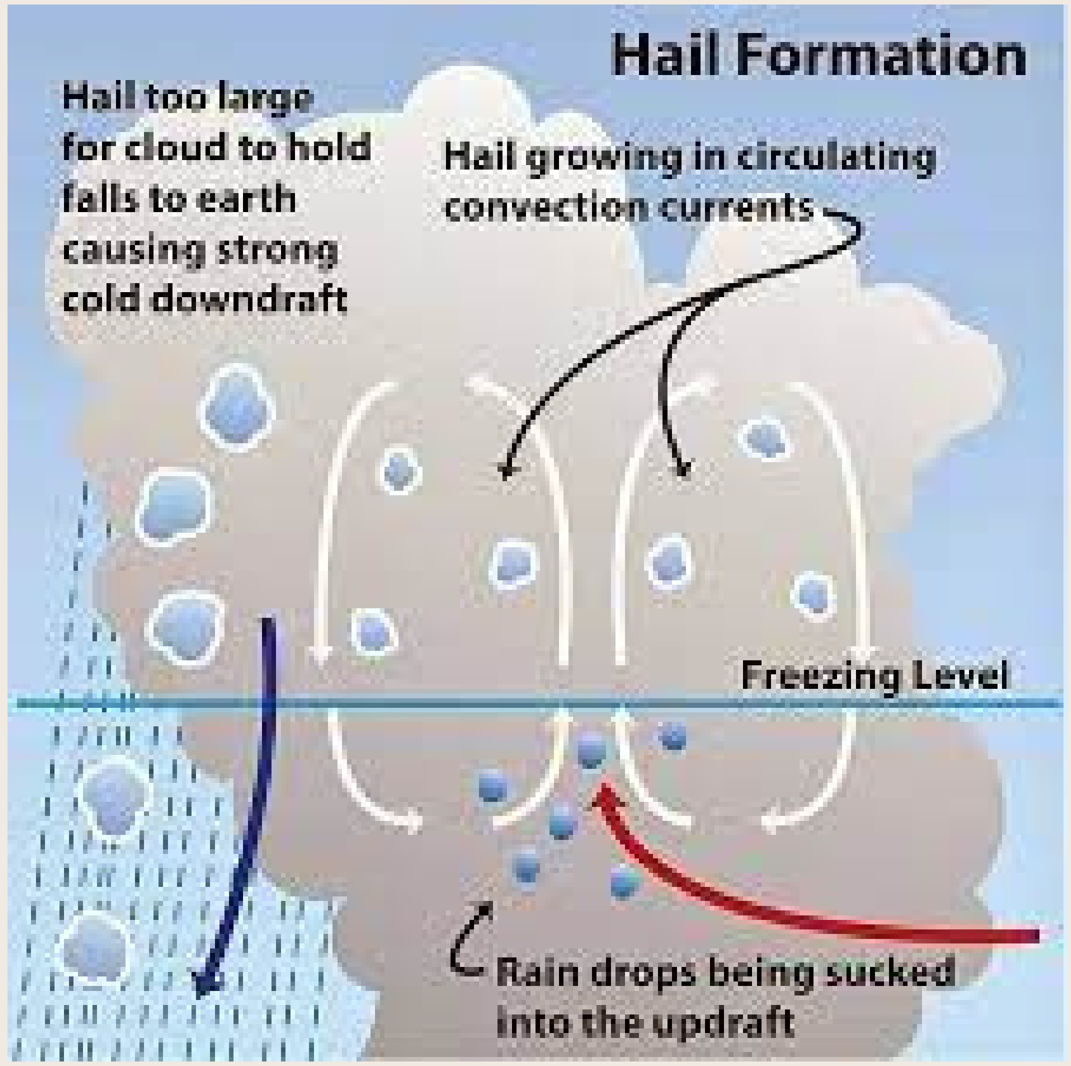
A_ Système des fluides dans un écosystème

Avant propos:

Nous le savons, les maths sont à la base de la pyramide du savoir, le modèle mathématique, son raisonnement est plaqué au fonctionnement de la vie, pour nous aider à le comprendre. La conjecture de Collatz elle possède des interêts allant au delà du divertissement, nous l'avons vu au fractran et à la loi de benford, mais penchons nous également vers un phénomène naturel tel que les fluides les écosystème ou le climat, la plus simple équation mathématique peut ainsi conduire à de complexes dynamiques

LA FORMATION DE LA GRÊLE





Les séquences de Collatz sont également appelées de "hailstones" , en effet, elles peuvent rebondir de haut en bas un peu comme des grêlons dans un nuage.
On voit en effet à droite la dynamique autour des grêlons, l'eau par évaporation atteint les nuages, s'en suit un mouvement de convection (les boucles qui vont de haut en bas) amenant ces molécules jusqu'à une température assez basse pour qu'elles gèlent et soient assez lourdes pour redescendre, exactement comme les nombres de la suite de Collatz, à gauche, la dynamique est la même, on monte, on passe du temps en haut et on redescend , jusqu'arriver en bas, jusqu'à converger vers 1.

V-Possibles solutions :

A_théorème de Terras

Même s'il ne semble toujours pas avoir de de solutions a la Conjecture de Collatz ou de preuve concrète a ce jour. En 1976 le mathématicien Estonien-Americain Riho Terras a prouvé que presque tous les N dans la Conjecture de Collatz, finissaient par arriver à un point ou un autre ,par être inférieur à leur point de départ. (Et donc décroitre ...) C'est-à-dire que pour, prenons l'exemple de Uo=66, dans la séquence de 66 , f est a un moment ou un autre < 66.

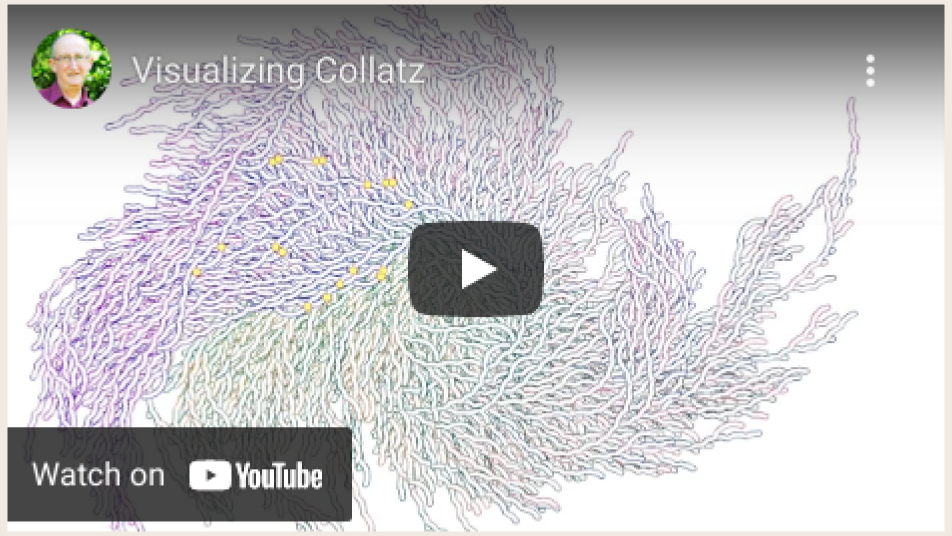
B_Terence Tao

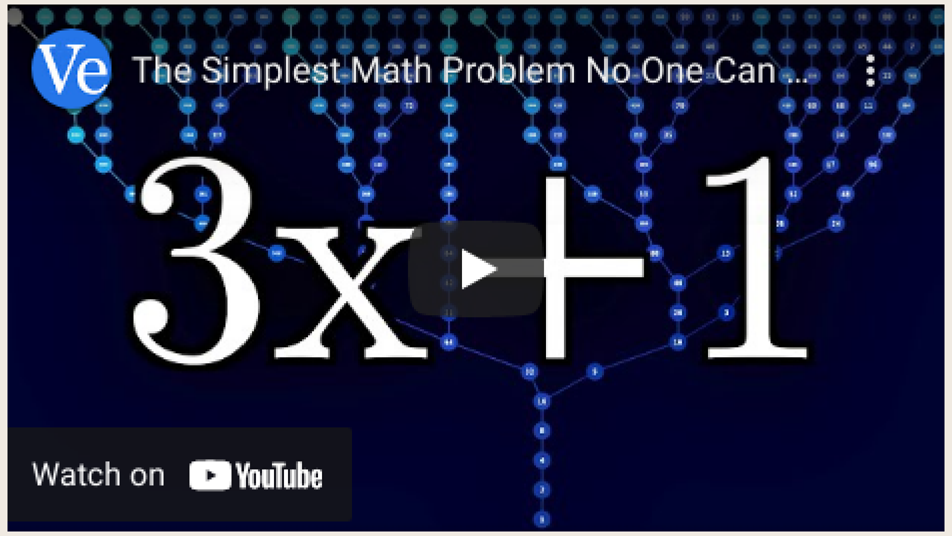
En septembre 2019 , Terence Tao, un des plus grands mathématiciens au monde a amélioré ces résultats.Là où Terras a prouvé que pour presque tous les nombres, la suite de Collatz de N (nombre initial) finit en dessous de n, Tao a prouvé que la conjecture de Syracuse est presque vraie pour presque tous les entiers.C'est à dire que pour presque toute les séquence de Collatz, N finit par être à un stade ou un autre inférieur à N/2, inférieur à √n, inférieur à Ln de N et il a même montré que pour toute fonction f telle que lim f = +∞ , alors le vol de N passe en dessous de f(N).

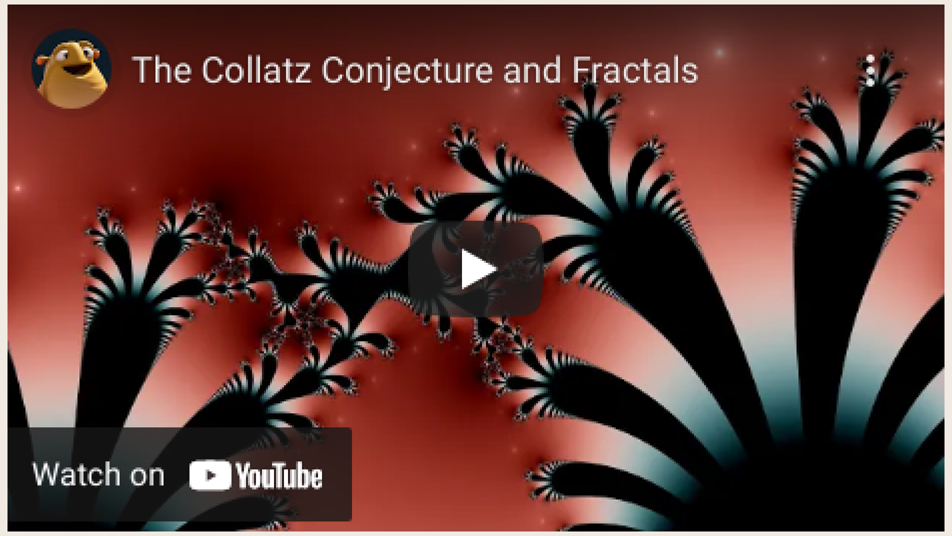
Dans une conférence, Tao a dit que ce résultat était le plus proche que l'on puisse arriver à la résolution de la conjecture sans réellement la résoudre.

SOURCES UTILISÉES

- REDDIT
- POURLASCIENCE.FR
- IMAGES. MATHS.CNRS.FR







LIENS INTÉRÉSSANTS

→

GRAPHIQUE MANIPULABLE

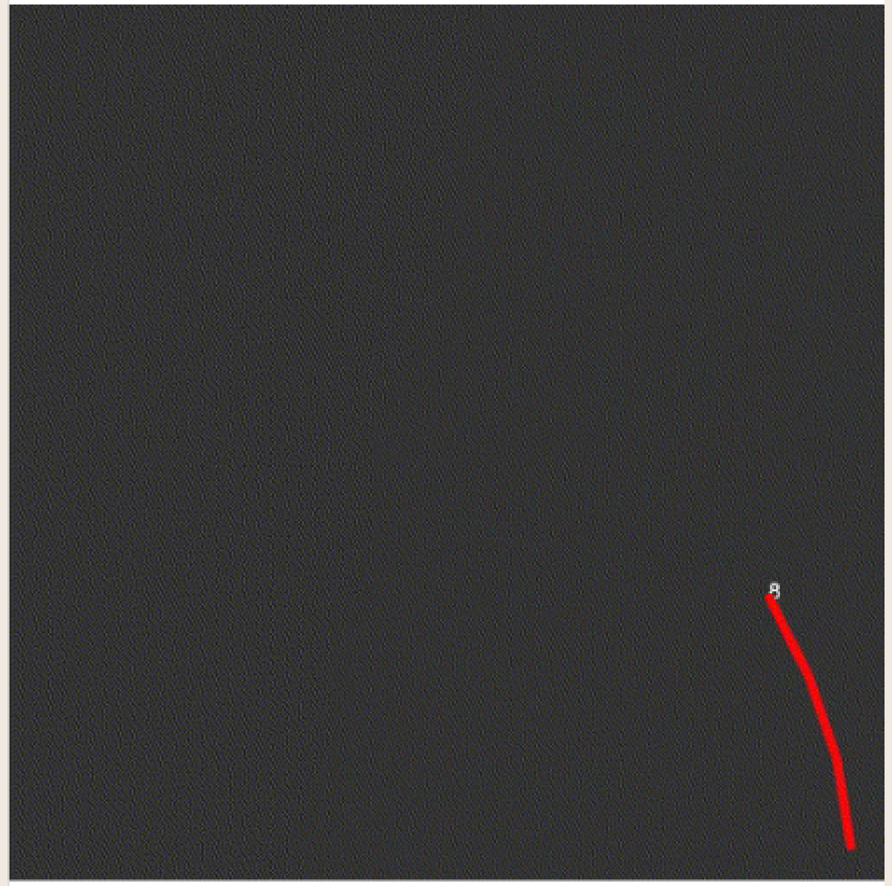
Collatz Graph: All Numbers Lead to One

jasondavies.com /

ANIMATION DE LA SUITE (BUT ESTÉTIQUE)

.

Share



Collatz tree up to n = 1 000 000.

3,950

imgur