Keziah Noam
Mohammed Zaher
Adem Ouhenna
Mohammed Bakari

SOMMAIRE

-Le chemin le plus court entre deux points est-il une droite-

I-Définition du sujet

a- Un “chemin” en maths est une suite de points délimitée par un point initial et par un point final. Il peut être représenté sous plusieurs “forme” comme la droite, forme à laquelle on s’intéresse, elle est définie par une succession de points alignées.
Mais dans quelles espaces sont représentés D
Le plus court chemin entre deux points est toujours la ligne droite, si et seulement si les deux points sont parfaitement alignés (valable dans un espace euclidien).

b- Cependant il existe différents espaces dans lesquelles on peut déterminer le chemin le plus court:

1°/L’espace Euclidien

En mathématiques, un **espace euclidien** est un objet algébrique permettant de généraliser de façon naturelle la géométrie traditionnelle développée par Euclide, dans ses Éléments.

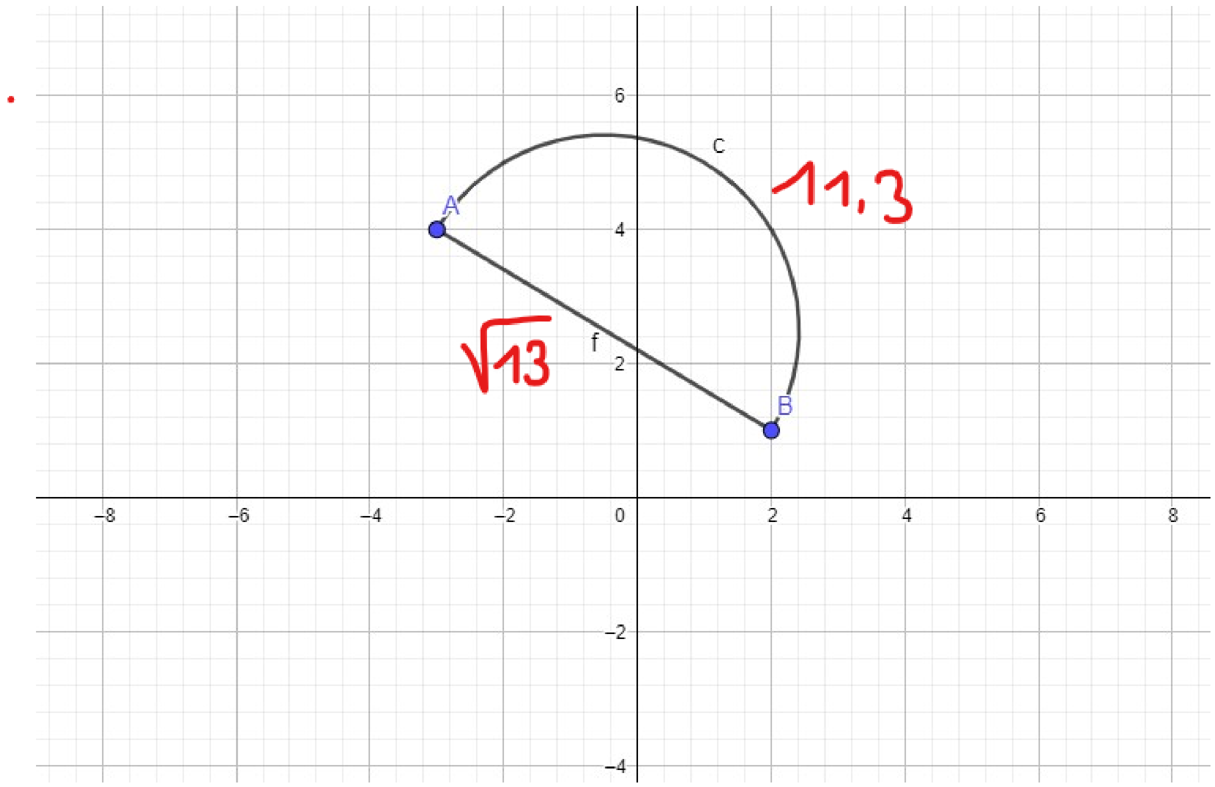
2°/La Terre(globe)

3°/La géométrie riemannienne

Il s'agit de surfaces ou d'objets de plus grande dimension sur lesquels existent des notions d'angle et de longueur, généralisant la géométrie traditionnelle qui se limitait à l'espace euclidien.

II- Approche mathématique du sujet

a- le cas du chemin dans un plan rectiligne



On va s’intéresser en premier temps au plan rectiligne (ou espace euclidien). Dans cet espace, le chemin le plus court entre deux points est en effet la droite.
Démonstration:

soit un plan orthonormé, deux point A (-3;4) et B (2;1) et un arc de cercle c reliant ces deux points:

- les points A et B modélise le chemin, avec a le “départ” et l'arrivée"

On cherche à démontrer que la droite représente le chemin le plus court dans l’espace euclidien, en faisant la comparaison entre la longueur d’un segment et d’un arc de cercle reliant respectivement les points A et B.

calcul du segment (A;B)= $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

AB=√(-5)-(-3))²**+(7-4)²**
AB= √13

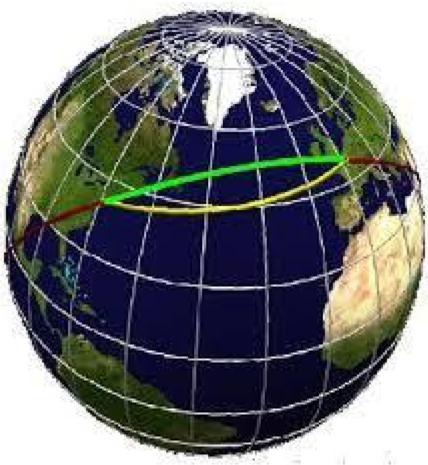
calcul de l’arc de cercle C:
soit c= 2x π x Rx a/360→ R= √13 a= valeur de l’angle soit 180°
c=2π x √13x 160 / 360

= 11,327…

conclusion: (A;B)> arc de cercle, alors la droite est ici le moyen optimal pour minimiser la longueur du chemin

→la longueur la plus courte en tenant compte de la nature du plan est la droite, soit √13 cm

b- Le cas de la sphère (Exemple la Terre)



Ensuite dans le cas de la sphère nous allons prendre l’exemple de la Terre. Il existe deux routes connues pour voyager entre deux points de la Terre: La route orthodromique et la route loxodromique.

-En revanche l'**orthodromie** désigne le chemin le plus court entre deux points d'une sphère, c'est-à-dire le plus petit des deux arcs du grand cercle passant par ces deux points. La route orthodromique entre deux points A et B du globe terrestre correspond à la route la plus courte entre eux.

Calcul de la distance orthodromique :

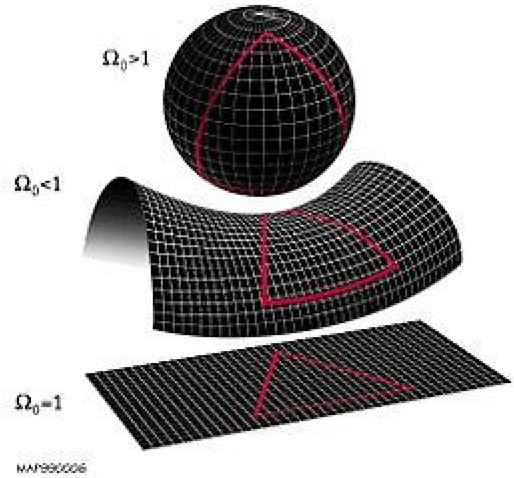
Pour calculer cette distance, on utilise la formule des cosinus de la trigonométrie sphérique.

Soient la et lb les latitudes de A et B et La et Lb leurs longitudes.

Pour cela on considère le triangle ABC tel que *C* soit le pôle nord. Les côtés du triangle sont *a* (complémentaire de **la** pour *A*), *b* (complémentaire de **lb** pour *B)*, et l'angle γ du triangle en C vaut LB − LA (différence des longitudes). L'arc AB vaut :

c = arccos[sin(la).sin(lb) + cos(la).cos(lb).cos(LB − LB)]

c- Le cas de la géométrie Riemannienne



Les concepts les plus notables de la géométrie riemannienne sont la courbure de l'espace étudié et les **géodésiques**, courbes résolvant un problème de plus court chemin sur cet espace.
En géométrie, une **géodésique** est la généralisation d'une ligne droite sur une surface. En particulier, le chemin le plus court ou un des plus courts chemins, s'il en existe plusieurs, entre deux points d'un espace pourvu d'une métrique est une géodésique.

III- Sur Python ?

Sur python il existe plusieurs programme pour connaître le chemin le plus court, on va s'intéresser à deux algorithmes, l'algorithme glouton et l'algorithme de Dijkstra (plus compliqué)
L'Algorithme glouton: c'est un algorithme qui va chercher le trajet le plus optimisé par exemple entre plusieurs villes.
La problématique est: Un voyageur de commerce doit visiter une et une seule fois un nombre fini de villes et revenir à son point d'origine. Il s'agit

de déterminer l’ordre de visite des villes qui minimise la distance totale parcourue par le voyageur . C’est un problème connu en informatique. C’est le mathématicien William Rowan Hamilton qui a posé pour la première fois ce problème sous forme de jeu en 1959.

L’algorithme glouton est la manière la plus simple est rapide de résoudre un problème .Par exemple dans ce cas au lieu de vérifier tous les chemin possible ce qui prend enormement de temp en fonction du nombre de ville à visiter même pour une machine . Donc l’algorithme que nous allons utiliser qui se trouve ci-dessous va nous permettre de trouver les chemin le plus court juste en choisissant a chaque fois la ville la plus proche .
l’algorithme glouton:

```
def voyageurGlouton():

    trajet=[0]
    n=len(L)
    visitees=[False for i in range(n)]
    ville=0
    for i in range(n-1):
        visitees[ville]=True
        suivante=plusProche(ville,visitees)
        trajet.append(suivante)
        ville=suivante
    trajet.append(0)
    return trajet
```

Exemple:
la ville de départ et Nancy , je rappelle qu'à la fin il faut revenir à la ville de départ . le voyageur doit passer par paris, reims et metz donc :
tableau des distance entre chaque ville :

	nancy	metz	paris	reims
nancy	0	55	303	188
metz	55	0	306	203
paris	303	306	0	123

reims	188	176	142	0

Le chemin le plus rapide d’apres l’algorithme est :
nancy> metz>reims>paris >nancy

Conclusion du sujet
“Le chemin théoriquement le plus court, parce que le plus direct, entre deux points, devrait être la ligne droite. Et ce serait la ligne droite, si l’univers était parfaitement plat” Jean-Marc Lévy-Leblond (physicien)
En clair, le chemin le plus court entre deux points est celui qui se module le mieux dans l’espace dans lequel il se trouve. Dans le cas de l’espace euclidien c’est la droite, dans celui de la sphère c’est la courbe.

Dire que “le chemin le plus court entre deux points est la droite” est donc valide à condition qu’il est question de l’espace euclidien.

Have fun ! ;)