

Chapitre 8 - Équation - Inéquation



1 Égalité et Équation

1.1 Propriété des égalités

Propriété

$$a, b, c \in \mathbf{R} \text{ et } d \in \mathbf{R}^*$$

- $a = b \iff a + c = b + c$
- $a = b \iff a \times d = b \times d$
- $a = b \iff a - c = b - c$
- $a = b \iff \frac{a}{d} = \frac{b}{d}$

Propriété

- un produit de 2 nombres est nul ssi un de ces nombres est nul
- par exemple $6 \neq 0$ car $6 = 2 \times 3$ et $2 \neq 0$ et $3 \neq 0$

1.2 Équation

Définition

- une équation est une "égalité" en 2 expressions
- une équation contient donc le signe $=$ pour traduire l'égalité
- une équation en fonction de x contient le signe $=$ et des x à priori inconnu ; elle peut être vraie ou fausse en fonction des valeurs de x
- résoudre une équation, c'est justement trouver les valeurs de x qui permettent d'avoir l'égalité

Remarque - Exemple

- on peut résoudre une équation sur \mathbf{R} ou sur une partie de \mathbf{R}
- il faudra donc penser à vérifier que les valeurs trouvées par le calcul sont dans l'intervalle de recherche
- par exemple : $2x = 0$ admet la solution 0 sur \mathbf{R} mais n'a pas de solution sur $[1; 2]$
- résoudre $2x + 1 = 3x - 2$

1.3 Factorisation - Développement

Propriété

- $a, b, c, d, k \in \mathbf{R}$
- $k \times (a + b) = k \times a + k \times b$
 - $k \times (a - b) = k \times a - k \times b$
 - $(a + b) \times (c + d) = ac + ad + bc + bd$

Exemple

- $2(x + 1) = 2x + 2$
- $(\sqrt{2} + 1) \times (\sqrt{2} + 3)$
 $= (\sqrt{2})^2 + 3\sqrt{2} + \sqrt{2} + 3 = 5 + 4\sqrt{2}$

1.4 Identité Remarquable

Propriété

- $a, b \in \mathbf{R}$
- $(a + b)^2 = a^2 + 2 \times a \times b + b^2$
 - $(a - b)^2 = a^2 - 2 \times a \times b + b^2$
 - $(a + b) \times (a - b) = a^2 - b^2$

Exemple

- $(x + 1)^2 = x^2 + 2 \times x \times 1 + 1^2 = x^2 + 2x + 1$
- $(\sqrt{2} + 1) \times (\sqrt{2} - 1) = (\sqrt{2})^2 - 1^2 = 2 - 1 = 1$

2 Inégalité et inéquation

2.1 Propriété des inégalités

Propriété

- $a, b, c \in \mathbf{R}$ et $d \in \mathbf{R}^*$
- $a < b \iff a \pm c < b \pm c$
 - si $d > 0$ alors : $a < b \iff a \times d < b \times d$ et $a < b \iff \frac{a}{d} < \frac{b}{d}$
on dit que le sens de l'inégalité est conservé
 - si $d < 0$ alors : $a < b \iff a \times d > b \times d$ et $a < b \iff \frac{a}{d} > \frac{b}{d}$
on dit que le sens l'inégalité est inversé

Propriété

- $a, b, c, d \in \mathbf{R}$
- si $a < b$ et $c < d$ alors $a + c < b + d$
 - si $0 < a < b$ alors $\frac{a}{b} < 1 < \frac{b}{a}$
 - par exemple, montrer pour tout n entier non nul :
 $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} \leq 1$

2.2 Exemple important

Méthode

- on cherche à résoudre des inéquations du type :

- $x \times (x - 2) \leq 0$

- $\frac{x}{x - 2} \geq 0$

- $\frac{x}{x - 2} \leq 2$

- $x \times \sqrt{x - 2} \leq 0$

- **étape 1** : valeur interdite
- pas de division par 0
- pas de valeurs négatives sous les racines
- **étape 2** : 1 produit est nul ssi 1 de ses facteurs est nul
- d'un côté, avoir 1 expression factorisée (produit ou fraction)
- de l'autre, avoir 0
- **étape 3** : tableau de signe
- mettre 1 ligne par facteur
- mettre à la fin l'expression complète (attention aux valeurs interdites si il en a)
- **étape 4** : solution
- lire la réponse dans le TdS
- écrire la réponse : $S = \dots$

Exemple

- résoudre : $x \times (x - 2) \leq 0$

- résoudre : $\frac{x}{x - 2} \geq 0$

- résoudre : $\frac{x}{x-2} \leq 2$

- résoudre : $x \times \sqrt{x-2} \leq 0$

Cas particulier

- il peut arriver que l'équation (ou l'inéquation) soit très simple
- dans ce cas, on peut accélérer la méthode
- résoudre : $\frac{1}{x} = 10$
- résoudre : $\frac{1}{x} \leq -5$

2.3 Encadrement d'un nombre réel et arrondi

Propriété - Définition

$x \in \mathbf{R}$ et $n \in \mathbf{Z}$

- $\exists ! a \in \mathbf{Z}$ tel que : $\frac{a}{10^n} \leq x < \frac{a+1}{10^n}$
- c'est un encadrement de x à 10^{-n} près
- l'arrondi de x à 10^{-n} près est celui des 2 nombres $\frac{a}{10^n}$ ou $\frac{a+1}{10^n}$ qui est le plus proche de x

Exemple :

- encadrer 16,8127 à 0,01 près
- encadrer puis donner une valeur approchée de 0,045578 à 10^{-3} près
- encadrer -8,5065 à 0,001 près
- encadre 0,65 à 10^{-2} près

2.4 Inéquation

Définition

- une inéquation de x est une inégalité qui peut être vraie pour certaines valeurs de x
- la résoudre revient à trouver les valeurs de x qui vérifie l'inéquation (attention à l'ensemble de recherche au départ)

Exemple

- résoudre dans \mathbf{R} , $2x + 2 < 1$
- résoudre dans \mathbf{R} , $\frac{x}{1-x} < 1$

3 Un peu de python

3.1 encadrement d'un nombre

```
1 def balayage(epsilon):
2     """ cette fonction fournit un encadrement de racine de 2
3     par balayage, avec une précision de epsilon """
4     x = 1
5     while x ** 2 < 2:
6         x = x + epsilon
7     return (x - epsilon, x)
8
9 print(balayage(0.1))
```

Modifier le programme pour que le paramètre d'entrée soit $n \in \mathbf{N}^*$ et que la précision soit de 10^{-n}

3.2 des résultats étonnants sur les égalités

on savait déjà qu'il y a un problème d'égalité avec :

```
1 # problème lié au stockage binaire des nombres sur ordinateur
2 print(0.3)
3 print(0.1+0.2)
```

en voici un autre :

```
1 # l'exécution ne peut s'arrêter car x n'est jamais égal à 0.0
2 x = 1.0
3 while x != 0.0:
4     x = x - 0.1
```
