

Chapitre 9 - Droite et Système



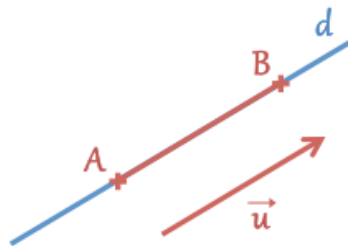
1 Équation cartésienne de droite : $ax + by + c = 0$

1.1 1 point A et un vecteur directeur \vec{u}

définition - propriété

\vec{u} un vecteur non nul et A un point

- **vecteurs colinéaires** : \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires si $\boxed{\exists k \in \mathbf{R} \text{ tq } \vec{v} = k \times \vec{u}}$
- **droite (AM)** : l'ensemble des points M tels que \overrightarrow{AM} et \vec{u} sont colinéaires
- **vecteur directeur de (AM) = (A; \vec{u})** : \vec{u} est un vecteur directeur de (AM)
- **droites parallèles** : $\boxed{d_1 // d_2 \iff \text{même direction} \iff \text{vecteurs directeurs colinéaires}}$
- **exemple** : (d) passe par A et B et dirigée par \vec{u} (ou par \overrightarrow{AB})

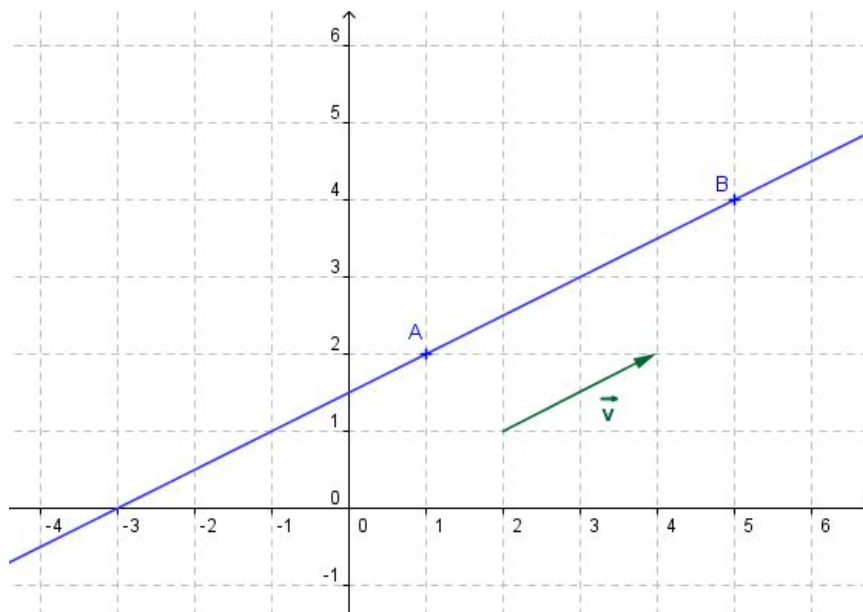


1.2 $ax + by + c = 0$ avec $ab \neq 0$

définition - propriété

a et b tq $\boxed{a \times b \neq 0}$ (cad au moins 1 des 2 non nul)

- **équation cartésienne** : l'ensemble des points $M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ tq $ax + by + c = 0$ est une droite d
- **un vecteur directeur de d** : $\vec{u} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$
- **HP** : un vecteur perpendiculaire à d : $\vec{v} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$
- **points intéressants** : si $b \neq 0$ alors $A \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{c}{b} \end{pmatrix} \in d$ ou si $a \neq 0$ alors $B \begin{pmatrix} -\frac{c}{a} \\ 0 \end{pmatrix} \in d$
- **1 droite $d \iff$ 1 équation cartésienne**
- trouver l'équation cartésienne de la droite ci-dessous, de 2 façons différentes :



2 Équation réduite droite : $y = ax + b$ ou $x = k$

Droite particulière : $y = k$ ou $x = k$

Propriété

on considère 1 droite d d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$

- si $a = 0$ alors $d \parallel (O; \vec{i})$: l'équation de d revient à $y = k$ où $k \in \mathbf{R}$: **droite horizontale**
- si $b = 0$ alors $d \parallel (O; \vec{j})$: l'équation de d revient à $x = k$ où $k \in \mathbf{R}$: **droite verticale**
- sinon, la pente de d est "en biais" : $\boxed{\text{pente : } -\frac{b}{a}}$ et $\boxed{\text{ordonnée à l'origine : } -\frac{c}{a}}$

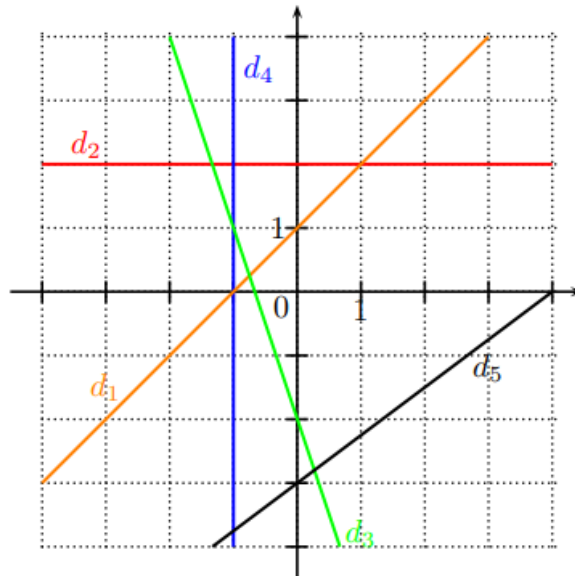
Équation réduite d'une droite "en biais" : $y = ax + b$

Propriété

- soit $(d) : ax + by + c = 0$:
 - (d) n'est pas verticale $\Leftrightarrow b \neq 0$
 - dans ce cas, l'écriture se simplifie pour donner : $(d) : y = ax + b$
 - ATTENTION : il ne s'agit pas des mêmes a et b de l'équation cartésienne)

- dans l'équation $y = ax + b$, on appelle a la **pente** et b l'**ordonnée à l'origine**
- **1 vecteur directeur de d :** $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}$
 j'avance de +1 et je monte (ou je descends) de la pente
- HP : **1 vecteur normal à d :** $\vec{v} \begin{pmatrix} a \\ -1 \end{pmatrix}$

- **pente :** (AB) d'équation $y = ax + b$ passant par $A \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \end{pmatrix}$ et $B \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \end{pmatrix}$ a pour pente $a = \frac{y_b - y_a}{x_b - x_a}$
- trouver l'équation cartésienne des droites suivantes :



3 Système

3.1 Système linéaire 2 équations 2 inconnues

Définition - Propriété

- $\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ 3x - 2y = -1 \end{cases}$ est un système d'inconnues x et y
- une solution de ce système est un **couple** $(x;y)$ qui vérifie **simultanément** les **2 équations**

Résolution

- on verra en exercices 2 méthodes par le calcul et 1 méthode graphique pour résoudre ce système
- (HP) : on peut aussi résoudre ce système grâce aux matrices

3.2 Lien avec la géométrie

Propriété

- en mathématiques comme ailleurs, il est toujours important de comprendre ce que l'on fait
- résoudre 1 système 2×2 , c'est rechercher une solution commune aux 2 équations
- chaque équation représente une droite
- il est donc clair que, par distinction de cas, la solution du système est l'**ensemble vide** (droite parallèles disjointes, **1 point** (droites sécantes), **la droite elle-même** (droite identiques)
- remarque : on rappelle que 2 droites sont parallèles ssi on les dirige par le même coefficient directeur (même pente)

4 Un peu de python

4.1 Algorithme 1 : alignement de 3 points

```

1 # Etudier l'alignement de trois points dans le plan, version 1
2
3 def CoefficientDirecteur(x1,y1,x2,y2): # On se place dans le cas où x1 ↔
    est différent de x2
4     return (y2-y1)/(x2-x1)
5
6 def OrdonneeALorigine(x1,y1,x2,y2): # On se place dans la cas où x1 est ↔
    différence de x3
7     return y1-CoefficientDirecteur(x1,y1,x2,y2)*x1
8
9 def PointsAlignes(x1,y1,x2,y2,x3,y3):
10     if abs(x1-x2) < 10**(-12):
11         if abs(x1-x3) < 10**(-12):
12             return True
13         else:
14             return False
15     else:
16         a = CoefficientDirecteur(x1,y1,x2,y2)
17         b = OrdonneeALorigine(x1,y1,x2,y2)

```

```

18         if abs(y3-a*x3-b) < 10**(-12):
19             return True
20         else:
21             return False
22
23 # Version 2, utilisant la colinéarité de vecteurs
24 def determinant(xu,yu,xv,yv):
25     return xu*yv-yu*xv
26
27 def PointsAlignes2(x1,y1,x2,y2,x3,y3):
28     if abs(determinant(x2-x1,y2-y1,x3-x1,y3-y1))<10**(-12):
29         return True
30     else:
31         return False

```

4.2 Algorithme 2 : équation de droite

```

1
2 def EquationDeDroite(x1,y1,x2,y2):
3     """ Détermine une équation de droite (du type x=c ou y=ax+b) passant ↵
4         par deux points donnés """
5     if abs(x1-x2)<10**(-12):
6         return 'x='+str(x1) # on revoie l'équation sous forme d'un texte
7     else:
8         a = CoefficientDirecteur(x1,y1,x2,y2)
9         b = OrdonneeALorigine(x1,y1,x2,y2)
10        return 'y='+str(a)+'*x'+str(b)

```
