Chapitre 6 - Équation - Inéquation

1 Égalité et Équation

1.1 Propriété des égalités

Propriété

$a, b, c \in \mathbf{R}$ et $d \in \mathbf{R}^*$

- $a = b \iff a + c = b + c$
- $a = b \iff a \times d = b \times d$
- $a = b \iff a - c = b - c$
- $a = b \iff \dfrac{a}{d} = \dfrac{b}{d}$

Propriété

- un produit de 2 nombres est nul ssi un de ces nombres est nul
- par exemple $6 \neq 0$ car $6 = 2 \times 3$ et $2 \neq 0$ et $3 \neq 0$

1.2 Équation

Définition

- une équation est une "égalité" en 2 expressions
- une équation contient donc le signe $=$ pour traduire l'égalité
- une équation en fonction de x contient le signe $=$ et des x à priori inconnu ; elle peut être vraie ou fausse en fonction des valeurs de x
- résoudre une équation, c'est justement trouver les valeurs de x qui permettent d'avoir l'égalité

Remarque - Exemple

- on peut résoudre une équation sur $\mathbf{R}$ ou sur une partie de $\mathbf{R}$
- il faudra donc penser à vérifier que les valeurs trouvées par le calcul sont dans l'intervalle de recherche
- par exemple : $2x = 0$ admet la solution 0 sur $\mathbf{R}$ mais n'a pas de solution sur $[1; 2]$
- résoudre $2x + 1 = 3x - 2$

1.3 Factorisation - Développement

Propriété

$a, b, c, d, k \in \mathbf{R}$

- $k \times (a+b) = k \times a + k \times b$
- $k \times (a-b) = k \times a - k \times b$
- $(a+b) \times (c+d) = ac + ad + bc + bd$

Exemple

- $2(x+1) = 2x+2$
- $(\sqrt{2}+1) \times (\sqrt{2}+3)$
  $= (\sqrt{2})^2 + 3\sqrt{3} + \sqrt{2} + 3 = 5 + 4\sqrt{3}$

1.4 Identité Remarquable

Propriété

$a, b \in \mathbf{R}$

- $(a+b)^2 = a^2 + 2 \times a \times b + b^2$
- $(a-b)^2 = a^2 - 2 \times a \times b + b^2$
- $(a+b) \times (a-b) = a^2 - b^2$

Exemple

- $(x+1)^2 = x^2 + 2 \times x \times 1 + 1^2 = x^2 + 2x + 1$
- $(\sqrt{2}+1) \times (\sqrt{2}-1) = (\sqrt{2})^2 - 1^2 = 2 - 1 = 1$

2 Inégalité et inéquation

2.1 Propriété des inégalités

Propriété

$a, b, c \in \mathbf{R}$ et $d \in \mathbf{R}^*$

- $a < b \iff a \pm c < b \pm c$
- si $d > 0$ alors : $a < b \iff a \times d < b \times d$ et $a < b \iff \frac{a}{d} < \frac{b}{d}$
  on dit que le sens de l'inégalité est concervé
- si $d < 0$ alors : $a < b \iff a \times d > b \times d$ et $a < b \iff \frac{a}{d} > \frac{b}{d}$
  on dit que le sens l'inégalité est inversé

Propriété

$a, b, c, d \in \mathbf{R}$

- si $a < b$ et $c < d$ alors $a + c < b + d$
- si $0 < a < b$ alors $\frac{a}{b} < 1 < \frac{b}{a}$
- par exemple, montrer pour tout n entier non nul :
  $\frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{...} + \frac{1}{2n} \leqslant 1$

2.2 Exemple important

Méthode

- on cherche à résoudre des inéquations du type :
  - $x \times (x-2) \leq 0$
  - $\dfrac{x}{x-2} \geq 0$
  - $\dfrac{x}{x-2} \leq 2$
  - $x \times \sqrt{x-2} \leq 0$
- **étape 1 :** valeur interdite
- pas de division par 0
- pas de valeurs négatives sous les racines
- **étape 2 :** 1 produit est nul ssi 1 de ses facteurs est nul
- d'un côté, avoir 1 expression factorisée (produit ou fraction)
- de l'autre, avoir 0
- **étape 3 :** tableau de signe
- mettre 1 ligne par facteur
- mettre à la fin l'expression complète (attention aux valeurs interdites si il en a)
- **étape 4 :** solution
- lire la réponse dans le TdS
- écrire la réponse : $S = ...$

Exemple

- résoudre : $x \times (x-2) \leq 0$

- résoudre : $\dfrac{x}{x-2} \geq 0$

- résoudre : $\dfrac{x}{x-2} \leq 2$

- résoudre : $x \times \sqrt{x-2} \leq 0$

Cas particulier

- il peut arriver que l'équation (ou l'inéquation) soit très simple
- dans ce cas, on peut accélérer la méthode

- résoudre : $\dfrac{1}{x} = 10$
- résoudre : $\dfrac{1}{x} \leq -5$

2.3 Encadrement d'1 nombre réel et arrondi

Propriété - Définition

$x \in \mathbf{R}$ et $n \in \mathbf{Z}$

- $\exists\,!\, a \in \mathbf{Z}$ tel que : $\dfrac{a}{10^n} \leqslant x < \dfrac{a+1}{10^n}$
- c'est un encadrement de x à 10^{-n} près
- l'arrondi de x à 10^{-n} près est celui des 2 nombres $\dfrac{a}{10^n}$ ou $\dfrac{a+1}{10^n}$ qui est le plus proche de x

Exemple :

- encadrer 16,8127 à 0,01 près
- encadrer puis donner une valeur approchée de 0,045578 à 10^{-3} près
- encadrer -8,5065 à 0,001 près
- encadre 0,65 à 10^{-2} près

2.4 Inéquation

Définition

- une inéquation de x est une inégalité qui peut être vraie pour certaines valeurs de x
- la résoudre revient à trouver les valeurs de x qui vérifie l'inéquation (attention à l'ensemble de recherche au départ)

Exemple

- résoudre dans $\mathbf{R}$, $2x + 2 < 1$
- résoudre dans $\mathbf{R}$, $\dfrac{x}{1-x} < 1$

3 Un peu de python

3.1 encadrement d'un nombre

```python
def balayage(epsilon):
    """ cette fonction fournie un encadrement de racine de 2
    par balayage, avec une précision de epsilon """
    x = 1
    while x ** 2 < 2:
        x = x + epsilon
    return (x - epsilon, x)

print(balayage(0.1))
```

Modifier le programme pour que le paramètre d'entrée soit $n \in \mathbf{N}^*$ et que la précision soit de 10^{-n}

3.2 des résultats étonnants sur les égalités

on savait déjà qu'il y a un problème d'égalité avec :

```python
# problème lié au stockage binaire des nombres sur ordinateur
print(0.3)
print(0.1+0.2)
```

en voici un autre :

```python
# l'exécution ne peut s'arrêter car x n'est jamais égal à 0.0
x = 1.0
while x !=0.0:
    x = x - 0.1
```