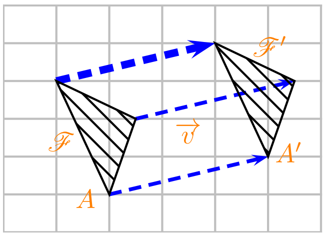
Chapitre 4 - Vecteurs

1 Translation et vecteur

1.1 Translation et vecteur associé

Définition



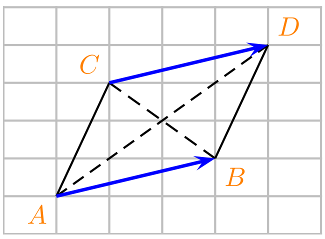
- à toute translation (déplacement d'1 point vers 1 autre, on peut associer 1 **vecteur**
- ce vecteur est caractérisé par :
  - 1 **direction**
  - 1 **sens**
  - 1 longueur appelée **norme**
- la norme du vecteur $\vec{v}$ est notée $\| \vec{v} \|$

1.2 Cas particulier : vecteur nul

- la translation de vecteur $\overrightarrow{AA}$ transforme chaque point en lui-même
- le vecteur $\overrightarrow{AA}$ s'appelle le **vecteur nul** et est noté $\vec{0}$

1.3 Égalité de 2 vecteurs

Définition - Propriété

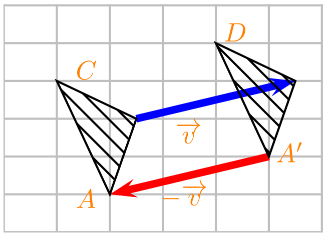


- $\| \vec{u} \| = 0 \Rightarrow \vec{u} = \vec{0}$
- $\vec{u}, \vec{v} \neq \vec{0}$
  $\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u}$ et $\vec{v}$ ont même direction, sens et norme
- 4 points distincts A, B, C et D
  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow$ **ABDC** est 1 parallélogramme (**attention** à l'ordre des points)

1.4 Opposé d'1 vecteur

Définition

- l'opposé du vecteur $\overrightarrow{v}$ est $-\overrightarrow{v}$
- même direction, même norme que $\overrightarrow{v}$ mais sens contraire



Remarques

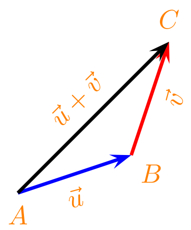
- si on applique 1 translation de vecteur $\overrightarrow{v}$ à 1 figure puis celle de vecteur $-\overrightarrow{v}$, on revient à la figure de départ
- ceci correspondant à (voir infra) : $\overrightarrow{v} + (-\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{0}$
- l'opposé du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est le vecteur $\overrightarrow{BA}$
- le signe moins devant 1 vecteur permute donc les lettres : $-\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{FE}$

2 Opérations sur les vecteurs

2.1 Somme de 2 vecteurs

Propriété - Définition

- 3 points A, B et C ; appliquer $t_{\overrightarrow{AB}}$ qui transforme A en B puis $t_{\overrightarrow{BC}}$ qui transforme B en C, revient à appliquer $t_{\overrightarrow{AC}}$ qui transforme A en C
- pour les vecteurs, cela donne : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$
- comme les nombres, on peut additionner (ou soustraire) des vecteurs dans l'ordre que l'on souhaite : $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}$

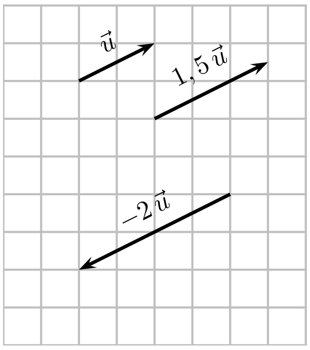


Propriétés

- **<u>Relation de Chasles :</u>** 3 points A, B, C ; $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$
- $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ associés à 2 côtés consécutifs d'un parallélogramme :
  - $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ est associé à la 1^{re} diagonale (voir supra)
  - $\overrightarrow{v} - \overrightarrow{u}$ à la 2^{me}

2.2 Produit d'1 vecteur par 1 réel

Propriétés



un vecteur $\vec{u} \neq \vec{0}$ et 1 réel $k \neq 0$

- le vecteur $k\vec{u}$ est le vecteur qui a :
  - même direction que le vecteur $\vec{u}$
  - même sens que $\vec{u}$ si $k > 0$, sens contraire de $\vec{u}$ si $k < 0$
  - pour norme $|\, k \,| \times \|\, \vec{u} \,\|$

Propriétés

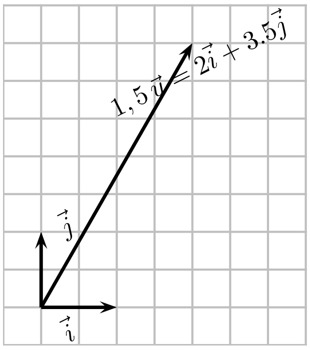
$\forall \vec{u}$ et $\vec{v}$ et $\forall k, k' \in \mathbf{R}$, on a :

- $\forall \vec{u}$ et $\vec{v}$ et $\forall k, k' \in \mathbf{R}$, on a :
- $k(\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$
- $(k + k')\vec{u} = k\vec{u} + k'\vec{u}$
- $k\vec{u} = 0 \Longleftrightarrow k = 0$ ou $\vec{u} = \vec{0}$

3 Coordonnées et Opérations pour des vecteurs

3.1 Coordonnées d'1 vecteur dans 1 base

Définition - Propriétés



- 1 **base** du plan est 1 couple $(\vec{i}, \vec{j})$ formé de 2 vecteurs non nuls et de directions différentes
- $\forall\, \vec{u}\; \exists!\, (x, y)$ tel que : $\vec{u} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j}$ où :
  - x est appelée l'**abscisse** du vecteur $\vec{u}$
  - y l'**ordonnée** du vecteur $\vec{u}$
  - $\vec{u}$ a pour **coordonnées** (x, y)
- on note : $\vec{u} = (x, y)$ ou $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Propriétés

$\forall\, \vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ et $\forall k \in \mathbf{R}$, on a :

- $\vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix}$
- $\vec{u} - \vec{v} = \begin{pmatrix} x - x' \\ y - y' \end{pmatrix}$
- $k \times \vec{u} = \begin{pmatrix} k \times x \\ k \times y \end{pmatrix}$

- dans 1 base orthogonale (cad $\overrightarrow{i} \perp \overrightarrow{j}$), on peut calculer la longueur du vecteur $\overrightarrow{u}$ grâce au Pythagore : $\| \overrightarrow{u} \|^2 = x^2 + y^2$

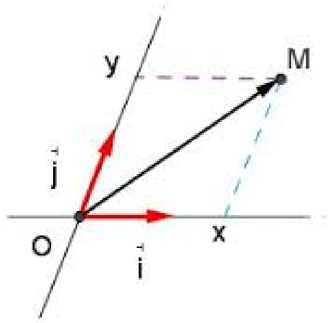
Exemple :

- $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix}$; calculer $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{u} - 3\overrightarrow{v}$, $\| \overrightarrow{u} \|$ et $\| \overrightarrow{u} - \overrightarrow{v} \|$

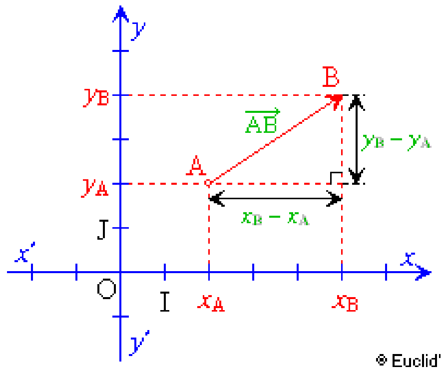
3.2 Coordonnées de points dans 1 repère

Définition - Propriété

- un **repère** $(O\,; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ est formé :
  - d'1 point O appelé **centre** du repère
  - d'1 base du plan $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$
  - $\overrightarrow{u}$ a pour **coordonnées** (x, y)
- M est 1 point du plan tel que $\overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
  - M a pour coordonnées (x,y)
  - l'abscisse de M est x
  - l'ordonnée de M est y



- $\forall\, A = \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix}$
- $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$



Exemple :

- $A = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$
- vérifier la relation de Chasles sur les points A,B et C
- trouver les coordonnées du point D tel pour que ABCD soit un parallélogramme

3.3 Colinéarité et perpendicularité de 2 vecteurs

Définition - Propriété

- $\forall\, \overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$
- le déterminant de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ est noté : $\boxed{\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \text{xy' - yx'}}$
- le produit scalaire de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ est noté : $\boxed{\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \text{xx' + yy'}}$
- $\boxed{\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = 0 \iff \overrightarrow{u} \text{ et } \overrightarrow{v} \text{ sont colinéaires}}$
- $\boxed{\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = 0 \iff \overrightarrow{u} \text{ et } \overrightarrow{v} \text{ sont perpendiculaires}}$

Exemple :

- $A = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$
- trouver les coordonnées du point D tel pour que ABCD soit un parallélogramme
- est-ce un rectangle ?

4 Application à l'IA

4.1 Manipulation d'images sous OpenCV

- TP 1 - Image
- TP 2 - WebCam