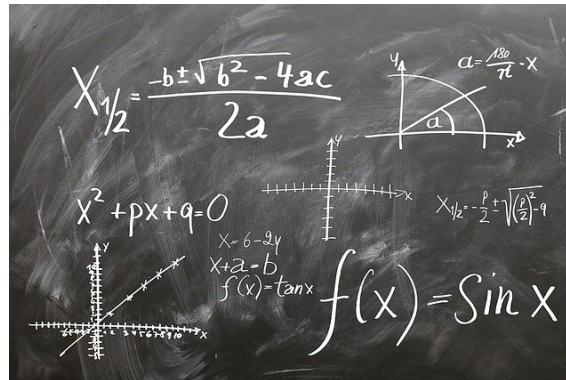


# Chapitre 3 - Généralités sur les fonctions



L'équation de croissance des villes (Marc Barthélémy)

## 1 fonction : concept et représentation

### 1.1 fonction : l'idée

petit dessin pour comprendre



#### définition

- la **fonction**  $f$  : c'est la boîte noire
  - elle peut être notée de différentes façons :
  - $f$  (juste le nom)
  - $y = f(x)$  ou  $f : x \mapsto f(x)$   
(le nom et l'expression de l'image en fonction de la variable muette, ici  $x$ )
  - $f : \begin{cases} D_f & \longrightarrow & Im(f) \\ x & \longrightarrow & f(x) \end{cases}$   
(le nom, l'expression de son image ainsi que les ensembles de départ et d'arrivée)  
(c'est l'écriture la plus lourde mais la plus précise)
- l'**antécédent**  $x$  : la valeur en entrée (auss appelé variable muette ou paramètre)
- l'**image**  $f(x)$  : la valeur en sortie
- synthèse : la fonction  $f$  a pour antécédent  $x$  et pour image  $f(x)$

**remarque**

- toutes les fonctions ne s'appellent pas  $f$ , tous les antécédents ne s'appellent pas  $x$
- on peut imaginer la fonction *hello* tel que :

$hello(soleil) = 3 \times soleil + 2$  qui est identique à

$f(x) = 3x + 2$  avec un peu plus de soleil !

- HP : on peut imaginer des fonctions à plusieurs variables ; par exemple :

$volume\_pav\_droit(longueur, largeur, hauteur) = longueur \times largeur \times hauteur$

- HP : de même, on peut élargir le concept de fonction pour avoir plusieurs sorties (avec une seule entrée), ce qui semble un peu plus dur à imaginer

- ex classique :  $f(z) = \sqrt{z}$ ,  $z \in \mathbf{C}$

**vocabulaire complémentaire**

- fonction  $f$  ou  $y = f(x)$  : c'est la boîte noire
- l'ensemble des antécédents  $x$  de  $f$  s'appelle l'ensemble de définition de  $f$
- HP : l'ensemble des images de  $f$  est :  $Im(f) = \{y = f(x), x \in D_f\}$
- HP : l'ensemble des antécédents de  $f$  est :  $D_f = \{x = f^{-1}(y), y \in Im(f)\}$

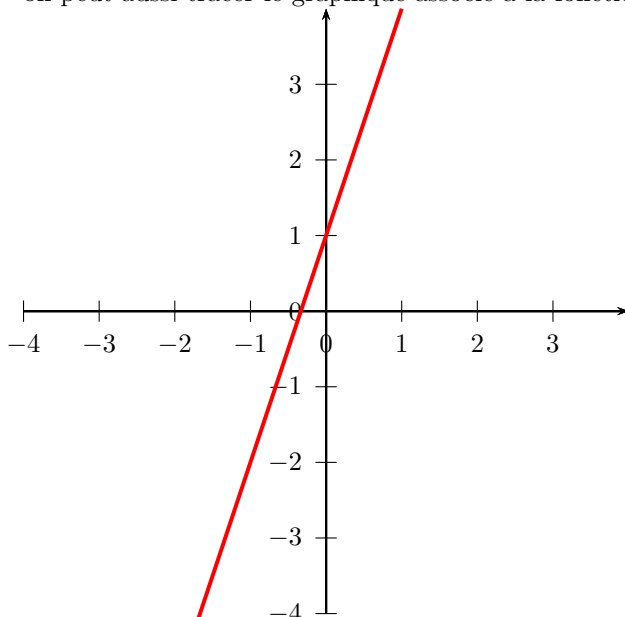
**1.2 1 fonction 3 représentations (chacune utile et complémentaire)****un exemple**

- $f : \begin{cases} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longrightarrow & 3x + 1 \end{cases}$  ;  $f$  possède une **expression algébrique** cad une formule

- on peut lui associer un **tableau de valeurs** :

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
f(x)	-11	-8	-5	-2	1	4	7	10	13	16

- on peut aussi tracer le graphique associé à la fonction  $f$



### propriété

- expression algébrique (ou formule) : information complète mais n'existe pas toujours
  - pratique pour faire le calcul d'une image
  - permet de trouver le ou les antécédent(s) d'un nombre
  - information complète : permet de construire le tableau de valeurs et le graphe
  - HP : elle permet (potentiellement) de définir la fonction réciproque  $f^{-1}$
- tableau de valeurs : incomplet mais efficace (aux points données)
  - pratique pour les valeurs dans le tableau (pas de calcul à faire)
  - incomplet : on ne connaît pas le résultat pour les valeurs qui ne sont pas dans le tableau
  - permet de construire le tableau de valeurs et le graphe de la fonction
  - informatique :
    - un tableau de valeurs est une base de données
    - on peut l'interroger pour avoir des réponses concrètes
    - technologie : fichier csv, document excel, requête sql ...
    - utilisateur : dirigeant d'entreprise / commercial (reporting), scientifique, ingénieur (abaques, résultats connues, simulations ...)
- graphe : allure (partielle) de la fonction
  - pratique pour donner l'allure de la fonction
  - imprécis : l'information dépend de la précision du graphique
  - incomplet : ne donne qu'une partie de la courbe

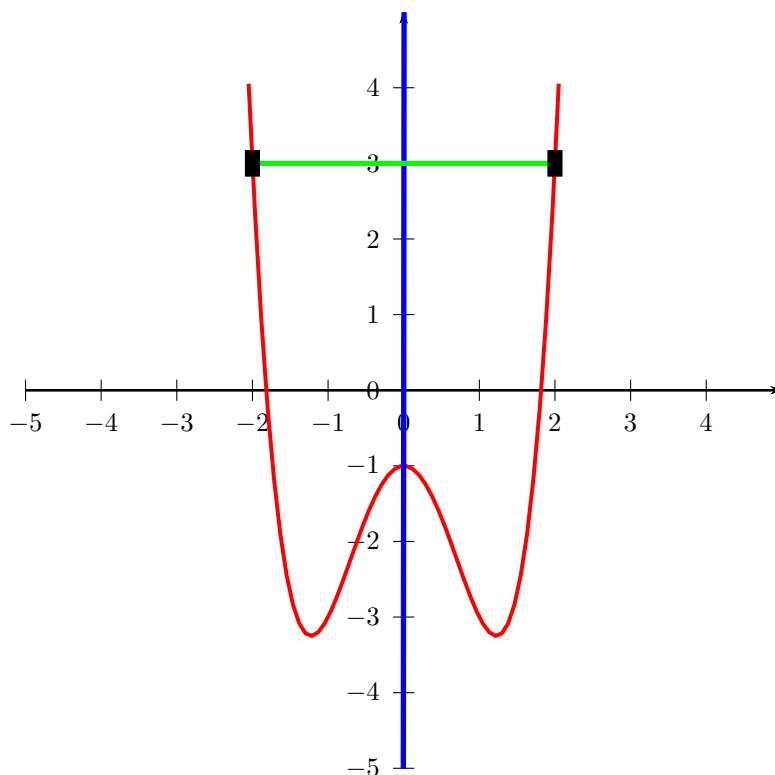
### à vous de jouer

- on considère la fonction  $g(x) = -3x^2 + 2x + 1$
- construire le tableau de valeurs (grâce à votre calculatrice) sur  $[-5; 5]$  avec un pas de 1
- construire le graphe associé
- trouver les antécédents de 1 puis de 2

## 2 fonction particulière

### 2.1 fonction paire

un exemple :  $y = x^4 - 3x^2 - 1$



#### définition - propriété

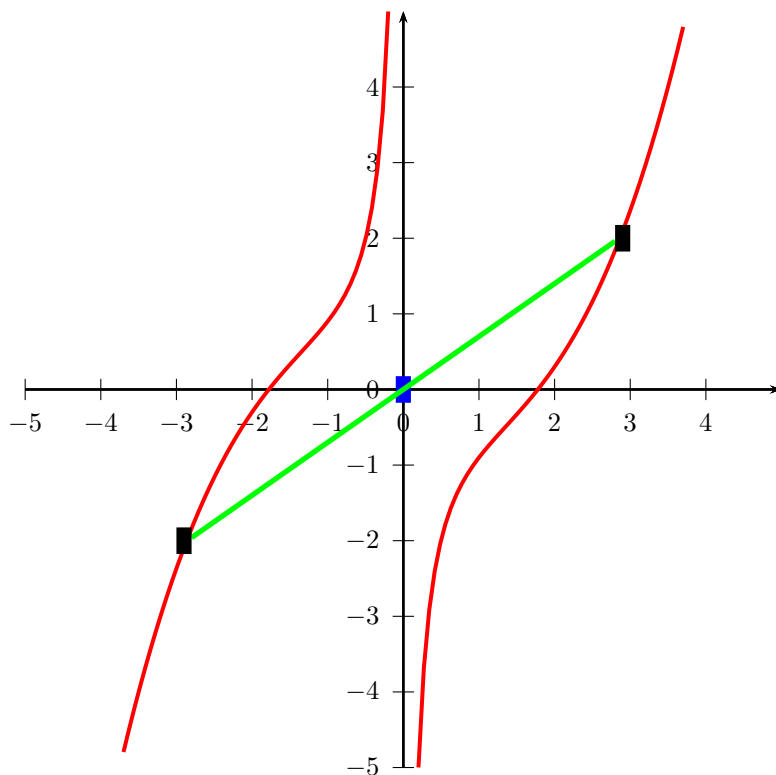
- définition :  $f$  est paire si :  $\forall x \in D_f : f(-x) = f(x)$
- propriété caractéristique :  $f$  a pour axe de symétrie la droite  $x = 0$
- astuce : le tableau de valeurs est alors symétrique par rapport à 0

#### exemple classique

- $x \rightarrow x^2$  est paire
- tout polynôme ne comprenant que des monômes de degrés pairs est pair, par exemple :  $x \rightarrow 3x^4 - x^2 + 1$
- $x \rightarrow \cos x$  est paire
- la somme de fonctions paires est paire
- approfondissement : composition de fonctions paires et impaires : que peut-on dire ?

## 2.2 fonction impaire

un exemple :  $y = \frac{1}{10}x^3 - \frac{1}{x}$



### définition - propriété

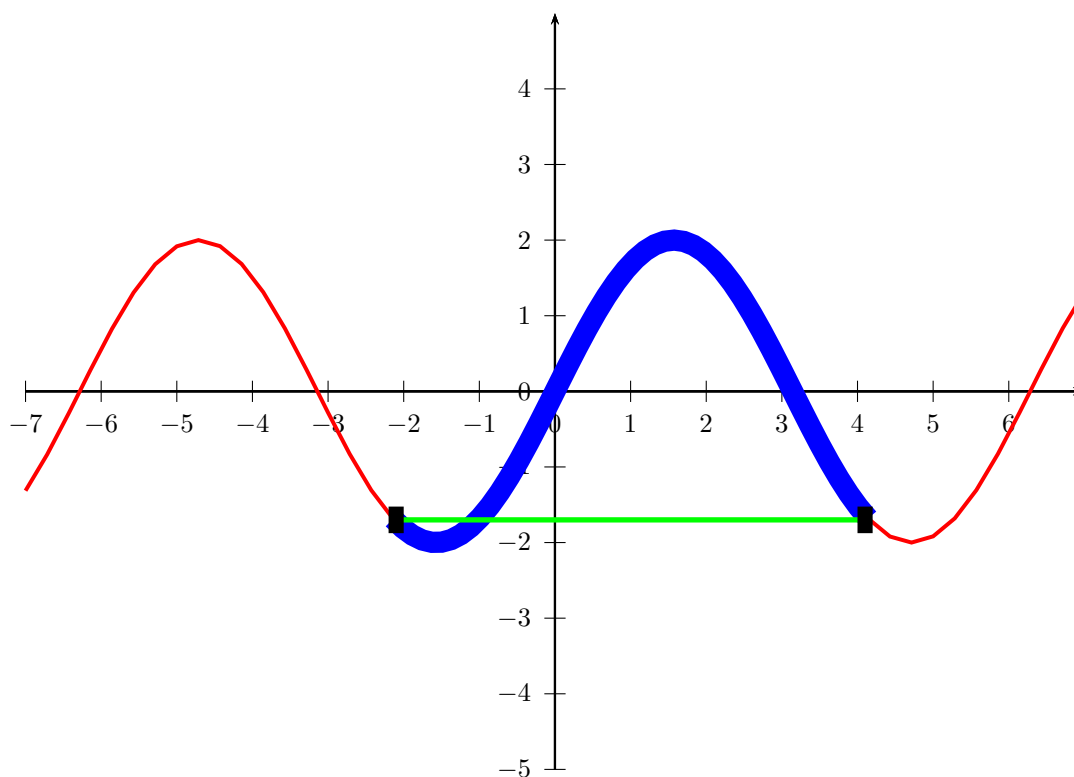
- définition :  $f$  est impaire si :  $\forall x \in D_f : f(-x) = -f(x)$
- propriété caractéristique :  $f$  a pour centre de symétrie le point  $O(0,0)$
- astuce : le tableau de valeurs est alors symétrique par rapport à 0, au signe près

### exemple classique

- $x \rightarrow x$  est impaire ;  $x \rightarrow x^3$  aussi
- tout polynôme ne comprenant que des monômes de degrés impairs est impair, par exemple :  $x \rightarrow 3x^3 - x^2$
- $x \rightarrow \sin x$  et  $x \rightarrow \tan x$  sont impaires
- la somme de fonctions impaires est impaire

## 2.3 fonction périodique

un exemple :  $y = 2 \sin x$



### définition - propriété

- définition :
  - $f$  est périodique si un motif (fini) se répète à l'infini
  - la taille  $T$  (sur les  $x$ ) du motif répété est appelée la période
  - mathématiquement :  $f$  est périodique si  $\exists T \in \mathbf{R}$  tel que :  $\forall x \in \mathbf{R}, f(x + T) = f(x)$
- astuce : le tableau de valeurs se répète tous les  $T$

### exemple classique

- $x \rightarrow \sin x$ ,  $x \rightarrow \cos x$  et  $x \rightarrow \tan x$  sont périodiques
- attention, la somme de 2 fonctions périodiques n'est pas forcément périodique (mais là c'est un peu compliqué ...)

### 3 fonction de référence

#### 3.1 fonction carrée : $x \longrightarrow x^2$

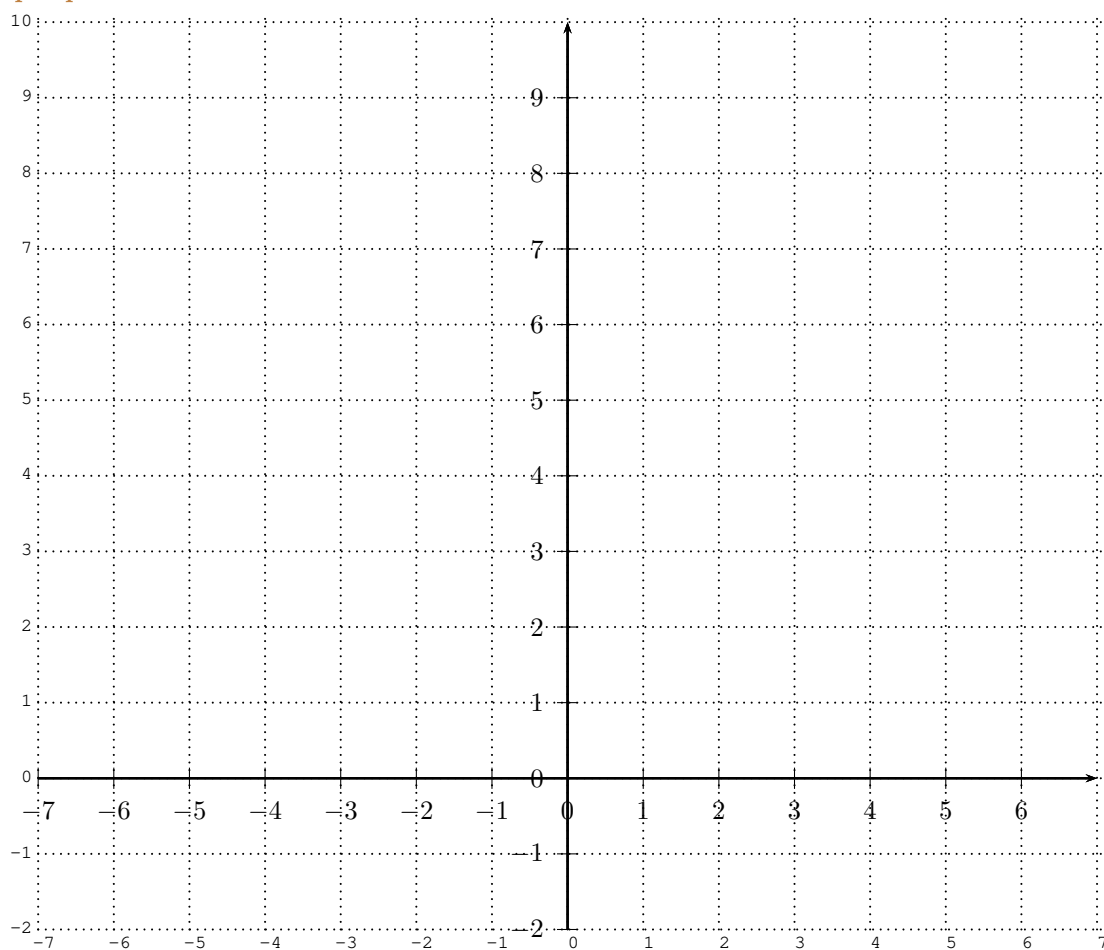
forme algébrique et tableau de valeurs

- $f : \begin{cases} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longrightarrow & x^2 \end{cases}$

- c'est une fonction paire

- |      |    |    |    |    |   |   |   |   |   |
|------|----|----|----|----|---|---|---|---|---|
| x    | -4 | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| f(x) |    |    |    |    |   |   |   |   |   |

graphique



### 3.2 fonction inverse : $x \longrightarrow \frac{1}{x}$

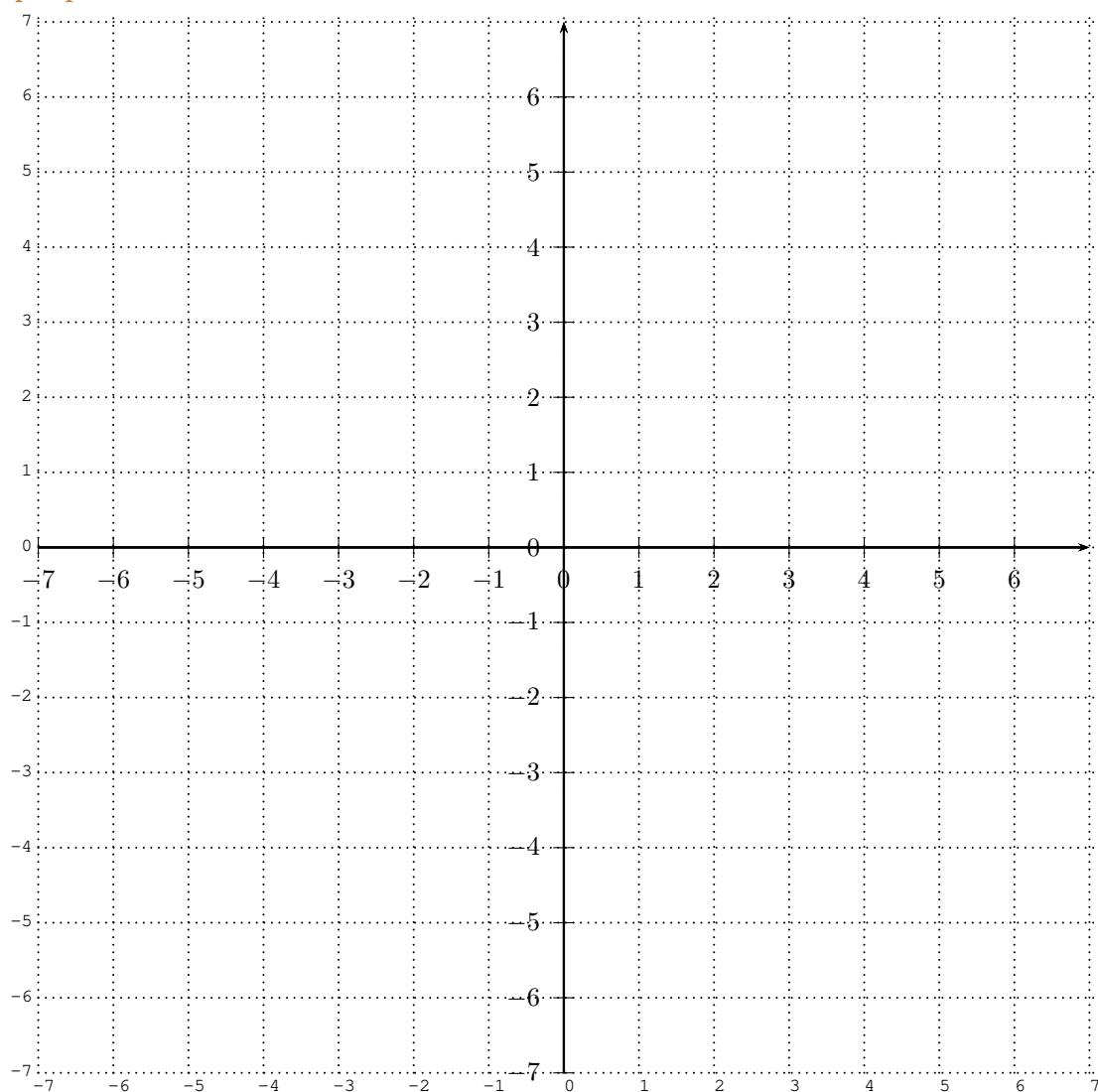
forme algébrique et tableau de valeurs

$$\bullet \quad f : \begin{cases} \mathbf{R}^* & \longrightarrow & \mathbf{R}^* \\ x & \longrightarrow & \frac{1}{x} \end{cases}$$

- c'est une fonction impaire

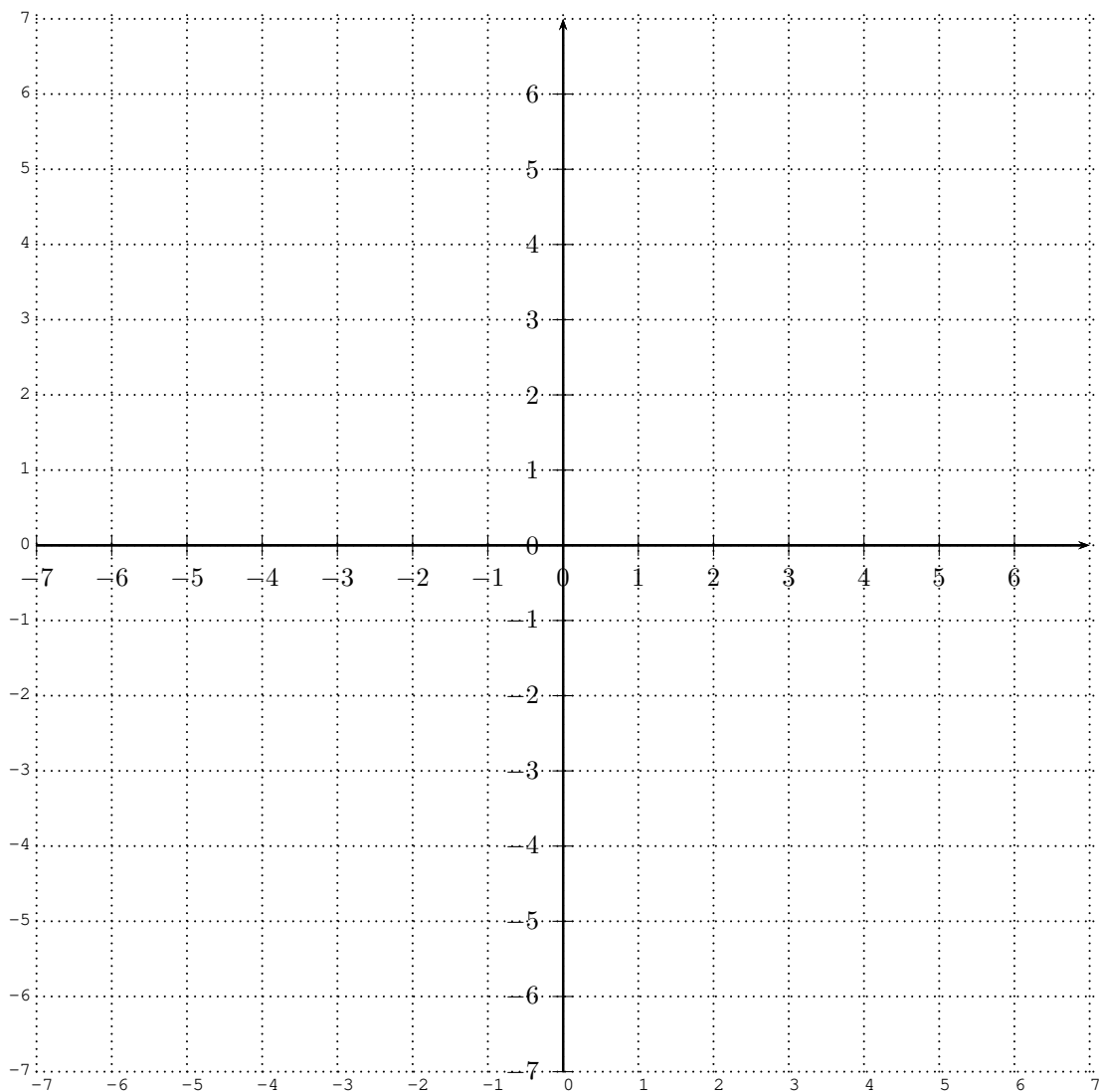
x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
f(x)									

graphique

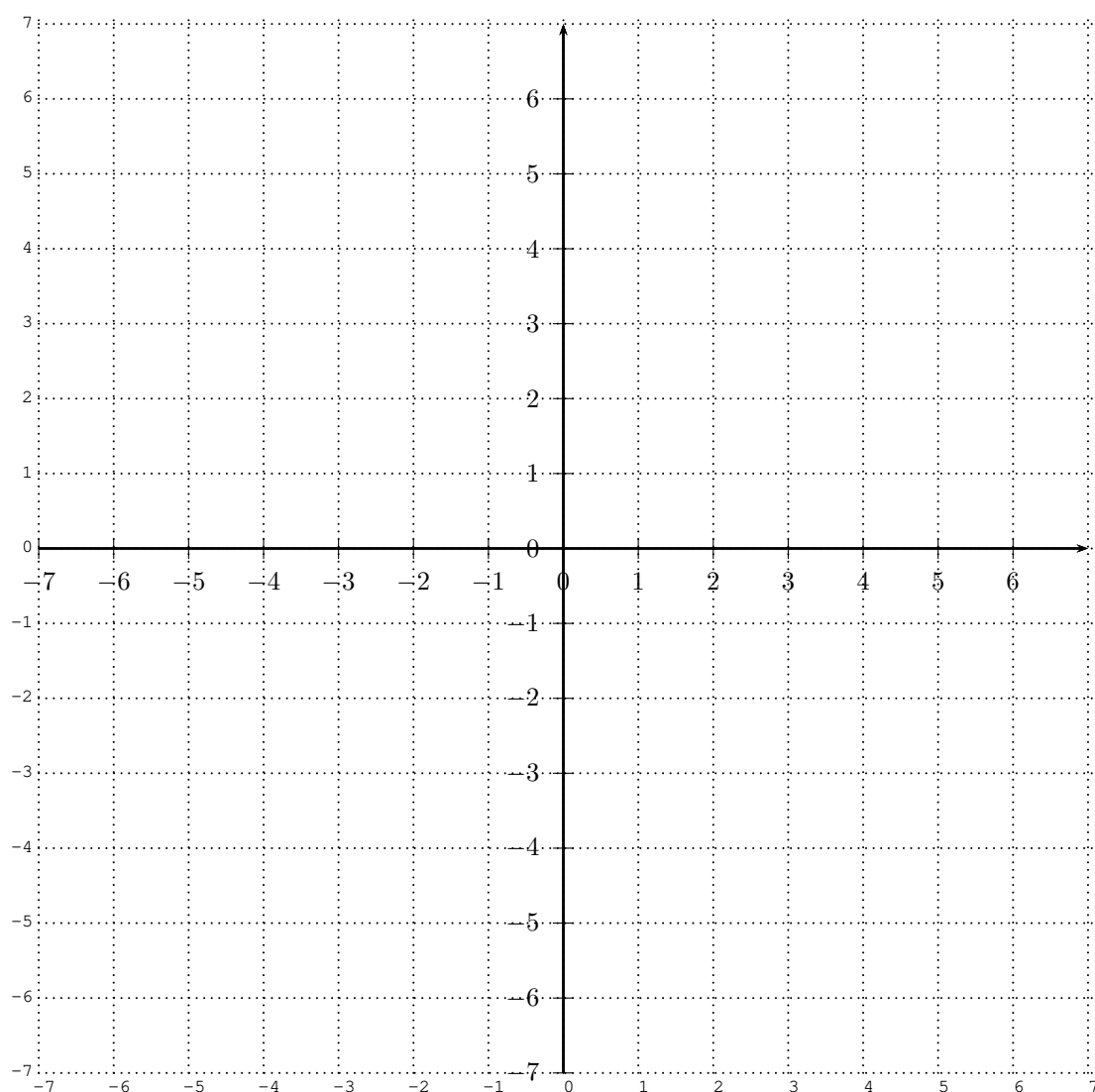




### 3.3 fonction affine : $x \longrightarrow 3x + 1$



### 3.4 fonction racine : $x \longrightarrow \sqrt{x}$



### 3.5 fonction cube : $x \longrightarrow x^3$

