

# Chapitre 4 - Vecteurs

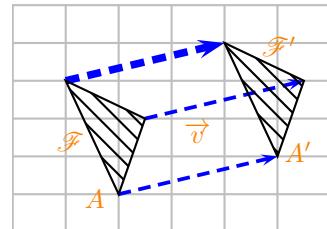


## 1 Translation et vecteur

### 1.1 Translation et vecteur associé

Définition

- à toute translation (déplacement d'un point vers un autre, on peut associer 1 **vecteur**)
- ce vecteur est caractérisé par :
  - 1 **direction**
  - 1 **sens**
  - 1 longueur appelée **norme**
- la norme du vecteur  $\vec{v}$  est notée  $\|\vec{v}\|$



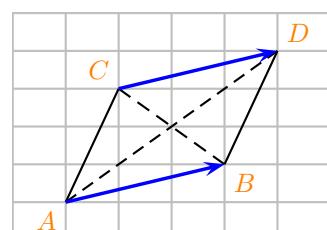
### 1.2 Cas particulier : vecteur nul

- la translation de vecteur  $\overrightarrow{AA}$  transforme chaque point en lui-même
- le vecteur  $\overrightarrow{AA}$  s'appelle le **vecteur nul** et est noté  $\vec{0}$

### 1.3 Égalité de 2 vecteurs

Définition - Propriété

- $\|\vec{u}\| = 0 \Rightarrow \vec{u} = \vec{0}$
- $\vec{u}, \vec{v} \neq \vec{0} \quad \vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u}$  et  $\vec{v}$  ont même direction, sens et norme
- 4 points distincts  $A, B, C$  et  $D$   
 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow ABCD$  est 1 parallélogramme  
**(attention** à l'ordre des points)



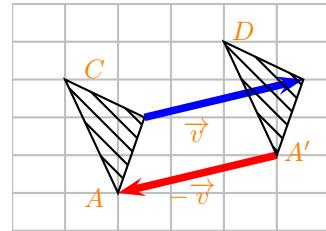
## 1.4 Opposé d'un vecteur

### Définition

- l'opposé du vecteur  $\vec{v}$  est  $-\vec{v}$
- même direction, même norme que  $\vec{v}$  mais sens contraire

### Remarques

- si on applique 1 translation de vecteur  $\vec{v}$  à 1 figure puis celle de vecteur  $-\vec{v}$ , on revient à la figure de départ
- ceci correspondant à (voir infra) :  $\vec{v} + (-\vec{v}) = \vec{0}$
- l'opposé du vecteur  $\overrightarrow{AB}$  est le vecteur  $\overrightarrow{BA}$
- le signe moins devant 1 vecteur permute donc les lettres :  $-\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{FE}$

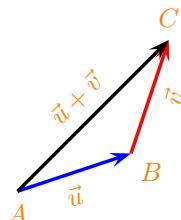


## 2 Opérations sur les vecteurs

### 2.1 Somme de 2 vecteurs

#### Propriété - Définition

- 3 points  $A$ ,  $B$  et  $C$ ; appliquer  $t_{\overrightarrow{AB}}$  qui transforme  $A$  en  $B$  puis  $t_{\overrightarrow{BC}}$  qui transforme  $B$  en  $C$ , revient à appliquer  $t_{\overrightarrow{AC}}$  qui transforme  $A$  en  $C$
- pour les vecteurs, cela donne :  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$
- comme les nombres, on peut additionner (ou soustraire) des vecteurs dans l'ordre que l'on souhaite :  $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$



#### Propriétés

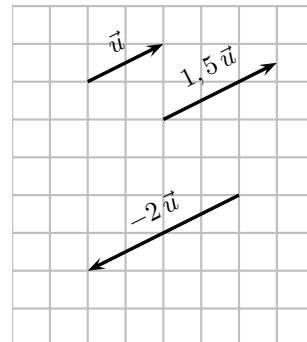
- **Relation de Chasles** : 3 points  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ;  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$
- $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  associés à 2 côtés consécutifs d'un parallélogramme :
  - $\vec{u} + \vec{v}$  est associé à la 1<sup>re</sup> diagonale (voir supra)
  - $\vec{v} - \vec{u}$  à la 2<sup>me</sup>

## 2.2 Produit d'un vecteur par un réel

### Propriétés

un vecteur  $\vec{u} \neq \vec{0}$  et un réel  $k \neq 0$

- le vecteur  $k\vec{u}$  est le vecteur qui a :
  - même direction que le vecteur  $\vec{u}$
  - même sens que  $\vec{u}$  si  $k > 0$ , sens contraire de  $\vec{u}$  si  $k < 0$
  - pour norme  $|k| \times \|\vec{u}\|$



### Propriétés

$\forall \vec{u}$  et  $\vec{v}$  et  $\forall k, k' \in \mathbf{R}$ , on a :

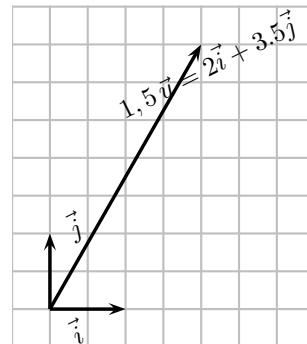
- $\forall \vec{u}$  et  $\vec{v}$  et  $\forall k, k' \in \mathbf{R}$ , on a :
- $k(\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$
- $(k + k')\vec{u} = k\vec{u} + k'\vec{u}$
- $k\vec{u} = 0 \iff k = 0 \text{ ou } \vec{u} = \vec{0}$

## 3 Coordonnées et Opérations pour des vecteurs

### 3.1 Coordonnées d'un vecteur dans une base

#### Définition - Propriétés

- 1 **base** du plan est 1 couple  $(\vec{i}, \vec{j})$  formé de 2 vecteurs non nuls et de directions différentes
- $\forall \vec{u} \exists ! (x, y)$  tel que :  $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$  où :
  - x est appelée l'**abscisse** du vecteur  $\vec{u}$
  - y l'**ordonnée** du vecteur  $\vec{u}$
  - $\vec{u}$  a pour  **coordonnées**  $(x, y)$
- on note :  $\vec{u} = (x, y)$  ou  $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$



### Propriétés

$\forall \vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ,  $\vec{v} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$  et  $\forall k \in \mathbf{R}$ , on a :

- $\vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix}$
- $\vec{u} - \vec{v} = \begin{pmatrix} x - x' \\ y - y' \end{pmatrix}$
- $k \times \vec{u} = \begin{pmatrix} k \times x \\ k \times y \end{pmatrix}$

- dans 1 base orthogonale (cad  $\vec{i} \perp \vec{j}$ ), on peut calculer la longueur du vecteur  $\vec{u}$  grâce au Pythagore :  $\|\vec{u}\|^2 = x^2 + y^2$

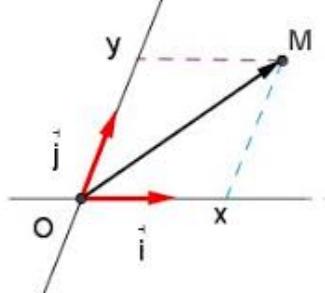
**Exemple :**

- $\vec{u} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix}$ ; calculer  $\vec{u} + \vec{v}$ ,  $\vec{u} - 3\vec{v}$ ,  $\|\vec{u}\|$  et  $\|\vec{u} - \vec{v}\|$

### 3.2 Coordonnées de points dans 1 repère

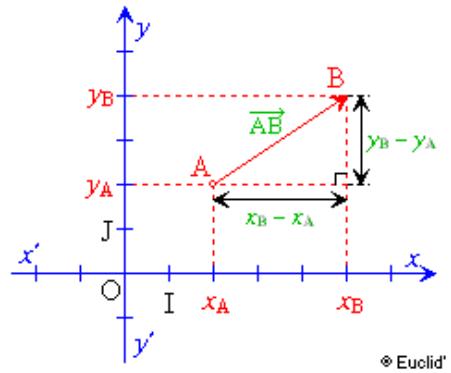
Définition - Propriété

- un repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  est formé :
  - d'1 point O appelé centre du repère
  - d'1 base du plan  $(\vec{i}, \vec{j})$
  - $\vec{u}$  a pour  coordonnées  $(x, y)$
- M est 1 point du plan tel que  $\overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ 
  - M a pour coordonnées  $(x, y)$
  - l'abscisse de M est x
  - l'ordonnée de M est y



- $\forall A = \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix}$

- $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$



**Exemple :**

- $A = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix}$  et  $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$
- vérifier la relation de Chasles sur les points A,B et C
- trouver les coordonnées du point D tel pour que ABCD soit un parallélogramme

### 3.3 Colinéarité et perpendicularité de 2 vecteurs

**Définition - Propriété**

- $\forall \vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$
- le déterminant de  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  est noté :  $\boxed{\det(\vec{u}, \vec{v}) = xy' - yx'}$
- le produit scalaire de  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  est noté :  $\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'}$
- $\boxed{\det(\vec{u}, \vec{v}) = 0 \iff \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont colinéaires}}$
- $\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \iff \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont perpendiculaires}}$

**Exemple :**

- $A = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$  et  $C = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$
- trouver les coordonnées du point D tel pour que ABCD soit un parallélogramme (grâce au déterminant)
- est-ce un rectangle ? (grâce au produit scalaire)

## 4 Application à l'IA

### 4.1 Manipulation d'images sous OpenCV

- TP 1 - Image
- TP 2 - WebCam