Chap III : Géométrie plane et repérage

Pour prendre un bon départ p 123

I- Comment calculer des longueurs et des angles ?

a Calculer des longueurs

Propriété Dans tout triangle ABC rectangle en A on a la relation de *Pythagore* $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

Réciproquement, lorsque les côtés d'un triangle ABC vérifient la relation $BC^2 = AB^2 + AC^2$ alors le triangle ABC est rectangle en A.

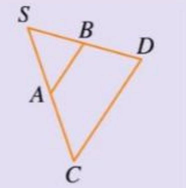
Remarque

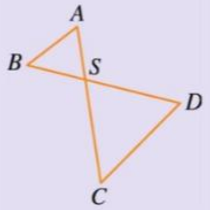
Si $BC^2 \neq AB^2 + AC^2$ alors le triangle ABC n'est pas rectangle en A.

Propriété On *considère* l'une des configurations ci-contre dite de Thalès.

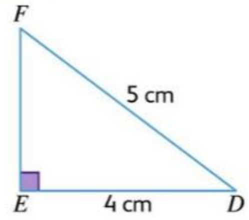
Si les droites (AB) et (CD) sont parallèles, alors les longueurs des triangles SAB et SDC sont proportionnelles et on a $\frac{SA}{SC} = \frac{SB}{SD} = \frac{AB}{CD}$.

Réciproquement, si les côtés des triangles SAB et SDC sont proportionnels, alors les droites (AB) et (CD) sont parallèles.





Exemple



Dans le triangle DEF rectangle en E, d'après le théorème de Pythagore, on a :

$DF^2 = ED^2 + EF^2$

$5^2 = 4^2 + EF^2$

$25 = 16 + EF^2$

$25 - 16 = EF^2$

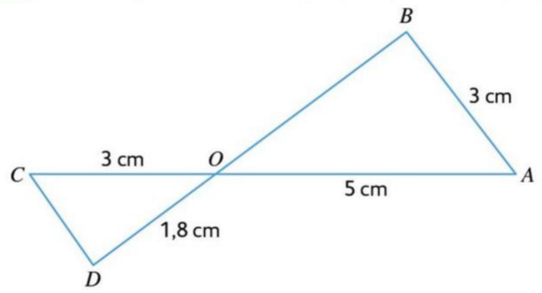
$9 = EF^2$

Donc $EF = \sqrt{9} = 3$ cm

Faire les deux exercices suivants dans votre cahier de cours :

Ex 3 p 103 :

3 Dans la figure ci-dessous, (DC) est parallèle à (AB).



1. Calculer la longueur CD.

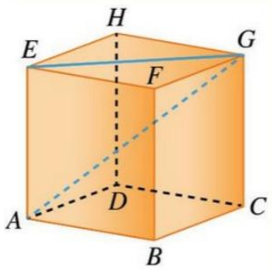
2. Le triangle OCD est-il un triangle rectangle ?

Exercice :

Soit a un réel strictement positif.

1) Quelle est la longueur d'une diagonale d'un carré de côté a ?

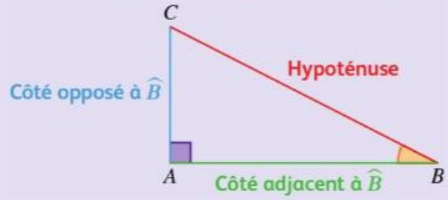
2) Soit $ABCDEFGH$ un cube de côté a. Quelle est la longueur de la diagonale $[AG]$?



b Calculer des angles

Propriété Dans un triangle ABC rectangle en A, les côtés et les angles sont liés par des ***relations trigonométriques*** :

$$\cos\widehat{B} = \frac{AB}{BC} ; \sin\widehat{B} = \frac{AC}{BC} ; \tan\widehat{B} = \frac{AC}{AB}$$



Remarques

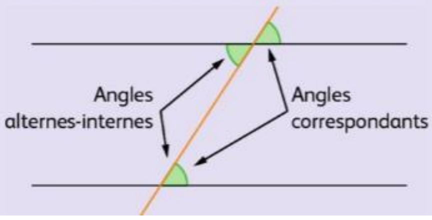
La trigonométrie permet de calculer des longueurs ou des angles.

Propriété Pour tout angle aigu α d'un triangle rectangle, on a la relation trigonométrique suivante.

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$$

Propriété Dans un triangle, la somme des angles fait 180°.

Propriété Deux droites parallèles et une sécante engendrent des angles alternes-internes et correspondants, de même mesure.



Point méthode

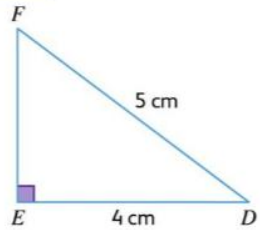
Sur un schéma, on repère les côtés dont on connaît les mesures. On peut utiliser le moyen mnémotechnique dit « SOHCAHTOA ».

$$\sin = \frac{Opp}{Hyp}$$

$$\cos = \frac{Adj}{Hyp}$$

$$\tan = \frac{Opp}{Adj}$$

Exemple



Dans le triangle DEF rectangle en E, on a :

$$\cos\widehat{D} = \frac{ED}{FD}$$

$$\cos\widehat{D} = \frac{4}{5}$$

$$\widehat{D} = \cos^{-1}\left(\frac{4}{5}\right) \approx 36{,}9°$$

Faire les trois exercices suivants sur votre cahier de cours :

Énoncé On considère donc un cube $ABCDEFGH$ de côté 8 cm ainsi que la diagonale $[AG]$.

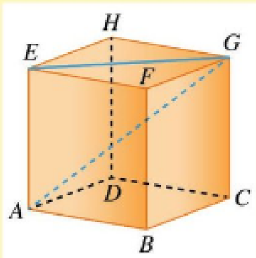
On souhaite déterminer les mesures des angles $\widehat{AGE}$ et $\widehat{GAE}$.

1. Dans le carré $EFGH$, déterminer la longueur EG.

2. On admet que le quadrilatère $ACGE$ est un rectangle.

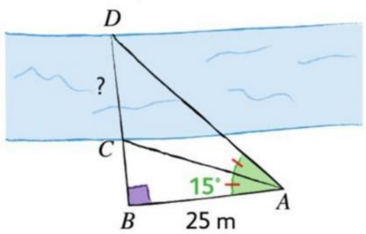
Déterminer une valeur approchée de l'angle $\widehat{AGE}$.

3. En déduire une valeur approchée de l'angle $\widehat{GAE}$.



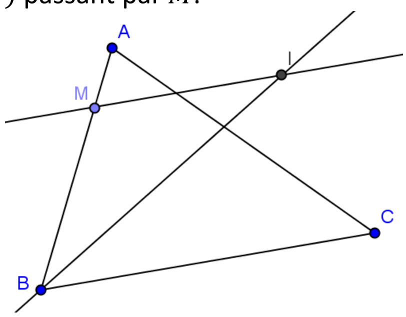
58 Anaïs a retrouvé dans le grenier de son grand-père un petit carnet dans lequel il prenait des notes.

Elle s'arrête sur le croquis ci-dessous.



Aider Anaïs à retrouver la largeur CD de la rivière.

Exercice : ABC est un triangle quelconque, M est un point du segment $[AM]$. Le point I est l'intersection de la bissectrice de l'angle $\widehat{ABC}$ avec la parallèle à la droite (BC) passant par M.

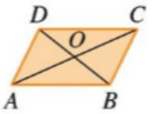
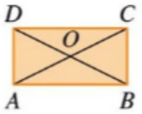
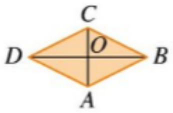


Démontrer que $MB = MI$.

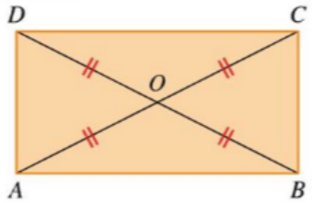
II- Configurations usuelles du plan

a Quadrilatères particuliers

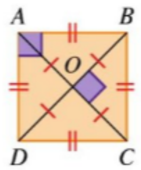
On peut reconnaître les quadrilatères particuliers à l'aide des critères suivants.

	Les côtés	Les diagonales	Les symétries
Parallélogramme 	• $(AB)//(DC)$ et $(AD)//(BC)$ • $(AB)//(DC)$ et $AB = DC$	• Les diagonales $[AC]$ et $[BD]$ ont le même milieu O.	• O est le centre de symétrie.
Rectangle 	C'est un parallélogramme et • $(AB)\perp(AD)$	• $AC = BD$	• Les médiatrices de $[AD]$ et de $[AB]$ sont des axes de symétrie.
Losange 	C'est un parallélogramme et • $AB = AD$	• $(AC)\perp(BD)$	• Les diagonales sont des axes de symétrie.
Carré 	C'est un parallélogramme et • $(AB)\perp(AD)$ $AB = AD$	• $AC = BD$ $(AC)\perp(BD)$	• Les médiatrices de $[AD]$ et $[AB]$ ainsi que les diagonales sont des axes de symétrie.

Exemples



Le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme car ses diagonales $[AC]$ et $[BD]$ se coupent en leur milieu. Ses diagonales ont la même longueur donc c'est un rectangle.



Un carré est à la fois un rectangle et un losange.

Faire les quatre exercices suivants dans votre cahier de cours :

Ex p 105 :

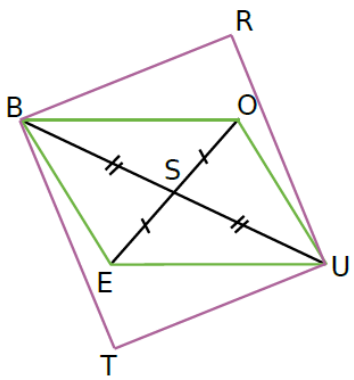
Énoncé On considère un cercle $\mathscr{C}$ de centre O et deux diamètres distincts $[AC]$ et $[BD]$. On place les points I, J, K et L milieux respectifs de $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$.

1. a. Faire une figure.

b. Quelle est la nature du quadrilatère $ABCD$?

2. Démontrer que le quadrilatère $IJKL$ est un quadrilatère particulier.

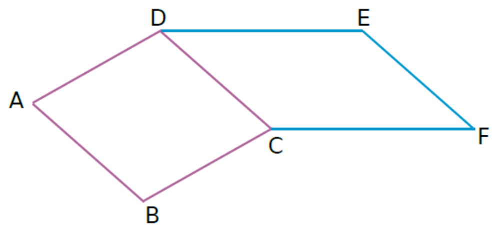
30 *L'un dans l'autre*



Les quadrilatères BOUE et BRUT sont des parallélogrammes.

Démontrer que TERO est un parallélogramme

Exercice 1 : ABCD et CFED sont des parallélogrammes.



Démontrer que $AE = BF$.

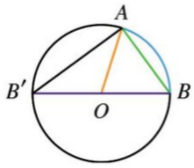
Exercice 2 : ABC est un triangle isocèle en A, I est le milieu de [BC] et D est le symétrique de A par rapport à I. Démontrer que les droites (AD) et (BC) sont perpendiculaires.

b Cercles et angles

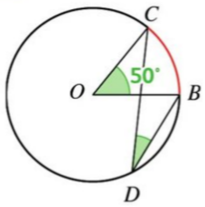
Définition O est un point et r un nombre réel strictement positif.
L'ensemble des points M du plan vérifiant $OM = r$ est le cercle de centre O et de rayon r.

Vocabulaire

- $[OA]$ est un rayon
- $[BB']$ est un diamètre
- $\widehat{BB'A}$ est un angle inscrit
- $\widehat{BOA}$ est un angle au centre
- $[AB]$ est une corde
- $\overset{\frown}{AB}$ est un arc



Exemple

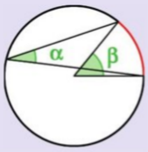


Puisque l'angle en centre $\widehat{BOC}$ intercepte le même arc $\overset{\frown}{CB}$ que l'angle inscrit $\widehat{BDC}$ alors :

$$\widehat{BDC} = \frac{1}{2}\widehat{BOC} = 25°$$

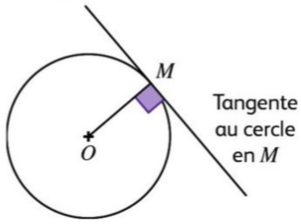
Propriété Lorsqu'un angle inscrit α intercepte le même arc qu'un angle au centre β alors :

$$\beta = 2\alpha$$



Définition La tangente à un cercle $\mathscr{C}$ de centre O en un point M est la droite passant par M et perpendiculaire au rayon $[OM]$.
Elle coupe le cercle $\mathscr{C}$ en l'unique point M.

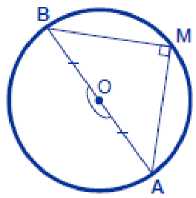
Exemple



Info

α (alpha), β (bêta), γ (gamma), δ (delta)…

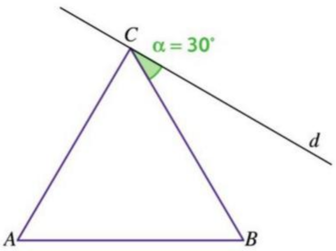
Propriété : pour tout point M appartenant au cercle de diamètre [AB], distinct des points A et B, le triangle AMB est rectangle en M.



Preuve : c'est une conséquence de la propriété des angles inscrits. En effet, l'angle au centre interceptant l'arc $\overset{\frown}{AB}$ est plat puisque [AB] est un diamètre : $\widehat{AOB} = 180°$. D'après la propriété des angles inscrits, l'angle interceptant l'arc $\overset{\frown}{AB}$ est la moitié de l'angle au centre donc $\widehat{AMB} = \frac{\widehat{AOB}}{2} = \frac{180}{2} = 90°$.

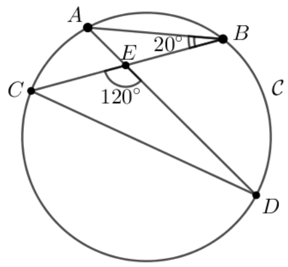
Faire les trois exercices suivants dans votre cahier de cours :

6 Soit ABC un triangle équilatéral et d la droite passant par C faisant un angle de 30° par rapport à (CB).

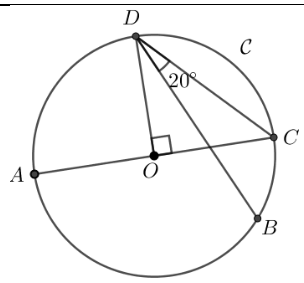


1. Indiquer la valeur de l'angle $\widehat{ACB}$.
2. En déduire que la droite d est la tangente au cercle de centre A et de rayon AB.

Exercice 1 : A, B, C, D sont quatre points du cercle C. Les angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{CED}$ ont pour mesures respectives 20° et 120°. Donner une mesure de l'angle $\widehat{BCD}$.



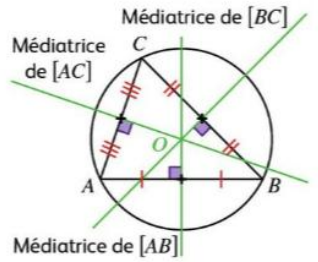
Exercice 2 : On considère la figure ci-dessous. A, B, C et D sont quatre points du cercle C de centre O.
Donner une mesure des angles $\widehat{DAC}$, $\widehat{DBC}$, $\widehat{ABC}$, $\widehat{CAB}$ et $\widehat{ACB}$.



III- Droites remarquables du triangle

a Médiatrices

Définition et propriété La médiatrice d'un segment est l'ensemble des points du plan équidistants des extrémités de ce segment.
C'est la droite passant par le milieu et perpendiculaire à ce segment.

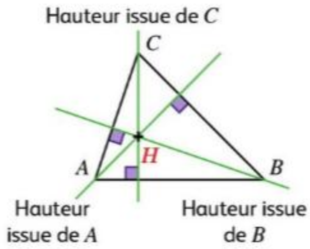


Propriété Les trois médiatrices d'un triangle sont concourantes en un point O appelé centre du cercle circonscrit au triangle.

Voir Démo activité 2

Remarque

Lorsque le triangle est rectangle, le centre du cercle circonscrit est le milieu de l'hypoténuse.

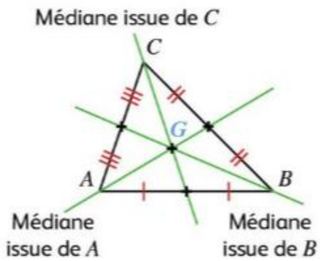


b Autres droites remarquables du triangle

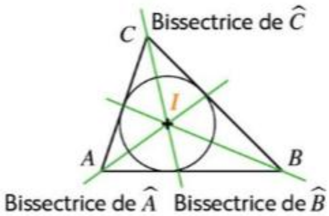
Définitions • Une hauteur est une droite passant par un sommet du triangle et perpendiculaire au côté opposé à ce sommet.

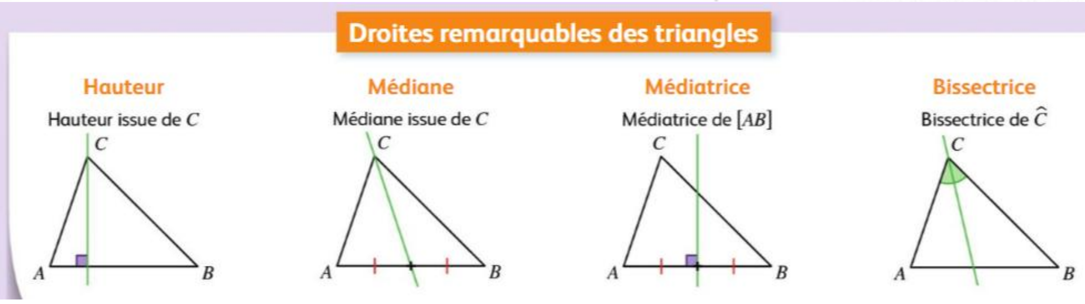
• Une médiane est une droite passant par un sommet du triangle et par le milieu du côté opposé à ce sommet.

• La bissectrice d'un angle est la demi-droite passant par le sommet de cet angle et qui le coupe en deux angles égaux.



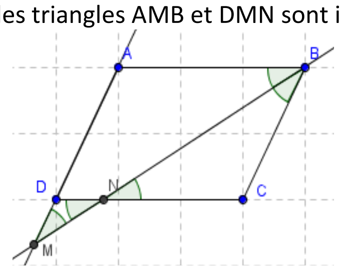
Propriété Dans un triangle, les trois hauteurs sont concourantes en un point appelé orthocentre du triangle, les trois médianes en un point appelé centre de gravité du triangle, les trois bissectrices en un point appelé centre du cercle inscrit au triangle.



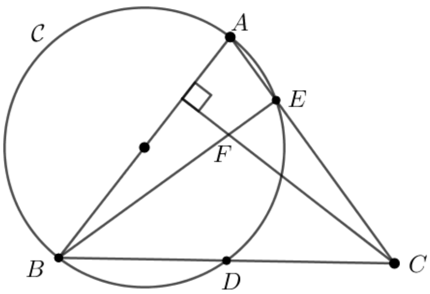


Faire les deux exercices suivants sur votre cahier de cours :

Exercice 1 : Dans un parallélogramme ABCD, la bissectrice de $\widehat{ABC}$ coupe (AD) en M et (CD) en N.
Démontrer que les triangles AMB et DMN sont isocèles.



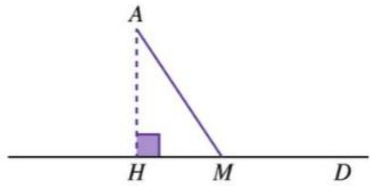
Exercice 2 : ABC est un triangle isocèle en A.
Le cercle C de diamètre [AB] coupe (BC) en D et (AC) en E.
La perpendiculaire à (AB) passant par C coupe (BE) en F.
1) Montrer que BEA est rectangle en E.
2) Que représente F pour le triangle ABC ?
3) Montrer que A, F et D sont alignés.
4) Montrer que BFC est isocèle.



IV- Projeté orthogonal d'un point sur une droite

Soit D une droite du plan et A un point.

Définition On appelle projeté orthogonal de A sur D le point d'intersection de la droite D avec la perpendiculaire à D passant par A.



H est le projeté orthogonal de A sur D.

Propriété La distance du point A à la droite D est la plus petite distance séparant un point de D avec A.

Elle est égale à AH où H est le projeté orthogonal du point A sur D.

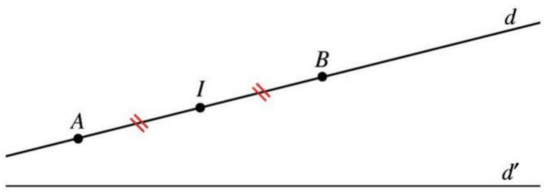
Démo

Démonstration

Notons d la distance entre A et D. Soit M un point de D, distinct de H.
Le triangle AMH est rectangle en H.
Grâce au théorème de Pythagore, on peut affirmer que l'hypoténuse $[AM]$ est le plus grand des côtés du triangle AMH. Donc $AM > AH$.
Ainsi, la plus petite distance séparant A d'un point de D est égale à AH.
On en déduit que $AH = d$.

Faire les deux exercices suivants sur votre cahier de cours :

83 On considère la figure suivante.



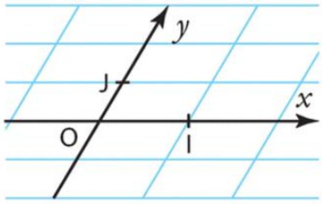
1. Reproduire la figure et construire A', I' et B' les projetés orthogonaux de A, I et B sur d'.
2. Démontrer que I' est le milieu de $[A'B']$.

84 Montrer que tout point d'une bissectrice d'un angle est équidistant aux demi-droites formant l'angle.

V- Repérage du plan

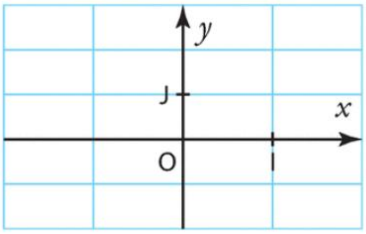
Définition **Repère**

Étant donné trois points distincts O, I et J non alignés, le repère noté (O ; I, J) est le repère d'origine O ayant pour axe des abscisses (OI), pour axe des ordonnées (OJ) et tel que I et J sont les points de coordonnées respectives (1 ; 0) et (0 ; 1).

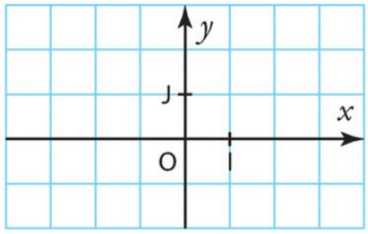


Remarque Les deux cas particuliers qui sont le plus souvent utilisés sont les suivants.

- Si le triangle OIJ est rectangle en O, le repère est **orthogonal.**



- Si le triangle OIJ est isocèle et rectangle en O, le repère est **orthonormé** (ou orthonormal)

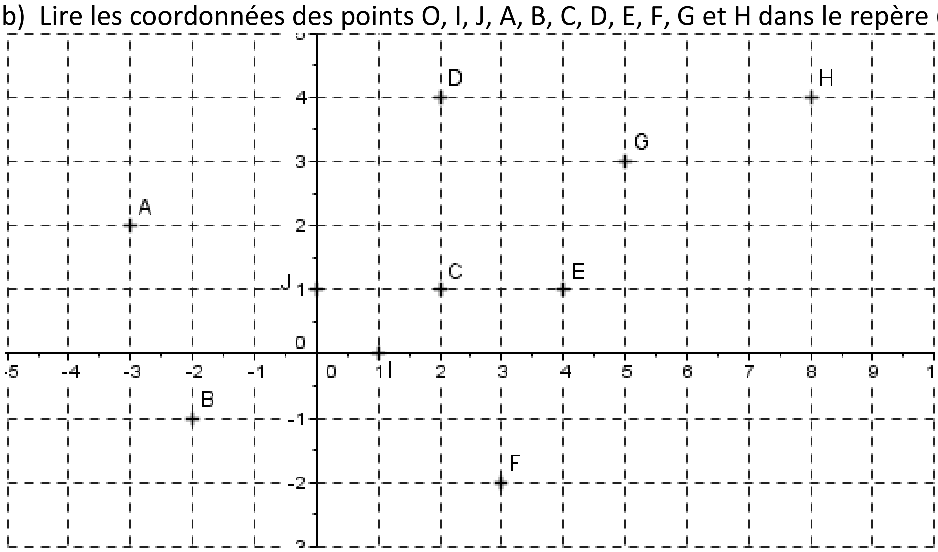


Ex 1 :

1. Sur le graphique ci-dessous, après avoir précisé le type de repère,

a) Lire les coordonnées des points O, I, J, A, B, C, D, E, F, G et H dans le repère (O; I, J).

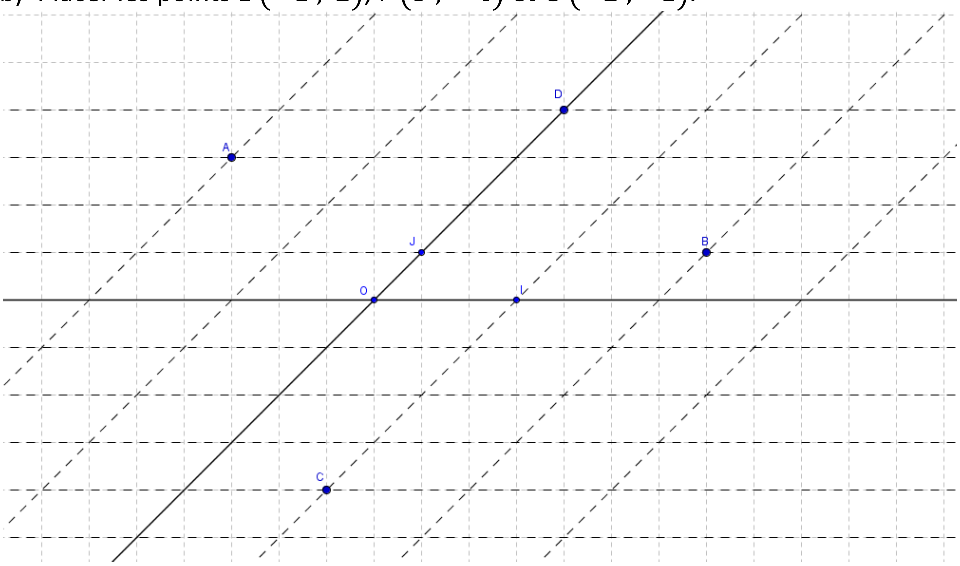
b) Lire les coordonnées des points O, I, J, A, B, C, D, E, F, G et H dans le repère (C; E, D)



2. Dans le repère (O; I, J) ci-dessous, après avoir précisé le type de repère,

a) Lire les coordonnées des points A, B, C et D.

b) Placer les points E $(-1\ ;\ 2)$, F $(3\ ;\ -4)$ et G $(-2\ ;-1)$.

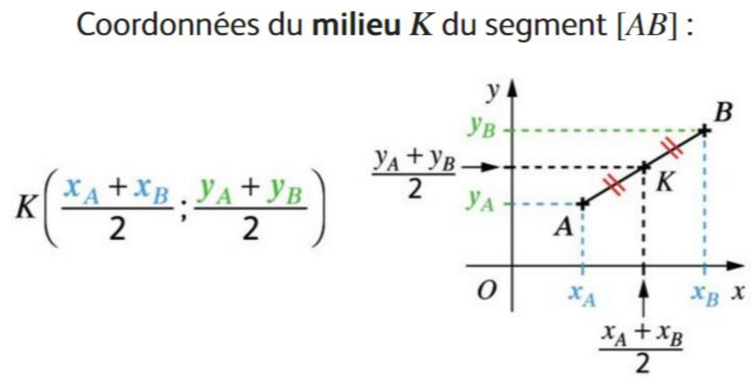


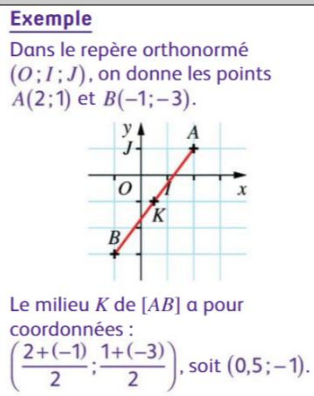
VI- Coordonnées du milieu d'un segment

Propriété. Dans un repère quelconque du plan, si $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ alors les coordonnées du milieu K d'un segment $[AB]$ sont :

$$\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}\right)$$

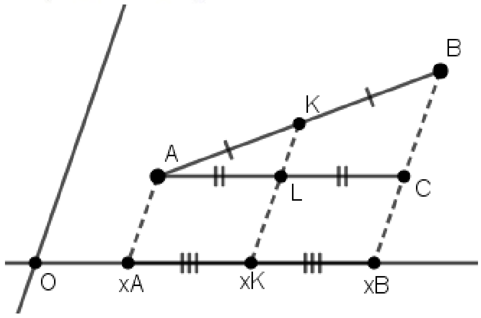
Autrement dit :
l'abscisse (resp. l'ordonnée) de K est la moyenne des abscisses (resp. des ordonnées) de A et de B.





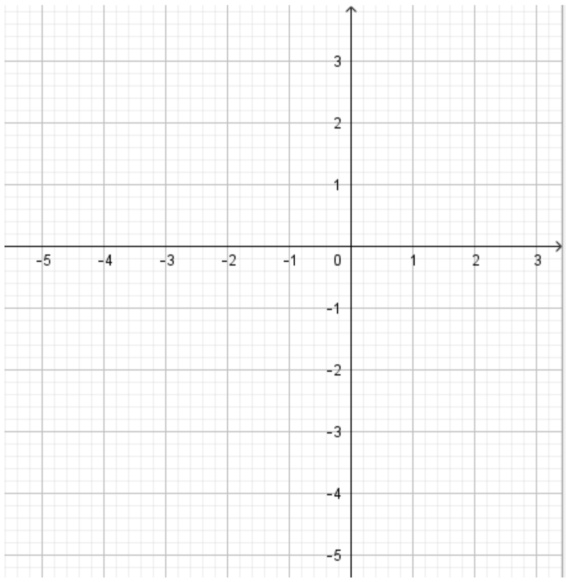
Preuve : Menons la parallèle à l'axe des abscisses passant par A et la parallèle à l'axe des ordonnées passant par B : appelons C le point d'intersection. D'après le théorème des milieux, la parallèle à (BC) passant par K coupe $[AC]$ en son milieu L.
Si on suppose que $x_A \leq x_B$ alors l'égalité $AL = LC$ peut s'écrire $x_K - x_A = x_B - x_K$ ce qui donne $2x_K = \ldots\ldots\ldots$ puis $x_K = \ldots\ldots\ldots$

On obtient la même chose en supposant $x_A > x_B$. Puis on montre de la même façon en raisonnant sur l'axe des ordonnées que $y_K = \ldots\ldots\ldots$



Ex 2 : Dans un repère du plan $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on considère les points $A(-5; 5)$, $B(-2; 3)$ et $C(3; -1)$.

1) Déterminer les coordonnées de I, J et K, les milieux respectifs de $[AB]$, $[AC]$ et $[BC]$.
2) Placer tous ces points dans un repère.



VII- Distance entre deux points dans un repère orthonormé

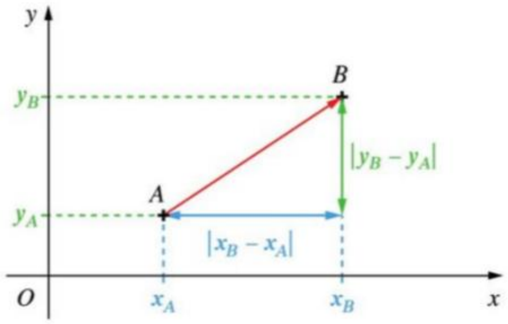
Propriété : dans un repère **orthonormé** du plan $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$, si $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$ alors la distance entre les points A et B est :

$$\boldsymbol{AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}}$$

Preuve : résulte du théorème de Pythagore

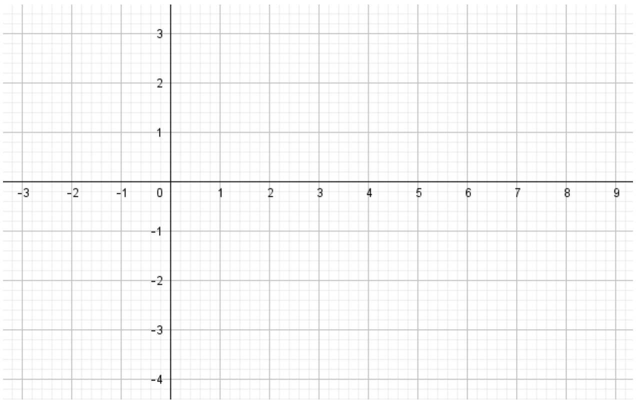
Distance entre deux points $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$:

$$AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$$



<u>Ex 3</u> : Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$, on considère les points $\mathrm{A}(-3\ ;\ 2)$, $\mathrm{B}(9\ ;\ -4)$ et $\mathrm{C}(5\ ;\ 3)$.

1) Calculer les longueurs AB, AC et BC.
2) Que peut-on en déduire sur le triangle ABC ? Est-il rectangle ? Justifier.



<u>Vidéos à visionner :</u>

[Sur les coordonnées du milieu d'un segment]

[Sur la longueur d'un segment $[AB]$]

[Sur la différence entre une valeur exacte et une valeur approchée]

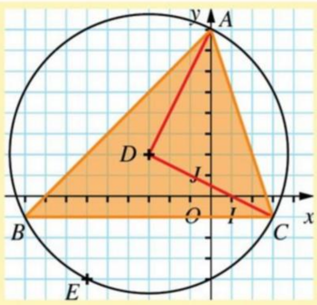
<u>Ex 4</u> :

Énoncé Dans un repère orthonormé $(O;I;J)$, on considère les points $A(0;8)$, $B(-9;-1)$, $C(3;-1)$ et $D(-3;2)$.

1. Montrer que le point D est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.

2. Quelle est la nature du triangle ACD ?

3. Déterminer les coordonnées de E, symétrique de A par rapport à D.



Ex 5 :

50 Vrai ou faux ?

Dans un repère du plan, on considère les points $A(-2;-2)$, $B(2;-1)$, $C(3;2)$, $D(-1;1)$ et $E(1;-4)$.

Pour chaque affirmation suivante, dire si elle est vraie ou fausse.

1. $ABCD$ est un parallélogramme.
2. Le point E est le symétrique du point B par rapport au point C.
3. B est le milieu du segment $[CE]$.
4. $AECD$ est un trapèze.

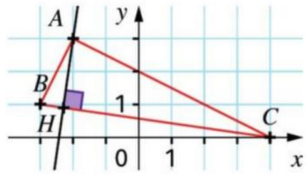
Ex 6 :

57 LOGIQUE Dans un repère orthonormé, on considère les points $A(4;-5)$, $B(7;1)$, $C(1;4)$ et $D(-2;-2)$.

1. Démontrer que $ABCD$ est un carré.
2. Calculer l'aire du carré $ABCD$.

Ex 7 :

63 Dans un repère orthonormé, on considère les points $A(-2;3)$, $B(-3;1)$ et $C(4;0)$, et on note H le pied de la hauteur du triangle ABC issue du point A.



1. Montrer que le triangle ABC est rectangle.
2. En déduire l'aire du triangle ABC, puis la hauteur AH issue du point A.

Indication pour l'ex 7 :

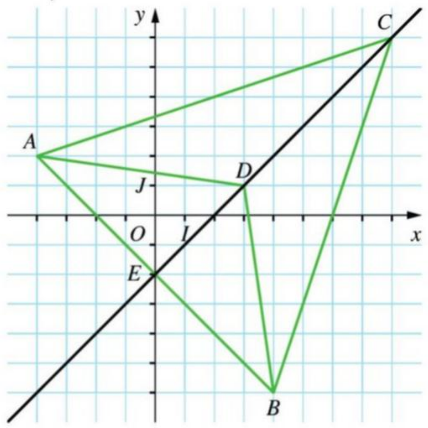
1) Calculer les longueurs AB, AC et BC et utiliser la réciproque du théorème de Pythagore.

2) L'aire est $\frac{Base \times hauteur}{2} = \frac{AB \times AC}{2}$ et pour la 2ème partie de la question l'aire est aussi égale à

$$\frac{Base \times hauteur}{2} = \frac{BC \times AH}{2}$$

Ex 8 :

64 Dans un repère orthonormé $(O;I;J)$, on considère les points $A(-4;2)$, $B(4;-6)$, $C(8;6)$, $D(3;1)$ et $E(0;-2)$.



1. Montrer que le point D appartient à la médiatrice du segment $[AB]$.
2. Déterminer la nature du triangle ABC.
3. En déduire que (AB) et (CD) sont perpendiculaires.
4. Le point D est-il le milieu du segment $[CE]$?
5. Calculer l'aire du triangle ABC.

Indication pour l'ex 8 :

1) *La médiatrice est l'ensemble des points situés à égal distance des extrémités du segment, donc il suffit de calculer les longueurs DA, DB.*
2) *Calculer AB, AC et BC.*
3) *Comme $CA = CB$, C est un point de la médiatrice de $[AB]$ et d'après 1), la droite (CD) est la médiatrice de $[AB]$.*
4) *Calculer les coordonnées du milieu de $[CE]$.*
5) *Vérifier que E est le milieu de $[AB]$ et on aura alors l'aire est $\frac{Base \times hauteur}{2} = \frac{AB \times CE}{2}$.*

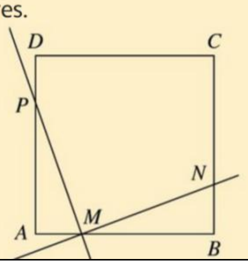
Ex 9 :

98 PRISE D'INITIATIVES Compétence Chercher

$ABCD$ est un carré.

Pour tout point M du segment $[AB]$, on note N le point du segment $[BC]$ tel que $BN = AM$ et P le point de $[AD]$ tel que $AP = BM$.

Démontrer que les droites (MN) et (MP) sont perpendiculaires.



Indication pour l'ex 9 :

Choisir par exemple le repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$ donc $A(0;0)$, $B(1;0)$, $C(1;1)$ et $D(0;1)$.

Comme $M \in [AB]$ ses coordonnées sont $M(x;0)$ avec $x \in [0;1]$.

Comme $N \in [BC]$ avec $BN = AM = x$, ses coordonnées sont $N(1;x)$.

Chercher de même, en fonction de x, les coordonnées de P puis calculer (toujours en fonction de x) les longueurs MN, MP et PN et enfin, utiliser la réciproque du théorème de Pythagore.

Calculer BN en fonction de y et AM en fonction