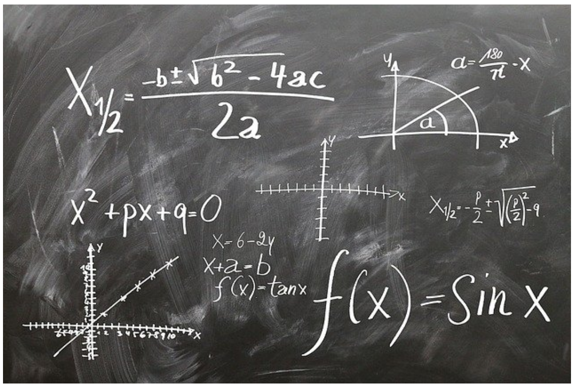
Chapitre 3 - Généralités sur les fonctions

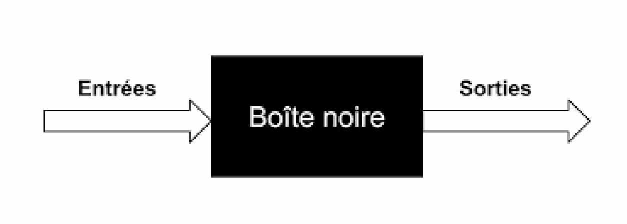


L'équation de croissance des villes (Marc Barthélémy)

1 fonction : concept et représentation

1.1 fonction : l'idée

petit dessin pour comprendre



définition

- **la fonction** f : c'est la boîte noire
  - elle peut être notée de différentes façons :
  - f (juste le nom)
  - $y = f(x)$ ou $f : x \longmapsto f(x)$
    (le nom et l'expression de l'image en fonction de la variable muette, ici x)
  - $f : \left| \begin{array}{ccc} D_f & \longrightarrow & Im(f) \\ x & \longrightarrow & f(x) \end{array} \right.$
    (le nom, l'expression de son image ainsi que les ensembles de départ et d'arrivée)
    (c'est l'écriture la plus lourde mais la plus précise)
- **l'antécédent** x : la valeur en entrée (aussi appelé variable muette ou paramètre)
- **l'image** $f(x)$: la valeur en sortie
- synthèse : la fonction f a pour antécédent x et pour image $f(x)$

remarque

- toutes les fonctions ne s'appellent pas f, tous les antécédents ne s'appellent pas x
- on peut imaginer la fonction *hello* tel que :

  $hello(soleil) = 3 \times soleil + 2$ qui est identique à

  $f(x) = 3x + 2$ avec un peu plus de soleil !
- HP : on peut imaginer des fonctions à plusieurs variables ; par exemple :

  $volume\_pav\_droit(longueur, largeur, hauteur) = longueur \times largeur \times hauteur$
- HP : de même, on peut élargir le concept de fonction pour avoir plusieurs sorties (avec une seule entrée), ce qui semble un peu plus dur à imaginer
  - ex classique : $f(z) = \sqrt{z}$, $z \in \mathbf{C}$

vocabulaire complémentaire

- fonction f ou $y = f(x)$: c'est la boîte noire
- l'ensemble des antécédents x de f s'appelle l'ensemble de définition de f
- HP : l'ensemble des images de f est : $Im(f) = \{y = f(x)\,,\, x \in D_f\}$
- HP : l'ensemble des antécédents de f est : $D_f = \{x = f^{-1}(y)\,,\, y \in Im(f)\}$

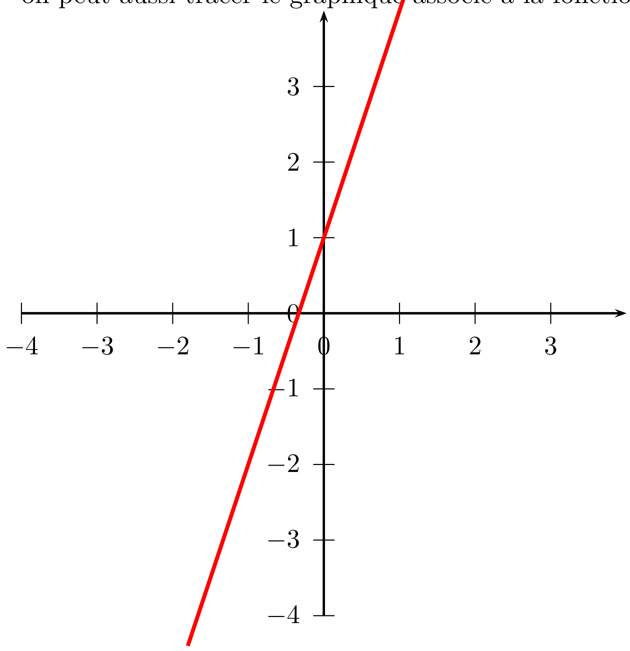
1.2 1 fonction 3 représentations (chacune utile et complémentaire)

un exemple

- $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longrightarrow & 3x+1 \end{array} \right.$; f possède une **expression algébrique** cad une formule
- on peut lui associer un **tableau de valeurs** :

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
f(x)	-11	-8	-5	-2	1	4	7	10	13	16

- on peut aussi tracer le graphique associé à la fonction f



propriété

- expression algébrique (ou formule) : information complète mais n'existe pas toujours
  - pratique pour faire le calcul d'une image
  - permet de trouver le ou les antécédent(s) d'un nombre
  - information complète : permet de construire le tableau de valeurs et le graphe
  - HP : elle permet (potentiellement) de définir la fonction réciproque f^{-1}
- tableau de valeurs : incomplet mais efficace (aux points données)
  - pratique pour les valeurs dans le tableau (pas de calcul à faire)
  - incomplet : on ne connaît pas le résultat pour les valeurs qui ne sont pas dans le tableau
  - permet de construire le tableau de valeurs et le graphe de la fonction
  - informatique :
    - un tableau de valeurs est une base de données
    - on peut l'interroger pour avoir des réponses concrètes
    - technologie : fichier csv, document excel, requête sql ...
    - utilisateur : dirigeant d'entreprise / commercial (reporting), scientifique, ingénieur (abaques, résultats connues, simulations ...
- graphe : allure (partielle) de la fonction
  - pratique pour donner l'allure de la fonction
  - imprécis : l'information dépend de la précision du graphique
  - incomplet : ne donne qu'une partie de la courbe

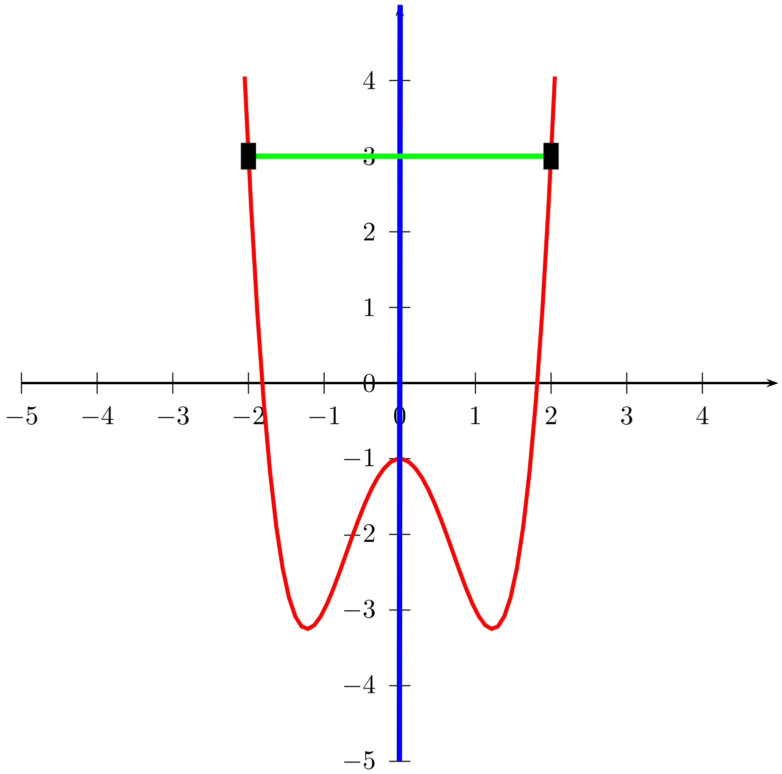
à vous de jouer

- on considère la fonction $g(x) = -3x^2 + 2x + 1$
- construire le tableau de valeurs (grâce à votre calculatrice) sur $[-5; 5]$ avec un pas de 1
- construire le graphe associé
- trouver les antécédents de 1
- trouver les antécédents de 2

2 fonction particulière

2.1 fonction paire

un exemple : $y = x^4 - 3x^2 - 1$



définition - propriété

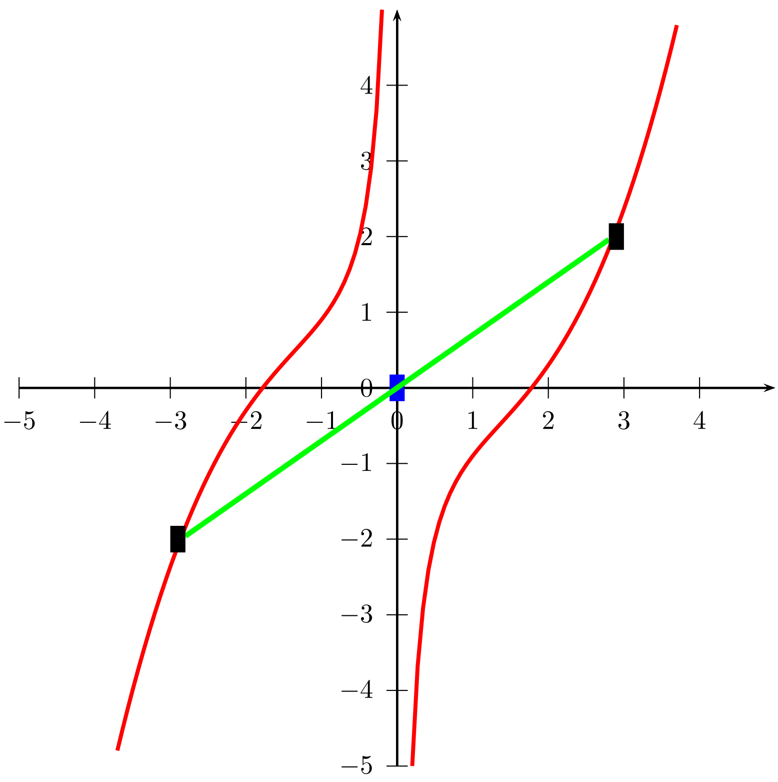
- définition : f est paire si : $\forall x \in D_f : f(-x) = f(x)$
- propriété caractéristique : f a pour axe de symétrie la droite $x = 0$
- astuce : le tableau de valeurs est alors symétrie par rapport à 0

exemple classique

- $x \longrightarrow x^2$ est paire
- tout polynôme ne comprenant que des monômes de degrés pairs est pair, par exemple : $x \longrightarrow 3x^4 - x^2 + 1$
- $x \longrightarrow \cos x$ est paire
- la somme de fonctions paires est paire
- approfondissement : composition de fonctions paires et impaires : que peut-on dire ?

2.2 fonction impaire

un exemple : $y = \dfrac{1}{10}x^3 - \dfrac{1}{x}$



définition - propriété

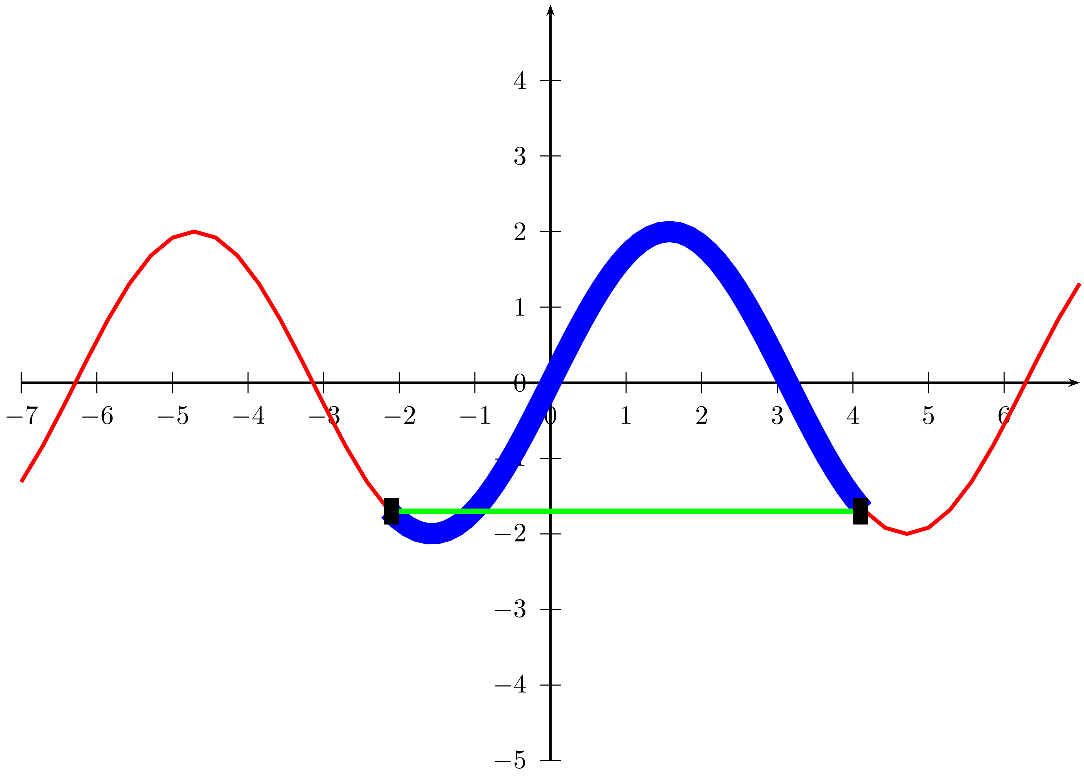
- définition : f est impaire si : $\forall x \in D_f$: $f(-x) = -f(x)$
- propriété caractéristique : f a pour centre de symétrie le point $O(0, 0)$
- astuce : le tableau de valeurs est alors symétrie par rapport à 0, au signe près

exemple classique

- $x \longrightarrow x$ est impaire ; $x \longrightarrow x^3$ aussi
- tout polynôme ne comprenant que des monômes de degrés impairs est impair, par exemple : $x \longrightarrow 3x^3 - x^2$
- $x \longrightarrow \sin x$ et $x \longrightarrow \tan x$ sont impaires
- la somme de fonctions impaires est impaire

2.3 fonction périodique

un exemple : $y = 2\sin x$



définition - propriété

- définition :
  - f est périodique si un motif (fini) se elle se répète à l'infini
  - la taille T (sur les x) du motif répété est appelée la période
  - mathématiquement : f est périodique si $\exists T \in \mathbf{R}$ tel que : $\forall x \in \mathbf{R}$, $f(x + T) = f(x)$
- astuce : le tableau de valeurs se répète tous les T

exemple classique

- $x \longrightarrow \sin x$, $x \longrightarrow \cos x$ et $x \longrightarrow \tan x$ sont périodiques
- attention, la somme de 2 fonctions périodiques n'est pas forcément périodique (mais là c'est un peu compliqué ...)

3 fonction de référence

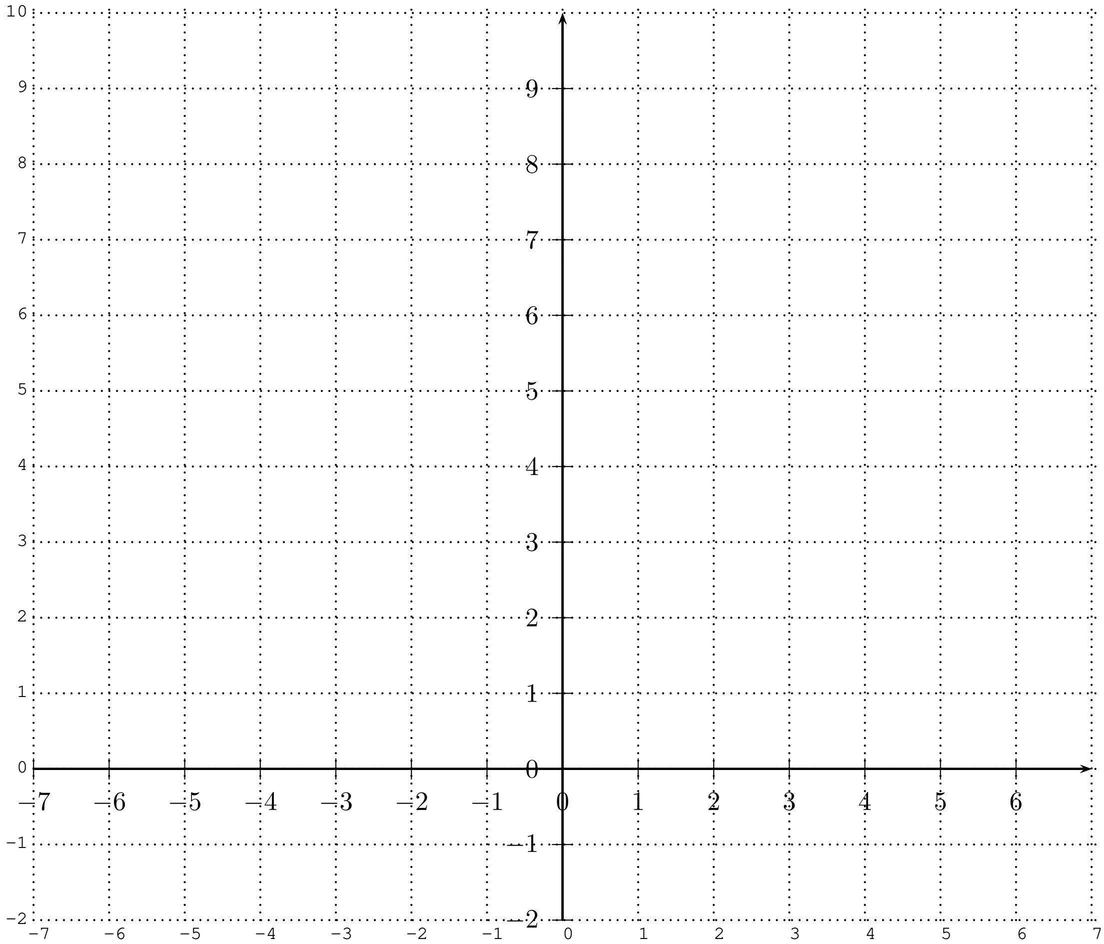
3.1 fonction carrée : $x \longrightarrow x^2$

forme algébrique et tableau de valeurs

- $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longrightarrow & x^2 \end{array} \right.$
- c'est une fonction paire
-

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
f(x)									

graphique



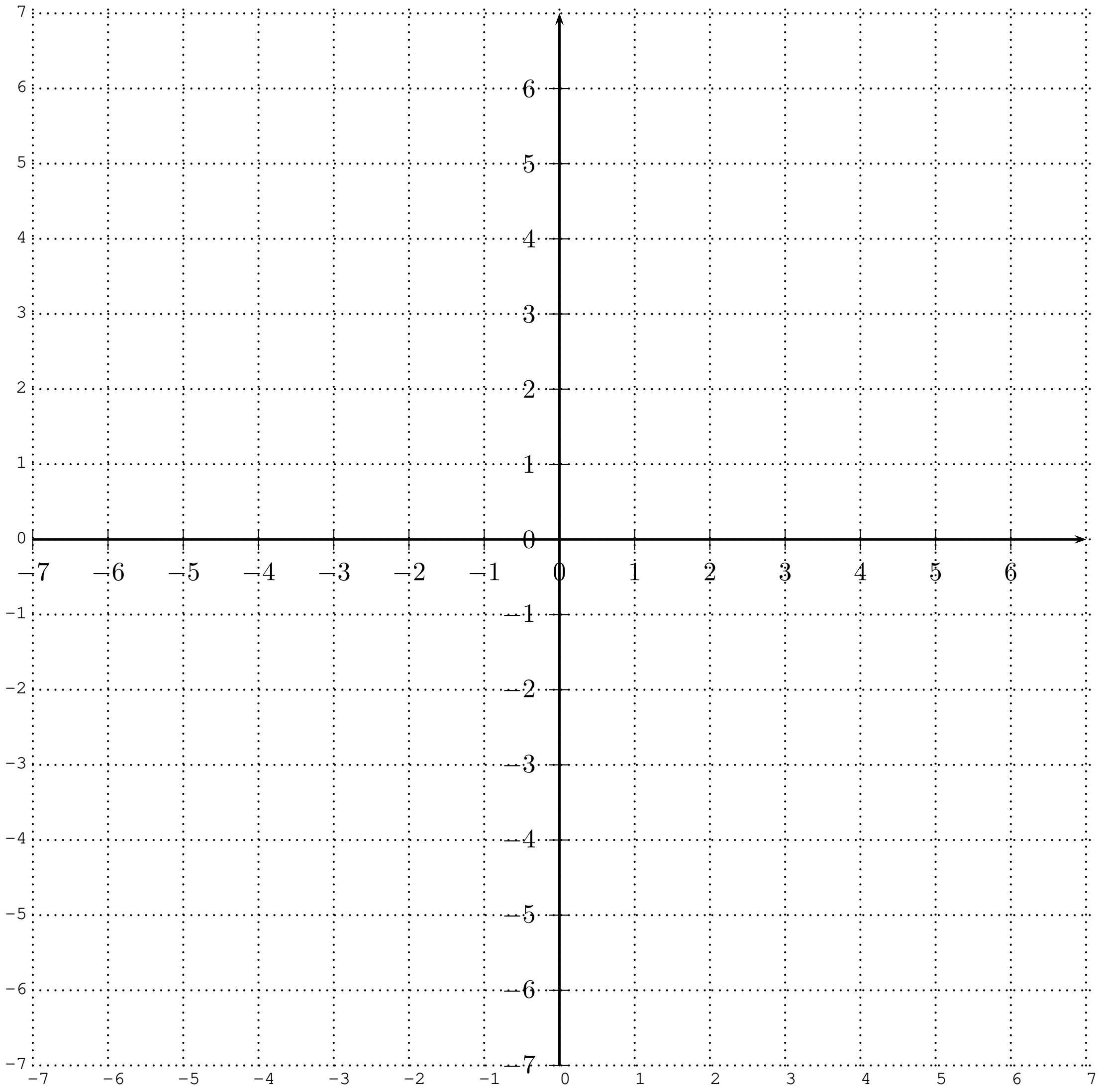
3.2 fonction inverse : $x \longrightarrow \dfrac{1}{x}$

forme algébrique et tableau de valeurs

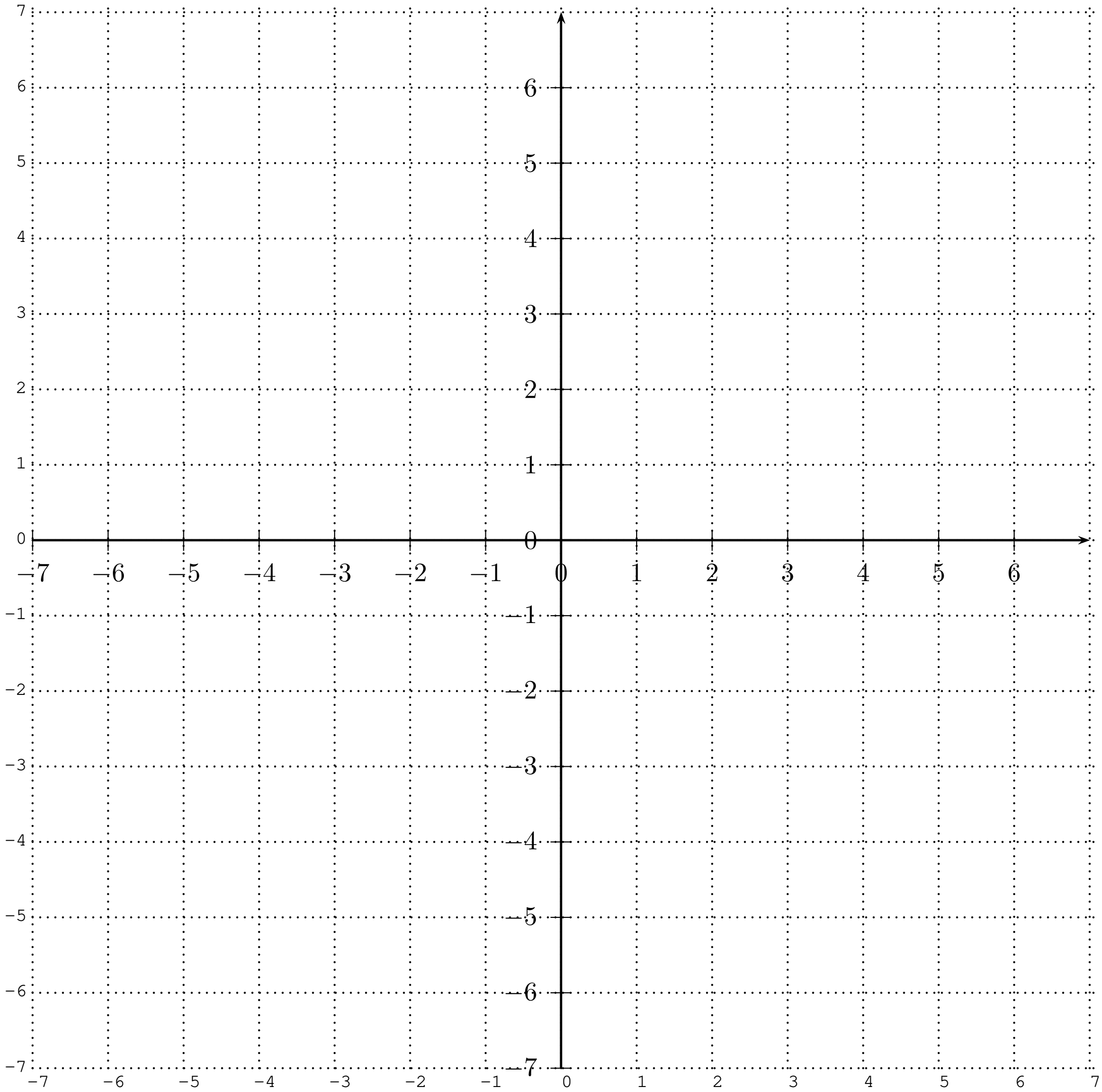
- $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^* & \longrightarrow & \mathbf{R}^* \\ x & \longrightarrow & \dfrac{1}{x} \end{array} \right.$
- c'est une fonction impaire
-

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
f(x)									

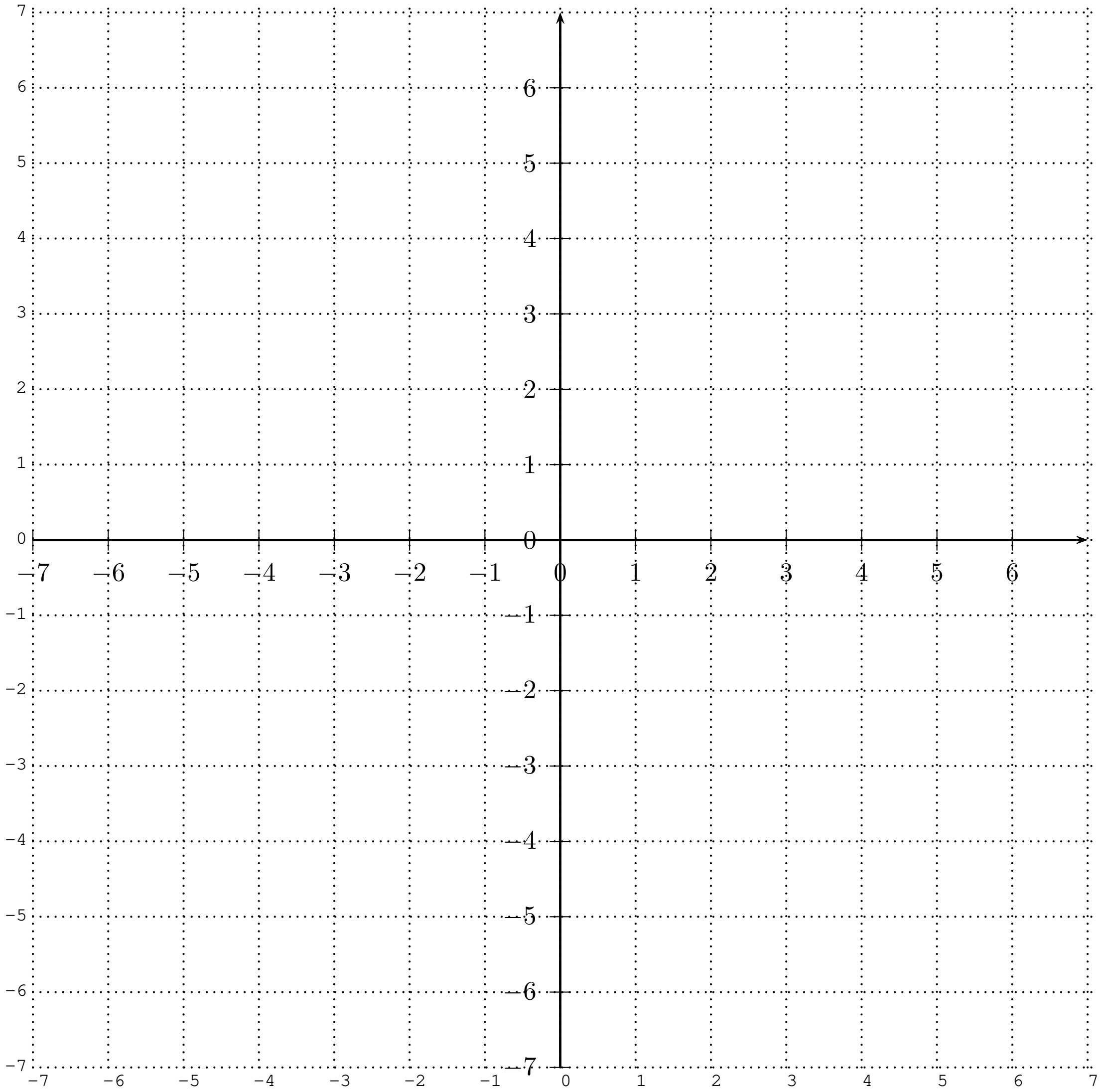
graphique



3.3 fonction affine : $x \longrightarrow 3x + 1$



3.4 fonction racine : $x \longrightarrow \sqrt{x}$



3.5 fonction cube : $x \longrightarrow x^3$