

Chapitre 4 - Vecteurs

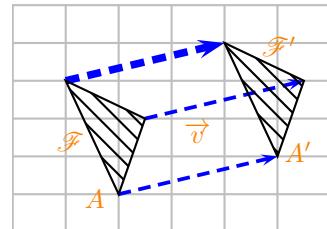


1 Translation et vecteur

1.1 Translation et vecteur associé

Définition

- à toute translation (déplacement d'un point vers un autre, on peut associer 1 **vecteur**)
- ce vecteur est caractérisé par :
 - 1 **direction**
 - 1 **sens**
 - 1 longueur appelée **norme**
- la norme du vecteur \vec{v} est notée $\|\vec{v}\|$



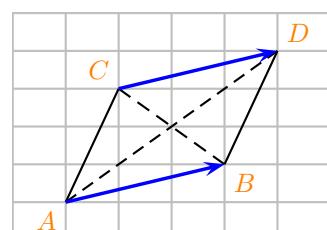
1.2 Cas particulier : vecteur nul

- la translation de vecteur \overrightarrow{AA} transforme chaque point en lui-même
- le vecteur \overrightarrow{AA} s'appelle le **vecteur nul** et est noté $\vec{0}$

1.3 Égalité de 2 vecteurs

Définition - Propriété

- $\|\vec{u}\| = 0 \Rightarrow \vec{u} = \vec{0}$
- $\vec{u}, \vec{v} \neq \vec{0} \quad \vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u}$ et \vec{v} ont même direction, sens et norme
- 4 points distincts A, B, C et D
 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow ABCD$ est 1 parallélogramme
(attention à l'ordre des points)



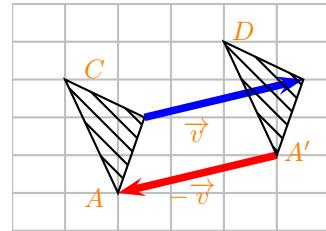
1.4 Opposé d'un vecteur

Définition

- l'opposé du vecteur \vec{v} est $-\vec{v}$
- même direction, même norme que \vec{v} mais sens contraire

Remarques

- si on applique 1 translation de vecteur \vec{v} à 1 figure puis celle de vecteur $-\vec{v}$, on revient à la figure de départ
- ceci correspondant à (voir infra) : $\vec{v} + (-\vec{v}) = \vec{0}$
- l'opposé du vecteur \overrightarrow{AB} est le vecteur \overrightarrow{BA}
- le signe moins devant 1 vecteur permute donc les lettres : $-\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{FE}$

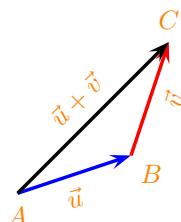


2 Opérations sur les vecteurs

2.1 Somme de 2 vecteurs

Propriété - Définition

- 3 points A , B et C ; appliquer $t_{\overrightarrow{AB}}$ qui transforme A en B puis $t_{\overrightarrow{BC}}$ qui transforme B en C , revient à appliquer $t_{\overrightarrow{AC}}$ qui transforme A en C
- pour les vecteurs, cela donne : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$
- comme les nombres, on peut additionner (ou soustraire) des vecteurs dans l'ordre que l'on souhaite : $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$



Propriétés

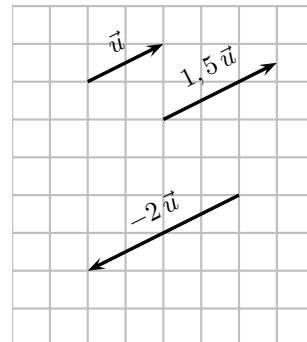
- **Relation de Chasles** : 3 points A , B , C ; $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$
- \vec{u} , \vec{v} associés à 2 côtés consécutifs d'un parallélogramme :
 - $\vec{u} + \vec{v}$ est associé à la 1^{re} diagonale (voir supra)
 - $\vec{v} - \vec{u}$ à la 2^{me}

2.2 Produit d'un vecteur par un réel

Propriétés

un vecteur $\vec{u} \neq \vec{0}$ et un réel $k \neq 0$

- le vecteur $k\vec{u}$ est le vecteur qui a :
 - même direction que le vecteur \vec{u}
 - même sens que \vec{u} si $k > 0$, sens contraire de \vec{u} si $k < 0$
 - pour norme $|k| \times \|\vec{u}\|$



Propriétés

$\forall \vec{u}$ et \vec{v} et $\forall k, k' \in \mathbf{R}$, on a :

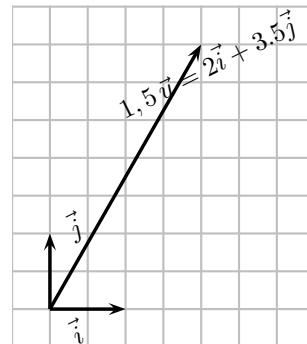
- $\forall \vec{u}$ et \vec{v} et $\forall k, k' \in \mathbf{R}$, on a :
- $k(\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$
- $(k + k')\vec{u} = k\vec{u} + k'\vec{u}$
- $k\vec{u} = 0 \iff k = 0 \text{ ou } \vec{u} = \vec{0}$

3 Coordonnées et Opérations pour des vecteurs

3.1 Coordonnées d'un vecteur dans une base

Définition - Propriétés

- 1 **base** du plan est 1 couple (\vec{i}, \vec{j}) formé de 2 vecteurs non nuls et de directions différentes
- $\forall \vec{u} \exists ! (x, y)$ tel que : $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$ où :
 - x est appelée l'**abscisse** du vecteur \vec{u}
 - y l'**ordonnée** du vecteur \vec{u}
 - \vec{u} a pour **coordonnées** (x, y)
- on note : $\vec{u} = (x, y)$ ou $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$



Propriétés

$\forall \vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ et $\forall k \in \mathbf{R}$, on a :

- $\vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix}$
- $\vec{u} - \vec{v} = \begin{pmatrix} x - x' \\ y - y' \end{pmatrix}$
- $k \times \vec{u} = \begin{pmatrix} k \times x \\ k \times y \end{pmatrix}$

- dans 1 base orthogonale (cad $\vec{i} \perp \vec{j}$), on peut calculer la longueur du vecteur \vec{u} grâce au Pythagore : $\|\vec{u}\|^2 = x^2 + y^2$

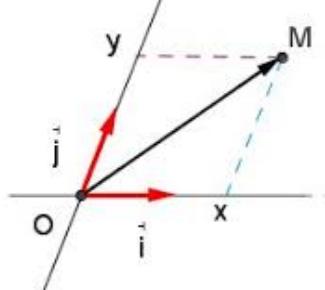
Exemple :

- $\vec{u} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix}$; calculer $\vec{u} + \vec{v}$, $\vec{u} - 3\vec{v}$, $\|\vec{u}\|$ et $\|\vec{u} - \vec{v}\|$

3.2 Coordonnées de points dans 1 repère

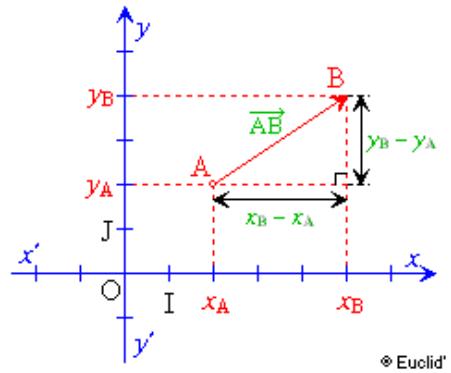
Définition - Propriété

- un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ est formé :
 - d'1 point O appelé centre du repère
 - d'1 base du plan (\vec{i}, \vec{j})
 - \vec{u} a pour coordonnées (x, y)
- M est 1 point du plan tel que $\overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
 - M a pour coordonnées (x, y)
 - l'abscisse de M est x
 - l'ordonnée de M est y



- $\forall A = \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix}$

- $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$



Exemple :

- $A = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$
- vérifier la relation de Chasles sur les points A,B et C
- trouver les coordonnées du point D tel pour que ABCD soit un parallélogramme

3.3 Colinéarité et perpendicularité de 2 vecteurs

Définition - Propriété

- $\forall \vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$
- le déterminant de \vec{u} et \vec{v} est noté : $\boxed{\det(\vec{u}, \vec{v}) = xy' - yx'}$
- le produit scalaire de \vec{u} et \vec{v} est noté : $\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'}$
- $\boxed{\det(\vec{u}, \vec{v}) = 0 \iff \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont colinéaires}}$
- $\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \iff \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont perpendiculaires}}$

Exemple :

- $A = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$
- trouver les coordonnées du point D tel pour que ABCD soit un parallélogramme (grâce au déterminant)
- est-ce un rectangle ? (grâce au produit scalaire)

4 Application à l'IA

4.1 Manipulation d'images sous OpenCV

- TP 1 - Image
- TP 2 - Vidéo