Chapitre 9 - Droite et Système

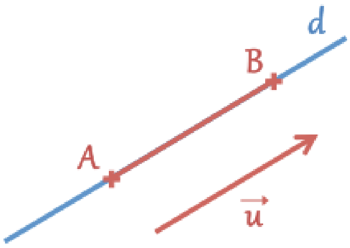
1 Équation cartésienne de droite : $ax + by + c = 0$

1.1 1 point A et un vecteur directeur $\overrightarrow{u}$

définition - propriété

$\overrightarrow{u}$ un vecteur non nul et A un point

- **vecteurs colinéaires** : $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires si $\boxed{\exists\, k \in \mathbf{R} \text{ tq } \overrightarrow{v} = k \times \overrightarrow{u}}$
- **droite (AM)** : l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{u}$ sont colinéaires
- **vecteur directeur de (AM) = (A ; $\overrightarrow{u}$)** : $\overrightarrow{u}$ est un vecteur directeur de (AM)
- **droites parallèles** : $\boxed{d_1 \ // \ d_2 \iff \text{même direction} \iff \text{vecteurs directeurs colinéaires}}$
- **exemple** : (d) passe par A et B et dirigée par $\overrightarrow{u}$ (ou par $\overrightarrow{AB}$)

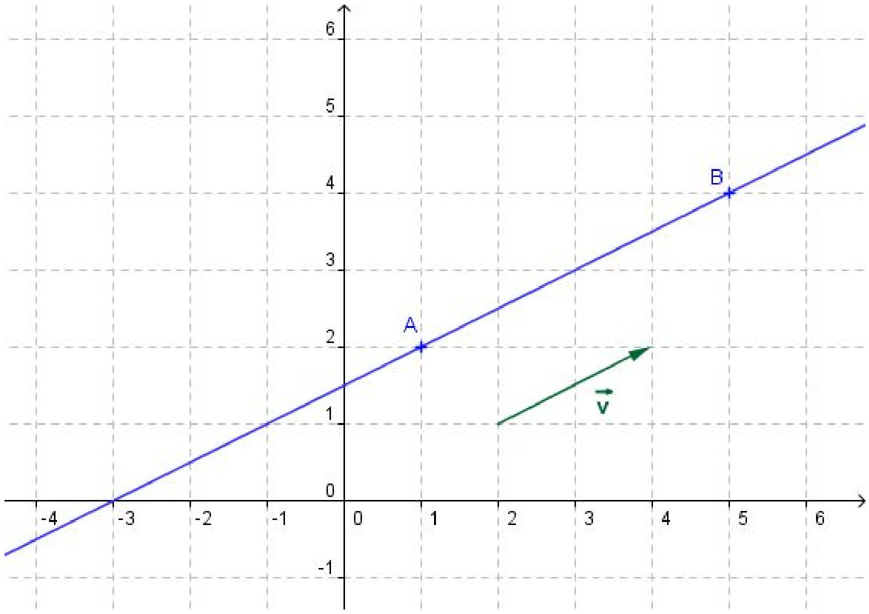


1.2 $ax + by + c = 0$ avec $ab \neq 0$

définition - propriété

a et b tq $\boxed{a \times b \neq 0}$ (cad au moins 1 des 2 non nul)

- **équation cartésienne** : l'ensemble des points M$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ tq $ax + by + c = 0$ est une droite d
- $\boxed{\textbf{un vecteur directeur de d} : \vec{u}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}}$
- HP : **un vecteur perpendiculaire à d** : $\vec{v}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et $\vec{u}.\vec{v} = 0$
- **points intéressants** : si $b \neq 0$ alors $A\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{c}{b} \end{pmatrix} \in d$ ou si $a \neq 0$ alors $B\begin{pmatrix} -\frac{c}{a} \\ 0 \end{pmatrix} \in d$
- $\boxed{\textbf{1 droite d} \iff \textbf{1 équation cartésienne}}$
- trouver l'équation cartésienne de la droite ci-dessous, de 2 façons différentes :



2 Équation réduite droite : $y = ax + b$ ou $x = k$

Droite particulière : $y = k$ ou $x = k$

Propriété

on considère 1 droite d d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$

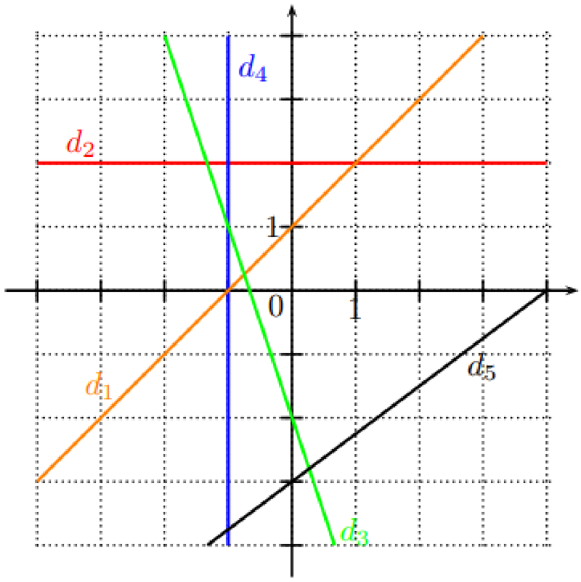
- **si** $a = 0$ **alors** d // $(\mathbf{O}\,;\vec{i}\,)$ **:** l'équation de d revient à $y = k$ où $k \in \mathbf{R}$: **droite horizontale**
- **si** $b = 0$ **alors** d // $(\mathbf{O}\,;\vec{j}\,)$ **:** l'équation de d revient à $x = k$ où $k \in \mathbf{R}$: **droite verticale**
- **sinon, la pente de d est "en biais" :** $\boxed{\text{pente} : -\frac{b}{a}}$ et $\boxed{\text{ordonnée à l'origine} : -\frac{c}{a}}$

Équation réduite d'une droite "en biais" : $y = ax + b$

Propriété

- soit $(d) : ax + by + c = 0$:
  - (d) n'est pas verticale $\Leftrightarrow b \neq 0$
  - dans ce cas, l'écriture se simplifie pour donner : $(d) : y = ax + b$
  - ATTENTION : il ne s'agit pas des mêmes a et b de l'équation cartésienne)

- dans l'équation $y = ax + b$, on appelle a **la pente** et b **l'ordonnée à l'origine**
- **1 vecteur directeur de d** : $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}1\\a\end{pmatrix}$
  j'avance de $+1$ et je monte (ou je descends) de la pente
- HP : **1 vecteur normal à d** : $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}a\\-1\end{pmatrix}$
- **pente** : (AB) d'équation $y = ax + b$ passant par A$\begin{pmatrix}x_a\\y_a\end{pmatrix}$ et B$\begin{pmatrix}x_b\\y_b\end{pmatrix}$ a pour pente $a = \dfrac{y_b - y_a}{x_b - x_a}$
- trouver l'équation cartésienne des droites suivantes :



3 Système

3.1 Système linéaire 2 équations 2 inconnues

Définition - Propriété

- $\left\{\begin{array}{rcr} 2x+3y & = & 7 \\ 3x-2y & = & -1 \end{array}\right.$ est un système d'inconnues x et y
- une solution de ce système est un **couple (x ;y)** qui vérifie **simultanément** les **2 équations**

Résolution

- on verra en exercices 2 méthodes par le calcul et 1 méthode graphique pour résoudre ce système
- (HP) : on peut aussi résoudre ce système grâce aux matrices

3.2 Lien avec la géométrie

Propriété

- en mathématiques comme ailleurs, il est toujours important de comprendre ce que l'on fait
- résoudre 1 système 2×2, c'est rechercher une solution commune aux 2 équations
- chaque équation représente une droite
- il est donc clair que, par distinction de cas, la solution du système est l'**ensemble vide** (droite parallèles disjointes, **1 point** (droites sécantes), **la droite elle-même** (droite identiques)
- <u>remarque :</u> on rappelle que 2 droites sont parallèles ssi on les diriger par le même coefficient directeur (même pente)

4 Un peu de python

4.1 Algorithme 1 : alignement de 3 points

```python
# Etudier l'alignement de trois points dans le plan, version 1

def CoefficientDirecteur(x1,y1,x2,y2): # On se place dans le cas où x1 est différent de x2
    return (y2-y1)/(x2-x1)

def OrdonneeALorigine(x1,y1,x2,y2): # On se place dans la cas où x1 est différence de x3
    return y1-CoefficientDirecteur(x1,y1,x2,y2)*x1

def PointsAlignes(x1,y1,x2,y2,x3,y3):
    if abs(x1-x2) < 10**(-12):
        if abs(x1-x3) < 10**(-12):
            return True
        else:
            return False
    else:
        a = CoefficientDirecteur(x1,y1,x2,y2)
        b = OrdonneeALorigine(x1,y1,x2,y2)
```

```python
        if abs(y3-a*x3-b) < 10**(-12):
            return True
        else:
            return False

# Version 2, utilisant la colinéarité de vecteurs
def determinant(xu,yu,xv,yv):
    return xu*yv-yu*xv

def PointsAlignes2(x1,y1,x2,y2,x3,y3):
    if abs(determinant(x2-x1,y2-y1,x3-x1,y3-y1))<10**(-12):
        return True
    else:
        return False
```

4.2 Algorithme 2 : équation de droite

```python

def EquationDeDroite(x1,y1,x2,y2):
  """ Détermine une équation de droite (du type x=c ou y=ax+b) passant par deux points donnés """
    if abs(x1-x2)<10**(-12):
        return 'x='+str(x1)  # on revoie l'équation sous forme d'un texte
    else:
        a = CoefficientDirecteur(x1,y1,x2,y2)
        b = OrdonneeALorigine(x1,y1,x2,y2)
        return 'y='+str(a)+'*x+'+str(b)
```