single_serveur_queueing : M / M / 1

M/M/1

1 introduction

A/B/C/K/N/N/D

- A : processus d'arrivée
- B : processus du temps de service (associés au serveurs)
- C : nombre de serveurs - infini si non précisé
- K : nombre maximum d'unités dans le système (file + serveurs) - infini si non précisé
- N : calling population (pas clair - à préciser) - infini si non précisé
- D : modèle de prise en charge dans la file (fifo - filo - aléatoire - prioritaire - ...)

M/M/1

- M : arrivée exponentiel
- M : serveur exponentiel
- 1 : 1 serveur
- K pas précisé : taille de file ∞

notation

- $\tau_a = \dfrac{1}{\lambda}$: temps moyen entre 2 arrivées
- $\tau_s = \dfrac{1}{\mu}$: temps moyen de service d'1 unité
- λ : nombre moyen d'arrivée par unité de temps
- μ : nombre moyen d'unités servies par unité de temps (pour un service continue)
- $\rho = \dfrac{\tau_s}{\tau_a} = \dfrac{\lambda}{\mu}$: ratio d'utilisation ($\rho < 1$ pour l'équilibre - voir supra)
- n : nombre d'unités dans le système (file + serveur) où $n \geq 0$
- P_n : probabilité d'avoir n unités dans le système

2 situation physique

- les clients arrivent dans 1 file d'attente
- leur arrivée est modélisée par 1 va $X \rightsquigarrow \mathcal{E}(\lambda)$
- chaque client est reçu par 1 guichet unique
- le temps de service suit 1 va $Y \rightsquigarrow \mathcal{E}(\mu)$

3 calcul de P_n

équations différentielles discrètes : transition de t à $t+h$

		1 entrée		stable		1 sortie	
n = 0	$P_0(t+h) =$			(1-$\lambda h)P_0(t)$	+	$\mu h P_1(t)$	+ o(t)
n $\geq$ 1	$P_n(t+h) =$	$\lambda h P_{n-1}(t)$	+	(1-$\lambda h - \mu h)P_n(t)$	+	$\mu h P_{n+1}(t)$	+ o(t)

équations d'équilibre

n = 0	0 =			-λP_0	+	μP_1
n $\geq$ 1	0 =	λP_{n-1}	-	$(\lambda+\mu)P_n$	+	μP_{n+1}

équation réduite

n $\geq$ 1 0 = -λP_{n-1} + μP_n (1)

calcul de P_n

n $\geq$ 0 $\boxed{P_n = \rho^n \times P_0}$ $\Rightarrow$ $1 = \sum_{0}^{+\infty} P_k = P_0 \times \sum_{0}^{+\infty} \rho^k = P_0 \times \dfrac{1}{1-\rho}$ $\Rightarrow$ $\boxed{P_0 = 1-\rho}$

conclusion : $\boxed{\forall n \geq 0\,,\; P_n = \rho^n(1-\rho)}$

4 indicateurs

P_0 : probabilité que le système soit vide

- $P_0 = 1-\rho$

L_s : espérance du nombre d'unités servies

- $E(Arrivee\_sur\_un\_intervalle\_T) = \lambda \times T \times \sum_{0}^{+\infty} P_k = \lambda T$
- $E(Depart\_sur\_un\_intervalle\_T) = \mu \times T \times \sum_{1}^{+\infty} P_k = \lambda T(1-P_0) = \lambda T L_s$
- par équilibre, $E(Arrivee) = E(Depart) \Longrightarrow \boxed{L_s = \rho}$

L_q : espérance de la taille de la file

- $L_q = \sum_{1}^{+\infty}(k-1) \times P_k = \frac{\rho^2}{1-\rho}$

L : espérance du nombre d'unités dans le système

- $L = L_q + L_s = \frac{\rho}{1-\rho}$

espérance des temps grâce à loi de Little

- espérance temps service : $W_s = \frac{L_s}{\lambda} = \frac{1}{\mu}$
- espérance temps file : $W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{\rho}{\mu(1-\rho)}$
- espérance temps système : $W = W_s + W_q = \frac{1}{\mu(1-\rho)}$

espérance du temps d'attente dans la file pour 1 nouvelle arrivée retardée

- $\overline{D}$: 1 nouvelle arrivée n'est pas retardée (*cad* le système est vide) $\Longrightarrow P(\overline{D}) = P_0 = 1-\rho$
- D : 1 nouvelle arrivée est retardée $\Longrightarrow P(D) = \rho$
- $W_q = W_{\overline{D}}(q) \times P(\overline{D}) + W_D(q) \times P(D) = 0 \times P(\overline{D}) + W_D(q) \times P(D) = W_{q'} \times \rho$
- $\boxed{\mathrm{W}_{q'} = \frac{W_q}{\rho}}$

niveau de service : probabilité qu'1 nouvel élément soit servi immédiatement

- $SL = P_0$