

# single\_\_serveur\_\_queueing : M / M / 1



M/M/1

## 1 introduction

### A/B/C/K/N/N/D

- A : processus d'arrivée
- B : processus du temps de service (associés au serveurs)
- C : nombre de serveurs - infini si non précisé
- K : nombre maximum d'unités dans le système (file + serveurs) - infini si non précisé
- N : calling population (pas clair - à préciser) - infini si non précisé
- D : modèle de prise en charge dans la file (fifo - filo - aléatoire - prioritaire - ...)

### M/M/1

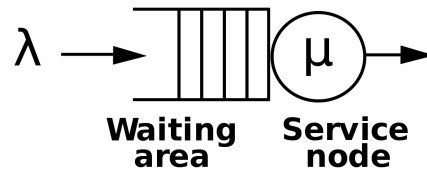
- M : arrivée exponentiel
- M : serveur exponentiel
- 1 : 1 serveur
- K pas précisé : taille de file  $\infty$

### notation

- $\tau_a = \frac{1}{\lambda}$  : temps moyen entre 2 arrivées
- $\tau_s = \frac{1}{\mu}$  : temps moyen de service d'1 unité
- $\lambda$  : nombre moyen d'arrivée par unité de temps
- $\mu$  : nombre moyen d'unités servies par unité de temps (pour un service continue)
- $\rho = \frac{\tau_s}{\tau_a} = \frac{\lambda}{\mu}$  : ratio d'utilisation ( $\rho < 1$  pour l'équilibre - voir supra)
- $n$  : nombre d'unités dans le système (file + serveur) où  $n \geq 0$
- $P_n$  : probabilité d'avoir  $n$  unités dans le système

## 2 situation physique

- les clients arrivent dans 1 file d'attente
- leur arrivée est modélisée par 1 va  $X \rightsquigarrow \mathcal{E}(\lambda)$
- chaque client est reçu par 1 guichet unique
- le temps de service suit 1 va  $Y \rightsquigarrow \mathcal{E}(\mu)$



## 3 calcul de $P_n$

### équations différentielles discrètes : transition de $t$ à $t + h$

		1 entrée		stable		1 sortie	
$n = 0$	$P_0(t+h) =$			$(1-\lambda h)P_0(t)$	+	$\mu h P_1(t)$	+ o(t)
$n \geq 1$	$P_n(t+h) =$	$\lambda h P_{n-1}(t)$	+	$(1-\lambda h - \mu h)P_n(t)$	+	$\mu h P_{n+1}(t)$	+ o(t)

### équations d'équilibre

$$\begin{aligned} n = 0 \quad 0 &= -\lambda P_0 + \mu P_1 \\ n \geq 1 \quad 0 &= \lambda P_{n-1} - (\lambda + \mu)P_n + \mu P_{n+1} \end{aligned}$$

### équation réduite

$$n \geq 1 \quad 0 = -\lambda P_{n-1} + \mu P_n \quad (1)$$

### calcul de $P_n$

$$n \geq 0 \quad \boxed{P_n = \rho^n \times P_0} \Rightarrow 1 = \sum_0^{+\infty} P_k = P_0 \times \sum_0^{+\infty} \rho^k = P_0 \times \frac{1}{1-\rho} \Rightarrow \boxed{P_0 = 1-\rho}$$

conclusion :  $\boxed{\forall n \geq 0, P_n = \rho^n(1-\rho)}$

## 4 indicateurs

### $P_0$ : probabilité que le système soit vide

- $P_0 = 1 - \rho$

### $L_s$ : espérance du nombre d'unités servies

- $E(\text{Arrivee\_sur\_un\_intervalle\_}T) = \lambda \times T \times \sum_0^{+\infty} P_k = \lambda T$
- $E(\text{Depart\_sur\_un\_intervalle\_}T) = \mu \times T \times \sum_1^{+\infty} P_k = \lambda T(1 - P_0) = \lambda T L_s$
- par équilibre,  $E(\text{Arrivee}) = E(\text{Depart}) \Rightarrow \boxed{L_s = \rho}$

**$L_q$  : espérance de la taille de la file**

- $L_q = \sum_1^{+\infty} (k-1) \times P_k = \frac{\rho^2}{1-\rho}$

 **$L$  : espérance du nombre d'unités dans le système**

- $L = L_q + L_s = \frac{\rho}{1-\rho}$

**espérance des temps grâce à loi de Little**

- espérance temps service :  $W_s = \frac{L_s}{\lambda} = \frac{1}{\mu}$
- espérance temps file :  $W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{\rho}{\mu(1-\rho)}$
- espérance temps système :  $W = W_s + W_q = \frac{1}{\mu(1-\rho)}$

**espérance du temps d'attente dans la file pour 1 nouvelle arrivée retardée**

- $\overline{D}$  : 1 nouvelle arrivée n'est pas retardée (cad le système est vide)  $\implies P(\overline{D}) = P_0 = 1 - \rho$
- $D$  : 1 nouvelle arrivée est retardée  $\implies P(D) = \rho$
- $W_q = W_{\overline{D}}(q) \times P(\overline{D}) + W_D(q) \times P(D) = 0 \times P(\overline{D}) + W_D(q) \times P(D) = W_{q'} \times \rho$
- $\boxed{W_{q'} = \frac{W_q}{\rho}}$

**niveau de service : probabilité qu'1 nouvel élément soit servi immédiatement**

- $SL = P_0$