Chapitre 12

Loi Continue de Probabilité

(Sora AI generated : how many mistakes ? how many bias ?)

Vraisemblance maximale pour la distribution exponentielle, clairement expliquée !!!

12.1 Introduction

Cas Discret : on lance 1 dé de 1 à 6 et on définit la V.A. ***discrète*** X associée au résultat

- $X(\Omega) = \{1, \dots, 6\}$
- à X, on associe 1 loi de probabilité : $\mathbb{P}(X = k) = \dfrac{1}{6}$ où $k \in [1..6]$
- $\boxed{\Rightarrow \textbf{\textit{il existe des évènements élémentaires}} \text{ dont la probabilité est } \textbf{\textit{non nulle}}}$

Cas Continue : X la V.A.R. ***continue*** associée à la durée d'1 communication téléphonique

- $X(\Omega) = \mathbb{R}_+$
- $\boxed{\Rightarrow \textbf{\textit{pour chaque évènement élémentaire}}, \text{ la probabilité est } \textbf{\textit{nulle}} : \forall x \in \mathbb{R}_+ \ , \ \mathbb{P}(X = x) = 0}$
- (pour contourner ce problème), ***on mesure les probabilités sur des intervalles***, ici de $\mathbb{R}_+$: $\Rightarrow \mathbb{P}(a \leqslant X \leqslant b)$ où $a, b \in \mathbb{R}_+$
- par exemple :
  - la probabilité qu'1 appel dure exactement 5 minutes est (toujours) nulle
  - mais la probabilité qu'1 appel dure entre 5 et 6 minutes vaut $\frac{1}{10}$ ...

L'objet de ce chapitre est donc de présenter les propriétés de ces "nouvelles" lois continues au travers de 2 lois importantes : ***la loi uniforme*** et ***la loi exponentielle*** ; la loi loi normale fera l'objet d'1 chapitre à part entière ...

12.2 Densité de Probabilité et Espérance Mathématique

Définition : soit 1 V.A.R. X continue

- la ***densité de probabilité*** de X est 1 fonction f continue et positive sur I intervalle de $\mathbb{R}$ tq :
  - $\mathbb{P}(X(\Omega)) = \int_I f(x)\,\mathrm{d}x = 1$
  - $\forall [a,b] \subset \mathbb{R}$, $\mathbb{P}(a \leqslant X \leqslant b) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$
- la ***fonction de répartition*** de X est 1 fonction F tq :
  - $\forall x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \mathbb{P}(X \leqslant x) = \int_{-\infty}^x f(t)\,\mathrm{d}t$
- l'***espérance*** de X est $\mathbb{E}(X) = \int_I x f(x)\,\mathrm{d}x$

Remarque, exemple :

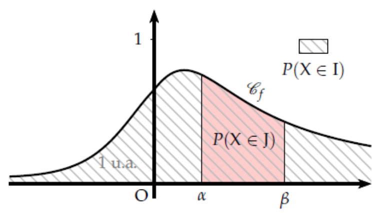
- pour une loi à densité continue, $\forall a, b \in \mathbb{R}$,
  $\mathbb{P}(a < X < b) = \mathbb{P}(a \leqslant X < b) = \mathbb{P}(a < X \leqslant b) = \mathbb{P}(a \leqslant X \leqslant b)$

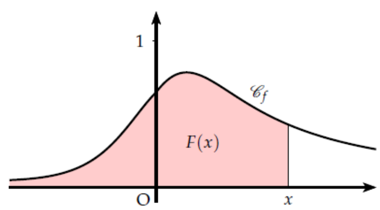
- f est continue et positive ; donc :
  - $\int_I f(x)\,\mathrm{d}x = 1$

    dit que l'aire totale sous f vaut 1
  - $\mathbb{P}(\alpha < X < \beta) = \int_\alpha^\beta f(x)\,\mathrm{d}x$

    calcule l'aire sous f entre α et β :
  - $F(x) = \mathbb{P}(X < x) = \int_{-\infty}^x f(t)\,\mathrm{d}t$

    indique l'aire sous f entre $-\infty$ et x :

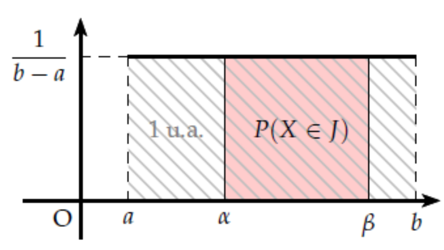




12.3 Loi Uniforme sur [a,b] : $X \rightsquigarrow \mathscr{U}([a,b])$

Définition - Propriété : $a, b \neq \mathbb{R}$, I intervalle de $\mathbb{R}$

- ***X suit 1 loi uniforme sur l'intervalle [a,b]*** si sa fonction de densité f est constante
- ***notation :*** $X \rightsquigarrow \mathscr{U}([a,b])$
- des calculs rapides (AF) mq :
  - $\forall\, x \in [a,b]$, $f(x) = \dfrac{1}{b-a}$
  - $\forall\, \alpha, \beta \in [a,b]$, $\mathbb{P}(\alpha < X < \beta) = \dfrac{\beta - \alpha}{b-a}$
  - $\mathbb{E}(X) = \dfrac{a+b}{2}$ et $\mathbb{V}(X) = \dfrac{(b-a)^2}{12}$



 licenced warning

Remarque, exemple :

- la formule de $\mathbb{P}(\alpha < X < \beta)$ se retient facilement en la voyant c'est $\dfrac{aire \quad favorable}{aire \quad totale}$
- on choisit au hasard 1 nombre X sur $[0\,;5]$; calculer $\mathbb{P}(X > 4)$ puis $\mathbb{P}(e < X < \pi)$

Approfondissement 1 : méthode de Monte-Carlo par Espérance

$a, b \neq \mathbb{R}$, I intervalle de $\mathbb{R}$

- ***Objectif :*** savoir utiliser la $\boxed{\text{méthode qui permet d'approximer 1 intégrale}}$ (dont le calcul est peut-être très compliqué)
  - on ***génère des valeurs*** $f(x_i)$ ***"au hasard sur*** $[a,b]$***"*** de la fonction f
  - la ***moyenne des valeurs*** tend vers $\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$
- ***H.P. :*** la théorie (simple) repose 2 théorèmes (compliqués) :
  - on pose $\boxed{X = f(U)}$ où $U \rightsquigarrow \mathscr{U}([a,b])$
  - la Loi des Grands Nombres montre que $\boxed{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{X_i}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathbb{E}(X)}$
  - le Théorème du Transfert montre que $\boxed{\mathbb{E}(X) = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}$

Approfondissement 1 (suite) : approximation de π

- ***Méthode MC en dimension 1 :***
  - vérifier que $\dfrac{\pi}{4} = \displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t$; estimer l'intégrale permet alors d'estimer π
  - générer 100 $U_i \rightsquigarrow \mathscr{U}([0,1])$
  - calculer les 100 $X_i = f(U_i)$ puis calculer $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{X_i}{100}$
  - vérifier que vous obtenez 1 approximation de l'ordre $\pm\dfrac{1}{\sqrt{100}} = \pm 0.1$
  - recommencer pour $n = 1000$ puis $n = 10000$
- ***H.P. : Méthode MC en 2 dimensions :***
  - générer 100 $X_i \rightsquigarrow \mathscr{U}([0,1])$
  - générer 100 $Y_i \rightsquigarrow \mathscr{U}([0,1])$
  - comprendre que : $\dfrac{\pi}{4} = \displaystyle\int\int_{Disque} x^2 + y^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$
  - calculer les 100 $Z_i = f(X_i, Y_i) = X_i^2 + Y_i^2$ puis calculer $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{Z_i}{100}$
  - vérifier que vous obtenez 1 approximation de l'ordre $\pm\dfrac{1}{\sqrt{100}} = \pm 0.1$
  - recommencer pour $n = 1000$ puis $n = 10000$
  - complément : on peut montrer que cette méthode est légèrement moins performante que la précédente ; le constatez-vous numériquement ?

 licenced BY NC ND warning

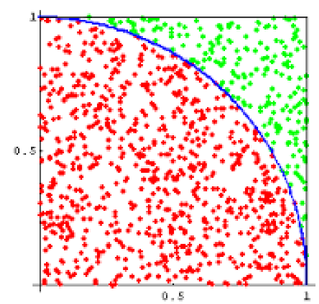
Remarque, exemple :

- la méthode de MC est bien moins performante en dimension 1 que la méthode rectangle ou trapèze
- elle peut être utilisée ***à l'identique*** dans n'importe quelle dimension et sur n'importe quel domaine d'intégration
- elle devient plus efficace à partir de la dimension 4
- elle est très simple à utiliser sur un domaine d'intégration implicite

Approfondissement 2 : méthode de Monte-Carlo par test IN/OUT

$a, b \neq \mathbb{R}$, I intervalle de $\mathbb{R}$

- ***Même objectif :*** savoir utiliser la $\boxed{\text{méthode pour approximer 1 intégrale}}$
  - on va créer une E.A. permettant d'estimer $\dfrac{\pi}{4}$
  - l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t$ correspond à l'aire sous la fonction $f(t) = \sqrt{1-t^2}$
  - on place cette aire dans le pavé [0,1]x[0,1]
    l'aire sous la courbe (donc l'intégrale) est associée au succès
    l'autre partie de l'aire à l'échec
  - $\dfrac{\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t}{Aire_{Pave}} = \dfrac{Aire_{Courbe}}{Aire_{Pave}} = \dfrac{\frac{\pi}{4}}{1 \times 1} = \dfrac{\pi}{4}$
    en créant n points aléatoires $(X_i\ ,\ Y_i)$
    on crée n tests $\boxed{T_i \rightsquigarrow \mathscr{B}(\frac{\pi}{4})}$ associé à
    n succès ou échec d'être dans le $\dfrac{1}{4}$ cercle



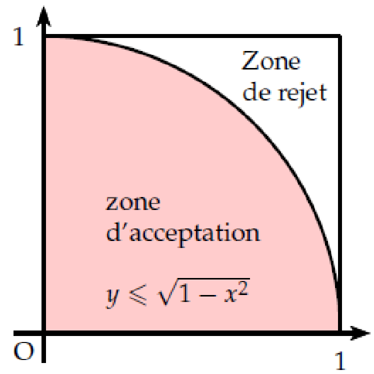
  - $\boxed{\text{la proportion } \dfrac{succes}{total} \text{ tend vers } \mathbb{E}(X) = \displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t = \dfrac{\pi}{4}}$ (résultat de seconde)
- ***H.P. :*** la théorie (simple) repose 1 théorème (compliqué) :
  - $X_i \rightsquigarrow \mathscr{B}(\frac{\pi}{4}) \Rightarrow$ la Loi des Grands Nombres montre que $\boxed{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{X_i}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathbb{E}(X) = \frac{\pi}{4}}$

 licenced warning

Approfondissement 2 (suite) : approximation de π :

La seule difficulté maintenant est de générer les points. Pour cela, on considère 2 méthodes.

- ***Méthode 1 : sous la courbe***
  - générer 100 $X_i \rightsquigarrow \mathscr{U}([0,1])$ (abscisse du point) et 100 $Y_i \rightsquigarrow \mathscr{U}([0,1])$ (ordonnée du point)
  - effectuer 100 tests : $Y_i \leqslant f(X_i)$ qui correspondent à (attention pas évident à comprendre) le point est dans le cercle
  - compter le nombre de tests réussis et en déduire l'estimation
  - recommencer pour $n = 1000$ puis $n = 10000$



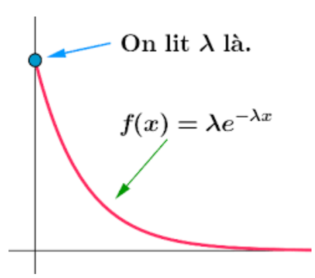
- ***Méthode 2 :*** $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$
  - générer 100 $X_i \rightsquigarrow \mathscr{U}([0,1])$
  - générer 100 $Y_i \rightsquigarrow \mathscr{U}([0,1])$
  - effectuer 100 tests : $X_i^2 + Y_i^2 \leqslant 1$ qui correspondent à le point est dans le cercle
  - compter le nombre de tests réussis et en déduire l'estimation
  - vérifier que vous obtenez 1 approximation de l'ordre $\pm \dfrac{1}{\sqrt{100}}$
  - recommencer pour $n = 1000$ puis $n = 10000$
- ***Visualisation de l'expérience*** d'approximation de π sous GeoGebra ou Python

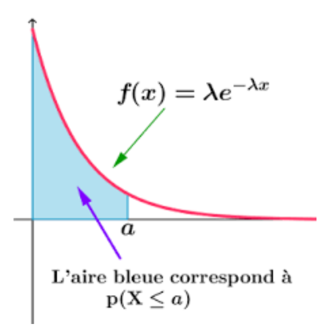
12.4 Loi Exponentielle : X $\rightsquigarrow \mathscr{E}(\lambda)$

Définition - Propriété : $a, b \neq \mathbb{R}$, I intervalle de $\mathbb{R}$

- ***X suit 1 loi exponentielle de paramètre*** $\lambda > 0$

  si sa fonction de densité f est $\begin{cases} 0 & si \quad t \in \mathbb{R}_-^* \\ f(t) = \lambda e^{-\lambda t} & si \quad t \in \mathbb{R}_+ \end{cases}$
- ***notation :*** $X \rightsquigarrow \mathscr{E}(\lambda)$
- $\forall a \in \mathbb{R}_+$, $FR(a) = \mathbb{P}(X \leqslant a) = 1 - e^{-\lambda a}$
- $\mathbb{E}(X) = \dfrac{1}{\lambda}$ et $\mathbb{V}(X) = \dfrac{1}{\lambda^2}$





- ***la loi exponentielle est sans mémoire :***

  $\boxed{\forall t > 0 \ , \forall h > 0 \ , \mathbb{P}_{X \geqslant t}(X \geqslant t + h) = \mathbb{P}(X \geqslant h)}$

 licenced warning

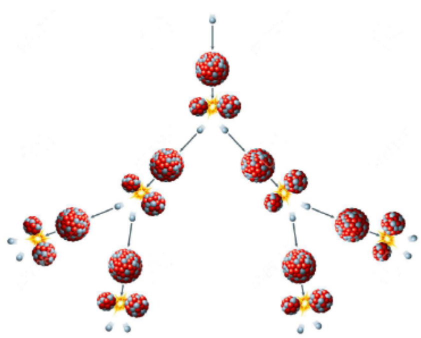
Remarque, exemple :

- AF : vérifier que f ainsi définie est bien une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$
- AF : retrouver la FR de f
- AF : retrouver l'espérance et la variance de X associée à f
  Preuve : loi exponentielle
- loi exponentielle $\Leftrightarrow$ loi sans mémoire :
  - AF $\Rightarrow$: la loi exponentielle vérifie cette propriété
  - Admis $\Leftarrow$: cette propriété est caractéristique de cette loi
    (si 1 loi vérifie cette propriété alors il s'agit obligatoirement d'1 loi exponentielle)
- ***Exemple :*** la durée de vie, en année, d'un composant électronique est une variable aléatoire notée T qui suit une loi sans vieillissement de paramètre λ. Une étude statistique a montré que pour ce type de composant, la durée de vie ne dépasse pas 5 ans avec une probabilité de 0.675.

  1) calculer la valeur λ
  2) quelle est la probabilité qu'un composant de ce type dure moins de 8 ans ? plus de 10 ans ? au moins 8 ans sachant qu'il fonctionne au bout de 3 ans ?
  3) quelle est l'espérance de vie de ce composant ?

12.5 Applications en Physique

La désintégration radioactive est un phénomène aléatoire. c'est à dire que l'on ne peut pas, à l'échelle « *microscopique* », dire quand un noyau va se désintégrer. Néanmoins, à l'échelle macroscopique, on a pu établir que la durée de vie d'un noyau radioactif suit une loi de durée de vie sans vieillissement c'est à dire une loi exponentielle de paramètre λ. λ étant la constante radioactive (en s^{-1}) qui caractérise un radionucléide.



On appelle T la variable aléatoire associée à la durée de vie d'un noyau. La probabilité p qu'un noyau ne soit pas désintégré à l'instant t est donc :

$$p = P(T \geqslant t) = e^{-\lambda t}$$

Si au départ on compte N_0 noyaux au bout d'un temps t, on en comptera $N(t)$ qui vérifie :

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$$

On appelle demi-vie $t_{1/2}$, le temps nécessaire pour que le nombre de radionucléides soit divisé par 2. On a alors :

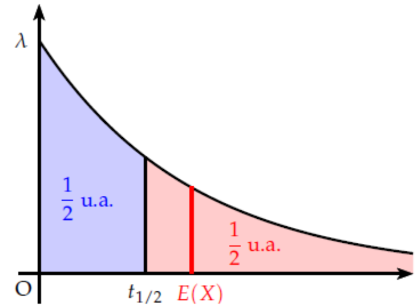
$$e^{-\lambda t_{1/2}} = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad -\lambda t_{1/2} = -\ln 2 \quad \Leftrightarrow \quad t_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}$$

Enfin la durée de vie moyenne τ d'un radionucéide est donnée par l'espérance mathématique :

$$\tau = \frac{1}{\lambda} \quad \text{or} \quad \lambda = \frac{\ln 2}{t_{1/2}} \quad \text{donc} \quad \tau = \frac{t_{1/2}}{\ln 2} \simeq 1,44\, t_{1/2}$$

 licenced warning

Remarque : La demi-vie $t_{1/2}$ n'est pas égale à la durée de vie moyenne $\tau = \mathrm{E}(X)$ car la courbe de densité de probabilité $\mathscr{C}_f$ n'est pas symétrique par rapport à la droite verticale d'abscisse E(X).



12.6 Lien entre Loi discrète et Loi Continue

Discret	Continu
Univers Ω	Intervalle I ou $\mathbb{R}$
Événement E sous-ensemble de Ω	Événement J sous-intervalle de I
Probabilités p_i des événements élémentaires $\sum p_i = 1$	Densité de probabilité $\int_{(\mathrm{I})} f(t)\,\mathrm{d}t = 1$
Espérance de la variable aléatoire X $E(\mathrm{X}) = \sum p_i x_i$	Espérance de la variable aléatoire X $E(\mathrm{X}) = \int_{(\mathrm{I})} t\,f(t)\,\mathrm{d}t$
Équiprobabilité $P(E) = \dfrac{\text{nbre de cas favorables}}{\text{nbre de cas possibles}}$	Loi uniforme $P(\mathrm{X} \in \mathrm{J}) = \dfrac{\text{longueur de J}}{\text{longueur de I}}$

 licenced warning