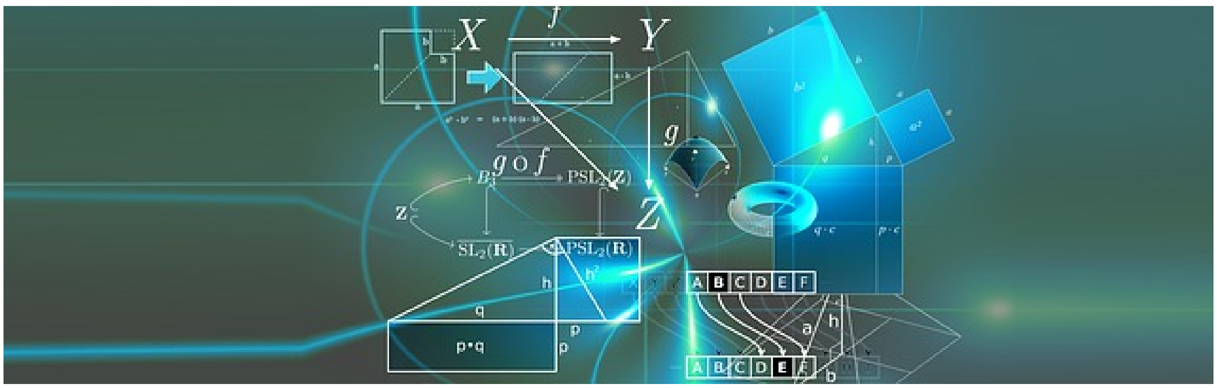
Chapitre 4

Limite de Fonction



Comment mentir en utilisant des preuves visuelles ?
1 + 2 + 3 + 4 + 5 + ... = -1/12 !?

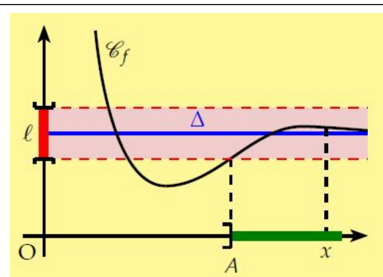
4.1 Limite à l'∞

4.1.1 Limite *finie* l à l'∞

Définition : l , $A \in \mathbb{R}$

f ***tend vers*** l ***en*** $+\infty$ si :

- $\forall J$ ouvert et $l \in J$
- $\exists I =]\,\mathrm{A}\,; +\infty\,[$ tq :
  $x \in I \Rightarrow f(x) \in J$
- on note : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$



La droite Δ d'équation $y = l$ est une ***asymptote horizontale*** à $\mathscr{C}_f$

Remarque, exemple :

- plus je regarde loin sur l'axe des abscisses, plus je peux amincir l'intervalle I (contenant l) : en $+\infty$, f "s'écrase" sur l'asymptote horizontale Δ

- de même, on définit $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = l$

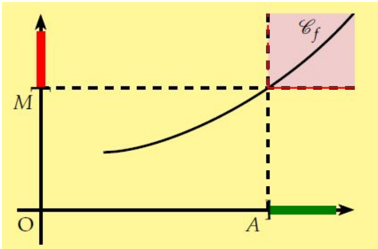
- ***fonctions de référence :***
  $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$, $x \mapsto \frac{1}{x}$ et $x \mapsto \frac{1}{x^n}$ (où $n \in \mathbb{N}^*$) tendent vers 0 lorsque x tend vers $\pm\infty$

4.1.2 Limite ∞ à l'∞

Définition : A , $M \in \mathbb{R}$

f ***tend vers*** $+\infty$ ***en*** $+\infty$ si :

- $\forall J =]\,\mathrm{M}\,;+\infty\,[$
- $\exists\, I =]\,\mathrm{A}\,;+\infty\,[$ tq :
  $x \in I \Rightarrow f(x) \in J$
- on note : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$



Remarque, exemple :

- plus je regarde loin sur l'axe des abscisses, plus toutes les valeurs de f sont de plus en grandes : f "s'envole" vers $+\infty$

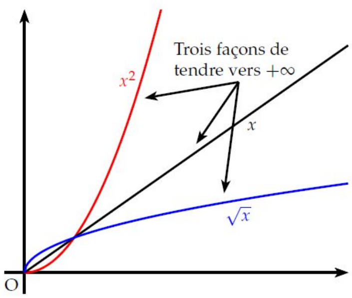
- de même, on définit $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

- ***fonctions de référence :***
  $x \mapsto \sqrt{x}$, $x \mapsto x$ et $x \mapsto x^n$ (où $n \in \mathbb{N}^*$) tendent vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$

- voici un exemple (à connaître) de croissance plus ou moins rapide vers $+\infty$

  ceci peut-être intéressant lorsqu'on effectue des opérations (somme, produit, quotient) sur les limites (voir section 2.4)

  HP : la valeur $n = 1$ et la droite $y = x^1$ jouent un rôle clé dans le positionnement des fonctions du type $x \mapsto x^n$ (où $n \in \mathbb{R}_+$) par rapport à $y = x$



4.2 Limite ∞ en un réel

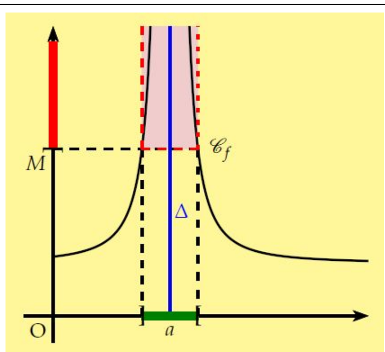
Définition : a , $M \in \mathbb{R}$

f ***tend vers*** $+\infty$ ***en*** l si :

- $\forall J$ tq $]\,\mathrm{M}\,;+\infty\,[$

- $\exists\, I$ ouvert et $a \in I$ tq :
  $x \in I \Rightarrow f(x) \in J$

- on note : $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$

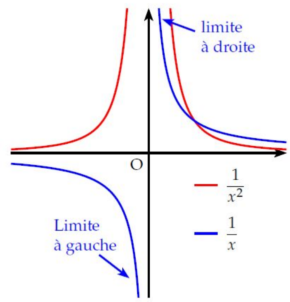


La droite Δ d'équation $x = a$ est une ***asymptote verticale*** à $\mathscr{C}_f$

Remarque, exemple :

- plus je regarde près de a, plus toutes les valeurs de f sont de plus en grandes : f "s'envole" vers $+\infty$ en "s'écrasant" sur l'asymptote verticale Δ
- de même, on définit $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$
- on peut définir une ***limite à gauche / limite à droite :***

  - notation à gauche : $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x<a}} f(x) = \lim\limits_{x \to a^-} f(x)$
    notation à droite : $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x>a}} f(x) = \lim\limits_{x \to a^+} f(x)$



  - ex 1 (bleu) : $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$

  - ex 2 (rouge) : $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{1}{x^2} = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x^2} = +\infty$

- ***Limite des fonctions élémentaires :***

Limites en l'infini

$f(x)$	x^n	$\frac{1}{x^n}$	$\sqrt{x}$	$\frac{1}{\sqrt{x}}$
$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$	$+\infty$	0	$+\infty$	0
$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$	$+\infty$ si n pair $-\infty$ si n impair	0	non défini	non défini

Limites en 0

$f(x)$	$\frac{1}{x^n}$	$\frac{1}{\sqrt{x}}$
$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f(x)$	$+\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} f(x)$	$+\infty$ si n pair $-\infty$ si n impair	non défini

4.3 Opération sur les limites

4.3.1 Limite d'1 somme, d'1 produit et d'1 quotient

Les propriétés suivantes sont admises (et assez intuitives). Dans le cas des formes indéterminées (F.I.), il faut travailler au cas par cas pour lever l'indéterminée (voir supra les principales techniques).

Limite d'1 somme :

Si f a pour limite	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
Si g a pour limite	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
alors $f+g$ a pour limite	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F. Ind.

Limite d'1 produit :

Si f a pour limite	ℓ	$\ell \neq 0$	0	∞
Si g a pour limite	ℓ'	∞	∞	∞
alors $f \times g$ a pour limite	$\ell \times \ell'$	∞*	F. ind.	∞*

*Appliquer la règle des signes

Limite d'1 quotient :

Si f a pour limite	ℓ	$\ell \neq 0$	0	ℓ	∞	∞
Si g a pour limite	$\ell' \neq 0$	0 (1)	0	∞	ℓ' (1)	∞
alors $\frac{f}{g}$ a pour limite	$\frac{\ell}{\ell'}$	∞*	F. ind.	0	∞*	F. ind.

*Appliquer la règle des signes (1) doit avoir un signe constant

4.3.2 Principales techniques de levée de FI

Liste des principales techniques :

- factorisation par le terme dominant, ce qui revient à constater que certains termes sont négligeables
- simplification (fraction) par élimination de pôle commun au numérateur et dénominateur
- examen de la limite à gauche et de la limite à droite
- encadrement par des fonctions plus simples ayant même limite (théorème des gendarmes)
- multiplier par la quantité conjugué (pour les racines)
- reconnaissance du calcul de la dérivée en un point

4.3.3 Quelques exemples (utilisation et rédaction attendue)

- ***ex1 : factorisation par le terme dominant***
  $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 - x =$

  Attention à bien reconnaître le terme dominant, et donc faire la bonne factorisation :
  $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{8x^3-4x}{2x^2-x} =$

  $\lim\limits_{x\to 0} \frac{8x^3-4x}{2x^2-x} =$

- ***ex2 : simplification d'une fraction***
  $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2-3x+2}{x-1} =$

- ***ex3 : multiplication par la quantité conjuguée***
  $\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{x^2+1}) =$

- ***ex4 : penser au nombre dérivé***
  $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} =$

  $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x-1}{x} =$

4.4 Limite d'1 fonction composée

Théorème : f et g 2 fonctions ; a , b , $c \in \overline{\mathbb{R}}$

Si $\begin{pmatrix} 1/ & \lim\limits_{x\to a} f(x) = b \\ 2/ & \lim\limits_{y\to b} g(y) = c \end{pmatrix}$ ***Alors*** $\lim\limits_{x\to a} g\circ f(x) = \lim\limits_{x\to a} g\left[f(x)\right] = c$

Remarque, exemple :

- faire attention à l'ordre des fonctions dans la conclusion
- cherchons $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{2+\frac{1}{x^2}}$

- ***Limite de fonction et suite définie de façon explicite - Petite subtilité :***
  (u_n) tq $u_n = f(n)$ et $a \in \overline{\mathbb{R}}$: $\boxed{\textbf{Si } \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = a \textbf{ Alors } \lim\limits_{x\to+\infty} u_n = a}$
  Attention la réciproque est fausse : par exemple, prendre $f(x) = \begin{cases} 2 \text{ si } n \in \mathbb{N} \\ 1 \text{ sinon} \end{cases}$ et la suite associée
  $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ n'existe pas alors que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$

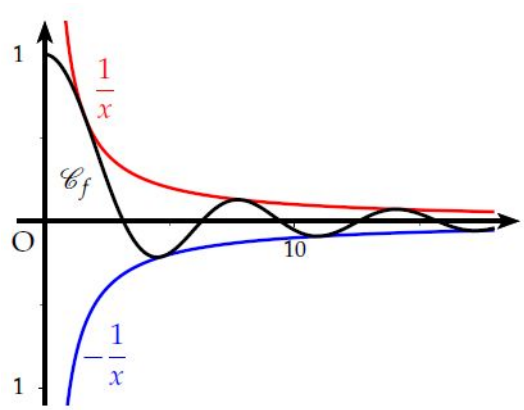
4.5 Théorème de comparaison

f , g , h 3 fonctions définies sur $I =]\,\mathrm{b}\,; +\infty\,[$ et $l \in \overline{\mathbb{R}}$

- ***Théorème d'encadrement ou des gendarmes :***
  Si $\begin{pmatrix} 1/ & \forall x \in I : f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x) \\ 2/ & \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = l \end{pmatrix}$ ***Alors*** $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = l$
- ***Théorème de comparaison :***
  Si $\begin{pmatrix} 1/ & \forall x \in I : f(x) \leqslant g(x) \\ 2/ & \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \end{pmatrix}$ ***Alors*** $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$

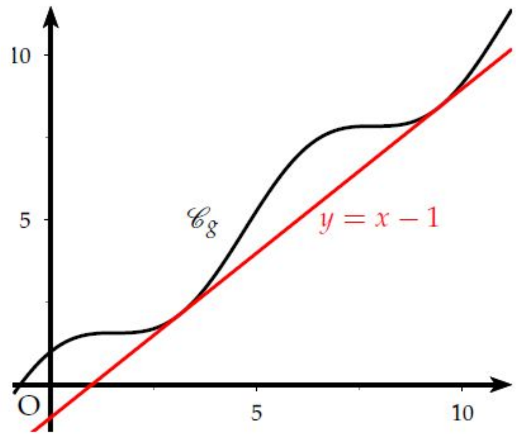
Remarque, exemple :

- on a les mêmes théorèmes :
  - en $-\infty$ avec $I =]-\infty; b\,[$
  - en $a \in \mathbb{R}$ avec I intervalle ouvert contenant a
- ***ex 1 :*** Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{x}$
  - D'une part, $\begin{array}{rl} \forall x > 0 & -1 < \sin x < 1 \\ \Rightarrow & -\frac{1}{x} < \sin x < \frac{1}{x} \end{array}$
  - D'une part, $\lim\limits_{x\to+\infty} -\frac{1}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$
  - Conclusion : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$



- ***ex 2 :*** Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} x+\cos x$

  - D'une part, $\forall x \geqslant 0 \quad \cos x \geqslant -1$
    $\Rightarrow \quad x+\cos x \geqslant x-1$



  - D'une part, $\lim\limits_{x\to+\infty} x-1 = +\infty$

  - Conclusion : $\lim\limits_{x\to+\infty} x+\cos x = +\infty$

