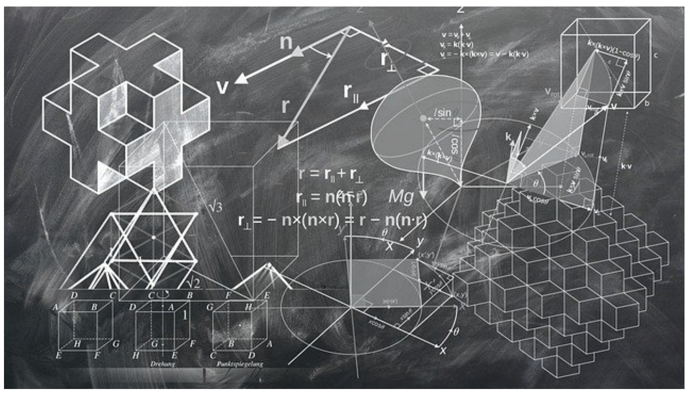
Chapitre 8

Produit Scalaire



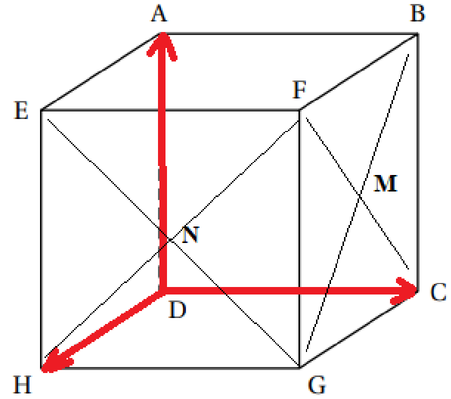
The real world applications of the dot product

8.1 Vecteurs dans l'espace

> ***<u>Décomposition d'un vecteur dans l'espace</u>***
>
> - ***<u>Relation de Chasles (rappel)</u>*** : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$
> - ***<u>Base</u>*** : une base de l'espace est la donnée de 3 vecteurs linéairement indépendants
> - ***<u>Décomposition d'un vecteur dans une base</u>*** : dans la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$, le vecteur $\overrightarrow{u}$ peut s'écrire (grâce à la relation de Chasles) de façon ***<u>unique</u>*** : $\overrightarrow{u} = x.\overrightarrow{i} + y.\overrightarrow{j} + z.\overrightarrow{k}$
> - ***<u>Coordonnées d'un vecteur</u>*** : le vecteur $\overrightarrow{u}$ s'écrit donc $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$
> - ***<u>Repère</u>*** : un repère de l'espace est d'une base et d'un centre O ; on le note $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$

Remarque, exemple :

- donner une base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ signifie que : $\vec{i} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\vec{j} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ et $\vec{k} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$
- donner un repère $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ signifie en plus que $O = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$
- donner les coordonnées des points N et M et et des vecteurs $\overrightarrow{NM}$ et $\overrightarrow{HB}$:



repère orthonormé $\left(D\,;\ \overrightarrow{DH},\ \overrightarrow{DC},\ \overrightarrow{DA}\right)$

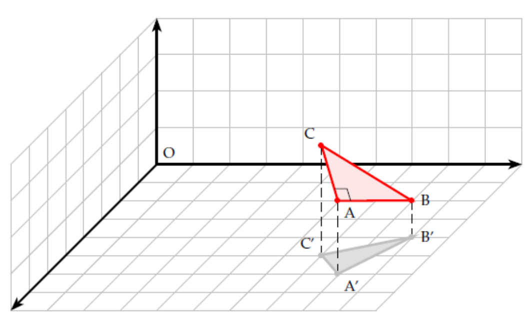
8.2 Définition - Propriété

Définition du Produit Scalaire (espace) : $\vec{u} = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$ 2 vecteurs de l'espace

- ***Analytique*** : $\vec{u}.\vec{v} \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} . \begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix} = xx' + yy' + zz'$
- ***Vectorielle (identité du parallélogramme)*** : $\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}(||\overrightarrow{u+v}||^2 - ||\vec{u}||^2 - ||\vec{v}||^2)$
- ***Géométrique*** : $\vec{u}.\vec{v} = ||\vec{u}||.||\vec{v}||.\cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$

Remarque, exemple :

- vérifier que ces 3 définitions sont équivalentes
- vérifier que : $\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}(||\overrightarrow{u+v}||^2 - ||\vec{u}||^2 - ||\vec{v}||^2) = \frac{1}{2}(||\vec{u}||^2 + ||\vec{v}||^2 - ||\overrightarrow{u-v}||^2) = \frac{1}{4}(||\overrightarrow{u+v}||^2 - ||\overrightarrow{u-v}||^2)$
- A $\begin{pmatrix}6\\8\\2\end{pmatrix}$ et B $\begin{pmatrix}4\\9\\1\end{pmatrix}$ et C $\begin{pmatrix}5\\7\\3\end{pmatrix}$
  - déterminer la mesure géométrique de $\widehat{BAC}$
  - on projette orthogonalement A,B,et C sur le plan z=0 respectivement en A', B' et C' déterminer la mesure géométrique $\widehat{B'A'C'}$
  - que constatez vous ?



- ***idée :*** on a vu dans l'exercice précédent que : $\boxed{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow \text{ABC est rectangle en A}}$

Propriété : $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ 3 vecteurs de l'espace et λ un réel

- ***commutativité*** : $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$
- ***ditributivité*** : $\vec{u}(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}$
- ***bilinéarité*** : $\lambda(\vec{u}.\vec{v}) = (\lambda\vec{u}).\vec{v} = \vec{u}.(\lambda\vec{v})$
- ***Si*** $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont de même direction et de même sens ***Alors*** $\vec{u}.\vec{v} = ||\vec{u}||.||\vec{v}||$
- ***Si*** $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont de même direction et de sens contraires ***Alors*** $\vec{u}.\vec{v} = -||\vec{u}||.||\vec{v}||$
- ***orthogonalité*** : $\vec{u}.\vec{v} = 0 \Leftrightarrow \vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux
- ***une égalité très utile*** : $\vec{u}.\vec{u} = ||\vec{u}||^2$
- ***propriété de*** $\vec{0}$: c'est le seul vecteur orthogonal à lui-même : $\vec{u}.\vec{u} = ||\vec{u}||^2 = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$

Remarque, exemple :

- le vecteur nul $\vec{0}$ est orthogonal à tous vecteurs ; c'est d'ailleurs le seul
- $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-\frac{1}{2}\\5\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-\frac{2}{5}\\3\\\alpha\end{pmatrix}$; trouver α pour que $\vec{u}.\vec{v} = \vec{0}$
- A $\begin{pmatrix}2\\-5\\1\end{pmatrix}$ et B $\begin{pmatrix}0\\2\\6\end{pmatrix}$ et la droite d définit par C $\begin{pmatrix}-2\\3\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}-4\\1\\-3\end{pmatrix}$
  mq (AB) et d sont perpendiculaires
- A $\begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix}$, B $\begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix}$, C $\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$, D $\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$, E $\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$
  Mq A , B , C ne sont pas alignés et que $\overrightarrow{DE}$ est normal au plan (ABC)

8.3 Vecteur, droite et plan dans l'espace

Propriété : dans le repère $(O;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j},\overrightarrow{k})$, soit A $\begin{pmatrix}x_A\\y_A\\z_A\end{pmatrix}$ et B $\begin{pmatrix}x_B\\y_B\\z_B\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}d\\e\\f\end{pmatrix}$

- ***coordonnées du vecteur*** $\overrightarrow{AB}$: $\begin{pmatrix}x_B - x_A\\y_B - y_A\\z_B - z_A\end{pmatrix}$
- ***équation de la droite*** passant par A et dirigée par le vecteur $\overrightarrow{u}$: $\begin{cases}x = x_A + k.a\\y = y_A + k.b\\z = z_A + k.c\end{cases}$
- ***équation du plan*** passant par A et dirigée par $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$: $\begin{cases}x = x_A + k.a + k'.d\\y = y_A + k.b + k'.e\\z = z_A + k.c + k'.f\end{cases}$

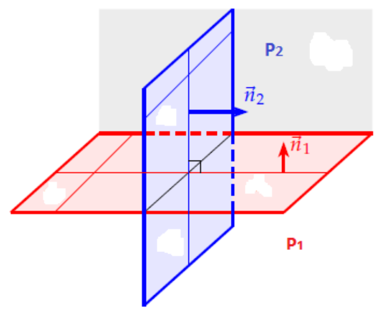
8.4 Équation cartésienne d'1 plan

Définition - Propriété :

- ***vecteur normal à un plan*** : $\vec{n}$ est normal à $\mathscr{P}$ ***si*** toute droite dirigée par $\vec{n}$ est orthogonale à $\mathscr{P}$
- l'équation du plan $\mathscr{P}$ passant par A et normal à $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ est par : $\boxed{\overrightarrow{AM}.\vec{n}=\vec{0}}$ où $M \in \mathscr{P}$

  équation analytique d'1 plan : ceci donne 1 équation de la forme : $ax+by+cz+d=0$
- ***droite orthogonale à un plan*** :

  1 droite Δ est orthogonale à 1 plan $\mathscr{P} \Leftrightarrow \exists\, d_1$, d_2 sécantes de $\mathscr{P}$ orthogonales à Δ
- soient 2 plans $\mathscr{P}_1$ de vecteur normal $\vec{n}_1$ et $\mathscr{P}_2$ de vecteur normal $\vec{n}_2$: $\boxed{\mathscr{P}_1 \perp \mathscr{P}_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \perp \vec{n}_2}$



Remarque, exemple :

- ***Preuve 2*** :

  - $\Rightarrow$ ***Si*** $\Delta \perp \mathscr{P}$ ***Alors*** Δ est orthogonale à toutes droites de $\mathscr{P}$
  - $\Leftarrow$ ***Si*** d_1 et d_2 sécantes de $\mathscr{P}$ sont orthogonales à Δ

    - ***Alors*** soit $\vec{n}$ la direction de Δ, $\vec{u}_1$ la direction de d_1 et $\vec{u}_2$ la direction de d_2
    - par définition, on a : $\vec{n} \perp u_1$ et $\vec{n} \perp u_2$
    - d_1 et d_2 sont sécantes $\Rightarrow u_1$ et u_2 sont non colinéaires (on dit "libres")
      ils donnent la direction de $\mathscr{P}$
    - $\forall d \in \mathscr{P}$ de vecteur directeur $\vec{u}$, $\exists a, b \in \mathbb{R}$ tq $a\vec{u}_1 + b\vec{u}_2 = \vec{u}$
    - clairement, $\vec{n}.\vec{u} = \vec{n}.(a\vec{u}_1 + b\vec{u}_2) = \vec{n}.a\vec{u}_1 + \vec{n}.b\vec{u}_2 = \vec{0} \Rightarrow \vec{n} \perp \vec{u}$ et donc $\Delta \perp d$

- ***Ex 1 :*** déterminer l'équation de $\mathscr{P}$ passant par $A\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$ et normal à $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$

- ***Ex 2 :*** donner 1 équation de $\mathscr{Q}$ parallèle à $\mathscr{P}$ passant par $A\begin{pmatrix}2\\-1\\4\end{pmatrix}$

- ***Ex 3 :*** déterminer l'équation du plan médiateur de A et B avec $A\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}$ et normal à $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$

