Activité : Paradoxe de Penney

Ce document contient les solutions et explications des questions proposées dans la fiche élève. Il est destiné à guider l'enseignant dans l'animation de l'activité

Étape 1 : Introduction à l'expérience aléatoire

1.Qu'est-ce qu'une Expérience Aléatoire (EA) ?

Une EA est une expérience dont les résultats sont soumis au hasard. Par exemple, lancer une pièce ou un dé.

2. Quels sont les résultats possibles lors d'un lancer de pièce ?

Les résultats possibles sont Pile ou Face.

3. Quelle est la probabilité d'obtenir Pile (P) ou Face (F) sur un lancer ?

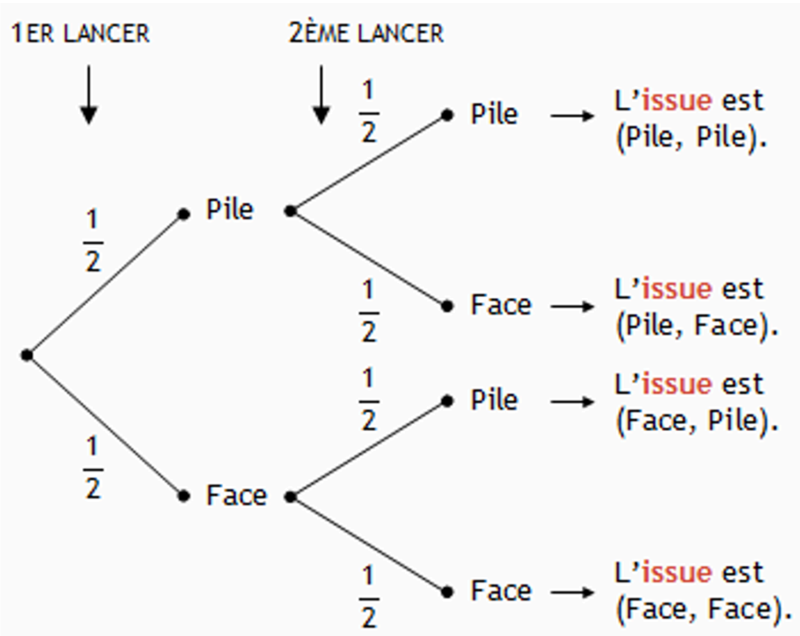
Chaque résultat a une probabilité de 1/2 (50%).

Étape 2 : Étude des séquences avec 2 lancers

4. Quels sont les cas possibles si l'on lance une pièce deux fois ?

Les cas possibles sont : PP, PF, FP, FF.

5. Compléter l'arbre de probabilité pour représenter tous les cas possibles.



6. Quelle est la probabilité d'obtenir PF ou FF ?

La probabilité de chaque séquence est 1/4 (25%).

Étape 3 : Rapidité d'apparition entre PF ou FF (2 pièces)

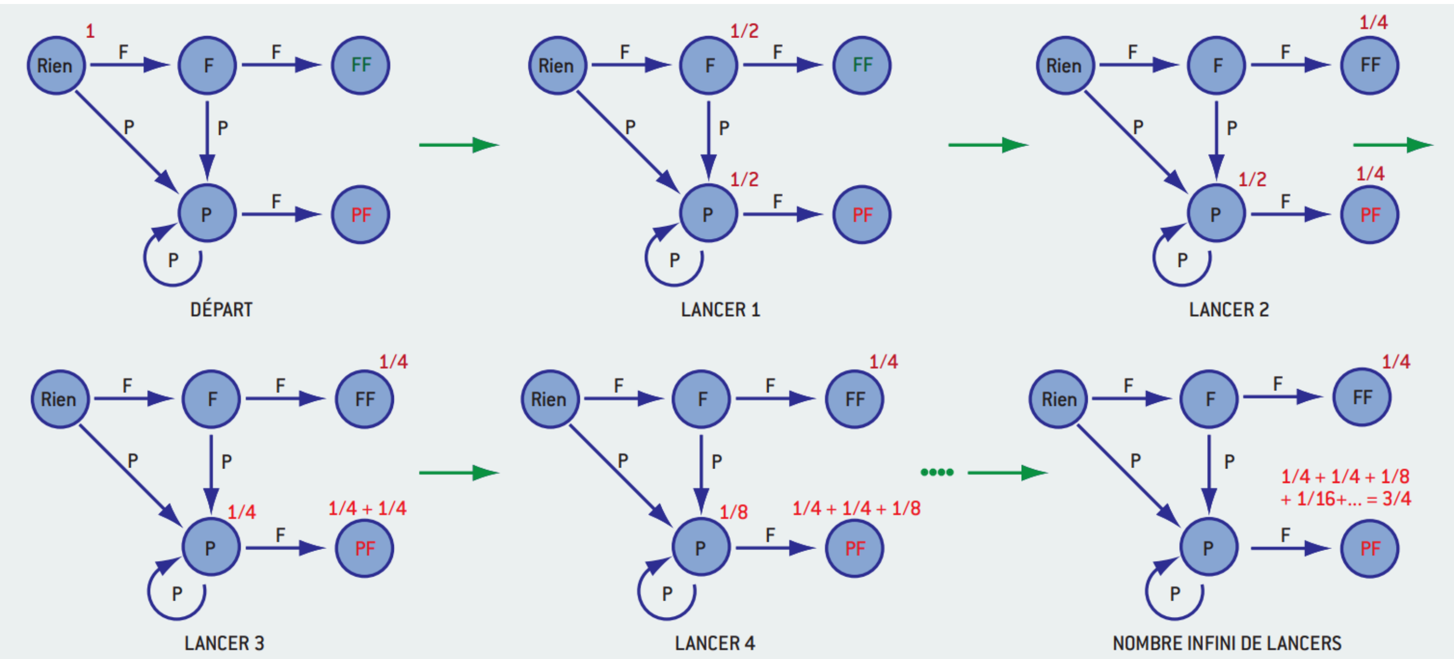
7. Lancer une pièce et noter les faces qui apparaissent, jusqu'à obtenir la suite PF ou la suite FF. Faire 10 essais et noter à chaque fois quelle suite l'emporte. Que constatez-vous d'étonnant ? (ne pas hésiter à comparer ses résultats avec d'autres groupes et votre professeur)

Il est assez étonnant de constater que , malgré une probabilité égale entre PF et FF, la suite PF apparaît "souvent" plus vite.

8. Erreur ou réalité ? Pour aller plus loin, il faudrait peut-être faire plus d'essais. Utiliser le programme python "Simulation expérimentale avec 2 lancers" pour générer 100, 1000, 10 000 essais de la bataille PF / FF. Que constate-t-on ?

Lorsqu'on fait un très grand nombre d'essais (loi des grands nombres), PF a une probabilité de 3/4 d'apparaître avant FF.

9. (optionnel) Preuve du **Premier Paradoxe de Penney** : en demandant de l'aide à votre professeur, compléter le graphe d'état de la relation d'ordre entre PF et FF pour prouver vos observations.



Pour aller plus loin, on peut se demander si parmi tous les matchs possibles, une suite surclasse toutes les autres … (analyse de 6 matchs).

Étape 4 : Étude des séquences avec 3 lancers

10. Quelles sont toutes les combinaisons possibles avec trois lancers ?

Les combinaisons possibles sont : PPP, PPF, PFP, PFF, FPP, FPF, FFP, FFF.

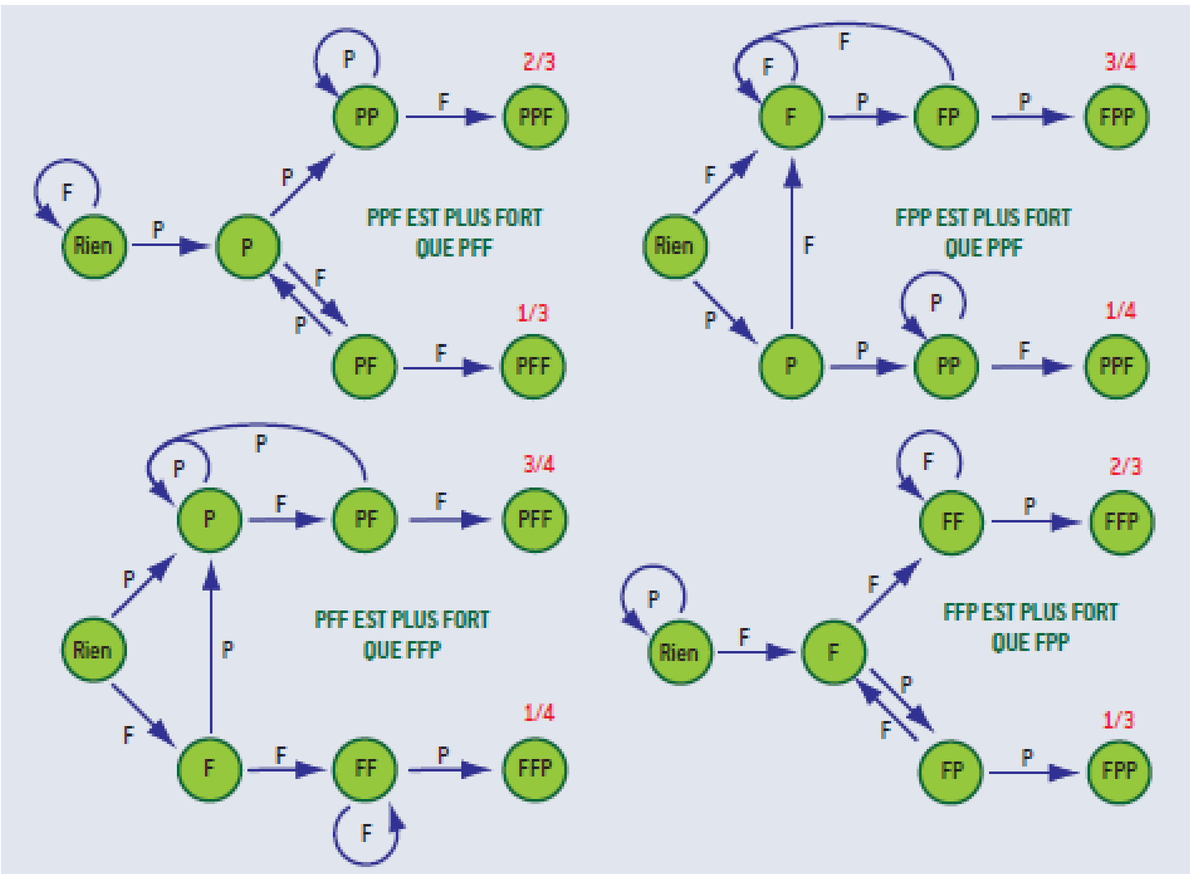
11. Construisez l'arbre des probabilités associé. Que dire des probabilités de chaque lancé de 3 pièces ?

Ils sont équiprobables.

12. Utiliser le programme "Simulation expérimentale avec 3 lancers" pour générer 10000 essais de la bataille FFP / PFF. Qui gagne ?

FFP gagne environ 5 fois sur 8 contre PFF (62.5%).

13. Après analyse des quatre graphes d'état, expliquer un **deuxième paradoxe de Penney** (ne pas hésiter à échanger avec d'autres groupes et votre professeur). Cela vous rappelle-t-il un autre jeu très connu ?



On constate que la relation de force ne peut être ordonnée (non-transitivité).
Cela rappelle le jeu Pierre - Feuille - Ciseau.

Étape 5 : Étude des séquences de longueurs différentes

14. Utiliser “Simulation généralisée entre séquences de longueur variable ” pour générer 10000 essais de la bataille PFFF / FFF. Qui gagne ? (**Troisième Paradoxe de Penney)**

PFFF gagne environ 7 fois sur 8 contre FFF (87.5%).

Étape 6 : Pour aller plus loin …

15. Challenge : trouver une méthode (pas optimale mais) simple pour gagner à chaque fois ?

On repère le deuxième élément de la suite à contrer, on l'inverse, on le met en premier, on met ensuite la suite à contrer sans le dernier élément. Cette nouvelle suite bat systématiquement la première. Par exemple, pour battre PFPP on choisit PPFP ou pour contrer PFPFPF on choisit PPFPFP. Méthode de Mark Andrews - 2004.

16. Dans la peau d'un génie : comment prévoir automatiquement le résultat - Algorithme de Conway.

4. L'algorithme magique de John Conway

John Conway a conçu un algorithme qui, sans utiliser la méthode des graphes d'états, indique le résultat des confrontations d'une séquence contre une autre et cela quelles que soient leurs complexités et leurs longueurs.

Considérons par exemple les séquences

A = PFPP et **B** = PPFF.

Plaçons **A** au-dessus de **B** :

A PFPP
B PPFF

Si les séquences coïncident, écrivons 1 sur les séquences ; sinon, écrivons 0, comme c'est le cas ici :

0
A PFPP
B PPFF

Comparons maintenant les trois derniers symboles de la première séquence (FPP) avec les trois premiers de la seconde (PPF). Si ces sous-séquences coïncident, on ajoute un 1, sinon un 0 :

00
A PFPP
B PPFF

On compare les deux derniers symboles (PP) de la première séquence avec les deux premiers de la seconde (PP), etc. Nous obtenons finalement :

0011 = 3
A PFPP
B PPFF,

la suite de 0 et de 1 étant lue comme un entier en base 2. C'est la clef de **A** par rapport à **B** ; on la note Clef(**A**, **B**). Ici, Clef(**A**, **B**) = 3. Le rapport de la probabilité que **B** gagne sur la probabilité que **A** gagne est alors donné par : [Clef(**A**, **A**) – Clef(**A**, **B**)]/[Clef(**B**, **B**)–Clef(**B**, **A**)].

L'application de l'algorithme de Conway donne :

0011 = 3	1001 = 9	0000 = 0	1000 = 8
A PFPP	**A** PFPP	**B** PPFF	**B** PPFF
B PPFF	**A** PFPP	**A** PFPP	**B** PPFF

Clef(**A**, **A**) – Clef(**A**, **B**)) = 6
Clef(**B**, **B**) – Clef(**B**, **A**)) = 8.

Ainsi, **B** = PPFF gagne six fois quand **A** = PFPP gagne huit fois. Autrement dit, la probabilité de gain de **A** contre **B** est : 8/(6 + 8) = 4/7

Autre exemple : **A** = PFP, **B** = PPF.

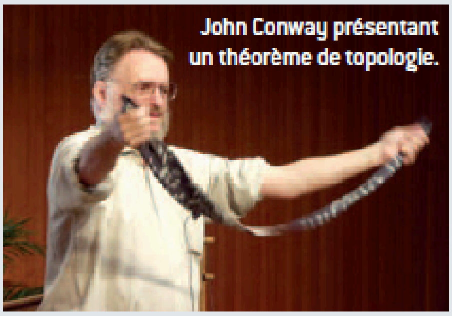
001 = 1	101 = 5	010 = 2	100 = 4
A PFP	**A** PFP	**B** PPF	**B** PPF
B PPF	**A** PFP	**A** PFP	**B** PPF

Clef(**A**, **A**) – Clef(**A**, **B**)) = 4
Clef(**B**, **B**) – Clef(**B**, **A**)) = 2.

Donc **B** = PPF gagne quatre fois quand **A** = PFP gagne deux fois. Dit autrement, la probabilité de gain de **A** contre **B** est : 2/(2 + 4) = 1/3.

Le fait que cet algorithme fonctionne correctement est bien sûr difficile à démontrer, mais cela a été fait de plusieurs manières.

Autre miracle de l'algorithme de Conway : le nombre 2 Clef(**A**, **A**) est le temps moyen d'attente de la séquence **A**. Cela permet de vérifier les résultats de l'encadré 1, qui indiquaient que le temps moyen d'attente de FF est 6 et que celui de PF est 4.



John Conway présentant un théorème de topologie.

Conclusion :

1. Le paradoxe de Penney met en évidence l'importance de la structure des séquences en probabilités.
2. Les arbres de probabilités permettent de visualiser les probabilités de chaque série.
3. Les graphes d'état permettent de mieux appréhender la différence de temps moyen d'apparition lorsque l'on met 2 séries en concurrence.
4. Ces concepts peuvent s'appliquer à des domaines comme la biologie computationnelle, la théorie des jeux ou encore les chaînes de Markov.

Remarque : Les simulations Python sont des outils puissants pour renforcer l'intuition des élèves sur ces phénomènes et leurs enthousiasmes à apprendre.

Ressources :

- Les surprises du jeu de pile ou face - Delahaye
- Penney's Game - Numberphile
- Penney's Game (extra footage) - Numberphile
- Jeu de Penney et chaînes de Markov
- Paradoxe de Penney - fiche élève
- Paradoxe de Penney - solution
- Paradoxe de Penney - python

.