Chapitre 1

Rappel : suite et algorithme

1.1 Suite : généralité

1.1.1 Définition

Définition :

- 1 suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est 1 fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$; à 1 rang donné n , on associe 1 réel u_n
- $$(u_n)_{n\geqslant 0} \quad : \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \mapsto & \mathbb{R} \\ n & \mapsto & u_n \end{array}$$

Remarque :

- la suite peut commencer à 1 autre indice : 1, 2, ... ; l'ensemble de définition est alors adapté par exemple $(u_n)_{n\geqslant p}$ est 1 suite démarrant au rang p
- u_n s'appelle le ***terme général*** de la suite

Ex 1 : suite arithmétique

$(u_n)_{n\geqslant 0}$: 2 ; 5 ; 8 ; 11 ...

$(v_n)_{n\geqslant 1}$: de premier terme 8 et de raison -4

Ex 2 : suite géométrique

$(u_n)_{n\geqslant 0}$: 3 ; 6 ; 12 ; 24 ...

$(v_n)_{n\geqslant 1}$: de premier terme 6 et de raison $-\frac{1}{2}$

Ex 3 : suite définie de façon explicite :

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{1}{n}$

$\forall n \geqslant 3$, $v_n = \sqrt{n-3}$

Ex 4 : suite récurrente à 1 ou 2 terme(s)

$$\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = 0,75u_n + 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_0 = 1 \quad u_1 = 1 \\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \end{cases}$$

Ex 5 : suite définie par l'intermédiaire d'une autre ou bien par une somme

On définie les 2 suites suivantes :

- la série harmonique, $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + ... = \displaystyle\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p}$
- la suite $b_n = a_n - \ln n$ qui tend vers la constante γ

Culture :

- $\gamma \approx 0,57721$ est 1 constante importante, comme π
- on ne sait pas si γ est 1 rationnel ou non !!
- on a prouvé que π est irrationnel en 1760 (lambert) puis transcendant en 1882 (lindermann)

1.1.2 Variation (ou monotonie) d'1 suite

Définition : $(u_n)_{n \geqslant 0}$ une suite

- (u_n) est ***croissante*** (à partir d'1 certain rang k) ***si*** $\forall n \geqslant k$, $u_{n+1} \geqslant u_n$
- (u_n) est ***décroissante*** (à partir d'1 certain rang k) ***si*** $\forall n \geqslant k$, $u_{n+1} \leqslant u_n$
- (u_n) est ***strictement croissante*** (à partir d'1 certain rang k) ***si*** $\forall n \geqslant k$, $u_{n+1} > u_n$
- (u_n) est ***strictement décroissante*** (à partir d'1 certain rang k) ***si*** $\forall n \geqslant k$, $u_{n+1} < u_n$
- (u_n) est ***monotone*** (à partir d'1 certain rang k) ***si*** elle est croissante ou décroissante à partir d'1 certain rang k
- (u_n) est ***stationnaire*** (à partir d'un certain rang k) ***si*** $\exists\, k$ tel que $\forall n \geqslant k$, $u_{n+1} = u_n$

Remarque :

- ⚠ il existe des suites qui ne sont ni croissantes ni décroissantes ; par exemple, $u_n = (-1)^n$
- regarder les 1^er termes de la suite permet souvent de conjecturer une possible monotonie ou CV ; mais il faudra rester prudent, et ceci ne sera pas 1 preuve, simplement 1 conjecture !

1.1.3 Montrer la croissance ou décroissance d'1 suite

Méthode : pour montrer la monotonie d'1 suite, quelques idées ... il en existe beaucoup d'autres ...

- suite de ***type connu*** : arithmétique ou géométrique
- analyser le ***signe de*** $u_{n+1} - u_n$:

  positif ⇒ suite croissante

  négatif ⇒ suite décroissante

- si tous les termes de la suite sont ⚠ strictement positifs, ***comparer*** $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ ***et 1*** :

  $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1 \Rightarrow$ suite croissante

  $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant 1 \Rightarrow$ suite décroissante

- pour une suite définie de façon explicite $u_n = f(n)$, ***étudier les variations de*** f sur $\mathbb{R}$
- utiliser un ***raisonnement par récurrence*** (vu ultérieurement)

Exemples :

- Montrer que la suite (u_n) définie par $\forall n \geqslant 0$, $u_n = n^2 - n$ est croissante.

- Mq $(u_n)_{n\geqslant 1}$ définie par : $u_n = \frac{2^n}{n}$ est croissante.

- Mq $(u_n)_{n\geqslant 2}$ définie par : $u_n = \frac{2n+1}{n-1}$ est décroissante.

1.1.4 Visualiser 1 suite

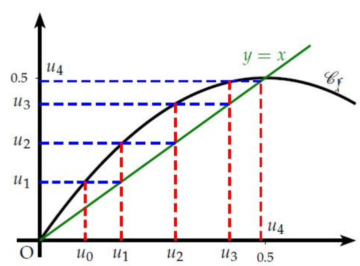
Méthode : visualisation d'1 suite définie par récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ (vidéo ici)

1. tracer la droite $y = x$
2. tracer la fonction support de la suite $y = f(x)$
3. placer, sur l'axe des abscisses, le terme u_0
4. construire u_1 : à partir de u_0, monter à la verticale, cogner f, puis partir à l'horizontale jusqu'à toucher l'axe des ordonnées
5. rapatrier u_1 sur l'axe des abscisses, grâce à la droite $y = x$
6. recommencer pour construire u_2, u_3 ...

Exemple : on considère (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 0,1 \\ u_{n+1} = 2u_n(1-u_n) \quad \forall n \geqslant 0 \end{cases}$

Grâce au graphe de $f(x) = 2x(1-x)$ et $y = x$, on obtient la construction des termes de la suite :

⚠ à savoir saisir dans sa calculatrice



1.2 Suite arithmétique (rappels)

1.2.1 Définition et Propriété

Définition : 1 suite arithmétique (u_n) est définie par :

- 1 premier terme u_0 ou u_p
- 1 relation de récurrence : $u_{n+1} = u_n + r$, r étant la raison de la suite

Propriété : 1 suite est arithmétique ssi la différence entre 2 termes consécutifs de la suite est constante : c'est la raison

- $\forall n \geqslant p \quad u_{n+1} - u_n = r \Leftrightarrow (u_n)$ arithmétique de raison r

Exemple :

- $(u_n) : \begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = u_n + 3 \quad \forall n \geqslant 0 \end{cases} \Rightarrow \quad 2 \quad 5 \quad 8 \quad 11 \quad ...$

1.2.2 Expression du terme général, Somme des premiers termes

Propriété : $(u_n)_{n\geqslant 0}$ arithmétique de raison r

- ainsi : $u_n = u_0 + nr$
- S_n =Nbre Termes$\times\frac{PremierTerme+DernierTerme}{2}$

Remarque, exemple :

- connaître les 2 preuves :

  preuve 1 :

  preuve 2 :

- savoir adapter les formules à votre besoin (ex : démarrage à 1 au lieu de 0 ...)

- ***Culture :***

  somme des n 1 $^{\text{er}}$ entiers : $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$

  somme des n 1 $^{\text{er}}$ carrés : $T_n = \frac{(2n+1)n(n+1)}{6}$

  somme des n 1 $^{\text{er}}$ cubes : $U_n = (\frac{n(n+1)}{2})^2$

1.3 Suite géométrique (rappels)

1.3.1 Définition

Définition : 1 suite géométrie $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est définie par :

- 1 premier terme u_0 ou u_p
- 1 relation de récurrence : $u_{n+1} = qu_n$, q étant la raison de la suite

Propriété : 1 suite est géométrique si le quotient entre 2 termes consécutifs de la suite est constant : c'est la raison

- $\forall n \geqslant p \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} = q \Leftrightarrow (u_n)$ géométrique de raison q

Exemple :

- $(u_n) : \begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = 2u_n \quad \forall n \geqslant 0 \end{cases} \Rightarrow \quad 3 \quad 6 \quad 12 \quad 24 \quad ...$

1.3.2 Expression du terme général, Somme des premiers termes

Propriété : $(u_n)_{n\geqslant 0}$ géométrique de raison q

- $u_n = q^n u_0$
- S_n =1$^{\text{er}}$ Terme$\times\frac{1-q^{Nbre-de-Termes}}{1-q}$ avec $q \neq 1$

Remarque, exemple :

- ⚠ savoir démontrer ces 2 résultats
- un bon exemple est la somme des puissances de 2 : $\sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^{n+1} - 1$
- un autre exemple (chap nombre complexe), sont les sommes $C_n = \sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta)$ et $S_n = \sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta)$

1.3.3 Limite d'1 suite géométrique

Propriété : $(u_n)_{n \geqslant 0}$ géométrique de raison q et de premier terme 1 : $\forall n \geqslant 0 \quad u_n = q^n$

- ***Si*** $q > 1$ ***Alors*** (u_n) DIV et $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$
- ***Si*** $q = 1$ ***Alors*** (u_n) est CTE et $\forall n \geqslant 0 \quad u_n = 1$
- ***Si*** $-1 < q < 1$ ***Alors*** (u_n) CV et $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$
- ***Si*** $q \leq -1$ ***Alors*** (u_n) DIV et (bien comprendre que) n'a pas de limite

Remarque, exemple :

- lorsque $u_0 \neq 0$, ⚠ penser au signe de u_0
- (u_n) géométrique avec $u_0 = -2$ et $q = 1,5$; $\lim\limits_{x \to +\infty} u_n = -\infty$ car $1,5 > 1$
- (v_n) géométrique avec $u_0 = 4$ et $q = \frac{3}{4}$; $\lim\limits_{x \to +\infty} u_n = 0$ car $-1 < \frac{3}{4} < 1$

1.4 Algorithme

Petits programmes à tester pour se rafraîchir la mémoire :

1.4.1 Test : recherche des solutions d'une équation du 2^nd degré

```
def Solution_Second_Degre(a,b,c):
# cherche les solutions d'1 trinome du 2   degr
# en fonction de la valeur de delta

  delta =b**2 - 4*a*c
  print (" Delta =",delta )
  if delta <0:
    print ("Pas de solutions ")
  if delta ==0:
    print ("Une solution ")
    x=-b/2*a
    print ("X=",x)
  if delta >0:
    print (" Deux solutions ")
    x1 = (-b - sqrt(delta)) / (2*a)
    x2 = (-b + sqrt(delta)) / (2*a)
    print ("X1=",x1)
    print ("X2=",x2)
```


1.4.2 Boucle Tant Que : trouver n tel que $1 + 2 + ...n > 10^p$

Écrire une fonction qui a pour paramètre p un nombre positif
et renvoie le premier entier n tel que : $1 + 2 + ...n > 10^p$

Solution : python

1.4.3 Boucle For : calcul de factorielle n

Écrire une fonction qui a pour paramètre n un nombre positif
et renvoie factorielle n, notée n!, c'est à dire 1*2*3...*n

Solution : python