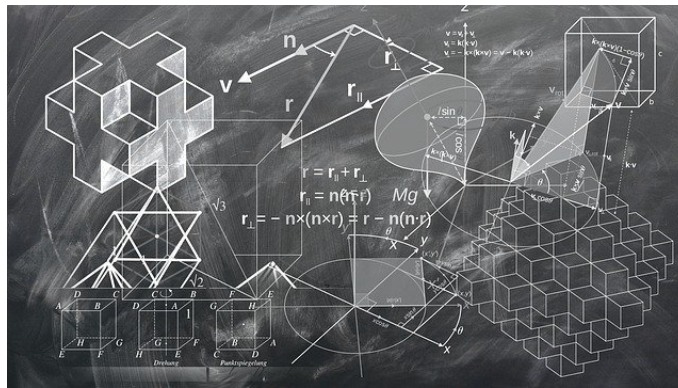


Chapitre 8

Produit Scalaire



The real world applications of the dot product

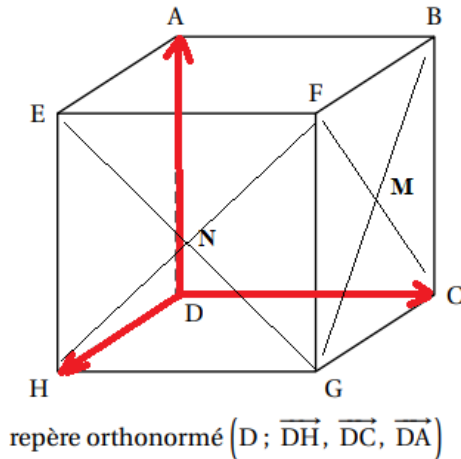
8.1 Vecteurs dans l'espace

Décomposition d'un vecteur dans l'espace

- Relation de Chasles (rappel) : $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$
- Base : une base de l'espace est la donnée de 3 vecteurs linéairement indépendants
- Décomposition d'un vecteur dans une base : dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, le vecteur \vec{u} peut s'écrire (grâce à la relation de Chasles) de façon unique : $\vec{u} = x.\vec{i} + y.\vec{j} + z.\vec{k}$
- Coordonnées d'un vecteur : le vecteur \vec{u} s'écrit donc $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$
- Repère : un repère de l'espace est d'une base et d'un centre O ; on le note $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

Remarque, exemple :

- donner une base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ signifie que : $\vec{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
- donner un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ signifie en plus que $O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
- donner les coordonnées des points N et M et des vecteurs \overrightarrow{NM} et \overrightarrow{HB} :



8.2 Définition - Propriété

Définition du Produit Scalaire (espace) : $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ 2 vecteurs de l'espace

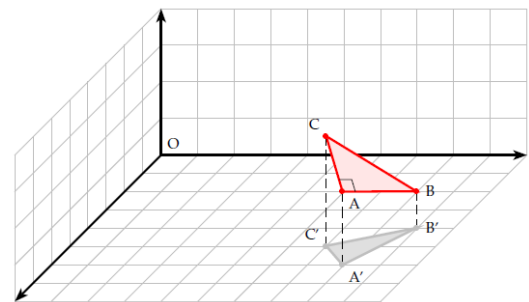
- Analytique : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = xx' + yy' + zz'$
- Vectorielle (identité du parallélogramme) : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$
- Géométrique : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$

Remarque, exemple :

- vérifier que ces 3 définitions sont équivalentes
- vérifier que : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2) = \frac{1}{2}(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2) = \frac{1}{4}(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2)$

- A $\begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}$ et B $\begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix}$ et C $\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}$

- déterminer la mesure géométrique de \widehat{BAC}
- on projette orthogonalement A, B, et C sur le plan $z=0$ respectivement en A', B' et C'
déterminer la mesure géométrique $\widehat{B'A'C'}$
- que constatez vous ?



- idée : on a vu dans l'exercice précédent que : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow ABC \text{ est rectangle en A}$

Propriété : $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ 3 vecteurs de l'espace et λ un réel

- **commutativité** : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
- **distributivité** : $\vec{u}(\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$
- **bilinéarité** : $\lambda(\vec{u} \cdot \vec{v}) = (\lambda\vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (\lambda\vec{v})$
- **Si** \vec{u} et \vec{v} sont de même direction et de même sens **Alors** $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|$
- **Si** \vec{u} et \vec{v} sont de même direction et de sens contraires **Alors** $\vec{u} \cdot \vec{v} = -\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|$
- **orthogonalité** : $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \vec{u}$ et \vec{v} sont orthogonaux
- **une égalité très utile** : $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$
- **propriété de** $\vec{0}$: c'est le seul vecteur orthogonal à lui-même : $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2 = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$

Remarque, exemple :

- le vecteur nul $\vec{0}$ est orthogonal à tous vecteurs ; c'est d'ailleurs le seul

- $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ \alpha \end{pmatrix}$; trouver α pour que $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

- A $\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$ et B $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ et la droite d définit par C $\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{w} \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$
mq (AB) et d sont perpendiculaires

- A $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, B $\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, C $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, D $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, E $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$
Mq A, B, C ne sont pas alignés et que \overrightarrow{DE} est normal au plan (ABC)

8.3 Vecteur, droite et plan dans l'espace

Propriété : dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, soit A $\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix}$ et B $\begin{pmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \end{pmatrix}$ et $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix}$

- **coordonnées du vecteur** \overrightarrow{AB} : $\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$
- **équation de la droite** passant par A et dirigée par le vecteur \vec{u} : $\begin{cases} x = x_A + k.a \\ y = y_A + k.b \\ z = z_A + k.c \end{cases}$
- **équation du plan** passant par A et dirigée par \vec{u} et \vec{v} : $\begin{cases} x = x_A + k.a + k'.d \\ y = y_A + k.b + k'.e \\ z = z_A + k.c + k'.f \end{cases}$

8.4 Équation cartésienne d'un plan

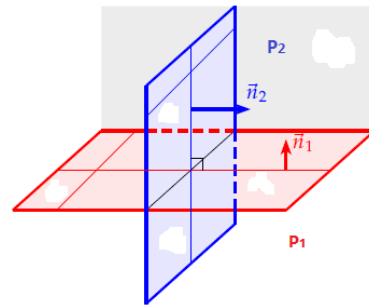
Définition - Propriété :

- vecteur normal à un plan : \vec{n} est normal à \mathcal{P} si toute droite dirigée par \vec{n} est orthogonale à \mathcal{P}
 - l'équation du plan \mathcal{P} passant par A et normal à $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est par : $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$ où $M \in \mathcal{P}$
- équation analytique d'un plan : ceci donne 1 équation de la forme : $ax + by + cz + d = 0$

- droite orthogonale à un plan :

1 droite Δ est orthogonale à 1 plan $\mathcal{P} \Leftrightarrow \exists d_1, d_2$ sécantes de \mathcal{P} orthogonales à Δ

- soient 2 plans \mathcal{P}_1 de vecteur normal \vec{n}_1 et \mathcal{P}_2 de vecteur normal \vec{n}_2 : $\mathcal{P}_1 \perp \mathcal{P}_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \perp \vec{n}_2$



Remarque, exemple :

- Preuve 2 :

- \Rightarrow Si $\Delta \perp \mathcal{P}$ Alors Δ est orthogonale à toutes droites de \mathcal{P}
- \Leftarrow Si d_1 et d_2 sécantes de \mathcal{P} sont orthogonales à Δ
- Alors soit \vec{n} la direction de Δ , \vec{u}_1 la direction de d_1 et \vec{u}_2 la direction de d_2
- par définition, on a : $\vec{n} \perp \vec{u}_1$ et $\vec{n} \perp \vec{u}_2$
- d_1 et d_2 sont sécantes $\Rightarrow \vec{u}_1$ et \vec{u}_2 sont non colinéaires (on dit "libres")
ils donnent la direction de \mathcal{P}
- $\forall d \in \mathcal{P}$ de vecteur directeur \vec{u} , $\exists a, b \in \mathbb{R}$ tq $a\vec{u}_1 + b\vec{u}_2 = \vec{u}$
- clairement, $\vec{n} \cdot \vec{u} = \vec{n} \cdot (a\vec{u}_1 + b\vec{u}_2) = \vec{n} \cdot a\vec{u}_1 + \vec{n} \cdot b\vec{u}_2 = 0 \Rightarrow \vec{n} \perp \vec{u}$ et donc $\Delta \perp d$

- **Ex 1** : déterminer l'équation de \mathcal{P} passant par $A \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et normal à $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

- **Ex 2** : donner 1 équation de \mathcal{Q} parallèle à \mathcal{P} passant par $A \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$

- **Ex 3** : déterminer l'équation du plan médiateur de A et B avec $A \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ et normal à $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$