Devoir Surveillé - 2 h

Exercice 1 - *suite, récurrence, fonction, algorithme - métropole jour1 ex3 - 2023* 10 points

Une entreprise a créé une Foire Aux Questions (« FAQ ») sur son site internet.

On étudie le nombre de questions qui y sont posées chaque mois.

Partie A : Première modélisation

Dans cette partie, on admet que, chaque mois :

- 90 % des questions déjà posées le mois précédent sont conservées sur la FAQ ;
- 130 nouvelles questions sont ajoutées à la FAQ.

Au cours du premier mois, 300 questions ont été posées.

Pour estimer le nombre de questions, en centaines, présentes sur la FAQ le n-ième mois, on modélise la situation ci-dessus à l'aide de la suite (u_n) définie par :

$$u_1 = 3 \quad \text{et, pour tout entier naturel } n \geqslant 1,\ u_{n+1} = 0,9u_n + 1,3.$$

1. Calculer u_2 et u_3 et proposer une interprétation dans le contexte de l'exercice.

2. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$:

$$u_n = 13 - \frac{100}{9} \times 0,9^n.$$

3. En déduire que la suite (u_n) est croissante.

4. On considère le programme ci-contre, écrit en langage Python.

Déterminer la valeur renvoyée par la saisie de seuil(8.5) et l'interpréter dans le contexte de l'exercice.

```
def seuil(p) :
    n=1
    u=3
    while u<=p :
        n=n+1
        u=0.9*u+1.3
    return n
```

Partie B : Une autre modélisation

Dans cette partie, on considère une seconde modélisation à l'aide d'une nouvelle suite (v_n) définie pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ par :

$$v_n = 9 - 6 \times e^{-0,19 \times (n-1)}.$$

Le terme v_n est une estimation du nombre de questions, en centaines, présentes le n-ième mois sur la FAQ.

1. Préciser les valeurs arrondies au centième de v_1 et v_2.

2. Déterminer, en justifiant la réponse, la plus petite valeur de n telle que $v_n > 8,5$.

Partie C : Comparaison des deux modèles

1. L'entreprise considère qu'elle doit modifier la présentation de son site lorsque plus de 850 questions sont présentes sur la FAQ.

Parmi ces deux modélisations, laquelle conduit à procéder le plus tôt à cette modification?

Justifier votre réponse.

2. En justifiant la réponse, pour quelle modélisation y a-t-il le plus grand nombre de questions sur la FAQ à long terme?

Exercice 2 - *suite, récurrence, fonction, algorithme - métropole jour2 ex2 - 2023* 10 points

Des biologistes étudient l'évolution d'une population d'insectes dans un jardin botanique.
Au début de l'étude la population est de 100 000 insectes.
Pour préserver l'équilibre du milieu naturelle nombre d'insectes ne doit pas dépasser 400 000.

Partie A : Étude d'un premier modèle en laboratoire

L'observation de l'évolution de ces populations d'insectes en laboratoire, en l'absence de tout prédateur, montre que le nombre d'insectes augmente de 60 % chaque mois.
En tenant compte de cette observation, les biologistes modélisent l'évolution de la population d'insectes à l'aide d'une suite (u_n) où, pour tout entier naturel n, u_n modélise le nombre d'insectes, exprimé en millions, au bout de n mois.
On a donc $u_0 = 0,1$.

1. Justifier que pour tout entier naturel n : $u_n = 0,1 \times 1,6^n$.
2. Déterminer la limite de la suite (u_n).
3. En résolvant une inéquation, déterminer le plus petit entier naturel n à partir duquel $u_n > 0,4$.
4. Selon ce modèle, l'équilibre du milieu naturel serait-il préservé ? Justifier la réponse.

Partie B : Étude d'un second modèle

En tenant compte des contraintes du milieu naturel dans lequel évoluent les insectes, les biologistes choisissent une nouvelle modélisation.
Ils modélisent le nombre d'insectes à l'aide de la suite (v_n), définie par :

$$v_0 = 0,1 \quad \text{et, pour tout entier naturel } n,\ v_{n+1} = 1,6v_n - 1,6v_n^2,$$

où, pour tout entier naturel n, v_n est le nombre d'insectes, exprimé en millions, au bout de n mois.

1. Déterminer le nombre d'insectes au bout d'un mois.
2. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $\left[0\,;\,\frac{1}{2}\right]$ par

$$f(x) = 1,6x - 1,6x^2.$$

   a. Résoudre l'équation $f(x) = x$.

   b. Montrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $\left[0\,;\,\frac{1}{2}\right]$.

3. **a.** Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $0 \leqslant v_n \leqslant v_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}$.

   b. Montrer que la suite (v_n) est convergente.
   On note ℓ la valeur de sa limite. On admet que ℓ est solution de l'équation $f(x) = x$.

   c. Déterminer la valeur de ℓ.
   Selon ce modèle, l'équilibre du milieu naturel sera-t-il préservé ? Justifier la réponse.

4. On donne ci-contre la fonction seuil, écrite en langage Python.

   a. Qu'observe-t-on si on saisit seuil(0.4) ?

   b. Déterminer la valeur renvoyée par la saisie de seuil(0.35).
   Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

```
def seuil(a) :
    v=0.1
    n=0
    while v<a :
        v=1.6*v-1.6*v*v
        n=n+1
    return n
```