Chapitre 5

Trigonométrie - $x \mapsto \sin x$ et $x \mapsto \cos x$

5.1 Rappel

Mesure principale d'un angle α :

- en fonction des besoins
  - soit on considère la valeur dans $]-\pi;\pi]$
  - soit on considère la valeur de l'angle dans $[0;2\pi[$, noté $\alpha[2\pi]$
- dans les 2 cas, pour trouver cette valeur, on effectue la division euclidienne de α par 2π, ce qui permet de "retirer" à l'angle α les tours inutiles

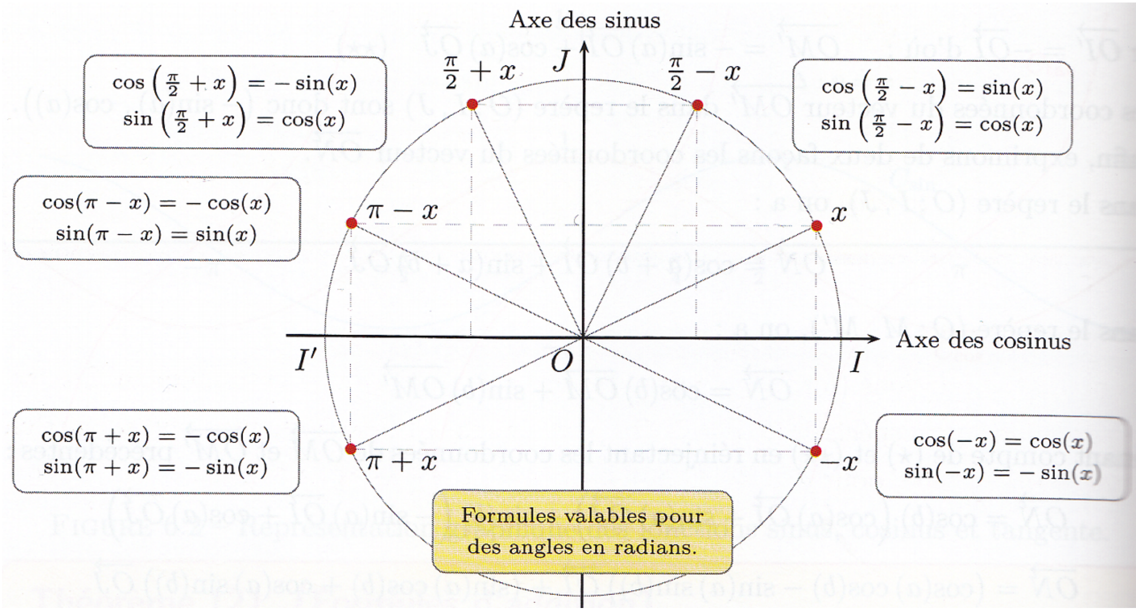
Propriétés fondamentales :

- $(\sin\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2 = 1$
- $-1 \leqslant \sin\alpha \leqslant 1$
- $-1 \leqslant \cos\alpha \leqslant 1$
- $0 \leqslant \sin\alpha \leqslant 1 \Leftrightarrow 0 \leqslant \alpha \leqslant \pi$ (pour une mesure principale α)
- $0 \leqslant \cos\alpha \leqslant 1 \Leftrightarrow -\dfrac{\pi}{2} \leqslant \alpha \leqslant \dfrac{\pi}{2}$ (pour une mesure principale α)
- $\sin(\alpha + 2\pi) = \sin\alpha$: si on fait un tour, on a la même valeur de sinus
- $\cos(\alpha + 2\pi) = \cos\alpha$: si on fait un tour, on a la même valeur de cosinus

Valeurs de Sinus - Cosinus - Tangente :

angle	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
sinus	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
cosinus	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
tangente	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	indéfinie	0

Formule de transformation :

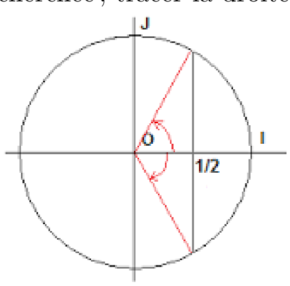


Exemple :

- trouver les mesures principales des angles suivants : $\frac{17\pi}{4}$ et -$\frac{31\pi}{6}$
- positionner sur le cercle trigonométrique les angles suivants : $\frac{35\pi}{4}$ et -$\frac{2531\pi}{6}$
- trouver 2 mesures principales associées à l'angle $\frac{35\pi}{4}$ dont les cosinus sont égaux
- trouver 2 mesures principales associées à l'angle $\frac{35\pi}{4}$ dont les sinus sont égaux
- HP : trouver 2 mesures principales associées à l'angle $\frac{35\pi}{4}$ dont les tangentes sont égales

Résoudre une équation en Cosinus (exemple) : $\boxed{\text{résoudre } \cos x = \frac{1}{2} \text{ sur } \mathbb{R}}$

- ***1ère étape :*** dessiner votre cercle trigonométrique et placer la valeur sinus recherchée ; tracer la droite verticale permettant de visualiser les solutions



- ***2ème étape :*** retrouver la mesure principale de l'angle associée au cosinus ; si la valeur n'est pas connue, utiliser "cos-1 de la valeur"

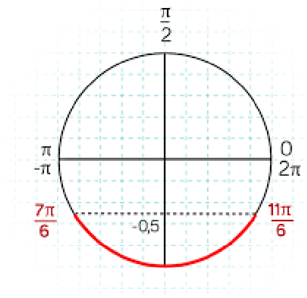
  ici, $\frac{1}{2} = \cos\dfrac{\pi}{3} \Rightarrow \boxed{\cos x = \cos\dfrac{\pi}{3}}$

- ***3ème étape :*** les solutions de l'équation sont alors $\dfrac{\pi}{3}[2\pi]$ et $-\dfrac{\pi}{3}[2\pi]$

  ici, $\boxed{S=\{\ \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi\ ;\ -\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\ \}}$

Résoudre une inéquation en Sinus (exemple) : $\boxed{\text{résoudre } \sin x \leqslant -\frac{1}{2} \text{ sur } \mathbb{R}}$

- ***1ère étape :***
  - dessiner votre cercle
  - placer la valeur sinus recherchée
  - tracer la droite horizontale de la valeur sinus
  - surligner la partie du cercle trigonométrique permettant de visualiser les solutions

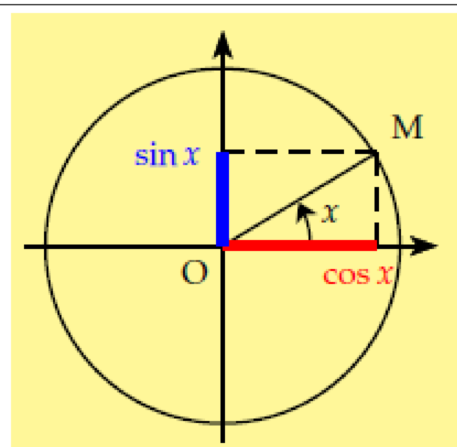


- ***2ème étape :*** retrouver la mesure principale de l'angle associée au sinus ; si la valeur n'est pas connue, utiliser "sin^{-1} de la valeur"
  ici, $\frac{1}{2} = \sin\dfrac{\pi}{6} \Rightarrow -\frac{1}{2} = \sin -\dfrac{\pi}{6} \Rightarrow \boxed{\sin x = \sin -\dfrac{\pi}{6}}$
- ***3ème étape :*** calculer les 2 valeurs intessantes : $-\dfrac{\pi}{6}[2\pi]$ et $\pi - (-\dfrac{\pi}{6})[2\pi] = \dfrac{7\pi}{6})[2\pi]$
- écrire la solution : $S = \bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}} [\dfrac{7\pi}{6} + 2k\pi\,;\ \dfrac{11\pi}{6} + 2k\pi]$

5.2 Étude des fonctions $x \mapsto \sin x$ et $x \mapsto \cos x$

Définition :

- on considère le cercle trigonométrique
- le point M du cercle, associé l'angle x, a des coordonnées
- on pose (c'est donc une définition) :
  - $x_M = \cos x$
  - $y_M = \sin x$
- lorsque $x \in \mathbb{R}$, on crée ainsi 2 fonctions :
  - $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \mapsto & [-1,1] \\ x & \mapsto & \cos x \end{array}$ et $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \mapsto & [-1,1] \\ x & \mapsto & \sin x \end{array}$



Propriété :

- (1) sinus est impaire : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sin(-x) = -\sin x$
- (2) cosinus est paire : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\cos(-x) = \cos x$
- (3) sinus et cosinus sont 2π-périodique :
  - $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall k \in \mathbb{Z}$, $\sin(x + 2k\pi) = \sin x$
  - $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall k \in \mathbb{Z}$, $\cos(x + 2k\pi) = \cos x$
- (4) $\forall x \in \mathbb{R}$, $(\sin x)' = \cos x$
- (5) $\forall x \in \mathbb{R}$, $(\cos x)' = -\sin x$
- (6) ROC : $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ et $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$
- HP (7) $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall k \in \mathbb{Z}$, $\sin(x + k\pi) = (-1)^k \sin x$
- HP (8) $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall k \in \mathbb{Z}$, $\cos(x + k\pi) = (-1)^k \cos x$

Remarque, exemple :

- (1) , (2) , (3) sont immédiates par visualisation du cercle trigonométrique

- preuve HP mais facile : (4) , (5) peuvent se prouver simplement en dérivant e^{ix}

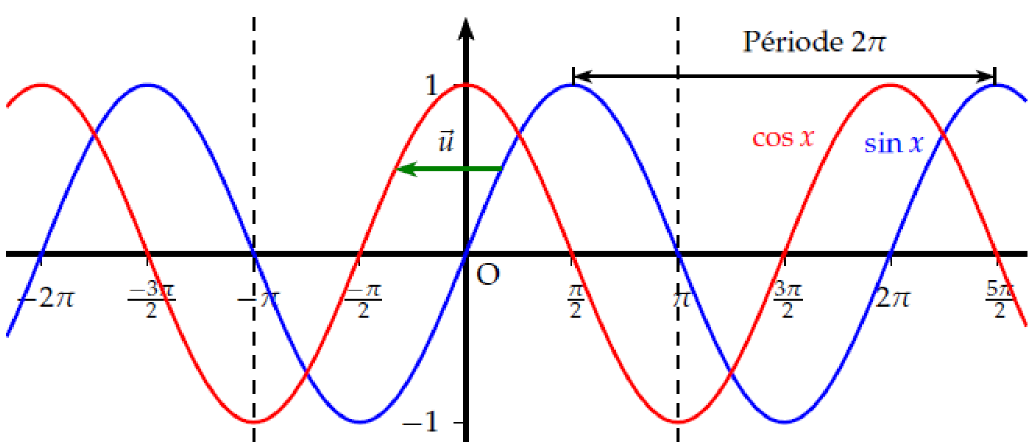
- (6) est a connaître (ROC) ; voir le chapitre 2 : limite (penser au nombre dérivée)

- (7) et (8) résultat HP mais très utile : encore une fois, le passage par les complexes clarifie tout ...

Tableau de Variation et Graphe :

x	$-\pi$		0		π
$\cos' x = -\sin x$		$+$	0	$-$	
$\cos x$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{2}$		π
$\sin' x = \cos x$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$\sin x$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	0



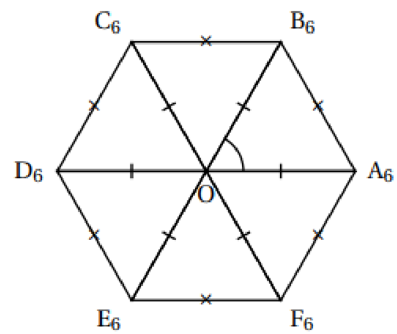
5.3 Exemple sujet BAC

5.3.1 Centre Étranger 2017

Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$.
Pour tout entier $n \geqslant 4$, on considère P_n un polygone régulier à n côtés, de centre O et dont l'aire est égale à 1.
On admet qu'un tel polygone est constitué de n triangles superposables à un triangle OA_nB_n donné, isocèle en O.
On note $r_n = OA_n$ la distance entre le centre O et le sommet A_n d'un tel polygone.

Partie A : étude du cas particulier $n = 6$

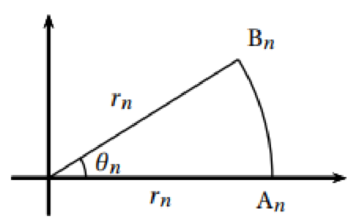
On a représenté ci-contre un polygone P_6.



1. Justifier le fait que le triangle OA_6B_6 est équilatéral, et que son aire est égale à $\frac{1}{6}$.
2. Exprimer en fonction de r_6 la hauteur du triangle OA_6B_6 issue du sommet B_6.
3. En déduire que $r_6 = \sqrt{\frac{2}{3\sqrt{3}}}$.

Partie B : cas général avec $n \geqslant 4$

Dans cette partie, on considère le polygone P_n avec $n \geqslant 4$, construit de telle sorte que le point A_n soit situé sur l'axe réel, et ait pour affixe r_n.
On note alors $r_n e^{i\theta_n}$ l'affixe de B_n où θ_n est un réel de l'intervalle $\left]0\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$.



1. Exprimer en fonction de r_n et θ_n la hauteur issue de B_n dans le triangle OA_nB_n puis établir que l'aire de ce triangle est égale à $\frac{r_n^2}{2}\sin(\theta_n)$.
2. On rappelle que l'aire du polygone P_n est égale à 1.
   Donner, en fonction de n, une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{OA_n}, \overrightarrow{OB_n}\right)$, puis démontrer que :

$$r_n = \sqrt{\frac{2}{n\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)}}.$$

Partie C : étude de la suite (r_n)

On considère la fonction f définie pour tout réel x de l'intervalle $]0\,;\,\pi[$ par

$$f(x) = \frac{x}{\sin x}.$$

Ainsi, le nombre r_n, défini dans la partie B pour $n \geqslant 4$, s'exprime à l'aide de la fonction f par :

$$r_n = \sqrt{\frac{1}{\pi} f\left(\frac{2\pi}{n}\right)}.$$

On admet que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $]0 ; \pi[$.

1. Montrer que la suite (r_n) est décroissante. On pourra pour cela commencer par démontrer que pour tout $n \geqslant 4$, on a : $0 < \dfrac{2\pi}{n+1} < \dfrac{2\pi}{n} < \pi$.
2. En déduire que la suite (r_n) converge. On ne demande pas de déterminer sa limite L, et on admet dans la suite de l'exercice que $L = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}$.
3. On considère l'algorithme suivant.

VARIABLES :	n est un nombre entier
TRAITEMENT :	n prend la valeur 4
	Tant que $\sqrt{\dfrac{2}{n\sin\left(\dfrac{2\pi}{n}\right)}} > 0,58$ faire
	n prend la valeur $n+1$
	Fin Tant que
SORTIE :	Afficher n

Quelle valeur numérique de n va afficher en sortie cet algorithme ?

5.3.2 Polynésie 2017

On rappelle que pour tout réel a et tout réel b,

$$\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b).$$

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.
On considère la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = -x+2$.

1. Montrer que si le réel θ appartient à l'intervalle $\left]-\dfrac{\pi}{4} ; \dfrac{3\pi}{4}\right[$, alors $\cos\left(\theta - \dfrac{\pi}{4}\right) > 0$.
2. Soit M un point du plan complexe d'affixe z non nulle. On note $\rho = |z|$ le module de z et $\theta = \arg(z)$ un argument de z; les nombres ρ et θ sont appelés coordonnées polaires du point M.

   Montrer que le point M appartient à la droite $\mathcal{D}$ si et seulement si ses coordonnées polaires sont liées par la relation :

$$\rho = \frac{\sqrt{2}}{\cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)}, \text{ avec } \theta \in \left]-\frac{\pi}{4} ; \frac{3\pi}{4}\right[\text{ et } \rho > 0.$$

3. Déterminer les coordonnées du point de la droite $\mathcal{D}$ le plus proche de l'origine O du repère.

5.3.3 CE 2024

On considère l'équation différentielle

$$(E_0): \quad y' = y$$

où y est une fonction dérivable de la variable réelle x.

1. Démontrer que l'unique fonction constante solution de l'équation différentielle (E_0) est la fonction nulle.
2. Déterminer toutes les solutions de l'équation différentielle (E_0).
   On considère l'équation différentielle
   $$(E): \quad y' = y - \cos(x) - 3\sin(x)$$
   où y est une fonction dérivable de la variable réelle x.
3. La fonction h est définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = 2\cos(x) + \sin(x)$.
   On admet qu'elle est dérivable sur $\mathbb{R}$.
   Démontrer que la fonction h est solution de l'équation différentielle (E).
4. On considère une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
   Démontrer que : « f est solution de (E) » est équivalent à « $f - h$ est solution de (E_0) ».
5. En déduire toutes les solutions de l'équation différentielle (E).
6. Déterminer l'unique solution g de l'équation différentielle (E) telle que $g(0) = 0$.
7. Calculer :
   $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[-2\,\mathrm{e}^{x} + \sin(x) + 2\cos(x)\right] \mathrm{d}x.$$

