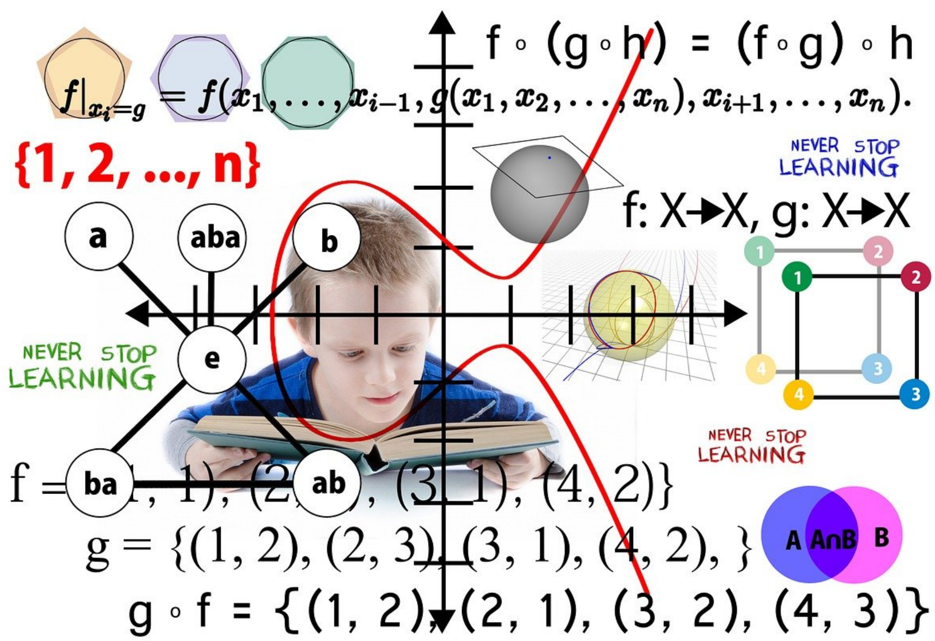
# Chapitre 4

# Continuité - Dérivation




Dirichlet Function: The King of Calculus Counter-Examples

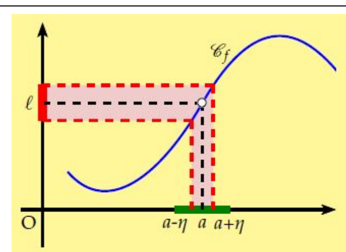
## 4.1 Continuité d'1 fonction

### 4.1.1 Limite finie en 1 point

***Définition (rappel) :*** $l$ , $a$ , $\eta \in \mathbb{R}$ et $f : I \mapsto \mathbb{R}$

$f$ ***tend vers*** $l$ ***en*** $a$ si tout intervalle ouvert $I$ contenant $l$ contient aussi toutes les valeurs de $f(x)$ pour $x$ assez proche de $a$ cad $\forall x \in ]a-\eta, a+\eta[$

On note alors : $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$




***Remarque, exemple :***

- $\eta$ lettre grecque se lit "éta"
- la notion de limite nous conduit naturellement vers la notion de continuité
- ***H.P. :*** dans le supérieur, on écrit plutôt :
  $f : I \mapsto \mathbb{R}$ où $I$ est un intervalle de $\mathbb{R}$
  $\boxed{f \text{ est continue en a si : } \forall \epsilon > 0 \quad \exists \alpha > 0 \quad \forall a \in I \quad (|x-a| < \epsilon \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \alpha)}$

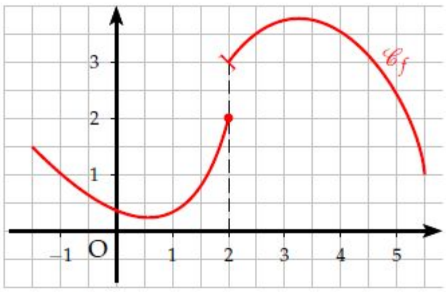
### 4.1.2 Continuité en un point

***Définition :*** $l$ , $a \in \mathbb{R}$ et $f : I \mapsto \mathbb{R}$

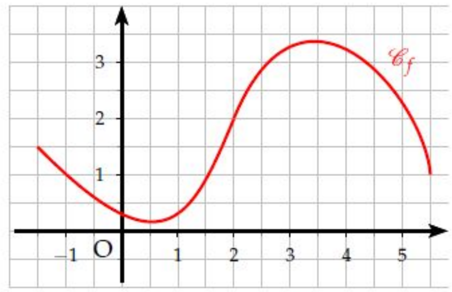
- $f$ ***est continue en*** $a$ si $\boxed{\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)}$
- $f$ continue sur $I \Leftrightarrow f$ continue en tout point de $I$
- si $f$ n'est pas continue en $a$, on parle de **discontinuité en** $a$

***Remarque, exemple :***

- en gros (faux attention), 1 fonction continue est 1 fonction "que l'on peut tracer sans lever le stylo" ou bien "qui reste en 1 seul morçeau"




Fonction $f$ discontinue en 2
$\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = 3 \neq f(2)$



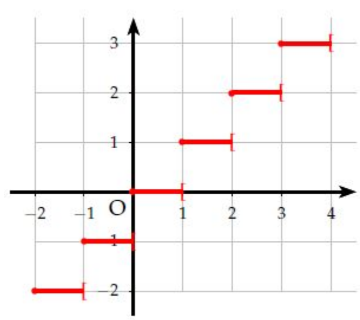

Fonction $f$ continue sur $[-1,5\,;5,5]$

- toutes les fonctions polynômes sont continues sur $\mathbb{R}$ (famille de fonctions très utilisées car très régulières : bien plus que continues, elles sont indéfiniment dérivables ...)
- la fonction inverse $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}^*$ mais ne l'est pas sur $\mathbb{R}$
  si $f$ est continue, il faut donc bien préciser où (sinon problème potentiel ...)
  dans le cas où on ne dit rien, c'est que l'on parle de $\mathbb{R}$
- **ce qu'il faut bien comprendre :** pour 1 valeur $a$, vous pouvez regarder $f$ à 3 endroits $\neq$ :
  - à gauche cad que vous regardez $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$
  - à droite cad vous regardez $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$
  - pile sur $a$ cad vous regardez $f(a)$

  $f$ est continue en $a$ si ces 3 valeurs existent et sont égales :
  $\boxed{f \text{ continue en } a \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)}$
- il est possible de parler de :
  - $f$ continue à gauche : $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = f(a)$
  - $f$ continue à droite : $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$
- $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & si \quad x \in \mathbb{R}^* \\ 1 & si \quad x = 0 \end{cases}$ est continue sur $\mathbb{R}$ (vérifier le !!)
- voici la fonction partie entière $x \mapsto E(x)$

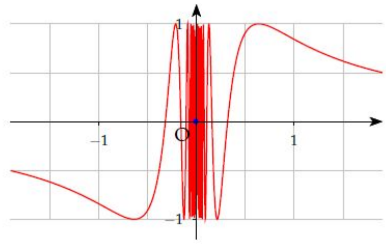
  elle est continue à droite sur $\mathbb{R}$

  elle est continue à gauche uniquement sur $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Z}$



- $f(x) = \begin{cases} \sin\dfrac{1}{x} & si \quad x \in \mathbb{R}^* \\ 0 & si \quad x = 0 \end{cases}$

  $f$ n'est pas continue en 0 : pourquoi ?




- <u>travail à faire :</u> trouver tous les cas possibles de non continuité d'1 fonction $f$ en 1 point

- <u>H.P. :</u> vous pouvez rencontrer la notation : $f \in C([0,1],\mathbb{R})$ ou $f \in C^0([0,1],\mathbb{R})$
  qui veut dire : $f$ est 1 fonction continue de [0,1] sur $\mathbb{R}$

### 4.1.3 Continuité des fonctions usuelles

***<u>Propriété :</u>*** (admis - assez intuitif)

- les fonctions polynômes sont continues sur $\mathbb{R}$
- $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$
- la fonction valeur absolue $x \mapsto |x|$ est continue sur $\mathbb{R}$
- $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$
- $x \mapsto \sin x$ et $x \mapsto \cos x$ sont continues sur $\mathbb{R}$
- $x \mapsto \tan x$ est continue sur son domaine de définition : $\mathbb{R}\backslash\{k\dfrac{\pi}{2}|k \in \mathbb{Z}\}$

***Remarque, exemple :***

- $x \mapsto \dfrac{1}{x-a}$ est continue sur son domaine de définition : $\mathbb{R}\backslash\{a\} = ]-\infty\,;\, a\,[\,\cup\,]\,a\,;\,+\infty[$
- $x \mapsto \sqrt{x+a}$ est continue sur son domaine de définition : $[\,-a\,;\,+\infty\,[$
- <u>H.P. :</u> 1 fraction rationnelle $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ est continue sauf au niveau de ses pôles <u>cad</u> les racines de $Q(x)$
- <u>H.P. :</u> prolongement par continuité
  intéressons nous à la fonction $x \mapsto \dfrac{\sin x}{x}$ définie sur $\mathbb{R}^*$
  on remarque que cette fonction est "presque continue" en 0 car $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0$
  il suffirait qu'elle soit définie en 0 ... ce qui n'est pas encore le cas ... et que sa valeur soit 0
  on répare ce "problème" en décidant que $f(0) = 0$ et $f$ devient continue sur $\mathbb{R}$ cette fois-ci !

### 4.1.4 HP (approfondissement) : lien entre Continuité et Suite

***Propriété :*** $(u_n)$ 1 suite, $f$ 1 fonction ; de plus, on suppose que tout est bien définie

- **Si :** $f$ est continue
- **Alors :** $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = f(\lim\limits_{n\to+\infty} u_n) = f(l)$

***Remarque, exemple :***

- ***ex d'utilisation :*** 1 suite récursive
  $(u_n) = \begin{cases} u_0 & = & 1 \\ u_{n+1} & = & \sqrt{3u_n+4} \end{cases}$
  l'étude de $(u_n)$ montre que $(u_n)$ est croissante, majorée par 4 $\Rightarrow (u_n)$ CV : $l$ sa limite
  <u>d'une part</u>, $f(u_n) = \sqrt{3u_n+4} \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{3u_n+4}$
  <u>d'autre part</u>, $f$ est continue $\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{3u_n+4} = \sqrt{3\lim\limits_{n\to+\infty} u_n}$
  de ces 2 informations, on obtient l'équation de la limite :
  $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = f(\lim\limits_{n\to+\infty} u_n) = f(l)$
  <u>bref :</u> $f(l) = l \Rightarrow \sqrt{3l+4} = l \Rightarrow l^2 - 3l - 4 = 0 \Rightarrow l = -1$ ou $l = 4 \Rightarrow l = 4$ car $(u_n)$ est croissante
- 1 point essentiel, dans l'exemple précédent est de bien comprendre que :
  $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l \qquad \lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = l \qquad u_{n+1} = f(u_n)$
  mais seul la continuité de $f$ apporte l'égalité (par passage à la limite) $f(l) = l$

### 4.1.5 Continuité et Dérivabilité

***Propriété :*** (admis - assez intuitif)

- ***Si :*** $f$ est dérivable en $a$ ***Alors :*** $f$ est continue en $a$
- ***Attention*** la réciproque est fausse (ex : $x \mapsto |x|$ en 0)

***Remarque, exemple :*** même principe entre "ensemble de définition" et la "continuité"

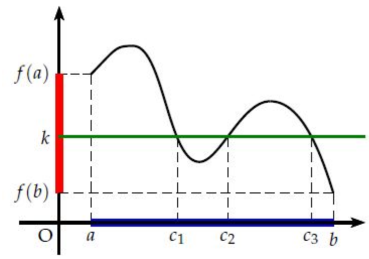
- ***Si :*** $f$ est continue en $a$ ***Alors :*** $f$ est définie en $a$ (réciproque fausse évidement)

### 4.1.6 Théorème des Valeurs Intermédiaires

***Théorème des Valeurs Intermédiaires :***

- ***Si :***
  $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$
  $f$ est continue

- ***Alors :***
  $\forall k$ entre $f(a)$ et $f(b)$ ,
  $\exists c \in [a, b]$ tq $f(c) = k$




Noter que le $c$ n'est pas forcément unique (dans le cas général)

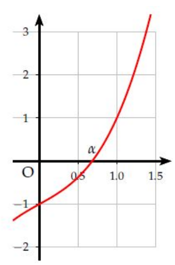
***Remarque, exemple :***

- dans le théorème, on n'écrit pas $k \in [f(a); f(b)\ ]$ car on ne sait pas qui est le plus grand ($f(a)$ ou $f(b)$)
- on n'a pas besoin de la continuité de $f$ pour arriver à la même conclusion :
  trouver 1 ex où $f$ n'est pas continue et tq $\forall k$ entre $f(a)$ et $f(b)$, $f(x) = k$ admet 1 solution sur $[a; b\ ]$
- par contre, l'hypothèse de continuité est obligatoire si on veut que le résultat soit toujours vrai
  trouver 1 contre-exemple

- ***Si*** $f$ est continue sur $[a; b\ ]$ et $f(a) \times f(b) < 0$

  ***Alors*** l'équation $f(x) = 0$ admet au moins 1 solution sur $[a; b\ ]$

  On verra des algorithmes de recherche de solution approchée : dichotomie, newton, ...




***TVI strictement monotone :*** unicité du $c$

| ***Si :*** | ***Alors :*** |
|---|---|
| $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ | $\forall k$ entre $f(a)$ et $f(b)$ , |
| $f$ est continue | $\exists!\ c \in [a, b]$ tq $f(c) = k$ |
| $f$ strictement monotone | |

***Méthode de Dichotomie :*** Résoudre de façon approchée $f(x) = 0$

- $f(x) = x^3 + x + 1$ admet 1 seule solution sur $\mathbb{R}$
  ceci peut être prouver grâce au TVI
  elle est comprise entre 0 et 1
  (voir graphique ci-dessus)
- on peut appliquer l'algorithme de dichotomie pour obtenir 1 valeur de la racine $\alpha$, à $10^{-p}$ près
- programmer cet algorithme sur votre calculatrice

```
Variables : A, B, C  réels
            P, N  entiers  f  fonction
Entrées et initialisation
  | Lire A, B, P
  | 0 → N
Traitement
  tant que B − A > 10^(−P) faire
    | (A + B)/2 → C
    | si f(A) × f(C) > 0 (*) alors
    |   | C → A
    | sinon
    |   | C → B
    | fin
    | N + 1 → N
  fin
Sorties : Afficher : A, B, N
```

## 4.2 Dérivée d'une fonction

### 4.2.1 Dérivée : de la définition aux formules classiques

***Définition :*** $a$ , $l \in \mathbb{R}$ et $f : I \mapsto \mathbb{R}$

- ***Si :*** $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = l$ ***Alors :*** $f$ est **dérivable** en $a$
- le **nombre dérivé** de $f$ en $a$ est $f'(a)$
- géométriquement, il représente la pente de la courbe de $f$ en $(a,f(a))$ (cad la pente de la tangente en ce point)
- plus généralement, on note $f'$ ou $f'(x)$ la **dérivée** de $f$ sur un intervalle $I$

***Exemple 1 :*** calcul de limite (rappel chap fonction)

- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$
- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x}$
- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan x}{x}$
- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x}$
- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(1+x)^n - 1}{x}$
- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$

***Exemple 2 :*** étude de la continuité et de la dérivabilité d'1 fonction

- $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x - 2 & si \quad x \leqslant 1 \\ \dfrac{x-4}{x} & si \quad x > 1 \end{cases}$
- étudier la continuité de f

- étudier la dérivabilité de f

***Exemple 3 :*** mais où sont pas les bonnes vieilles formules ... si simples à retenir !

- démontrer que $(x^2)' = 2x$

- démontrer que $(\sin x)' = \cos x$

- moralité : on garde les "formules" qui fonctionne quasiment tout le temps et on utilise le nombre dérivée pour les cas plus délicats ...

### 4.2.2 Les formules à connaître

| Fonction | $\mathscr{D}_f$ | Dérivée | $\mathscr{D}'_f$ |
|---|---|---|---|
| $f(x) = k$ | $\mathbb{R}$ | $f'(x) = 0$ | $\mathbb{R}$ |
| $f(x) = x$ | $\mathbb{R}$ | $f'(x) = 1$ | $\mathbb{R}$ |
| $f(x) = x^n \quad n \in \mathbb{N}^*$ | $\mathbb{R}$ | $f'(x) = nx^{n-1}$ | $\mathbb{R}$ |
| $f(x) = \dfrac{1}{x}$ | $\mathbb{R}^*$ | $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$ | $]-\infty;0[$ ou $]0;+\infty[$ |
| $f(x) = \dfrac{1}{x^n} \quad n \in \mathbb{N}^*$ | $\mathbb{R}^*$ | $f'(x) = -\dfrac{n}{x^{n+1}}$ | $]-\infty;0[$ ou $]0;+\infty[$ |
| $f(x) = \sqrt{x}$ | $[0;+\infty[$ | $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ | $]0;+\infty[$ |
| $f(x) = \sin x$ | $\mathbb{R}$ | $f'(x) = \cos x$ | $\mathbb{R}$ |
| $f(x) = \cos x$ | $\mathbb{R}$ | $f'(x) = -\sin x$ | $\mathbb{R}$ |

***Remarque, exemple :*** pour aller 1 peu plus loin ...

- $\boxed{(\tan x)' = 1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x} \text{ sur } \mathbb{R}\backslash\{\mathbb{Z}\dfrac{\pi}{2}\}}$

- $(e^x)' = e^x$ sur $\mathbb{R}$

- $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}^*{}_+$

| | |
|---|---|
| Dérivée de la somme | $(u+v)' = u' + v'$ |
| Dérivée du produit par un scalaire | $(ku)' = ku'$ |
| Dérivée du produit | $(uv)' = u'v + uv'$ |
| Dérivée de l'inverse | $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$ |
| Dérivée du quotient | $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ |
| Dérivée de la puissance | $(u^n)' = nu'u^{n-1}$ |
| Dérivée de la racine | $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$ |
| Dérivée autre | $[f(ax+b)]' = a \times f'(ax+b)$ |

***Remarque, exemple :***

- dérivée d'1 fonction composée : $\boxed{(fog)'(x) = f\,[g(x)] = f'\,[g(x)] \times g'(x)}$

  dérivée "grande - petite" égale "dérivée grande" appliquée à "petite" fois "dérivée petite"

- H.P. dérivée fonction réciproque : $\boxed{(f^{-1})'(y) = \dfrac{1}{f'\,[f^{-1}(y)]}}$ là où elle existe ... (preuve : dériver $fof^{-1}$)

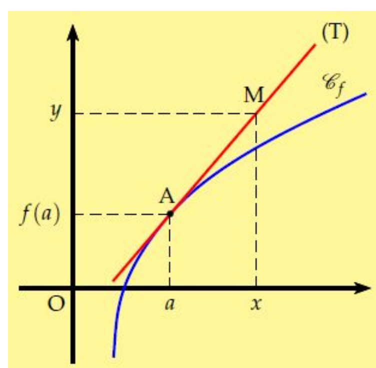
### 4.2.3 Interprétation - Application

***Propriété :***

- comme vu supra, le nombre dérivée représente la pente de la tangente en 1 point

- ***équation de la tangente à*** $f$ ***en*** $A(a, f(a))$ :
  $\boxed{y = f'(a)(x-a) + f(a)}$ (si elle existe)

- localement en $a$, on peut "approximer $f$" à cette droite : $\boxed{h \to 0\ ,\ f(a+h) \approx f(a) + hf'(a)}$




***Remarque, exemple :***

- ***ex 1 :*** valeur approchée de $\sqrt{4.03}$
  - on pose $f(x) = \sqrt{x}$ , $a = 4$ , $h = 0.03$
  - $f(4) = 2$ et $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow f'(4) = \dfrac{1}{4}$
  - donc $\sqrt{4.03} \approx 2 + 0.03 \times \dfrac{1}{4} = 2.0075$
  - la calculatrice nous donne 2.00786 ; nous sommes (sans calculatrice) déjà à $10^{-4}$ près !!
- ***ex 2 :*** énergie cinétique relativiste
  - en mécanique relativiste, la masse $m$ de vitesse $v$ est :
    $m = \dfrac{m_0}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}}$ où $c$ est la vitesse de la lumière et $m_0$ la masse du corps au repos (à l'arrêt)
  - l'énergie cinétique est alors : $E_c = (m - m_0)c^2 = m_0c^2(\dfrac{1}{\sqrt{1-x}} - 1)$ où $x = (\dfrac{v}{c})^2$ (le vérifier)

- quand $x$ est petit, c'est la mécanique classique avec Newton et sa "pomme" ; on voudrait alors retrouver la formule classique : $E_c = \frac{1}{2}m_0c^2$
- on vérifie facilement que : $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}} - 1$ est dérivable en 0 et $f'(x) = \frac{1}{2(1-x)\sqrt{1-x}}$
- on peut alors faire l'approximation affine en zéro : $f(x) \approx f(0) + f'(0) \times x = \frac{x}{2}$
- $\Rightarrow E_c \approx m_0c^2 \times \frac{x}{2} = \approx \frac{1}{2}m_0c^2 \times (\frac{v}{c})^2 = \frac{1}{2}m_0v^2$

### 4.2.4 Signe de la dérivée - Sens de Variation

***Propriété :*** soit $f : I \mapsto \mathbb{R}$ **dérivable** sur $I$ intervalle de $\mathbb{R}$

- ***Si*** $f'$ est nulle ***Alors*** $f$ est constante
- ***Si*** $f'$ est strictement positive (sauf en des points isolés) sur $I$ ***Alors*** $f$ est strictement croissante sur $I$
- ***Si*** $f'$ est strictement négative (sauf en des points isolés) sur $I$ ***Alors*** $f$ est strictement décroissante sur $I$
- **Étude des variations de $f$ $\Rightarrow$ Étude du signe de $f'$**

***Remarque, exemple :***

- ***ex :*** étudier les variations sur $\mathbb{R}$ de $f(x) = x^3 - 6x^2 + 1$
- en étudiant le signe de $f'$, on obtient (faites le!!) :

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $4$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $1$ | $\searrow$ | $-31$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

### 4.2.5 Dérivée et Extremum local

***Propriété :*** soit $f : I \mapsto \mathbb{R}$ **dérivable** sur $I$ intervalle de $\mathbb{R}$ et $a \in I$

- ***Si*** $f$ admet un extremum local en $a$ ***Alors*** $f'(a) = 0$
- ***Si*** $f'(a) = 0$ en changeant de signe ***Alors*** $f$ admet un extremum local en $a$

***Remarque, exemple :***

- ***stratégie :*** on cherchera donc les extremum local de $f$ parmi les zéros de la dérivée
- ***attention :*** chaque zéro de $f'$ n'est pas forcément un extremum de $f$ ; donner 1 exemple!!