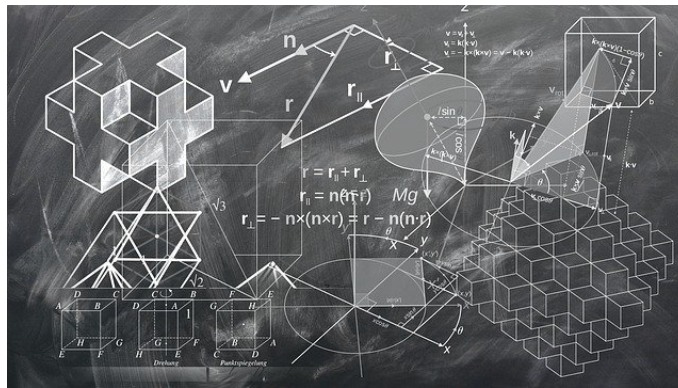


# Chapitre 8

## Produit Scalaire



The real world applications of the dot product

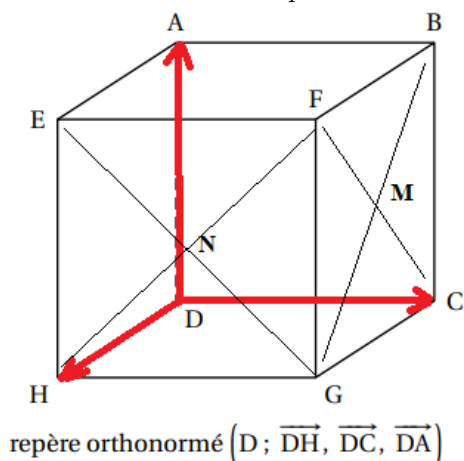
### 8.1 Vecteurs dans l'espace

#### Décomposition d'un vecteur dans l'espace

- Relation de Chasles (rappel) :  $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$
- Base : une base de l'espace est la donnée de 3 vecteurs linéairement indépendants
- Décomposition d'un vecteur dans une base : dans la base  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , le vecteur  $\vec{u}$  peut s'écrire (grâce à la relation de Chasles) de façon unique :  $\vec{u} = x.\vec{i} + y.\vec{j} + z.\vec{k}$
- Coordonnées d'un vecteur : le vecteur  $\vec{u}$  s'écrit donc  $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$
- Repère : un repère de l'espace est d'une base et d'un centre O ; on le note  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

Remarque, exemple :

- donner une base  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  signifie que :  $\vec{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  et  $\vec{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
- donner un repère  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  signifie en plus que  $O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
- donner les coordonnées des points N et M et des vecteurs  $\overrightarrow{NM}$  et  $\overrightarrow{HB}$  :



## 8.2 Définition - Propriété

Définition du Produit Scalaire (espace) :  $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$  2 vecteurs de l'espace

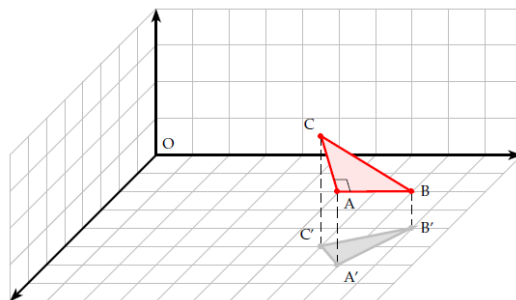
- Analytique :  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = xx' + yy' + zz'$
- Vectorielle (identité du parallélogramme) :  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$
- Géométrique :  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$

Remarque, exemple :

- vérifier que ces 3 définitions sont équivalentes
- vérifier que :  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2) = \frac{1}{2}(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2) = \frac{1}{4}(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2)$

- A  $\begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}$  et B  $\begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix}$  et C  $\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}$

- déterminer la mesure géométrique de  $\widehat{BAC}$
- on projette orthogonalement A, B, et C sur le plan  $z=0$  respectivement en A', B' et C'  
déterminer la mesure géométrique  $\widehat{B'A'C'}$
- que constatez vous ?



- idée : on a vu dans l'exercice précédent que :  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow ABC \text{ est rectangle en A}$

**Propriété :**  $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$  3 vecteurs de l'espace et  $\lambda$  un réel

- **commutativité** :  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
- **distributivité** :  $\vec{u}(\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$
- **bilinéarité** :  $\lambda(\vec{u} \cdot \vec{v}) = (\lambda\vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (\lambda\vec{v})$
- **Si**  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont de même direction et de même sens **Alors**  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|$
- **Si**  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont de même direction et de sens contraires **Alors**  $\vec{u} \cdot \vec{v} = -\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|$
- **orthogonalité** :  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont orthogonaux
- **une égalité très utile** :  $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$
- **propriété de  $\vec{0}$**  : c'est le seul vecteur orthogonal à lui-même :  $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2 = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$

**Remarque, exemple :**

- le vecteur nul  $\vec{0}$  est orthogonal à tous vecteurs ; c'est d'ailleurs le seul

- $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ \alpha \end{pmatrix}$  ; trouver  $\alpha$  pour que  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

- A  $\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$  et B  $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$  et la droite d définit par C  $\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$  et  $\vec{w} \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$   
mq (AB) et d sont perpendiculaires

- A  $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ , B  $\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ , C  $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ , D  $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ , E  $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$   
Mq A, B, C ne sont pas alignés et que  $\overrightarrow{DE}$  est normal au plan (ABC)

### 8.3 Vecteur, droite et plan dans l'espace

**Propriété :** dans le repère  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , soit A  $\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix}$  et B  $\begin{pmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \end{pmatrix}$  et  $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix}$

- **coordonnées du vecteur  $\overrightarrow{AB}$**  :  $\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$
- **équation de la droite** passant par A et dirigée par le vecteur  $\vec{u}$  :  $\begin{cases} x = x_A + k.a \\ y = y_A + k.b \\ z = z_A + k.c \end{cases}$
- **équation du plan** passant par A et dirigée par  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  :  $\begin{cases} x = x_A + k.a + k'.d \\ y = y_A + k.b + k'.e \\ z = z_A + k.c + k'.f \end{cases}$

## 8.4 Équation cartésienne d'un plan

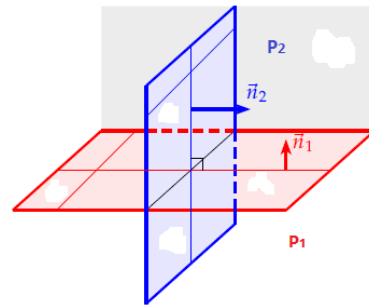
### Définition - Propriété :

- vecteur normal à un plan :  $\vec{n}$  est normal à  $\mathcal{P}$  si toute droite dirigée par  $\vec{n}$  est orthogonale à  $\mathcal{P}$
  - l'équation du plan  $\mathcal{P}$  passant par A et normal à  $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$  est par :  $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$  où  $M \in \mathcal{P}$
- équation analytique d'un plan : ceci donne 1 équation de la forme :  $ax + by + cz + d = 0$

- droite orthogonale à un plan :

1 droite  $\Delta$  est orthogonale à 1 plan  $\mathcal{P} \Leftrightarrow \exists d_1, d_2$  sécantes de  $\mathcal{P}$  orthogonales à  $\Delta$

- soient 2 plans  $\mathcal{P}_1$  de vecteur normal  $\vec{n}_1$  et  $\mathcal{P}_2$  de vecteur normal  $\vec{n}_2$  :  $\mathcal{P}_1 \perp \mathcal{P}_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \perp \vec{n}_2$



### Remarque, exemple :

- Preuve 2 :

- $\Rightarrow$  Si  $\Delta \perp \mathcal{P}$  Alors  $\Delta$  est orthogonale à toutes droites de  $\mathcal{P}$
- $\Leftarrow$  Si  $d_1$  et  $d_2$  sécantes de  $\mathcal{P}$  sont orthogonales à  $\Delta$
- Alors soit  $\vec{n}$  la direction de  $\Delta$ ,  $\vec{u}_1$  la direction de  $d_1$  et  $\vec{u}_2$  la direction de  $d_2$
- par définition, on a :  $\vec{n} \perp \vec{u}_1$  et  $\vec{n} \perp \vec{u}_2$
- $d_1$  et  $d_2$  sont sécantes  $\Rightarrow \vec{u}_1$  et  $\vec{u}_2$  sont non colinéaires (on dit "libres")  
ils donnent la direction de  $\mathcal{P}$
- $\forall d \in \mathcal{P}$  de vecteur directeur  $\vec{u}$ ,  $\exists a, b \in \mathbb{R}$  tq  $a\vec{u}_1 + b\vec{u}_2 = \vec{u}$
- clairement,  $\vec{n} \cdot \vec{u} = \vec{n} \cdot (a\vec{u}_1 + b\vec{u}_2) = \vec{n} \cdot a\vec{u}_1 + \vec{n} \cdot b\vec{u}_2 = 0 \Rightarrow \vec{n} \perp \vec{u}$  et donc  $\Delta \perp d$

- **Ex 1** : déterminer l'équation de  $\mathcal{P}$  passant par  $A \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  et normal à  $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

- **Ex 2** : donner 1 équation de  $\mathcal{Q}$  parallèle à  $\mathcal{P}$  passant par  $A \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$

- **Ex 3** : déterminer l'équation du plan médiateur de A et B avec  $A \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$  et normal à  $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$