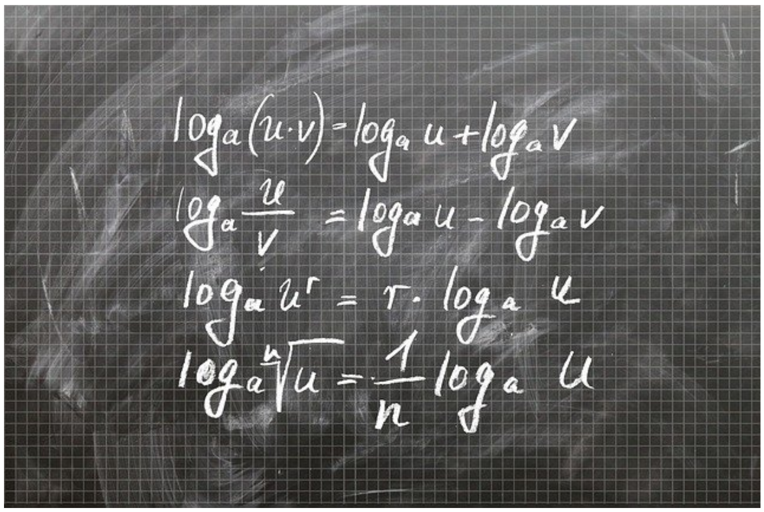
Chapitre 9

Fonction Logarithme Népérien



Dimensions bizarres - Magnifiques logarithmes - Loi de Benford
Fraud detection using Benford's Law (Python Code)

9.1 Définition et Représentation de $x \mapsto \ln x$

Définition :

- $x \mapsto e^x$ est 1 bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$
- on peut donc définir sa bijection réciproque de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$, notée $x \mapsto \ln x$
- par définition, on a : $\boxed{y = \ln x \Leftrightarrow x = e^y}$, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$ et $y \in \mathbb{R}$

Remarque, exemple :

- clairement, en réfléchissant avec $x \mapsto e^x$, on a : $\ln 1 = 0$ et $\ln e = 1$

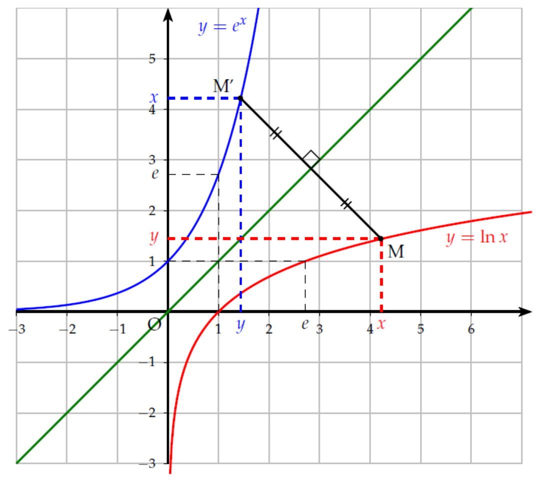
- un peu moins évident, mais tout aussi clair est : $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$
en effet, en posant $x = e^y$, on obtient par exemple :
$\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = \lim\limits_{e^y \to 0^+} \ln e^y = \lim\limits_{e^y \to 0^+} y = -\infty$, (la dernière affirmation grâce au graphe de $y \mapsto e^y$)

Représentation de $x \mapsto \ln x$:

- par définition, $x \mapsto \ln x$ et $x \mapsto e^x$ sont réciproques l'une de l'autre

- la représentation graphique de la fonction $x \mapsto \ln x$ est donc la même que celle $x \mapsto e^x$: il suffit de permuter les axes x et y

- bref, les 2 fonctions $x \mapsto \ln x$ et $x \mapsto e^x$ sont symétriques par rapport à la droite $y = x$



Propriété :

- $x \mapsto \ln x$ est strictement croissante
- $\forall\, a\ ,\ b \in \mathbb{R}_+^*$, on a :

  - $\ln a = \ln b \Leftrightarrow a = b$
  - $\ln a < \ln b \Leftrightarrow a < b$
  - $\ln a < 0 \Leftrightarrow a < 1$
  - $\ln a > 0 \Leftrightarrow a > 1$
  - $\ln a = 0 \Leftrightarrow a = 1$
  - $\ln a = 1 \Leftrightarrow a = e$

Remarque, exemple :

- Résoudre : $\ln(2 - 2x) = 1$

- Résoudre : $\ln(2x + 1) < -1$

9.2 Propriétés de $x \mapsto \ln x$

Proriété : $\forall a, b \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall n \in \mathbb{Z}$

- ***relation fonctionnelle*** : $\ln(ab) = \ln a + \ln b$
- $\ln \dfrac{a}{b} = \ln a - \ln b$
- $\ln(a^n) = n \ln a$
- $\ln \dfrac{1}{a} = -\ln a$
- $\ln \sqrt{a} = \dfrac{1}{2} \ln a$

Remarque, exemple :

- exprimer $\ln 200$ en fonction de $\ln 2$ et $\ln 5$

- Déterminer le plus petit entier n tq : $2^n > 10000$

- $\ln \sqrt{2x+3} = \ln(6-x) - \dfrac{1}{2}\ln x$

9.3 Étude de $x \mapsto \ln x$

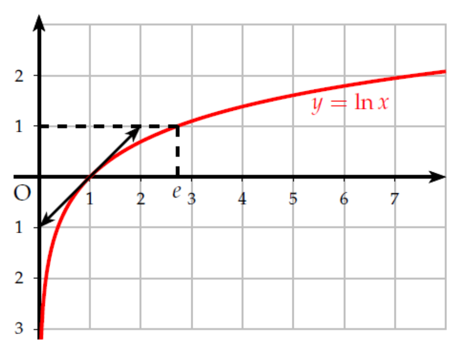
Propriété :

- ***Dérivée :*** $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\boxed{(\ln x)' = \dfrac{1}{x}}$
- comme vu en début de cours, $\boxed{\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty}$ et $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty}$
- ***Limite de référence :*** $\boxed{\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1}$
- ***Croissance comparée :*** $\boxed{\lim\limits_{x \to 0^+} x \ln x = 0}$ et $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0}$
- ***Dérivée d'1 fonction composée :*** $\boxed{(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}}$ où u est 1 fonction strictement positive

Remarque, exemple :

- il faut s'entraîner à démontrer ces différentes propriétés
- voici le tableau de variations de la fonction $x \mapsto \ln x$ ainsi que son graphe :

x	0	1	e	$+\infty$
$\dfrac{1}{x}$	||	$+$		
$\ln$	|| $-\infty$	0 ↗	1 ↗	$+\infty$



- étudier $f(x) = \ln(1 + x^2)$

- étudier $g(x) = x^2 - 4x - 4\ln x$

- (u_n) tq : $\forall n \leqslant 1$, $u_n = (1 + \dfrac{1}{n})^n$

    - mq $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = e$

    - mq (u_n) est croissante

    - que fait l'algorithme ci-dessous ? retrouver (en le programmant) les résultats affichés par Python

    - que pensez-vous de la vitesse de CV de la suite ?

```python
from math import *
u,k = 2,1
while abs(u-exp(1))>0.001:
  k+=1
  u=(1+1/k)**k
print("rang :",k)
print("U_n :",u)
```

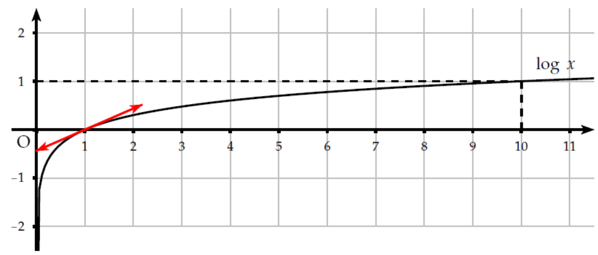
.

```
rang : 1359
U_n : 2.7172823988811725
```

9.4 Logarithme Décimal

Définition - Propriété :

- on appelle ***logarithme décimal*** la fonction :
  $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\boxed{\log x = \ln_{10} x = \dfrac{\ln x}{\ln 10}}$
- on dit aussi ***logarithme en base 10***
  très utile en physique / chimie
- comme $\ln 10 \simeq 2.3$, la courbe de $x \mapsto \log x$ est la même que celle de $x \mapsto \ln x$ en "écrasée"



Remarque, exemple :

- quel est le nombre de chiffre de 2017^{2017} ?

- une très belle application du logarithme décimal en probabilité est la loi de Benford (traité partie : simulation en TS) et que nous verrons en DM si nous en avons le temps ...

9.5 Applications en Physique et SVT de $x \mapsto \ln x$ et $x \mapsto \log x$

9.5.1 Acidité d'une solution

L'acidité d'une solution est mesurée par pH $= -\log[H_3O^+]$ où $[H_3O^+]$ est la concentration d'ions H_3O^+ en mol/L.

1. Quelle est la concentration $[H_3O^+]$ d'une solution neutre (pH $= 7$) ?
2. Comment varie le pH si la concentration $[H_3O^+]$ est multipliée par 10 ?
3. Dans 1 litre d'eau neutre, on dilue 1 cl de jus de citron (pH $= 2,3$). Calculer à la main une bonne approximation du pH de la citronnade.

8.18.

1. L'équation $7 = -\log[H_3O^+]$ donne $[H_3O^+] = 10^{-7}$.
2. Si pH $= -\log[H_3O^+]$ alors $\log(10.[H_3O^+]) = \log(10) + \log([H_3O^+]) = 1 + \text{pH}$.
3. La dilution est à peu près d'un facteur 100 et ainsi le pH est augmenté de 2. Le pH de la citronnade est donc environ de $4,3$.

9.5.2 Echelle de Richter - Séisme

La *magnitude* d'un séisme d'intensité I est mesurée sur l'*échelle ouverte de Richter* par $M = \log \dfrac{I}{I_0}$ où I_0 est une intensité de référence.

1. Calculer la magnitude des séismes suivants :
   (a) Annecy-le-Vieux 2013 : $I = 631.I_0$;
   (b) Saint-Jean-de-Maurienne 2010 : $I = 1,995.10^4.I_0$;
   (c) Californie 1992 : $I = 3,162.10^7.I_0$;
   (d) Sumatra 2004 : $I = 2,512.10^9.I_0$.
2. Comparer approximativement l'intensité du séisme de Saint-Jean avec celui de Sumatra.
3. De quel facteur d'intensité sont séparés deux séismes de différence de magnitude égale à 1 ?

8.19.

2. Le séisme de Sumatra est environ 100 000 fois plus intense que celui de Saint-Jean.

3. Si $M = \log \dfrac{I}{I_0}$ alors $\log \dfrac{10I}{I_0} = \log 10 + \log \dfrac{I}{I_0} = 1 + M$. Deux séismes de magnitude différentes de 1 ont des intensités séparées d'un facteur 10.

9.5.3 Magnitude d'1 Astre

La *magnitude apparente* d'un astre d'éclat E est définie à partir d'un éclat de référence E_0 par $M = \log_a\left(\frac{E}{E_0}\right)$. Par convention, la magnitude augmente de 5 lorsque l'éclat est divisé par 100.

1. Calculer $\ln a$.
2. Déterminer la magnitude apparente des astres suivants :
   (a) Soleil : $E = 4,8.10^{10}.E_0$;
   (b) Lune : $E = 1,2.10^5.E_0$;
   (c) Sirius : $E = 3,85.E_0$.

8.20. 1. On a $M = \log_a\left(\frac{E}{E_0}\right)$ et d'autre part $M + 5 = \log_a\left(\frac{E}{100E_0}\right) = \log_a\left(\frac{E}{E_0}\right) - \log_a 100$. Par différence, on en déduit $5 = -\log_a 100$ soit $5 = -\frac{\ln 100}{\ln a}$ puis $\ln a = -\frac{\ln 100}{5} \approx -0,921$.

2. Soleil : $M \approx -26,7$; Lune : $M \approx -12.7$; Sirius : $M \approx -1.5$.

9.5.4 Intensité Acoustique

Le niveau sonore en *décibels* (dB) d'un son d'intensité acoustique I est défini par $S = 10 \log \frac{I}{I_0}$ où I_0 est la plus petite intensité acoustique perceptible par l'oreille humaine.

1. Calculer les niveaux sonores correspondant :
   (a) au seuil d'audibilité : $I = I_0$;
   (b) à une salle de cours un vendredi avant les vacances : $I = 10^7.I_0$;
   (c) à un avion au décollage à 100 m : $I = 10^{13}.I_0$.
2. Des écouteurs de smartphone à la puissance maximale sont limités à 100 dB. Calculer alors le rapport $\frac{I}{I_0}$.
3. Quelle augmentation en décibels correspond à un doublement de l'intensité acoustique ?

8.21. 1. On trouve dans l'ordre 0 dB, 70 dB et 130 dB.

2. On a $100 = 10 \log \frac{I}{I_0}$ d'où $\frac{I}{I_0} = 10^{10}$.

3. On calcule : $10 \log \frac{2I}{I_0} = 10 \log 2 + S$. L'augmentation est de $10 \log 2 \approx 3$dB.