Devoir Surveillé - 2 h

Exercice 1 - *Suède ex2 - 2024* 10 points

Au cours d'une séance, un joueur de volley-ball s'entraîne à faire des services. La probabilité qu'il réussisse le premier service est égale à 0,85.

On suppose de plus que les deux conditions suivantes sont réalisées :

- si le joueur réussit un service, alors la probabilité qu'il réussisse le suivant est égale à 0,6 ;
- si le joueur ne réussit pas un service, alors la probabilité qu'il ne réussisse pas le suivant est égale à 0,6.

Pour tout entier naturel n non nul, on note R_n l'évènement « le joueur réussit le n-ième service » et $\overline{R_n}$ l'évènement contraire.

Partie A

On s'intéresse aux deux premiers services de l'entraînement.

1. Représenter la situation par un arbre pondéré.
2. Démontrer que la probabilité de l'évènement R_2 est égale à 0,57.
3. Sachant que le joueur a réussi le deuxième service, calculer la probabilité qu'il ait raté le premier.
4. Soit Z la variable aléatoire égale au nombre de services réussis au cours des deux premiers services.
   a. Déterminer la loi de probabilité de Z (on pourra utiliser l'arbre pondéré de la question 1).
   b. Calculer l'espérance mathématique $E(Z)$ de la variable aléatoire Z.
   Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Partie B

On s'intéresse maintenant au cas général.

Pour tout entier naturel n non nul, on note x_n la probabilité de l'évènement R_n.

1. a. Donner les probabilités conditionnelles $P_{R_n}(R_{n+1})$ et $P_{\overline{R_n}}(\overline{R_{n+1}})$.
   b. Montrer que, pour tout entier naturel non nul n, on a : $x_{n+1} = 0,2x_n + 0,4$.
2. Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par : $u_n = x_n - 0,5$.
   a. Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique.
   b. Déterminer l'expression de x_n en fonction de n. En déduire la limite de la suite (x_n).
   c. Interpréter cette limite dans le contexte de l'exercice.

Exercice 2 - *Amérique du Sud jour1 ex2 - 2024* 10 points

On dispose de deux urnes opaques U_1 et U_2.
L'urne U_1 contient 4 boules noires et 6 boules blanches.
L'urne U_2 contient 1 boule noire et 3 boules blanches.
On considère l'expérience aléatoire suivante :
On pioche au hasard une boule dans U_1 que l'on place dans U_2, puis on pioche au hasard une boule dans U_2.
On note :

- N_1 l'évènement « Piocher une boule noire dans l'urne U_1 ».
- N_2 l'évènement « Piocher une boule noire dans l'urne U_2 ».

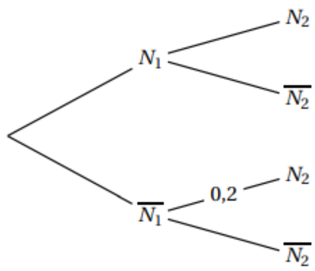
Pour tout évènement A, on note $\overline{A}$ son évènement contraire.

PARTIE A

1. On considère l'arbre de probabilités ci-contre.

a. Justifier que la probabilité de piocher une boule noire dans l'urne U_2 sachant qu'on a pioché une boule blanche dans l'urne U_1 est $0,2$.

b. Recopier et compléter l'arbre de probabilités ci-contre, en faisant apparaître sur chaque branche les probabilités des évènements concernés, sous forme décimale.



2. Calculer la probabilité de piocher une boule noire dans l'urne U_1 et une boule noire dans l'urne U_2.

3. Justifier que la probabilité de piocher une boule noire dans l'urne U_2 est égale à 0,28.

4. On a pioché une boule noire dans l'urne U_2
Calculer la probabilité d'avoir pioché une boule blanche dans l'urne U_1 . On donnera le résultat sous forme décimale arrondie à 10^{-2}.

PARTIE B

n désigne un entier naturel non nul.
L'expérience aléatoire précédente est répétée n fois de façon identique et indépendante, c'est-à-dire que les urnes U_1 et U_2 sont remises dans leur configuration initiale, avec respectivement 4 boules noires et 6 boules blanches dans l'urne U_1 et 1 boule noire et 3 boules blanches dans l'urne U_2, entre chaque expérience.
On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de fois où on pioche une boule noire dans l'urne U_2.
On rappelle que la probabilité de piocher une boule noire dans l'urne U_2 est égale à 0,28 et celle de piocher une boule blanche dans l'urne U_2 est égale à 0,72.

1. Déterminer la loi de probabilité suivie par X. Justifier votre réponse.

2. Déterminer par le calcul le plus petit entier naturel n tel que :

$$1 - 0,72^n \geqslant 0,9.$$

3. Interpréter le résultat précédent dans le contexte de l'expérience.

PARTIE C

Dans cette partie les urnes U_1 et U_2 sont remises dans leur configuration initiale, avec respectivement 4 boules noires et 6 boules blanches dans l'urne U_1 et 1 boule noire et 3 boules blanches dans l'urne U_2.

On considère la nouvelle expérience aléatoire suivante :
On pioche simultanément deux boules dans l'urne U_1 que l'on place dans l'urne U_2, puis on pioche au hasard une boule dans l'urne U_2.

1. Combien y a-t-il de tirages possibles de deux boules simultanément dans l'urne U_1 ?
2. Combien y a-t-il de tirages possibles de deux boules simultanément dans l'urne U_1 contenant exactement une boule blanche et une boule noire?
3. La probabilité de piocher une boule noire dans l'urne U_2 avec cette nouvelle expérience est- elle supérieure à la probabilité de tirer une boule noire dans l'urne U_2 avec l'expérience de la partie A? Justifier votre réponse.
   On pourra s'aider d'un arbre pondéré modélisant cette expérience.