BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SESSION 2025

MATHÉMATIQUES

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.
L'usage de la calculatrice sans mémoire, « type collège » est autorisé.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants.
Tous les exercices doivent être traités.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidates et les candidats sont invités à faire figurer sur leurs copies toute trace de recherche, même incomplète ou infructueuse.

Il comporte 6 pages et 4 exercices indépendants que vous pouvez traiter dans l'ordre que vous souhaitez.

Exercice 1 - *Géométrie dans l'espace* 4 points

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte.
Une réponse exacte rapporte un point. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point.
Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{i},\,\vec{j},\,\vec{k}\right)$.
On considère :

- La droite $\mathscr{D}$ passant par les points $A(1\,;\,1\,;\,-2)$ et $B(-1\,;\,3\,;\,2)$.
- La droite $\mathscr{D}'$ de représentation paramétrique : $\left\{\begin{array}{rcr} x &=& -4+3t \\ y &=& 6-3t \\ z &=& 8-6t \end{array}\right.$ avec $t \in \mathbb{R}$.

Question 1 : Parmi les points suivants, lequel appartient à la droite $\mathscr{D}'$?

a. $M_1(-1\,;\,3\,;\,-2)$ **b.** $M_2(11\,;\,-9\,;\,-22)$ **c.** $M_3(-7\,;\,9\,;\,2)$ **d.** $M_4(-2\,;\,3\,;\,4)$

Question 2 : Un vecteur directeur de la droite $\mathscr{D}'$ est :

a. $\overrightarrow{u_1}\begin{pmatrix}-4\\6\\8\end{pmatrix}$ **b.** $\overrightarrow{u_2}\begin{pmatrix}3\\3\\6\end{pmatrix}$ **c.** $\overrightarrow{u_3}\begin{pmatrix}3\\-3\\-6\end{pmatrix}$ **d.** $\overrightarrow{u_4}\begin{pmatrix}-1\\3\\2\end{pmatrix}$

Question 3 : Les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont :

a. sécantes **b.** strictement parallèles **c.** non coplanaires **d.** confondues

Question 4 : la droite (AB) n'est pas parallèle à quelle direction de plan ?

a. $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2})$ **b.** $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_3})$ **c.** $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_4})$ **d.** $(\overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3})$

Exercice 2 - *Probabilités* 6 points

Les résultats seront arrondis si besoin à 10^{-4} près

Une étude statistique réalisée dans une entreprise fournit les informations suivantes :

- 48 % des salariés sont des femmes. Parmi elles, 16,5 % exercent une profession de cadre ;
- 52 % des salariés sont des hommes. Parmi eux, 21,5 % exercent une profession de cadre.

On choisit une personne au hasard parmi les salariés. On considère les évènements suivants :

- F : « la personne choisie est une femme » ;
- C : « la personne choisie exerce une profession de cadre ».

1. Représenter la situation par un arbre pondéré.
2. Calculer la probabilité que la personne choisie soit une femme qui exerce une profession de cadre.
3. a. Démontrer que la probabilité que la personne choisie exerce une profession de cadre est égale à $0,191$.

   b. Les évènements F et C sont-ils indépendants ? Justifier.

4. Calculer la probabilité de F sachant C, notée $P_C(F)$. Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.
5. On choisit au hasard un échantillon de 15 salariés. Le grand nombre de salariés dans l'entreprise permet d'assimiler ce choix à un tirage avec remise.

   On note X la variable aléatoire donnant le nombre de cadres au sein de l'échantillon de 15 salariés.

   On rappelle que la probabilité qu'un salarié choisi au hasard soit un cadre est égale à $0,191$.

   a. Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

   b. Calculer la probabilité que l'échantillon contienne au plus 1 cadre.

   c. Déterminer l'espérance de la variable aléatoire X.

6. Soit n un entier naturel.

   On considère dans cette question un échantillon de n salariés.

   Quelle doit être la valeur minimale de n pour que la probabilité qu'il y ait au moins un cadre au sein de l'échantillon soit supérieure ou égale à $0,99$?

Exercice 3 - *Suites* 5 points

Au début de l'année 2021, une colonie d'oiseaux comptait 40 individus. L'observation conduit à modéliser l'évolution de la population par la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} u_0 &= 40 \\ u_{n+1} &= 0,008u_n(200-u_n) \end{cases}$$

où u_n désigne le nombre d'individus au début de l'année $(2021+n)$.

1. Donner une estimation, selon ce modèle, du nombre d'oiseaux dans la colonie au début de l'année 2022.

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;\,100]$ par $f(x) = 0,008x(200-x)$.

2. Résoudre dans l'intervalle $[0\,;\,100]$ l'équation $f(x) = x$.

3. **a.** Démontrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $[0\,;\,100]$ et dresser son tableau de variations.

b. En remarquant que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$ démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n :

$$0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 100.$$

c. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

d. Déterminer la limite ℓ de la suite (u_n). Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

4. On considère l'algorithme suivant :

```
def seuil(p) :
    n=0
    u = 40
    while u < p :
        n =n+1
        u = 0.008*u*(200-u)
    return(n+2021)
```

L'exécution de seuil(100) ne renvoie aucune valeur. Expliquer pourquoi à l'aide de la question 3.

Exercice 4 - *Fonctions* 5 points

On considère la fonction f définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = x\,\mathrm{e}^{-x}.$$

On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé du plan.
On admet que f est deux fois dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$.
On note f' sa dérivée et f'' sa dérivée seconde.

1. En remarquant que pour tout x dans $[0\,;\,+\infty[$, on a

$$f(x) = \frac{x}{\mathrm{e}^{x}}.$$

démontrer que la courbe $\mathscr{C}_f$ possède une asymptote en $+\infty$ dont on donnera une équation.

2. Démontrer que pour tout réel x appartenant à $[0\,;\,+\infty[$:

$$f'(x) = (1-x)\,\mathrm{e}^{-x}.$$

3. Dresser le tableau de variations de f sur $[0\,;\,+\infty[$, sur lequel on fera figurer les valeurs aux bornes ainsi que la valeur exacte de l'extremum.
4. Déterminer, sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$, le nombre de solutions de l'équation

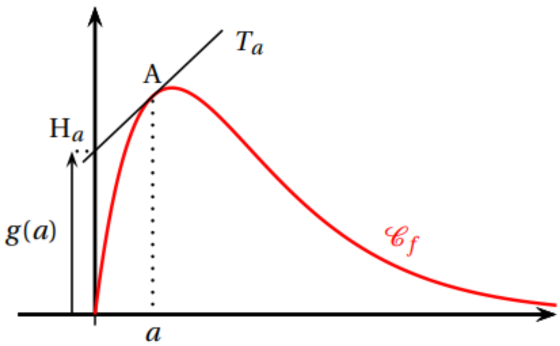
$$f(x) = \frac{367}{1\,000}.$$

5. On admet que pour tout x appartenant à $[0\,;\,+\infty[$:

$$f''(x) = \mathrm{e}^{-x}(x-2).$$

Étudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.

6. Soit a un réel appartenant à $[0\,;\,+\infty[$ et A le point de la courbe $\mathscr{C}_f$ d'abscisse a.
On note T_a la tangente à $\mathscr{C}_f$ en A.
On note H_a le point d'intersection de la droite T_a et de l'axe des ordonnées.
On note $g(a)$ l'ordonnée de H_a.
La situation est représentée sur la figure ci-contre.



a. Démontrer qu'une équation réduite de la tangente T_a est :

$$y = \left[(1-a)\,\mathrm{e}^{-a}\right] x + a^2\,\mathrm{e}^{-a}.$$

b. En déduire l'expression de $g(a)$.

c. Démontrer que $g(a)$ est maximum lorsque A est un point d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}_f$.

Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses, seront valorisées.