# Chapitre 3

# Rappel Probabilité
# Probabilité Conditionnelle
# Loi Binomiale



Distributions binomiales — Probabilités de probabilités, partie 1
Why "probability of 0" does not mean "impossible" — Probabilities of probabilities, part 2

En probabilité, les premières définitions et propriétés sont assez nombreuses. Plus que dans d'autres chapitres, il vous faut fournir un petit travail de démarrage pour les assimiler correctement, sinon vous n'allez pas bien comprendre la suite ... Voici un petit résumé des classes de $3^{\text{ème}}$, $2^{\text{ème}}$ et $1^{\text{ère}}$.

## 3.1 Rappel Probabilité

### 3.1.1 Évènement

***Définition :***

- ***expérience aléatoire :*** on dit qu'1 expérience est aléatoire si elle vérifie les 2 conditions suivantes :
  - on peut déterminer, parfaitement et par avance, toutes les issues possibles
  - on ne peut prévoir, par avance, laquelle des issues sera réalisée
- ***univers :*** noté $\Omega$ en général, c'est l'ensemble formé de toutes les issues possibles de cette expérience
- ***évènement :*** une partie de l'univers
- ***évènement élémentaire :*** une partie de l'univers qui ne contient qu'1 seule issue
- ***évènement certain :*** c'est $\Omega$
- ***évènement impossible :*** c'est l'ensemble vide, noté $\varnothing$

***Remarque, exemple :***

- expérience aléatoire sera dorénavant noté E.A.
- $\Omega$ se lit oméga (lettre grecque)
- si on liste les éléments de l'univers, on les note entre accolades :
  $\Omega$ ={ 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 } pour 1 dé à 6 faces
- ***attention :*** lorsqu'on parle d'univers (sans préciser), on parle de l'univers de l'E.A. de départ ; il est très important de ne pas confondre cet univers et celui associé à une V.A. que l'on veut définir (je reviendrai sur ce point plus loin dans le cours)

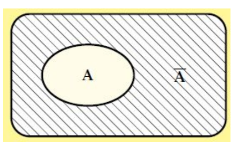
***Définition :*** $A$ et $B$ 2 évènements

- ***$A \cup B$ :*** est la réunion de A et de B, constituée des éléments de $\Omega$ qui sont dans $A$ ou $B$
- ***$A \cap B$ :*** est l'intersection de A et de B, constituée des éléments de $\Omega$ qui sont dans $A$ et $B$
- ***$\overline{A}$ :*** c'est le contraire de $A$, c'est-à-dire son complémentaire dans $\Omega$
- ***$A$ et $B$ sont incompatibles :*** lorsque $A \cap B = \varnothing$, c'est-à-dire lorsqu'ils sont disjoints

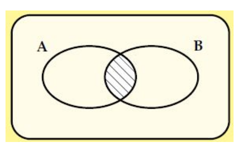
***Remarque, exemple :***

- il est très important de faire des petits dessins pour résumer la situation ; voici quelques cas :

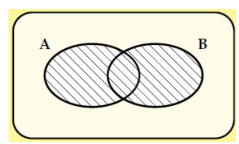
$A$ et $\overline{A}$




$A \cap B$




$A \cup B$




- $\overline{\overline{A}} = A$ et $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ (faire un dessin)

***Définition :***

- ***partition :*** l'ensemble d'évènements $\{A_k\}_k$ est 1 partition de l'évènement $B$ si :
  - chaque $A_k$ est non vide
  - les $A_k$ sont 2 à 2 incompatibles
  - la réunion des $A_k$ est égale à $B$
- l'ensemble des parties de $\Omega$ est noté $\mathscr{P}(\Omega)$

***Remarque, exemple :***

- $\mathscr{P}(\Omega)$ est beaucoup plus grand que $\Omega$ car c'est un ensemble d'ensembles ...
  Par exemple, si $\Omega = \{ 1 ; 2 \}$ alors $\mathscr{P}(\Omega) = \{ \varnothing ; \{ 1 \} ; \{ 2 \} ; \Omega \}$
  Chercher les parties de $\Omega = \{ 1 ; 2 ; 3 \}$

### 3.1.2 Probabilités

***Définition :***

- ***loi de probabilité ou probabilité :*** une probabilité sur un univers $\Omega$ est une fonction $\mathbb{P}$ : $\begin{array}{ccc} \mathscr{P}(\Omega) & \mapsto & [\ 0\,;1\ ] \\ A & \mapsto & \mathbb{P}(A) \end{array}$
  - $\mathbb{P}(\Omega) = 1$
  - ***Si*** A et B sont incompatibles ***Alors*** $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$

***Propriété :***
$e_1$, $e_2$, ... $e_n$ les $n$ évènements élémentaires de l'univers $\Omega$
$A$ et $B$ 2 évènements quelconques de $\Omega$

- $\mathbb{P}(e_1) + ... + \mathbb{P}(e_n) = 1$
- $\mathbb{P}(\varnothing) = 0$
- $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$
- $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$

***Exemple :***
On lance un dé truqué. Le 6 a 3 fois plus de chance que les autres faces de sortir.
On note $A$ l'évènement, le résultat est pair ; on note $B$ l'évènement, le résultat est divisible par 3.

- Calculer $\mathbb{P}(A)$ et $\mathbb{P}(B)$

- Calculer $\mathbb{P}(A \cap B)$ et $\mathbb{P}(A \cup B)$ de 2 façons différentes

***Définition :***

- ***loi équiprobable :*** c'est la loi où chaque élément élémentaire à la même probabilité d'apparition (équiprobabilité)
  **Si** $\Omega$ se décompose en $n$ évènements élémentaires **Alors** $\forall i \in [[1, n]]$ $\mathbb{P}(e_i) = \frac{1}{n}$

***Propriété :***

- $\mathbb{P}(A) = \dfrac{Nbre \quad Cas \quad Favorables}{Nbre \quad Cas \quad Possibles} = \dfrac{|A|}{|\Omega|}$ où $|A|$ est le cardinal de $A$, $|\Omega|$ celui de $\Omega$

***Exemple :***
1 urne contient 6 boules (4 rouges et 2 bleues) ; on tire simultanément et au hasard 2 boules et note le résultat
$A$ : on tire 2 boules rouges ; $B$ : on tire 2 boules de même couleur. Calculer $\mathbb{P}(A)$ et $\mathbb{P}(B)$

### 3.1.3 Variable Aléatoire

***Définition :***

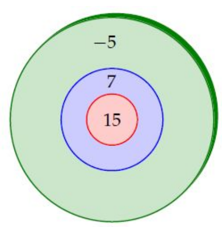
- ***V.A.R. (variable aléatoire réelle) sur 1 univers $\Omega$ :***
  on construit d'abord 1$^{ère}$ fonction X : $\begin{array}{ccc} \Omega & \mapsto & \mathbb{R} \\ e_i & \mapsto & x_i \end{array}$ $\quad \forall i$
- ***loi de probabilité d'1 VAR :***
  on construit une 2$^{ème}$ fonction $\mathbb{P}$ : $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \mapsto & [\ 0\,;1\ ] \\ x_i & \mapsto & \mathbb{P}(X = x_i) \end{array}$ $\quad \forall i \quad$ vérifiant $\sum_i \mathbb{P}(X = x_i) = 1$
- ***espérance de X :*** $\mathbb{E}(X) = \sum_i \mathbb{P}(X = x_i) \times x_i$
- ***variance de X :*** $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \sum_i \mathbb{P}(X = x_i) \times x_i^2 - \mathbb{E}(X)^2$
- ***écart type de X :*** $\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}(X)}$

***Remarque, exemple :***

- comprenez bien la "construction imbriquées" des 2 fonctions (la VAR et sa loi de probabilité) :

$$\begin{array}{ccccc} \underline{\textit{Univers}} & & \underline{\textit{Valeur}} & & \underline{\textit{Probabilité}} \\ \Omega & \mapsto & \mathbb{R} & \mapsto & [\ 0\,;1\ ] \\ e_i & \mapsto & x_i & \mapsto & \mathbb{P}(X = x_i) \end{array} \quad \forall i$$

- construire 1 VAR est 1 moyen simple de répondre à une question précise ; voici 2 exemples :
  - on lance un dé à 6 faces ; pour répondre à la question le résultat est-il pair, on peut créer une VAR X qui vaut 1 si le dé fait 2, 4 ou 6 et 0 sinon.
  - on considère la cible pour fléchettes, constituée de disques de rayons 5cm, 10cm et 20cm ; le joueur lance sa fléchette et atteint la cible (sinon il recommence sans pénalité) en un point aléatoire : il perd 5 ou remporte 7 ou 15.
    Le prix d'1 partie est 6,5€ ; est-il intéressant de jouer à ce jeu ?




  - grosso modo pour une VAR, l'espérance représente la "valeur potentielle moyenne" et la variance "la variation (au carrée) moyenne" autour de cette moyenne
  - ***HP - Chaîne de Markov bornée :*** au machine à sous, j'insère 1 pièce : j'en gagne 2 avec la probabilité $p$ et 0 avec la probabilité $1 - p$. Sachant que je démarre avec 20 pièces et que la partie s'arrête lorsque j'ai gagné 40 pièces ou bien tout perdu, calculer mes chances de gains et le temps moyen de durée de la partie dans les 2 cas suivants : p=0.5 et p=0.45 .
    On montre qu'en diminuant très légèrement mes chances de gains (0.45 contre 0.5, ce qui est autorisé par la loi pour que les casinos puissent gagner de l'argent), la durée moyenne d'une partie "biaisée" est presque aussi longue qu'une partie normale (75% d'une partie normale) mais que mes chances de gains s'effondrent de 50% (jeu équilibré) à 12% (jeu "biaisé) ; j'ai donc vraiment l'impression de jouer une partie longue et équilibrée alors qu'en réalité je n'ai quasiment aucune chance ...

***Propriété :*** X une VAR d'espérance $\mathbb{E}(X)$ et de variance $\mathbb{V}(X)$ ; $\forall\ a, b \in \mathbb{R}$ :

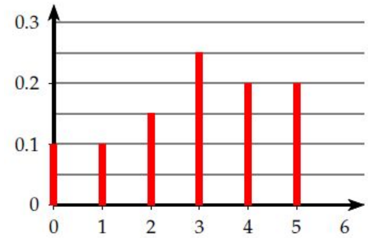
- $\mathbb{E}(aX + b) = a\mathbb{E}(X) + b$
- $\mathbb{V}(aX + b) = a^2\mathbb{V}(X)$

***Exemple :***

- 1 professionnel vend des fauteuils :
  sa commission est de 200 par fauteuil et ses frais fixes par jour de 280

  X la VAR associée au nombre de fauteuils vendus par jour (loi de probabilité ci-contre)
  Y la VAR associée au gain journalier
  1/ exprimer Y en fonction de X
  2/ quelle est la probabilité que le vendeur soit en déficit sur 1 journée ?
  3/ quel gain moyen peut-il espérer ?




## 3.2 Probabilité Conditionnelle

### 3.2.1 Définition

***Définition :*** A et B 2 évènements avec $\mathbb{P}(B) \neq 0$

- ***probabilité conditionnelle :*** la probabilité de A sachant B est $\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$

***Remarque, exemple :***

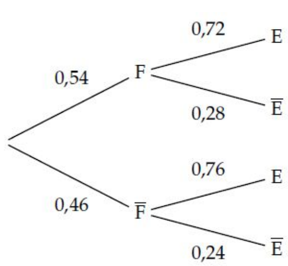
- $\mathbb{P}_B(A)$ répond à la question : combien A a-t-il de chance de se réaliser si B se réalise ? (donc B s'est réalisé et on regarde la probabilité que A se réalise dans ce cas ...)
- ***ex :*** si en lançant, je fais 6, quelle est la probabilité que je fasse 6 en relançant le dé ? (réponse $\frac{1}{6}$) ce qui n'a rien à voir avec la question : quelle est la probabilité que je fasse 6 puis 6 en lançant 2 fois 1 dé ? (réponse $\frac{1}{36}$)
- il y a 2 notations principales : $\mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A|B)$ ; vous pouvez utiliser celle que vous préférer
- si $\mathbb{P}(A) \neq 0$ et $\mathbb{P}(B) \neq 0$, par symétrie, on a immédiatement la propriété suivante (très utilisée dans les exercices : $\boxed{\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}_B(A) \times \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}_A(B) \times \mathbb{P}(A)}$
- la notion de probabilité conditionnelle est intimement liée à la ***représentation par arbre pondéré***, 1 outil simple et très puissant, que nous allons découvrir maintenant

### 3.2.2 Représentation par Arbre Pondérée

On dit souvent : 1 dessin vaut mieux qu'1 long discours. C'est précisément la force de cet outil. On commence par construire l'arbre pondéré ; pour répondre aux questions, il suffit ensuite de lire l'arbre. Voici 2 exemples.

***Exemple 1 :***

- dans un lycée, 54% des élèves sont des filles, dont 72% sont externes. De plus, 76% des garçons sont externes ; on choisit un élève au hasard : F = élève choisi est 1 fille   E = élève choisi est externe
- questions :
  - 1/ construire l'arbre pondéré
  - 2/ quelle est la probabilité de choisir une fille externe ?
  - 3/ quelle est la probabilité de choisir un élève externe ?
- réponses :




- 2/ $\mathbb{P}(F \cap E) = \mathbb{P}_F(E) \times \mathbb{P}(F)$
  $= 0.54 \times 0.72 = 0.3888$
- 3/ $\mathbb{P}(E) = \mathbb{P}(E \cap F) + \mathbb{P}(E \cap G)$
  $= 0.54 \times 0.72 + 0.46 \times 0.76 = 0.7384$

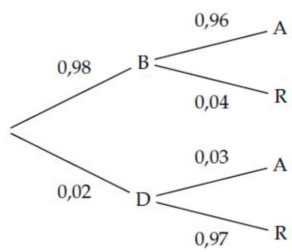
 

***Exemple 2 :***

- dans un atelier, il y a 2% de pièces défectueuses ; on éffectue un test pour savoir si on doit accepter ou refuser 1 pièce
  on a observé que, si la pièce est bonne, elle est acceptée par ce test à 96% et que si la pièce est défectueuse, elle est refusée par ce test à 97%

- question : quel est le % de retour client (pièce défectueuse non détectée par le test) ?

- réponse : B = pièce bonne D = pièce défectueuse A = pièce acceptée R = pièce refusée




$\mathbb{P}(D \cap A) = \mathbb{P}_D(A) \times \mathbb{P}(D)$
$= 0.02 \times 0.03 = 0.0006 = 0.06\%$

***Théorème des probabilités totales :***

***Si :*** $A_1$ ... $A_n$ est une partition de l'univers $\Omega$

***Alors :*** pour tout évènement $B$, on a : $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A_1 \cap B) + ... + \mathbb{P}(A_n \cap B) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i \cap B)$

***Remarque, exemple :***

- la loi des probabilités totales s'applique à chaque "noeud" de l'arbre pondéré (vérifiez le !)

- souvent (voir ex ci-dessus), la partition choisie concerne un évènement et son contraire ($A$ et $\overline{A}$), ce qui donne une analyse de type "succès-échec" (simple et efficace pour analyser beaucoup de problèmes)

- 1 candidat doit répondre à 1 question pour laquelle on lui fournit 4 réponses possibles dont 1 seule est la bonne. Le candidat connaît $\frac{3}{4}$ des réponses mais peut aussi répondre au hasard s'il ne connaît pas la réponse. Quelle est la probabilité que le candidat connaisse la bonne réponse sachant qu'il a bien répondu ? (réponse : 92%)

### 3.2.3 Évènements Indépendants

***Définition :***

- ***évènements indépendants :*** 2 évènements A et B sont indépendants si $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$ ou si $\mathbb{P}(B) \neq 0$ et $\mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A)$

***Remarque, exemple :***

- $A$ et $B$ sont indépendants si la réalisation de $A$ n'a aucun impact sur la réalisation de $B$ et vice-versa

- ***ex :*** 1 association de 96 membres propose des activités à ses adhérents dont l'aviron et le badminton
  12 membres s'inscrivent pour l'aviron, 32 pour le badminton dont 4 aux 2
  $A$ = adhérent inscrit Aviron et $B$ = adhérent inscrit Badminton
  $A$ et $B$ sont-il indépendants ? que dire de $A$ et $\overline{B}$ ?

***Théorème - ROC :***

***Si :*** $A$ et $B$ sont indépendants ***Alors :*** $A$ et $\overline{B}$ aussi, $\overline{A}$ et $B$ aussi, $\overline{A}$ et $\overline{B}$ aussi

La preuve est basée sur la formule des probabilités totales. Voici celle de $\overline{A}$ et $B$, les autres sont identiques :

- $A$ et $\overline{A}$ forme une partition de l'univers $\Omega \Rightarrow (1) : \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(\overline{A} \cap B)$
- $A$ et $B$ sont indépendants $\Rightarrow (2) : \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$
- (1) et (2) $\Rightarrow \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(\overline{A} \cap B) \Rightarrow \mathbb{P}(\overline{A} \cap B) = (1 - \mathbb{P}(A)) \times \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(\overline{A}) \times \mathbb{P}(B)$
- $\Rightarrow \overline{A}$ et $B$ sont indépendants

***Remarque, exemple :***

- ***attention***, la notion d'indépendance dépend de la probabilité choisie ; par exemple :
  - on lance 1d4 équilibré ; A = { 1 ; 2 } et B = { 2 ; 3 } sont indépendants
  - si le dé est pipé (faces 1, 2, 3 et 4 associées aux proba $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{6}$ et $\frac{1}{2}$), A et B ne sont pas indépendants

## 3.3 Rappels Loi Binomiale

### 3.3.1 Loi Binomiale de paramètres $n$ et $p$

***Définition et propriété :***

- ***épreuve de Bernoulli :*** c'est 1 E.A. à 2 issues : succès (probabilité $p$) et échec (probabilité $1 - p$)
- ***schéma de Bernoulli d'ordre n :*** c'est 1 EA qui est la répétition de $n$ épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes
- ***$X$ = nombre de succès :*** associée à un schéma de Bernoulli, on définit $X$, la VAR précisant le nombre de succès de l'EA
- ***univers de $X$ :*** X($\Omega$) = { 0, 1, ..., $n$ }
- ***loi de $X$ :*** $\forall k \in \{0, 1, ..., \text{n}\}$, $\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} \times p^k \times (1-p)^{n-k}$ ***où*** $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$
- ***notation pour $X$ :*** X $\rightsquigarrow \mathscr{B}(n, p)$ qui se lit "X suit une loi binomiale de paramètres $n$ $p$"
- ***espérance*** $\mathbb{E}(X) = np$ ***variance*** $\mathbb{V}(X) = np(1-p)$ ***écart-type*** $\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$

***Remarque, exemple :***

- ***ex :*** on lance 10 fois un 1d6 ; calculer la probabilité d'obtenir exactement 4 six, puis la probabilité d'obtenir au moins 4 six.
- ***quelques propriétés :*** $\forall n, k$ tq $0 \leqslant k \leqslant n$
  - $\binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 1$
  - $\binom{n}{n-1} = \binom{n}{1} = n$
  - $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$
  - $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$ (important)
- ***triangle de Pascal :***

| $n$ \ $k$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | … |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | | | | | | | | |
| 1 | 1 | 1 | | | | | | | |
| 2 | 1 | 2 | 1 | | | | | | |
| 3 | 1 | 3 | 3 | 1 | | | | | |
| 4 | 1 | 4 | 6 | 4 | 1 | | | | |
| 5 | 1 | 5 | 10 | 10 | 5 | 1 | | | |
| 6 | 1 | 6 | 15 | 20 | 15 | 6 | 1 | | |
| 7 | 1 | 7 | 21 | 35 | 35 | 21 | 7 | 1 | |
| … | … | … | … | … | … | … | … | … | … |

On a pour les cases rouges :

$$\binom{4}{1} + \binom{4}{2} = \binom{5}{2}$$

ce qui donne $4 + 6 = 10$

***application :***

développer $(x+y)^4$ puis $(x-y)^3$

- ***ex :*** un professeur principal de TS estime que sa classe de 30 élèves mérite 90% de réussite au bac ; quelle est la probabilité que le taux de réussite soit supérieur ou égal à 95% (réponse 0.184)

Bien entendu, il ne peut s'agir de votre TS, puisque vous allez tous avoir votre bac haut la main ! ! ☺