Devoir Surveillé - 1 h

Exercice 1 - *suite* 15 points

En 2019, un propriétaire met en location un appartement pour un loyer mensuel de 260 €.
Il prévoit que ce loyer augmentera chaque année de 15 €.
On note u_0 le loyer mensuel, en euro, en 2020 et u_n le loyer mensuel, en euro, en $(2020+n)$. On a ainsi $u_0 = 260$.

1. **a.** Calculer u_1 et u_2 .

b. Le loyer de l'appartement sera-t-il supérieur à 300 € en 2023 ?

c. Donner la nature de la suite (u_n) et préciser sa raison.

Par ailleurs, cette personne perçoit en 2020 une rente mensuelle de 920 €.
Le montant en euro de sa rente mensuelle pour l'année $(2020+n)$ est modélisé par le terme de rang n de la suite géométrique (v_n) de premier terme $v_0 = 920$ et de raison $1,01$.

2. De quel pourcentage la rente mensuelle augmente-t-elle chaque année ?

3. On admet que pour tout entier n :

$$v_n = 920 \times 1,01^n$$

a. Déterminer le montant (à l'euro près) de la rente mensuelle en 2025.

b. En 2025, quel pourcentage représente le loyer par rapport à la rente mensuelle ?

Exercice 2 - *suite* 15 points

Au 1er janvier 2021, un étang contient 3 000 m^3 d'eau. La population de poissons ne peut survivre que s'il y a au moins 2 500 m^3 d'eau dans l'étang. Le maire de la commune sur laquelle se trouve cet étang a commandé une étude qui indique qu'en raison de la nature des sols, l'étang perd chaque année 5 % du volume d'eau qu'il avait en début d'année et est naturellement alimenté, au cours de chaque année, par 76 m^3 d'eau.

On modélise l'évolution du volume d'eau de cet étang par une suite u où u_n désigne la quantité d'eau, en mètre cube, contenue dans l'étang, le 1er janvier de l'année $2021+n$.
On a donc $u_0 = 3000$.

1. Montrer que $u_1 = 2926$.

2. Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} = 0,95u_n + 76$.

3. À l'aide d'un tableur, le maire de cette commune a calculé les huit premiers termes de la suite. Sur la capture d'écran ci-dessous, les valeurs affichées ont été arrondies à l'unité.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	n	0	1	2	3	4	5	6	7
2	u_n	3000	2926	2856	2789	2725	2665	2608	2554
3									

a. Quelle formule peut-on entrer dans la cellule C2 afin d'obtenir, par recopie vers la droite, les premiers termes de la suite u ?

b. La suite u est-elle une suite arithmétique ? géométrique ? Justifier.

4. À partir de quelle année la quantité d'eau dans l'étang devient insuffisante pour la subsistance des poissons de cet étang ? Expliquer la démarche utilisée.

Corrigé - 1 h

Exercice 3 - *suite* 15 points

1. **a.** $u_1 = 260 + 15 = 275$ et $u_2 = 275 + 15 = 290$.

   b. Le loyer en 2023 est donné par u_3 car $2020 + 3 = 2023$.
   Comme $u_3 = 290 + 15 = 305$, le loyer sera supérieur à 300 € en 2023.

   c. Comme on ajoute toujours le même nombre (15) pour passer d'un terme quelconque de la suite au suivant, (u_n) est une suite arithmétique de raison 15. On a pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = u_n + 15$$

2. La raison de la suite géométrique est 1,01.
   Quand on multiplie une quantité par par 1,01, on augmente la quantité de 1 %.

Coeff multiplicateur

On a la relation $CM = 1+T$ avec CM : coeff. multiplicateur et T : taux d'évolution.
On a donc aussi :

$$T = CM - 1 = 1,01 - 1 = 0,01$$

3. **a.** 2025 est l'année de rang 5 car $2020 + 5 = 2025$.
   Le montant de la rente mensuelle est donc donné par v_5.
   $v_5 = 920 \times 1,01^5 \simeq 967$
   En 2025, le montant de la rente mensuelle est d'environ 967 €.

   b. En 2025, le loyer est donné par u_5. Or, $u_3 = 305$, donc $u_4 = 305 + 15 = 320$ et $u_5 = 320 + 15 = 335$.
   En 2025, le montant du loyer sera de 335 €.
   $\dfrac{335}{967} \simeq 0,35$ soit 35 %.
   En 2025, le montant du loyer représente environ 35 % du montant de la rente.

Exercice 4 - *suite* 15 points

1. Comme l'étang perd 5 % de son volume, il perd donc $3000 \times 0,05 = 150$ m^3. Mais il est alimenté par 76 m^3.
Ainsi, $u_1 = 3000 - 150 + 76 = 2926$.

2. Diminuer une quantité de 5 %, revient à la multiplier par $0,95$.
Cela signifie qu'entre l'année $2021 + n$ et l'année suivante $2021 + (n + 1)$, le volume d'eau a été multiplié par $0,95$.
De plus tous les ans, l'étang est naturellement alimenté de 76 m^3 d'eau.
Comme u_{n+1} correspond au volume d'eau dans l'étang l'année $2021 + (n + 1)$, on a bien pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = 0,95u_n + 76$$

Coeff multiplicateur

On a la relation $CM = 1+T$ avec CM : coeff. multiplicateur et T : taux d'évolution.
On a donc :

$$CM = 1 - 0,05 = 0,95$$

3. a. La formule entrée en C2 est : $\boxed{\text{=B2*0,95+76}}$.

b. • La suite u n'est pas arithmétique car :

$$u_1 - u_0 = 2926 - 3000 = -74 \text{ et } u_2 - u_1 = 2856 - 2926 = -70.$$

Explications

Comme les différences ne sont pas égales, cela signifie qu'on ne passe pas d'un terme au suivant en ajoutant toujours le même nombre.

• La suite u n'est pas géométrique car :

$$\frac{u_1}{u_0} = \frac{2926}{3000} = \frac{1463}{1500} \text{ et } \frac{u_2}{u_1} = \frac{2856}{2926} = \frac{204}{209}.$$

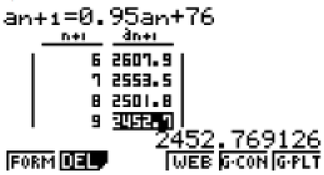
Explications

Comme les quotients ne sont pas égaux, cela signifie qu'on ne passe pas d'un terme au suivant en multipliant toujours le même nombre.

4. Pour déterminer à partir de quelle année la quantité d'eau sera insuffisante, il faut déterminer le plus petit entier n tel que :

$$u_n \geqslant 2500$$

On utilise la calculatrice (menu RECUR) pour répondre à cette question :



Conseil

Faites apparaître sur votre copie les valeurs de u_8 et u_9.

C'est donc à partir de l'année de rang 9 c'est-à-dire en $2021 + 9 = 2030$ que la quantité d'eau dans l'étang devient insuffisante.

Remarque

Comme la valeur de u_7 était déjà de 2554 on pouvait retrouver ce résultat en calculant les termes u_8 et u_9 à l'aide de la formule de récurrence.