Mathématiques_M2

ANALYSE AVANCÉE

JUNIA_CIR1

Année 2025 - 2026

Mathématiques_M2.1

Cours

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

JUNIA_CIR1

Année 2025 - 2026

SOMMAIRE

Préliminaires ____ 4
Syllabus JUNIA_M2 ____ 5
Agenda prévisionnel ____ 6
Introduction aux équations différentielles ____ 7
Équations différentielles linéaires du 1er ordre homogènes ____ 9
Équations différentielles linéaires du 1er ordre non homogènes ____ 12
Équations différentielles du second ordre homogènes ____ 15
Équations différentielles du second ordre non homogènes ____ 17

Préliminaires

Les **équations différentielles** sont des équations faisant intervenir une fonction inconnue et ses dérivées.

Elles apparaissent dès que l'on modélise un phénomène dynamique : l'évolution d'une population, la décroissance radioactive, l'oscillation d'un ressort, la charge d'un condensateur.

Leur étude consiste à déterminer les solutions, à analyser leur comportement et à interpréter leurs conséquences.

La maîtrise des méthodes de résolution classiques (séparation des variables, équations linéaires, équations du second ordre) constitue une base incontournable pour tout futur ingénieur.

Syllabus JUNIA_M2

1 Équations différentielles
1.1 Introduction . . . .
1.2 Équations différentielles linéaires à coefficients constants . . . .
1.2.1 Équations différentielles linéaires homogènes du I ordre . . . .
1.2.2 Équations différentielles linéaires à coefficients constants homogènes du I ordre
1.2.3 Équations différentielles linéaires non homogènes à coefficients constants du I ordre . . . .
1.2.4 Équations différentielles linéaires à coefficients constants du II ordre . . . . . .

Agenda prévisionnel

BRANCHE	SOUS-BRANCHE	SEANCE	Date	CONTENU
M2_ANALYSE AVANCEEE	Équations différentielles	SEANCE 01	07-nov	Introduction aux équations différentielles. Définitions – équations différentielles linéaires du 1er ordre.
		SEANCE 02	12-nov	Résolution des équations différentielles homogènes du 1er ordre. Applications. Équations différentielles non homogènes du 1er ordre (méthode de variation de la constante)
		SEANCE 03	14-nov	Équations différentielles du 2e ordre homogènes. Équations différentielles du 2e ordre non homogènes.
	Intégrales	SEANCE 04	19-nov	Intégrale d'une fonction en escalier. Intégrale de Riemann – définitions et exemples.
		SEANCE 05	21-nov	Propriétés de l'intégrale de Riemann. Primitives – définitions et exemples.
		SEANCE 06	26-nov	Techniques d'intégration (par parties, substitution). Sommes de Riemann et intégration numérique (trapèzes, Simpson).
	Limites et équivalents	SEANCE 07	28-nov	Limite finie – définitions et exemples. Limite infinie – définitions et exemples.
		SEANCE 08	03-déc	Limite à gauche, limite à droite, limites de fonctions composées. Opérations avec les limites. Formes indéterminées.
		SEANCE 09	05-déc	Théorème de la limite monotone – théorème des gendarmes. Continuité – définitions, prolongement par continuité.
		SEANCE 10	10-déc	Fonctions équivalentes – équivalents usuels. Opérations sur les équivalents, applications en physique.
	Développements limités	SEANCE 11	12-déc	Introduction et définitions. Rappel sur les limites. Formules de Taylor (reste intégral, reste de Lagrange, Taylor-Young).
		SEANCE 12	16-déc	Développements limités des fonctions usuelles à l'origine (exp, ln, sin, cos, etc.). Développements limités en un point quelconque. Opérations sur les DL.
		SEANCE 13	19-déc	Applications des DL : calcul de limites, approximation asymptotique, interprétation géométrique.
				Examen 08/01/2026

Introduction aux équations différentielles

1. Objectifs pédagogiques

- Comprendre ce qu'est une équation différentielle (ED).
- Découvrir quelques modèles concrets issus de la physique/ingénierie.
- Introduire les notations et premiers exemples simples.

3. Contenu de la séance

1. Définitions

Une équation différentielle (ED) est une équation reliant une fonction inconnue $y(t)$ et ses dérivées.

Ordre d'une ED = rang de la dérivée la plus élevée qui apparaît.

Exemples :

- $y'(t) = 2y(t)$ → ED du 1er ordre.
- $y''(t) + y(t) = 0$ → ED du 2ème ordre.

2. Exemples concrets

- Loi de refroidissement de Newton
  On suppose qu'un corps se refroidit dans un environnement à température constante Te.
  La loi dit : $dT/dt = -k(T(t) - Te)$, $k > 0$ → C'est une ED linéaire du 1er ordre.

- Croissance démographique (modèle de Malthus)
  $dy/dt = ky(t)$, $k>0$
  Solution attendue : $y(t) = y(0)e^{(kt)}$.

3. Étude guidée : $y'(t)=ky(t)$

- Méthode 1 : séparation des variables
  $dy/dt=ky \Rightarrow dy/y = k\,dt$
  Intégrons : $\ln|y| = kt + C \Rightarrow y(t) = Ce^{kt}$.

- Méthode 2 : test de solution
  Supposons $y(t) = Ae^{\lambda t}$.
  Alors $y'(t) = \lambda Ae^{\lambda t} \Rightarrow \lambda = k$.
  Donc solution $y(t) = Ae^{kt}$.

4. Exercices guidés

- Exercice 1 : Résoudre $y'(t) = -3y(t)$, $y(0) = 5$.
  Séparation des variables : $dy/y = -3dt \Rightarrow \ln|y| = -3t + C$.
  Donc $y(t) = Ce^{-3t}$. Avec $y(0) = 5 \Rightarrow C = 5$. Solution : $y(t) = 5e^{-3t}$.

- Exercice 2 : Vérifier que $y(t) = e^{2t}$ est solution de $y'(t) = 2y(t)$.
  On a $y'(t) = 2e^{2t}$ et $2y(t) = 2e^{2t}$. Identité vérifiée.

5. Mini-quiz (à résoudre en 5 min)

1. Quelle est la solution générale de $y'(t) = 4y(t)$?
2. Résoudre $y'(t) = -y(t)$, $y(0) = 2$.
3. Vérifier que $y(t) = \sin(t)$ est solution de $y''(t) + y(t) = 0$.

6. Synthèse

- Une ED relie une fonction et ses dérivées.
- L'ordre est le rang de la dérivée la plus élevée.
- Les ED simples du type $y'(t) = ky(t)$ donnent des solutions exponentielles.
- Applications directes : croissance, décroissance, température, radioactivité.

Équations différentielles linéaires du 1er ordre homogènes

1. Objectifs pédagogiques

- Savoir reconnaître une équation différentielle linéaire du premier ordre.
- Comprendre la méthode générale de résolution.
- Appliquer la théorie à des exemples concrets (physique/ingénierie).

2. Contenu de la séance

1. Définition

Une équation différentielle linéaire homogène du 1er ordre s'écrit sous la forme :
$y'(t) + a(t)y(t) = 0$, où $a(t)$ est une fonction donnée.

2. Résolution générale

On réécrit : $dy/dt = -a(t)y(t) \Rightarrow dy/y = -a(t)dt$.

En intégrant : $\ln|y(t)| = -\int a(t)dt + C$.

Donc : $y(t) = C\, e^{(-\int a(t)dt)}$.

3. Exemple simple

Résolvons : $y'(t) + 2y(t) = 0$, $y(0) = 3$.
- On écrit : $dy/y = -2\, dt$.
- Intégrons : $\ln|y| = -2t + C$.
- Donc $y(t) = C\, e^{-2t}$.

Avec $y(0) = 3 \Rightarrow C = 3$.

Solution : $y(t) = 3e^{-2t}$.

4. Exemple physique : décharge d'un condensateur

Un condensateur de capacité C se décharge à travers une résistance R.

La loi des mailles donne : $u'(t) + (1/RC)\, u(t) = 0$.

Solution : $u(t) = U_0\, e^{(-t/RC)}$, où U_0 est la tension initiale.

5. Exercices guidés

Exercice 1 : Résoudre $y'(t) + 5y(t) = 0$, $y(0)=2$.

- $dy/y = -5dt \Rightarrow \ln|y| = -5t + C$.
- Donc $y(t) = Ce^{-5t}$.

Avec $y(0)=2 \Rightarrow C=2$.

Solution : $y(t) = 2e^{-5t}$.

Exercice 2 : Résoudre $y'(t) + (1/t)y(t) = 0$, $t>0$.

- $dy/y = -(1/t)dt \Rightarrow \ln|y| = -\ln t + C$.
- Donc $y(t) = C/t$.

Solution générale : $y(t) = C/t$.

6. Mini-quiz (à résoudre en 5 min)

1. Résoudre $y'(t) + 3y(t) = 0$, $y(0)=1$.

2. Résoudre $y'(t) + (2/t)y(t) = 0$, $t>0$.

3. Vérifier que $y(t) = 1/t^2$ est solution de $y'(t) + (2/t)y(t) = 0$.

7. Synthèse

- Les ED homogènes du 1er ordre s'écrivent $y'(t) + a(t)y(t) = 0$.
- La solution générale est $y(t) = Ce^{(-\int a(t)dt)}$.

- Pour a(t) constant, on obtient des solutions exponentielles décroissantes.
- Applications directes : phénomènes de décroissance (radioactivité, décharge d'un condensateur, refroidissement).

Équations différentielles linéaires du 1er ordre non homogènes

1. Objectifs pédagogiques

- Comprendre ce qu'est une équation différentielle linéaire non homogène.
- Maîtriser la méthode générale de résolution : solution générale = solution homogène + solution particulière.
- Découvrir la méthode de la variation de la constante.
- Résoudre des exemples concrets issus de la physique et de l'ingénierie.

2. Contenu de la séance

Définition

Une équation différentielle linéaire du 1er ordre non homogène s'écrit :
$y'(t) + a(t)y(t) = b(t)$, où $a(t)$ et $b(t)$ sont des fonctions données.

Résolution générale

La solution est la somme : $y(t) = y_h(t) + y_p(t)$.
- $y_h(t)$: solution de l'équation homogène $y'(t) + a(t)y(t)=0$.
- $y_p(t)$: une solution particulière de l'équation complète.

Méthode de la variation de la constante

Pour trouver $y_p(t)$:
1. Résolvons d'abord $y'(t) + a(t)y(t) = 0 \rightarrow y_h(t) = C\, e^{(-\int a(t)dt)}$.
2. Remplaçons C par une fonction $C(t)$.
3. Substituons dans l'équation initiale et déterminons $C(t)$.

On obtient : $y(t) = e^{(-\int a(t)\,dt)}(\int b(t)e^{(\int a(t)\,dt)}\,dt + C)$.

3. Exemples

Exemple 1 : $y'(t) + 2y(t) = e^t$

- Homogène : $y_h = Ce^{(-2t)}$.

- Variation de la constante : $C'(t)=e^t\, e^{(2t)}=e^{(3t)}$.

- $C(t) = (1/3)e^{(3t)} + K$.

Donc : $y(t) = (1/3)e^t + K\, e^{(-2t)}$.

Exemple 2 : $y'(t) + y(t) = \sin t$

Solution : $y(t) = e^{(-t)}(\int e^t \sin t\, dt + C)$.

L'intégrale se fait par parties (détails en exercice).

4. Exercices guidés

- Résoudre $y'(t) + 5y(t) = t$.
- Résoudre $y'(t) + (2/t)y(t) = 1$, $t>0$.
- Vérifier que la solution trouvée satisfait l'équation initiale.

5. Mini-quiz (à résoudre en 5 min)

1. Résoudre $y'(t) + y(t) = e^{(-t)}$.

2. Résoudre $y'(t) + 3y(t) = t^2$.

3. Vérifier que $y(t) = e^{(-t)}(\cos t + \sin t)$ est solution de $y'(t) + y(t) = \cos t + 2\sin t$.

6. Synthèse

- Une ED non homogène = homogène + particulier.
- Méthode de variation de la constante : outil central.

- Savoir manipuler les exponentielles intégrantes.
- Étape suivante : ED du second ordre (séance 4).

Équations différentielles du second ordre homogènes

1. Objectifs pédagogiques

- Identifier une équation différentielle linéaire du second ordre.
- Comprendre et appliquer la méthode du polynôme caractéristique.
- Maîtriser la résolution pour les trois cas : racines réelles distinctes, doubles et complexes.
- Utiliser ces résultats dans des modèles d'ingénierie (oscillateur, circuit RLC simple).

2. Contenu de la séance

1. Cadre général

Équation différentielle linéaire à coefficients constants :
$y''(t) + ay'(t) + by(t) = 0$
Polynôme caractéristique associé : $r^2 + ar + b = 0$.
Principe : chercher des solutions de la forme $y(t) = e^{rt}$.

2. Étude des cas

1. Deux racines réelles distinctes $r_1 \neq r_2$: $y(t) = C_1 e^{(r_1 t)} + C_2 e^{(r_2 t)}$
Exemple : $y'' - 5y' + 6y = 0 \Rightarrow r=2,3 \Rightarrow y(t) = C_1 e^{(2t)} + C_2 e^{(3t)}$

2. Racines réelles égales $r_1 = r_2 = r$: $y(t) = (C_1 + C_2 t)e^{(rt)}$
Exemple : $y'' - 4y' + 4y = 0 \Rightarrow r=2 \Rightarrow y(t) = (C_1 + C_2 t)e^{(2t)}$

3. Racines complexes $r = \alpha \pm i\beta$: $y(t) = e^{(\alpha t)}(C_1 \cos \beta t + C_2 \sin \beta t)$
Exemple : $y'' + y = 0 \Rightarrow r=\pm i \Rightarrow y(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t$

Exercices guidés

- Exercice 1 : Résoudre $y'' - 3y' + 2y = 0$.
- Exercice 2 : Résoudre $y'' + 4y' + 4y = 0$.
- Exercice 3 : Résoudre $y'' + 4y = 0$.
- Corrections données en séance.

Mini-quiz (à résoudre en 5 min)

1. Trouver la solution générale de $y'' + 6y' + 9y = 0$.
2. Résoudre $y'' - y = 0$.
3. Écrire la solution générale de $y'' + 2y' + 5y = 0$.

3. Synthèse

- Étapes clés : polynôme caractéristique, racines, forme de la solution.
- Lien avec les phénomènes oscillatoires.
- Prochaine séance : second ordre non homogène.

Équations différentielles du second ordre non homogènes

1. Objectifs pédagogiques

- Rappeler la résolution des ED homogènes du second ordre.
- Découvrir les méthodes pour trouver une solution particulière : coefficients indéterminés et variation des constantes.
- Appliquer ces méthodes à des exemples concrets (oscillateur harmonique forcé, circuit RLC).
- S'entraîner avec des exercices et un mini-problème d'autonomie.

2. Contenu de la séance

1. Rappel sur les ED homogènes

La solution générale d'une ED du second ordre homogène : $y'' + ay' + by = 0$ se trouve en résolvant le polynôme caractéristique $r^2 + ar + b = 0$. La solution générale dépend des racines : réelles distinctes, doubles ou complexes.

2. Notion de solution particulière

Pour une ED non homogène : $y'' + ay' + by = f(t)$, la solution générale s'écrit : $y(t) = y_h(t) + y_p(t)$, où y_h est la solution générale de l'équation homogène associée, et y_p une solution particulière du problème complet.

3. Méthodes de recherche d'une solution particulière

*1. **Méthode des coefficients indéterminés** :*
• On suppose une forme pour $y_p(t)$ adaptée à $f(t)$ (polynôme, exponentielle, trigonométrique).

• Exemple : $y'' + y = \cos t$.
On cherche $y_p(t) = A \cos t + B \sin t$. En remplaçant, on détermine A et B.

*2. **Variation des constantes** :*
• Applicable pour toute fonction $f(t)$.
• Idée : rendre les constantes C_1, C_2 de la solution homogène variables : $C_1(t)$, $C_2(t)$.
• On obtient un système pour C_1', C_2' et on intègre.

4. Applications guidées

Exemple 1 : Résoudre $y'' + y = \cos t$.
Solution homogène : $y_h = C_1 \cos t + C_2 \sin t$.
Solution particulière : $y_p = (1/2)\, t \sin t$.
Solution générale : $y = C_1 \cos t + C_2 \sin t + (1/2)t \sin t$.

Exemple 2 : Résoudre $y'' + 4y' + 4y = e^{2t}$.
Solution homogène : $y_h = (C_1 + C_2 t)e^{-2t}$.
Solution particulière : $y_p = K e^{2t}$.
On détermine K en remplaçant.

Application : Oscillateur forcé : $y'' + \omega^2 y = F_0 \cos(\Omega t)$.
Résonance si $\Omega \approx \omega$.

5. Exercices guidés

Exercice 1 : Résoudre $y'' + y' = e^t$.
Exercice 2 : Résoudre $y'' + 9y = \sin(3t)$.
Exercice 3 : Résoudre $y'' - y = \cosh t$.
Corrections données en séance.

3. Mini-problème en autonomie (15 min)

Un circuit RLC série vérifie l'équation : $L\, y'' + R\, y' + (1/C)\, y = E_0 \cos(\omega t)$.
Données : L=1 H, R=4 Ω, C=0,25 F, E_0=10 V, ω=2 rad/s.

- Écrire l'équation normalisée.
- Trouver la solution homogène.
- Proposer une solution particulière.
- Discuter du régime forcé et de la résonance.

4. Synthèse

- Une ED non homogène = solution homogène + solution particulière.
- Méthodes clés : coefficients indéterminés, variation des constantes.
- Applications : oscillateur, circuits.
- Prochaine séance : équations d'ordre supérieur.