Алгоритм локальной стохастической волатильности

Мацион Никита

Москва, 2025

1 Входные параметры

Зададим следующие входные параметры алгоритма:

- N – количество траекторий
- $\{t_k\}_{k=0}^{M}$ – временная сетка, где $t_0 = 0$
- r – безрисковая процентная ставка
- Параметры модели Хестона для расчета стохастической волатильности
- σ_{dup} – Дюпировская волатильность
- $f_0 = e^{-rT} S_0$

2 Вычисление ширины ядра

На первом этапе вычисляется параметр $\sigma_{\text{VS},t}$ по формуле:

$$\sigma_{\text{VS},t}^2 \approx \frac{2e^{rt}}{t} \left[\sum_{i=1}^{N^{\text{puts}}} \frac{p_0\left(k_i^{\text{put}}\right)}{\left(k_i^{\text{put}}\right)^2} \Delta k_i^{\text{put}} + \sum_{i=1}^{N^{\text{calls}}} \frac{c_0\left(k_i^{\text{call}}\right)}{\left(k_i^{\text{call}}\right)^2} \Delta k_i^{\text{call}} \right] \tag{1}$$

где:

- p_0, c_0 – цены опционов put и call в момент времени $t = 0$ (с нормировкой на e^{-rt})
- $\Delta k_i^{\text{put}} = k_i^{\text{put}} - k_{i-1}^{\text{put}}$
- $\Delta k_i^{\text{call}} = k_i^{\text{call}} - k_{i-1}^{\text{call}}$

Затем вычисляется ширина ядра:

$$h_{t,N} = \kappa f_0 \sigma_{\text{VS},t} \sqrt{\max\left(t, \frac{1}{4}\right)} N^{-1/5} \tag{2}$$

где κ – подгоночный параметр (базовое значение $\kappa = 1.5$).

3 Замена меры

Используется следующая дельта-образующая последовательность:

$$\delta_{t,N}(x) = \frac{1}{h_{t,N}} K\left(\frac{x}{h_{t,N}}\right) \tag{3}$$

где $K(x)$ – ядерная функция, которая может быть:

- Плотностью стандартного нормального распределения $N(0,1)$
- Квадратическим ядром: $K(x) = \frac{15}{16}(1-x^2)^2 I(|x| \le 1)$

4 Алгоритм

0. Инициализация:

$$\sigma_N(t,f) = \frac{\sigma_{\mathrm{dup}}(t_0,f)}{\alpha} \quad \forall t \in [t_0,t_1], \quad \text{(базовое значение } \alpha = 1\text{)} \tag{4}$$

1. Выполнение шага по численной схеме (например, двойной метод Эйлера) для получения значений $(f_{t_k}^{i,N}, a_{t_k}^{i,N})$.

2. Вычисление волатильности:

$$\sigma_N(t_k,f) = \sigma_{\mathrm{dup}}(t_k,f)\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N \delta_{t_k,N}(f_{t_k}^{i,N} - f)}{\sum_{i=1}^N (a_{t_k}^{i,N})^2 \delta_{t_k,N}(f_{t_k}^{i,N} - f)}} \tag{5}$$

   Для $t \in [t_k, t_{k+1}]$ при фиксированном f полагаем $\sigma_N(t,f) = \sigma_N(t_k,f)$. Между узлами по f применяется кубическая сплайн-интерполяция.

3. Переход к следующему временному шагу t_{k+1} и повторение с шага 1.