基于代数基本定理的一道夏令营数学选拔赛题的解法分析

田彦武

(广东省深圳市南头中学,广东 深圳 518052)

在高中数学里,三次函数的零点问题是重要的知识点,也是同学们的一个难点,这类题通常会涉及多项式的因式分解、导数的应用及值域的求解等,尤其是很多要用到数学中的代数基本定理(任何一元 $n(n\in\mathbf{N}^*)$ 次复系数多项式方程 $f(x)=0$ 至少有一个复数根)(注:此定理及特殊的实系数一元三次方程根的情况,同学们可参考2019年版人教A版高中数学教材必修第二册习题7.2后面的“阅读与思考”栏目《代数基本定理》).2025年全国高中数学联赛浙江赛区夏令营选拔赛第7题,正是以三次函数恰有两个零点为条件,求系数组合 $b+c$ 的取值范围,其理论根据也正是代数基本定理.

1 题目呈现

题目 已知 $f(x)=x^3+bx^2+cx+1$ 恰有两个零点,则 $b+c$ 的取值范围为________.

试题分析 本题虽是一道填空题,但难度也不容小觑,主要考查同学们对函数零点性质、代数式的转化及函数单调性等知识的综合运用能力.下面我们就对这个题目做一个综合、全方位的分析.

要解决这个问题,我们得先弄明白一个关键的知识点:三次函数恰有两个不同实数零点时,它的根有什么特点?

(下转第31页)

(上接第29页)

能够减少变量,化繁为简,化陌生为熟悉,这恰是我们在解决新问题时应有的思维路径.

学弟学妹们,你们学会这一比值换元法了吗?不妨来尝试应用一下吧!

3 强化练习

练习1 (2020北大强基计划9)

使得 $5x+12\sqrt{xy}\leqslant a(x+y)$ 对所有正实数 x,y 都成立的实数 a 的最小值为( ).

(A)8　(B)9

(C)10　(D)前三个答案都不对

答案:(B).

练习2 (2020清华强基计划1)

若 $x^2+y^2\leqslant 1$,则 x^2+xy-y^2 的取值范围是( ).

(A) $\left[-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$　(B) $[-1,1]$

(C) $\left[-\frac{\sqrt{5}}{2},\frac{\sqrt{5}}{2}\right]$　(D) $[-2,2]$

答案:(C).

近年来,双变量最值问题在高考、模拟考试及强基试题中高频出现,逐渐成为解析几何、函数、不等式等考察的重点、难点.解决双变量最值问题最常用的方法是化双变量为单变量,而对于齐次的双变量表达式,比值换元则是将其转化的一大利器.

我对比值换元法的认识来源于不经意的尝试,加深于多次考试的应用;在其中我不断感受着思考的乐趣.希望学弟学妹们也能体会到这一方法的奇妙,并在日常的学习中多尝试,善迁移,迸发思维的火花,体悟数学的魅力!

(责审 张思明)

(上接第30页)

我们可以这样想,三次函数在复数域上有三个根(计入重根).如果它是实系数多项式,那么虚根必然会成对出现,即成对的虚根互为共轭复数.要是存在虚根,那虚根和它的共轭虚根就已经是两个根了,再加上一个实根,就会有三个不同的根,这和"恰有两个不同实数零点"不符.所以,所有根都只能是实根.那三个实根怎么会只有两个不同的零点呢?显然,其中必然有一个根是二重根,另一个是单根,而且这两个根不相等.也就是说,三次函数恰有两个不同实数零点,等价于它存在一个二重实根和一个异于该重根的单实根.这个结论正是我们解决上述三次函数零点问题的重要基础.

2 解法分析

方法1 因式分解法

根据事实,三次函数 $f(x)$ 恰有两个零点等价于对应的方程 $f(x)=0$ 存在一个二重根和一个不同于该重根的单实根.不妨设重根为 r,单根为 s,且 $r\neq s$,则

$f(x)=(x-r)^2(x-s)$,

展开整理得 $f(x)=x^3-(2r+s)x^2+(r^2+2rs)x-r^2s$,

与原函数对比系数得

$b=-(2r+s),c=r^2+2rs,-r^2s=1$,

由第三式得 $s=-\dfrac{1}{r^2}$, $r\neq 0$,

所以 $b+c=-(2r+s)+(r^2+2rs)=r^2-s-2r+2rs=r^2+\dfrac{1}{r^2}-2r-\dfrac{2}{r}=\left(r+\dfrac{1}{r}\right)^2-2\left(r+\dfrac{1}{r}\right)-2$.

令 $t=r+\dfrac{1}{r}$,

则 $\left(r+\dfrac{1}{r}\right)^2=t^2$,

即 $r^2+\dfrac{1}{r^2}=t^2-2$.

又 $r^2+\dfrac{1}{r^2}\geqslant 2$,

所以 $t^2-2\geqslant 2$,

即 $t^2\geqslant 4$,从而 $t\geqslant 2$ 或 $t\leqslant -2$,

此时 $b+c=g(t)=t^2-2t-2=(t-1)^2-3$,其图象是开口向上的抛物线,对称轴为 $t=1$.

易知 $g(t)$ 在 $(-\infty,-2]$ 上单调递减,在 $[2,+\infty)$ 上单调递增,

即当 $t\leqslant -2$ 时, $g(t)\geqslant g(-2)=6$;

当 $t\geqslant 2$ 时, $g(t)\geqslant g(2)=-2$.

综上得,$b+c\geqslant -2$,即 $b+c$ 的取值范围为 $[-2,+\infty)$.

说明 (1)对 $b+c=r^2+\dfrac{1}{r^2}-2r-\dfrac{2}{r}$,也可直接通过求导分析如下:

令 $h(r)=r^2+\dfrac{1}{r^2}-2r-\dfrac{2}{r}$,则

$$h'(r)=2r-\frac{2}{r^3}-2+\frac{2}{r^2}$$
$$=\frac{2(r^4-r^3+r-1)}{r^3}$$
$$=\frac{2(r-1)(r+1)(r^2-r+1)}{r^3},$$

注意到 $r^2-r+1>0$ 恒成立,令 $h'(r)=0$ 得 $r=-1$ 或 $r=1$.

当 $r\in(-\infty,-1)$ 时,$h'(r)<0$,即 $h(r)$ 在 $(-\infty,-1)$ 上单调递减;

当 $r\in(-1,0)$ 时,$h'(r)>0$,即 $h(r)$ 在 $(-1,0)$ 上单调递增;

当 $r\in(0,1)$ 时,$h'(r)<0$,即 $h(r)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减;

当 $r\in(1,+\infty)$ 时，$h'(r)>0$，即 $h(r)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增.

又 $\lim\limits_{r\to-\infty}h(r)=+\infty$，$\lim\limits_{r\to+\infty}h(r)=+\infty$，$\lim\limits_{r\to0^-}h(r)=+\infty$，$\lim\limits_{r\to0^+}h(r)=+\infty$，

且 $h(-1)=6$，$h(1)=-2$，

故 $h(r)$ 的最小值为 -2，所以 $b+c$ 的取值范围为 $[-2,+\infty)$.

(2)本解法通过将函数表示为含重根 r 和单根 s 的因式分解形式，对比系数得到 b,c 与 r,s 的关系，再结合常数项条件用 r 表示 s，进而将 $b+c$ 转化为关于 r 的函数.引入变量代换 $t=r+\dfrac{1}{r}$，将其进一步转化为二次函数求值域.此方法思路清晰直接，利用因式分解和代换简化问题，步骤明确，易于理解，是处理此类含重根函数问题的有效方法，希望同学们要掌握.

方法2　导数法

同方法1，方程 $f(x)=0$ 存在二重根，不妨设重根为 r.

则 $\begin{cases}f(r)=0,\\ f'(r)=0,\end{cases}$

即 $\begin{cases}r^3+br^2+cr+1=0,\\ 3r^2+2br+c=0,\end{cases}$

由第二个方程得 $c=-3r^2-2br$，

代入第一个方程得

$r^3+br^2+(-3r^2-2br)r+1=0$，

即 $2r^3+br^2-1=0$，

即 $b=\dfrac{1}{r^2}-2r(r\neq0)$，此时有

$c=-3r^2-2\left(\dfrac{1}{r^2}-2r\right)r=r^2-\dfrac{2}{r}$，

所以 $b+c=\dfrac{1}{r^2}-2r+r^2-\dfrac{2}{r}=r^2+\dfrac{1}{r^2}-2r-\dfrac{2}{r}$，下同方法1.

说明　同样基于函数存在重根的条件，利用函数值及导数值在重根处均为零的性质，联立方程求出 b,c 关于 r 的表达式，进而得到 $b+c$.该方法结合了导数知识，凸显了导数在研究函数重根问题中的关键作用，拓展了解决此类问题的思路.

方法3　韦达定理法

设函数 $f(x)$ 的二重根为 r，单根为 $s(r\neq s)$，即方程 $f(x)=x^3+bx^2+cx+1=0$ 的三个根为 r,r,s，由韦达定理得

$$\begin{cases}r+r+s=-b,\\ r\cdot r+r\cdot s+r\cdot s=c,\\ r\cdot r\cdot s=-1,\end{cases}$$

即 $\begin{cases}2r+s=-b,\\ r^2+2rs=c,\\ r^2s=-1,\end{cases}$

由此可得

$b=-(2r+s)=-2r-\left(-\dfrac{1}{r^2}\right)=\dfrac{1}{r^2}-2r$，

$c=r^2+2rs=r^2+2r\left(-\dfrac{1}{r^2}\right)=r^2-\dfrac{2}{r}$，

所以 $b+c=\dfrac{1}{r^2}-2r+r^2-\dfrac{2}{r}=r^2+\dfrac{1}{r^2}-2r-\dfrac{2}{r}$，下同解法1.

说明　利用韦达定理(见人教A版必修第二册教材)直接建立根与系数的联系，根据重根条件列出根与系数的方程组，解出 b,c 关于重根 r 的表达式，进而得到 $b+c$.此方法简洁明了，充分体现了根与系数关系在多项式函数问题中的核心地位.

我们如果将赛题中的常数1拓广到任意正的常数，可以得到如下推广：

推广　已知 $f(x)=x^3+bx^2+cx+k(k>0)$ 恰有两个零点，则 $b+c$ 的取值范围为 $[-1-$

$k,+\infty)$.

证明 根据条件及引理,方程 $f(x)=0$ 存在一个二重根和一个单根,不妨设二重根为 r,单根为 $s(r\neq s)$,

则 $f(x)=(x-r)^2(x-s)$,

展开整理得 $f(x)=x^3-(2r+s)x^2+(r^2+2rs)x-r^2s$,

对比系数得 $b=-(2r+s)$,$c=r^2+2rs$,$-r^2s=k(k>0)$,

由第三式得 $s=-\frac{k}{r^2}$,显然 $r\neq 0$,所以

$b+c=-(2r+s)+(r^2+2rs)=r^2-s-2r+2rs=r^2+\frac{k}{r^2}-2r-\frac{2k}{r}$.

令 $h(r)=r^2+\frac{k}{r^2}-2r-\frac{2k}{r}(k>0)$,

则 $h'(r)=2r-\frac{2k}{r^3}-2+\frac{2k}{r^2}=2(r-1)\cdot\left(1+\frac{k}{r^3}\right)$,

令 $h'(r)=0$ 得 $r=1$ 或 $r=-\sqrt[3]{k}$.

当 $r\in(-\infty,-\sqrt[3]{k})$ 时,$h'(r)<0$,即 $h(r)$ 在 $(-\infty,-\sqrt[3]{k})$ 上单调递减;

当 $r\in(-\sqrt[3]{k},0)$ 时,$h'(r)>0$,即 $h(r)$ 在 $(-\sqrt[3]{k},0)$ 上单调递增;

当 $r\in(0,1)$ 时,$h'(r)<0$,即 $h(r)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减;

当 $r\in(1,+\infty)$ 时,$h'(r)>0$,即 $h(r)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增.

又 $\lim\limits_{r\to-\infty}h(r)=+\infty$,$\lim\limits_{r\to+\infty}h(r)=+\infty$,$\lim\limits_{r\to 0^-}h(r)=+\infty$,$\lim\limits_{r\to 0^+}h(r)=+\infty$,

$h(-\sqrt[3]{k})=(-\sqrt[3]{k})^2+\frac{k}{(-\sqrt[3]{k})^2}-2(-\sqrt[3]{k})-\frac{2k}{-\sqrt[3]{k}}=3(\sqrt[3]{k^2}+\sqrt[3]{k})>0$,$h(1)=-1-k<0$,

所以 $b+c$ 的取值范围为 $[-1-k,+\infty)$.

说明 当原函数中的常数项 $k<0$ 时,$b+c$ 的取值范围为全体实数,同学们可依据上述方法自行探究.

3 结语

数学思想方法往往隐身于知识的发生、发展与应用过程之中,以数学知识为载体,通过具体问题的分析与解决得以“显化”[1].在本例中,三次函数零点个数的讨论,不仅依托于代数基本定理与多项式理论,更在与因式分解、导数应用、变量代换及函数值域分析等过程的交融中,展现出数学方法的深刻性与统一性.从“恰有两个零点”这一条件出发,推理出“必存在二重实根与一单根”的结构特征,正是抽象与概括能力的体现;而通过系数对比、代换构造、函数分析等多种手法求出 $b+c$ 的取值范围,则反映了数学运算与逻辑推理的紧密结合.此外,借助图象直观——如函数与 x 轴相切与相交的情境——进一步强化了对代数结论的几何理解,体现出数形结合思想的价值.

这一问题解决的过程表明,数学学习不仅是知识的积累,更是思维方法的训练与创造力的激发.只有在不断探索与转化中,才能实现知识的内化与思维的“智化”,从而真正提升数学素养.

参考文献

[1] 陈民.一道平面几何问题的多维路径分析[J].中学生数学,2024,9(上):14-16.

(责审 张留杰)