

• 基础教育教学研究 •

# 拉格朗日乘数法在中学不等式证明中的创新应用<sup>\*</sup>

周根娇

(赣南师范大学 数学与计算机科学学院, 江西 赣州 341000)

**摘要:**拉格朗日乘数法作为高等数学中一种强大的数学工具,其思想和方法可以为中学数学不等式的证明提供新的视角。结合中学数学不等式案例,通过分类讨论拉格朗日乘数法的应用,并与传统解法进行对比,分析其优势,旨在为中学数学教学提供新的思路和方法,帮助学生更好地理解和掌握不等式的证明。

**关键词:**拉格朗日乘数法;中学数学;不等式证明;多变量优化

**中图分类号:**G420

**文献标志码:**A

**文章编号:**2096-7659(2025)06-0093-08

在中学数学中,不等式的证明是一个重要的内容,它涉及代数、几何等多方面的知识,不仅考查学生对数学知识的灵活运用能力,更是培养学生逻辑思维与推理能力的重要途径。传统的不等式证明方法,如比较法、综合法、数学归纳法等,虽然在解决许多问题时非常有效,但在某些复杂问题中可能显得繁琐或难以入手。拉格朗日乘数法作为一种优化方法,能巧妙地将不等式证明问题转化为带约束条件的优化问题,为不等式的证明提供一种结构化路径。现有大量文献在拉格朗日乘数法应用、多元函数最值问题探究、不等式证明及推广、三角函数最值问题求解等方面取得了显著进展<sup>[1-7]</sup>,但现有研究多聚焦单一案例,缺乏对拉格朗日乘数法适用场景的系统分类。本文将通过理论阐述和案例分析,分类讨论拉格朗日乘数法在中学数学不等式证明中的可行性及创新性,为中学教师提供跨学段教学衔接的参考范式,引领学生探索更高效、更具创新性的证明路径,拓展学生的数学思维。

## 一、基本原理

拉格朗日乘数法是一种寻找多元函数在一组约束条件下的极值的方法。通过引入拉格朗日乘数,将  $n$  个变量与  $m$  个约束条件的最优化问题转化为具有  $n+m$  个变量的无约束优化问题求解。一般拉格朗日函数形式如式(1):

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) + \sum_{k=1}^m \lambda_k \varphi_k(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (1)$$

其中  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$  为拉格朗日乘数。

**定理 1<sup>[8]</sup>** 设在条件

$$\varphi_k(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, k = 1, 2, \dots, m (m < n) \quad (2)$$

的限制下,求目标函数  $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  的极值。其中  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  与  $\varphi_k (k = 1, 2, \dots, m)$  在区域  $D$  上有连续的一阶偏导数。若  $D$  的内点  $P_0(x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$  是上述问题的稳定点,且雅可比矩阵

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{P_0} \quad (3)$$

\* 收稿日期:2025-04-07

DOI:10.13698/j.cnki.cn36-1346/c.2025.06.013

基金项目:江西省教育科学“十四五”规划课题(23YB160)

作者简介:周根娇(1982-),女,江西吉安人,赣南师范大学数学与计算机科学学院讲师,研究方向:数学教育及应用数学。

引文格式:周根娇.拉格朗日乘数法在中学不等式证明中的创新应用[J].赣南师范大学学报,2025,46(6):93-100.

的秩为  $m$ , 则存在  $m$  个常数  $\lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}, \dots, \lambda_m^{(0)}$  使得  $(x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}, \lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}, \dots, \lambda_m^{(0)})$  为拉格朗日函数  $L(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$  的稳定点, 即  $(x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}, \lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}, \dots, \lambda_m^{(0)})$  为  $n+m$  个方程

$$\begin{cases} L_{x_1} = \frac{\partial f}{\partial x_1} + \sum_{k=1}^m \lambda_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_1} = 0, \\ \dots \\ L_{x_n} = \frac{\partial f}{\partial x_n} + \sum_{k=1}^m \lambda_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_n} = 0, \\ L_{\lambda_1} = \varphi_1(x_1, \dots, x_n) = 0, \\ \dots \\ L_{\lambda_m} = \varphi_m(x_1, \dots, x_n) = 0 \end{cases} \quad (4)$$

的解。

以  $n=2, m=1$  为例, 欲求  $z=f(x, y)$  的最值, 有约束条件  $\varphi(x, y)=0$ 。构造拉格朗日函数  $F(x, y)=f(x, y)+\lambda \varphi(x, y)$ , 令

$$\begin{cases} F_x(x, y)=f_x(x, y)+\lambda \varphi_x(x, y)=0, \\ F_y(x, y)=f_y(x, y)+\lambda \varphi_y(x, y)=0, \\ F_\lambda(x, y)=\varphi(x, y)=0 \end{cases} \quad (5)$$

解出的  $(x, y)$ , 代入  $f(x, y)$  即可得其一个可能极值。若这样的可能稳定点唯一, 则该点即为实际问题所求点。

## 二、适用类型与案例分析

拉格朗日乘数法在中学不等式证明中的应用主要针对具有约束条件的多变量问题, 其核心优势在于通过统一处理复杂约束条件和提供系统性求解框架, 使原本繁琐的证明过程变得规范且高效, 同时还能灵活运用。以下结合实例分五种类型展开讨论。

### (一) 类型一: 多变量约束优化问题

多变量约束优化问题是指在决策变量包含两个或以上且受显式或隐式约束条件(如线性/非线性等式、不等式)限制下, 寻求使目标函数达到最优(最大或最小)值的数学问题。

**例 1** 已知  $a+b=4$ , 求  $\sqrt{a+1}+2\sqrt{b+2}$  的最大值。

**分析:** 本题考查求代数式的最值, 属于较难题, 对于学习基础扎实的同学会联想到利用 *Cauchy-Schwarz* 不等式, 这是一种在数学和物理学中广泛使用的不等式, 它是由法国数学家奥古斯丁·路易·柯西提出的, 柯西不等式可以用于证明其他不等式, 也可以用于解决一些数学问题。以下是柯西不等式的原始形式:

①对于所有实数  $a, b, c, d$ , 有  $(a^2+b^2)(c^2+d^2) \geq (ac+bd)^2$ 。

②等式条件: 当且仅当  $ad-bc=0$  时, 等号成立。

**解法 1(传统解法):**

由柯西不等式可知  $(\sqrt{a+1}+2\sqrt{b+2})^2 \leq (1+4)(a+1+b+2)$ , 因为  $a+b=4$ , 所以  $(\sqrt{a+1}+2\sqrt{b+2})^2 \leq 5 \times (4+1+2) = 35$ , 当且仅当  $4(a+1)=b+2$  取等号, 所以  $\sqrt{a+1}+2\sqrt{b+2} \leq \sqrt{35}$ , 即当  $a=\frac{2}{5}, b=\frac{18}{5}$  时,  $\sqrt{a+1}+2\sqrt{b+2}$  的最大值为  $\sqrt{35}$ 。

**解法 2(拉格朗日乘数法):**

构造拉格朗日函数  $L(a, b, \lambda) = \sqrt{a+1} + 2\sqrt{b+2} + \lambda(a+b-4)$ , 令

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial a} = \frac{1}{2\sqrt{a+1}} + \lambda = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial b} = \frac{1}{\sqrt{b+2}} + \lambda = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = a + b - 4 = 0 \end{cases} \quad (6)$$

得  $a = \frac{2}{5}, b = \frac{18}{5}$ , 由于有唯一的稳定点, 易证为最大值点, 故  $\sqrt{a+1} + 2\sqrt{b+2}$  的最大值为  $\sqrt{35}$ 。

(二) 类型二: 具有对称性或者部分对称问题

具有对称性或部分对称性的问题是指不等式中的变量在结构上表现出整体或局部的对称特征, 如变量在表达式中的位置可互换而不改变不等式的形式(完全对称), 或仅在部分子结构中满足对称关系(部分对称)。这类问题常伴随变量地位的等价性, 其求解过程中可利用对称性简化分析(如构造对称函数、通过变量代换消元), 或通过极值理论(如拉格朗日乘数法)结合对称条件推导最值, 从而证明不等式或求解参数范围。

例2 (三元均值不等式) 已知  $x > 0, y > 0, z > 0$ , 证明不等式:  $\frac{x+y+z}{3} \geq \sqrt[3]{xyz}$ 。

分析: 三元均值不等式是常用的对称不等式之一, 在中学阶段, 可通过作差法证明, 但技巧极强, 对学生基础要求很高, 下面利用拉格朗日乘数法给以证明。

证明: 设目标函数  $f(x, y, z) = x + y + z$ , 约束条件  $xyz = a (x > 0, y > 0, z > 0)$ , 构造拉格朗日函数  $L(x, y, z, \lambda) = x + y + z + \lambda(xyz - a)$ , 令

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = 1 + yz\lambda = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial y} = 1 + xz\lambda = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial z} = 1 + xy\lambda = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = xyz - a = 0 \end{cases} \quad (7)$$

得  $x = y = z = \sqrt[3]{a}$ , 由于有唯一的稳定点, 结合实际意义可知该点为最小值点, 故  $x + y + z \geq 3\sqrt[3]{a} = 3\sqrt[3]{xyz}$ , 即  $\frac{x+y+z}{3} \geq \sqrt[3]{xyz}$ 。

注: 对于  $n (n \geq 4)$  元均值不等式, 用作差法证明的话, 学生更难掌握, 而拉格朗日乘数法提供了一种系统化和程序化的解题过程, 便于学生掌握。

例3 (2021·全国·高三竞赛) 已知非负实数  $x, y, z$  满足  $4x^2 + 4y^2 + z^2 + 2z = 3$ , 则  $5x + 4y + 3z$  的最小值为\_\_\_\_\_。

分析: 此题约束条件中  $x, y$  具有轮换对称性, 将已知条件转化后结合几何意义可证得结果, 属于较难题。

解法1(传统解法)

设  $4x^2 + 4y^2 = w^2 (w \geq 0)$ , 则  $w^2 + (z+1)^2 = 4$ 。又因为  $x, y \geq 0$ , 所以  $(2x+2y)^2 = 4x^2 + 4y^2 + 8xy \geq w^2$ ,  $5x + 4y + 3z \geq 4x + 4y + 3z \geq 2w + 3z$ , 点  $(w, z)$  在圆心为  $(0, -1)$ , 半径为 2 的圆上运动, 结合几何意义和  $w, z \geq 0$  知, 当  $(w, z) = (0, 1)$  时,  $2w + 3z$  有最小值为 3, 即  $x = y = 0, z = 1$ , 这组取值可保证前面所有不等式中的等号成立, 故答案为 3。

解法2(拉格朗日乘数法)

构造拉格朗日函数  $L(x, y, z, \lambda) = 5x + 4y + 3z + \lambda(4x^2 + 4y^2 + z^2 + 2z - 3)$ , 令

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = 5 + 8x\lambda = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial y} = 4 + 8y\lambda = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial z} = 3 + (2z + 2)\lambda = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 4x^2 + 4y^2 + z^2 + 2z - 3 = 0 \end{cases} \quad (8)$$

由方程组(8)的前三个方程得  $y = \frac{4}{5}x$ ,  $z = \frac{12}{5}x - 1$ , 代入第四个方程且  $x, y, z$  为非负实数, 得  $x = \frac{5}{\sqrt{77}}$ ,  $y = \frac{4}{\sqrt{77}}$ ,  $z = \frac{12}{\sqrt{77}} - 1$ , 该点为给定区域内唯一的极值点, 但由于缺少实际问题背景, 无法确定是极大值点还是极小值点。因此, 还需比较边界点处的函数值。给定区域为椭圆在第一象限中的部分, 因此包含三个边界点:

(I) 当  $x = y = 0, z = 1$  时,  $5x + 4y + 3z = 3$ ;

(II) 当  $x = z = 0, y = \sqrt{\frac{3}{2}}$  时,  $5x + 4y + 3z = 2\sqrt{6} > 3$ ;

(III) 当  $y = z = 0, x = \sqrt{\frac{3}{2}}$  时,  $5x + 4y + 3z = \sqrt{\frac{75}{2}} > 3$ 。

另外, 当  $x, y, z$  取区域的内部极值点时,  $5x + 4y + 3z = \sqrt{77} - 3 > 3$ 。故最小值为 3。

### (三) 类型三: 隐式约束条件转化问题

具有隐式约束条件转化的问题是指不等式中的变量之间存在未被显式表述的约束关系, 这些隐式约束需通过变量代换、引入辅助参数、构造等价方程或不等式链等方法显式化, 转化为可被直接利用的数学形式, 从而将原问题转化为在显式约束条件下求解不等式或优化问题的过程。此类问题的核心在于识别隐式约束的本质并选择恰当的转化策略, 以暴露变量间的内在联系, 进而简化问题结构或直接导出结论。

**例 4** 若函数  $f(x) = a^{x-1} + 1$ , ( $a > 0$  且  $a \neq 1$ ) 恒过一定点  $P$ , 且点  $P$  在直线  $y = \frac{1}{m}x + \frac{1}{n}$  ( $m > 0, n > 0$ ) 上, 求  $m + n$  的最小值。

**分析:** 本题主要考查基本不等式及其应用, 属于中档题。利用指数函数(通项形式)恒过点  $(0, 1)$ , 确定函数  $y = a^{x-1} + 1$  ( $a > 0, a \neq 1$ ) 过定点  $(1, 2)$ , 代入直线  $y = \frac{1}{m}x + \frac{1}{n}$  ( $m > 0, n > 0$ ) 得到隐式约束条件。

**解法 1(传统解法):**

函数  $y = a^{x-1} + 1$  ( $a > 0, a \neq 1$ ), 令  $x = 1$ , 得  $y = 2$ , 则函数恒过点  $(1, 2)$ , 故点  $P$  的坐标是  $(1, 2)$ , 而点  $P$  在直线  $y = \frac{1}{m}x + \frac{1}{n}$  ( $m > 0, n > 0$ ) 上, 所以  $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = 2$ , 因此  $m + n = \frac{1}{2}(m + n) \left( \frac{1}{m} + \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{2} \left( 2 + \frac{n}{m} + \frac{m}{n} \right) \geq \frac{1}{2} \left( 2 + 2\sqrt{\frac{n}{m} \cdot \frac{m}{n}} \right) = 2$ , 当且仅当  $\frac{n}{m} = \frac{m}{n}$ , 即  $m = n = 1$  取等号, 从而  $m + n$  的最小值为 2。

**解法 2(拉格朗日乘法):**

函数  $y = a^{x-1} + 1$  ( $a > 0, a \neq 1$ ), 令  $x = 1$ , 得  $y = 2$ , 则函数恒过点  $(1, 2)$ , 故点  $P$  的坐标是  $(1, 2)$ , 而点  $P$  在直线  $y = \frac{1}{m}x + \frac{1}{n}$  ( $m > 0, n > 0$ ) 上, 所以  $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = 2$ , 问题转化为目标函数  $f(m, n) = m + n$ , 约束条件  $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = 2$  下的最值问题。

构造拉格朗日函数  $L(m, n, \lambda) = m + n + \lambda \left( \frac{1}{m} + \frac{1}{n} - 2 \right)$ , 令

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial m} = 1 - \frac{\lambda}{m^2} = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial n} = 1 - \frac{\lambda}{n^2} = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = \frac{1}{m} + \frac{1}{n} - 2 = 0 \end{cases} \quad (9)$$

得  $m = n = 1$ , 由于有唯一的稳定点, 易证为最小值点, 故  $m + n$  的最小值为 2。

#### (四) 类型四: 非线性问题

当约束条件为非线性方程(如二次、指数约束)时, 传统解法需要极高的技巧, 此时利用拉格朗日乘数法则相对简单。

**例 5** 已知  $x, y, z > 0$  且  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ , 求  $f(x, y, z) = xyz$  的最大值。

分析: 目标函数  $f(x, y, z) = xyz$  在单位球面  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  上求最大值, 属于三维非线性约束优化问题。稳定点可能出现在球面内部或边界, 但由于  $x, y, z > 0$ , 实际约束为第一卦限内的球面部分。

解法 1(传统解法):

由于目标函数  $xyz$  和约束条件  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  对变量  $x, y, z$  完全对称, 猜测最大值出现在对称点, 即  $x = y = z$ , 代入约束条件得  $3x^2 = 1$ , 即  $x = y = z = \frac{1}{\sqrt{3}}$ , 此时,  $f(x, y, z) = xyz = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3 = \frac{1}{3\sqrt{3}}$ 。接下来验证当  $x = y = z = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ,  $f_{\max}(x, y, z) = \frac{1}{3\sqrt{3}}$ 。由利用均值不等式可知, 对任意正数  $a, b, c$ , 有:  $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$  等号成立当且仅当  $a = b = c$ 。

令  $a = x^2, b = y^2, c = z^2$  ( $a, b, c > 0, a + b + c = 1$ ), 目标函数转化为  $xyz = \sqrt{a \cdot b \cdot c}$ , 由均值不等式可知  $\frac{1}{3} = \frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$  得  $abc \leq \frac{1}{27}$ , 故  $xyz = \sqrt{abc} \leq \sqrt{\frac{1}{27}} = \frac{1}{3\sqrt{3}}$ , 当且仅当  $a = b = c$ , 即  $x = y = z = \frac{1}{\sqrt{3}}$  等号成立。

解法 2(拉格朗日乘数法):

构造拉格朗日函数  $L(x, y, z, \lambda) = xyz + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1)$ , 令

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = yz + 2\lambda x = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial y} = xz + 2\lambda y = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial z} = xy + 2\lambda z = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 \end{cases} \quad (10)$$

由方程组(10)的前三个方程可得  $x = y = z$ , 代入第四个方程解得  $x = y = z = \frac{1}{\sqrt{3}}$ , 由于有唯一的稳定点, 从而为最值点, 故  $f_{\max}(x, y, z) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3 = \frac{1}{3\sqrt{3}}$ 。

#### (五) 类型五: 目标函数与约束条件在形式上具有对偶性问题

原问题的目标函数(如最大化收益或最小化成本)与约束条件(如资源限制、不等式约束)在数学形式上存在某种对称或互补关系, 使得可通过构造对偶问题(通常将原问题的最大化目标转化为最小化目标, 或反之, 并将约束条件以拉格朗日乘子形式引入目标函数)实现等价求解。

**例 6** 已知  $x > 0, y > 0, z > 0$ , 证明不等式:  $x^2 yz \leq 4 \left(\frac{x+y+z}{4}\right)^4$ 。

证法 1(传统证法):

因为  $x > 0, y > 0, z > 0$ , 所以由均值不等式可知  $\frac{x+y+z}{4} = \frac{\frac{x}{2} + \frac{x}{2} + y + z}{4} \geq \sqrt[4]{\frac{x}{2} \cdot \frac{x}{2} \cdot y \cdot z} = \sqrt[4]{\frac{x^2 y z}{4}}$ , 即  $x^2 y z \leq 4 \left( \frac{x+y+z}{4} \right)^4$ 。当且仅当  $\frac{x}{2} = y = z$  时等号成立。

证法 2(拉格朗日乘数法):

分析:此题为无约束不等式,通过增加对称的约束条件  $x+y+z=a(x>0, y>0, z>0)$ , 利用拉格朗日乘数法即可得证。

证明:设目标函数  $f(x, y, z) = x^2 y z$ , 约束条件  $x+y+z=a(x>0, y>0, z>0)$ , 构造拉格朗日函数  $L(x, y, z, \lambda) = x^2 y z + \lambda(x+y+z-a)$ , 令

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = 2xyz + \lambda = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial y} = x^2 z + \lambda = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial z} = x^2 y + \lambda = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = x + y + z - a = 0 \end{cases} \quad (11)$$

由方程组(11)的前三个方程可知  $\frac{x}{2} = y = z$ , 代入第四个方程得  $x = \frac{a}{2}, y = z = \frac{a}{4}$ , 由于有唯一的稳定点, 结合实际意义可知该点为最大值点, 故得到不等式  $x^2 y z \leq \frac{a^4}{64}$ , 即  $x^2 y z \leq 4 \left( \frac{x+y+z}{4} \right)^4$ 。

注:在用拉格朗日函数法证明不等式时,设置合适的目标函数与约束条件是解决问题的关键,对于本例来说,也可把上面的最大值问题改述为最小值问题:求目标函数  $f(x, y, z) = x + y + z$ , 在条件  $x^2 y z = a(x>0, y>0, z>0)$  约束之下的最小值。一个问题的这两种处理形式,俗称为目标函数与约束条件在形式上的对偶性,如例 2 和例 6 就是两个典型的例子。

### 三、教学价值

拉格朗日乘数法不仅拓展了学生的解题方法,更通过其思想内核重塑学生的数学思维模式。首先,该方法能够拓展学生的知识体系,使学生对函数极值有了初步的理解;其次,拉格朗日乘数法有助于培养学生的创新思维、逻辑思维和逆向思维能力,提升数学思维品质;另外,它为学生提供了新的解题思路 and 技巧,有助于突破传统方法的局限,增强解题能力;同时,能激发学生的学习兴趣,让他们在探索新方法的过程中体验数学的魅力;最后,它还能促进知识的迁移,为学生的数学素养提升和未来高阶数学学习奠定了坚实基础。结合本文案例,其独特教学价值可概括为以下五个方面:

#### (一)从“技巧依赖”到“系统建模”的思维转型

传统不等式证明常依赖代数变形技巧,学生在解题时易陷入“方法记忆”的困境,解题时仅靠技巧堆砌,缺乏对问题本质的理解。在面对复杂问题时,容易使学生陷入思维僵局,难以灵活应对。拉格朗日乘数法则通过目标函数与约束条件的结构化整合,如例 1,传统解法利用 *Cauchy-Schwarz* 不等式或者将条件  $a+b=4$  转化为  $b=4-a$ , 代入  $\sqrt{a+1} + 2\sqrt{b+2} = \sqrt{a+1} + 2\sqrt{6-a}$ , 利用导数知识求解,但一般同学难以想到利用 *Cauchy-Schwarz* 不等式,导数方法对学生要求也比较高而导致面对问题一筹莫展。然而,通过构造拉格朗日函数  $L(a, b, \lambda) = \sqrt{a+1} + 2\sqrt{b+2} + \lambda(a+b-4)$ , 并解方程组(6),找到最值点。这个过程,可引导学生将复杂问题转化为可解的方程组系统,培养其“建模优先”的思维习惯。这种从“技巧依赖”到“系统建模”的思维转型,为学生解决跨学科问题奠定了基础。在物理、经济等领域,许多实际问题都可以转化为约束优化问题。掌握拉格朗日乘数法后,学生能够更有效地运用数学工具解决这些实际问题,提升综合应用

能力。

### (二)剖析对称性本质的深层数学认知范式

中学对称性问题,如例2的三元均值不等式,传统解法需要学生通过多次代数变形来证明,常依赖直觉假设对称点,这种方法缺乏严谨性,容易导致学生对对称性的理解停留在表面。而运用拉格朗日乘数法,通过构造拉格朗日函数 $L(x, y, z, \lambda) = x + y + z + \lambda(xyz - a)$ ,对称变量的联立方程组(7)自动导出 $x = y = z$ 的必然性,揭示对称性本质是变量间相互制约的数学表达。学生不仅掌握对称问题的普适解法,更理解“对称即平衡”的数学哲学,避免盲目依赖几何直觉。这种方法不仅使证明过程更加严谨,还帮助学生对对称性问题的认知更加深入和准确,提升学生的数学思维品质。

### (三)提高隐式约束的显性化与资源整合能力

面对隐式约束问题,如例4中 $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = 2$ ,传统教学多通过代数替换简化条件,这种方法往往使学生忽略约束条件的深层含义,难以全面理解和利用约束条件。拉格朗日乘数法通过引入乘数 $\lambda$ 将约束内化为目标函数的一部分,通过求解方程组(9),使学生直观体会约束条件的“资源属性”。该方法不仅使解题过程更加系统,还帮助学生更好地理解和利用约束条件。这种“约束即资源”的视角,强化学生在现实问题中主动挖掘隐含条件的能力,使学生能够更好地理解和利用约束条件,更有效地整合资源,提升解决问题的效率和效果。

### (四)实现高等数学思维的早期浸润与认知衔接

拉格朗日乘数法作为优化理论的桥梁,将中学极值问题(如抛物线顶点)与大学梯度、泛函分析等概念用一种巧妙的方式联系起来。如例5,传统解法需要学生通过几何直观来寻找极值点,而拉格朗日乘数法,通过构造拉格朗日函数 $L(x, y, z, \lambda) = xyz + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1)$ ,将球面约束条件与目标函数结合,通过求解方程组(10),找到极值点。这种方法不仅使解题过程更加严谨,还帮助学生提前感受高等数学的思维模式和分析方法。求解球面极值,实际是梯度共线性思想的几何预演,为学生未来学习高等数学中的梯度概念做好了铺垫。这种教学渗透使学生在接触导数、方程组时能够自然过渡到高维空间分析,缩短未来学习中的认知跨度。学生在中学阶段接触拉格朗日乘数法,能够提前感受高等数学的思维模式和分析方法,为高等数学学习做好充分准备。

### (五)数学严谨性与批判性思维的双重提升

传统方法,如例3的几何转化法,可能因忽略边界条件导致逻辑漏洞,而拉格朗日乘数法通过稳定点唯一性验证与约束合法性检验,如例3中强调 $w = 0, z = 1$ 的非负性,要求学生严格论证解的完备性。这种训练强化学生的批判性思维,避免“答案正确即合理”的浅层学习模式。学生在解题过程中,必须全面考虑问题的各种条件和可能性,进行严谨论证,从而提升数学思维的严谨性和批判性。

拉格朗日乘数法在中学不等式中具有很高的教学价值。其核心价值在于以优化思想为纽带,将数学工具从“解题技巧”升维至“系统分析框架”,同时架起初等数学与高等数学的思维桥梁。这种教学实践不仅提升解题效率,更培养学生用数学语言描述复杂世界、用结构化思维驾驭不确定性问题的核心素养。它为学生的数学学习和未来发展提供了强大的思维工具和智力支持。因此,在中学数学教学中,教师应合理引入拉格朗日乘数法,充分发挥其教学价值,帮助学生提升数学素养,以培养综合能力和创新精神,为其未来发展提供有力支持。

## 四、结论

拉格朗日乘数法在复杂约束不等式证明中具有显著优势,通过引入拉格朗日乘子,将不等式转化为优化问题,求解过程更为系统化和程序化。对于中学生而言,掌握拉格朗日乘数法不仅可以拓宽解题思路,还能提高解题效率。主要展现出三重优势:

1. 革新方法:通过引入拉格朗日乘子构建约束优化模型,将非线性不等式转化为标准化极值求解问题,避免传统的大量的代数变形,形成“建模—求导—验证”的程序化解题范式。

2. 升级认知维度:建立几何直观与代数运算的桥梁,借助梯度协同条件揭示不等式成立背后的数学本

质,突破传统技巧依赖的直觉壁垒,使证明过程具象化为多维空间中的极值搜索。

3. 拓展问题域:突破传统方法对变量维度、约束类型的限制,形成处理多变量耦合、非显式约束等复杂情形的通用框架。

拉格朗日乘数法与传统解法的对比分析如表 1 所示。

表 1 拉格朗日乘数法与传统解法的对比分析

维度	传统解法	拉格朗日乘数法
思维路径	依赖几何直觉与代数技巧或直接套用已知不等式,学生需要具备敏锐的直觉和丰富的技巧储备,容易导致思维僵局,难以应对复杂问题	构造拉格朗日函数,解方程组,系统化数学推导,步骤清晰,而且能够引导学生从优化的角度思考问题,培养学生的系统分析能力
适用性	主要适用于单变量问题、对称性明显或约束简单的极值问题	不受限于变量个数和约束条件的复杂性,能够处理各种类型的不等式证明问题
严谨性	依赖对称性直觉,需额外验证等号条件,学生在解题时容易忽略一些关键细节,导致逻辑漏洞	数学推导严格,自动捕获临界点,确保解的正确性和完整性

在教学过程中,教师可采用“认知脚手架”模式构建拉格朗日乘数法教学体系。重思维溯源,通过生动的例子和直观的几何解释,设计“观察—猜想—验证”的探究路径,帮助学生自主构建方法认知框架。选取典型不等式问题(如柯西不等式多变量情形),实施对比教学法,同步演示传统法与拉格朗日乘数法的求解过程,通过步骤拆解与思维可视化,凸显高维问题建模优势。创设“方法迁移实验室”,鼓励学生尝试将拉格朗日乘数法应用于其他类型的不等式证明问题,培养数学建模意识。最终形成“几何直观→代数运算→思维迁移”的认知闭环,使该方法成为衔接初等数学与高等数学的认知桥梁,实现数学思维方法的进阶培养,为后续学习打下坚实的基础。

#### 参考文献:

- [1] 李永林. 一个初等不等式猜想的证明及推广[J]. 数学的实践与认识, 2024, 54(11): 238—245.
- [2] 张志刚. 探究一道 2024 年北京大学卓越计划试题[J]. 中学数学研究(华南师范大学版), 2024(11): 23—26.
- [3] 周文建, 祖米热提·阿里木. 例谈拉格朗日乘数法在高中多元函数最值问题中的应用[J]. 福建中学数学, 2023(7): 43—45.
- [4] 张志刚. 一道二元函数最值问题的溯源与求解[J]. 数学教学通讯, 2023(9): 87—88.
- [5] 张志刚. 一道期末试题的背景揭示与破解研究[J]. 上海中学数学, 2022(9): 44—48.
- [6] 张科, 朱军平. 一题一课落素养深度教学显神通——一类二元二次型条件下函数最值问题的解法探究[J]. 教学考试, 2021(47): 39—41.
- [7] 陈勇. 一类三角函数最值问题的求解及背景探究[J]. 数学教学, 2021(4): 18—20.
- [8] 华东师范大学数学科学学院. 数学分析(下册)[M]. 第五版. 北京: 高等教育出版社, 2020: 155—160.

责任编辑: 廖昱博

## Innovative Application of Lagrange Multipliers in Inequality Proofs for Secondary School Mathematics

ZHOU Genjiao

(School of Mathematics and Computer Science, Gannan Normal University, Ganzhou 341000, China)

**Abstract:** The Lagrange multiplier method, as a powerful mathematical tool in advanced mathematics, offers a novel perspective for proving inequalities in secondary school mathematics. This paper integrates cases of secondary school mathematical inequalities, explores the application of the Lagrange multiplier method through categorized discussion, and compares it with traditional solution methods to analyze its advantages. The aim is to provide new insights and methods for secondary school mathematics teaching, helping students better comprehend and master the proof of inequalities.

**Keywords:** Lagrange Multipliers Method; Secondary School Mathematics; Proof of Inequalities; Multivariable Optimization