数论知识在中学数学解题中的应用

焦　阳[1]　陈盈颖[2]

(1. 喀什市第十一中学,新疆维吾尔自治区 喀什 844000;

2. 喀什大学数学与统计学院,新疆维吾尔自治区 喀什 844000)

摘　要: 文章从整除理论、不定方程、同余理论等知识出发,结合具体解题案例,阐述数论知识在中学数学解题中的应用,旨在为中学阶段高效解决相关问题提供理论依据和实践指导.

关键词: 数论; 中学数学; 整除理论; 不定方程; 同余理论

中图分类号: G632　　**文献标识码**: A　　**文章编号**: 1008 - 0333(2025)28 - 0006 - 04

随着基础数学教育改革的不断深化,数论的初等理论与方法正逐步渗透到中学数学课程与数学竞赛体系中,成为拓展学生数学思维、提升逻辑推理能力的重要载体. 在中学阶段的数学学习中,许多题目涉及整数性质、方程求解、组合优化等问题,如分数化简、日期推算、物资分配、末尾数字判定等,均可借助数论知识简洁而严谨地求解. 然而,多数中学生对数论知识的系统性认知不足,往往依赖枚举或代数变形等常规方法,导致解题效率低下,且缺乏对整数内在数学结构的深刻理解. 因此,探索数论知识在中学数学解题中的应用,对于优化教学方法、培养学生数学核心素养具有十分重要的理论价值与实践意义.

1　整除理论

数的整除理论在中学教材中讲述较少,但有关整除性的问题在中学数学中却较为常见,尤其是在国内外数学竞赛题中更是频繁出现[1]. 因此,引入整除理论对于中学阶段的数学学习是很有必要的.

1.1　利用整数的奇偶性解决整除问题

整数的奇偶性描述了整数被 2 除的余数情况. 在中学数学中,整数的奇偶性可以帮助学生更好地理解与掌握整数的性质,解决与整数相关的问题.

例 1　设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是 n 个整数,且 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 0$, $a_1 a_2 \cdots a_n = n$,则 $4 | n$.

证明　若 n 为奇数,则由 $a_1 a_2 \cdots a_n = n$ 可知,a_i 为奇数,$i = 1, 2, \cdots, n$. 由于奇数个奇数的和为奇数,这与 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 0$ 相矛盾,从而 n 为偶数. 由 $a_1 a_2 \cdots a_n = n$ 可知,$a_1, a_2, \cdots, a_n$ 中至少有一个为偶数. 若 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 中只有一个为偶数时,不妨设 a_j 为偶数,$1 \leqslant j \leqslant n$,因而有 $a_1 + a_2 + \cdots + a_{j-1} + a_{j+1} + \cdots + a_n = -a_j$,显然 $a_1 + a_2 + \cdots + a_{j-1} + a_{j+1} + \cdots + a_n$ 为奇数个奇数的和,其结果为奇数,而 a_j 为偶数,得出矛盾,因而 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 中至少有两个为偶数,因而 $4 | n$.

1.2　利用最大公因数判断分数的不可约性

分数的不可约性问题是中学的教学内容之一. 如果一个分数是不可约的,那么它就是最简形式,即该分数的分子与分母互素,因此分数的不可约性涉及整数的最大公因数等数论知识.

例 2　求证: 对任意的正整数 n,分数$\frac{21n+4}{14n+3}$不

收稿日期: 2025 - 07 - 05

作者简介: 焦阳,本科,副高级教师,从事高中数学教学研究.

可约.

证明 对任意的正整数 n,有 $21n+4>14n+3$,则 $\gcd(21n+4,14n+3)=\gcd(21n+4-(14n+3),14n+3)=\gcd(7n+1,14n+3)=\gcd(7n+1,(14n+3)-2(7n+1))=\gcd(7n+1,1)=1$,即 $\gcd(21n+4,14n+3)=1$,因而分数 $\frac{21n+4}{14n+3}$ 不可约.

1.3 利用算术基本定理求解整数问题

算术基本定理又称为“整数唯一分解定理”,在中学数学中具有广泛的应用价值,如求多个整数的最大公因数和最小公倍数、解决整数的周期性问题、简化分数等. 在解题中,一些数学问题可转化为整除问题,解决这类问题的关键是合理选取模.

例 3 已知两个正整数 a 与 b 满足 $\gcd(a,b)=60$, $l\,\mathrm{cm}(a,b)=360$,求正整数 a 与 b.

解析 由于 $\gcd(a,b)=60=2^2\times3\times5$, $l\,\mathrm{cm}(a,b)=360=2^3\times3^2\times5$,则设 $a=2^{\alpha_1}\times3^{\alpha_2}\times5^{\alpha_3}$, $b=2^{\beta_1}\times3^{\beta_2}\times5^{\beta_3}$,因而有 $\min\{\alpha_1,\beta_1\}=2$, $\max\{\alpha_1,\beta_1\}=3$; $\min\{\alpha_2,\beta_2\}=1$, $\max\{\alpha_2,\beta_2\}=2$; $\min\{\alpha_3,\beta_3\}=1$, $\max\{\alpha_3,\beta_3\}=1$. 由 $\min\{\alpha_3,\beta_3\}=1$, $\max\{\alpha_3,\beta_3\}=1$ 可得 $\alpha_3=\beta_3=1$.

由 $\min\{\alpha_1,\beta_1\}=2$, $\max\{\alpha_1,\beta_1\}=3$,有 $\alpha_1=2$, $\beta_1=3$ 或者 $\alpha_1=3$, $\beta_1=2$;

由 $\min\{\alpha_2,\beta_2\}=1$, $\max\{\alpha_2,\beta_2\}=2$,有 $\alpha_2=1$, $\beta_2=2$ 或者 $\alpha_2=2$, $\beta_2=1$.

当 $\alpha_1=2,\beta_1=3,\alpha_2=1,\beta_2=2$ 时,有 $a=2^2\times3\times5=60$, $b=2^3\times3^2\times5=360$;

当 $\alpha_1=2,\beta_1=3,\alpha_2=2,\beta_2=1$ 时,有 $a=2^2\times3^2\times5=180$, $b=2^3\times3\times5=120$;

当 $\alpha_1=3,\beta_1=2,\alpha_2=1,\beta_2=2$ 时,有 $a=2^3\times3\times5=120$, $b=2^2\times3^2\times5=180$;

当 $\alpha_1=3,\beta_1=2,\alpha_2=2,\beta_2=1$ 时,有 $a=2^3\times3^2\times5=360$, $b=2^2\times3\times5=60$.

2 不定方程

不定方程在中学数学中有着十分广泛的应用,例如可用于求最值、几何等问题. 用不定方程解题极为常见,是中学数学的一个重点. 不定方程中还包含许多与现实相关的实际问题,如“百钱买百鸡”问题、阿基米德的“牛群”问题等.

2.1 解决物资分配问题

物资分配问题是高考数学中常见的应用题类型,通常涉及线性规划、整数规划等知识. 当问题要求寻找满足特定条件的正整数解时,不定方程便成为核心的解题工具.

例 4 某物流公司需要将一批 100 吨的救灾物资紧急送往灾区. 该物流公司有两种型号的卡车可供调度: 大型卡车,每辆可载重 8 吨,每次运输费用为 600 元; 小型卡车,每辆可载重 5 吨,每次运输费用为 400 元. 为了尽快完成任务,公司决定一次性派出若干辆卡车将所有物资运完(卡车必须满载). 同时,该物流公司希望将总运输费用降至最低. 问: 共有多少种不同的车辆调度方案? 在这些方案中,哪种方案的总运输费用最低? 最低费用是多少元?

解析 设需要派出大型卡车 x 辆,小型卡车 y 辆(x 和 y 均为非负整数),得 $8x+5y=100$. 由观察法可得 $(x,y)=(0,20)$ 是方程 $8x+5y=100$ 的一组特解,因而 $8x+5y=100$ 的一切整数解为 $\begin{cases}x=5t,\\y=20-8t,\end{cases}$ 其中 t 是整数. 由于 $\begin{cases}x=5t\geqslant0,\\y=20-8t\geqslant0,\end{cases}$ 因而有 $0\leqslant t\leqslant\frac{5}{2}$,因而 $t=0,1,2$. 当 $t=0$ 时,有 $(x,y)=(0,20)$; 当 $t=1$ 时,有 $(x,y)=(5,12)$; 当 $t=2$ 时,有 $(x,y)=(10,4)$. 因而共有 3 种调度方案,且各调度方案的费用如下:

方案 1: 当 $(x,y)=(0,20)$ 时,有 $S=600x+400y=8\,000$ 元;

方案 2: 当 $(x,y)=(5,12)$ 时,有 $S=600x+400y=7\,800$ 元;

方案 3: 当 $(x,y)=(10,4)$ 时,有 $S=600x+400y=7\,600$ 元.

因此,总运输费用最低的方案是派出大型卡车 10 辆,小型卡车 4 辆,最低费用为 7 600 元.

2.2 利用不定方程理论求解分式方程

利用不定方程理论求解分式方程可采用分离整数法. 该方法主要是通过变形不定方程,使一个未知

数用另一个未知数来表示,如果所得代数式是分式,就将它变形为"整数 + m/p"的形式,其中 m 是常数,p 是关于另一个未知数的多项式,然后对 m/p 运用因数分析法,求出原方程的解.

例5 求不定方程 $\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=\frac{1}{30}$ 的正整数解.

解析 对原不定方程变形可得 $x=\frac{30y}{y+30}=\frac{30(y+30)-900}{y+30}=30-\frac{900}{y+30}$. 由于 x 与 y 都是正整数,则 $y+30$ 是900的大于30的正因数,而900的大于30的正因数有36,45,50,60,75,90,100,150,180,225,300,450,900,则:

当 $y+30=36$ 时,即 $y=6$ 时,有 $x=5$; 当 $y+30=45$ 时,即 $y=15$ 时,有 $x=10$; 当 $y+30=50$ 时,即 $y=20$ 时,有 $x=12$; 当 $y+30=60$ 时,即 $y=30$ 时,有 $x=15$; 当 $y+30=75$ 时,即 $y=45$ 时,有 $x=18$; 当 $y+30=90$ 时,即 $y=60$ 时,有 $x=20$; 当 $y+30=100$ 时,即 $y=70$ 时,有 $x=21$; 当 $y+30=150$ 时,即 $y=120$ 时,有 $x=24$; 当 $y+30=180$ 时,即 $y=150$ 时,有 $x=25$; 当 $y+30=225$ 时,即 $y=195$ 时,有 $x=26$; 当 $y+30=300$ 时,即 $y=270$ 时,有 $x=27$; 当 $y+30=450$ 时,即 $y=420$ 时,有 $x=28$; 当 $y+30=900$ 时,即 $y=870$ 时,有 $x=29$. 因而原方程有正整数解

$$\begin{cases}x=5,\\y=6,\end{cases}\begin{cases}x=10,\\y=15,\end{cases}\begin{cases}x=12,\\y=20,\end{cases}\begin{cases}x=15,\\y=30,\end{cases}\begin{cases}x=18,\\y=45,\end{cases}\begin{cases}x=20,\\y=60,\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=21,\\y=70,\end{cases}\begin{cases}x=24,\\y=120,\end{cases}\begin{cases}x=25,\\y=150,\end{cases}\begin{cases}x=26,\\y=195,\end{cases}\begin{cases}x=27,\\y=270,\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=28,\\y=420,\end{cases}\begin{cases}x=29,\\y=870.\end{cases}$$

3 同余理论

在数的整除理论中,经常需要判断一个数能否被另一个数整除. 虽然用初等方法也能证明判断的正确性,但用同余理论解决这类问题,会更简捷明了,且有一定的深度[2]. 同余理论是数论中的一个基本概念,其实用性强,解题时方便灵活且富有技巧,对于解决中小学数学中的整除问题、末位数字问题和余数问题等具有至关重要的作用,例如检查整数的整除性、确定日期等.

3.1 利用整数整除的特征确定整数问题

判断一个整数是否能被另一个整数整除,通常需要做除法. 那么,在不做除法的情况下,如何判断一个整数是否被另一个整数整除呢? 这就需要掌握整数整除的特征.

例6 若 $n=14\square5\square$ 是一个5位数,且 $26\mid n$,求整数 n.

分析 由于 $26=2\times13$,且 $26\mid n$,则 $2\mid n$ 且 $13\mid n$,这就考查了一整数能被2,13整除的特征.

解析 设在 $n=14\square5\square$ 的方框中从左向右依次填入整数 α 与 β,使得 $n=\overline{14\alpha5\beta}$,其中 $0\leqslant\alpha,\beta\leqslant9$. 由于 $26=2\times13$,且 $26\mid n$,则 $2\mid n$ 且 $13\mid n$.

由 $2\mid n$ 可得,$\beta=0,2,4,6,8$.

当 $\beta=0$ 时,由于 $13\mid n$,则 $13\mid(\overline{\alpha50}-14)$. 再由于 $0\leqslant\alpha\leqslant9$,则 $\alpha=9$,此时 $n=14\ 950$;

当 $\beta=2$ 时,由于 $13\mid n$,则 $13\mid(\overline{\alpha52}-14)$. 再由于 $0\leqslant\alpha\leqslant9$,则 $\alpha=3$,此时 $n=14\ 352$;

当 $\beta=4$ 时,由于 $13\mid n$,则 $13\mid(\overline{\alpha54}-14)$. 再由于 $0\leqslant\alpha\leqslant9$,解得此时无整数 α 满足条件;

当 $\beta=6$ 时,由于 $13\mid n$,则 $13\mid(\overline{\alpha56}-14)$. 再由于 $0\leqslant\alpha\leqslant9$,则 $\alpha=4$,此时 $n=14\ 456$;

当 $\beta=8$ 时,由于 $13\mid n$,则 $13\mid(\overline{\alpha58}-14)$. 再由于 $0\leqslant\alpha\leqslant9$,解得此时无整数 α 满足条件.

3.2 利用同余理论确定日期问题

同余性质实用性强,解题时方便灵活且富有技巧,在确定日期的问题上,数论知识发挥着十分重要的作用. 利用数论知识解决确定日期的问题可达到简化运算的效果.

例7 假如今天是星期五,问再过 $47^{37^{23}}$ 天是星期几?

分析 一周7天,也就意味着再过7天又是星期五,所以问题的关键在于求出 $47^{37^{23}}$ 被7除所得的余数,即可把问题转化为同余关系 $47^{37^{23}}\equiv r(\bmod 7)$,其中 $0\leqslant r<7$,且 r 为整数.

解析 由于 $\gcd(47,7)=1$,则由Euler定理,有 $47^{\varphi(7)}\equiv47^6\equiv1(\bmod 7)$. 从而有 $37^{23}\equiv(36+1)^{23}\equiv1(\bmod 6)$,因而 $47^{37^{23}}\equiv47\equiv5(\bmod 7)$. 则 $47^{37^{23}}\equiv$

5(mod7) . 所以再过47^{3723}天是星期三.

3.3 利用同余理论确定整数的末尾数字问题

在中学数学中,确定整数的末尾数字是一类常见问题. 对于一些简单的整数,确定其末尾数字只需用该整数除以10^k 即可得到,其中 k 是一正整数; 但对于一些较为复杂的整数,则需要利用数论中的同余理论来求解.

例 8 求 $3^{1001}\times7^{1002}\times13^{1003}\times17^{1004}$的末尾个位数字.

分析 要求 $3^{1001}\times7^{1002}\times13^{1003}\times17^{1004}$的末尾个位数字,可分别求出 3^{1001},7^{1002},13^{1003}与17^{1004}这 4 个整数的个位数字,再将它们的个位数字相乘后取模 10,即可得到原整数的末尾个位数字.

解析 由于$3^2\equiv-1(\bmod 10)$,则$3^{1001}\equiv(3^2)^{500}\times3\equiv(-1)^{500}\times3\equiv3(\bmod 10)$;由于$7^2\equiv-1(\bmod 10)$,则$7^{1002}\equiv(7^2)^{501}\equiv-1(\bmod 10)$;由于$13^2\equiv-1(\bmod 10)$,则$13^{1003}\equiv(13^2)^{501}\times13\equiv-3(\bmod 10)$;由于$7^2\equiv-1(\bmod 10)$,则$17^{1004}\equiv(10+7)^{1004}\equiv7^{1004}\equiv(7^2)^{502}\equiv1(\bmod 10)$. 因而$3^{1001}\times7^{1002}\times13^{1003}\times17^{1004}\equiv3\times(-1)\times(-3)\times1\equiv9(\bmod 10)$. 所以 $3^{1001}\times7^{1002}\times13^{1003}\times17^{1004}$的末尾个位数字为 9.

3.4 中国剩余定理的应用

中国剩余定理是数论中一个极具应用价值的数学定理,有很多与之相关的著名问题,如《孙子算经》中记载的“不知物数”问题、“韩信点兵”问题等. 中国剩余定理在中学数学中的应用也极为广泛.

例 9 求满足被 3 除余 2,被 5 除余 1,被 7 除余 6 的最小正整数.

解法 1 由题意设所求之数为 x,可得 $x\equiv2(\bmod 3)$,$x\equiv1(\bmod 5)$,$x\equiv6(\bmod 7)$.

由 $x\equiv2(\bmod 3)$ 可得,存在整数 k_1,使得 $x=3k_1+2$,将它代入 $x\equiv1(\bmod 5)$ 得 $3k_1+2\equiv1(\bmod 5)$,即$3k_1\equiv4(\bmod 5)$,解之得唯一整数解 $k_1\equiv3(\bmod 5)$. 因而存在整数 k_2,使得 $k_1=5k_2+3$,代入 $x=3k_1+2$ 可得 $x=15k_2+11$. 将 $x=15k_2+11$ 代入 $x\equiv6(\bmod 7)$,得 $15k_2+11\equiv6(\bmod 7)$,即 $15k_2\equiv2(\bmod 7)$,解之得唯一整数解 $k_2\equiv2(\bmod 7)$. 因而存在整数 k_3,使得 $k_2=7k_3+2$. 将 $k_2=7k_3+2$ 代入 $x=15k_2+11$ 可得,$x=105k_3+41$. 则当 $k_3=0$ 时,$x_{\min}=41$,故所求的最小正整数是 41.

由例 9 中的解法 1 可知,利用一次同余式以及同余的性质可解决类似例 9 的问题,但解法较为繁琐,需要反复迭代. 那么,有没有更简便的求解方法呢? 下面采用中国剩余定理来求解.

解法 2 由题意设所求之数为 x,可得 $x\equiv2(\bmod 3)$,$x\equiv1(\bmod 5)$,$x\equiv6(\bmod 7)$. 不妨令 $b_1=2$,$b_2=1$,$b_3=6$,$m_1=3$,$m_2=5$,$m_3=7$,则 $m=m_1m_2m_3=105$,$M_1=m_2m_3=35$,$M_2=m_1m_3=21$,$M_3=m_1m_2=15$. 解 $35M_1'\equiv1(\bmod 3)$,得 $M_1'\equiv2(\bmod 3)$;解 $21M_2'\equiv1(\bmod 5)$,得 $M_2'\equiv1(\bmod 5)$;解 $15M_3'\equiv1(\bmod 7)$,得 $M_3'\equiv1(\bmod 7)$,因而原同余式组有唯一整数解 $x\equiv\sum_{i=1}^{3}M_iM_i'b_i\equiv35\times2\times2+21\times1\times1+15\times1\times6\equiv251\equiv41(\bmod 105)$,所以,所求的最小正整数是 41.

4 结束语

整数是中学数学的主要研究对象,而数论的主要研究对象正是整数. 数论知识在中学数学中有着广泛的应用和体现,如整数的四则运算、奇偶性、最大公因数与最小公倍数的相关问题,以及解决周期性问题、确定日期问题等. 数论知识为中学数学问题的解决提供了有效、科学的理论支持. 本文从整除理论角度,阐述了它在利用整数的奇偶性解决整除问题、利用最大公因数判断分数不可约性、利用算术基本定理求解整数问题等方面的应用; 从不定方程角度,阐述了它在中学数学中解决物资分配问题与计算分式方程中的应用; 从同余理论角度,阐述了它在利用整数整除的特征确定整除关系、解决确定日期问题及求解整数的末尾数字问题等方面的应用,以期为中学阶段高效解决相关问题提供理论依据和实践指导.

参考文献:

[1] 吕烈翰. 关于整除问题[J]. 数学通报,1982(11):24-30.

[2] 邬永光. 用同余理论证明数的整除[J]. 内蒙古教育学院学报,1998(04):52-54.

[责任编辑: 李慧娇]