数海拾贝

探究芝诺悖论
——阿喀琉斯能否追上乌龟

金禹含

(北京四中高二(13)班,100034)

中图分类号:O144.2 文献标识码:A 文章编号:1005-6416(2012)12-0017-01

在人教版高中数学标准实验教材[1]中,介绍了古希腊数学家芝诺提出的一个悖论:阿喀琉斯追不上乌龟(阿喀琉斯是希腊传说中的擅于跑步者).

芝诺提出,如果让乌龟先跑一段路程,阿喀琉斯将永远追不上乌龟.

这是因为,阿喀琉斯要想追上乌龟,就必须先跑到乌龟开始起跑所在的位置,无论阿喀琉斯跑得多快,当他追到乌龟起跑的位置时,乌龟又已经跑到前面去了,这样的问题无限次地出现. 因此,阿喀琉斯和乌龟之间的距离尽管越来越短,却一直存在.

很多人力图证明芝诺的论证是错误的,但一直没能解决.

在数学上,直到用了"无穷级数的和是有限的"这一方法,才证明了阿喀琉斯跑过的路程之和是一个有限的数. 因而,可以在有限的时间内跑完并追上乌龟.

解决此悖论实质上是要回答问题:阿喀琉斯如何能够经过无穷多段路程而追上乌龟. 那么,除了采用"无穷级数"的方法外,是否还有其他的数学方法呢?

要回答此问题必须从芝诺给出的前提条件出发. 芝诺认为,阿喀琉斯要想追上乌龟就必须先到达乌龟开始起跑所在的位置.

假定人和乌龟之间的初始距离为 d,乌龟和人的速度之比为 $k(0<k<1)$. 为了清晰判断人和乌龟的位置关系,不妨假设在人的身后有一匹马,马、人和乌龟在一条直线上,向同一方向跑;马的速度和人一样,马和人之间的距离一直为 x. 这样,马一直在人身后,马也在追乌龟,马和乌龟之间的初始距离为 $x+d$(如图1).

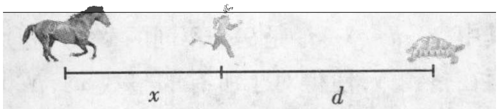

图1

如前所述马要想追上乌龟,必须先到达乌龟开始起跑所在的位置,并且马能够到达乌龟开始起跑所在的位置.

由假设知乌龟和人、乌龟和马的速度之比都为 $k(0<k<1)$. 当马跑到乌龟开始起跑所在的位置时,马跑过的路程为 $x+d$,同一时间内,人跑过的路程为 $x+d$,乌龟跑过的路程为 $k(x+d)$. 此时,人和乌龟之间的距离为

$$y=d+k(x+d)-(x+d)=(k-1)x+kd.$$

显然,y 是关于 x 的一次函数,$k-1$、kd 都是常数,定义域为 $x>0$.

又根据一次函数的性质及 $-1<k-1<0$ 和 $kd>0$,知当 x 增大时,y 减小;当 x 为某一正数 x_0 时,y 为0;当 $x>x_0$ 时,y 为负.

这表明,必存在某一正数 x_0,当人和马之间的距离为 x_0 时,则在马跑到乌龟开始起跑的位置那一时刻,人刚好追上了乌龟.

(下转第25页)

收稿日期:2012-08-16 修回日期:2012-10-20

故积 11 分一定能够确保进入前四名.

三、**1.** (1)由

$$\begin{cases} y=x^2, \\ y=(k+2)x-(2k-1), \end{cases}$$

消去 y 得

$$x^2-(k+2)x+(2k-1)=0.$$

因 $\Delta=(k+2)^2-4(2k-1)$

$=k^2-4k+8=(k-2)^2+4>0$,

所以,该抛物线与直线恒有两个不同的交点.

(2)由(1)及根与系数的关系得

$x_1+x_2=k+2, x_1x_2=2k-1.$

消去 k 得

$x_1x_2-2x_1-2x_2=-5$

$\Rightarrow (x_1-2)(x_2-2)=-1.$

不妨设 $x_1<x_2$. 则

$$\begin{cases} x_1-2=-1, \\ x_2-2=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=1, \\ x_2=3. \end{cases}$$

于是,$k=2$.

2. 如图 4,联结 AD、AF、BD、BE.

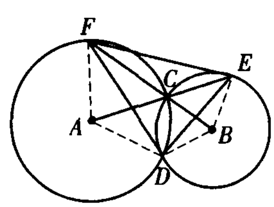

图 4

则 $\angle AFC=\angle ACF=180°-\angle ACB$

$=180°-\angle ADB$

$\Rightarrow \angle AFB+\angle ADB=180°$

$\Rightarrow A$、D、B、F 四点共圆.

同理,A、D、B、E 四点共圆.

故 A、D、B、E、F 五点共圆.

由 $AD=AF$

$\Rightarrow \angle DEC=\angle FEC$

$\Rightarrow CE$ 平分 $\angle DEF$.

同理,CF 平分 $\angle EFD$.

因此,C 是 $\triangle DEF$ 的内心.

3. 黑板上剩下的所有数的乘积的个位数是 1,则从 10 ~ 99 之间的所有偶数必被擦去,个位是 5 的数一定也被擦去.

从而,剩下的数的个位一定是 1、3、7、9 之一.

注意到,$11\times13\times17\times19$ 的个位数字是 9. 同理,$21\times23\times27\times29,\cdots,91\times93\times97\times99$ 的个位数字也是 9. 于是,上述所有数乘积的个位数字为 9.

因此,为了使黑板上所有数乘积的个位数字为 1,至少还应该擦去一个数.

又只要擦去 10 ~ 99 之间的所有偶数和个位数字是 5 的数以及一个个位数字是 9 的数,比如 19,就能使所剩下的数的乘积的个位数字是 1.

因为 10 ~ 99 之间的所有偶数共 45 个,个位数字是 5 的数共有 9 个,所以,n 的最小值为

$$45+9+1=55.$$

(李昌勇　提供)

(上接第 17 页)

虽然按照芝诺所说人追乌龟必须经过无穷多段路程,但这无穷多段路程的和,与同一时间内马跑到乌龟开始起跑的位置所跑过的路程相等,这段路程的长度是 x_0+d.

对于这样一段有限的路程,人当然可以在有限的时间内跑完并追上乌龟.

于是,令 $y=0$,计算出 $x_0=\dfrac{dk}{1-k}$.

综上,通过"假设存在一匹马"的方法,将求无穷级数的和转化为求一个有限的数,证明了阿喀琉斯可以追上乌龟.

参考文献:

[1] 高存明,万庆炎,王人伟　等. 普通高中课程标准实验教科书数学 5 必修 B 版(第 2 版)[M]. 北京:人民教育出版社,2007.

[2] 高存明,李建才,陈宏伯　等. 普通高中课程标准实验教科书数学 1 必修 B 版(第 3 版)[M]. 北京:人民教育出版社,2007.

[3] 贝尔. E. T.　著,徐　源　译. 数学大师从芝诺到庞加莱[M]. 上海科技教育出版社,2004.

[4] 莫里斯·克莱因 著,张理京,张锦炎,江泽涵　译. 古今数学思想(第一册)[M]. 上海科学技术出版社,2002.