Complementos de Álgebra Linear

Cláudio Henriques

Fábio Henriques

Corretor: Micael Santos

Universidade de Aveiro

2015/2016

Proposta de resolução - Folha 1: Subespaços invariantes

1. $\varphi\colon V \to V \quad \{u \in V : \varphi(u) = \lambda u\} = U_\lambda$

   Pretendemos provar que u_λ é φ-invariante, isto é, provar:

   (1) U_λ é um subespaço;

   (2) $\varphi(U_\lambda) \subset U_\lambda$;

   (1): U_λ é um subespaço vectorial, uma vez que é um subespaço associado ao valor próprio λ.

   (2): $\varphi(u) = \lambda u \in U_\lambda$ pois U_λ é um subspaço vectorial e consequentemente é fechado para a multiplicação por um escalar.

2. $\varphi\colon V \to V \quad \forall x \in \backslash\{0\}$

   - Hipótese: x é um vector próprio. $(\varphi(x) = \lambda x)$;
   - Tese: $S = \langle x \rangle$ é φ-invariante.

   Por hipótese, $\varphi(x) = \lambda x$, como $S = \langle x \rangle, \quad \lambda x \in S \implies \varphi(x) \in S$. Logo, como S é um subespaço e $\varphi(x) \in S$, S é φ-invariante.

   - Hipótese: $S = \langle x \rangle$ é φ-invariante, $\varphi(S) \subset S$;
   - Tese: x é um vector próprio. $(\varphi(x) = \lambda x)$.

   Por hipótese, $\varphi(x) \in S \implies \varphi(x) = \alpha x$, pois x é um gerador de S. Nestas condições verificamos que $\alpha \equiv \lambda$ e consequentemente x é um vector próprio associado a λ.

3. $\varphi\colon V \to V \quad : \quad x_1 \ldots x_k$ são vetores próprios de φ

   Pretende-se provar que o subespaço gerado pelos vectores próprios é φ-invariante.

   $$\left.\begin{array}{r} \varphi(x_1) = \lambda x_1 \in V \\ \vdots \\ \varphi(x_k) = \lambda x_k \in V \end{array}\right\} \text{pois V é fechado para o produto por um escalar.}$$

   $\therefore V$ satisfaz (1) e (2) (ver questão (1)), logo é φ-invariante.

4. $\varphi\colon V \to V \quad u, w$ são φ-invariantes.

   (a) $\varphi(u \cap w) \subseteq \varphi(u) \subseteq u$

   $\varphi(u \cap w) \subseteq \varphi(w) \subseteq w$

   $\therefore \varphi(u \cap w) \subseteq u \cap w$

(b) $\varphi(u+w) = \varphi(u) + \varphi(w) \subseteq u + w$

Logo $u \cap w$ e $u + w$ são subespaços φ-invariantes de V.

5.

6. $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$M(\varphi, B) = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$

$\left|A - \lambda I\right| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -5 \\ 1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(-2-\lambda) - (-5) = \lambda^2 + 1$

$\lambda^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = i \vee \lambda = -i$

φ não possui valores próprios.

$\therefore$ Assim sendo, concluímos que não existem subespaços φ-invariantes não trivias.

7. $\varphi\colon \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$

$M(\varphi, B) = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = A$

$\cdot$ Calcular os valores próprios:

$\left|A - \lambda I\right| = \begin{vmatrix} -\lambda & 4 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 4$

$\lambda^2 = -4 \Leftrightarrow \lambda = -2i \vee \lambda = 2i$

Para $\lambda = -2i$

$[A - \lambda I]\hat{x} = \hat{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2i & 4 \\ -1 & 2i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} (2i)x + 4y \\ -x + (2i)y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\begin{cases} 2ix + 4y = 0 \\ -x + 2iy = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2iy \end{cases}$

$U_{-2i} = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \colon x = 2iy\} = \{(2iy, y),\ y \in R\} \quad U_{-2i} = \langle (2i, 1) \rangle$

Para $\lambda = 2i$

$[A - \lambda I]\hat{x} = \hat{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -2i & 4 \\ -1 & -2i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} (-2i)x + 4y \\ -x + (-2i)y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\begin{cases} -2ix + 4y = 0 \\ -x - 2iy = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2iy \end{cases}$

$U_{2i} = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \colon x = \text{-}2iy\} = \{(\text{-}2iy, y),\ y \in R\} \quad U_{2i} = \langle(\text{-}2i, 1)\rangle$

8. $B_V = (e_1, e_2)$, $\varphi \in End(V)$

   $\varphi(e_1) = e_1 \quad e \quad \varphi(e_2) = e_1 + e_2$

   (a) $M(\varphi, B) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = A$

   $\cdot$ Calcular os valores próprios:

   $\left|A - \lambda I\right| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(1-\lambda) = (1-\lambda)^2$

   $(1-\lambda)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1$

   Para $\lambda = 1$

   $(A - 1I_2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow y = 0$

   $U_1 = \langle(1,\ 0)\rangle$

   $\therefore$ Logo $U_1 = \langle(1, 0)\rangle$ é um subespaço φ-invariante. Não existem mais subespaços φ-invariantes de V não triviais.

   (b) Como $m_g(1) = 1$ e $m_a(1) = 2$, concluímos que não existem mais subespaços próprios e consequentemente fica assim impossível decompor V numa soma direta de dois subespaços φ-invariantes não triviais (visto que nestas condições apenas existe um λ).

9. $\varphi \in End(\mathrm{R}^2)$

   $\varphi(x, y) = (x, -y) \quad \varphi(1, 0) = (1, 0) \quad \varphi(0, 1) = (0, -1)$

   $\mathrm{M}(\varphi, B_c) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

   $B_c((1, 0), (0, -1))$

   $\cdot$ Calcular os valores próprios:

   $\left|A - \lambda I\right| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1$

   $\lambda^2 = 1 \Leftrightarrow \lambda = -1 \vee \lambda = 1$

   Para $\lambda = -1$

$$[A-\lambda I]\hat{x}=\hat{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2x+0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\begin{cases} x = 0 \end{cases}$

$U_{-1} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x = 0\} = \{(0,y),\ y \in R\} \quad U_{-1} = \langle(0,1)\rangle$

Para $\lambda = 1$

$$[A-\lambda I]\hat{x}=\hat{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ -2y+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\begin{cases} y = 0 \end{cases}$

$U_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon y = 0\} = \{(x,0),\ x \in R\} \quad U_1 = \langle(1,0)\rangle$

Visto que o subespaço próprio de φ associado ao valor próprio λ é φ-invariante, então $U_{-1} = \langle(0,1)\rangle$ e $U_1 = (1,0)\rangle$ são dois subespaços não triviais de φ.

10. (a) $\varphi(1,2,1) = (2,1,-1) = 2 \times (1,2,1) - 3 \times (0,1,1) \in S$

$\varphi(0,1,1) = (1,1,0) = 1 \times (1,2,1) - 1 \times (0,1,1) \in S$

Logo S é φ-invariante. Vamos então criar uma base de $\mathbb{R}^3$ por completação da base de S.

Por exemplo $B = \langle(1,2,1),(0,1,1),(0,0,1)\rangle$

$\varphi(0,0,1) = (0,1,1) = 0 \times (1,2,1) + 1 \times (0,1,1) + 0 \times (0,0,1)$

Logo $M(\varphi, B) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(b) $(x,y,z) = \alpha(1,0,0) + \beta(0,1,0) + \gamma(0,0,1) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha \\ y = \beta \\ z = \gamma \end{cases}$

$\varphi(x,y,z) = x\varphi(1,0,0) + y\varphi(0,1,0) + z\varphi(0,0,1) \Leftrightarrow \varphi(x,y,z) = (x+y, x+2y+z, x+3y+2z)$

$\varphi(1,-1,1) = (0,0,0) = 0 \times (1,-1,1) + 0 \times (3,0,1) \in S$

$\varphi(3,0,1) = (3,4,5) \notin S.$

$\therefore$ Logo S não é φ-invariante.

11. $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

$\varphi(X) = AX$

(a) $S = \langle I_2, A\rangle \Leftrightarrow S = \langle \left(\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right) \rangle$

$\varphi(I_2) = A \in S$

$\varphi(A) = AA = A^2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = A - I_2 \in S$

$\therefore$ Logo, S é um subespaço φ-invariante.

(b) $\varphi(X) = \lambda X$

$\varphi(I) = A \neq \lambda I_2$, logo S não é um subespaço próprio de φ associado a um valor próprio.

(c) $B = (I_2, A, E_{11}, E_{12})$

Para B ser uma base de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$

$\alpha I_2 + \beta A + \gamma E_{11} + \delta E_{12} = 0$

$$\begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta & -\beta \\ \beta & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \delta \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \alpha+\beta+\gamma & -\beta+\delta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \beta = \delta \\ \alpha + \beta = \gamma \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \\ \delta = 0 \end{cases}$$ O conjunto é linearmente independente

com 4 elementos e $\dim M_{2\times 2}(\mathbb{R}) = 4$, logo o conjunto B é uma base de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

(d) $\varphi(I_2) = (0, 1, 0, 0)_B$

$\varphi(A) = (-1, 1, 0, 0)_B$

$\varphi(E_{11}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = 0I_2 + 1A + 0E_{11} + 1E_{12} = (0, 1, 0, 1)$

$\varphi(E_{12}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 1I_2 + 0A - 1E_{11} + 1E_{12} = (1, 0, -1, 1)$

$$M(\varphi, B) = \left[\begin{array}{cc:cc} 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$ matriz triangular superior por blocos

(e) $\varphi(E_{11}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = E_{11} + E_{21} \in S$

$\varphi(E_{21}) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = -E_{11} \in S$

Falta mostrar que T é complementar de S, isto é, que $S \oplus T = M_{2\times 2}\mathbb{R}$. Para isso mostramos que

$B' = B_S \cup B_T = (I_2, A, E_{11}, E_{21})$

(f) $B' = (I_2, A, E_{11}, E_{21})$

$$M(\varphi; B') = \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & \text{-}1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & \text{-}1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \text{matriz diagonal por blocos}$$

12. $$\begin{bmatrix} A & C \\ 0 & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_m A + 0 \times 0 & I_m C + 0 \times I_n \\ 0 \times A + B \times 0 & 0 \times C + B \times I_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_m & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & C \\ 0 & I_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} A & C \\ 0 & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} I_m & 0 \\ 0 & B \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} A & C \\ 0 & I_n \end{vmatrix} = det\Big(B\Big) \times det\Big(A\Big)$$

$$\begin{bmatrix} A & 0 \\ C & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & I_n \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} I_m & 0 \\ C & B \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} A & 0 \\ C & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & 0 \\ 0 & I_n \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} I_m & 0 \\ C & B \end{vmatrix} = det\Big(A\Big) \times det\Big(B\Big)$$

13. (a) $S = \{(x, y, 0)\colon x, y \in \mathbb{R}\} = \langle (1, 0, 0), (0, 1, 0) \rangle$

$T = \{(0, 0, z)\colon z \in \mathbb{R}\} = \langle (0, 0, 1) \rangle$

$$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} \varphi(1,0,0) = (\cos\theta, \sin\theta, 0) = \cos\theta(1,0,0) + \sin\theta(0,1,0) \\ \varphi(0,1,0) = (-\sin\theta, \cos\theta, 0) = -\sin\theta(1,0,0) + \cos\theta(0,1,0) \end{aligned}\right\} S \text{ é } \varphi\text{-invariante}$$

$\varphi(0, 0, 1) = (0, 0, 1) \to$ T é φ-invariante

(b) $\varphi|_S \in End(S)$ e $\varphi|_T \in End(T)$

$$P_\varphi(t) = det(A - tI_3) = \begin{vmatrix} \cos\theta - t & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta - t & 0 \\ 0 & 0 & 1 - t \end{vmatrix} =$$

$= [(\cos\theta - t) \times (\cos\theta - t) \times (1 - t)] - [(-\sin\theta) \times (\sin\theta) \times (1 - t)] = (1 - t) \times$ $[1 + t^2 - (2t\cos\theta)] = det(P_{\varphi|S}) \times det(P_{\varphi|T})$

$$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

14. (a) Para que $\langle(1,0,0,1),(0,1,1,-1)\rangle$ seja um subespaço φ-invariante de $\mathbb{R}^4$, então $\varphi(1,0,0,1)=\alpha(1,0,0,1)+\beta(0,1,1,-1)$ e $\varphi(0,1,1,-1)=\alpha(1,0,0,1)+\beta(0,1,1,-1)$.

$$\varphi(1,0,0,1)=A\times(1,0,0,1)=\begin{bmatrix}3&-1&-1&-2\\1&1&-1&-1\\1&0&0&-1\\0&-1&1&1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1\\0\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\\0\\1\end{bmatrix}$$

$$\varphi(0,1,1,-1)=A\times(0,1,1,-1)=\begin{bmatrix}3&-1&-1&-2\\1&1&-1&-1\\1&0&0&-1\\0&-1&1&1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}0\\1\\1\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\1\\1\\-1\end{bmatrix}$$

$\varphi(1,0,0,1)=1\times(1,0,0,1)$

$\varphi(0,1,1,-1)=1\times(0,1,1,-1)$

$\therefore$ Logo, $\langle(1,0,0,1),(0,1,1,-1)\rangle$ é um subespaço φ-invariante de $\mathbb{R}^4$.

(b) $\varphi(1,0,0,1)=(1,0,0,1)$

$\varphi(0,1,1,-1)=(0,1,1,-1)$

Usemos os seguintes vectores para completar a base B': $(0,0,1,0)$ e $(0,0,0,1)$

$$\varphi(0,0,1,0)=A\times(0,0,1,0)=\begin{bmatrix}3&-1&-1&-2\\1&1&-1&-1\\1&0&0&-1\\0&-1&1&1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\-1\\0\\1\end{bmatrix}$$

$(-1,-1,0,1)=\alpha(1,0,0,1)+\beta(0,1,1,-1)+\gamma(0,0,1,0)+\delta(0,0,0,1)$

$$\begin{cases}-1=\alpha\\-1=\beta\\0=\beta+\gamma\\1=\alpha-\beta+\delta\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=-1\\\beta=-1\\\gamma=1\\\delta=1\end{cases}$$

$$\varphi(0,0,0,1)=A\times(0,0,0,1)=\begin{bmatrix}3&-1&-1&-2\\1&1&-1&-1\\1&0&0&-1\\0&-1&1&1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2\\-1\\-1\\1\end{bmatrix}$$

$(-2,-1,-1,1)=\alpha(1,0,0,1)+\beta(0,1,1,-1)+\gamma(0,0,1,0)+\delta(0,0,0,1)$

$$\begin{cases}-2=\alpha\\-1=\beta\\-1=\beta+\gamma\\1=\alpha-\beta+\delta\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=-2\\\beta=-1\\\gamma=0\\\delta=2\end{cases}$$

$$M(\varphi, B') = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

15. (a) $f(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = 1 \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - 2 \times \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$f(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = 2 \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - 1 \times \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\therefore$ Logo o subespaço $\langle \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \rangle$ é f-invariante.

(b) Para determinar a matriz $M(\varphi, B')$, iremos usar as seguintes matrizes: $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

$\varphi(E_{44}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

$$\begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = -1 \\ \gamma = 1 \\ \lambda = 1 \end{cases}$$

$\varphi(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

$$\begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = -2 \\ \gamma = -2 \\ \lambda = 4 \end{cases}$$

$$
M(\varphi, B') = \left[\begin{array}{cc:cc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 0 \\ \hdashline 1 & -2 & -1 & -2 \\ 1 & 4 & 2 & 1 \end{array}\right]
$$

16. (a) i. $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \quad \varphi(x,y,z) = (x+3y, 2x-y+z, x-z)$, $v = (1,1,1)$, $Z(\varphi, v) = \langle v, \varphi(v), ...\rangle$

$\varphi(v) = \varphi(1,1,1) = (4,2,0) \neq \alpha(1,1,1), \quad \forall_\alpha \in \mathbb{R}$

$\varphi^2(v) = \varphi(4,2,0) = (10,6,4) \neq \alpha(1,1,1) + \beta(4,2,0),, \quad \forall_{\alpha,\beta} \in \mathbb{R}$

$\varphi^3(v) = \varphi(10,6,4) = (28,18,6) = \alpha(1,1,1) + \beta(4,2,0) + \gamma(10,6,4)$

$(28,18,6) = \alpha \times (1,1,1) + \beta \times (4,2,0) + \gamma \times (10,6,4) \Leftrightarrow (28,18,6) = (\alpha,\alpha,\alpha) + (4\beta, 2\beta, 0) + (10\gamma, 6\gamma, 4\gamma)$

$$
\begin{cases} 28 = \alpha + 4\beta + 10\gamma \\ 18 = \alpha + 2\beta + 6\gamma \\ 6 = \alpha + 0\beta + 4\gamma \end{cases} = \begin{cases} \alpha = 10 \\ \beta = 7 \\ \gamma = -1 \end{cases}
$$

Z$(\varphi, v) = \langle (1,1,1), (4,2,0), (10,6,4)\rangle$

ii. $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad \varphi(x,y) = (-y, x)$, $v = (a,b)$, $Z(\varphi, v) = \langle v, \varphi(v), ...\rangle$

$\varphi(v) = \varphi(a,b) = (-b, a) \neq \alpha(a,b)$

$\varphi^2(v) = \varphi(-b,a) = (-a,-b) = -v$

$Z(\varphi, v) = \langle (a,b), (-b,a)\rangle$

iii. $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \quad \varphi(x,y,z) = (x+z, x+y, z)$, $v = (1,0,0)$, $Z(\varphi, v) = \langle v, \varphi(v), ...\rangle$

$\varphi(v) = \varphi(1,0,0) = (1,1,0) \neq \alpha(1,0,0), \quad \forall_\alpha \in \mathbb{R}$

$\varphi^2(v) = \varphi(1,1,0) = (1,2,0) = -1 \times (1,0,0) + 2 \times (1,1,0)$

$Z(\varphi, v) = \langle (1,0,0), (1,1,0)\rangle$

(b) i. $B_* = ((1,1,1), (4,2,0), (10,6,4))$

ii. $B_* = ((a,b), (-b,a))$

iii. $B_* = ((1,0,0), (1,1,0))$

(c) i.

$$
M(\varphi_{|v}, B_*) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 10 \\ 1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}
$$

ii. $\varphi^2(v) = C_0 \times v + C_1 \times \varphi(v)$

$(-a,-b) = (a \times C_0, b \times C_0) + (-b \times C_1, a \times C_1)$

$$\begin{cases} -a = a \times C_0 + (-b) \times C_1 \\ -b = b \times C_0 + a \times C_1 \end{cases} = \begin{cases} C_0 = -1 \\ C_1 = 0 \end{cases}$$

$$M(\varphi_{|v}, B_*) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

iii. Para completar a base B_* iremos usar o vetor $(0, 0, 1)$

$$(0, 0, 0) = \alpha(0, 0, 1) + \beta(1, 0, 0) + \gamma(1, 1, 0)$$

$$\begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases}$$

$$\varphi(0, 0, 1) = (1, 0, 1)$$

$$(1, 0, 1) = \alpha(1, 0, 0) + \beta(1, 1, 0) + \gamma(0, 0, 1)$$

$$\begin{cases} 1 = \alpha + \beta \\ 0 = \beta \\ 1 = \gamma \end{cases} = \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 1 \end{cases}$$

$$M(\varphi_{|v}, B_*) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$