Tangentligning og monotoniforhold

Vi vil nu se på nogle anvendelser af differentiation. Den første anvendelse er, hvordan man finder forskriften for den rette linje der går gennem et punkt på grafen for f, f.eks. $(x_0, f(x_0))$ med hældning $f'(x_0)$. Denne linje kaldes for tangenten til f i punktet $(x_0, f(x_0)$.

Vi husker, at forskriften for den rette linje er givet ved

$$y = ax + b, \tag{1}$$

hvor a er hældningen og b er skæringspunktet med y-aksen. Vi har, at $a = f'(x_0)$ i forskriften for tangentens ligning da $f'(x_0)$ præcis beskriver hældningen. Det betyder at vi kun mangler at bestemme b, for at have en forskrift for tangentens ligning. Da vi ved, at tangenten går gennem punktet $(x_0, f(x_0))$ har vi, at

$$b = f(x_0) - f'(x_0)x_0.$$

Hvis vi indsætter dette i (1), får vi at

$$y = f'(x_0)x + (f(x_0) - f'(x_0)x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Denne ligning kaldes for tangents ligning til f i punktet $(x_0, f(x_0))$.

Eksempler:

1. Find tangentens ligning til $f(x) = x^2 - 4x + 7$ i punktet $(1, 4)$:

   Vi ser ud fra punktet, at $x_0 = 1$ og $f(x_0) = 4$. For at finde $a = f'(x_0)$ finder vi først $f'(x)$, som er

   $$f'(x) = \frac{d}{dx}(x^2 - 4x + 7) = 2x - 4.$$

   Det medfører, at

   $$f'(1) = 2 \cdot 1 - 4 = -2.$$

   Til sidst finder vi b ved

   $$b = f(x_0) - f'(x_0)x_0 = 4 - (-2) \cdot 1 = 4 + 2 = 6,$$

   så tangentens ligning til f i punktet $(1, 4)$ er

   $$y = -2x + 6.$$

Monotoniforhold: Den næste anvendelse vi vil betragte er monotoniforhold. At finde monotoniforhold går ud på at finde ud af i hvilke intervaller en given funktion er voksende og hvor den er aftagende. Vi siger, at

1. En funktion er voksende i intervallet $[a, b]$, hvis $f'(x) \geq 0$ for alle $x \in [a, b]$.
2. En funktion er aftagende i intervallet $[a, b]$, hvis $f'(x) \leq 0$ for alle $x \in [a, b]$.

Hvis vi har en funktion f som er differentiabel og hvor f' er en kontinuert funktion, så gælder der, at f kun kan skifte fra at være voksende (aftagende) til at være aftagende (voksende) i et punkt x_0, hvor $f'(x_0) = 0$. Vi kalder sådanne punkter x_0 for kritiske punkter. Bemærk dog, at selvom selvom f kan skifte fra at være voksende (aftagende) til at være aftagende (voksende) efter et kritisk punkt, så betyder det ikke at den nødvendigvis gør det. Hvis x_0 opfylder at $f'(x_0) = 0$, men f er voksende (aftagende) både før og efter x_0, så kaldes x_0 for et vendetangentspunkt.

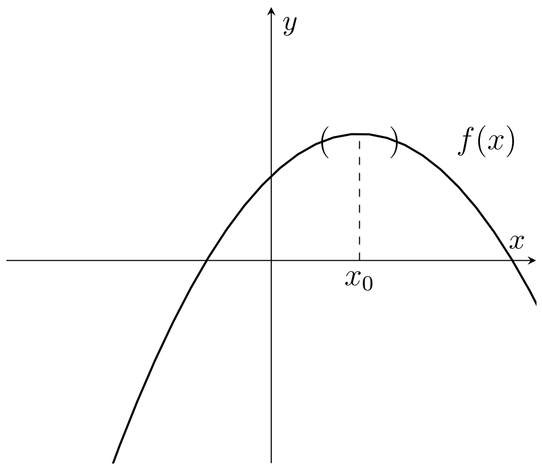
Hvis der findes et x_0 hvorom der gælder, at

$$f(x) \leq f(x_0),$$

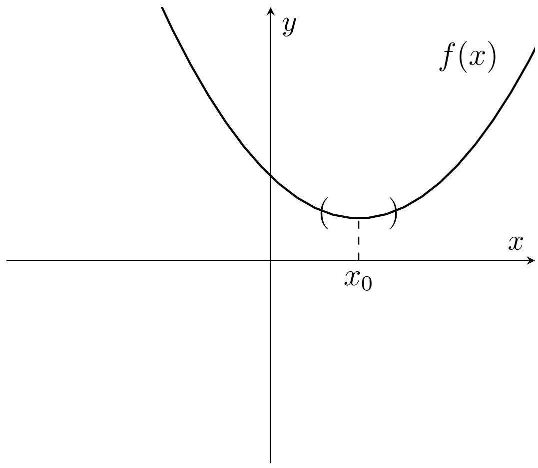
for alle x der både ligger i et lille interval omkring x_0 og i domænet for f, så kaldes x_0 for at lokalt maximum (se Figur 1). På tilsvarende vis, siger vi at x_0 er et lokalt minimum hvis der gælder, at

$$f(x) \geq f(x_0),$$

for alle x der både ligger i et lille interval omkring x_0 og i domænet for f (se Figur 2).



Figur 1: Lokalt maximum.



Figur 2: Lokalt minimum.

For at finde ud af i hvilke intervaller en funktion f er voksende og aftagende, finder vi først ud af i hvilke punkter $f'(x) = 0$. Dernæst finder vi ud af hvilket fortegn $f'(x)$ har i punkter henholdsvis før, efter og imellem disse kritiske punkter, da f' kun kan skifte fortegn efter et kritisk punkt. Disse værdier kan man så indsætte i en monotonilinje (se Tabel 1). Hvis $f'(x)$ er negativ så vil man i f's indgang i monotonilinjen lave en nedadgående pil, for at vise at f er aftagende og modsat, hvis $f'(x)$ er positiv vil man lave en opadgående pil (se det følgende eksempel).

Til sidst kan man så ud fra monotonilinjen konkludere i hvilke intervaller funktionen er aftagende og voksende.

x	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
$f'(x)$					
$f(x)$					

Tabel 1: Monotonilinje.

Eksempler:

1. Bestem monotoniforhold for funktionen $f(x) = -x^3 - 3x^2 + 2$:

   Vi finder først $f'(x)$ ved at differentiere

   $$f'(x) = (-x^3 - 3x^2 + 2)' = -3x^2 - 6x.$$

   Dernæst løser vi $f'(x) = 0$ og ser at

   $$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\Leftrightarrow -3x^2 - 6x = 0, \\ &\Leftrightarrow -3x(x+2) = 0. \end{aligned}$$

   Ved at benytte nulreglen får vi, at de kritiske punkter er $x = -2$ og $x = 0$. Dermed ser vores monotonilinje indtil videre ud som

x	x_1	-2	x_2	0	x_3
$f'(x)$		0		0	
$f(x)$					

   Tabel 2: Monotonilinje for $f(x) = -x^3 - 3x^2 + 2$.

   Vi vælger nu punkter x_1, x_2, x_3 hvor x_1 er mindre end -2, x_2 ligger mellem -2 og 0 og x_3 er større end 0, f.eks. $x_1 = -3$, $x_2 = -1$ og $x_3 = 1$. Vi indsætter nu disse punkter i forskriften for f' og får

   $$\begin{aligned} f'(-3) &= -3 \cdot (-3)^2 - 6 \cdot (-3) = -27 + 18 = -9, \\ f'(-1) &= -3 \cdot (-1)^2 - 6 \cdot (-1) = -3 + 6 = 3, \\ f'(1) &= -3 \cdot 1^2 - 6 \cdot 1 = -3 - 6 = -9. \end{aligned}$$

   Hvis vi indsætter disse oplysninger i vores monotonolinje, får vi

x	-3	-2	-1	0	1
$f'(x)$	-9	0	3	0	-9
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$

   Tabel 3: Monotonilinje for $f(x) = -x^3 - 3x^2 + 2$.

   Det giver at

   (a) f er aftagende i intervallet $(-\infty, -2]$,

   (b) f er voksende i intervallet $[-2, 0]$,

   (c) f er aftagende i intervallet $[0, \infty)$,

   og at $x = -2$ er et lokalt minimum og $x = 0$ er et lokalt maximum.