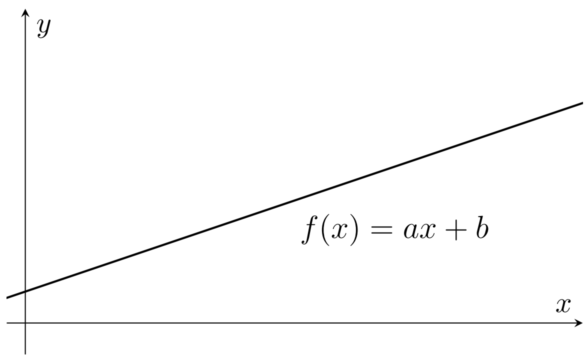
Funktioner (polynomier)

Vi betragtede tidligere første- og andengradsligninger, hvor venstre siden var på formen $ax + b$ og $ax^2 + bx + c$, henholdsvis. Dette er to eksempler på funktionstyper som man kalder polynomier. Disse funktioner vil vi nu studere mere dybdegående.

Førstegradspolynomier: En funktion med forskrift

$$f(x) = ax + b,$$

hvor $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ og $b \in \mathbb{R}$, kaldes for et førstegradspolynomium. I genkender formentlig et førstegradspolynomium som ligningen for en ret linje.



Figur 1: Førstegradspolynomium.

Hvis vi sætter $x = 0$ i vores førstegradspolynomium får vi at

$$f(0) = a \cdot 0 + b = b,$$

hvilket viser at et førstegradspolynomium skærer y-aksen i b. Derudover får vi, hvis vi indsætter $x + 1$ på x plads at

$$f(x + 1) = a(x + 1) + b = a + (ax + b) = a + f(x),$$

hvilket viser at hvis vi går 1 ud ad x-aksen, så gå vi a op ad y-aksen og vi kalder derfor a for hældningen af vores rette linje.

Hvis man får givet to punkter (x_1, y_1) og (x_2, y_2) i et koordinatsystem, så kan man bestemme forskriften for den rette linje der går gennem de to punkter ud fra formlerne

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \qquad \text{og} \qquad b = f(x_1) - ax_1 = y_1 - ax_1.$$

Bemærk, at man også kan bruge punktet (x_2, y_2) til at finde b.

Eksempler:

1. Givet punkterne $P = (1, 7)$ og $Q = (2, 4)$, bestem en forskrift for f:

   Vi udregner først a:

   $$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4 - 7}{2 - 1} = \frac{-3}{1} = -3.$$

   Det bruger vi så sammen med punktet P til at bestemme b:

   $$b = y_1 - ax_1 = 7 - (-3) \cdot 1 = 10,$$

   hvilket giver at forskriften for f er givet ved $f(x) = -3x + 10$.

2. Lad funktionerne f og g være givet ved henholdsvis $f(x) = -x + 2$ og $g(x) = 2x + 2$ og find det punkt hvor de skærer hinanden.

   Vi vil finde den værdi for x der gør at $f(x) = g(x)$. Det gør vi ved at sætte de to forskrifter lig med hinanden og så isolere x:

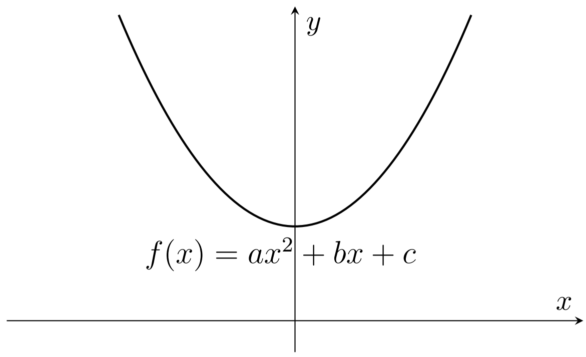
   $$\begin{aligned} f(x) = g(x) &\Leftrightarrow -x + 2 = 2x + 2 \\ &\Leftrightarrow -3x = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0. \end{aligned}$$

   Ved at indsætte $x = 0$ i forskriften for enten f eller g får vi at $y = 2$, hvilket viser at f og g skærer hinanden i punktet $(0, 2)$.

Andengradspolynomier: En funktion med forskrift

$$f(x) = ax^2 + bx + c,$$

hvor $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ og $b, c \in \mathbb{R}$, kaldes for et andengradspolynomium. Grafen for et andengradspolynomium er en parabel (se Figur 2).



Figur 2: Andengradspolynomium.

Ved at sætte $x = 0$ får vi, at et andengradspolynomium skærer y-aksen i

$$f(0) = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = c.$$

Hvis vi differentiere $f(x)$, får vi

$$f'(x) = 2ax + b,$$

og ved igen at indsætte $x = 0$ får vi at $f'(0) = b$. Vi husker at den afledte funktion beskriver hældningen i punktet, hvilket medfører, at b beskriver hvad hældningen af vores andengradspolynomium er i skæringspunktet med y-aksen.

Til sidst ser vi, at hvis x bliver meget stor, så bliver x^2 meget større end x gør. Det betyder, at leddet ax^2 bestemmer om $f(x)$ går mod $+\infty$ eller $-\infty$ når x bliver meget stor. Da x^2 altid er positiv, har vi, at fortegnet på a bestemmer om vores parabel går opad eller nedad.

Hvis man får givet tre punkter (x_1, y_1), (x_2, y_2) og (x_3, y_3), kan man entydigt bestemme det andengradspolynomium der går gennem de punkter ved at løse de tre ligninger med tre ubekendte:

$$\begin{aligned} f(x_1) &= ax_1^2 + bx_1 + c = y_1, \\ f(x_2) &= ax_2^2 + bx_2 + c = y_2, \\ f(x_3) &= ax_3^2 + bx_2 + c = y_3. \end{aligned}$$

Toppunktsformlen: Hvis $a > 0$ i vores andengradspolynomium så kaldes det punkt med den mindste funktionsværdi for andengradspolynomiets toppunkt og hvis $a < 0$ så kaldes punktet med den største funktionsværdi for toppunktet. Vi notere toppunktet med (x_0, y_0), hvor x_0 og y_0 kan bestemmes ud fra formlerne

$$x_0 = \frac{-b}{2a} \qquad \text{og} \qquad y_0 = \frac{-d}{4a},$$

hvor vi husker at $d = b^2 - 4ac$.

Eksempler:

1. Lad $f(x) = 2x^2 + 2x - 2$ og bestem funktionens toppunkt.

   Vi ser at $a = 2$, $b = 2$ og $c = -2$, hvilket medfører at $d = 2^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-2) = 20$. Indsætter vi dette i formlerne for toppunktet får vi

   $$x_0 = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2} \qquad \text{og} \qquad y_0 = \frac{-20}{8} = \frac{-5}{2},$$

   hvilket giver at toppunktet er $\left(\frac{-1}{2}, \frac{-5}{2}\right)$.

2. Givet de tre punkter $(-1, 1)$, $(0, 1)$ og $(-2, -2)$, bestem en ligning for det dertilhørende andengradspolynomium.

   Vi har de tre ligninger

   $$\begin{aligned} a(-1)^2 + b(-1) + c = 1 &\Leftrightarrow a - b + c = 1, \\ a(0)^2 + b(0) + c = 1 &\Leftrightarrow c = 1, \\ a(-2)^2 + b(-2) + c = -2 &\Leftrightarrow 4a - 2b + c = -2. \end{aligned}$$

   Fra ligning to ser vi at $c = 1$ og ved at indsætte dette i de to andre, får vi to ligninger med to ubekendte:

   $$\begin{aligned} a - b + 1 = 1 &\Leftrightarrow a - b = 0, \\ 4a - 2b + 1 = -2 &\Leftrightarrow 4a - 2b = -3. \end{aligned}$$

Hvis vi benytter de lige store koefficienters metode til at løse disse to ligninger, får vi at

$$\begin{aligned} 4a - 2b = -3 &\Leftrightarrow 4a - 2b - 4(a-b) = -3 \\ &\Leftrightarrow 2b = -3 \\ &\Leftrightarrow b = \frac{-3}{2}. \end{aligned}$$

Indsætter vi nu dette i ligningen $a - b = 0$ får vi at $a = \frac{-3}{2}$, så vores andengradspolynomium er:

$$f(x) = -\frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + 1.$$