Opgaver og facit til Math101

Udarbejdet til Math101 kurset på Aalborg Universitet i 2018.

af

Benjamin Buus Støttrup

Senest opdateret 25. marts 2021

Indhold

Introduktion

Dette dokument indeholder en formelsamling, opgaver og facit til anvendelse i kurset Math101. Math101 er et genopfriskningskursus der typisk afholdes i efterårssemestret for de førsteårsstuderende der i løbet af semestret har fundet ud af at deres matematikniveau kunne trænge til løft. Formålet med Math101 er at give deltagerene en genopfriskning af de matematiske regnefærdigheder, primært ved at de skal løse et stort antal opgaver. Math101 kurset blev revideret i 2018 i forbindelse med at Brush-up kurserne også fik en større revidering. Math101 er tiltænkt et tilbud til de studerende der ikke benyttede sig af Brush-up, men som alligevel har brug for mere matisk rutine. Indholdet i Math101 er derfor en kraftigt reduceret version af Brush-up. Selvom emnerne går igen er opgaverne forskellige.

Math 101 består af 9 korte lektioner omhandlende følgende emner

1. Brøker, Potenser, Rødder, Kvadratsætninger.
2. Første- og andengradsligninger.
3. Introduktion til funktioner, herunder første-og andengradspolynomier.
4. Inverse funktioner, Logaritme- og eksponentialfunktioner samt trigonometriske funktioner.
5. Introduktion til differentialregning.
6. Produktregelen, kvotientregelen og kædereglen.
7. Bestemte og ubestemte integraler.
8. Delvis integration og integration ved substitution.

En lektion består typisk af en kort gennemgang af lektionens emne ud fra slides samt regning af opgaver. Alle andre opgaver bør løses uden brug af lommeregner o.l. elektroniske hjælpemidler. *Har man ikke tænkt sig at regne i hånden kan man lige så godt lade være med at regne opgaverne!*. Bagerst i dette dokument findes en liste med svar til opgaverne. Nogle af svarene er med uddybende forklaringer, og det er ikke alle spørgsmål som kun har en løsning.

1. Formelsamling

Nedenfor findes en formelsamling der dækker de emner der gennemgås i dette dokument. Formålet med formelsamlingen er at gøre det nemmere for læseren at løse opgaverne uden at skulle bladre alt for meget i dokumentet. Formelsamlingen er meget kompakt, og er derfor også velegnet til at printe og medbringe til skriftlige eksamener o.l. hvor det er godt at have et kompakt opslagsværk over de mest almindelige formler.

1.1 Brøker

Brøker er tal på formen

$$\frac{a}{b},$$

hvor a, b er tal samt $b \neq 0$. a er *tælleren* og b er *nævneren*.

1.1.1 Regneregler

Der gælder

$$\frac{a}{c} \pm \frac{b}{c} = \frac{a \pm b}{c}, \quad \frac{a}{b}\frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}, \quad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{ad}{bc},$$
$$a\frac{b}{c} = \frac{ab}{c}, \quad \frac{\frac{a}{b}}{c} = \frac{a}{bc}, \quad \frac{a}{\frac{b}{c}} = \frac{ac}{b}.$$

1.1.2 Forkorte/Forlænge Brøker

Fælles faktorer kan forkortes:

$$\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}$$

1.2 Potenser

Potenser er tal på formen x^a, x er *grundtallet* og a er *eksponenten*.

1.2.1 Regneregler

Der gælder

$$x^a x^b = x^{a+b}, \quad \frac{x^a}{x^b} = x^{a-b}, \quad (xy)^a = x^a y^a,$$
$$\left(\frac{x}{y}\right)^a = \frac{x^a}{y^a}, \quad (x^a)^b = x^{ab}, \quad x^{-a} = \frac{1}{x^a}.$$

1.3 Rødder

Hvis $x \geq 0$ og $n \in \mathbf{Z}_+$ så findes et tal $\sqrt[n]{x} > 0$ så

$$(\sqrt[n]{x})^n = x.$$

Bemærk at $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$.

1.3.1 Regneregler

Der gælder

$$\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}, \quad \sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{x})^m,$$
$$\sqrt[n]{xy} = \sqrt[n]{x}\sqrt[n]{y}, \quad \sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}.$$

1.4 Kvadratsætninger

Der gælder

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$
$$(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$$
$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2.$$

1.5 Ligninger

Ligninger kan reduceres med følgende regler:

1. Man må lægge til/trække fra med det samme tal på begge sider af et lighedstegn.
2. Man må gange/dividere med det samme tal (undtagen 0) på begge sider af et lighedstegn.

1.5.1 Andengradsligninger

Andengradsligninger er på formen

$$ax^2 + bx + c = 0, \tag{1.1}$$

Løsningerne til (1.1) er

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

1.5.2 Faktorisering

Hvis $ax^2 + bx + c = 0$ har rødder r_1 og r_2 så gælder.

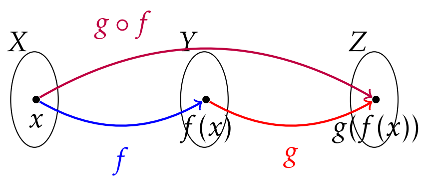
$$ax^2 + bx + c = a(x - r_1)(x - r_2).$$

1.6 Funktioner

En funktion $f\colon X \to Y$ tildeler alle $x \in X$ *præcis ét* element $f(x) \in Y$.

1.6.1 Sammensatte funktioner

Hvis $f\colon X \to Y$ og $g\colon Y \to Z$ defineres sammensætningen $g \circ f\colon X \to Z$ ved $(g \circ f)(x) = g(f(x))$. f er den *indre funktion*, g er den *ydre funktion*



1.6.2 Inverse funktioner

To funktioner $f\colon X \to Y$ og $g\colon Y \to X$ er hinandens *inverse* hvis

$$f(g(y)) = y, \quad \text{og} \quad g(f(x)) = x$$

for alle x i X og y i Y.

1.6.3 Polynomier

Et førstegradspolynomium har forskrift:

$$f(x) = ax + b.$$

Et andengradspolynomium har forskrift:

$$f(x) = ax^2 + bx + c.$$

1.6.4 Logaritmer og eksponentialfunktioner

Logaritmen med grundtal a, $\log_a\colon]0, \infty[\to \mathbf{R}$ er invers til eksponentialfunktionen $f_a(x) = a^x$ ($a > 0$, $a \neq 1$). Der gælder at

$$\log_a(a^x) = x \quad \text{og} \quad a^{\log_a(y)} = y$$

og vi har

$$\ln x = \log_e x, \qquad \log x = \log_{10} x$$

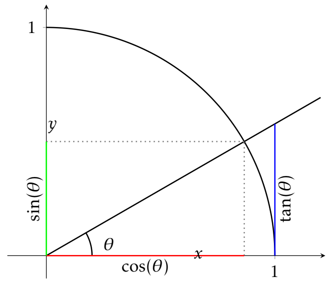
1.6.5 Regneregler

Der gælder

$$\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y),$$
$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y),$$
$$\log_a(x^r) = r\log_a(x).$$

1.7 Trigonometriske funktioner

De trigonometriske funktioner er defineret ud fra enhedscirklen:



Der gælder at $\tan(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}$ samt

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\theta$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	-

1.8 Differentialregning

Den afledede af f skrives som $f' = \frac{d}{dx}f = \frac{df}{dx}$.

1.8.1 Regneregler

Der gælder at

$f(x)$	$f'(x)$
c	0
x	1
x^n	nx^{n-1}
e^x	e^x
e^{cx}	ce^{cx}
a^x	$a^x \ln a$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\cos x$	$-\sin x$
$\sin x$	$\cos x$
$\tan x$	$1 + \tan^2(x)$

1.8.2 Generelle regneregler

Der gælder at

$$(cf)'(x) = cf'(x)$$
$$(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$$
$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$
$$\frac{d}{dx}f(g(x)) = f'(g(x))g'(x).$$

Den sidste regneregel kaldes *kædereglen*.

1.9 Ubestemte integraler

En funktion f har *stamfunktion* F hvis

$$F'(x) = f(x).$$

Det ubestemte integral af f er

$$\int f(x)\,dx = F(x) + k,$$

hvor $F'(x) = f(x)$ og $k \in \mathbf{R}$.

1.9.1 Generelle regneregler

$$\int cf(x)\,dx = c\int f(x)\,dx$$

$$\int f(x) \pm g(x)\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx.$$

$$\int f(x)g(x)\,dx = f(x)G(x) - \int f'(x)G(x)\,dx$$

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = F(g(x)) + k.$$

Den 3. regel kaldes *delvis integration* og den sidste kaldes *integration ved substitution*.

1.9.2 Regneregler

Der gælder at

$f(x)$	$\int f(x)\,dx$
c	$cx + k$
x	$\frac{1}{2}x^2 + k$
x^n	$\frac{1}{n+1}x^{n+1} + k$
e^x	$e^x + k$
e^{cx}	$\frac{1}{c}e^{cx} + k$
$\frac{1}{x}$	$\ln(\lvert x\rvert) + k$
$\ln x$	$x\ln(x) - x + k$
$\cos x$	$\sin x + k$
$\sin x$	$-\cos x + k$
$\tan x$	$-\ln(\lvert\cos(x)\rvert) + k$

1.9.3 Integration ved substitution

Givet et integral på formen $\int f(g(x))g'(x)\,dx$ anvendes metoden:

1. Lad $u = g(x)$.
2. Udregn $\frac{du}{dx}$ og isoler dx.
3. Substituer $g(x)$ og dx.
4. Udregn integralet mht. u.
5. Substituer tilbage.

1.10 Besemte integraler

Det bestemte integral af f i intervallet $[a,b]$ til

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a),$$

hvor F er en stamfunktion til f.

1.10.1 Generelle regneregler

$$\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx$$

$$\int_a^b f(x) \pm g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$$

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = [f(x)G(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)G(x)\,dx$$

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = [F(x)]_{g(a)}^{g(b)}.$$

1.10.2 Integration ved substitution

Givet et integral på formen $\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx$ anvendes metoden

1. Lad $u = g(x)$.
2. Udregn $\frac{du}{dx}$ og isoler dx.
3. Substituer $g(x)$, dx samt grænser.
4. Udregn integralet mht. u.

2. Opgaver

2.1 Brøker, Potenser, Rødder, Kvadratsætninger

1. Omskriv følgende tal til brøker hvor nævneren er 7:
$$2, \qquad \frac{2}{14}, \qquad \frac{50}{35}, \qquad \frac{3}{-7}.$$
2. Udregn følgende potenser:
$$3^2, \qquad (-1)^3, \qquad 2^3, \qquad 5^2, \qquad (-2)^{-2}.$$
3. Udregn følgende:
$$\sqrt{0}, \qquad \sqrt{9}, \qquad \sqrt{\frac{1}{36}}, \qquad \sqrt{\sqrt{16}}.$$
4. Reducer følgende udtryk
$$(x-1)^2-(x-1)(x+1), \qquad (3x+y)^2-(x^2+5xy).$$
5. Udregn følgende tal (forkort mest muligt):
$$\frac{2}{3}-\frac{4}{3}, \qquad 4\cdot\frac{3}{8}, \qquad \frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}, \qquad \frac{5}{4}\cdot\frac{3}{2}, \qquad \frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{4}}.$$
6. Udregn følgende potenser
$$\left(\frac{3}{2}\right)^3, \qquad \frac{2^2}{2^5}, \qquad 3^2\cdot 3^{-2}, \qquad \frac{2^{-10}}{2^{-11}}.$$
7. Reducer følgende brøker:
$$\frac{x^2+4-4x}{x-2}, \qquad \frac{4x^2-4}{4x+4}, \qquad \frac{2x^2+6x}{x^2+9+6x}.$$
8. Reducer følgende udtryk:
$$\frac{\sqrt{8}}{2}, \qquad \frac{2}{\sqrt{2}}, \qquad \frac{\sqrt{27}}{\sqrt{54}}, \qquad \frac{4}{\sqrt{8}}.$$
9. Udregn følgende tal
$$\frac{4}{5}\left(\frac{1}{3}+\frac{5}{12}\right), \qquad \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)\left(\frac{12}{20}-\frac{1}{5}\right).$$
10. Reducer udtrykkene:
$$\frac{(xy^2)^2}{xy^3}, \qquad \frac{(x^2)^{-1}}{x}, \qquad (3x)^2x^3.$$
11. Omskriv til potenser:
$$x\sqrt{x}, \qquad \sqrt{x^5}, \qquad \frac{\sqrt{x}}{x^2}, \qquad x^2\sqrt[3]{x}.$$

2.2 Første- og andengradsligninger

1. Løs ligningerne

$$4x+2=26, \qquad -3x-5=0, \qquad -5x+7=-28, \qquad 8x+13=5.$$

2. Løs ligningerne

$$x^2=9, \qquad (x-3)(x+7)=0, \qquad 2x^2-6x+4=0, \qquad x^2+4x-5=0.$$

3. Løs ligningerne

$$3x+7=-(2x+3), \qquad 3(x-4)=2(x+1), \qquad -3x-2=-x+3.$$

4. Løs ligningerne

$$2x^2-6x=0, \qquad 3x^2-2x=0, \qquad x^2=\frac{1}{2}x, \qquad 25\left(\frac{x}{2}\right)^2=1.$$

5. Bestem a så ligningen

$$ax-\frac{1}{2}=7x+\frac{3}{2}$$

ikke har nogen løsninger.

6. Brug faktorisering af polynomier til at forkorte følgende brøker:

$$\frac{x^2-25}{x^2+4x-5}, \qquad \frac{x^2-3x+2}{x^2-5x+6}, \qquad \frac{(x+2)(x^2-3x-10)}{x^2+4x+4}.$$

7. Bestem a så $x=2$ bliver en løsning til ligningen

$$\frac{a}{4}+ax=1.$$

8. Løs ligningerne

$$-(x+3)+2x=2(x-1)-x-1, \qquad 3(x-3)+2=3x-5.$$

9. Løs ligningerne

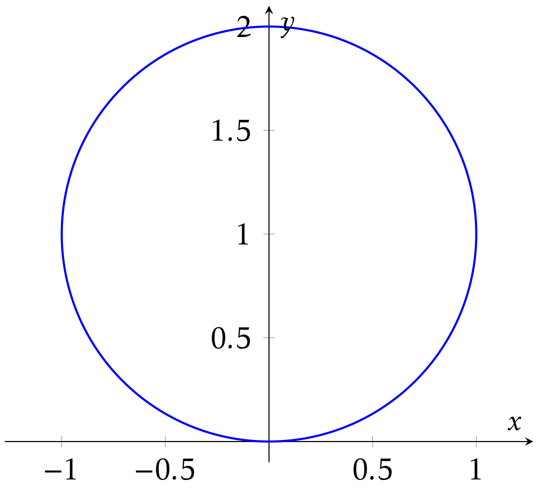
$$\frac{2}{3}\left(x-\frac{4}{5}\right)=\frac{2}{3}, \qquad \frac{1}{3}(x-2)=-\frac{2}{5}\left(x-\frac{3}{4}\right)$$

10. Løs ligningerne

$$-\frac{1}{4}x^2-2x=-5, \qquad \frac{1}{2}x^2+3x=-\frac{5}{2}, \qquad x^2-\frac{5}{6}x+\frac{1}{6}=0, \qquad 2x^2=1000.$$

11. Løs ligningerne

$$\sqrt{2}x+1=\sqrt{2}+5, \qquad \pi(2x-6)=\sqrt{8}x+12, \qquad \sqrt{2}(2\sqrt{2}x+\sqrt{8})=x-1.$$



Figur 2.1: Opgave 2.

12. Opskriv en andengradsligning på formen $x^2 + bx + c = 0$ med rødderne

$$1 \text{ og } 1, \qquad \frac{1}{3} \text{ og } -1, \qquad -\sqrt{2} \text{ og } \sqrt{8}.$$

13. For hvilke b har ligningen

$$\frac{7}{6}x^2 + bx + \frac{21}{2} = 0,$$

præcis en løsning?

14. Bestem løsningerne til ligningerne

$$x^4 - 3x^2 + 2 = 0, \qquad x^4 = \frac{17}{4}x^2 - 1.$$

(Hint: Lad $y = x^2$.)

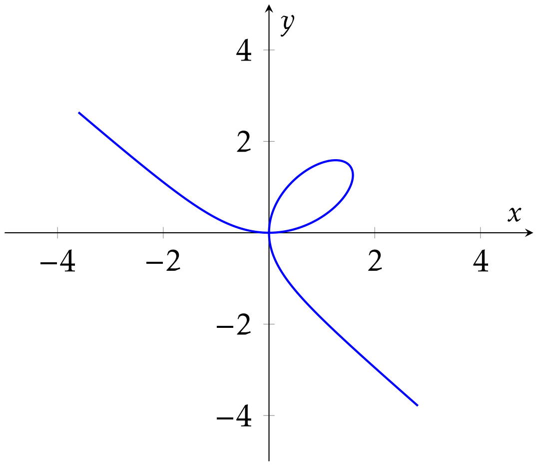
2.3 Introduktion til funktioner, herunder første-og andengradspolynomier

1. Lad $f(x) = 3x^2 + 2x + 1$. Bestem $f(-1)$ og $f(2)$.

2. Cirklen med ligning $x^2 + (y-1)^2 = 1$ er tegnet i Figur 2.1.

   - Findes en funktion $f : [-1,1] \to [0,2]$ så grafen for f svarer til cirklen i Figur 2.1?
   - Bestem en funktion $f_+ : [-1,1] \to [1,2]$ så grafen for f_+ svarer til den øvre halvcirkel i Figur 2.1. (Hint: isoler y i cirklens ligning.)
   - Bestem en funktion $f_- : [-1,1] \to [0,1]$ så grafen for f_- svarer til den nedre halvcirkel i Figur 2.1.

3. Lad $f(x) = 3x - 2$ og $g(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$. Bestem forskriften for $f \circ g$.



Figur 2.2: Opgave 13.

4. Bestem den størst mulige definitionsmængde for funktionerne:

$$f(x) = \frac{1}{1-x}, \qquad g(x) = \frac{1}{1-x^2}, \qquad h(x) = \sqrt{2x-3}.$$

5. Lad f, g være givet ved $f(x) = \sqrt{x}$ og $g(x) = 1/(1+x)$ på domænet $(0, \infty)$. Udregn $(f \circ g)(1)$ og $(g \circ f)(1)$. Er $f \circ g = g \circ f$?

6. Bestem skæringspunktet mellem $f(x) = 3x + 1$ og $g(x) = -x + 2$.

7. Lad $f(x) = 1$ og $g(x) = 2x + 3$. Bestem $f \circ g$ og $g \circ f$.

8. Bestem den størst mulige definitionsmængde for funktionerne

$$f(x) = \frac{1}{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}}, \qquad g(x) = \frac{2}{x^2 - 4x + 3}, \qquad h(x) = \sqrt{-x^2 + 2x}.$$

9. Bestem funktioner f og g så $(f \circ g)(x) = e^{2x^2-1}$.

10. Bestem alle skæringspunkter mellem $f(x) = x^2 + 4x + 4$ og $g(x) = 2x + 3$.

11. Bestem funktioner f, g og h så at $(f \circ g \circ h)(x) = \sin^2(3x)$. (Hint: $\sin^2(x) = (\sin(x))^2$.)

12. Lad $f(x) = 3(\frac{1}{x-2})^2$, $g(x) = \frac{1}{x}$ og $h(x) = \sqrt{x} + 2$ være funktioner på domænet $]2, \infty[$. Bestem

$$f(g(x)), \qquad f(h(x)), \qquad h(g(x)), \qquad h(f(x)), \qquad g(f(h(x))).$$

13. Er kurven i Figur 2.2 grafen for en funktion?

14. Skitser grafen for en funktion som opfylder alle nedenstående puntker:

    (a) har domæne $[-1, 1]$,

    (b) går gennem punkterne $(-1, 0)$ og $(1, 1)$,

    (c) skærer y-aksen i -1,

2.4 Inverse funktioner, logaritme- og eksponentialfunktioner samt trigonometriske funktioner

1. Udregn følgende tal

$$3^3, \qquad 2^{-1}, \qquad \left(\frac{1}{-1}\right)^3, \qquad \left(\frac{1}{2}\right)^{-3}, \qquad 123^0.$$

2. Udregn følgende tal

$$\log_2(128), \qquad \log_{10}(100), \qquad \log_5\left(\frac{1}{25}\right), \qquad \ln(e^3), \qquad \log_{123}(1).$$

3. Udregn følgende tal

$$\sin(\frac{\pi}{4}) + \cos(\frac{\pi}{4}), \qquad \tan(\frac{\pi}{3}) + \cos(\frac{\pi}{6}), \qquad \frac{\sin(\frac{\pi}{6}) + \cos(\frac{\pi}{3})}{\sin(\frac{2\pi}{3})}.$$

4. Udregn følgende tal

$$\log_{10}(4) + \log_{10}(250), \quad \log_{10}(25) - \log_{10}(5) + \log_{10}(2), \quad \log_3(54) + \log_3\left(\frac{1}{2}\right)$$

5. Udregn følgende

$$\cos(-\frac{5\pi}{4}), \qquad \sin(\frac{5\pi}{3}), \qquad \tan(-\frac{5\pi}{4}), \qquad \cos(\frac{8\pi}{3}).$$

6. Reducer følgende

$$\ln(\sqrt{2}) + \ln(2), \qquad \log_{10}(5^{3/2}) + \frac{1}{2}\log_{10}(5) + \log_{10}(4), \qquad \frac{1}{4}\log_5(4^2 + 3^2).$$

7. Udregn følgende tal

$$3^{\log_3(1)}, \qquad e^{1+\ln(3)}, \qquad 10^{-\log_{10}(7)}, \qquad 7^{1-\log_7(9)}, \qquad 4^{-\log_2(3)}.$$

8. Udregn

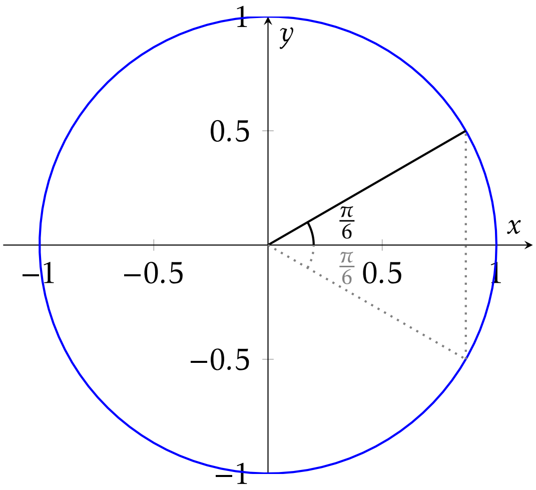
$$\cos(\frac{13\pi}{3}), \qquad \tan(\frac{12\pi}{6}), \qquad \sin(-\frac{10\pi}{4}), \qquad \tan(\frac{15\pi}{5}).$$

9. Løs ligningerne

$$e^x = 3, \qquad \ln(x) = 4, \qquad \ln(2x-4) = \ln(8) + \ln(4), \qquad 3\log_{10}(x) = \log_{10}(27).$$

10. Bestem to forskellige løsninger til ligningerne

$$\sin(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad \cos(x-\pi) = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad 2\cos^2(x) + 5\cos(x) + 2 = 0.$$



Figur 2.3: Opgave 11

11. I denne opgave beviser vi nogle af de eksakte værdier for sinus og cosinus til vinklerne $\frac{\pi}{6}$ og $\frac{\pi}{6}$.

    (a) Vis at $\sin(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$ ved at regne på trekanten i Figur 2.3. (Hint: Hvad kan man sige om sidelængderne i trekanten?)

    (b) Brug idiotformlen $(\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1)$ til at vise at $\cos(\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

    (c) Vis at $\sin(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$. (Hint: $\sin(\frac{\pi}{3}) = \sin(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6}) = 2\sin(\frac{\pi}{6})\cos(\frac{\pi}{6})$)

    (d) Brug idiotformlen til at vise at $\cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$.

12. I denne opgave beviser vi nogle af de eksakte værdier for sinus og cosinus til vinklen $\frac{\pi}{4}$.

    (a) Vis at $\sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ved at regne på trekanten i Figur 2.4.(Hint: Pythagoras)

    (b) Brug idiotformlen til at vise at $\cos(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

2.5 Introduktion til differentialregning

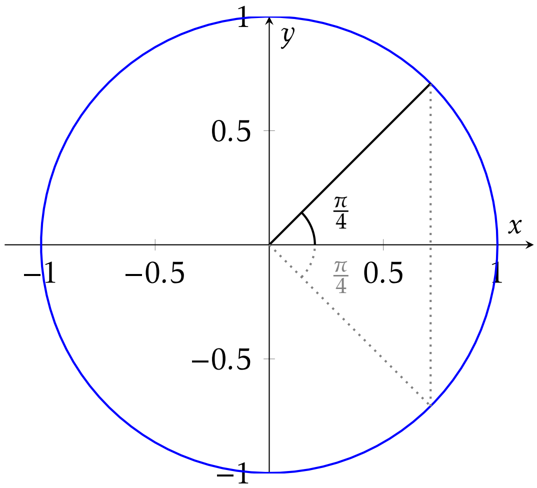
1. Differentier funktionerne

$$f_1(x) = 2x + 1, \qquad f_2(x) = x + \cos(x), \qquad f_3(x) = e^x - 1, \qquad f_4(x) = \frac{1}{4}x^2 + \ln(x).$$

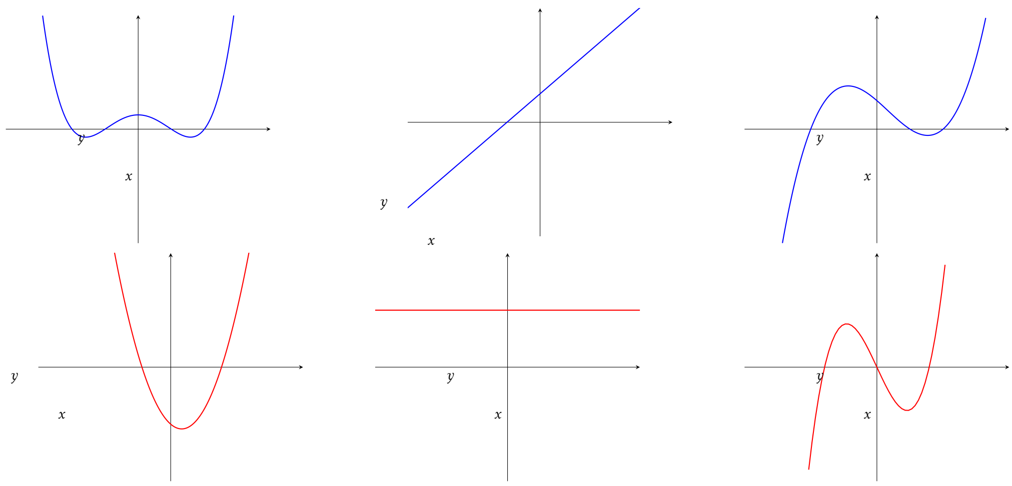
2. Bestem hældningen af funkionen $f(x) = x^3 + x^2 - x$ i punkterne $x = 0$ og $x = 1$.

3. Brug regnereglen $\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$ til at differentiere funktionerne

$$f_1(x) = x^3, \qquad f_2(x) = \sqrt{x}, \qquad f_3(x) = \frac{1}{x}, \qquad f_4(x) = \frac{1}{x^2}, \qquad f_5(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}.$$



Figur 2.4: Opgave 12



Figur 2.5: Opgave 4

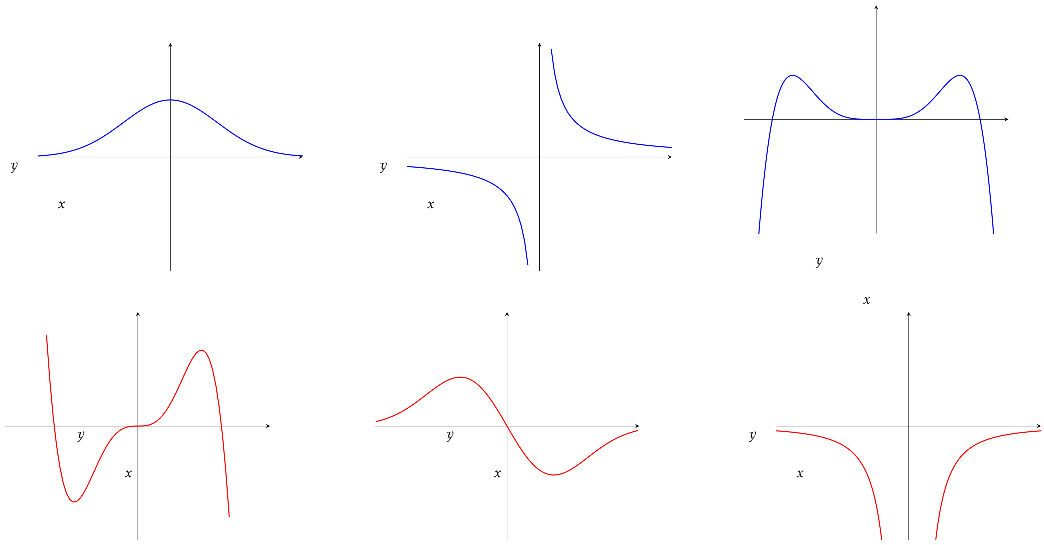
4. Bestem for hver af de blå grafer i Figur 2.5 hvilken af de røde grafer der beskriver den afledede.

5. Differentier funktionerne
$$f(x) = 3e^{2x} - \frac{1}{2}\ln x, \qquad g(x) = \frac{1}{2}\sin x, \qquad h(x) = \ln\left(\frac{x}{2}\right) + 3e^{-\frac{1}{6}x}.$$

6. Differentier funktionerne
$$f(x) = x^7 - 2x^4 - 3x^2, \qquad g(x) = -x^5 + 4x^{\frac{3}{2}} - x^{-2}, \qquad h(x) = \sqrt{x} + \frac{2}{x}.$$

7. Bestem, for hver af de følgende funktioner, de punkter hvor tangenthældningen er 2.
$$f(x) = x^3 + 2x, \qquad f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 2x - 1.$$

8. Differentier funktionerne
$$f(x) = 3\sqrt[3]{x}, \qquad f(x) = (3x+4)x^2.$$



Figur 2.6: Opgave 10

9. Differentier funktionerne

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}+1}{x}, \qquad f(x) = \frac{x^2\sqrt{x^3}}{x^{-1/4}}, \qquad f(x) = \ln\frac{1}{x^2}$$

10. Bestem for hver af de blå grafer i Figur 2.6 hvilken af de røde grafer der beskriver den afledede.

11. Differentier funktionerne

$$f(x) = -\ln\left(\frac{1}{x^{-5}}\right), \qquad f(x) = \sqrt[3]{e^{9x}}.$$

2.6 Produktregelen, kvotientregelen og kædereglen

1. Differentier funktionerne

$$f_1(x) = \sqrt{x^2+1}, \qquad f_2(x) = \frac{x}{2x+1}, \qquad f_3(x) = x\sin(x).$$

2. Differentier funktionerne:

$$f_1(x) = xe^x, \qquad f_2(x) = 2x^2\cos(x), \qquad f_3(x) = \ln(x)e^x, \qquad f_4(x) = \sin(x)\cos(x).$$

3. Differentier funktionerne (lad evt. være med at forkorte):

$$f_1(x) = \frac{x}{x-1}, \qquad f_2(x) = \frac{x^2-x+1}{3x+2}, \qquad f_3(x) = \frac{x^2}{x^3-2x^2}.$$

4. Differentier funktionerne

$$f_1(x) = (3x-1)^{\frac{4}{3}}, \qquad f_2(x) = \ln(x^2+3x), \qquad f_3(x) = e^{2-x}, \qquad f_4(x) = \sin(x^3).$$

5. Bestem den afledede af funktionen $f(x) = (x-1)e^x$.

6. Bestem den afledede af funktionen $f(x) = x\ln(x) - x$.

7. Differentier funktionerne

$$f_1(x) = e^{x^3}, \qquad f_2(x) = \cos^2(x), \qquad f_3(x) = \sin^3(x) \qquad f_4(x) = 2\tan(x^2).$$

8. Vis at

$$\frac{d}{dx}\tan x = 1 + \tan^2 x.$$

(Hint: Brug $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$)

9. Differentier funktionen $f(x) = \frac{xe^x}{\cos(x)}$.

10. Differentier funktionen

$$f(x) = \cos^2(\sqrt{x^2+1}).$$

11. Differentier funktionerne

$$f_1(x) = \frac{\cos^2(x)}{\sin(x)}, \qquad f_2(x) = \frac{e^{x^2}}{x}, \qquad f_3(x) = \frac{x\cos(x)}{e^x}$$

12. Differentier funktionerne

$$f(x) = \frac{x^2e^x}{-x\ln(x)}, \qquad g(x) = xe^x \ln x, \qquad h(x) = \tan(x)e^x\cos(x)x^2$$

2.7 Bestemte og ubestemte integraler

1. Er $F(x) = 2x^3 - x^2 + x - 7$ stamfunktion til $f(x) = 6x^2 - 2x + 1$?

2. Er $F(x) = (x-1)e^x$ stamfunktion til $f(x) = 2xe^x$?

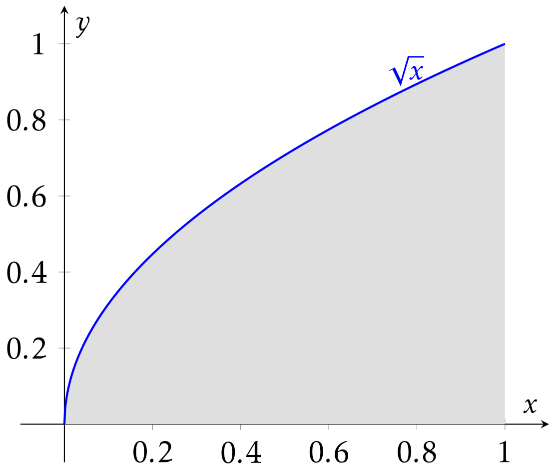
3. Bestem en stamfunktion til funktionen f givet ved $f(x) = 3x - 7$ som går gennem punktet $(1,7)$.

4. Udregn følgende bestemte integraler:

$$\int_0^1 x^2\,dx, \qquad \int_{-1}^1 x^3 + x\,dx, \qquad \int_1^2 \frac{2}{x}\,dx.$$

5. Udregn følgende ubestemte integraler:

$$\int x - 1\,dx, \qquad \int x^2 + e^x\,dx, \qquad \int 2\sin(x)\,dx.$$



Figur 2.7: Opgave 12

6. Udregn følgende bestemte integraler:

$$\int_0^{2\pi} \cos(x)\,dx, \qquad \int_{-1}^{2} e^x\,dx, \qquad \int_{\pi}^{2\pi} \sin(x)\,dx.$$

7. Udregn følgende ubestemte integraler:

$$\int x^{-2} - e^{3x}\,dx, \qquad \int e^x - \frac{2}{x}\,dx$$

8. Udregn følgende bestemte integraler:

$$\int_0^1 e^{2x}\,dx, \qquad \int_{-3}^{1} x^2 - 7x + 1\,dx, \qquad \int_{-1}^{0} \sin(x) + x\,dx.$$

9. Vis at funktionen $F(x) = \frac{5}{7}x^{\frac{14}{5}}$ er en stamfunktion til $f(x) = 2x^{\frac{9}{5}}$.

10. Udregn følgende integraler

$$\int 3x^2 + 2x\,dx, \qquad \int 3(e^{6x} - \cos x)\,dx, \qquad \int \ln(x) - \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx.$$

11. Udregn følgende integraler

$$\int \frac{2}{x} + 3\sqrt{x} + 4x\,dx, \qquad \int \frac{5}{4}x^{\frac{3}{8}} - \frac{1}{x^{-2}}\,dx, \qquad \int x^{\frac{5}{4}} - \sqrt[4]{x^5}\,dx$$

12. Hvor stor en del udgør det grå areal i Figur 2.7 af arealet af kvadratet med hjørner $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$ og $(1,1)$.

13. Vis at

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx.$$

(Hint: Regn på højresiden.)

14. Vis at
$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx,$$
(Hint: Regn på højresiden.)

2.8 Delvis integration og integration ved substitution

1. Udregn følgende ubestemte integraler
$$\int x\cos x\,dx, \qquad \int x\ln x\,dx, \qquad \int xe^x\,dx$$

2. Udregn følgende ubestemte integraler:
$$\int \cos(2x)\,dx, \qquad \int (1-x)^2\,dx, \qquad \int e^{2x-3}\,dx.$$

3. Udregn følgende bestemte integraler
$$\int_0^{2\pi} x\cos(x)\,dx, \qquad \int_{-1}^0 xe^x\,dx, \qquad \int_1^2 x\ln(x)\,dx.$$

4. Udregn følgende bestemte integraler
$$\int_{-\frac{\pi}{9}}^0 \sin(3x)\,dx, \qquad \int_0^2 xe^{x^2}\,dx, \qquad \int_1^2 \frac{2x+1}{x^2+x-1}\,dx.$$

5. Udregn følgende integraler
$$\int (x+1)\sin(x)\,dx, \qquad \int_1^3 (2x-1)e^{2x}\,dx.$$

6. Udregn følgende integraler
$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos(x)\sin^2(x)\,dx, \qquad \int_0^1 \frac{x^2}{(1+x^3)^2}\,dx$$

7. Udregn følgende integraler
$$\int x^2e^x\,dx, \qquad \int_0^\pi x^2\sin(x)\,dx$$

8. Udregn følgende integraler
$$\int \frac{1}{\sqrt{2x-1}}\,dx, \qquad \int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{6}}} 6x\cos(x^2)\sqrt{\sin(x^2)}\,dx$$

9. Udregn
$$\int_0^\pi \sin(x)\cos(x)\,dx.$$

3. Repetition

Dette afsnit indeholder repetitionsopgaver som dækker de fleste af de emner der er gennemgået i disse noter. Hvis man kan løse disse opgaver uden de store problemer, så har man et fornuftigt udgangspunkt til at komme helskindet igennem diverse matematikkurser på Aalborg Universitet.

3.1 Repetition

1. Udregn

$$2+\frac{4}{2}\cdot 3, \qquad 1-\frac{3}{2}\cdot 4, \qquad \frac{1}{3}+\frac{2}{5}, \qquad \frac{2}{3}+1.$$

2. Udregn

$$\frac{3^3\cdot 3^{-2}}{3^4}\cdot\frac{(-3)}{3^{-2}}, \qquad (-3\sqrt{5})^2, \qquad \frac{\frac{2}{3}+\frac{3}{4}}{\frac{5}{2}}, \qquad \sqrt{7+(3\sqrt{2})^2}.$$

3. Udregn

$$\sin(\frac{\pi}{6})+\cos(\frac{3\pi}{4})-\cos(-\pi), \qquad \log(20)+\log(50), \qquad \ln(e^3)+\ln(1).$$

4. Reducer udrtykkene

$$(x+5)^2, \qquad (1-2x)^2, \qquad (2y-1)(2y+1), \qquad (x^2+y^2)-(2x^2-y^2).$$

5. Reducer udtrykkene

$$\frac{x^2+y^2-2xy}{x^2-xy}, \qquad \frac{x^2-y^2}{x^2-xy}, \qquad \frac{y^2-x^2}{x+y}+x.$$

6. Løs ligningerne

$$-2x+3=7, \qquad \frac{2}{3}x-3=\frac{6}{5}, \qquad x^2-2x-3=0.$$

7. Løs ligningerne

$$\frac{2}{x}+2x=3x, \qquad -2x^2+x+1=0.$$

8. Bestem mindst en løsning til ligningerne

$$e^{2x-1}-1=0, \qquad \sin(x-\pi)=\frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad \ln(x-1)=\ln(12)-\ln(4).$$

9. For hvilke værdier af a er følgende udtryk sande

$$\frac{1}{1+a} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}+a}, \qquad \frac{1}{1+a} = \frac{1-a}{1-a^2},$$
$$\frac{1}{1+a} = \frac{1+a}{a^2+2a+1}, \qquad \frac{1}{1+a} = 1 + \frac{1}{a}.$$

10. Differentier funktionerne

$$f(x) = 2x^3 - x^2 + 1, \qquad g(x) = 2x^{-2} + x, \qquad h(x) = \frac{2}{x} + x.$$

11. Bestem følgende integraler

$$\int 2x^2 + 1\,dx, \qquad \int_0^1 x^2 - 3x + 1\,dx, \qquad \int_0^4 \frac{1}{\sqrt{x}} + x\,dx.$$

12. Differentier funktionerne

$$f(x) = 2x^3 - x^{-2} + 4x^{-1} - 1,$$
$$g(x) = 3xe^3 - \sqrt{x-1},$$
$$h(x) = 2xe^x - \sin(x^2 - x).$$

13. Udregn integralerne

$$\int 2e^{-x}\,dx, \qquad \int_0^1 4xe^{x^2}\,dx, \qquad \int_0^2 \frac{2x}{\sqrt{x^2+5}}\,dx$$

4. Facit

4.1 Brøker, Potenser, Rødder, Kvadratsætninger

1. Svarene er:
$$\frac{14}{7}, \qquad \frac{1}{7}, \qquad \frac{10}{7}, \qquad \frac{-3}{7}.$$

2. Svarene er:
$$9, \qquad -1, \qquad 8, \qquad 25, \qquad \frac{1}{4}.$$

3. Svarene er:
$$0, \qquad 3, \qquad \frac{1}{6}, \qquad 2.$$

4. Svarene er:
$$2-2x, \qquad 8x^2+y^2+xy.$$

5. Svarene er:
$$-\frac{2}{3}, \qquad \frac{3}{2}, \qquad \frac{5}{12}, \qquad \frac{15}{8}, \qquad 6.$$

6. Svarene er:
$$\frac{27}{8}, \qquad \frac{1}{8}, \qquad 1, \qquad 2.$$

7. Svarene er:
$$x-2, \qquad x-1, \qquad \frac{2x}{x+3}.$$

8. Svarene er:
$$\sqrt{2}, \qquad \sqrt{2}, \qquad \frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad \sqrt{2}.$$

9. Svarene er:
$$\frac{3}{5}, \qquad \frac{3}{10}.$$

10. Svarene er:
$$xy, \qquad x^{-3}, \qquad 9x^5.$$

11. Svarene er:
$$x^{\frac{3}{2}}, \qquad x^{\frac{5}{2}}, \qquad x^{-\frac{3}{2}}, \qquad x^{\frac{7}{3}}.$$

4.2 Første- og andengradsligninger

1. Svarene er:

$$x = 6, \qquad x = -\frac{5}{3}, \qquad x = 7, \qquad x = -1.$$

2. Svarene er:

$$x = \pm 3, \qquad x = 3, x = -7, \qquad x = 1, x = 2, \qquad x = 1, x = -5.$$

3. Svarene er:

$$x = -2, \qquad x = 14, \qquad x = -\frac{5}{2}.$$

4. Svarene er:

$$x = 0, x = 3, \qquad x = 0, x = \frac{2}{3}, \qquad x = 0, x = \frac{1}{2}, \qquad x = \pm\frac{2}{5}.$$

5. Svaret er $a = 7$.

6. Svarene er:

$$\frac{x-5}{x-1}, \qquad \frac{x-1}{x-3}, \qquad x-5.$$

7. Svaret er $a = \frac{4}{9}$.

8. Løsningsmængderne er

$$\mathbf{R}, \qquad \emptyset.$$

9. Svarene er:

$$x = \frac{9}{5}, \qquad x = \frac{29}{22}.$$

10. Svarene er:

$$x = 2, x = -10, \qquad x = -5, x = -1, \qquad x = \frac{1}{2}, x = \frac{1}{3}, \qquad x = \pm 10\sqrt{5}.$$

11. Svarene er:

$$x = 1 + 2\sqrt{2}, \qquad x = \frac{3(2+\pi)}{\pi - \sqrt{2}}, \qquad x = -\frac{5}{3}.$$

12. Svarene er:

$$x^2 + 1 - 2x = 0, \qquad x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{1}{3} = 0, \qquad x^2 - \sqrt{2}x - 4 = 0.$$

13. Svaret er: $b = \pm 7$.

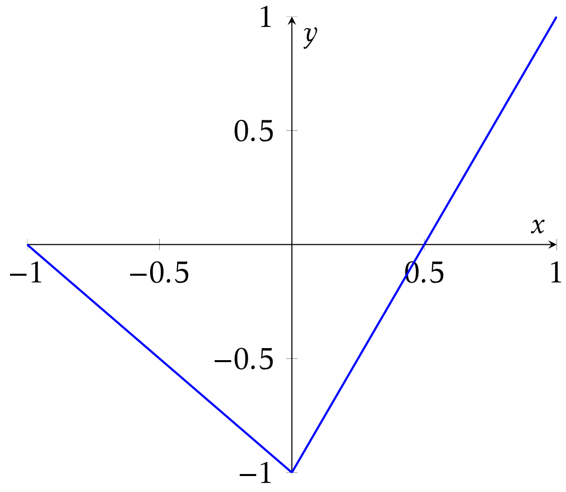
14. Svarene er:

$$x = \pm 1, x = \pm 2, \qquad x = \pm 2, x = \pm\frac{1}{2}.$$

4.3 Introduktion til funktioner, herunder første-og andengradspolynomier

1. Svarene er: $f(-1) = 2$ og $f(2) = 17$.
2. Svarene er:
   - Nej fordi i såfald skulle $f(0)$ være lig med både 2 og 0 samtidig.
   - $f_+(x) = 1 + \sqrt{1-x^2}$.
   - $f_-(x) = 1 - \sqrt{1-x^2}$
3. Svaret er $(f \circ g)(x) = x$.
4. Svarene er:
$$D(f) = \mathbf{R} \setminus \{1\}, \qquad D(g) = \mathbf{R} \setminus \{-1,1\}, \qquad D(h) = [\frac{3}{2}, \infty[.$$
5. Svarene er $(f \circ g)(1) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ og $(g \circ f)(1) = \frac{1}{2}$, hvorfor $f \circ g \neq g \circ f$?
6. Skæringspunktet er $(\frac{1}{4}, \frac{7}{4})$.
7. Svarene er $(f \circ g)(x) = 1$ og $(g \circ f)(x) = 5$.
8. Svarene er:
$$D(f) = \mathbf{R}, \qquad D(g) = \mathbf{R} \setminus \{1,3\}, \qquad D(h) = [0,2].$$
9. Tag $f(x) = e^x$ og $g(x) = 2x^2 - 1$.
10. Skæringspunktet er $(-1, 1)$.
11. Tag $f(x) = x^2$, $g(x) = \sin(x)$ og $h(x) = 3x$.
12. Svarene er:
$$f(g(x)) = \frac{3x^2}{(1-2x)^2}, \qquad f(h(x)) = \frac{3}{x}, \qquad h(g(x)) = \frac{1}{\sqrt{x}} + 2,$$
$$h(f(x)) = \sqrt{3}\frac{1}{x-2} + 2, \qquad g(f(h(x))) = \frac{x}{3}.$$
13. Nej.
14. I Figur 4.1 ses en funktion som opfylder:
    (a) har domæne $[-1, 1]$,
    (b) går gennem punkterne $(-1, 0)$ og $(1, 1)$,
    (c) skærer y-aksen i -1,

    Bemærk at der findes mange korrekte svar.



Figur 4.1: Opgave 14.

4.4 Inverse funktioner, logaritme- og eksponentialfunktioner samt trigonometriske funktioner

1. Svarene er:

$$27, \qquad \frac{1}{2}, \qquad -1, \qquad 8, \qquad 1.$$

2. Svarene er:

$$7, \qquad 2, \qquad -2, \qquad 3, \qquad 0.$$

3. Svarene er:

$$\sqrt{2}, \qquad \frac{3\sqrt{3}}{2}, \qquad \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

4. Svarene er:

$$3, \qquad 1, \qquad 3$$

5. Svarene er:

$$-\frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad -\frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad -1, \qquad -\frac{1}{2}.$$

6. Svarene er:

$$\frac{3}{2}\ln(2), \qquad 2, \qquad \frac{1}{2}.$$

7. Svarene er:

$$1, \qquad 3e, \qquad \frac{1}{7}, \qquad \frac{7}{9}, \qquad \frac{1}{9}.$$

8. Svarene er:

$$\frac{1}{2}, \qquad 0, \qquad -1, \qquad 0.$$

9. Svarene er:

$$x = \ln(3), \qquad x = e^4, \qquad x = 18, \qquad x = 3.$$

10. Svarene kan være:

$$x = \frac{\pi}{4}, x = \frac{3\pi}{4}, \qquad x = \frac{\pi}{6}, x = -\frac{\pi}{6}, \qquad x = \frac{2\pi}{3}, x = \frac{4\pi}{3}.$$

Bemærk at der findes uendeligt mange korrekte svar.

11. Svarene kan være er:

(a) Trekanten i Figur 2.3 har en vinkel på 60 grader og to af siderne har længde 1. Dermed må det være en ligesidet trekant hvor alle sidelængderne nødvendigvis er 1. Dette medfører at $\sin(\frac{\pi}{6})$, som er halvdelen af den lodrette stiplede linje, må være $\frac{1}{2}$.

(b) Idiotformlen giver, at $\sin^2\frac{\pi}{6} + \cos^2\frac{\pi}{6} = 1$ og ved at løse ligningen for $\cos(\frac{\pi}{6})$ får vi at $\cos(\frac{\pi}{6}) = \sqrt{1-\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

(c) Ved at bruge hintet får vi

$$\sin(\frac{\pi}{3}) = \sin(2\frac{\pi}{6}) = 2\sin(\frac{\pi}{6})\cos(\frac{\pi}{6}) = 2\frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

(d) Vi har at

$$\sin^2\frac{\pi}{3} + \cos^2\frac{\pi}{3} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \cos^2\frac{\pi}{3} = 1 - \frac{3}{4} \quad \Leftrightarrow \quad \cos\frac{\pi}{3} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}.$$

12. Svarene kan være:

(a) Da trekanten i Figur 2.4 er retvinklet og begge kateter har længde 1 kan vi anvende Pythagoras og få at hypotenusen har længde $\sqrt{1+1} = \sqrt{2}$. Da $\sin\frac{\pi}{4}$ er halvdelen af hypotenusen fås at $\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

(b) Vi har at

$$\cos\frac{\pi}{4} = \sqrt{1-\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

4.5 Introduktion til differentialregning

1. De afledede er

$$f_1'(x) = 2, \qquad f_2'(x) = 1 - \sin(x), \qquad f_3'(x) = e^x, \qquad f_4'(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{x}.$$

2. Svarene er $f'(0) = -1$ og $f'(1) = 4$.

3. Svarene er:

$$f_1'(x) = 3x^2, \quad f_2'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}, \quad f_3'(x) = -x^{-2}, \quad f_4'(x) = -2x^{-3}, \quad f_5(x) = -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}.$$

4. Svarene er:

   (a) Den første blå og den tredje røde hører sammen.

   (b) Den anden blå og den anden røde hører sammen.

   (c) Den tredje blå og den første røde hører sammen.

5. Svarene er:

$$f'(x) = 6e^{2x} - \frac{1}{2x}, \qquad g'(x) = \frac{1}{2}\cos x, \qquad h'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{6}x}.$$

6. Svarene er:

$$f'(x) = 7x^6 - 8x^3 - 6x, \quad g'(x) = -5x^4 + 6x^{\frac{1}{2}} + 2x^{-3}, \quad h'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} - 2x^{-2}.$$

7. Svarene er:

$$x = 0, \qquad x = 0, x = 6.$$

8. Svarene er:

$$f'(x) = x^{-\frac{2}{3}}, \qquad f'(x) = 9x^2 + 8x.$$

9. Svarene er:

$$f'(x) = -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} - x^{-2}, \qquad f'(x) = \frac{15}{4}x^{\frac{11}{4}}, \qquad f(x) = -\frac{2}{x}.$$

10. Svarene er:

   (a) Den første blå og den anden røde hører sammen.

   (b) Den anden blå og den tredje røde hører sammen.

   (c) Den tredje blå og den første røde hører sammen.

11. Svarene er:

$$f'(x) = \frac{-5}{x}, \qquad f'(x) = 3e^{3x}.$$

4.6 Produktregelen, kvotientregelen og kædereglen

1. Svarene er:

$$f_1'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}, \qquad f_2'(x) = \frac{1}{(2x+1)^2}, \qquad f_3'(x) = \sin(x) + x\cos(x).$$

2. Svarene er:

$$f_1'(x) = (x+1)e^x, \qquad f_2'(x) = 4x\cos(x) - 2x^2\sin(x),$$
$$f_3'(x) = (\frac{1}{x} + \ln(x))e^x, \qquad f_4'(x) = \cos^2(x) - \sin^2(x).$$

3. Svarene er:

$$f_1'(x) = \frac{-1}{(x-1)^2}, \qquad f_2'(x) = \frac{3x^2+4x-5}{(3x+2)^2}, \qquad f_3'(x) = \frac{-1}{(x-2)^2}.$$

4. Svarene er:

$$f_1'(x) = 4(3x-1)^{\frac{1}{3}}, \quad f_2'(x) = \frac{2x+3}{x^2+3x}, \quad f_3'(x) = -e^{2-x}, \quad f_4'(x) = 3x^2\cos(x^3).$$

5. Svaret er $f'(x) = xe^x$.

6. Svaret er $f'(x) = \ln(x)$.

7. Svarene er:

$$f_1'(x) = 3x^2 e^{x^3}, \qquad f_2'(x) = -2\cos(x)\sin(x),$$
$$f_3'(x) = 3\sin^2(x)\cos(x) \qquad f_4'(x) = 4x(1+\tan^2(x^2)).$$

8. Vi har at

$$\frac{d}{dx}\frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \frac{\cos^2(x)+\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x).$$

9. Svaret er $f'(x) = \frac{(x+1)e^x\cos(x) - xe^x\sin(x)}{\cos^2(x)}$.

10. Svarene er:

$$f'(x) = -2\cos(\sqrt{x^2+1})\sin(\sqrt{x^2+1})\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}.$$

11. Svarene er:

$$f_1'(x) = \frac{2\cos(x)\sin^2(x) - \cos^3(x)}{\sin^2(x)}, \qquad f_2'(x) = \frac{(2x^2-1)e^{x^2}}{x^2},$$
$$f_3'(x) = \frac{(1-x)\cos(x) - x\sin(x)}{e^x}$$

12. Svarene er:

$$f(x) = \frac{(-(x+1)\ln(x)+1)e^x}{\ln^2(x)},$$
$$g(x) = e^x((1+x)\ln(x)+1),$$
$$h(x) = xe^x((2+x)\sin(x) + x\cos(x)))$$

4.7 Bestemte og ubestemte integraler

1. Ja.
2. Nej.
3. Svaret er $F(x) = \frac{3}{2}x^2 - 7x + \frac{25}{2}$.
4. Svarene er:
$$\frac{1}{3}, \qquad 0, \qquad 2\ln 2.$$
5. Svarene er:
$$\frac{1}{2}x^2 - x + c, \qquad \frac{1}{3}x^3 + e^x + c, \qquad -2\cos(x) + c.$$
6. Svarene er:
$$0, \qquad e^2 - e^{-1}, \qquad -2.$$
7. Svarene er:
$$-x^{-1} - \frac{1}{3}e^{3x} + c, \qquad e^x - 2\ln(|x|) + c$$
8. Svarene er:
$$\frac{e^2-1}{2}, \qquad \frac{124}{3}, \qquad \cos(-1) - \frac{3}{2}.$$
9. Vi har at $F'(x) = \frac{5}{7} \cdot \frac{14}{5}x^{\frac{9}{5}} = 2x^{\frac{9}{5}} = f(x)$.
10. Svarene er:
$$x^3 + x^2 + c, \qquad \frac{1}{2}e^{6x} - 3\sin(x) + c, \qquad x\ln(x) - x - 2x^{\frac{1}{2}} + c.$$
11. Svarene er:
$$2\ln(|x|) + 2x^{\frac{3}{2}} + 2x^2 + c, \qquad \frac{10}{11}x^{\frac{11}{8}} - \frac{1}{3}x^3 + c, \qquad c.$$
12. Svaret er $\frac{2}{3}$.
13. Vi har at
$$-\int_b^a f(x)\,dx = -(F(a) - F(b)) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx.$$
14. Vi har at
$$\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = F(c) - F(a) + F(b) - F(c) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

4.8 Delvis integration og integration ved substitution

1. Svarene er:

$$x\sin(x)+\cos(x)+c, \qquad \frac{1}{2}x^2\ln(x)-\frac{1}{4}x^2+c, \qquad (x-1)e^x+c$$

2. Svarene er:

$$\frac{1}{2}\sin(2x)+c, \qquad -\frac{(1-x)^3}{3}+c, \qquad \frac{1}{2}e^{2x-3}+c.$$

3. Svarene er:

$$0, \qquad 2e^{-1}-1, \qquad 2\ln(2)-\frac{3}{4}.$$

4. Svarene er:

$$-\frac{1}{6}, \qquad \frac{e^4-1}{2}, \qquad \ln(5).$$

5. Svarene er:

$$-(x+1)\cos(x)+\sin(x)+c, \qquad 2e^6.$$

6. Svarene er:

$$\frac{\sqrt{2}}{6}, \qquad \frac{1}{6}.$$

7. Svarene er:

$$e^x(x^2-2x+2)+c, \qquad \pi^2-4.$$

8. Svarene er:

$$\sqrt{2x-1}+c, \qquad \frac{\sqrt{2}}{2}$$

9. Svaret er:

$$0.$$

4.9 Repetition

1. Svarene er:

$$8, \qquad -5, \qquad \frac{11}{15}, \qquad \frac{5}{3}.$$

2. Svarene er:

$$-1, \qquad 45, \qquad \frac{17}{30}, \qquad 5.$$

3. Svarene er:

$$\frac{3-\sqrt{2}}{2}, \qquad 3, \qquad 3.$$

4. Svarene er:

$$x^2+25+10x, \qquad 4x^2+1-4x, \qquad 4y^2-1, \qquad 2y^2-x^2.$$

5. Svarene er:

$$\frac{x-y}{x}, \qquad \frac{x+y}{x}, \qquad y.$$

6. Svarene er:

$$x=-2, \qquad x=\frac{63}{10}, \qquad x=-1, x=3.$$

7. Svarene er:

$$x=\pm\sqrt{2}, \qquad x=1, x=-\frac{1}{2}.$$

8. Svarene kan være:

$$x=\frac{1}{2}, \qquad x=\frac{4\pi}{3}, \qquad x=4.$$

9. Svarene er:

$$a=0, \qquad a\in\mathbf{R}\setminus\{-1\},$$
$$a\in\mathbf{R}\setminus\{-1\}, \qquad \text{Aldrig sandt.}$$

10. Svarene er:

$$f'(x)=6x^2-2x, \qquad g'(x)=-4x^{-3}+1, \qquad h'(x)=-\frac{2}{x^2}+1.$$

11. Svarene er:

$$\frac{2}{3}x^3+x+k, \qquad -\frac{1}{6}, \qquad 12.$$

12. Svarene er:

$$\begin{aligned} f'(x)&=6x^2+2x^{-3}-4x^{-2},\\ g'(x)&=3e^3-\frac{1}{2\sqrt{x-1}},\\ h'(x)&=(x+1)2e^x-(2x-1)\cos(x^2-x). \end{aligned}$$

13. Svarene er:

$$-2e^{-x}+k, \qquad 2e-2, \qquad 6-2\sqrt{5}.$$