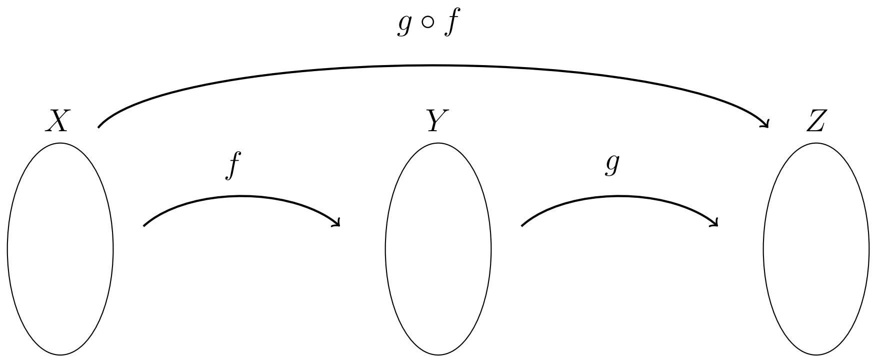
Funktioner
(sammensatte, inverse)

Sidste gang beskæftigede vi os med funktioner $f\colon X \to Y$, hvor X og Y var mængder. Hvis vi har en anden funktion $g\colon Y \to Z$, hvor Z også er en mængde, så kan man betragte sammensætningen af de to funktioner $g \circ f\colon X \to Z$ (se Figur 1) som er bestemt udfra formlen $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ (bemærk at $g \circ f$ skal læses som at vi først anvender f og dernæst g). Måden vi udregner $g \circ f$ er at indsætte funktionen f på den ubekendte variabels plads i g. I sådan et tilfælde kalder vi f for den indre funktion, g for den ydre funktion og $g \circ f$ for den sammensatte funktion.



Figur 1: En sammensat funktion

Eksempler:

1. Givet den sammensatte funktion $\frac{1}{x^2}$, find funktioner f og g så $f(g(x)) = \frac{1}{x^2}$:
   Vi genkender funktionerne $\frac{1}{x}$ og x^2 og ser at x^2 er sat ind på x plads i $\frac{1}{x}$. Det betyder at hvis vi sætter $g(x) = x^2$ og $f(x) = \frac{1}{x}$ så har vi at $f(g(x)) = \frac{1}{x^2}$.

2. Lad $f(x) = x^2 + 3x + \cos(x)$ og $g(x) = \tan(x)$ og bestem forskriften $(f \circ g)(x)$:
   Vi indsætter $g(x)$ på x plads i $f(x)$ og får:
   $$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = (\tan(x))^2 + 3\tan(x) + \cos(\tan(x)).$$

3. Lad $f(x) = x^3$ og $g(x) = \sqrt{x}$ og bestem både $(g \circ f)(2)$ og $(f \circ g)(2)$:
   Vi har at $f(2) = 2^3 = 8$ og $g(2) = \sqrt{2}$, hvilket giver:
   $$(g \circ f)(2) = g(f(2)) = g(8) = \sqrt{8} = \sqrt{4 \cdot 2} = \sqrt{4}\sqrt{2} = 2\sqrt{2},$$
   $$(f \circ g)(2) = f(g(2)) = f(\sqrt{2}) = (\sqrt{2})^3 = \sqrt{2^3} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}.$$

4. Generelt kender vi funktioner så som
   $$\cos(x), \quad \sin(x), \quad \tan(x), \quad x^2, \quad \sqrt{x}, \quad \frac{1}{x}.$$

Hvis vi på x plads i de forskellige funktioner indsætter en anden funktion, så vil vi få en sammensat funktion, som f.eks.

$$\cos(x^3), \quad \sin(\sqrt{x}), \quad \tan\left(\frac{1}{x}\right), \quad (\sin(x))^2, \quad \sqrt{\tan(x)}, \quad \frac{1}{\cos(x)}.$$

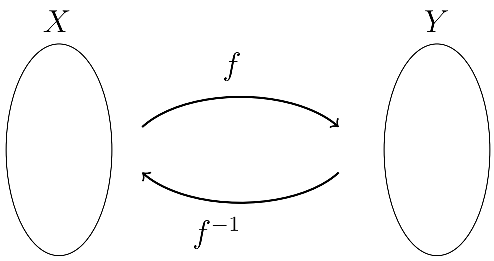
Bemærk, at der kan være forskel på at være den ydre og den indre funktion, f.eks. er $\sin(x^2)$ og $(\sin(x))^2$ ikke altid det samme.

Inverse funktioner: Hvis vi har to funktioner $f\colon X \to Y$ og $g\colon Y \to X$, som i Figur 2, som opfylder at

$$f(g(y)) = y \qquad \text{og} \qquad g(f(x)) = x,$$

for alle $x \in X$ og $y \in Y$, så siges f at være den inverse funktion til g og ligelede siges g at være den inverse funktion til f, hvilket også noteres med $g = f^{-1}$. Det betyder at den inverse funktion er en funktion der sender elementet $f(x)$ tilbage i det element det kom fra og tilsvarende for g.

For at en sådan funktion kan eksistere skal f være bijektiv, altså både injektiv og surjektiv. Hvis den ikke er injektiv så vil der være flere x'er der bliver sendt over i det samme y men det betyder, at $f^{-1}(y)$ skal sende y i mere end et punkt, hvilket ikke er muligt for en funktion. Derudover skal f være surjektiv, da f^{-1} skal kunne anvendes på alle elementer i Y og det kan den ikke, medmindre f rammer alle elementer i Y.



Figur 2: En invers funktion

Eksempler:

1. Lad $f\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ og $g(x)\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ være givet ved henholdsvis $f(x) = x^2$ og $g(x) = \sqrt{x}$, så har vi at

$$f(g(x)) = (\sqrt{x})^2 = x \qquad \text{og} \qquad g(f(x)) = \sqrt{x^2} = x,$$

   så $g = f^{-1}$. Bemærk, at vi ikke kan udvide f og g til hele $\mathbb{R}$, da de så ikke er bijektive.

2. Lad $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ og $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være givet ved henholdsvis $f(x) = 3x + 2$ og $g(x) = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}$, så har vi at

$$\begin{aligned} f(g(x)) &= 3\left(\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}\right) + 2 = x - 2 + 2 = x \\ g(f(x)) &= \frac{1}{3}(3x+2) - \frac{2}{3} = x + \frac{2}{3} - \frac{2}{3} = x, \end{aligned}$$

   hvilket betyder at $g = f^{-1}$.