

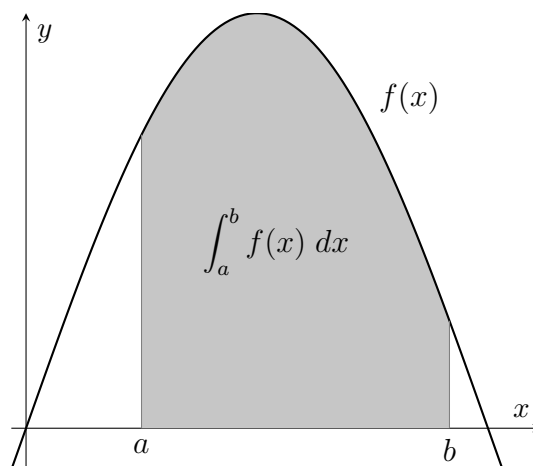
Bestemte integraler (introduktion, regneregler)

De sidste par gange har vi studeret ubestemte integraler. Det næste vi vil betragte er bestemte integraler.

Hvis f er en kontinuert funktion, så er det bestemte integral af f i intervallet $[a, b]$ givet ved

$$\int_a^b f(x) \, dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a),$$

hvor F er en stamfunktion til f . Bemærk, at $\int_a^b f(x) \, dx$ og $[F(x)]_a^b$ begge bare er notation der betyder $F(b) - F(a)$. Et ubestemt integral er en funktion, hvorimod et bestemt integrale er et tal, som beskriver arealet mellem en funktion og x -aksen i intervallet $[a, b]$ (se Figur 1).



Figur 1: Arealet under f og over x -aksen mellem a og b .

Regneregler: Hvis f og g begge er kontinuerte funktioner, så har vi følgende regneregler for bestemte integraler (bemærk, at de minder meget om dem for ubestemte integraler).

1. $\int_a^b c f(x) \, dx = c \int_a^b f(x) \, dx$, hvor $c \in \mathbb{R}$.
2. $\int_a^b f(x) \pm g(x) \, dx = \int_a^b f(x) \, dx \pm \int_a^b g(x) \, dx$.

Eksempler:

1. Bestem arealet mellem $f(x) = \frac{1}{x}$ og x -aksen i intervallet $[1, 2]$:

Vi udregner det bestemte integral

$$\begin{aligned}\int_1^2 f(x) dx &= \int_1^2 \frac{1}{x} dx \\ &= [\ln x]_1^2 \\ &= \ln 2 - \ln 1 \\ &= \ln 2.\end{aligned}$$

2. Bestem arealet mellem $f(x) = 3x^2 + 3e^x$ og x -aksen i intervallet $[0, 4]$:

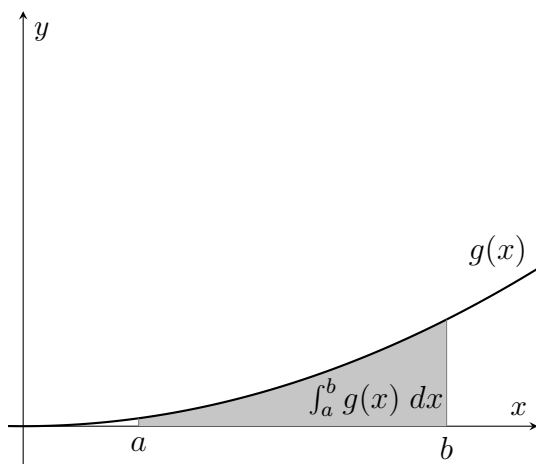
Vi udregner det bestemte integrale ved at benytte regnereglerne

$$\begin{aligned}\int_0^4 f(x) dx &= \int_0^4 (3x^2 + 3e^x) dx \\ &= 3 \int_0^4 x^2 dx + 3 \int_0^4 e^x dx \\ &= 3 \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_0^4 + 3 [e^x]_0^4 \\ &= 3 \left(\frac{1}{3} \cdot 4^3 - \left(\frac{1}{3} \cdot 0^3 \right) \right) + 3(e^4 - (e^0)) \\ &= 3 \cdot \frac{64}{3} + 3e^4 - 3 \\ &= 61 + 3e^4.\end{aligned}$$

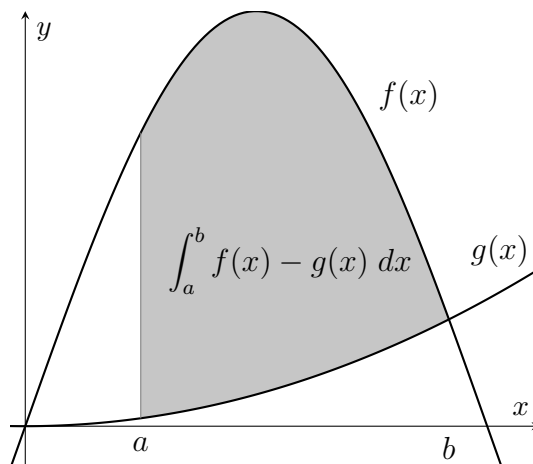
Arealet mellem to funktioner: Vi har indtil nu kun betragtet arealet mellem en funktion og x -aksen, men det er også muligt at finde arealet mellem to funktioner. Hvis f og g er to funktioner hvor $f(x) \geq g(x)$ for alle $x \in [a, b]$, så er arealet mellem de to funktioner givet ved

$$\int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx = \int_a^b f(x) - g(x) dx.$$

Det betyder, at for at finde arealet mellem f og g finder vi arealet mellem f og x -aksen, og trækker så arealet mellem g og x -aksen fra (se Figur 1, 2 og 3).



Figur 2: Arealet under g .



Figur 3: Arealet mellem f og g .

Eksempel:

1. Find arealet mellem $f(x) = 12 - 2x^2$ og $g(x) = x^2$ i intervallet $[-2, 2]$:

Vi udregner det bestemte integral af de to funktioner trukket fra hinanden

$$\begin{aligned}\int_{-2}^2 f(x) - g(x) \, dx &= \int_{-2}^2 (12 - 2x^2 - x^2) \, dx \\&= \int_{-2}^2 12 - 3x^2 \, dx \\&= \left[12x - \frac{3}{3}x^3 \right]_{-2}^2 \\&= \left[12x - x^3 \right]_{-2}^2 \\&= 24 - 8 - \left(-24 - (-8) \right) \\&= 24 - 8 + 24 - 8 \\&= 32.\end{aligned}$$