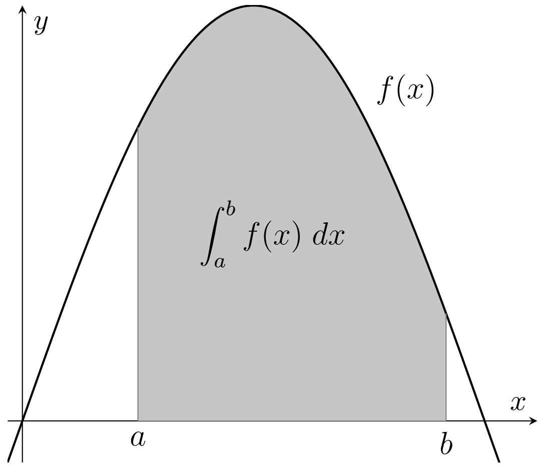
Bestemte integraler (indtroduktion, regneregler)

De sidste par gange har vi studeret ubestemte integraler. Det næste vi vil betragte er bestemte integraler.

Hvis f er en kontinuert funktion, så er det bestemte integral af f i intervallet $[a, b]$ givet ved

$$\int_a^b f(x)\ dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a),$$

hvor F er en stamfunktion til f. Et ubestemt integrale er en funktion, hvorimod et bestemt integrale er et tal, som beskriver arealet mellem en funktion og x-aksen i intervallet $[a, b]$ (se Figur 1).



Figur 1: Arealet under f og over x-aksen mellem a og b.

Regneregler: Hvis f og g begge er kontinuerte funktioner, så har vi følgende regneregler for bestemte integraler (bemærk, at de minder meget om dem for ubestemte integraler).

1. $\int_a^b cf(x)\ dx = c\int_a^b f(x)\ dx$, hvor $c \in \mathbb{R}$.
2. $\int_a^b f(x) \pm g(x)\ dx = \int_a^b f(x)\ dx \pm \int_a^b g(x)\ dx$.

Eksempler:

1. Bestem arealet under $f(x) = \frac{1}{x}$ og over x-aksen i intervallet $[1, 2]$:

Vi udregner det bestemte integrale

$$\begin{aligned}\int_1^2 f(x)\,dx &= \int_1^2 \frac{1}{x}\,dx \\ &= [\ln x]_1^2 \\ &= \ln 2 - \ln 1 \\ &= \ln 2.\end{aligned}$$

2. Bestem arealet under $f(x) = 3x^2 + 3e^x$ og over x-aksen i intervallet $[0, 4]$:

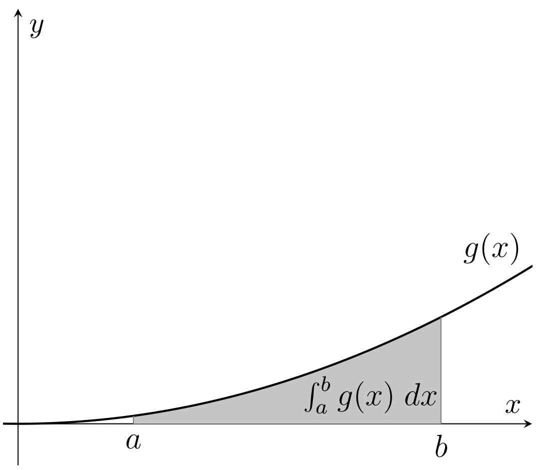
   Vi udregner det bestemte integrale ved at benytte regnereglerne

$$\begin{aligned}\int_0^4 f(x)\,dx &= \int_0^4 (3x^2 + 3e^x)\,dx \\ &= 3\int_0^4 x^2\,dx + 3\int_0^4 e^x\,dx \\ &= 3\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^4 + 3[e^x]_0^4 \\ &= 3\left(\frac{1}{3}\cdot 4^3 - \left(\frac{1}{3}\cdot 0^4\right)\right) + 3(e^4 - (e^0)) \\ &= 3\cdot\frac{64}{3} + 3e^4 - 3 \\ &= 61 + 3e^4.\end{aligned}$$

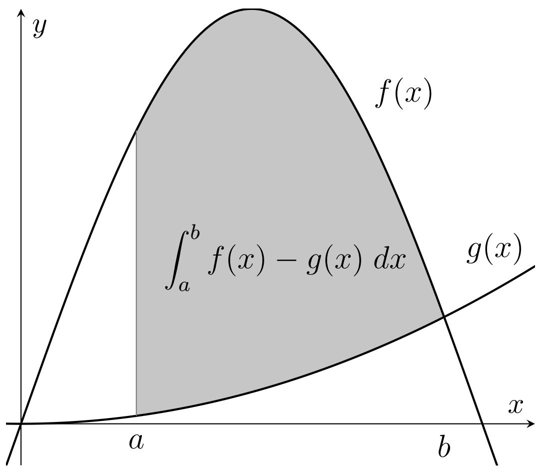
Arealet mellem to funktioner: Vi har indtil nu kun betragtet arealet mellem en funktion og x-aksen, men det er også muligt at finde arealet mellem to funktioner. Hvis f og g er to funktioner hvor $f(x) \geq g(x)$ for alle $x \in [a, b]$, så er arealet mellem de to funktioner givet ved

$$\int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b f(x) - g(x)\,dx.$$

Det betyder, at for at finde arealet mellem f og g findet vi arealet mellem f og x-aksen, og trækker så arealet mellem g og x-aksen fra (se Figur 1, 2 og 3).



Figur 2: Arealet under g.



Figur 3: Arealet mellem f og g.

Eksempel:

1. Find arealet under $f(x) = 12 - 2x^2$ og over $g(x) = x^2$ i intervallet $[-2, 2]$:

   Vi udregner det bestemte integralet af de to funktioner trukket fra hinanden

$$\begin{aligned}
\int_{-2}^{2} f(x) - g(x)\ dx &= \int_{-2}^{2} \left(12 - 2x^2 - x^2\right)\ dx \\
&= \int_{-2}^{2} 12 - 3x^2\ dx \\
&= \left[12x - \frac{3}{3}x^3\right]_{-2}^{2} \\
&= \left[12x - x^3\right]_{-2}^{2} \\
&= 24 - 8 - \Big(-24 - (-8)\Big) \\
&= 24 - 8 + 24 - 8 \\
&= 32.
\end{aligned}$$