

# Math101

16. oktober 2018

Benjamin Støttrup  
benjamin@math.aau.dk

Institut for matematiske fag  
Aalborg universitet  
Danmark



**AALBORG UNIVERSITY**  
DENMARK

# Agenda



Ubestemte integraler

Regneregler for ubestemte integraler

Bestemte integraler

Regneregler for bestemte integraler

# Ubestemte integraler

## Stamfunktioner



- ▶ En funktion  $f$  har stamfunktion  $F$  hvis

$$F'(x) = f(x)$$

- ▶ Hvis  $F$  er stamfunktion til  $f$  så er  $F(x) + c$  også, for alle  $c \in \mathbb{R}$ .
- ▶ Det ubestemte integral af  $f$  defineres til

$$\int f(x) dx = F(x) + c,$$

hvor  $F$  er en stamfunktion til  $f$  og  $c \in \mathbb{R}$ .

- ▶ Eksempler: Er  $e^{x^2}$  stamfunktion til  $2xe^{x^2}$ ?

# Ubestemte integraler

## Stamfunktioner



- ▶ En funktion  $f$  har stamfunktion  $F$  hvis

$$F'(x) = f(x)$$

- ▶ Hvis  $F$  er stamfunktion til  $f$  så er  $F(x) + c$  også, for alle  $c \in \mathbb{R}$ .
- ▶ Det ubestemte integral af  $f$  defineres til

$$\int f(x) dx = F(x) + c,$$

hvor  $F$  er en stamfunktion til  $f$  og  $c \in \mathbb{R}$ .

- ▶ Eksempler: Er  $e^{x^2}$  stamfunktion til  $2xe^{x^2}$ ?



# Ubestemte integraler

## Stamfunktioner

- ▶ En funktion  $f$  har stamfunktion  $F$  hvis

$$F'(x) = f(x)$$

- ▶ Hvis  $F$  er stamfunktion til  $f$  så er  $F(x) + c$  også, for alle  $c \in \mathbb{R}$ .
- ▶ Det ubestemte integral af  $f$  defineres til

$$\int f(x) dx = F(x) + c,$$

hvor  $F$  er en stamfunktion til  $f$  og  $c \in \mathbb{R}$ .

- ▶ Eksempler: Er  $e^{x^2}$  stamfunktion til  $2xe^{x^2}$ ?



# Ubestemte integraler

## Stamfunktioner

- ▶ En funktion  $f$  har stamfunktion  $F$  hvis

$$F'(x) = f(x)$$

- ▶ Hvis  $F$  er stamfunktion til  $f$  så er  $F(x) + c$  også, for alle  $c \in \mathbb{R}$ .
- ▶ Det ubestemte integral af  $f$  defineres til

$$\int f(x) dx = F(x) + c,$$

hvor  $F$  er en stamfunktion til  $f$  og  $c \in \mathbb{R}$ .

- ▶ Eksempler: Er  $e^{x^2}$  stamfunktion til  $2xe^{x^2}$ ?

# Regneregler for ubestemte integraler

- Vi har følgende regneregler:

$f(x)$	$\int f(x) dx$
$c$	$cx + k$

$x$	$\frac{1}{2}x^2 + k$
-----	----------------------

$x^n$	$\frac{1}{n+1}x^{n+1} + k, (n \neq -1)$
-------	---

$e^x$	$e^x + k$
-------	-----------

$e^{cx}$	$\frac{1}{c}e^{cx} + k$
----------	-------------------------

$f(x)$	$\int f(x) dx$
$\frac{1}{x}$	$\ln( x ) + k$

$\ln x$	$x \ln(x) - x + k$
---------	--------------------

$\cos x$	$\sin x + k$
----------	--------------

$\sin x$	$-\cos x + k$
----------	---------------

$\tan x$	$-\ln( \cos(x) ) + k$
----------	-----------------------

- Eksempler:  $\int \sqrt{x} dx,$

$$\int x^3 dx$$

# Regneregler for ubestemte integraler

- Vi har følgende regneregler:

$f(x)$	$\int f(x) dx$
--------	----------------

$c$	$cx + k$
-----	----------

$x$	$\frac{1}{2}x^2 + k$
-----	----------------------

$x^n$	$\frac{1}{n+1}x^{n+1} + k, (n \neq -1)$
-------	---

$e^x$	$e^x + k$
-------	-----------

$e^{cx}$	$\frac{1}{c}e^{cx} + k$
----------	-------------------------

$f(x)$	$\int f(x) dx$
--------	----------------

$\frac{1}{x}$	$\ln( x ) + k$
---------------	----------------

$\ln x$	$x \ln(x) - x + k$
---------	--------------------

$\cos x$	$\sin x + k$
----------	--------------

$\sin x$	$-\cos x + k$
----------	---------------

$\tan x$	$-\ln( \cos(x) ) + k$
----------	-----------------------

- Eksempler:  $\int \sqrt{x} dx,$

$$\int x^3 dx$$



# Regneregler for ubestemte integraler

- Vi har følgende regneregler:

$f(x)$	$\int f(x) dx$
--------	----------------

$c$	$cx + k$
-----	----------

$x$	$\frac{1}{2}x^2 + k$
-----	----------------------

$x^n$	$\frac{1}{n+1}x^{n+1} + k, (n \neq -1)$
-------	---

$e^x$	$e^x + k$
-------	-----------

$e^{cx}$	$\frac{1}{c}e^{cx} + k$
----------	-------------------------

$f(x)$	$\int f(x) dx$
--------	----------------

$\frac{1}{x}$	$\ln( x ) + k$
---------------	----------------

$\ln x$	$x \ln(x) - x + k$
---------	--------------------

$\cos x$	$\sin x + k$
----------	--------------

$\sin x$	$-\cos x + k$
----------	---------------

$\tan x$	$-\ln( \cos(x) ) + k$
----------	-----------------------

- Eksempler:  $\int \sqrt{x} dx,$

$$\int x^3 dx$$

# Regneregler for ubestemte integraler

- Vi har følgende regneregler:

$f(x)$	$\int f(x) dx$
--------	----------------

$c$	$cx + k$
-----	----------

$x$	$\frac{1}{2}x^2 + k$
-----	----------------------

$x^n$	$\frac{1}{n+1}x^{n+1} + k, (n \neq -1)$
-------	---

$e^x$	$e^x + k$
-------	-----------

$e^{cx}$	$\frac{1}{c}e^{cx} + k$
----------	-------------------------

$f(x)$	$\int f(x) dx$
--------	----------------

$\frac{1}{x}$	$\ln( x ) + k$
---------------	----------------

$\ln x$	$x \ln(x) - x + k$
---------	--------------------

$\cos x$	$\sin x + k$
----------	--------------

$\sin x$	$-\cos x + k$
----------	---------------

$\tan x$	$-\ln( \cos(x) ) + k$
----------	-----------------------

- Eksempler:  $\int \sqrt{x} dx,$

$$\int x^3 dx$$

# Regneregler for ubestemte integraler

- Vi har følgende regneregler:

$f(x)$	$\int f(x) dx$
--------	----------------

$c$	$cx + k$
-----	----------

$x$	$\frac{1}{2}x^2 + k$
-----	----------------------

$x^n$	$\frac{1}{n+1}x^{n+1} + k, (n \neq -1)$
-------	---

$e^x$	$e^x + k$
-------	-----------

$e^{cx}$	$\frac{1}{c}e^{cx} + k$
----------	-------------------------

$f(x)$	$\int f(x) dx$
--------	----------------

$\frac{1}{x}$	$\ln( x ) + k$
---------------	----------------

$\ln x$	$x \ln(x) - x + k$
---------	--------------------

$\cos x$	$\sin x + k$
----------	--------------

$\sin x$	$-\cos x + k$
----------	---------------

$\tan x$	$-\ln( \cos(x) ) + k$
----------	-----------------------

► Eksempler:  $\int \sqrt{x} dx,$

$\int x^3 dx$

# Regneregler for ubestemte integraler

► Vi har følgende regneregler:

$f(x)$	$\int f(x) dx$
$c$	$cx + k$
$x$	$\frac{1}{2}x^2 + k$
$x^n$	$\frac{1}{n+1}x^{n+1} + k, (n \neq -1)$
$e^x$	$e^x + k$
$e^{cx}$	$\frac{1}{c}e^{cx} + k$

$f(x)$	$\int f(x) dx$
$\frac{1}{x}$	$\ln( x ) + k$
$\ln x$	$x \ln(x) - x + k$
$\cos x$	$\sin x + k$
$\sin x$	$-\cos x + k$
$\tan x$	$-\ln( \cos(x) ) + k$

► Eksempler:  $\int \sqrt{x} dx,$

$$\int x^3 dx$$

# Regneregler for ubestemte integraler

- Vi har følgende regneregler:

$f(x)$	$\int f(x) dx$
--------	----------------

---

$c$	$cx + k$
-----	----------

---

$x$	$\frac{1}{2}x^2 + k$
-----	----------------------

---

$x^n$	$\frac{1}{n+1}x^{n+1} + k, (n \neq -1)$
-------	---

---

$e^x$	$e^x + k$
-------	-----------

---

$e^{cx}$	$\frac{1}{c}e^{cx} + k$
----------	-------------------------

---

$f(x)$	$\int f(x) dx$
--------	----------------

---

$\frac{1}{x}$	$\ln( x ) + k$
---------------	----------------

---

$\ln x$	$x \ln(x) - x + k$
---------	--------------------

---

$\cos x$	$\sin x + k$
----------	--------------

---

$\sin x$	$-\cos x + k$
----------	---------------

---

$\tan x$	$-\ln( \cos(x) ) + k$
----------	-----------------------

---

► Eksempler:  $\int \sqrt{x} dx,$

$\int x^3 dx$

# Regneregler for ubestemte integraler

► Vi har følgende regneregler:

$f(x)$	$\int f(x) dx$
--------	----------------

$c$	$cx + k$
-----	----------

$x$	$\frac{1}{2}x^2 + k$
-----	----------------------

$x^n$	$\frac{1}{n+1}x^{n+1} + k, (n \neq -1)$
-------	---

$e^x$	$e^x + k$
-------	-----------

$e^{cx}$	$\frac{1}{c}e^{cx} + k$
----------	-------------------------

$f(x)$	$\int f(x) dx$
--------	----------------

$\frac{1}{x}$	$\ln( x ) + k$
---------------	----------------

$\ln x$	$x \ln(x) - x + k$
---------	--------------------

$\cos x$	$\sin x + k$
----------	--------------

$\sin x$	$-\cos x + k$
----------	---------------

$\tan x$	$-\ln( \cos(x) ) + k$
----------	-----------------------

► Eksempler:  $\int \sqrt{x} dx,$

$\int x^3 dx$

# Regneregler for ubestemte integraler

► Vi har følgende regneregler:

$f(x)$	$\int f(x) dx$
--------	----------------

$c$	$cx + k$
-----	----------

$x$	$\frac{1}{2}x^2 + k$
-----	----------------------

$x^n$	$\frac{1}{n+1}x^{n+1} + k, (n \neq -1)$
-------	---

$e^x$	$e^x + k$
-------	-----------

$e^{cx}$	$\frac{1}{c}e^{cx} + k$
----------	-------------------------

$f(x)$	$\int f(x) dx$
--------	----------------

$\frac{1}{x}$	$\ln( x ) + k$
---------------	----------------

$\ln x$	$x \ln(x) - x + k$
---------	--------------------

$\cos x$	$\sin x + k$
----------	--------------

$\sin x$	$-\cos x + k$
----------	---------------

$\tan x$	$-\ln( \cos(x) ) + k$
----------	-----------------------

► Eksempler:  $\int \sqrt{x} dx,$

$\int x^3 dx$

# Regneregler for ubestemte integraler

► Vi har følgende regneregler:

$f(x)$	$\int f(x) dx$
$c$	$cx + k$
$x$	$\frac{1}{2}x^2 + k$
$x^n$	$\frac{1}{n+1}x^{n+1} + k, (n \neq -1)$
$e^x$	$e^x + k$
$e^{cx}$	$\frac{1}{c}e^{cx} + k$

$f(x)$	$\int f(x) dx$
$\frac{1}{x}$	$\ln( x ) + k$
$\ln x$	$x \ln(x) - x + k$
$\cos x$	$\sin x + k$
$\sin x$	$-\cos x + k$
$\tan x$	$-\ln( \cos(x) ) + k$

► Eksempler:  $\int \sqrt{x} dx,$

$\int x^3 dx$



# Regneregler for ubestemte integraler

► Vi har følgende regneregler:

$f(x)$	$\int f(x) dx$
--------	----------------

---

$c$	$cx + k$
-----	----------

---

$x$	$\frac{1}{2}x^2 + k$
-----	----------------------

---

$x^n$	$\frac{1}{n+1}x^{n+1} + k, (n \neq -1)$
-------	---

---

$e^x$	$e^x + k$
-------	-----------

---

$e^{cx}$	$\frac{1}{c}e^{cx} + k$
----------	-------------------------

---

$f(x)$	$\int f(x) dx$
--------	----------------

---

$\frac{1}{x}$	$\ln( x ) + k$
---------------	----------------

---

$\ln x$	$x \ln(x) - x + k$
---------	--------------------

---

$\cos x$	$\sin x + k$
----------	--------------

---

$\sin x$	$-\cos x + k$
----------	---------------

---

$\tan x$	$-\ln( \cos(x) ) + k$
----------	-----------------------

---

► Eksempler:  $\int \sqrt{x} dx,$

$\int x^3 dx$

# Regneregler for ubestemte integraler

- Vi har følgende regneregler:

$$\frac{f(x)}{\int f(x) dx}$$

$$c \quad cx + k$$

$$x \quad \frac{1}{2}x^2 + k$$

$$x^n \quad \frac{1}{n+1}x^{n+1} + k, (n \neq -1)$$

$$e^x \quad e^x + k$$

$$e^{cx} \quad \frac{1}{c}e^{cx} + k$$

$$\frac{f(x)}{\int f(x) dx}$$

$$\frac{1}{x} \quad \ln(|x|) + k$$

$$\ln x \quad x \ln(x) - x + k$$

$$\cos x \quad \sin x + k$$

$$\sin x \quad -\cos x + k$$

$$\tan x \quad -\ln(|\cos(x)|) + k$$

- Eksempler:  $\int \sqrt{x} dx,$

$$\int x^3 dx$$

# Regneregler for ubestemte integraler

- Vi har følgende regneregler:

$$\frac{f(x)}{\int f(x) dx}$$

$$c \quad cx + k$$

$$x \quad \frac{1}{2}x^2 + k$$

$$x^n \quad \frac{1}{n+1}x^{n+1} + k, (n \neq -1)$$

$$e^x \quad e^x + k$$

$$e^{cx} \quad \frac{1}{c}e^{cx} + k$$

$$\frac{f(x)}{\int f(x) dx}$$

$$\frac{1}{x} \quad \ln(|x|) + k$$

$$\ln x \quad x \ln(x) - x + k$$

$$\cos x \quad \sin x + k$$

$$\sin x \quad -\cos x + k$$

$$\tan x \quad -\ln(|\cos(x)|) + k$$

- Eksempler:  $\int \sqrt{x} dx,$

$$\int x^3 dx$$



# Regneregler for ubestemte integraler

- ▶ Vi har følgende generelle regneregler

$$\int cf(x) dx = c \int f(x) dx$$

$$\int f(x) \pm g(x) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx.$$

- ▶ Eksempler: Udregn

$$\int e^{3x} + \sqrt[3]{x} + 1 dx,$$

$$\int \frac{1}{2x} - \cos(x) dx.$$

# Regneregler for ubestemte integraler

- ▶ Vi har følgende generelle regneregler

$$\int cf(x) dx = c \int f(x) dx$$
$$\int f(x) \pm g(x) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx.$$

- ▶ Eksempler: Udregn

$$\int e^{3x} + \sqrt[3]{x} + 1 dx,$$
$$\int \frac{1}{2x} - \cos(x) dx.$$

# Regneregler for ubestemte integraler

- ▶ Vi har følgende generelle regneregler

$$\int cf(x) dx = c \int f(x) dx$$
$$\int f(x) \pm g(x) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx.$$

- ▶ Eksempler: Udregn

$$\int e^{3x} + \sqrt[3]{x} + 1 dx,$$
$$\int \frac{1}{2x} - \cos(x) dx.$$

# Regneregler for ubestemte integraler

- ▶ Vi har følgende generelle regneregler

$$\int cf(x) dx = c \int f(x) dx$$
$$\int f(x) \pm g(x) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx.$$

- ▶ Eksempler: Udregn

$$\int e^{3x} + \sqrt[3]{x} + 1 dx,$$
$$\int \frac{1}{2x} - \cos(x) dx.$$



# Bestemte integraler

- ▶ Vi vil bestemme arealer under grafer for funktioner.
- ▶ Arealet mellem grafen for  $f$  og  $x$ -aksen i intervallet  $[a, b]$  er givet ved

$$F(b) - F(a),$$

hvor  $F$  er en stamfunktion til  $f$ .

- ▶ Derfor defineres det bestemte integral af  $f$  i intervallet  $[a, b]$  til

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

- ▶ Eksempel: Bestem  $\int_0^1 x^2 dx$ .





# Bestemte integraler

- ▶ Vi vil bestemme arealer under grafer for funktioner.
- ▶ Arealet mellem grafen for  $f$  og  $x$ -aksen i intervallet  $[a, b]$  er givet ved

$$F(b) - F(a),$$

hvor  $F$  er en stamfunktion til  $f$ .

- ▶ Derfor defineres det bestemte integral af  $f$  i intervallet  $[a, b]$  til

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

- ▶ Eksempel: Bestem  $\int_0^1 x^2 dx$ .



# Bestemte integraler

- ▶ Vi vil bestemme arealer under grafer for funktioner.
- ▶ Arealet mellem grafen for  $f$  og  $x$ -aksen i intervallet  $[a, b]$  er givet ved

$$F(b) - F(a),$$

hvor  $F$  er en stamfunktion til  $f$ .

- ▶ Derfor defineres det bestemte integral af  $f$  i intervallet  $[a, b]$  til

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

- ▶ Eksempel: Bestem  $\int_0^1 x^2 dx$ .



# Bestemte integraler

- ▶ Vi vil bestemme arealer under grafer for funktioner.
- ▶ Arealet mellem grafen for  $f$  og  $x$ -aksen i intervallet  $[a, b]$  er givet ved

$$F(b) - F(a),$$

hvor  $F$  er en stamfunktion til  $f$ .

- ▶ Derfor defineres det bestemte integral af  $f$  i intervallet  $[a, b]$  til

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

- ▶ Eksempel: Bestem  $\int_0^1 x^2 dx$ .



# Regneregler for bestemte integraler

- ▶ Vi har følgende generelle regneregler for bestemte integraler

$$\int_a^b cf(x) dx = c \int_a^b f(x) dx$$

$$\int_a^b f(x) \pm g(x) dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx.$$

- ▶ Eksempler: Udregn

$$\int_1^2 \frac{1}{2x} - 1 dx$$
$$\int_0^4 3x^2 + 3e^x dx.$$

# Regneregler for bestemte integraler

- ▶ Vi har følgende generelle regneregler for bestemte integraler

$$\int_a^b cf(x) dx = c \int_a^b f(x) dx$$
$$\int_a^b f(x) \pm g(x) dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx.$$

- ▶ Eksempler: Udregn

$$\int_1^2 \frac{1}{2x} - 1 dx$$
$$\int_0^4 3x^2 + 3e^x dx.$$

# Regneregler for bestemte integraler

- ▶ Vi har følgende generelle regneregler for bestemte integraler

$$\int_a^b cf(x) dx = c \int_a^b f(x) dx$$
$$\int_a^b f(x) \pm g(x) dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx.$$

- ▶ Eksempler: Udregn

$$\int_1^2 \frac{1}{2x} - 1 dx$$
$$\int_0^4 3x^2 + 3e^x dx.$$



# Regneregler for bestemte integraler

- ▶ Vi har følgende generelle regneregler for bestemte integraler

$$\int_a^b cf(x) dx = c \int_a^b f(x) dx$$
$$\int_a^b f(x) \pm g(x) dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx.$$

- ▶ Eksempler: Udregn

$$\int_1^2 \frac{1}{2x} - 1 dx$$
$$\int_0^4 3x^2 + 3e^x dx.$$

# Opgaveregning!



**AALBORG UNIVERSITY**  
DENMARK