Funktioner (injektiv, surjektiv, sum, produkt)

Vi vil nu se nærmere på hvad en funktion egentlig er, for at gøre dette starter vi med at kigge kort på mængder. Lad X og Y være to mængder, det kan f.eks. være et interval som $[0, 1]$ eller $(0, 1)$, der henholdsvis består af alle tal der opfylder $0 \leq x \leq 1$ og $0 < x < 1$, eller en endelig mængde $\{a, b, c, d\}$. Hvis vi lader $X = \{1, 2, 3, 4\}$ så siger vi f.eks. at 2 ligger i X og notere det med $2 \in X$ mens vi siger at 5 ikke ligger i X hvilket vi notere $5 \notin X$. Hvis vi vil fjerne et element i en mængde skriver vi f.eks. $X \setminus 3 = \{1, 2, 4\}$. Derudover kan vi også tage en delmængde af en allerede givet mængde, hvilket vi notere f.eks. med $\{1, 2\} \subset X$. For at simplificere vores notation vil vi ofte skrive intervallet $(-\infty, \infty)$ som $\mathbb{R}$ og kalde det for de reelle tal.

Vi siger at f er en funktion der går mellem X og Y, skrevet $f \colon X \to Y$, hvis $f(x)$ giver præcis et element i Y for alle $x \in X$. Vi kalder X for domænet (også kaldet definitionsmængden) af f og Y for codomænet af f. Bemærk, at det betyder at hvis f sender et element fra X over i flere forskellige elementer i Y så er f ikke en funktion, men en funktion kan godt sende flere elementer fra X over i det samme element i Y.

Eksempler:

1. Lad $f \colon \{1, 2, 3\} \to \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ være givet ved $f(x) = 2x$, så er f en funktion da ethvert element i X bliver sendt over i præcis et element af Y. Bemærk, at vi behøver ikke ramme alle elementer i Y.

2. Lad $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være givet ved $f(x) = x^2$ så er f en funktion.

3. Lad $X = \{a, b, c, d\}$ og $Y = \{1, 2, \pi, \text{abe}\}$ og bestem en function $f \colon X \to Y$. Det eneste der skal gælde for en funktion er, at den tager ethvert element i sit domæne og sender over i præcis et element i codomænet. Det betyder at en mulig funktion f er givet ved, $f(a) = 1$, $f(b) = \pi$, $f(c) = \text{abe}$ og $f(d) = 2$. Dette kan også skrives som en "gaffel funktion" på følgende måde:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x = a \\ \pi & x = b \\ \text{abe} & x = c \\ 2 & x = d \end{cases}.$$

   Bemærk, at hvis vi f.eks. havde sat både $f(a) = 1$ og $f(a) = 2$ så havde f ikke været en funktion!

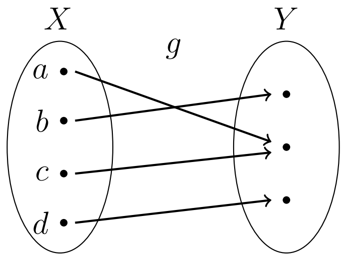
Injektiv og surjektiv: Hvis $f \colon X \to Y$ er en funktion, så kalder vi alle de elementer i Y som bliver ramt af f for værdimængden af f. Bemærk, at vi på intet tidspunkt har sagt at vi skal ramme alle elementer i Y, derfor er værdimængden af f en delmængde af codomænet for f. Vi siger derfor at en funktion f er surjektiv hvis der gælder at værdimængden og codomænet for f er den samme mængde, som det er tilfælder i Figur 1.

Derudover har vi at hvis en funktion opfylder at der ikke er to forskellige elementer i X der bliver sendt over i det samme element i Y, også skrevet

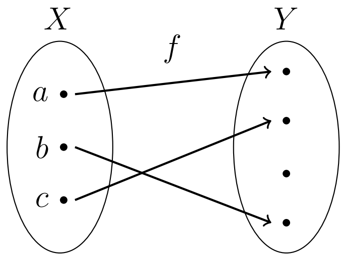
$$f(x_1) = y \text{ og } f(x_2) = y \quad \Rightarrow \quad x_1 = x_2,$$

så siges funktionen at være injektiv, som f.eks. i Figur 2.

Hvis en funktion er både injektiv og surjektiv, så kalder vi den for en bijektiv funktion.



Figur 1: En surjektiv funktion



Figur 2: En injektiv funktion

Eksempler:

1. Hvis $X = \{1, 2, 3, 4\}$ og $Y = \{3, 4, 5, 6, 7\}$ så er funktionen $f\colon X \to Y$ givet ved $f(x) = x + 2$ injektiv da ethvert $x \in X$ bliver sendt over i forskellige $y \in Y$ men den er ikke surjektiv, da 7 ikke bliver ramt af noget $x \in X$.

2. Vi betragtede tidligere funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ givet ved x^2, denne funktion er hverken injektiv eller surjektiv da $-x$ og $+x$ bliver sent i det samme y, og vi rammer ikke hele $\mathbb{R}$ da $f(x)$ altid er positiv. Ved at ændre på domænet og codomænet kan vi gøre funktionen henholdsvis injektiv eller surjekt. F.eks. er funktionen $f\colon [0, \infty) \to \mathbb{R}$ injektiv og $f\colon \mathbb{R} \to [0, \infty)$ er surjektiv. Vi ser endvidere at hvis vi har $f\colon [0, \infty) \to [0, \infty)$ så er f endda bijektiv.

Sum og produkt af funktioner: Ligesom at vi kan lægge tal sammen og gange tal sammen, kan vi også gøre det samme med funktioner.

Regneregler: Hvis f og g er funktioner, så har vi at

1. Summen af f og g evalueret i x er det samme som at evaluere de to funktioner i x og så lægge dem sammen:
$$(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x).$$

2. Produktet af f og g evalueret i x er det samme som at evaluere de to funktioner i x og så gange dem sammen:
$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x).$$

3. At dividere funktionerne f og g og så evaluere i x er det samme som at evaluere de to funktioner i x og så dividere dem bagefter, såfremt $g(x) \neq 0$:
$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)},$$
hvor $g(x) \neq 0$.

Eksempler:

1. Hvis $f(x) = 3x^2 + 1$ og $g(x) = \frac{1}{x}$ hvad er $(f+g)(2)$ så:

   Vi udregner først $f(2)$ og $g(2)$:

   $$\begin{aligned} f(2) &= 3 \cdot 2^2 + 1 = 3 \cdot 4 + 1 = 13, \\ g(2) &= \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

   hvilket betyder at

   $$(f+g)(2) = f(2) + g(2) = 13 + \frac{1}{2} = \frac{27}{2}.$$

2. Hvis $f(x) = 2x$ og $g(x) = \frac{1}{x}$ hvad er $\left(\frac{f}{g}\right)(3)$ så:

   Vi udregner først $f(3)$ og $g(3)$:

   $$\begin{aligned} f(3) &= 2 \cdot 3 = 6, \\ g(3) &= \frac{1}{3}, \end{aligned}$$

   hvilket medfører at

   $$\left(\frac{f}{g}\right)(3) = \frac{f(3)}{g(3)} = \frac{6}{\frac{1}{3}} = 6 \cdot 3 = 18.$$