Differentialligninger (homogene førsteordens)

Vi har hidtil kun betragtet differentialligninger med konstante koefficienter. Vi vil nu betragte mere generelle differentialligninger.

En homogen lineær førsteordens differentialligning med variable koefficienter er på formen

$$f'(x) + a(x)f(x) = 0.$$

Homogen betyder at højresiden er lig 0, førsteordens betyder, at der kun indgår en første afledede af f og variable koefficienter betyder, at funktionen a kan varierer når x varierer (i modsætning til konstante koefficienter hvor $a(x) = k$).

En sådan ligning har den fuldstændige løsning

$$f(x) = ce^{-A(x)}, \tag{1}$$

hvor $A(x)$ er en vilkårlig stamfunktionen til a (ofte valgt med konstant lig 0).

Eksempler:

1. Løs begyndelsesværdiproblemet $f'(x) + \cos(x)f(x) = 0$ med $f(0) = \frac{1}{2}$:

   Vi ser at $a(x) = \cos x$. Derudover har vi fra (1) at den fuldstændige løsning er på formen

   $$f(x) = ce^{-A(x)}.$$

   Vi bestemmer først $A(x)$, ved at integrere $a(x) = \cos x$

   $$A(x) = \int a(x)\, dx = \int \cos x\, dx = \sin x + c,$$

   hvor vi vælger $c = 0$. Dermed har vi, at $f(x) = ce^{-\sin x}$. Vi bestemmer nu c ved at benytte vores begyndelsesbetingelse

   $$\frac{1}{2} = f(0) = ce^{-\sin 0} = ce^0 = c.$$

   Det giver, at løsningen til vores begyndelsesværdiproblem er $f(x) = \frac{1}{2}e^{-\sin x}$.

2. Løs begyndelsesværdiproblemet $f'(x) + e^x f(x) = 0$ med $f(0) = e$:

   Vi ser, at $a(x) = e^x$. Derudover har vi igen, at den fuldstændige løsning er på formen

   $$f(x) = ce^{-A(x)}.$$

   Vi bestemmer først $A(x)$, ved at integrere $a(x) = e^x$

   $$A(x) = \int a(x)\, dx = \int e^x\, dx = e^x + c,$$

   hvor vi vælger $c = 0$. Dermed har vi, at $f(x) = ce^{-e^x}$. Vi bestemmer nu c ved at benytte vores begyndelsesbetingelse

   $$e = f(0) = ce^{-e^0} = ce^{-1} \Leftrightarrow c = e^2$$

   Det giver at, løsningen til vores begyndelsesværdiproblem er $f(x) = e^2e^{-e^x}$.