Grænseværdier og kontinuitet

Når vi senere vil snakke om differentiabilitet, vil vi snakke om at tage grænsen af sekanthældningen, men hvad mener vi med at tage "grænsen", det vil vi nu specificere. Vi siger at $f(x)$ har en grænseværdi L^- fra venstre for x gående mod a fra venstre og noterer det med

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L^-,$$

hvis $f(x)$ kan komme lige så tæt på L^- som vi ønsker, ved at lade x komme tættere og tættere på a fra venstre. På tilsvarende vis siger vi, at $f(x)$ har en grænseværdi L^+ fra højre for x gående mod a fra højre og notere det med

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L^+.$$

Hvis der gælder at

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L^- = L^+ = \lim_{x \to a^+} f(x),$$

så siger vi, at $f(x)$ har en grænseværdi L for x gående mod a og notere det med

$$\lim_{x \to a} f(x) = L.$$

Konceptet med en grænseværdi er ikke let at forstå, derfor illustrerer vi det nu ved hjælp af figurer, og dernæst med nogle simple eksempler. Hvis vi betragter Figur 1 ser vi, at hvis vi lader x nærme sig a fra henholdsvis højre og venstre så vil vi få

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L \qquad \text{og} \qquad \lim_{x \to a^+} f(x) = L,$$

hvilket medfører at funktionen f har en grænseværdi i a som er

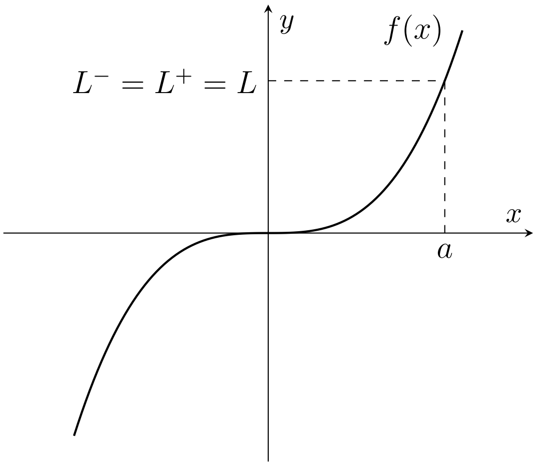
$$\lim_{x \to a} f(x) = L.$$

Hvis vi derimod betragter Figur 2, ser vi at

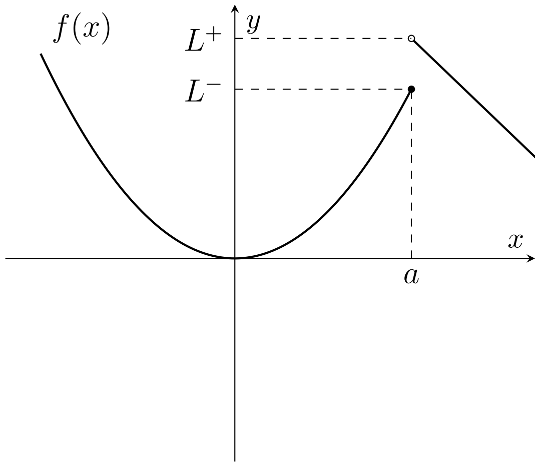
$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L^- \qquad \text{og} \qquad \lim_{x \to a^+} = L^+,$$

hvor $L^- \neq L^+$. Det betyder at grænsen fra højre og grænsen for venstre ikke er lig med hinanden i punktet a, og dermed har f ikke en grænseværdi for x gående mod a.

Bemærk, at man kan godt snakke om f har en grænseværdi for x gående mod a selvom $f(a)$ slet ikke er defineret.



Figur 1: Grænseværdi i $x = a$.



Figur 2: Ingen grænseværdi i $x = a$.

Eksempler:

1. Lad $f(x) = x^3$ og vis at f har en grænseværdi for x gående mod 2 og bestem denne.

   Vi ser, at vi kan lade $f(x)$ komme lige så tæt på 8 som vi ønsker ved at lade x komme tættere og tættere på 2 fra både højre og venstre, hvilket medfører at

   $$\lim_{x\to 2^-} f(x) = 8 \qquad \text{og} \qquad \lim_{x\to 2^+} f(x) = 8.$$

   Da grænsen fra højre og venstre er den samme har vi

   $$\lim_{x\to 2} x^3 = 8.$$

2. Har funktionen

   $$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{hvis } x \leq 1, \\ -x+3 & \text{hvis } x > 1, \end{cases}$$

   en grænseværdi for x gående mod 1?

   Vi forklarer først kort hvad vi mener med den måde f er defineret på. Hvis vores x-værdi er mindre eller lig 1 så er $f(x) = x^2$, mens vi for alle x-værdier der er skarpt større end 1 har at $f(x) = -x + 3$. Hvis f er givet på denne måde, siger man, at f er en gaffelfunktion.

   Vi finder grænsen for $f(x)$ når x går mod 1 fra henholdvis venstre og højre

   $$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} x^2 = 1 \qquad \text{og} \qquad \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} -x+3 = 2,$$

   da $f(x) = x^2$ kan komme vilkårligt tæt på 1 ved at lade x komme tættere og tættere på 1 og tilvarende kan vi lade $f(x) = -x + 3$ komme vilkårligt tæt på 2. Da

   $$\lim_{x\to 1^-} f(x) \neq \lim_{x\to 1^+} f(x),$$

   har f ikke en grænseværdi for x gående mod 1.

Regneregler: Lad f og g være to funktioner med med grænseværdier når x går mod a. Så har vi følgende regneregler for grænseværdierne:

1. $\lim_{x\to a}(f+g)(x) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$.
2. $\lim_{x\to a} cf(x) = c\lim_{x\to a} f(x)$, hvor $c \in \mathbb{R}$.
3. $\lim_{x\to a}(fg)(x) = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x)$.
4. $\lim_{x\to a}\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$, hvis $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$.

Kontinuitet: En funktion f siges at være kontinuert i punktet a, hvis

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a). \tag{1}$$

Det betyder, at f er kontinuert i a hvis den har en grænseværdi i punktet a der er lig med $f(a)$.

Vi siger, at f er en kontinuert funktion, hvis den er kontinuert i alle punkter i dens definitionsmængde.

Hvis f og g er kontinuerte funktioner, så har vi fra (1), at

$$\lim_{x\to a} f(g(x)) = f(\lim_{x\to a} g(x)) = f(g(a)).$$

Bemærk, at funktioner så som $x, ax+b, ax^2+bx+c, \frac{1}{x}, \sqrt{x}, \ln(x), e^x, \sin(x), \cos(x)$ alle er kontinuerte på passende domæne.

Eksempler:

1. Vis at funktionen

   $$f(x) = \begin{cases} 2x+3 & x \neq 0, \\ 3 & x = 0, \end{cases}$$

   er kontinuert i 0.

   Vi finder først grænseværdien for f når x går mod 0, ved at finde grænseværdien fra henholdsvis venstre og højre

   $$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} 2x+3 = 3 \qquad \text{og} \qquad \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} 2x+3 = 3,$$

   hvilket medfører at $\lim_{x\to 0} f(x) = 3$.

   Vi ser derudover at $f(0) = 3$, så

   $$\lim_{x\to 0} f(x) = 3 = f(0),$$

   hvilket betyder at f er kontinuert i 0.

2. Vis at funktionen

   $$f(x) = \begin{cases} 2x+3 & x \neq 0, \\ 4 & x = 0, \end{cases}$$

   ikke er kontinuert i 0.

   Vi har fra den forrige opgave at $\lim_{x\to 0} f(x) = 3$ men da $f(0) = 4$, har vi at

   $$\lim_{x\to 0} f(x) \neq f(0),$$

   og dermed er f ikke kontinuert i 0.