Differentialligninger (inhomogene førsteordens)

Sidste gang betragtede vi homogene første ordens differentialligninger (hvor højresiden var lig 0) nu vil vi i stedet studere inhomogone lineære første ordens differentialligninger.

En inhomogen lineær førsteordens differentialligning med variable koefficienter er på formen

$$f'(x) + a(x)f(x) = b(x).$$

Inhomogen betyder at højresiden er forskelig fra 0, førsteordens betyder, at der kun indgår en første afledede af f og variable koefficienter betyder, at funktionerne a og b kan varierer, når x varierer (i modsætning til konstante koefficienter hvor $a(x) = k_1$ og $b = k_2$).

En sådan ligning har den fuldstændige løsning

$$f(x) = e^{-A(x)} \int b(x)e^{A(x)}\, dx + ce^{-A(x)}. \tag{1}$$

hvor $A(x)$ er en vilkårlig stamfunktionen til a (ofte valgt med konstant lig 0). Formlen for den fuldstændige løsning kaldes ofte for Panzerformlen.

Bemærk, at hvis $b(x) = 0$, så vi i stedet har en homogen første ordens differentialligning, så vil den fuldstændige løsning reducere til

$$f(x) = ce^{-A(x)},$$

som vi genkender fra sidste gang.

Eksempler:

1. Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningen $f'(x) + 6xf(x) = 18x$:

   Vi ser, at det er en differentialligning på formen $f'(x) + a(x)f(x) = b(x)$, hvor $a(x) = 6x$ og $b(x) = 18x$. Vi har fra (1) at den fuldstændige løsning er givet ved

   $$f(x) = e^{-A(x)} \int b(x)e^{A(x)}\, dx + ce^{-A(x)}.$$

   Vi finder først en stamfunktion til a

   $$A(x) = \int a(x)\, dx = \int 6x\, dx = 3x^2 + c,$$

   hvor vi vælger $c = 0$. Det giver, at den fuldstændige løsning er

   $$f(x) = e^{-3x^2} \int 18xe^{3x^2}\, dx + ce^{-3x^2}.$$

Vi udregner integralet ved hjælp af substitution, sæt $u = 3x^2$, så har vi at $\frac{du}{dx} = 6x$ og $\frac{1}{6x}du = dx$, hvilket giver

$$\begin{aligned}
f(x) &= e^{-3x^2} \int 18xe^{3x^2}\ dx + ce^{-3x^2} \\
&= e^{-3x^2} \int 18xe^{u} \frac{1}{6x}\ du + ce^{-3x^2} \\
&= e^{-3x^2} \int 3e^{u}\ du + ce^{-3x^2} \\
&= e^{-3x^2} 3e^{3x^2} + ce^{-3x^2} \\
&= 3 + ce^{-3x^2}.
\end{aligned}$$

2. Løs begyndelsesværdiproblemet $xf'(x) + 2f(x) = 3x$ med $f(1) = 5$:

   Vi ser først at vores differentialligning ikke er på formen $f'(x)+a(x)f(x) = b(x)$, men hvis vi dividere igennem med x på begge sider, får vi

$$\frac{xf'(x) + 2f(x)}{x} = \frac{3x}{x} \Leftrightarrow f'(x) + \frac{2}{x}f(x) = 3,$$

som er på formen $f'(x) + a(x)f(x) = b(x)$ med $a(x) = \frac{2}{x}$ og $b(x) = 3$. Vi har igen, at den fuldstændige løsning er på formen

$$f(x) = e^{-A(x)} \int b(x)e^{A(x)}\ dx + ce^{-A(x)}.$$

Vi starter med at bestemme $A(x)$

$$A(x) = \int a(x)\ dx = 2\int \frac{1}{x}\ dx = 2\ln x + c,$$

hvor vi vælger $c = 0$. Hvis vi indsætter det i den fuldstændige løsning, får vi

$$\begin{aligned}
f(x) &= 3e^{-2\ln x} \int e^{2\ln x}\ dx + ce^{-2\ln x} \\
&= 3(e^{\ln x})^{-2} \int (e^{\ln x})^2\ dx + c(e^{\ln x})^{-2} \\
&= 3x^{-2} \int x^2\ dx + cx^{-2} \\
&= 3x^{-2}\frac{1}{3}x^3 + cx^{-2} \\
&= x + cx^{-2}
\end{aligned}$$

Vi bestemmer så c ved at benytte vores begyndelsesbetingelse

$$5 = f(1) = 1 + c1^{-2} = 1 + c \Leftrightarrow c = 4.$$

Hvilket betyder at løsningen til vores begyndelsesværdiproblem er

$$f(x) = x + 4x^{-2}.$$