Vectorer i planen (linjer, parameterfremstilling)

Det næste vi vil studere er, hvordan man kan beskrive linjer i planen (i.e. i to dimensioner). Vi vil betragte to metoder, kaldet linjens ligning og parameterfremstillingen for en linje.

Vi starter med at studere linjens ligning. Hvis vi får givet et fast punkt $A = (x_0, y_0)$ som ligger på den linje vi gerne vil bestemme, samt en vektor $\vec{n} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ som står vinkelret på linjen (en sådan vektor kaldes for en normalvektor) så har vi for ethvert punkt $B = (x, y)$ der ligger på vores linje, at

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{bmatrix} = 0,$$

da de to vektorer er ortogonale. Hvis vi udregner prikproduktet får vi ligningen

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0, \tag{1}$$

som kaldes linjens ligning i planen.

Eksempler:

1. Lad $\vec{n} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ og $A = (4, 0)$ og bestem linjens ligning:

   Vi indsætter i (1) og får

   $$0 \cdot (x - 4) + 1 \cdot (y - 0) = 0 \Leftrightarrow y = 0,$$

   hvilket viser at vores linje er x-aksen i et koordinatsystem.

2. Bestem linjens ligning for den linje der går gennem punkterne $A = (1, 1)$ og $B = (2, 3)$ og bestem om punktet $(-1, -1)$ ligger på linjen:

   Da vi ikke er givet nogen normaltvektor, starter vi med at bestemme sådan en. Vi ser at vektoren

   $$\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} 2 - 1 \\ 3 - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix},$$

   ligger på linjen. Vi finder nu en normalvektor ved at tage hatvektoren til $\overrightarrow{AB}$, hvilket giver

   $$\vec{n} = \hat{\overrightarrow{AB}} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Indsætter vi nu $\vec{n}$ og punktet A i (1) får vi linjens ligning

$$\begin{aligned} -2 \cdot (x-1) + 1 \cdot (y-1) = 0 &\Leftrightarrow -2x + 2 + y - 1 = 0 \\ -2x + y + 1 &= 0. \end{aligned}$$

Bemærk, at vi kunne have benyttet punktet B i stedet for A. Vi tjekker nu om punktet $(-1,-1)$ løser ligningen

$$-2 \cdot (-1) + (-1) + 1 = 2 - 1 + 1 = 2,$$

hvilket viser at punktet $(-1,-1)$ ikke ligger på linjen.

Parameterfremstilling: En anden måde at beskrive en linje i planen er ved parameterfremstillingen. Hvis vi får givet et fast punkt $A = (x_0, y_0)$ på den linje vi gerne vil bestemme samt en vektor $\vec{r} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix}$ som er parallel med vores linje (en sådan vektor kaldes for en retningsvektor), så er parameterfremstillingen givet ved

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix}, \tag{2}$$

hvor $t \in \mathbb{R}$. Det skal forståes således at vi starter med et punkt (x_0, y_0) på vores linje og så går vi i retningen af vores retningsvektor (som er parallel med vores linje) og dermed kan vi beskrive samtlige punkter på vores linje, ved at skifte på t, som bestemmer længden vi går.

Bemærk, at i linjens ligning bruger vi en vektor der står vinkelret på linjen, mens vi i parameterfremstillingen bruger en vektor der er parallel med linjen.

Eksempler:

1. Lad $A = (2,2)$ og $\vec{r} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ og bestem parameterfremstillingen for linjen:

   Vi indsætter i (2) og får

   $$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

2. Bestem parameterfremstillingen for linjen der går gennem punkterne $A = (3,4)$ og $B = (8,1)$:

   Vi bestemmer først en retningsvektor

   $$\vec{r} = \overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} 8-3 \\ 1-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

   Vi indsætter nu $\vec{r}$ og A i (2) og får

   $$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

3. Find skæringspunkterne mellem cirklen $x^2 + y^2 = 2$ og linjen beskrevet ved parameterfremstillingen

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} :$$

Ud fra parameterfremstillingen får vi de to ligninger

$$x = 2 - t.$$
$$y = 2 - t.$$

Vi indsætter nu disse i cirklens ligning og får

$$2 = x^2 + y^2 = (2-t)^2 + (2-t)^2 = 2(2-t)^2 = 2(4 + t^2 - 4t) = 2t^2 - 8t + 8.$$

Det giver os andengradsligningen

$$2t^2 - 8t + 6 = 0,$$

som vi kan løse

$$t = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{8 \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 6}}{2 \cdot 2} = \frac{8 \pm \sqrt{16}}{4} = \frac{8 \pm 4}{4} = \begin{cases} 3 \\ 1 \end{cases} .$$

Ved at indsætte $t = 3$ og $t = 1$ i vores ligninger for x og y får vi de to skæringspunkter $(-1, -1)$ og $(1, 1)$.