Math101

1. oktober 2018

Benjamin Støttrup
benjamin@math.aau.dk

Institut for matematiske fag
Aalborg universitet
Danmark

AALBORG UNIVERSITY
DENMARK

Agenda

Delvis integration

Integration ved substitution

Inverse funktioner

- To funktioner $f\colon X \to Y$ og $g\colon Y \to X$ er hinandens *inverse* hvis
$$f(g(y)) = y, \quad \text{og} \quad g(f(x)) = x$$
for alle x i X og y i Y.

Inverse funktioner

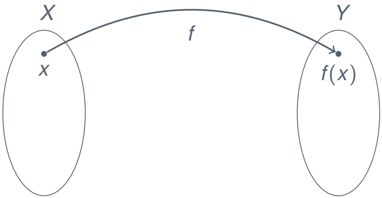
- To funktioner $f\colon X \to Y$ og $g\colon Y \to X$ er hinandens *inverse* hvis
$$f(g(y)) = y, \quad \text{og} \quad g(f(x)) = x$$
for alle x i X og y i Y.

Inverse funktioner

- To funktioner $f\colon X \to Y$ og $g\colon Y \to X$ er hinandens *inverse* hvis
$$f(g(y)) = y, \quad \text{og} \quad g(f(x)) = x$$
for alle x i X og y i Y.

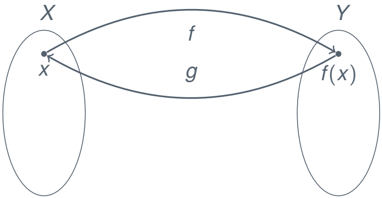
Inverse funktioner

- To funktioner $f\colon X \to Y$ og $g\colon Y \to X$ er hinandens *inverse* hvis
$$f(g(y)) = y, \quad \text{og} \quad g(f(x)) = x$$
for alle x i X og y i Y.



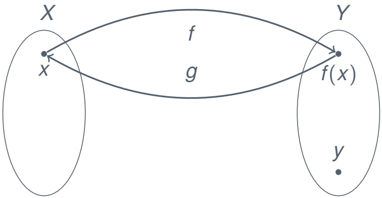
Inverse funktioner

- To funktioner $f\colon X \to Y$ og $g\colon Y \to X$ er hinandens *inverse* hvis
$$f(g(y)) = y, \quad \text{og} \quad g(f(x)) = x$$
for alle x i X og y i Y.



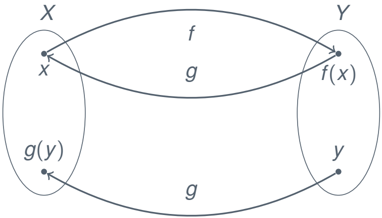
Inverse funktioner

- To funktioner $f\colon X \to Y$ og $g\colon Y \to X$ er hinandens *inverse* hvis
$$f(g(y)) = y, \quad \text{og} \quad g(f(x)) = x$$
for alle x i X og y i Y.



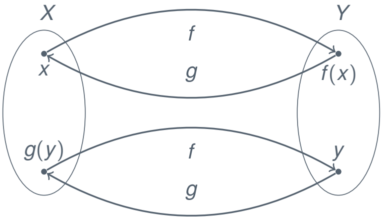
Inverse funktioner

- To funktioner $f\colon X \to Y$ og $g\colon Y \to X$ er hinandens *inverse* hvis
$$f(g(y)) = y, \quad \text{og} \quad g(f(x)) = x$$
for alle x i X og y i Y.



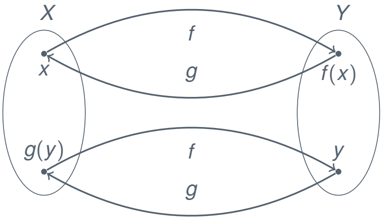
Inverse funktioner

- To funktioner $f\colon X \to Y$ og $g\colon Y \to X$ er hinandens *inverse* hvis
$$f(g(y)) = y, \quad \text{og} \quad g(f(x)) = x$$
for alle x i X og y i Y.



Inverse funktioner

- To funktioner $f\colon X \to Y$ og $g\colon Y \to X$ er hinandens *inverse* hvis
$$f(g(y)) = y, \quad \text{og} \quad g(f(x)) = x$$
for alle x i X og y i Y.
- Eksempel: $f(x) = x^2$ og $g(x) = \sqrt{x}$ begge defineret på $[0, \infty[$ er inverse funktioner.
- Eksempel: $f(x) = 1/x$ defineret på $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ er sin egen invers.



Logaritmer og eksponentialfunktioner

- For ethvert positivt $a \neq 1$ kalder vi funktionen $f_a \colon \mathbb{R} \to]0, \infty[$ givet ved $f_a(x) = a^x$ for *eksponentialfunktionen med grundtal a*.
- Funktionen $f_a(x) = a^x$ har en invers funktion $\log_a \colon]0, \infty[\to \mathbb{R}$ som kaldes *logaritmen med grundtal a*.
- Hvis $a = e$ så skriver vi $\ln$ i stedet for $\log_e$ og hvis $a = 10$ skriver vi $\log$ i stedet for $\log_{10}$.
- Der gælder at

  $$log_a(a^x) = x \quad \text{og} \quad a^{\log_a(y)} = y,$$

  for alle $x \in \mathbb{R}$ og $y \in]0, \infty[$.
- Eksempler: Udregn

  $$\log_2(8), \qquad \log_{10}(10000), \qquad \log_a(1).$$

Logaritmer og eksponentialfunktioner

Regneregler

- Når vi arbejder med eksponentialfunktioner kan vi anvende potensregneregler.
- For logaritmer har vi følgende regneregler

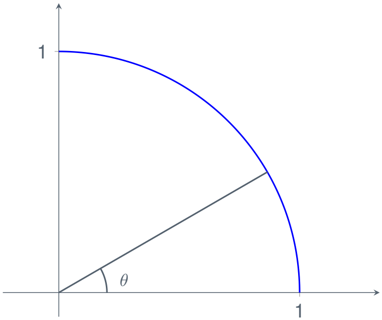
$$\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y),$$
$$\log_a(\frac{x}{y}) = \log_a(x) - \log_a(y),$$
$$\log_a(x^r) = r\log_a(x).$$

- Eksempler: Udregn

$$\log(50) + \log(20), \qquad 2^{2+\log_2(5)}, \qquad 9^{\log_3(2)}.$$

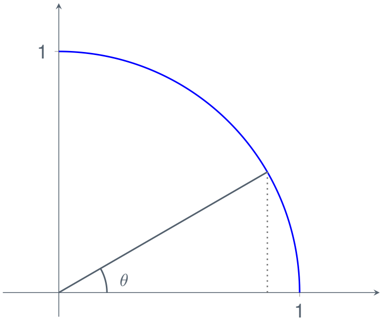
Trigonometriske funktioner

- Vi definerer de trigonometriske funktioner ud fra enhedscirklen.



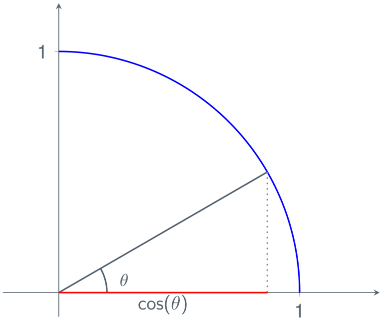
Trigonometriske funktioner

- Vi definerer de trigonometriske funktioner ud fra enhedscirklen.



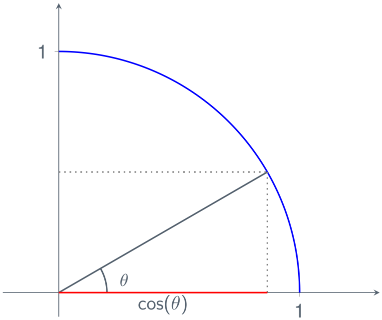
Trigonometriske funktioner

- Vi definerer de trigonometriske funktioner ud fra enhedscirklen.



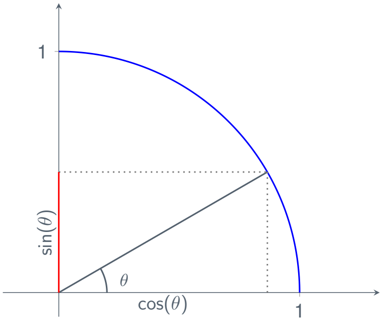
Trigonometriske funktioner

- Vi definerer de trigonometriske funktioner ud fra enhedscirklen.



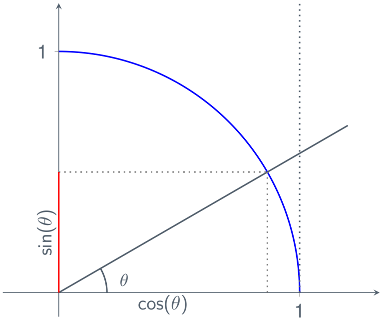
Trigonometriske funktioner

- Vi definerer de trigonometriske funktioner ud fra enhedscirklen.



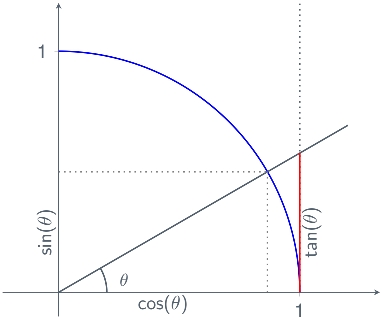
Trigonometriske funktioner

- Vi definerer de trigonometriske funktioner ud fra enhedscirklen.



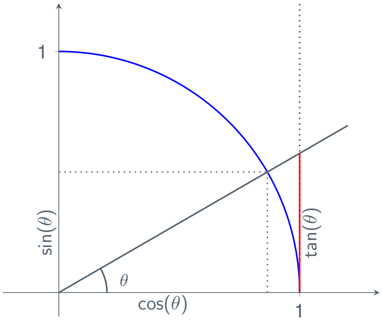
Trigonometriske funktioner

- Vi definerer de trigonometriske funktioner ud fra enhedscirklen.



Trigonometriske funktioner

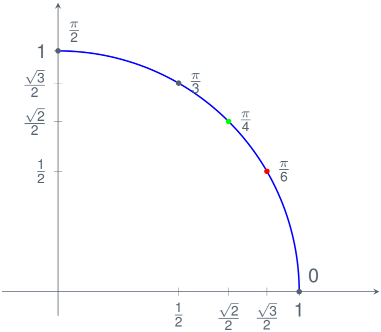
- Vi definerer de trigonometriske funktioner ud fra enhedscirklen.



- Bemærk at $\tan(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}$.

Trigonometriske funktioner
Eksakte værdier

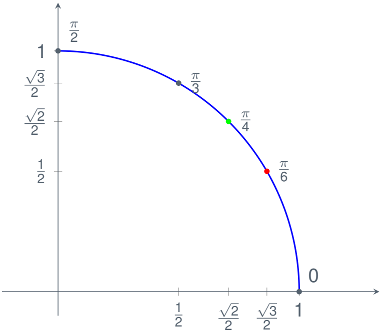
- For særlige vinkler kan vi bestemme eksakte værdier af de trigonometriske funktioner.



θ	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$
0			
$\frac{\pi}{6}$			
$\frac{\pi}{4}$			
$\frac{\pi}{3}$			
$\frac{\pi}{2}$			

Trigonometriske funktioner
Eksakte værdier

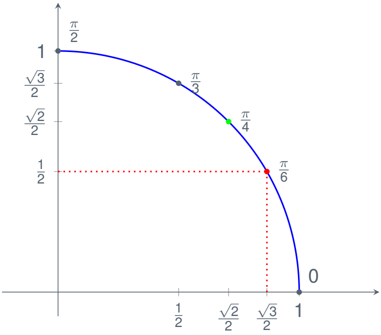
- For særlige vinkler kan vi bestemme eksakte værdier af de trigonometriske funktioner.



θ	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$
0	0	1	0
$\frac{\pi}{6}$			
$\frac{\pi}{4}$			
$\frac{\pi}{3}$			
$\frac{\pi}{2}$			

Trigonometriske funktioner
Eksakte værdier

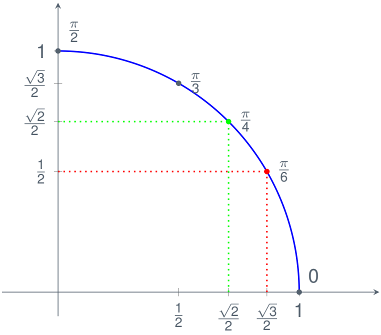
- For særlige vinkler kan vi bestemme eksakte værdier af de trigonometriske funktioner.



θ	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$
0	0	1	0
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
$\frac{\pi}{4}$			
$\frac{\pi}{3}$			
$\frac{\pi}{2}$			

Trigonometriske funktioner
Eksakte værdier

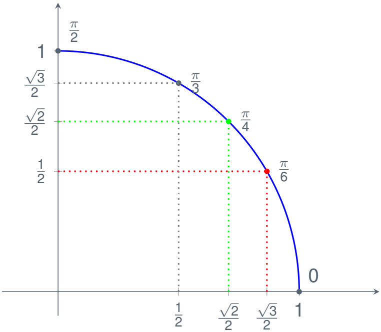
- For særlige vinkler kan vi bestemme eksakte værdier af de trigonometriske funktioner.



θ	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$
0	0	1	0
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$\frac{\pi}{3}$			
$\frac{\pi}{2}$			

Trigonometriske funktioner
Eksakte værdier

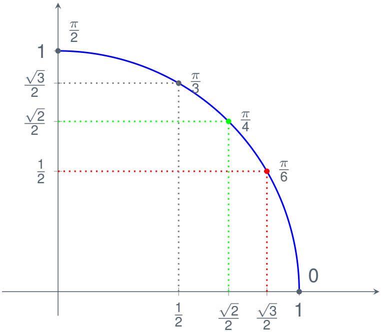
- For særlige vinkler kan vi bestemme eksakte værdier af de trigonometriske funktioner.



θ	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$
0	0	1	0
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{2}$			

Trigonometriske funktioner
Eksakte værdier

- For særlige vinkler kan vi bestemme eksakte værdier af de trigonometriske funktioner.



θ	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$
0	0	1	0
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0	

Trigonometriske funktioner
Eksempler

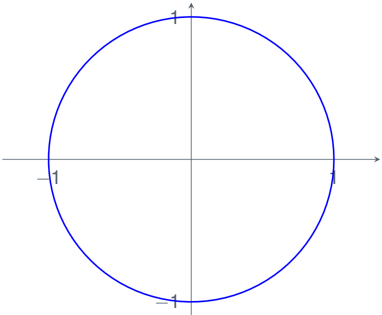
- Når I skal løse opgaver så tegn altid enhedscirklen og udnyt symmetri.
- Eksempler: Udregn

$$\cos(\frac{3\pi}{2}), \qquad \sin(9\pi), \qquad \sin(-\frac{5\pi}{4}).$$

Trigonometriske funktioner
Eksempler

- Når I skal løse opgaver så tegn altid enhedscirklen og udnyt symmetri.
- Eksempler: Udregn

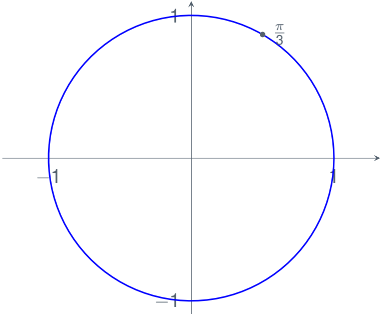
$$\cos(\frac{3\pi}{2}), \qquad \sin(9\pi), \qquad \sin(-\frac{5\pi}{4}).$$



Trigonometriske funktioner
Eksempler

- Når I skal løse opgaver så tegn altid enhedscirklen og udnyt symmetri.
- Eksempler: Udregn

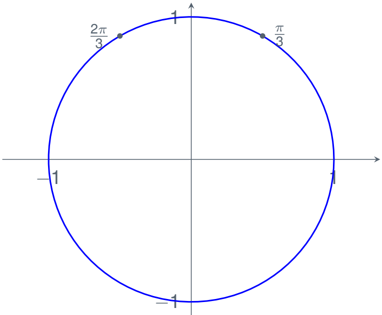
$$\cos(\frac{3\pi}{2}), \qquad \sin(9\pi), \qquad \sin(-\frac{5\pi}{4}).$$



Trigonometriske funktioner
Eksempler

- Når I skal løse opgaver så tegn altid enhedscirklen og udnyt symmetri.
- Eksempler: Udregn

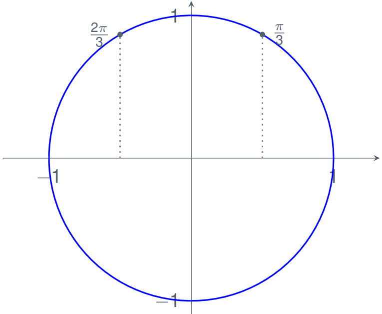
$$\cos(\frac{3\pi}{2}), \qquad \sin(9\pi), \qquad \sin(-\frac{5\pi}{4}).$$



Trigonometriske funktioner
Eksempler

- Når I skal løse opgaver så tegn altid enhedscirklen og udnyt symmetri.
- Eksempler: Udregn

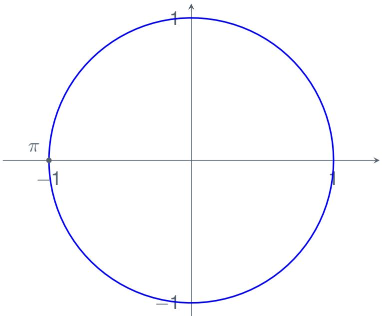
$$\cos(\frac{3\pi}{2}), \qquad \sin(9\pi), \qquad \sin(-\frac{5\pi}{4}).$$



Trigonometriske funktioner
Eksempler

- Når I skal løse opgaver så tegn altid enhedscirklen og udnyt symmetri.
- Eksempler: Udregn

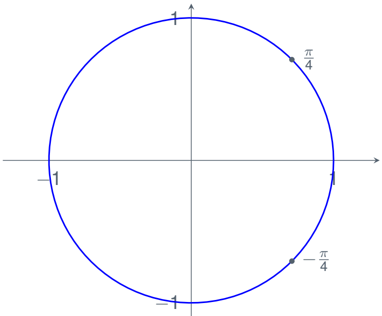
$$\cos(\frac{3\pi}{2}), \qquad \sin(9\pi), \qquad \sin(-\frac{5\pi}{4}).$$



Trigonometriske funktioner
Eksempler

- Når I skal løse opgaver så tegn altid enhedscirklen og udnyt symmetri.
- Eksempler: Udregn

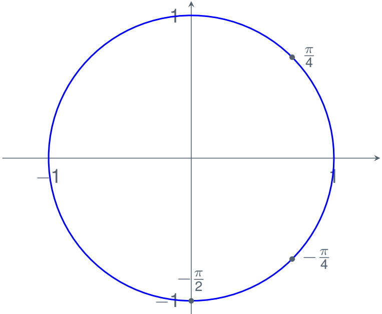
$$\cos(\frac{3\pi}{2}), \qquad \sin(9\pi), \qquad \sin(-\frac{5\pi}{4}).$$



Trigonometriske funktioner
Eksempler

- Når I skal løse opgaver så tegn altid enhedscirklen og udnyt symmetri.
- Eksempler: Udregn

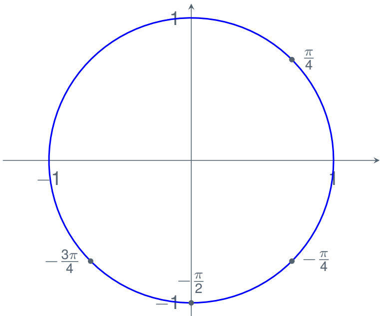
$$\cos(\frac{3\pi}{2}), \qquad \sin(9\pi), \qquad \sin(-\frac{5\pi}{4}).$$



Trigonometriske funktioner
Eksempler

- Når I skal løse opgaver så tegn altid enhedscirklen og udnyt symmetri.
- Eksempler: Udregn

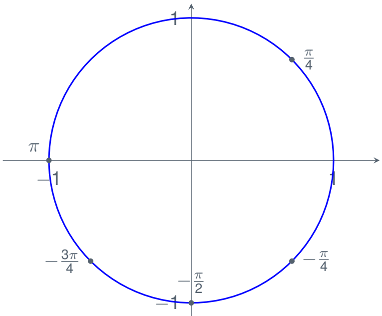
$$\cos(\frac{3\pi}{2}), \qquad \sin(9\pi), \qquad \sin(-\frac{5\pi}{4}).$$



Trigonometriske funktioner
Eksempler

- Når I skal løse opgaver så tegn altid enhedscirklen og udnyt symmetri.
- Eksempler: Udregn

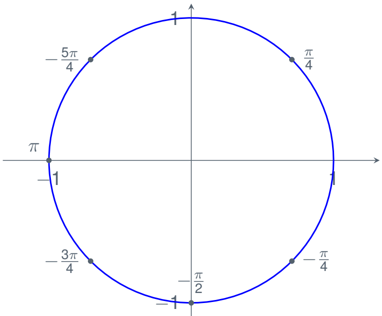
$$\cos(\frac{3\pi}{2}), \qquad \sin(9\pi), \qquad \sin(-\frac{5\pi}{4}).$$



Trigonometriske funktioner
Eksempler

- Når I skal løse opgaver så tegn altid enhedscirklen og udnyt symmetri.
- Eksempler: Udregn

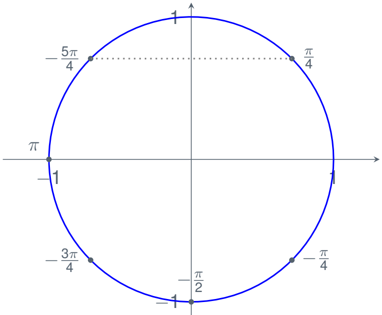
$$\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right), \qquad \sin(9\pi), \qquad \sin\left(-\frac{5\pi}{4}\right).$$



Trigonometriske funktioner
Eksempler

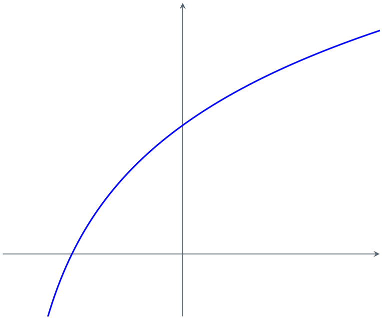
- Når I skal løse opgaver så tegn altid enhedscirklen og udnyt symmetri.
- Eksempler: Udregn

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right), \qquad \sin(9\pi), \qquad \sin\left(-\frac{5\pi}{4}\right).$$



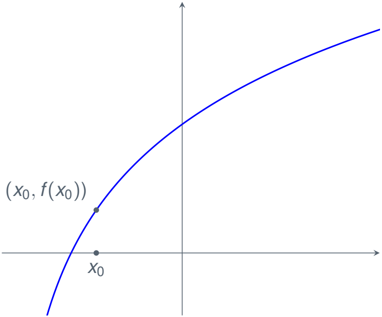
Differentialregning

- Differentialregning omhandler bestemmelse af hældninger af funktioner.
- Vi definerer en funktions hældning vha. sekanter (se skitse).



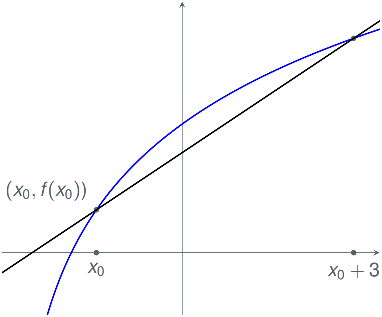
Differentialregning

- Differentialregning omhandler bestemmelse af hældninger af funktioner.
- Vi definerer en funktions hældning vha. sekanter (se skitse).



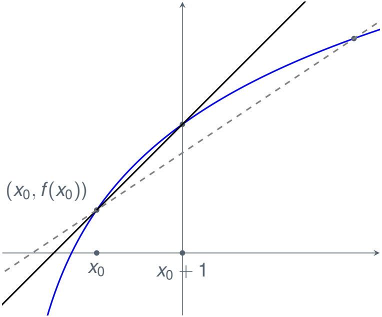
Differentialregning

- Differentialregning omhandler bestemmelse af hældninger af funktioner.
- Vi definerer en funktions hældning vha. sekanter (se skitse).



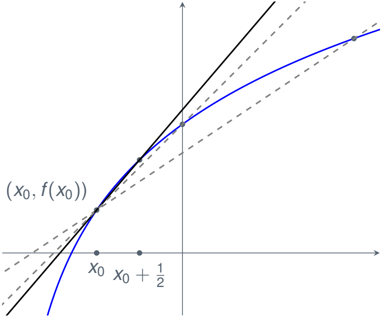
Differentialregning

- Differentialregning omhandler bestemmelse af hældninger af funktioner.
- Vi definerer en funktions hældning vha. sekanter (se skitse).



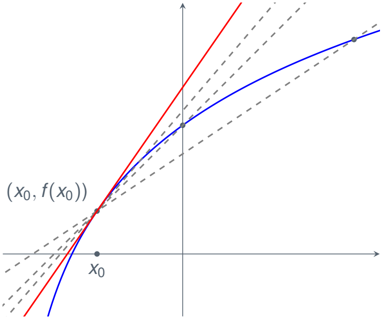
Differentialregning

- Differentialregning omhandler bestemmelse af hældninger af funktioner.
- Vi definerer en funktions hældning vha. sekanter (se skitse).



Differentialregning

- Differentialregning omhandler bestemmelse af hældninger af funktioner.
- Vi definerer en funktions hældning vha. sekanter (se skitse).



Differentialregning

- En funktion f er differentiabel i x_0 hvis grænsen

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

  eksisterer.

- Bemærk at $f'(x)$ betegner hældningen af f i x.
- Vi anvender ofte notationen

$$f'(x) = \frac{d}{dx} f(x) = \frac{df}{dx}(x).$$

Differentialregning

Regneregler

- Vi har følgende regneregler:

$f(x)$	$f'(x)$
c	0
x	1
x^n	nx^{n-1}
e^x	e^x
e^{cx}	ce^{cx}

$f(x)$	$f'(x)$
a^x	$a^x \ln a$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\cos x$	$-\sin x$
$\sin x$	$\cos x$
$\tan x$	$1+\tan^2(x)$

- Eksempler: Differentier funktionerne $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = \frac{1}{x}$, $h(x) = \ln(x^3)$.

Differentialregning
Regneregler

- Vi har følgende generelle regneregler

$$(cf)'(x) = cf'(x)$$
$$(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x).$$

- Eksempler: Differentier funktionerne $f(x) = 2x + 1 - \frac{1}{x}$, $g(x) = 3x^{-2} - 2e^{-x} + \cos(x)$.

Differentialregning

Repetition af regneregler

- Vi har følgende regneregler:

$f(x)$	$f'(x)$
c	0
x	1
x^n	nx^{n-1}
e^x	e^x
e^{cx}	ce^{cx}

$f(x)$	$f'(x)$
a^x	$a^x \ln a$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\cos x$	$-\sin x$
$\sin x$	$\cos x$
$\tan x$	$1+\tan^2(x)$

- Samt $(cf)'(x) = cf'(x)$ og $(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$.

Produkt-og kvotientreglen

- For produkter og kvotienter af funktioner har vi følgende regneregler

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

- Eksempler: Differentier funktionerne $f(x) = xe^{2x}$, $g(x) = \frac{\cos(x)}{x}$ og $h(x) = \cos(x)\sin(x)$.

Kædereglen

- Husk at sammensatte funktioner er på formen
$$(f \circ g)(x) = f(g(x)).$$
- Sammensatte funktioner differentieres med kædereglen:
$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x).$$
- Eksempler: Differentier funktionerne $f(x) = \cos(x^2)$, $g(x) = e^{x^3+3x}$ og $h(x) = \sin^2(x^2 - 2x + 1)$.
- Eksempel: Differentier funktionen $f(x) = xe^{\sqrt{x}}$.

Ubestemte integraler

Stamfunktioner

- En funktion f har stamfunktion F hvis

$$F'(x) = f(x)$$

- Hvis F er stamfunktion til f så er $F(x) + c$ også, for alle $c \in \mathbb{R}$.
- Det ubestemte integral af f defineres til

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c,$$

  hvor F er en stamfunktion til f og $c \in \mathbb{R}$.
- Eksempler: Er e^{x^2} stamfunktion til $2xe^{x^2}$?

Regneregler for ubestemte integraler

- Vi har følgende regneregler:

$f(x)$	$\int f(x)\,dx$
c	$cx + k$
x	$\frac{1}{2}x^2 + k$
x^n	$\frac{1}{n+1}x^{n+1} + k$
e^x	$e^x + k$
e^{cx}	$\frac{1}{c}e^{cx} + k$

$f(x)$	$\int f(x)\,dx$
$\frac{1}{x}$	$\ln(\lvert x\rvert) + k$
$\ln x$	$x\ln(x) - x + k$
$\cos x$	$\sin x + k$
$\sin x$	$-\cos x + k$
$\tan x$	$-\ln(\lvert\cos(x)\rvert) + k$

- Eksempler: Udregn $\int \sqrt{x}\,dx$ og $\int x^3\,dx$.

Regneregler for ubestemte integraler

- Vi har følgende generelle regneregler

$$\int cf(x)\,dx = c\int f(x)\,dx$$
$$\int f(x) \pm g(x)\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx.$$

- Eksempler: Udregn

$$\int e^{3x} + \sqrt[3]{x} + 1\,dx,$$
$$\int \frac{1}{2x} - cos(x)\,dx.$$

Bestemte integraler

- Vi vil bestemme arealer under grafer for funktioner.
- Arealet mellem grafen for f og x-asksen i intervallet $[a, b]$ er givet ved

$$F(b) - F(a),$$

hvor F er en stamfunktion til f.

- Derfor defineres det bestemte integral af f i intervallet $[a, b]$ til

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

- Eksempel: Bestem $\int_0^1 x^2\,dx$.

Regneregler for bestemte integraler

- Vi har følgende generelle regneregler for bestemte integraler

$$\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx$$
$$\int_a^b f(x) \pm g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx.$$

- Eksempler: Udregn

$$\int_1^2 \frac{1}{2x} - 1\,dx$$
$$\int_0^4 3x^2 + 3e^x\,dx.$$

Delvis integration

- Skal man integrere produkter af funktioner anvendes delvis integration:

$$\int f(x)g(x)\,dx = f(x)G(x) - \int f'(x)G(x)\,dx$$

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = [f(x)G(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)G(x)\,dx$$

- Det er ikke lige meget hvordan f og g vælges.
- Eksempler: Udregn

$$\int xe^x\,dx,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin(x)\,dx.$$

Integration ved substitution

- For integration af sammensatte funktioner gælder at

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = F(g(x)) + c$$
$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = [F(g(x))]_a^b.$$

- Denne regneregel kaldes integration ved substitution.
- Vi vil ofte anvende en særlig metode der retfærdiggør navnet.

Integration ved substitution

Ubestemt integral

- Udregn $\int f(g(x))g'(x)\,dx$.
- Lad $u = g(x)$.
- Udregn $\frac{du}{dx}$ og isoler dx.
- Substituer $g(x)$ og dx.
- Udregn integralet mht. u.
- Substituer tilbage.

Integration ved substitution

Ubestemt integral

- Udregn $\int f(g(x))g'(x)\,dx$.
- Lad $u = g(x)$.
- Udregn $\frac{du}{dx}$ og isoler dx.
- Substituer $g(x)$ og dx.
- Udregn integralet mht. u.
- Substituer tilbage.

- Udregn $\int x^2 \cos(x^3)\,dx$.

Integration ved substitution

Ubestemt integral

- Udregn $\int f(g(x))g'(x)\,dx$.
- Lad $u = g(x)$.
- Udregn $\frac{du}{dx}$ og isoler dx.
- Substituer $g(x)$ og dx.
- Udregn integralet mht. u.
- Substituer tilbage.

- Udregn $\int x^2 \cos(x^3)\,dx$.
- Lad $u = x^3$.

Integration ved substitution

Ubestemt integral

- Udregn $\int f(g(x))g'(x)\,dx$.
- Lad $u = g(x)$.
- Udregn $\frac{du}{dx}$ og isoler dx.
- Substituer $g(x)$ og dx.
- Udregn integralet mht. u.
- Substituer tilbage.

- Udregn $\int x^2 \cos(x^3)\,dx$.
- Lad $u = x^3$.
- Så er $\frac{du}{dx} = 3x^2$ og $dx = \frac{du}{3x^2}$.

Integration ved substitution

Ubestemt integral

- Udregn $\int f(g(x))g'(x)\,dx$.
- Lad $u = g(x)$.
- Udregn $\frac{du}{dx}$ og isoler dx.
- Substituer $g(x)$ og dx.
- Udregn integralet mht. u.
- Substituer tilbage.

- Udregn $\int x^2 \cos(x^3)\,dx$.
- Lad $u = x^3$.
- Så er $\frac{du}{dx} = 3x^2$ og $dx = \frac{du}{3x^2}$.
- $\int x^2 \cos(u) \frac{du}{3x^2}\,du = \frac{1}{3}\int \cos(u)\,du$

Integration ved substitution

Ubestemt integral

- Udregn $\int f(g(x))g'(x)\,dx$.
- Lad $u = g(x)$.
- Udregn $\frac{du}{dx}$ og isoler dx.
- Substituer $g(x)$ og dx.
- Udregn integralet mht. u.
- Substituer tilbage.

- Udregn $\int x^2 \cos(x^3)\,dx$.
- Lad $u = x^3$.
- Så er $\frac{du}{dx} = 3x^2$ og $dx = \frac{du}{3x^2}$.
- $\int x^2 \cos(u) \frac{du}{3x^2}\,du = \frac{1}{3} \int \cos(u)\,du$
- $\frac{1}{3} \int \cos(u)\,du = \frac{1}{3} \sin(u) + c$.

Integration ved substitution
Ubestemt integral

- Udregn $\int f(g(x))g'(x)\,dx$.
- Lad $u = g(x)$.
- Udregn $\frac{du}{dx}$ og isoler dx.
- Substituer $g(x)$ og dx.
- Udregn integralet mht. u.
- Substituer tilbage.

- Udregn $\int x^2 \cos(x^3)\,dx$.
- Lad $u = x^3$.
- Så er $\frac{du}{dx} = 3x^2$ og $dx = \frac{du}{3x^2}$.
- $\int x^2 \cos(u) \frac{du}{3x^2}\,du = \frac{1}{3}\int \cos(u)\,du$
- $\frac{1}{3}\int \cos(u)\,du = \frac{1}{3}\sin(u) + c$.
- $\int x^2 \cos(x^3)\,dx = \frac{1}{3}\sin(x^3) + c$.

Integration ved substitution
Bestemt integral

- Udregn $\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx$.
- Lad $u = g(x)$.
- Udregn $\frac{du}{dx}$ og isoler dx.
- Substituer $g(x)$, dx samt grænser.
- Udregn integralet mht. u.

Integration ved substitution
Bestemt integral

- Udregn $\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx$.
- Lad $u = g(x)$.
- Udregn $\frac{du}{dx}$ og isoler dx.
- Substituer $g(x)$, dx samt grænser.
- Udregn integralet mht. u.

- Udregn $\int_{-1}^{2} -xe^{x^2}\,dx$.

Integration ved substitution

Bestemt integral

- Udregn $\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx$.
- Lad $u = g(x)$.
- Udregn $\frac{du}{dx}$ og isoler dx.
- Substituer $g(x)$, dx samt grænser.
- Udregn integralet mht. u.

- Udregn $\int_{-1}^{2} -xe^{x^2}\,dx$.
- Lad $u = x^2$.

Integration ved substitution

Bestemt integral

- Udregn $\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx$.
- Lad $u = g(x)$.
- Udregn $\frac{du}{dx}$ og isoler dx.
- Substituer $g(x)$, dx samt grænser.
- Udregn integralet mht. u.

- Udregn $\int_{-1}^{2} -xe^{x^2}\,dx$.
- Lad $u = x^2$.
- Så er $\frac{du}{dx} = 2x$ og $dx = \frac{du}{2x}$.

Integration ved substitution

Bestemt integral

- Udregn $\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx$.
- Lad $u = g(x)$.
- Udregn $\frac{du}{dx}$ og isoler dx.
- Substituer $g(x)$, dx samt grænser.
- Udregn integralet mht. u.

- Udregn $\int_{-1}^{2} -xe^{x^2}\,dx$.
- Lad $u = x^2$.
- Så er $\frac{du}{dx} = 2x$ og $dx = \frac{du}{2x}$.
- $\int_1^4 -xe^u \frac{du}{2x} = -\frac{1}{2}\int_1^4 e^u\,du$

Integration ved substitution

Bestemt integral

- Udregn $\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx$.
- Lad $u = g(x)$.
- Udregn $\frac{du}{dx}$ og isoler dx.
- Substituer $g(x)$, dx samt grænser.
- Udregn integralet mht. u.

- Udregn $\int_{-1}^{2} -xe^{x^2}\,dx$.
- Lad $u = x^2$.
- Så er $\frac{du}{dx} = 2x$ og $dx = \frac{du}{2x}$.
- $\int_1^4 -xe^u \frac{du}{2x} = -\frac{1}{2}\int_1^4 e^u\,du$
- $\frac{-1}{2}\int_1^4 e^u\,du = \frac{-1}{2}[e^u]_1^4 = \frac{e-e^4}{2}$.

Opgaveregning!

AALBORG UNIVERSITY
DENMARK