

Math101

Benjamin Buus Støttrup
benjamin@math.aau.dk

Institut for matematiske fag
Aalborg universitet
Danmark



AALBORG UNIVERSITY
DENMARK

Introduktion



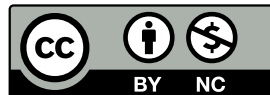
Disse slides er oprindeligt udarbejdet af

Benjamin Buus Støttrup

til Math101 kurset på Aalborg Universitet i efteråret 2018.

Seneste opdateret 25. marts 2021

This work is licensed under a Creative Commons “Attribution-NonCommercial 4.0 International” license.



Ubestemte integraler

Stamfunktioner

- En funktion f har stamfunktion F hvis

$$F'(x) = f(x)$$

- Hvis F er stamfunktion til f så er $F(x) + c$ også, for alle $c \in \mathbb{R}$.
- Det ubestemte integral af f defineres til

$$\int f(x) dx = F(x) + c,$$

hvor F er en stamfunktion til f og $c \in \mathbb{R}$.

- Eksempler: Er e^{x^2} stamfunktion til $2xe^{x^2}$?

Ubestemte integraler

Stamfunktioner

- ▶ En funktion f har stamfunktion F hvis

$$F'(x) = f(x)$$

- ▶ Hvis F er stamfunktion til f så er $F(x) + c$ også, for alle $c \in \mathbb{R}$.

- ▶ Det ubestemte integral af f defineres til

$$\int f(x) dx = F(x) + c,$$

hvor F er en stamfunktion til f og $c \in \mathbb{R}$.

- ▶ Eksempler: Er e^{x^2} stamfunktion til $2xe^{x^2}$?



Ubestemte integraler

Stamfunktioner

- En funktion f har stamfunktion F hvis

$$F'(x) = f(x)$$

- Hvis F er stamfunktion til f så er $F(x) + c$ også, for alle $c \in \mathbb{R}$.
- Det ubestemte integral af f defineres til

$$\int f(x) dx = F(x) + c,$$

hvor F er en stamfunktion til f og $c \in \mathbb{R}$.

- Eksempler: Er e^{x^2} stamfunktion til $2xe^{x^2}$?

Ubestemte integraler

Stamfunktioner

- En funktion f har stamfunktion F hvis

$$F'(x) = f(x)$$

- Hvis F er stamfunktion til f så er $F(x) + c$ også, for alle $c \in \mathbb{R}$.
- Det ubestemte integral af f defineres til

$$\int f(x) dx = F(x) + c,$$

hvor F er en stamfunktion til f og $c \in \mathbb{R}$.

- Eksempler: Er e^{x^2} stamfunktion til $2xe^{x^2}$?

Ubestemte integraler

Stamfunktioner

- En funktion f har stamfunktion F hvis

$$F'(x) = f(x)$$

- Hvis F er stamfunktion til f så er $F(x) + c$ også, for alle $c \in \mathbb{R}$.
- Det ubestemte integral af f defineres til

$$\int f(x) dx = F(x) + c,$$

hvor F er en stamfunktion til f og $c \in \mathbb{R}$.

- Eksempler: Er e^{x^2} stamfunktion til $2xe^{x^2}$? $\frac{d}{dx} e^{x^2} = 2xe^{x^2}$.

Regneregler for ubestemte integraler

- Vi har følgende regneregler:

$f(x)$	$\int f(x) dx$
c	$cx + k$
x	$\frac{1}{2}x^2 + k$
x^n	$\frac{1}{n+1}x^{n+1} + k, (n \neq -1)$
e^x	$e^x + k$
e^{cx}	$\frac{1}{c}e^{cx} + k$

$f(x)$	$\int f(x) dx$
$\frac{1}{x}$	$\ln(x) + k$
$\ln x$	$x \ln(x) - x + k$
$\cos x$	$\sin x + k$
$\sin x$	$-\cos x + k$
$\tan x$	$-\ln(\cos(x)) + k$

- Udregn: $\int \sqrt{x} dx$

$$\int x^3 dx$$

Regneregler for ubestemte integraler

- Vi har følgende regneregler:

$f(x)$	$\int f(x) dx$
c	$cx + k$
x	$\frac{1}{2}x^2 + k$
x^n	$\frac{1}{n+1}x^{n+1} + k, (n \neq -1)$
e^x	$e^x + k$
e^{cx}	$\frac{1}{c}e^{cx} + k$

$f(x)$	$\int f(x) dx$
$\frac{1}{x}$	$\ln(x) + k$
$\ln x$	$x \ln(x) - x + k$
$\cos x$	$\sin x + k$
$\sin x$	$-\cos x + k$
$\tan x$	$-\ln(\cos(x)) + k$

- Udregn: $\int \sqrt{x} dx$

$$\int x^3 dx$$

Regneregler for ubestemte integraler

- Vi har følgende regneregler:

$f(x)$	$\int f(x) dx$
c	$cx + k$
x	$\frac{1}{2}x^2 + k$
x^n	$\frac{1}{n+1}x^{n+1} + k, (n \neq -1)$
e^x	$e^x + k$
e^{cx}	$\frac{1}{c}e^{cx} + k$

$f(x)$	$\int f(x) dx$
$\frac{1}{x}$	$\ln(x) + k$
$\ln x$	$x \ln(x) - x + k$
$\cos x$	$\sin x + k$
$\sin x$	$-\cos x + k$
$\tan x$	$-\ln(\cos(x)) + k$

- Udregn: $\int \sqrt{x} dx$

$$\int x^3 dx$$

Regneregler for ubestemte integraler

- Vi har følgende regneregler:

$f(x)$	$\int f(x) dx$
c	$cx + k$
x	$\frac{1}{2}x^2 + k$
x^n	$\frac{1}{n+1}x^{n+1} + k, (n \neq -1)$
e^x	$e^x + k$
e^{cx}	$\frac{1}{c}e^{cx} + k$

$f(x)$	$\int f(x) dx$
$\frac{1}{x}$	$\ln(x) + k$
$\ln x$	$x \ln(x) - x + k$
$\cos x$	$\sin x + k$
$\sin x$	$-\cos x + k$
$\tan x$	$-\ln(\cos(x)) + k$

- Udregn: $\int \sqrt{x} dx$

$$\int x^3 dx$$

Regneregler for ubestemte integraler

- Vi har følgende regneregler:

$f(x)$	$\int f(x) dx$
c	$cx + k$
x	$\frac{1}{2}x^2 + k$
x^n	$\frac{1}{n+1}x^{n+1} + k, (n \neq -1)$
e^x	$e^x + k$
e^{cx}	$\frac{1}{c}e^{cx} + k$

$f(x)$	$\int f(x) dx$
$\frac{1}{x}$	$\ln(x) + k$
$\ln x$	$x \ln(x) - x + k$
$\cos x$	$\sin x + k$
$\sin x$	$-\cos x + k$
$\tan x$	$-\ln(\cos(x)) + k$

- Udregn: $\int \sqrt{x} dx$

$$\int x^3 dx$$

Regneregler for ubestemte integraler

- Vi har følgende regneregler:

$f(x)$	$\int f(x) dx$
c	$cx + k$
x	$\frac{1}{2}x^2 + k$
x^n	$\frac{1}{n+1}x^{n+1} + k, (n \neq -1)$
e^x	$e^x + k$
e^{cx}	$\frac{1}{c}e^{cx} + k$

$f(x)$	$\int f(x) dx$
$\frac{1}{x}$	$\ln(x) + k$
$\ln x$	$x \ln(x) - x + k$
$\cos x$	$\sin x + k$
$\sin x$	$-\cos x + k$
$\tan x$	$-\ln(\cos(x)) + k$

- Udregn: $\int \sqrt{x} dx$

$$\int x^3 dx$$

Regneregler for ubestemte integraler

- Vi har følgende regneregler:

$f(x)$	$\int f(x) dx$
c	$cx + k$
x	$\frac{1}{2}x^2 + k$
x^n	$\frac{1}{n+1}x^{n+1} + k, (n \neq -1)$
e^x	$e^x + k$
e^{cx}	$\frac{1}{c}e^{cx} + k$

$f(x)$	$\int f(x) dx$
$\frac{1}{x}$	$\ln(x) + k$
$\ln x$	$x \ln(x) - x + k$
$\cos x$	$\sin x + k$
$\sin x$	$-\cos x + k$
$\tan x$	$-\ln(\cos(x)) + k$

- Udregn: $\int \sqrt{x} dx$

$$\int x^3 dx$$

Regneregler for ubestemte integraler

- Vi har følgende regneregler:

$f(x)$	$\int f(x) dx$
c	$cx + k$
x	$\frac{1}{2}x^2 + k$
x^n	$\frac{1}{n+1}x^{n+1} + k, (n \neq -1)$
e^x	$e^x + k$
e^{cx}	$\frac{1}{c}e^{cx} + k$

$f(x)$	$\int f(x) dx$
$\frac{1}{x}$	$\ln(x) + k$
$\ln x$	$x \ln(x) - x + k$
$\cos x$	$\sin x + k$
$\sin x$	$-\cos x + k$
$\tan x$	$-\ln(\cos(x)) + k$

► Udregn: $\int \sqrt{x} dx$

$\int x^3 dx$

Regneregler for ubestemte integraler

- Vi har følgende regneregler:

$f(x)$	$\int f(x) dx$
c	$cx + k$
x	$\frac{1}{2}x^2 + k$
x^n	$\frac{1}{n+1}x^{n+1} + k, (n \neq -1)$
e^x	$e^x + k$
e^{cx}	$\frac{1}{c}e^{cx} + k$

$f(x)$	$\int f(x) dx$
$\frac{1}{x}$	$\ln(x) + k$
$\ln x$	$x \ln(x) - x + k$
$\cos x$	$\sin x + k$
$\sin x$	$-\cos x + k$
$\tan x$	$-\ln(\cos(x)) + k$

- Udregn: $\int \sqrt{x} dx$

$$\int x^3 dx$$

Regneregler for ubestemte integraler

- Vi har følgende regneregler:

$f(x)$	$\int f(x) dx$
c	$cx + k$
x	$\frac{1}{2}x^2 + k$
x^n	$\frac{1}{n+1}x^{n+1} + k, (n \neq -1)$
e^x	$e^x + k$
e^{cx}	$\frac{1}{c}e^{cx} + k$

$f(x)$	$\int f(x) dx$
$\frac{1}{x}$	$\ln(x) + k$
$\ln x$	$x \ln(x) - x + k$
$\cos x$	$\sin x + k$
$\sin x$	$-\cos x + k$
$\tan x$	$-\ln(\cos(x)) + k$

► Udregn: $\int \sqrt{x} dx$

$\int x^3 dx$

Regneregler for ubestemte integraler

- Vi har følgende regneregler:

$f(x)$	$\int f(x) dx$
c	$cx + k$
x	$\frac{1}{2}x^2 + k$
x^n	$\frac{1}{n+1}x^{n+1} + k, (n \neq -1)$
e^x	$e^x + k$
e^{cx}	$\frac{1}{c}e^{cx} + k$

$f(x)$	$\int f(x) dx$
$\frac{1}{x}$	$\ln(x) + k$
$\ln x$	$x \ln(x) - x + k$
$\cos x$	$\sin x + k$
$\sin x$	$-\cos x + k$
$\tan x$	$-\ln(\cos(x)) + k$

► Udregn: $\int \sqrt{x} dx$

$\int x^3 dx$

Regneregler for ubestemte integraler

- Vi har følgende regneregler:

$f(x)$	$\int f(x) dx$
c	$cx + k$
x	$\frac{1}{2}x^2 + k$
x^n	$\frac{1}{n+1}x^{n+1} + k, (n \neq -1)$
e^x	$e^x + k$
e^{cx}	$\frac{1}{c}e^{cx} + k$

$f(x)$	$\int f(x) dx$
$\frac{1}{x}$	$\ln(x) + k$
$\ln x$	$x \ln(x) - x + k$
$\cos x$	$\sin x + k$
$\sin x$	$-\cos x + k$
$\tan x$	$-\ln(\cos(x)) + k$

- Udregn: $\int \sqrt{x} dx$

,

$$\int x^3 dx$$

Regneregler for ubestemte integraler

- Vi har følgende regneregler:

$f(x)$	$\int f(x) dx$
c	$cx + k$
x	$\frac{1}{2}x^2 + k$
x^n	$\frac{1}{n+1}x^{n+1} + k, (n \neq -1)$
e^x	$e^x + k$
e^{cx}	$\frac{1}{c}e^{cx} + k$

$f(x)$	$\int f(x) dx$
$\frac{1}{x}$	$\ln(x) + k$
$\ln x$	$x \ln(x) - x + k$
$\cos x$	$\sin x + k$
$\sin x$	$-\cos x + k$
$\tan x$	$-\ln(\cos(x)) + k$

- Udregn: $\int \sqrt{x} dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx$,

$$\int x^3 dx$$

Regneregler for ubestemte integraler

- Vi har følgende regneregler:

$f(x)$	$\int f(x) dx$
c	$cx + k$
x	$\frac{1}{2}x^2 + k$
x^n	$\frac{1}{n+1}x^{n+1} + k, (n \neq -1)$
e^x	$e^x + k$
e^{cx}	$\frac{1}{c}e^{cx} + k$

$f(x)$	$\int f(x) dx$
$\frac{1}{x}$	$\ln(x) + k$
$\ln x$	$x \ln(x) - x + k$
$\cos x$	$\sin x + k$
$\sin x$	$-\cos x + k$
$\tan x$	$-\ln(\cos(x)) + k$

- Udregn: $\int \sqrt{x} dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + k,$

$$\int x^3 dx$$

Regneregler for ubestemte integraler

- Vi har følgende regneregler:

$f(x)$	$\int f(x) dx$
c	$cx + k$
x	$\frac{1}{2}x^2 + k$
x^n	$\frac{1}{n+1}x^{n+1} + k, (n \neq -1)$
e^x	$e^x + k$
e^{cx}	$\frac{1}{c}e^{cx} + k$

$f(x)$	$\int f(x) dx$
$\frac{1}{x}$	$\ln(x) + k$
$\ln x$	$x \ln(x) - x + k$
$\cos x$	$\sin x + k$
$\sin x$	$-\cos x + k$
$\tan x$	$-\ln(\cos(x)) + k$

- Udregn: $\int \sqrt{x} dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + k,$

$$\int x^3 dx$$

Regneregler for ubestemte integraler

- Vi har følgende regneregler:

$f(x)$	$\int f(x) dx$
c	$cx + k$
x	$\frac{1}{2}x^2 + k$
x^n	$\frac{1}{n+1}x^{n+1} + k, (n \neq -1)$
e^x	$e^x + k$
e^{cx}	$\frac{1}{c}e^{cx} + k$

$f(x)$	$\int f(x) dx$
$\frac{1}{x}$	$\ln(x) + k$
$\ln x$	$x \ln(x) - x + k$
$\cos x$	$\sin x + k$
$\sin x$	$-\cos x + k$
$\tan x$	$-\ln(\cos(x)) + k$

- Udregn: $\int \sqrt{x} dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + k,$

$$\int x^3 dx = \frac{1}{4}x^4 + k$$

Regneregler for ubestemte integraler

- Vi har følgende generelle regneregler

$$\int cf(x) dx = c \int f(x) dx$$

$$\int f(x) \pm g(x) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx.$$

- Eksempler: Udregn

$$\int e^{3x} + \sqrt[3]{x} + 1 dx,$$

$$\int \frac{1}{2x} - \cos(x) dx$$

Regneregler for ubestemte integraler

- Vi har følgende generelle regneregler

$$\int cf(x) dx = c \int f(x) dx$$
$$\int f(x) \pm g(x) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx.$$

- Eksempler: Udregn

$$\int e^{3x} + \sqrt[3]{x} + 1 dx,$$

$$\int \frac{1}{2x} - \cos(x) dx$$

Regneregler for ubestemte integraler

- Vi har følgende generelle regneregler

$$\int cf(x) dx = c \int f(x) dx$$
$$\int f(x) \pm g(x) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx.$$

- Eksempler: Udregn

$$\int e^{3x} + \sqrt[3]{x} + 1 dx,$$

$$\int \frac{1}{2x} - \cos(x) dx$$

Regneregler for ubestemte integraler

- Vi har følgende generelle regneregler

$$\int cf(x) dx = c \int f(x) dx$$
$$\int f(x) \pm g(x) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx.$$

- Eksempler: Udregn

$$\int e^{3x} + \sqrt[3]{x} + 1 dx, = \int e^{3x} dx$$
$$\int \frac{1}{2x} - \cos(x) dx$$

Regneregler for ubestemte integraler

- ▶ Vi har følgende generelle regneregler

$$\int cf(x) dx = c \int f(x) dx$$
$$\int f(x) \pm g(x) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx.$$

- ▶ Eksempler: Udregn

$$\int e^{3x} + \sqrt[3]{x} + 1 dx, = \int e^{3x} dx + \int x^{\frac{1}{3}} dx$$
$$\int \frac{1}{2x} - \cos(x) dx$$

Regneregler for ubestemte integraler

- ▶ Vi har følgende generelle regneregler

$$\int cf(x) dx = c \int f(x) dx$$
$$\int f(x) \pm g(x) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx.$$

- ▶ Eksempler: Udregn

$$\int e^{3x} + \sqrt[3]{x} + 1 dx, = \int e^{3x} dx + \int x^{\frac{1}{3}} dx + \int 1 dx$$
$$\int \frac{1}{2x} - \cos(x) dx$$

Regneregler for ubestemte integraler

- Vi har følgende generelle regneregler

$$\int cf(x) dx = c \int f(x) dx$$
$$\int f(x) \pm g(x) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx.$$

- Eksempler: Udregn

$$\int e^{3x} + \sqrt[3]{x} + 1 dx, = \int e^{3x} dx + \int x^{\frac{1}{3}} dx + \int 1 dx = \frac{1}{3}e^{3x}$$
$$\int \frac{1}{2x} - \cos(x) dx$$

Regneregler for ubestemte integraler

- ▶ Vi har følgende generelle regneregler

$$\int cf(x) dx = c \int f(x) dx$$
$$\int f(x) \pm g(x) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx.$$

- ▶ Eksempler: Udregn

$$\int e^{3x} + \sqrt[3]{x} + 1 dx, = \int e^{3x} dx + \int x^{\frac{1}{3}} dx + \int 1 dx = \frac{1}{3}e^{3x} + \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}$$
$$\int \frac{1}{2x} - \cos(x) dx$$

Regneregler for ubestemte integraler

- Vi har følgende generelle regneregler

$$\int cf(x) dx = c \int f(x) dx$$
$$\int f(x) \pm g(x) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx.$$

- Eksempler: Udregn

$$\int e^{3x} + \sqrt[3]{x} + 1 dx, = \int e^{3x} dx + \int x^{\frac{1}{3}} dx + \int 1 dx = \frac{1}{3}e^{3x} + \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} + x + k$$
$$\int \frac{1}{2x} - \cos(x) dx$$

Regneregler for ubestemte integraler

- Vi har følgende generelle regneregler

$$\int cf(x) dx = c \int f(x) dx$$
$$\int f(x) \pm g(x) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx.$$

- Eksempler: Udregn

$$\int e^{3x} + \sqrt[3]{x} + 1 dx, = \int e^{3x} dx + \int x^{\frac{1}{3}} dx + \int 1 dx = \frac{1}{3}e^{3x} + \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} + x + k$$
$$\int \frac{1}{2x} - \cos(x) dx$$

Regneregler for ubestemte integraler

- ▶ Vi har følgende generelle regneregler

$$\int cf(x) dx = c \int f(x) dx$$
$$\int f(x) \pm g(x) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx.$$

- ▶ Eksempler: Udregn

$$\int e^{3x} + \sqrt[3]{x} + 1 dx, = \int e^{3x} dx + \int x^{\frac{1}{3}} dx + \int 1 dx = \frac{1}{3}e^{3x} + \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} + x + k$$
$$\int \frac{1}{2x} - \cos(x) dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{x} dx$$

Regneregler for ubestemte integraler

- Vi har følgende generelle regneregler

$$\int cf(x) dx = c \int f(x) dx$$
$$\int f(x) \pm g(x) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx.$$

- Eksempler: Udregn

$$\int e^{3x} + \sqrt[3]{x} + 1 dx, = \int e^{3x} dx + \int x^{\frac{1}{3}} dx + \int 1 dx = \frac{1}{3}e^{3x} + \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} + x + k$$
$$\int \frac{1}{2x} - \cos(x) dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{x} dx - \int \cos(x) dx$$

Regneregler for ubestemte integraler

- Vi har følgende generelle regneregler

$$\int cf(x) dx = c \int f(x) dx$$
$$\int f(x) \pm g(x) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx.$$

- Eksempler: Udregn

$$\int e^{3x} + \sqrt[3]{x} + 1 dx, = \int e^{3x} dx + \int x^{\frac{1}{3}} dx + \int 1 dx = \frac{1}{3}e^{3x} + \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} + x + k$$
$$\int \frac{1}{2x} - \cos(x) dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{x} dx - \int \cos(x) dx = \frac{1}{2} \ln(|x|)$$

Regneregler for ubestemte integraler

- ▶ Vi har følgende generelle regneregler

$$\int cf(x) dx = c \int f(x) dx$$
$$\int f(x) \pm g(x) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx.$$

- ▶ Eksempler: Udregn

$$\int e^{3x} + \sqrt[3]{x} + 1 dx, = \int e^{3x} dx + \int x^{\frac{1}{3}} dx + \int 1 dx = \frac{1}{3}e^{3x} + \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} + x + k$$
$$\int \frac{1}{2x} - \cos(x) dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{x} dx - \int \cos(x) dx = \frac{1}{2} \ln(|x|) - \sin(x) + k$$

Bestemte integraler

- ▶ Vi vil bestemme arealer under grafer for funktioner.
- ▶ Arealet mellem grafen for f og x -aksen i intervallet $[a, b]$ er givet ved

$$F(b) - F(a),$$

hvor F er en stamfunktion til f .

- ▶ Derfor defineres det bestemte integral af f i intervallet $[a, b]$ til

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

- ▶ Eksempel: Bestem $\int_0^1 x^2 dx$

Bestemte integraler

- ▶ Vi vil bestemme arealer under grafer for funktioner.
- ▶ Arealet mellem grafen for f og x -aksen i intervallet $[a, b]$ er givet ved

$$F(b) - F(a),$$

hvor F er en stamfunktion til f .

- ▶ Derfor defineres det bestemte integral af f i intervallet $[a, b]$ til

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

- ▶ Eksempel: Bestem $\int_0^1 x^2 dx$

Bestemte integraler

- ▶ Vi vil bestemme arealer under grafer for funktioner.
- ▶ Arealet mellem grafen for f og x -aksen i intervallet $[a, b]$ er givet ved

$$F(b) - F(a),$$

hvor F er en stamfunktion til f .

- ▶ Derfor defineres det bestemte integral af f i intervallet $[a, b]$ til

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

- ▶ Eksempel: Bestem $\int_0^1 x^2 dx$

Bestemte integraler

- ▶ Vi vil bestemme arealer under grafer for funktioner.
- ▶ Arealet mellem grafen for f og x -aksen i intervallet $[a, b]$ er givet ved

$$F(b) - F(a),$$

hvor F er en stamfunktion til f .

- ▶ Derfor defineres det bestemte integral af f i intervallet $[a, b]$ til

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

- ▶ Eksempel: Bestem $\int_0^1 x^2 dx$.

Bestemte integraler

- ▶ Vi vil bestemme arealer under grafer for funktioner.
- ▶ Arealet mellem grafen for f og x -aksen i intervallet $[a, b]$ er givet ved

$$F(b) - F(a),$$

hvor F er en stamfunktion til f .

- ▶ Derfor defineres det bestemte integral af f i intervallet $[a, b]$ til

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

- ▶ Eksempel: Bestem $\int_0^1 x^2 dx = [\frac{1}{3}x^3]_0^1$.

Bestemte integraler

- ▶ Vi vil bestemme arealer under grafer for funktioner.
- ▶ Arealet mellem grafen for f og x -aksen i intervallet $[a, b]$ er givet ved

$$F(b) - F(a),$$

hvor F er en stamfunktion til f .

- ▶ Derfor defineres det bestemte integral af f i intervallet $[a, b]$ til

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

- ▶ Eksempel: Bestem $\int_0^1 x^2 dx = [\frac{1}{3}x^3]_0^1 = \frac{1}{3}$.

Regneregler for bestemte integraler

- ▶ Vi har følgende generelle regneregler for bestemte integraler

$$\int_a^b cf(x) dx = c \int_a^b f(x) dx$$

$$\int_a^b f(x) \pm g(x) dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx.$$

- ▶ Eksempler: Udregn

$$\int_1^2 \frac{1}{2x} - 1 dx$$

$$\int_0^4 3x^2 + 3e^x dx$$

Regneregler for bestemte integraler

- ▶ Vi har følgende generelle regneregler for bestemte integraler

$$\int_a^b cf(x) dx = c \int_a^b f(x) dx$$
$$\int_a^b f(x) \pm g(x) dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx.$$

- ▶ Eksempler: Udregn

$$\int_1^2 \frac{1}{2x} - 1 dx$$

$$\int_0^4 3x^2 + 3e^x dx$$

Regneregler for bestemte integraler

- ▶ Vi har følgende generelle regneregler for bestemte integraler

$$\int_a^b cf(x) dx = c \int_a^b f(x) dx$$
$$\int_a^b f(x) \pm g(x) dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx.$$

- ▶ Eksempler: Udregn

$$\int_1^2 \frac{1}{2x} - 1 dx$$

$$\int_0^4 3x^2 + 3e^x dx$$

Regneregler for bestemte integraler

- ▶ Vi har følgende generelle regneregler for bestemte integraler

$$\int_a^b cf(x) dx = c \int_a^b f(x) dx$$
$$\int_a^b f(x) \pm g(x) dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx.$$

- ▶ Eksempler: Udregn

$$\int_1^2 \frac{1}{2x} - 1 dx = \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{1}{x} dx$$

$$\int_0^4 3x^2 + 3e^x dx$$

Regneregler for bestemte integraler

- ▶ Vi har følgende generelle regneregler for bestemte integraler

$$\int_a^b cf(x) dx = c \int_a^b f(x) dx$$
$$\int_a^b f(x) \pm g(x) dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx.$$

- ▶ Eksempler: Udregn

$$\int_1^2 \frac{1}{2x} - 1 dx = \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{1}{x} dx - \int_1^2 1 dx$$

$$\int_0^4 3x^2 + 3e^x dx$$

Regneregler for bestemte integraler

- ▶ Vi har følgende generelle regneregler for bestemte integraler

$$\int_a^b cf(x) dx = c \int_a^b f(x) dx$$
$$\int_a^b f(x) \pm g(x) dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx.$$

- ▶ Eksempler: Udregn

$$\int_1^2 \frac{1}{2x} - 1 dx = \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{1}{x} dx - \int_1^2 1 dx = \frac{1}{2} [\ln(x)]_1^2$$

$$\int_0^4 3x^2 + 3e^x dx$$

Regneregler for bestemte integraler

- ▶ Vi har følgende generelle regneregler for bestemte integraler

$$\int_a^b cf(x) dx = c \int_a^b f(x) dx$$
$$\int_a^b f(x) \pm g(x) dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx.$$

- ▶ Eksempler: Udregn

$$\int_1^2 \frac{1}{2x} - 1 dx = \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{1}{x} dx - \int_1^2 1 dx = \frac{1}{2} [\ln(x)]_1^2 - [x]_1^2$$

$$\int_0^4 3x^2 + 3e^x dx$$

Regneregler for bestemte integraler

- ▶ Vi har følgende generelle regneregler for bestemte integraler

$$\int_a^b cf(x) dx = c \int_a^b f(x) dx$$
$$\int_a^b f(x) \pm g(x) dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx.$$

- ▶ Eksempler: Udregn

$$\int_1^2 \frac{1}{2x} - 1 dx = \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{1}{x} dx - \int_1^2 1 dx = \frac{1}{2} [\ln(x)]_1^2 - [x]_1^2 = \frac{1}{2} \ln(2)$$

$$\int_0^4 3x^2 + 3e^x dx$$

Regneregler for bestemte integraler

- ▶ Vi har følgende generelle regneregler for bestemte integraler

$$\int_a^b cf(x) dx = c \int_a^b f(x) dx$$
$$\int_a^b f(x) \pm g(x) dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx.$$

- ▶ Eksempler: Udregn

$$\int_1^2 \frac{1}{2x} - 1 dx = \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{1}{x} dx - \int_1^2 1 dx = \frac{1}{2} [\ln(x)]_1^2 - [x]_1^2 = \frac{1}{2} \ln(2) - 1$$

$$\int_0^4 3x^2 + 3e^x dx$$

Regneregler for bestemte integraler

- ▶ Vi har følgende generelle regneregler for bestemte integraler

$$\int_a^b cf(x) dx = c \int_a^b f(x) dx$$
$$\int_a^b f(x) \pm g(x) dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx.$$

- ▶ Eksempler: Udregn

$$\int_1^2 \frac{1}{2x} - 1 dx = \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{1}{x} dx - \int_1^2 1 dx = \frac{1}{2} [\ln(x)]_1^2 - [x]_1^2 = \frac{1}{2} \ln(2) - 1$$

$$\int_0^4 3x^2 + 3e^x dx$$

Regneregler for bestemte integraler

- Vi har følgende generelle regneregler for bestemte integraler

$$\int_a^b cf(x) dx = c \int_a^b f(x) dx$$
$$\int_a^b f(x) \pm g(x) dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx.$$

- Eksempler: Udregn

$$\int_1^2 \frac{1}{2x} - 1 dx = \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{1}{x} dx - \int_1^2 1 dx = \frac{1}{2} [\ln(x)]_1^2 - [x]_1^2 = \frac{1}{2} \ln(2) - 1$$

$$\int_0^4 3x^2 + 3e^x dx = \int_0^4 3x^2 dx$$

Regneregler for bestemte integraler

- Vi har følgende generelle regneregler for bestemte integraler

$$\int_a^b cf(x) dx = c \int_a^b f(x) dx$$
$$\int_a^b f(x) \pm g(x) dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx.$$

- Eksempler: Udregn

$$\int_1^2 \frac{1}{2x} - 1 dx = \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{1}{x} dx - \int_1^2 1 dx = \frac{1}{2} [\ln(x)]_1^2 - [x]_1^2 = \frac{1}{2} \ln(2) - 1$$
$$\int_0^4 3x^2 + 3e^x dx = \int_0^4 3x^2 dx + 3 \int_0^4 e^x dx$$

Regneregler for bestemte integraler

- ▶ Vi har følgende generelle regneregler for bestemte integraler

$$\int_a^b cf(x) dx = c \int_a^b f(x) dx$$
$$\int_a^b f(x) \pm g(x) dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx.$$

- ▶ Eksempler: Udregn

$$\int_1^2 \frac{1}{2x} - 1 dx = \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{1}{x} dx - \int_1^2 1 dx = \frac{1}{2} [\ln(x)]_1^2 - [x]_1^2 = \frac{1}{2} \ln(2) - 1$$
$$\int_0^4 3x^2 + 3e^x dx = \int_0^4 3x^2 dx + 3 \int_0^4 e^x dx = [x^3]_0^4$$

Regneregler for bestemte integraler

- ▶ Vi har følgende generelle regneregler for bestemte integraler

$$\int_a^b cf(x) dx = c \int_a^b f(x) dx$$
$$\int_a^b f(x) \pm g(x) dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx.$$

- ▶ Eksempler: Udregn

$$\int_1^2 \frac{1}{2x} - 1 dx = \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{1}{x} dx - \int_1^2 1 dx = \frac{1}{2} [\ln(x)]_1^2 - [x]_1^2 = \frac{1}{2} \ln(2) - 1$$
$$\int_0^4 3x^2 + 3e^x dx = \int_0^4 3x^2 dx + 3 \int_0^4 e^x dx = [x^3]_0^4 + 3[e^x]_0^4$$

Regneregler for bestemte integraler

- Vi har følgende generelle regneregler for bestemte integraler

$$\int_a^b cf(x) dx = c \int_a^b f(x) dx$$
$$\int_a^b f(x) \pm g(x) dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx.$$

- Eksempler: Udregn

$$\int_1^2 \frac{1}{2x} - 1 dx = \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{1}{x} dx - \int_1^2 1 dx = \frac{1}{2} [\ln(x)]_1^2 - [x]_1^2 = \frac{1}{2} \ln(2) - 1$$
$$\int_0^4 3x^2 + 3e^x dx = \int_0^4 3x^2 dx + 3 \int_0^4 e^x dx = [x^3]_0^4 + 3[e^x]_0^4 = 64$$

Regneregler for bestemte integraler

- ▶ Vi har følgende generelle regneregler for bestemte integraler

$$\int_a^b cf(x) dx = c \int_a^b f(x) dx$$
$$\int_a^b f(x) \pm g(x) dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx.$$

- ▶ Eksempler: Udregn

$$\int_1^2 \frac{1}{2x} - 1 dx = \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{1}{x} dx - \int_1^2 1 dx = \frac{1}{2} [\ln(x)]_1^2 - [x]_1^2 = \frac{1}{2} \ln(2) - 1$$
$$\int_0^4 3x^2 + 3e^x dx = \int_0^4 3x^2 dx + 3 \int_0^4 e^x dx = [x^3]_0^4 + 3[e^x]_0^4 = 64 + 3e^4 - 3$$

Regneregler for bestemte integraler

- Vi har følgende generelle regneregler for bestemte integraler

$$\int_a^b cf(x) dx = c \int_a^b f(x) dx$$
$$\int_a^b f(x) \pm g(x) dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx.$$

- Eksempler: Udregn

$$\int_1^2 \frac{1}{2x} - 1 dx = \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{1}{x} dx - \int_1^2 1 dx = \frac{1}{2} [\ln(x)]_1^2 - [x]_1^2 = \frac{1}{2} \ln(2) - 1$$
$$\int_0^4 3x^2 + 3e^x dx = \int_0^4 3x^2 dx + 3 \int_0^4 e^x dx = [x^3]_0^4 + 3[e^x]_0^4 = 64 + 3e^4 - 3 = 61 + 3e^4$$

Opgaveregning!



AALBORG UNIVERSITY
DENMARK