# Vectorer i planen
# (linjer, parameterfremstilling)

Det næste vi vil studere er, hvordan man kan beskrive linjer i planen (i.e. i to dimensioner). Vi vil betragte to metoder, kaldet linjens ligning og parameterfremstillingen for en linje.

Vi starter med at studere linjens ligning. Hvis vi får givet et fast punkt $A = (x_0, y_0)$ som ligger på den linje vi gerne vil bestemme, samt en vektor $\vec{n} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ som står vinkelret på linjen (en sådan vektor kaldes for en normalvektor) så har vi for ethvert punkt $B = (x, y)$ der ligger på vores linje, at

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{bmatrix} = 0,$$

da de to vektorer er ortogonale. Hvis vi udregner prikproduktet får vi ligningen

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0, \tag{1}$$

som kaldes linjens ligning i planen.

**Eksempler:**

1. Lad $\vec{n} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ og $A = (4, 0)$ og bestem linjens ligning:

   Vi indsætter i (1) og får

   $$0 \cdot (x - 4) + 1 \cdot (y - 0) = 0 \Leftrightarrow y = 0,$$

   hvilket viser at vores linje er $x$-aksen i et koordinatsystem.

2. Bestem linjens ligning for den linje der går gennem punkterne $A = (1, 1)$ og $B = (2, 3)$ og bestem om punktet $(-1, -1)$ ligger på linjen:

   Da vi ikke er givet nogen normaltvektor, starter vi med at bestemme sådan en. Vi ser at vektoren

   $$\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} 2 - 1 \\ 3 - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix},$$

   ligger på linjen. Vi finder nu en normalvektor ved at tage hatvektoren til $\overrightarrow{AB}$, hvilket giver

   $$\vec{n} = \hat{\overrightarrow{AB}} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Indsætter vi nu $\vec{n}$ og punktet $A$ i (1) får vi linjens ligning

$$\begin{aligned}-2 \cdot (x-1) + 1 \cdot (y-1) = 0 &\Leftrightarrow -2x + 2 + y - 1 = 0\\ &-2x + y + 1 = 0.\end{aligned}$$

Bemærk, at vi kunne have benyttet punktet $B$ i stedet for $A$. Vi tjekker nu om punktet $(-1,-1)$ løser ligningen

$$-2 \cdot (-1) + (-1) + 1 = 2 - 1 + 1 = 2,$$

hvilket viser at punktet $(-1,-1)$ ikke ligger på linjen.

**Parameterfremstilling:** En anden måde at beskrive en linje i planen er ved parameterfremstillingen. Hvis vi får givet et fast punkt $A = (x_0, y_0)$ på den linje vi gerne vil bestemme samt en vektor $\vec{r} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix}$ som er parallel med vores linje (en sådan vektor kaldes for en retningsvektor), så er parameterfremstillingen givet ved

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix}, \tag{2}$$

hvor $t \in \mathbb{R}$. Det skal forståes således at vi starter med et punkt $(x_0, y_0)$ på vores linje og så går vi i retningen af vores retningsvektor (som er parallel med vores linje) og dermed kan vi beskrive samtlige punkter på vores linje, ved at skifte på $t$, som bestemmer længden vi går.

Bemærk, at i linjens ligning bruger vi en vektor der står vinkelret på linjen, mens vi i parameterfremstillingen bruger en vektor der er parallel med linjen.

**Eksempler:**

1. Lad $A = (2,2)$ og $\vec{r} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ og bestem parameterfremstillingen for linjen:

   Vi indsætter i (2) og får

   $$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

2. Bestem parameterfremstillingen for linjen der går gennem punkterne $A = (3,4)$ og $B = (8,1)$:

   Vi bestemmer først en retningsvektor

   $$\vec{r} = \overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} 8-3 \\ 1-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

   Vi indsætter nu $\vec{r}$ og $A$ i (2) og får

   $$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

3. Find skæringspunkterne mellem cirklen $x^2 + y^2 = 2$ og linjen beskrevet ved parameterfremstillingen

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} :$$

Ud fra parameterfremstillingen får vi de to ligninger

$$x = 2 - t.$$
$$y = 2 - t.$$

Vi indsætter nu disse i cirklens ligning og får

$$2 = x^2 + y^2 = (2-t)^2 + (2-t)^2 = 2(2-t)^2 = 2(4 + t^2 - 4t) = 2t^2 - 8t + 8.$$

Det giver os andengradsligningen

$$2t^2 - 8t + 6 = 0,$$

som vi kan løse

$$t = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{8 \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 6}}{2 \cdot 2} = \frac{8 \pm \sqrt{16}}{4} = \frac{8 \pm 4}{4} = \begin{cases} 3 \\ 1 \end{cases} .$$

Ved at indsætte $t = 3$ og $t = 1$ i vores ligninger for $x$ og $y$ får vi de to skæringspunkter $(-1, -1)$ og $(1, 1)$.