

Math101

16. oktober 2018

Benjamin Støttrup
benjamin@math.aau.dk

Institut for matematiske fag
Aalborg universitet
Danmark



AALBORG UNIVERSITY
DENMARK

Agenda



Delvis integration

Integration ved substitution



Delvis integration

- ▶ Skal man integrere produkter af funktioner anvendes delvis integration:

$$\int f(x)g(x) dx = f(x)G(x) - \int f'(x)G(x) dx$$
$$\int_a^b f(x)g(x) dx = [f(x)G(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)G(x) dx$$

- ▶ Det er ikke lige meget hvordan f og g vælges.
- ▶ Eksempler: Udregn

$$\int xe^x dx,$$
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin(x) dx.$$

Delvis integration

- ▶ Skal man integrere produkter af funktioner anvendes delvis integration:

$$\int f(x)g(x) dx = f(x)G(x) - \int f'(x)G(x) dx$$
$$\int_a^b f(x)g(x) dx = [f(x)G(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)G(x) dx$$

- ▶ Det er ikke lige meget hvordan f og g vælges.
- ▶ Eksempler: Udregn

$$\int xe^x dx,$$
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin(x) dx.$$



Delvis integration

- Skal man integrere produkter af funktioner anvendes delvis integration:

$$\int f(x)g(x) dx = f(x)G(x) - \int f'(x)G(x) dx$$
$$\int_a^b f(x)g(x) dx = [f(x)G(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)G(x) dx$$

- Det er ikke lige meget hvordan f og g vælges.
- Eksempler: Udregn

$$\int xe^x dx,$$
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin(x) dx.$$

Delvis integration

- ▶ Skal man integrere produkter af funktioner anvendes delvis integration:

$$\int f(x)g(x) dx = f(x)G(x) - \int f'(x)G(x) dx$$
$$\int_a^b f(x)g(x) dx = [f(x)G(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)G(x) dx$$

- ▶ Det er ikke lige meget hvordan f og g vælges.
- ▶ Eksempler: Udregn

$$\int xe^x dx,$$
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin(x) dx.$$

Delvis integration

- Skal man integrere produkter af funktioner anvendes delvis integration:

$$\int f(x)g(x) dx = f(x)G(x) - \int f'(x)G(x) dx$$
$$\int_a^b f(x)g(x) dx = [f(x)G(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)G(x) dx$$

- Det er ikke lige meget hvordan f og g vælges.
- Eksempler: Udregn

$$\int xe^x dx,$$
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin(x) dx.$$



Integration ved substitution

- For integration af sammensatte funktioner gælder at

$$\int f(g(x))g'(x) dx = F(g(x)) + c$$
$$\int_a^b f(g(x))g'(x) dx = [F(g(x))]_a^b.$$

- Denne regneregel kaldes integration ved substitution.
- Vi vil ofte anvende en særlig metode der retfærdiggør navnet.



Integration ved substitution

- For integration af sammensatte funktioner gælder at

$$\int f(g(x))g'(x) dx = F(g(x)) + c$$
$$\int_a^b f(g(x))g'(x) dx = [F(g(x))]_a^b.$$

- Denne regneregel kaldes integration ved substitution.
- Vi vil ofte anvende en særlig metode der retfærdiggør navnet.



Integration ved substitution

- For integration af sammensatte funktioner gælder at

$$\int f(g(x))g'(x) dx = F(g(x)) + c$$
$$\int_a^b f(g(x))g'(x) dx = [F(g(x))]_a^b.$$

- Denne regneregel kaldes integration ved substitution.
- Vi vil ofte anvende en særlig metode der retfærdiggør navnet.



Integration ved substitution

- For integration af sammensatte funktioner gælder at

$$\int f(g(x))g'(x) dx = F(g(x)) + c$$
$$\int_a^b f(g(x))g'(x) dx = [F(g(x))]_a^b.$$

- Denne regneregel kaldes integration ved substitution.
- Vi vil ofte anvende en særlig metode der retfærdiggør navnet.

Integration ved substitution

Ubestemt integral

- ▶ Udregn $\int f(g(x))g'(x) dx$.
 - ▶ Lad $u = g(x)$.
 - ▶ Udregn $\frac{du}{dx}$ og isoler dx .
 - ▶ Substituer $g(x)$ og dx .
 - ▶ Udregn integralet mht. u .
 - ▶ Substituer tilbage.
- ▶ Udregn $\int x^2 \cos(x^3) dx$.
 - ▶ Lad $u = x^3$.
 - ▶ Så er $\frac{du}{dx} = 3x^2$ og $dx = \frac{du}{3x^2}$.
 - ▶ $\int x^2 \cos(u) \frac{du}{3x^2} = \frac{1}{3} \int \cos(u) du$
 - ▶ $\frac{1}{3} \int \cos(u) du = \frac{1}{3} \sin(u) + c$.
 - ▶ $\int x^2 \cos(x^3) dx = \frac{1}{3} \sin(x^3) + c$.



Integration ved substitution

Ubestemt integral

- ▶ Udregn $\int f(g(x))g'(x) dx$.
 - ▶ Lad $u = g(x)$.
 - ▶ Udregn $\frac{du}{dx}$ og isoler dx .
 - ▶ Substituer $g(x)$ og dx .
 - ▶ Udregn integralet mht. u .
 - ▶ Substituer tilbage.
- ▶ Udregn $\int x^2 \cos(x^3) dx$.
 - ▶ Lad $u = x^3$.
 - ▶ Så er $\frac{du}{dx} = 3x^2$ og $dx = \frac{du}{3x^2}$.
 - ▶ $\int x^2 \cos(u) \frac{du}{3x^2} = \frac{1}{3} \int \cos(u) du$
 - ▶ $\frac{1}{3} \int \cos(u) du = \frac{1}{3} \sin(u) + c$.
 - ▶ $\int x^2 \cos(x^3) dx = \frac{1}{3} \sin(x^3) + c$.



Integration ved substitution

Ubestemt integral

- ▶ Udregn $\int f(g(x))g'(x) dx$.
 - ▶ Lad $u = g(x)$.
 - ▶ Udregn $\frac{du}{dx}$ og isoler dx .
 - ▶ Substituer $g(x)$ og dx .
 - ▶ Udregn integralet mht. u .
 - ▶ Substituer tilbage.
- ▶ Udregn $\int x^2 \cos(x^3) dx$.
 - ▶ Lad $u = x^3$.
 - ▶ Så er $\frac{du}{dx} = 3x^2$ og $dx = \frac{du}{3x^2}$.
 - ▶ $\int x^2 \cos(u) \frac{du}{3x^2} = \frac{1}{3} \int \cos(u) du$
 - ▶ $\frac{1}{3} \int \cos(u) du = \frac{1}{3} \sin(u) + c$.
 - ▶ $\int x^2 \cos(x^3) dx = \frac{1}{3} \sin(x^3) + c$.



Integration ved substitution

Ubestemt integral

- ▶ Udregn $\int f(g(x))g'(x) dx$.
 - ▶ Lad $u = g(x)$.
 - ▶ Udregn $\frac{du}{dx}$ og isoler dx .
 - ▶ Substituer $g(x)$ og dx .
 - ▶ Udregn integralet mht. u .
 - ▶ Substituer tilbage.
- ▶ Udregn $\int x^2 \cos(x^3) dx$.
 - ▶ Lad $u = x^3$.
 - ▶ Så er $\frac{du}{dx} = 3x^2$ og $dx = \frac{du}{3x^2}$.
 - ▶ $\int x^2 \cos(u) \frac{du}{3x^2} = \frac{1}{3} \int \cos(u) du$
 - ▶ $\frac{1}{3} \int \cos(u) du = \frac{1}{3} \sin(u) + c$.
 - ▶ $\int x^2 \cos(x^3) dx = \frac{1}{3} \sin(x^3) + c$.



Integration ved substitution

Ubestemt integral

- ▶ Udregn $\int f(g(x))g'(x) dx$.
 - ▶ Lad $u = g(x)$.
 - ▶ Udregn $\frac{du}{dx}$ og isoler dx .
 - ▶ Substituer $g(x)$ og dx .
 - ▶ Udregn integralet mht. u .
 - ▶ Substituer tilbage.
- ▶ Udregn $\int x^2 \cos(x^3) dx$.
 - ▶ Lad $u = x^3$.
 - ▶ Så er $\frac{du}{dx} = 3x^2$ og $dx = \frac{du}{3x^2}$.
 - ▶ $\int x^2 \cos(u) \frac{du}{3x^2} = \frac{1}{3} \int \cos(u) du$
 - ▶ $\frac{1}{3} \int \cos(u) du = \frac{1}{3} \sin(u) + c$.
 - ▶ $\int x^2 \cos(x^3) dx = \frac{1}{3} \sin(x^3) + c$.

Integration ved substitution

Ubestemt integral

- ▶ Udregn $\int f(g(x))g'(x) dx$.
 - ▶ Lad $u = g(x)$.
 - ▶ Udregn $\frac{du}{dx}$ og isoler dx .
 - ▶ Substituer $g(x)$ og dx .
 - ▶ Udregn integralet mht. u .
 - ▶ Substituer tilbage.
- ▶ Udregn $\int x^2 \cos(x^3) dx$.
 - ▶ Lad $u = x^3$.
 - ▶ Så er $\frac{du}{dx} = 3x^2$ og $dx = \frac{du}{3x^2}$.
 - ▶ $\int x^2 \cos(u) \frac{du}{3x^2} = \frac{1}{3} \int \cos(u) du$
 - ▶ $\frac{1}{3} \int \cos(u) du = \frac{1}{3} \sin(u) + c$.
 - ▶ $\int x^2 \cos(x^3) dx = \frac{1}{3} \sin(x^3) + c$.



Integration ved substitution

Ubestemt integral

- ▶ Udregn $\int f(g(x))g'(x) dx$.
 - ▶ Lad $u = g(x)$.
 - ▶ Udregn $\frac{du}{dx}$ og isoler dx .
 - ▶ Substituer $g(x)$ og dx .
 - ▶ Udregn integralet mht. u .
 - ▶ Substituer tilbage.
- ▶ Udregn $\int x^2 \cos(x^3) dx$.
 - ▶ Lad $u = x^3$.
 - ▶ Så er $\frac{du}{dx} = 3x^2$ og $dx = \frac{du}{3x^2}$.
 - ▶ $\int x^2 \cos(u) \frac{du}{3x^2} = \frac{1}{3} \int \cos(u) du$
 - ▶ $\frac{1}{3} \int \cos(u) du = \frac{1}{3} \sin(u) + c$.
 - ▶ $\int x^2 \cos(x^3) dx = \frac{1}{3} \sin(x^3) + c$.



Integration ved substitution

Ubestemt integral

- ▶ Udregn $\int f(g(x))g'(x) dx$.
- ▶ Lad $u = g(x)$.
- ▶ Udregn $\frac{du}{dx}$ og isoler dx .
- ▶ Substituer $g(x)$ og dx .
- ▶ Udregn integralet mht. u .
- ▶ Substituer tilbage.
- ▶ Udregn $\int x^2 \cos(x^3) dx$.
- ▶ Lad $u = x^3$.
- ▶ Så er $\frac{du}{dx} = 3x^2$ og $dx = \frac{du}{3x^2}$.
- ▶ $\int x^2 \cos(u) \frac{du}{3x^2} du = \frac{1}{3} \int \cos(u) du$
- ▶ $\frac{1}{3} \int \cos(u) du = \frac{1}{3} \sin(u) + c$.
- ▶ $\int x^2 \cos(x^3) dx = \frac{1}{3} \sin(x^3) + c$.



Integration ved substitution

Ubestemt integral

- ▶ Udregn $\int f(g(x))g'(x) dx$.
- ▶ Lad $u = g(x)$.
- ▶ Udregn $\frac{du}{dx}$ og isoler dx .
- ▶ Substituer $g(x)$ og dx .
- ▶ Udregn integralet mht. u .
- ▶ Substituer tilbage.
- ▶ Udregn $\int x^2 \cos(x^3) dx$.
- ▶ Lad $u = x^3$.
- ▶ Så er $\frac{du}{dx} = 3x^2$ og $dx = \frac{du}{3x^2}$.
- ▶ $\int x^2 \cos(u) \frac{du}{3x^2} du = \frac{1}{3} \int \cos(u) du$
- ▶ $\frac{1}{3} \int \cos(u) du = \frac{1}{3} \sin(u) + c$.
- ▶ $\int x^2 \cos(x^3) dx = \frac{1}{3} \sin(x^3) + c$.



Integration ved substitution

Ubestemt integral

- ▶ Udregn $\int f(g(x))g'(x) dx$.
- ▶ Lad $u = g(x)$.
- ▶ Udregn $\frac{du}{dx}$ og isoler dx .
- ▶ Substituer $g(x)$ og dx .
- ▶ Udregn integralet mht. u .
- ▶ Substituer tilbage.
- ▶ Udregn $\int x^2 \cos(x^3) dx$.
- ▶ Lad $u = x^3$.
- ▶ Så er $\frac{du}{dx} = 3x^2$ og $dx = \frac{du}{3x^2}$.
- ▶ $\int x^2 \cos(u) \frac{du}{3x^2} du = \frac{1}{3} \int \cos(u) du$
- ▶ $\frac{1}{3} \int \cos(u) du = \frac{1}{3} \sin(u) + c$.
- ▶ $\int x^2 \cos(x^3) dx = \frac{1}{3} \sin(x^3) + c$.



Integration ved substitution

Ubestemt integral

- ▶ Udregn $\int f(g(x))g'(x) dx$.
- ▶ Lad $u = g(x)$.
- ▶ Udregn $\frac{du}{dx}$ og isoler dx .
- ▶ Substituer $g(x)$ og dx .
- ▶ Udregn integralet mht. u .
- ▶ Substituer tilbage.
- ▶ Udregn $\int x^2 \cos(x^3) dx$.
- ▶ Lad $u = x^3$.
- ▶ Så er $\frac{du}{dx} = 3x^2$ og $dx = \frac{du}{3x^2}$.
- ▶ $\int x^2 \cos(u) \frac{du}{3x^2} du = \frac{1}{3} \int \cos(u) du$
- ▶ $\frac{1}{3} \int \cos(u) du = \frac{1}{3} \sin(u) + c$.
- ▶ $\int x^2 \cos(x^3) dx = \frac{1}{3} \sin(x^3) + c$.

Integration ved substitution

Ubestemt integral



- ▶ Udregn $\int f(g(x))g'(x) dx$.
- ▶ Lad $u = g(x)$.
- ▶ Udregn $\frac{du}{dx}$ og isoler dx .
- ▶ Substituer $g(x)$ og dx .
- ▶ Udregn integralet mht. u .
- ▶ Substituer tilbage.
- ▶ Udregn $\int x^2 \cos(x^3) dx$.
- ▶ Lad $u = x^3$.
- ▶ Så er $\frac{du}{dx} = 3x^2$ og $dx = \frac{du}{3x^2}$.
- ▶ $\int x^2 \cos(u) \frac{du}{3x^2} du = \frac{1}{3} \int \cos(u) du$
- ▶ $\frac{1}{3} \int \cos(u) du = \frac{1}{3} \sin(u) + c$.
- ▶ $\int x^2 \cos(x^3) dx = \frac{1}{3} \sin(x^3) + c$.



Integration ved substitution

Bestemt integral

► Udregn $\int_a^b f(g(x))g'(x) dx$.

► Lad $u = g(x)$.

► Udregn $\frac{du}{dx}$ og isoler dx .

► Substituer $g(x)$, dx samt grænser.

► Udregn integralet mht. u .

► Udregn $\int_{-1}^2 -xe^{x^2} dx$.

► Lad $u = x^2$.

► Så er $\frac{du}{dx} = 2x$ og $dx = \frac{du}{2x}$.

► $\int_1^4 -xe^{\frac{u}{2}} \frac{du}{2x} = -\frac{1}{2} \int_1^4 e^u du$

► $-\frac{1}{2} \int_1^4 e^u du = -\frac{1}{2} [e^u]_1^4 = -\frac{e-1}{2}$.



Integration ved substitution

Bestemt integral

► Udregn $\int_a^b f(g(x))g'(x) dx$.

► Lad $u = g(x)$.

► Udregn $\frac{du}{dx}$ og isoler dx .

► Substituer $g(x)$, dx samt grænser.

► Udregn integralet mht. u .

► Udregn $\int_{-1}^2 -xe^{x^2} dx$.

► Lad $u = x^2$.

► Så er $\frac{du}{dx} = 2x$ og $dx = \frac{du}{2x}$.

► $\int_1^4 -xe^{\frac{u}{2}} \frac{du}{2x} = -\frac{1}{2} \int_1^4 e^u du$

► $-\frac{1}{2} \int_1^4 e^u du = -\frac{1}{2} [e^u]_1^4 = -\frac{e-1}{2}$.



Integration ved substitution

Bestemt integral

► Udregn $\int_a^b f(g(x))g'(x) dx$.

► Lad $u = g(x)$.

► Udregn $\frac{du}{dx}$ og isoler dx .

► Substituer $g(x)$, dx samt grænser.

► Udregn integralet mht. u .

► Udregn $\int_{-1}^2 -xe^{x^2} dx$.

► Lad $u = x^2$.

► Så er $\frac{du}{dx} = 2x$ og $dx = \frac{du}{2x}$.

► $\int_1^4 -xe^u \frac{du}{2x} = -\frac{1}{2} \int_1^4 e^u du$

► $-\frac{1}{2} \int_1^4 e^u du = -\frac{1}{2} [e^u]_1^4 = -\frac{e}{2} + \frac{e^4}{2}$.



Integration ved substitution

Bestemt integral

► Udregn $\int_a^b f(g(x))g'(x) dx$.

► Lad $u = g(x)$.

► Udregn $\frac{du}{dx}$ og isoler dx .

► Substituer $g(x)$, dx samt grænser.

► Udregn integralet mht. u .

► Udregn $\int_{-1}^2 -xe^{x^2} dx$.

► Lad $u = x^2$.

► Så er $\frac{du}{dx} = 2x$ og $dx = \frac{du}{2x}$.

► $\int_1^4 -xe^u \frac{du}{2x} = -\frac{1}{2} \int_1^4 e^u du$

► $-\frac{1}{2} \int_1^4 e^u du = -\frac{1}{2} [e^u]_1^4 = -\frac{e-1}{2}$.



Integration ved substitution

Bestemt integral

► Udregn $\int_a^b f(g(x))g'(x) dx$.

► Lad $u = g(x)$.

► Udregn $\frac{du}{dx}$ og isoler dx .

► Substituer $g(x)$, dx samt grænser.

► Udregn integralet mht. u .

► Udregn $\int_{-1}^2 -xe^{x^2} dx$.

► Lad $u = x^2$.

► Så er $\frac{du}{dx} = 2x$ og $dx = \frac{du}{2x}$.

► $\int_1^4 -xe^u \frac{du}{2x} = -\frac{1}{2} \int_1^4 e^u du$

► $-\frac{1}{2} \int_1^4 e^u du = -\frac{1}{2} [e^u]_1^4 = -\frac{e-1}{2}$.



Integration ved substitution

Bestemt integral

- ▶ Udregn $\int_a^b f(g(x))g'(x) dx$.
 - ▶ Lad $u = g(x)$.
 - ▶ Udregn $\frac{du}{dx}$ og isoler dx .
 - ▶ Substituer $g(x)$, dx samt grænser.
 - ▶ Udregn integralet mht. u .
- ▶ Udregn $\int_{-1}^2 -xe^{x^2} dx$.
 - ▶ Lad $u = x^2$.
 - ▶ Så er $\frac{du}{dx} = 2x$ og $dx = \frac{du}{2x}$.
 - ▶ $\int_1^4 -xe^u \frac{du}{2x} = -\frac{1}{2} \int_1^4 e^u du$
 - ▶ $-\frac{1}{2} \int_1^4 e^u du = -\frac{1}{2} [e^u]_1^4 = \frac{e-e^4}{2}$.



Integration ved substitution

Bestemt integral

- ▶ Udregn $\int_a^b f(g(x))g'(x) dx$.
 - ▶ Lad $u = g(x)$.
 - ▶ Udregn $\frac{du}{dx}$ og isoler dx .
 - ▶ Substituer $g(x)$, dx samt grænser.
 - ▶ Udregn integralet mht. u .
- ▶ Udregn $\int_{-1}^2 -xe^{x^2} dx$.
 - ▶ Lad $u = x^2$.
 - ▶ Så er $\frac{du}{dx} = 2x$ og $dx = \frac{du}{2x}$.
 - ▶ $\int_1^4 -xe^u \frac{du}{2x} = -\frac{1}{2} \int_1^4 e^u du$
 - ▶ $\frac{-1}{2} \int_1^4 e^u du = \frac{-1}{2} [e^u]_1^4 = \frac{e-e^4}{2}$.



Integration ved substitution

Bestemt integral

- ▶ Udregn $\int_a^b f(g(x))g'(x) dx$.
- ▶ Lad $u = g(x)$.
- ▶ Udregn $\frac{du}{dx}$ og isoler dx .
- ▶ Substituer $g(x)$, dx samt grænser.
- ▶ Udregn integralet mht. u .
- ▶ Udregn $\int_{-1}^2 -xe^{x^2} dx$.
- ▶ Lad $u = x^2$.
- ▶ Så er $\frac{du}{dx} = 2x$ og $dx = \frac{du}{2x}$.
- ▶ $\int_1^4 -xe^u \frac{du}{2x} = -\frac{1}{2} \int_1^4 e^u du$
- ▶ $\frac{-1}{2} \int_1^4 e^u du = \frac{-1}{2} [e^u]_1^4 = \frac{e-e^4}{2}$.



Integration ved substitution

Bestemt integral

- ▶ Udregn $\int_a^b f(g(x))g'(x) dx$.
- ▶ Lad $u = g(x)$.
- ▶ Udregn $\frac{du}{dx}$ og isoler dx .
- ▶ Substituer $g(x)$, dx samt grænser.
- ▶ Udregn integralet mht. u .
- ▶ Udregn $\int_{-1}^2 -xe^{x^2} dx$.
- ▶ Lad $u = x^2$.
- ▶ Så er $\frac{du}{dx} = 2x$ og $dx = \frac{du}{2x}$.
- ▶ $\int_1^4 -xe^u \frac{du}{2x} = -\frac{1}{2} \int_1^4 e^u du$
- ▶ $\frac{-1}{2} \int_1^4 e^u du = \frac{-1}{2} [e^u]_1^4 = \frac{e-e^4}{2}$.



Integration ved substitution

Bestemt integral

- ▶ Udregn $\int_a^b f(g(x))g'(x) dx$.
- ▶ Lad $u = g(x)$.
- ▶ Udregn $\frac{du}{dx}$ og isoler dx .
- ▶ Substituer $g(x)$, dx samt grænser.
- ▶ Udregn integralet mht. u .
- ▶ Udregn $\int_{-1}^2 -xe^{x^2} dx$.
- ▶ Lad $u = x^2$.
- ▶ Så er $\frac{du}{dx} = 2x$ og $dx = \frac{du}{2x}$.
- ▶ $\int_1^4 -xe^u \frac{du}{2x} = -\frac{1}{2} \int_1^4 e^u du$
- ▶ $\frac{-1}{2} \int_1^4 e^u du = \frac{-1}{2} [e^u]_1^4 = \frac{e-e^4}{2}$.

Opgaveregning!



AALBORG UNIVERSITY
DENMARK