Math101

Benjamin Støttrup
benjamin@math.aau.dk

Institut for matematiske fag
Aalborg universitet
Danmark

AALBORG UNIVERSITY
DENMARK

Agenda

Ubestemte integraler

Regneregler for ubestemte integraler

Bestemte integraler

Regneregler for bestemte integraler

Ubestemte integraler
Stamfunktioner

- En funktion f har stamfunktion F hvis

$$F'(x) = f(x)$$

- Hvis F er stamfunktion til f så er $F(x) + c$ også, for alle $c \in \mathbb{R}$.
- Det ubestemte integral af f defineres til

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c,$$

  hvor F er en stamfunktion til f og $c \in \mathbb{R}$.
- Eksempler: Er e^{x^2} stamfunktion til $2xe^{x^2}$?

Ubestemte integraler

Stamfunktioner

- En funktion f har stamfunktion F hvis

$$F'(x) = f(x)$$

- Hvis F er stamfunktion til f så er $F(x) + c$ også, for alle $c \in \mathbb{R}$.
- Det ubestemte integral af f defineres til

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c,$$

hvor F er en stamfunktion til f og $c \in \mathbb{R}$.

- Eksempler: Er e^{x^2} stamfunktion til $2xe^{x^2}$?

Ubestemte integraler

Stamfunktioner

- En funktion f har stamfunktion F hvis

$$F'(x) = f(x)$$

- Hvis F er stamfunktion til f så er $F(x) + c$ også, for alle $c \in \mathbb{R}$.
- Det ubestemte integral af f defineres til

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c,$$

hvor F er en stamfunktion til f og $c \in \mathbb{R}$.

- Eksempler: Er e^{x^2} stamfunktion til $2xe^{x^2}$?

Ubestemte integraler
Stamfunktioner

- En funktion f har stamfunktion F hvis

$$F'(x) = f(x)$$

- Hvis F er stamfunktion til f så er $F(x) + c$ også, for alle $c \in \mathbb{R}$.
- Det ubestemte integral af f defineres til

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c,$$

hvor F er en stamfunktion til f og $c \in \mathbb{R}$.

- Eksempler: Er e^{x^2} stamfunktion til $2xe^{x^2}$?

Ubestemte integraler
Stamfunktioner

- En funktion f har stamfunktion F hvis

$$F'(x) = f(x)$$

- Hvis F er stamfunktion til f så er $F(x) + c$ også, for alle $c \in \mathbb{R}$.
- Det ubestemte integral af f defineres til

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c,$$

  hvor F er en stamfunktion til f og $c \in \mathbb{R}$.
- Eksempler: Er e^{x^2} stamfunktion til $2xe^{x^2}$? $\frac{d}{dx}e^{x^2} = 2xe^{x^2}$.

Regneregler for ubestemte integraler

- Vi har følgende regneregler:

$f(x)$	$\int f(x)\,dx$
c	$cx + k$
x	$\frac{1}{2}x^2 + k$
x^n	$\frac{1}{n+1}x^{n+1} + k, \; (n \neq -1)$
e^x	$e^x + k$
e^{cx}	$\frac{1}{c}e^{cx} + k$

$f(x)$	$\int f(x)\,dx$
$\frac{1}{x}$	$\ln(\lvert x\rvert) + k$
$\ln x$	$x\ln(x) - x + k$
$\cos x$	$\sin x + k$
$\sin x$	$-\cos x + k$
$\tan x$	$-\ln(\lvert\cos(x)\rvert) + k$

- Udregn: $\displaystyle\int \sqrt{x}\,dx$, $\displaystyle\int x^3\,dx$

Regneregler for ubestemte integraler

- Vi har følgende regneregler:

$f(x)$	$\int f(x)\,dx$
c	$cx + k$
x	$\frac{1}{2}x^2 + k$
x^n	$\frac{1}{n+1}x^{n+1} + k,\ (n \neq -1)$
e^x	$e^x + k$
e^{cx}	$\frac{1}{c}e^{cx} + k$

$f(x)$	$\int f(x)\,dx$
$\frac{1}{x}$	$\ln(\lvert x\rvert) + k$
$\ln x$	$x\ln(x) - x + k$
$\cos x$	$\sin x + k$
$\sin x$	$-\cos x + k$
$\tan x$	$-\ln(\lvert\cos(x)\rvert) + k$

- Udregn: $\int \sqrt{x}\,dx$, $\int x^3\,dx$

Regneregler for ubestemte integraler

- Vi har følgende regneregler:

$f(x)$	$\int f(x)\,dx$
c	$cx + k$
x	$\frac{1}{2}x^2 + k$
x^n	$\frac{1}{n+1}x^{n+1} + k, \ (n \neq -1)$
e^x	$e^x + k$
e^{cx}	$\frac{1}{c}e^{cx} + k$

$f(x)$	$\int f(x)\,dx$
$\frac{1}{x}$	$\ln(\lvert x\rvert) + k$
$\ln x$	$x\ln(x) - x + k$
$\cos x$	$\sin x + k$
$\sin x$	$-\cos x + k$
$\tan x$	$-\ln(\lvert\cos(x)\rvert) + k$

- Udregn: $$\int \sqrt{x}\,dx \quad , \quad \int x^3\,dx$$

Regneregler for ubestemte integraler

- Vi har følgende regneregler:

$f(x)$	$\int f(x)\,dx$
c	$cx + k$
x	$\frac{1}{2}x^2 + k$
x^n	$\frac{1}{n+1}x^{n+1} + k, (n \neq -1)$
e^x	$e^x + k$
e^{cx}	$\frac{1}{c}e^{cx} + k$

$f(x)$	$\int f(x)\,dx$
$\frac{1}{x}$	$\ln(\lvert x\rvert) + k$
$\ln x$	$x\ln(x) - x + k$
$\cos x$	$\sin x + k$
$\sin x$	$-\cos x + k$
$\tan x$	$-\ln(\lvert\cos(x)\rvert) + k$

- Udregn: $\int \sqrt{x}\,dx$, $\int x^3\,dx$

Regneregler for ubestemte integraler

- Vi har følgende regneregler:

$f(x)$	$\int f(x)\,dx$
c	$cx + k$
x	$\frac{1}{2}x^2 + k$
x^n	$\frac{1}{n+1}x^{n+1} + k,\ (n \neq -1)$
e^x	$e^x + k$
e^{cx}	$\frac{1}{c}e^{cx} + k$

$f(x)$	$\int f(x)\,dx$
$\frac{1}{x}$	$\ln(\lvert x\rvert) + k$
$\ln x$	$x\ln(x) - x + k$
$\cos x$	$\sin x + k$
$\sin x$	$-\cos x + k$
$\tan x$	$-\ln(\lvert\cos(x)\rvert) + k$

- Udregn: $\int \sqrt{x}\,dx$, $\int x^3\,dx$

Regneregler for ubestemte integraler

- Vi har følgende regneregler:

$f(x)$	$\int f(x)\,dx$
c	$cx + k$
x	$\frac{1}{2}x^2 + k$
x^n	$\frac{1}{n+1}x^{n+1} + k, \; (n \neq -1)$
e^x	$e^x + k$
e^{cx}	$\frac{1}{c}e^{cx} + k$

$f(x)$	$\int f(x)\,dx$
$\frac{1}{x}$	$\ln(\lvert x\rvert) + k$
$\ln x$	$x\ln(x) - x + k$
$\cos x$	$\sin x + k$
$\sin x$	$-\cos x + k$
$\tan x$	$-\ln(\lvert\cos(x)\rvert) + k$

- Udregn: $\int \sqrt{x}\,dx$, $\int x^3\,dx$

Regneregler for ubestemte integraler

- Vi har følgende regneregler:

$f(x)$	$\int f(x)\,dx$
c	$cx + k$
x	$\frac{1}{2}x^2 + k$
x^n	$\frac{1}{n+1}x^{n+1} + k,\ (n \neq -1)$
e^x	$e^x + k$
e^{cx}	$\frac{1}{c}e^{cx} + k$

$f(x)$	$\int f(x)\,dx$
$\frac{1}{x}$	$\ln(\lvert x\rvert) + k$
$\ln x$	$x\ln(x) - x + k$
$\cos x$	$\sin x + k$
$\sin x$	$-\cos x + k$
$\tan x$	$-\ln(\lvert\cos(x)\rvert) + k$

- Udregn: $\int \sqrt{x}\,dx$, $\int x^3\,dx$

Regneregler for ubestemte integraler

- Vi har følgende regneregler:

$f(x)$	$\int f(x)\,dx$
c	$cx + k$
x	$\frac{1}{2}x^2 + k$
x^n	$\frac{1}{n+1}x^{n+1} + k,\ (n \neq -1)$
e^x	$e^x + k$
e^{cx}	$\frac{1}{c}e^{cx} + k$

$f(x)$	$\int f(x)\,dx$
$\frac{1}{x}$	$\ln(\lvert x\rvert) + k$
$\ln x$	$x\ln(x) - x + k$
$\cos x$	$\sin x + k$
$\sin x$	$-\cos x + k$
$\tan x$	$-\ln(\lvert\cos(x)\rvert) + k$

- Udregn: $\int \sqrt{x}\,dx$, $\int x^3\,dx$

Regneregler for ubestemte integraler

- Vi har følgende regneregler:

$f(x)$	$\int f(x)\,dx$
c	$cx+k$
x	$\frac{1}{2}x^2+k$
x^n	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}+k,\ (n\neq -1)$
e^x	e^x+k
e^{cx}	$\frac{1}{c}e^{cx}+k$

$f(x)$	$\int f(x)\,dx$
$\frac{1}{x}$	$\ln(\lvert x\rvert)+k$
$\ln x$	$x\ln(x)-x+k$
$\cos x$	$\sin x+k$
$\sin x$	$-\cos x+k$
$\tan x$	$-\ln(\lvert\cos(x)\rvert)+k$

- Udregn: $\int \sqrt{x}\,dx$, $\int x^3\,dx$

Regneregler for ubestemte integraler

- Vi har følgende regneregler:

$f(x)$	$\int f(x)\,dx$
c	$cx + k$
x	$\frac{1}{2}x^2 + k$
x^n	$\frac{1}{n+1}x^{n+1} + k,\ (n \neq -1)$
e^x	$e^x + k$
e^{cx}	$\frac{1}{c}e^{cx} + k$

$f(x)$	$\int f(x)\,dx$
$\frac{1}{x}$	$\ln(\lvert x\rvert) + k$
$\ln x$	$x\ln(x) - x + k$
$\cos x$	$\sin x + k$
$\sin x$	$-\cos x + k$
$\tan x$	$-\ln(\lvert\cos(x)\rvert) + k$

- Udregn: $\int \sqrt{x}\,dx$, $\int x^3\,dx$

Regneregler for ubestemte integraler

- Vi har følgende regneregler:

$f(x)$	$\int f(x)\,dx$
c	$cx + k$
x	$\frac{1}{2}x^2 + k$
x^n	$\frac{1}{n+1}x^{n+1} + k,\ (n \neq -1)$
e^x	$e^x + k$
e^{cx}	$\frac{1}{c}e^{cx} + k$

$f(x)$	$\int f(x)\,dx$
$\frac{1}{x}$	$\ln(\lvert x\rvert) + k$
$\ln x$	$x\ln(x) - x + k$
$\cos x$	$\sin x + k$
$\sin x$	$-\cos x + k$
$\tan x$	$-\ln(\lvert\cos(x)\rvert) + k$

- Udregn: $\int \sqrt{x}\,dx$, $\int x^3\,dx$

Regneregler for ubestemte integraler

- Vi har følgende regneregler:

$f(x)$	$\int f(x)\,dx$
c	$cx + k$
x	$\frac{1}{2}x^2 + k$
x^n	$\frac{1}{n+1}x^{n+1} + k,\ (n \neq -1)$
e^x	$e^x + k$
e^{cx}	$\frac{1}{c}e^{cx} + k$

$f(x)$	$\int f(x)\,dx$
$\frac{1}{x}$	$\ln(\lvert x\rvert) + k$
$\ln x$	$x\ln(x) - x + k$
$\cos x$	$\sin x + k$
$\sin x$	$-\cos x + k$
$\tan x$	$-\ln(\lvert\cos(x)\rvert) + k$

- Udregn: $\int \sqrt{x}\,dx$, $\int x^3\,dx$

Regneregler for ubestemte integraler

- Vi har følgende regneregler:

$f(x)$	$\int f(x)\,dx$
c	$cx + k$
x	$\frac{1}{2}x^2 + k$
x^n	$\frac{1}{n+1}x^{n+1} + k,\ (n \neq -1)$
e^x	$e^x + k$
e^{cx}	$\frac{1}{c}e^{cx} + k$

$f(x)$	$\int f(x)\,dx$
$\frac{1}{x}$	$\ln(\lvert x\rvert) + k$
$\ln x$	$x\ln(x) - x + k$
$\cos x$	$\sin x + k$
$\sin x$	$-\cos x + k$
$\tan x$	$-\ln(\lvert\cos(x)\rvert) + k$

- Udregn: $\int \sqrt{x}\,dx = \int x^{\frac{1}{2}}\,dx$, $\int x^3\,dx$

Regneregler for ubestemte integraler

- Vi har følgende regneregler:

$f(x)$	$\int f(x)\,dx$
c	$cx + k$
x	$\frac{1}{2}x^2 + k$
x^n	$\frac{1}{n+1}x^{n+1} + k, \ (n \neq -1)$
e^x	$e^x + k$
e^{cx}	$\frac{1}{c}e^{cx} + k$

$f(x)$	$\int f(x)\,dx$
$\frac{1}{x}$	$\ln(\lvert x\rvert) + k$
$\ln x$	$x\ln(x) - x + k$
$\cos x$	$\sin x + k$
$\sin x$	$-\cos x + k$
$\tan x$	$-\ln(\lvert\cos(x)\rvert) + k$

- Udregn: $\displaystyle\int \sqrt{x}\,dx = \int x^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + k,$ $\displaystyle\int x^3\,dx$

Regneregler for ubestemte integraler

- Vi har følgende regneregler:

$f(x)$	$\int f(x)\,dx$
c	$cx + k$
x	$\frac{1}{2}x^2 + k$
x^n	$\frac{1}{n+1}x^{n+1} + k,\ (n \neq -1)$
e^x	$e^x + k$
e^{cx}	$\frac{1}{c}e^{cx} + k$

$f(x)$	$\int f(x)\,dx$
$\frac{1}{x}$	$\ln(\lvert x\rvert) + k$
$\ln x$	$x\ln(x) - x + k$
$\cos x$	$\sin x + k$
$\sin x$	$-\cos x + k$
$\tan x$	$-\ln(\lvert\cos(x)\rvert) + k$

- Udregn: $\int \sqrt{x}\,dx = \int x^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + k,$ $\quad \int x^3\,dx$

Regneregler for ubestemte integraler

- Vi har følgende regneregler:

$f(x)$	$\int f(x)\,dx$
c	$cx + k$
x	$\frac{1}{2}x^2 + k$
x^n	$\frac{1}{n+1}x^{n+1} + k,\ (n \neq -1)$
e^x	$e^x + k$
e^{cx}	$\frac{1}{c}e^{cx} + k$

$f(x)$	$\int f(x)\,dx$
$\frac{1}{x}$	$\ln(\lvert x \rvert) + k$
$\ln x$	$x\ln(x) - x + k$
$\cos x$	$\sin x + k$
$\sin x$	$-\cos x + k$
$\tan x$	$-\ln(\lvert\cos(x)\rvert) + k$

- Udregn: $$\int \sqrt{x}\,dx = \int x^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + k, \qquad \int x^3\,dx = \frac{1}{4}x^4 + k$$

Regneregler for ubestemte integraler

- Vi har følgende generelle regneregler

$$\int cf(x)\,dx = c\int f(x)\,dx$$

$$\int f(x) \pm g(x)\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx.$$

- Eksempler: Udregn

$$\int e^{3x} + \sqrt[3]{x} + 1\,dx,$$

$$\int \frac{1}{2x} - \cos(x)\,dx$$

Regneregler for ubestemte integraler

- Vi har følgende generelle regneregler

$$\int cf(x)\,dx = c\int f(x)\,dx$$
$$\int f(x) \pm g(x)\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx.$$

- Eksempler: Udregn

$$\int e^{3x} + \sqrt[3]{x} + 1\,dx,$$
$$\int \frac{1}{2x} - \cos(x)\,dx$$

Regneregler for ubestemte integraler

- Vi har følgende generelle regneregler

$$\int cf(x)\,dx = c\int f(x)\,dx$$
$$\int f(x) \pm g(x)\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx.$$

- Eksempler: Udregn

$$\int e^{3x} + \sqrt[3]{x} + 1\,dx,$$

$$\int \frac{1}{2x} - \cos(x)\,dx$$

Regneregler for ubestemte integraler

- Vi har følgende generelle regneregler

$$\int cf(x)\,dx = c\int f(x)\,dx$$
$$\int f(x) \pm g(x)\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx.$$

- Eksempler: Udregn

$$\int e^{3x} + \sqrt[3]{x} + 1\,dx, = \int e^{3x}\,dx$$

$$\int \frac{1}{2x} - \cos(x)\,dx$$

Regneregler for ubestemte integraler

- Vi har følgende generelle regneregler

$$\int cf(x)\,dx = c\int f(x)\,dx$$
$$\int f(x) \pm g(x)\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx.$$

- Eksempler: Udregn

$$\int e^{3x} + \sqrt[3]{x} + 1\,dx, = \int e^{3x}\,dx + \int x^{\frac{1}{3}}\,dx$$
$$\int \frac{1}{2x} - \cos(x)\,dx$$

Regneregler for ubestemte integraler

- Vi har følgende generelle regneregler

$$\int cf(x)\,dx = c\int f(x)\,dx$$
$$\int f(x) \pm g(x)\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx.$$

- Eksempler: Udregn

$$\int e^{3x} + \sqrt[3]{x} + 1\,dx, = \int e^{3x}\,dx + \int x^{\frac{1}{3}}\,dx + \int 1\,dx$$

$$\int \frac{1}{2x} - \cos(x)\,dx$$

Regneregler for ubestemte integraler

- Vi har følgende generelle regneregler

$$\int cf(x)\,dx = c\int f(x)\,dx$$
$$\int f(x) \pm g(x)\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx.$$

- Eksempler: Udregn

$$\int e^{3x} + \sqrt[3]{x} + 1\,dx, = \int e^{3x}\,dx + \int x^{\frac{1}{3}}\,dx + \int 1\,dx = \frac{1}{3}e^{3x}$$

$$\int \frac{1}{2x} - \cos(x)\,dx$$

Regneregler for ubestemte integraler

- Vi har følgende generelle regneregler

$$\int cf(x)\,dx = c\int f(x)\,dx$$
$$\int f(x) \pm g(x)\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx.$$

- Eksempler: Udregn

$$\int e^{3x} + \sqrt[3]{x} + 1\,dx, = \int e^{3x}\,dx + \int x^{\frac{1}{3}}\,dx + \int 1\,dx = \frac{1}{3}e^{3x} + \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}$$

$$\int \frac{1}{2x} - \cos(x)\,dx$$

Regneregler for ubestemte integraler

- Vi har følgende generelle regneregler

$$\int cf(x)\,dx = c\int f(x)\,dx$$

$$\int f(x) \pm g(x)\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx.$$

- Eksempler: Udregn

$$\int e^{3x} + \sqrt[3]{x} + 1\,dx, = \int e^{3x}\,dx + \int x^{\frac{1}{3}}\,dx + \int 1\,dx = \frac{1}{3}e^{3x} + \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} + x + k$$

$$\int \frac{1}{2x} - \cos(x)\,dx$$

Regneregler for ubestemte integraler

- Vi har følgende generelle regneregler

$$\int cf(x)\,dx = c\int f(x)\,dx$$
$$\int f(x) \pm g(x)\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx.$$

- Eksempler: Udregn

$$\int e^{3x} + \sqrt[3]{x} + 1\,dx, = \int e^{3x}\,dx + \int x^{\frac{1}{3}}\,dx + \int 1\,dx = \frac{1}{3}e^{3x} + \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} + x + k$$
$$\int \frac{1}{2x} - cos(x)\,dx$$

Regneregler for ubestemte integraler

- Vi har følgende generelle regneregler

$$\int cf(x)\,dx = c\int f(x)\,dx$$
$$\int f(x) \pm g(x)\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx.$$

- Eksempler: Udregn

$$\int e^{3x} + \sqrt[3]{x} + 1\,dx, = \int e^{3x}\,dx + \int x^{\frac{1}{3}}\,dx + \int 1\,dx = \frac{1}{3}e^{3x} + \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} + x + k$$
$$\int \frac{1}{2x} - cos(x)\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{x}\,dx$$

Regneregler for ubestemte integraler

- Vi har følgende generelle regneregler

$$\int cf(x)\,dx = c\int f(x)\,dx$$
$$\int f(x) \pm g(x)\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx.$$

- Eksempler: Udregn

$$\int e^{3x} + \sqrt[3]{x} + 1\,dx, = \int e^{3x}\,dx + \int x^{\frac{1}{3}}\,dx + \int 1\,dx = \frac{1}{3}e^{3x} + \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} + x + k$$
$$\int \frac{1}{2x} - cos(x)\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{x}\,dx - \int \cos(x)\,dx$$

Regneregler for ubestemte integraler

- Vi har følgende generelle regneregler

$$\int cf(x)\,dx = c\int f(x)\,dx$$
$$\int f(x) \pm g(x)\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx.$$

- Eksempler: Udregn

$$\int e^{3x} + \sqrt[3]{x} + 1\,dx, = \int e^{3x}\,dx + \int x^{\frac{1}{3}}\,dx + \int 1\,dx = \frac{1}{3}e^{3x} + \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} + x + k$$
$$\int \frac{1}{2x} - cos(x)\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{x}\,dx - \int \cos(x)\,dx = \frac{1}{2}\ln(|x|)$$

Regneregler for ubestemte integraler

- Vi har følgende generelle regneregler

$$\int cf(x)\,dx = c\int f(x)\,dx$$
$$\int f(x) \pm g(x)\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx.$$

- Eksempler: Udregn

$$\int e^{3x} + \sqrt[3]{x} + 1\,dx, = \int e^{3x}\,dx + \int x^{\frac{1}{3}}\,dx + \int 1\,dx = \frac{1}{3}e^{3x} + \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} + x + k$$
$$\int \frac{1}{2x} - cos(x)\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{x}\,dx - \int \cos(x)\,dx = \frac{1}{2}\ln(|x|) - \sin(x) + k$$

Bestemte integraler

- Vi vil bestemme arealer under grafer for funktioner.
- Arealet mellem grafen for f og x-asksen i intervallet $[a, b]$ er givet ved
$$F(b) - F(a),$$
hvor F er en stamfunktion til f.
- Derfor defineres det bestemte integral af f i intervallet $[a, b]$ til
$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$
- Eksempel: Bestem $\int_0^1 x^2\,dx$.

Bestemte integraler

- Vi vil bestemme arealer under grafer for funktioner.
- Arealet mellem grafen for f og x-asksen i intervallet $[a, b]$ er givet ved

$$F(b) - F(a),$$

  hvor F er en stamfunktion til f.
- Derfor defineres det bestemte integral af f i intervallet $[a, b]$ til

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

- Eksempel: Bestem $\int_0^1 x^2\,dx$.

Bestemte integraler

- Vi vil bestemme arealer under grafer for funktioner.
- Arealet mellem grafen for f og x-asksen i intervallet $[a, b]$ er givet ved

$$F(b) - F(a),$$

hvor F er en stamfunktion til f.

- Derfor defineres det bestemte integral af f i intervallet $[a, b]$ til

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

- Eksempel: Bestem $\int_0^1 x^2\,dx$.

Bestemte integraler

- Vi vil bestemme arealer under grafer for funktioner.
- Arealet mellem grafen for f og x-asksen i intervallet $[a, b]$ er givet ved

$$F(b) - F(a),$$

hvor F er en stamfunktion til f.

- Derfor defineres det bestemte integral af f i intervallet $[a, b]$ til

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

- Eksempel: Bestem $\int_0^1 x^2\,dx$.

Bestemte integraler

- Vi vil bestemme arealer under grafer for funktioner.
- Arealet mellem grafen for f og x-asksen i intervallet $[a, b]$ er givet ved

$$F(b) - F(a),$$

  hvor F er en stamfunktion til f.
- Derfor defineres det bestemte integral af f i intervallet $[a, b]$ til

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

- Eksempel: Bestem $\int_0^1 x^2\,dx = [\frac{1}{3}x^3]_0^1$.

Bestemte integraler

- Vi vil bestemme arealer under grafer for funktioner.
- Arealet mellem grafen for f og x-asksen i intervallet $[a, b]$ er givet ved

$$F(b) - F(a),$$

  hvor F er en stamfunktion til f.

- Derfor defineres det bestemte integral af f i intervallet $[a, b]$ til

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

- Eksempel: Bestem $\int_0^1 x^2\,dx = [\frac{1}{3}x^3]_0^1 = \frac{1}{3}$.

Regneregler for bestemte integraler

- Vi har følgende generelle regneregler for bestemte integraler

$$\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx$$

$$\int_a^b f(x) \pm g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx.$$

- Eksempler: Udregn

$$\int_1^2 \frac{1}{2x} - 1\,dx$$

$$\int_0^4 3x^2 + 3e^x\,dx$$

Regneregler for bestemte integraler

- Vi har følgende generelle regneregler for bestemte integraler

$$\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx$$

$$\int_a^b f(x) \pm g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx.$$

- Eksempler: Udregn

$$\int_1^2 \frac{1}{2x} - 1\,dx$$

$$\int_0^4 3x^2 + 3e^x\,dx$$

Regneregler for bestemte integraler

- Vi har følgende generelle regneregler for bestemte integraler

$$\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx$$
$$\int_a^b f(x) \pm g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx.$$

- Eksempler: Udregn

$$\int_1^2 \frac{1}{2x} - 1\,dx$$

$$\int_0^4 3x^2 + 3e^x\,dx$$

Regneregler for bestemte integraler

- Vi har følgende generelle regneregler for bestemte integraler

$$\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx$$

$$\int_a^b f(x) \pm g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx.$$

- Eksempler: Udregn

$$\int_1^2 \frac{1}{2x} - 1\,dx = \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx$$

$$\int_0^4 3x^2 + 3e^x\,dx$$

Regneregler for bestemte integraler

- Vi har følgende generelle regneregler for bestemte integraler

$$\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx$$

$$\int_a^b f(x) \pm g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx.$$

- Eksempler: Udregn

$$\int_1^2 \frac{1}{2x} - 1\,dx = \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx - \int_1^2 1\,dx$$

$$\int_0^4 3x^2 + 3e^x\,dx$$

Regneregler for bestemte integraler

- Vi har følgende generelle regneregler for bestemte integraler

$$\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx$$
$$\int_a^b f(x) \pm g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx.$$

- Eksempler: Udregn

$$\int_1^2 \frac{1}{2x} - 1\,dx = \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx - \int_1^2 1\,dx = \frac{1}{2}[\ln(x)]_1^2$$

$$\int_0^4 3x^2 + 3e^x\,dx$$

Regneregler for bestemte integraler

- Vi har følgende generelle regneregler for bestemte integraler

$$\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx$$
$$\int_a^b f(x) \pm g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx.$$

- Eksempler: Udregn

$$\int_1^2 \frac{1}{2x} - 1\,dx = \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx - \int_1^2 1\,dx = \frac{1}{2}[\ln(x)]_1^2 - [x]_1^2$$

$$\int_0^4 3x^2 + 3e^x\,dx$$

Regneregler for bestemte integraler

- Vi har følgende generelle regneregler for bestemte integraler

$$\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx$$

$$\int_a^b f(x) \pm g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx.$$

- Eksempler: Udregn

$$\int_1^2 \frac{1}{2x} - 1\,dx = \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx - \int_1^2 1\,dx = \frac{1}{2}[\ln(x)]_1^2 - [x]_1^2 = \frac{1}{2}\ln(2)$$

$$\int_0^4 3x^2 + 3e^x\,dx$$

Regneregler for bestemte integraler

- Vi har følgende generelle regneregler for bestemte integraler

$$\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx$$
$$\int_a^b f(x) \pm g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx.$$

- Eksempler: Udregn

$$\int_1^2 \frac{1}{2x} - 1\,dx = \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx - \int_1^2 1\,dx = \frac{1}{2}[\ln(x)]_1^2 - [x]_1^2 = \frac{1}{2}\ln(2) - 1$$

$$\int_0^4 3x^2 + 3e^x\,dx$$

Regneregler for bestemte integraler

- Vi har følgende generelle regneregler for bestemte integraler

$$\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx$$
$$\int_a^b f(x) \pm g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx.$$

- Eksempler: Udregn

$$\int_1^2 \frac{1}{2x} - 1\,dx = \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx - \int_1^2 1\,dx = \frac{1}{2}[\ln(x)]_1^2 - [x]_1^2 = \frac{1}{2}\ln(2) - 1$$

$$\int_0^4 3x^2 + 3e^x\,dx$$

Regneregler for bestemte integraler

- Vi har følgende generelle regneregler for bestemte integraler

$$\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx$$

$$\int_a^b f(x) \pm g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx.$$

- Eksempler: Udregn

$$\int_1^2 \frac{1}{2x} - 1\,dx = \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx - \int_1^2 1\,dx = \frac{1}{2}[\ln(x)]_1^2 - [x]_1^2 = \frac{1}{2}\ln(2) - 1$$

$$\int_0^4 3x^2 + 3e^x\,dx = \int_0^4 3x^2\,dx$$

Regneregler for bestemte integraler

- Vi har følgende generelle regneregler for bestemte integraler

$$\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx$$

$$\int_a^b f(x) \pm g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx.$$

- Eksempler: Udregn

$$\int_1^2 \frac{1}{2x} - 1\,dx = \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx - \int_1^2 1\,dx = \frac{1}{2}[\ln(x)]_1^2 - [x]_1^2 = \frac{1}{2}\ln(2) - 1$$

$$\int_0^4 3x^2 + 3e^x\,dx = \int_0^4 3x^2\,dx + 3\int_0^4 e^x\,dx$$

Regneregler for bestemte integraler

- Vi har følgende generelle regneregler for bestemte integraler

$$\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx$$
$$\int_a^b f(x) \pm g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx.$$

- Eksempler: Udregn

$$\int_1^2 \frac{1}{2x} - 1\,dx = \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx - \int_1^2 1\,dx = \frac{1}{2}[\ln(x)]_1^2 - [x]_1^2 = \frac{1}{2}\ln(2) - 1$$
$$\int_0^4 3x^2 + 3e^x\,dx = \int_0^4 3x^2\,dx + 3\int_0^4 e^x\,dx = [x^3]_0^4$$

Regneregler for bestemte integraler

- Vi har følgende generelle regneregler for bestemte integraler

$$\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx$$
$$\int_a^b f(x) \pm g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx.$$

- Eksempler: Udregn

$$\int_1^2 \frac{1}{2x} - 1\,dx = \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx - \int_1^2 1\,dx = \frac{1}{2}[\ln(x)]_1^2 - [x]_1^2 = \frac{1}{2}\ln(2) - 1$$
$$\int_0^4 3x^2 + 3e^x\,dx = \int_0^4 3x^2\,dx + 3\int_0^4 e^x\,dx = [x^3]_0^4 + 3[e^x]_0^4$$

Regneregler for bestemte integraler

- Vi har følgende generelle regneregler for bestemte integraler

$$\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx$$

$$\int_a^b f(x) \pm g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx.$$

- Eksempler: Udregn

$$\int_1^2 \frac{1}{2x} - 1\,dx = \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx - \int_1^2 1\,dx = \frac{1}{2}[\ln(x)]_1^2 - [x]_1^2 = \frac{1}{2}\ln(2) - 1$$

$$\int_0^4 3x^2 + 3e^x\,dx = \int_0^4 3x^2\,dx + 3\int_0^4 e^x\,dx = [x^3]_0^4 + 3[e^x]_0^4 = 64$$

Regneregler for bestemte integraler

- Vi har følgende generelle regneregler for bestemte integraler

$$\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx$$
$$\int_a^b f(x) \pm g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx.$$

- Eksempler: Udregn

$$\int_1^2 \frac{1}{2x} - 1\,dx = \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx - \int_1^2 1\,dx = \frac{1}{2}[\ln(x)]_1^2 - [x]_1^2 = \frac{1}{2}\ln(2) - 1$$
$$\int_0^4 3x^2 + 3e^x\,dx = \int_0^4 3x^2\,dx + 3\int_0^4 e^x\,dx = [x^3]_0^4 + 3[e^x]_0^4 = 64 + 3e^4 - 3$$

Regneregler for bestemte integraler

- Vi har følgende generelle regneregler for bestemte integraler

$$\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx$$
$$\int_a^b f(x) \pm g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx.$$

- Eksempler: Udregn

$$\int_1^2 \frac{1}{2x} - 1\,dx = \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx - \int_1^2 1\,dx = \frac{1}{2}[\ln(x)]_1^2 - [x]_1^2 = \frac{1}{2}\ln(2) - 1$$
$$\int_0^4 3x^2 + 3e^x\,dx = \int_0^4 3x^2\,dx + 3\int_0^4 e^x\,dx = [x^3]_0^4 + 3[e^x]_0^4 = 64 + 3e^4 - 3 = 61 + 3e^4$$

Opgaveregning!

AALBORG UNIVERSITY
DENMARK