Funktioner (trigonometriske)

Vi er nu kommet til at studere trigonometriske funktioner som sinus, cosinus og tangens. For at gøre dette vil vi starte med at betragte vinkler. Man kan måle vinkler i enten radianer eller grader, i dette kursus vil vi oftest benytte radianer, som er et mål for hvor langt man går på enhedscirklen. Vi har følgende sammenhæng mellem grader og radianer

$$2\pi \text{ rad} = 360 \text{ grader}$$

hvilket medfører at

$$1 \text{ rad} = \frac{180}{\pi} \text{ grader} \qquad \text{og} \qquad 1 \text{ grader} = \frac{\pi}{180} \text{ rad.}$$

Eksempler:

1. Omskriv 2 radianer til grader:

   Vi har

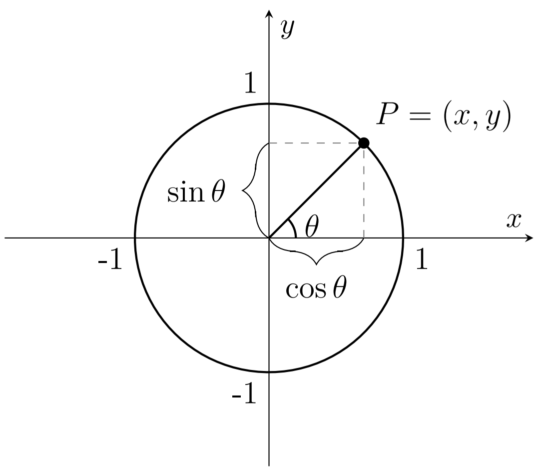
   $$2 \text{ rad} = 2 \cdot 1 \text{ rad} = 2 \cdot \frac{180}{\pi} \text{ grader} = \frac{360}{\pi} \text{ grader.}$$

2. Omskriv 280 grader til radianer:

   Vi har

   $$280 \text{ grader} = 280 \cdot 1 \text{ grader} = 280 \cdot \frac{\pi}{180} \text{ rad} = \frac{14\pi}{9} \text{ rad.}$$

For at kunne definere de trigonometriske funktioner vil vi betragte enhedscirklen (se Figur 1), som er en cirkel med radius 1 og centrum i origo, som er punktet $(0, 0)$. Hvis vi starter i punktet $(1, 0)$ på enhedscirklen og bevæger os med en vinkel θ mod



Figur 1: Sinus og cosinus i enhedscirklen.

uret (se Figur 1) så når vi til et punkt på enhedscirklen som vi kalder P. Hvis P har koordinaterne (x, y) så definerer vi $\cos\theta = x$ og $\sin\theta = y$. Hvis vi går imod urets retning i enhedscirklen, vil vi kalde det for den positive omløbsretning og hvis vi går i urets retning, vil vi kalde det for den negative omløbsretning.

Bemærk, at enhedscirklen er 2π-periodisk. Det betyder, at hvis vi går en vinkel på θ mod uret og får et punkt P, så vil vi få det samme punkt hvis vi går vinklen $\theta + 2\pi$, da der er 2π rundt om hele enhedscirklen. Det medfører også at sinus og cosinus er 2π-periodiske funktioner, hvilket betyder at

$$\sin\theta = \sin(\theta + 2\pi k) \qquad \text{og} \qquad \cos\theta = \cos(\theta + 2\pi k),$$

hvor k er et heltal.

Hvis vi betragter Figur 2 ser vi, at hvis vi spejler et punkt (x, y), på enhedscirklen, omkring x-aksen får vi punktet $(x, -y)$ på enhedscirklen. Da det at spejle et punkt omkring x-aksen er det samme som at gå vinklen i den negative omløbsretning, får vi at

$$\sin(-\theta) = -\sin\theta \qquad \text{og} \qquad \cos(-\theta) = \cos\theta.$$

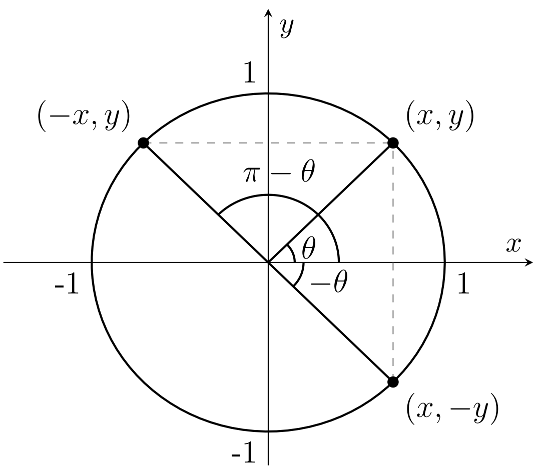
På tilsvarende vis ser vi, at hvis vi spejler punktet (x, y) i y-aksen får vi punktet $(-x, y)$. Da det at spejle i y-aksen, er det samme som at gå vinklen $\pi - \theta$ i positiv omløbsretning får vi, at

$$\sin(\pi - \theta) = \sin\theta \qquad \text{og} \qquad \cos(\pi - \theta) = -\cos\theta.$$

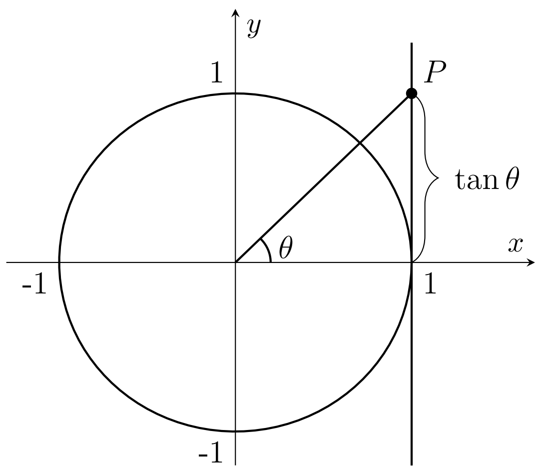
Vi definerer nu tangens ud fra sinus og cosinus, ved

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta},$$

når $\theta \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, hvor k er et heltal. Tangens kan også bestemmes ud fra enhedscirklen (se Figur 3). Vi tegner en tangentlinje der skærer cirklen i punktet $(1, 0)$. Hvis vi går en vinkel θ i enhedscirklen og så forlænger linjen indtil den skærer vores tangent, så er $\tan\theta$ præcis y-koordinaten i skæringspunktet.



Figur 2: Symmetrien i enhedscirklen.



Figur 3: Tangens i enhedscirklen.

Trigonometriske identiter Vi opsummere her en liste over de trigonometriske identiteter vi har vist plus nogle flere som vil være brugbare i opgaveregningen:

1. $\cos(\theta + 2\pi k) = \cos(\theta)$, når k er et heltal.
2. $\sin(\theta + 2\pi k) = \sin(\theta)$, når k er et heltal.
3. $\sin(-\theta) = -\sin(\theta)$.
4. $\cos(-\theta) = \cos(\theta)$.
5. $\sin(\pi \pm \theta) = \mp \sin(\theta)$.
6. $\cos(\pi \pm \theta) = -\cos(\theta)$.
7. $\tan(\pi \pm \theta) = \pm \tan(\theta)$.
8. $\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$ (Idiotformlen).
9. $\sin(\theta \pm \phi) = \sin(\theta)\cos(\phi) \pm \cos(\theta)\sin(\phi)$ (Additionsformlen for sinus).
10. $\cos(\theta \pm \phi) = \cos(\theta)\cos(\phi) \mp \sin(\theta)\sin(\phi)$ (Additionsformlen for cosinus).
11. $\cos(2\theta) = \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) = 2\cos^2(\theta) - 1 = 1 - 2\sin^2(\theta)$.
12. $\sin(2\theta) = 2\sin(\theta)\cos(\theta)$.

Derudover giver vi en liste over værdierne for nogle udvalgte vinkler. Vi betragter her kun vinkler i første kvadrant, da vi kan finde værdier for de andre kvadranter ved at benytte de ovenstående formler.

θ	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$
0	0	1	0
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0	

Tabel 1: Værdier for udvalgte vinkler

Eksempler:

1. Beregn værdien $\cos(\frac{3\pi}{2})$:

   Ved at bruge den trigonometriske identitet nummer 6. får vi at

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{2}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = -0 = 0.$$

2. Beregn $\sin(9\pi)$:

   Ved at bruge den trigonometriske identitet nummer 2. får vi at

$$\sin(9\pi) = \sin(\pi + 8\pi) = \sin(\pi + 2 \cdot 4 \cdot \pi) = \sin(\pi) = 0.$$

3. Vis at den trigonometriske identitet nummer 5. gælder for plus, ved at bruge additionsformlen for sinus:

   Vi sætter $\phi = \pi$ i additionsformlen for sinus og får

$$\sin(\theta + \pi) = \sin(\theta)\cos(\pi) + \cos(\theta)\sin(\pi).$$

   Vi ser i enhedscirklen at 1 at $\cos(\pi) = -1$ og $\sin(\pi) = 0$. Indsætter vi det i den ovenstående ligning får vi at

$$\sin(\theta + \pi) = \sin\theta \cdot (-1) + \cos\theta \cdot 0 = -\sin\theta.$$