Repetition af gymnasiematematik

Kasper Studsgaard Sørensen, Benjamin Buus Støttrup

24. marts 2021

Indhold

Introduktion **1**

1 Formelsamling **3**

2 Basal matematik **7**
2.1 Brøker 7
2.2 Kvadratsætninger 11
2.3 Potenser 17
2.4 Rødder 20
2.5 Ligninger og uligheder 23
2.6 Andengradsligninger og to ligninger med to ubekendte 28

3 Funktioner **35**
3.1 Funktioner: Injektivitet, surjektivitet, summer og produkter 35
3.2 Sammensatte og inverse funktioner 40
3.3 Polynomier 43
3.4 Logaritme-og eksponentialfunktioner 49
3.5 Trigonometriske funktioner 53
3.6 Grænseværdier og kontinuitet 59

4 Differentiabilitet **65**
4.1 Differentialkvotienter og differentialregneregler 65
4.2 Differentiation af produkter og kvotienter 72
4.3 Kædereglen 75
4.4 Tangentligning og monotoniforhold 78
4.5 Optimering 81

5 Integralregning **87**
5.1 Regneregler for ubestemte integraler 87
5.2 Delvis integration for ubestemte integraler 91
5.3 Integration ved substitution for ubestemte integraler 93
5.4 Regneregler for bestemte integraler 96
5.5 Delvis integration og substitution for bestemte integraler 100

6 Differentialligninger **107**
6.1 Introduktion til Differntialligninger 107
6.2 Begyndelsesværdiproblemer 110
6.3 Homogene førsteordens differentialligninger 114
6.4 Inhomogene førsteordens differentialligninger 117

7 Vektorer 121
7.1 Vektorer i planen . . . 121
7.2 Linjer i planen . . . 127
7.3 Vektorer i rummet . . . 132
7.4 Planer i rummet . . . 137

8 Repetition 143
8.1 Repetitionsopgaver . . . 143

9 Facit 149
9.1 Brøker . . . 149
9.2 Kvadratsætninger . . . 151
9.3 Potenser . . . 153
9.4 Rødder . . . 154
9.5 Ligninger og uligheder . . . 155
9.6 Andengradsligninger og flere ligninger med flere ubekendte . . . 157
9.7 Funktioner: Injektivitet, surjektivitet, summer og produkter . . . 160
9.8 Sammensatte og inverse funktioner . . . 161
9.9 Polynomier . . . 163
9.10 Eksponentiel og logaritme funktioner . . . 164
9.11 Trigonometriske funktioner . . . 166
9.12 Grænseværdier og kontinuitet . . . 169
9.13 Differentialkvotienter og differentialregneregler . . . 171
9.14 Differentiation af produkter og kvotienter . . . 174
9.15 Kædereglen . . . 176
9.16 Tangentligningen og monotoniforhold . . . 179
9.17 Optimering . . . 180
9.18 Regneregler for ubestemte integraler . . . 185
9.19 Delvis integration for ubestemte integraler . . . 186
9.20 Integration ved substitution for ubestemte integraler . . . 188
9.21 Regneregler for bestemte integraler . . . 190
9.22 Delvis integration og substitution for bestemte integraler . . . 192
9.23 Introduktion til Differntialligninger . . . 194
9.24 Begyndelsesværdiproblemer . . . 196
9.25 Homogene førsteordens differentialligninger . . . 197
9.26 Inhomogene førsteordens differentialligninger . . . 199
9.27 Vektorer i planen . . . 200
9.28 Linjer i planen . . . 202
9.29 Vektorer i rummet . . . 205
9.30 Planer i rummet . . . 206
9.31 Repetition . . . 208

Introduktion

Kapitel 1

Formelsamling

1.1 Brøker

Brøker er tal på formen
$$\frac{a}{b},$$
hvor a, b er tal samt $b \neq 0$. a er *tælleren* og b er *nævneren*.

1.1.1 Regneregler

Der gælder
$$\frac{a}{c} \pm \frac{b}{c} = \frac{a \pm b}{c}, \quad \frac{a}{b}\frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}, \quad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{ad}{bc},$$
$$a\frac{b}{c} = \frac{ab}{c}, \quad \frac{\frac{a}{b}}{c} = \frac{a}{bc}, \quad \frac{a}{\frac{b}{c}} = \frac{ac}{b}.$$

1.1.2 Forkorte/Forlænge Brøker

Fælles faktorer kan forkortes:
$$\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}$$

1.2 Potenser

Potenser er tal på formen x^a, x er *grundtallet* og a er *eksponenten*.

1.2.1 Regneregler

Der gælder
$$x^a x^b = x^{a+b}, \quad \frac{x^a}{x^b} = x^{a-b}, \quad (xy)^a = x^a y^a,$$
$$\left(\frac{x}{y}\right)^a = \frac{x^a}{y^a}, \quad (x^a)^b = x^{ab}, \quad x^{-a} = \frac{1}{x^a}.$$

1.3 Rødder

Hvis $x \geq 0$ og $n \in \mathbf{Z}_+$ så findes et tal $\sqrt[n]{x} > 0$ så
$$(\sqrt[n]{x})^n = x.$$
Bemærk at $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$.

1.3.1 Regneregler

Der gælder
$$\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}, \quad \sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{x})^m,$$
$$\sqrt[n]{xy} = \sqrt[n]{x}\sqrt[n]{y}, \qquad \sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}.$$

1.4 Kvadratsætninger

Der gælder
$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$
$$(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$$
$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2.$$

1.5 Ligninger

Ligninger kan reduceres med følgende regler:

1. Man må lægge til/trække fra med det samme tal på begge sider af et lighedstegn.
2. Man må gange/dividere med det samme tal (undtagen 0) på begge sider af et lighedstegn.

1.5.1 Andengradsligninger

Andengradsligninger er på formen
$$ax^2 + bx + c = 0, \tag{1.1}$$
Løsningerne til (1.1) er
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

1.5.2 Faktorisering

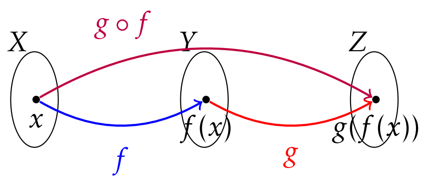
Hvis $ax^2 + bx + c = 0$ har rødder r_1 og r_2 så gælder.
$$ax^2 + bx + c = a(x - r_1)(x - r_2).$$

1.6 Funktioner

En funktion $f \colon X \to Y$ tildeler alle $x \in X$ *præcis ét* element $f(x) \in Y$.

1.6.1 Sammensatte funktioner

Hvis $f \colon X \to Y$ og $g \colon Y \to Z$ defineres sammensætningen $g \circ f \colon X \to Z$ ved $(g \circ f)(x) = g(f(x))$. f er den *indre funktion*, g er den *ydre funktion*



1.6.2 Inverse funktioner

To funktioner $f \colon X \to Y$ og $g \colon Y \to X$ er hinandens *inverse* hvis
$$f(g(y)) = y, \quad \text{og} \quad g(f(x)) = x$$
for alle x i X og y i Y.

1.6.3 Polynomier

Et førstegradspolynomium har forskrift:
$$f(x) = ax + b.$$
Et andengradspolynomium har forskrift:
$$f(x) = ax^2 + bx + c.$$

1.6.4 Logaritmer og eksponentialfunktioner

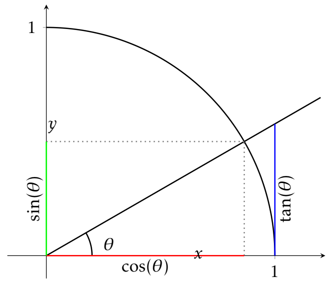
Logaritmen med grundtal a, $\log_a \colon]0, \infty[\to \mathbf{R}$ er invers til eksponentialfunkionen $f_a(x) = a^x$ $(a > 0, a \neq 1)$. Der gælder at
$$\log_a(a^x) = x \quad \text{og} \quad a^{\log_a(y)} = y$$
og vi har
$$\ln x = \log_e x, \qquad \log x = \log_{10} x$$

1.6.5 Regneregler

Der gælder
$$\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y),$$
$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y),$$
$$\log_a(x^r) = r\log_a(x).$$

1.7 Trigonometriske funktioner

De trigonometriske funkioner er defineret ud fra enhedscirklen:



Der gælder at $\tan(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}$ samt

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\theta$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	-

1.8 Differentialregning

Den afledede af f skrives som $f' = \frac{d}{dx}f = \frac{df}{dx}$.

1.8.1 Regneregler

Der gælder at

$f(x)$	$f'(x)$
c	0
x	1
x^n	nx^{n-1}
e^x	e^x
e^{cx}	ce^{cx}
a^x	$a^x \ln a$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\cos x$	$-\sin x$
$\sin x$	$\cos x$
$\tan x$	$1 + \tan^2(x)$

1.8.2 Generelle regneregler

Der gælder at
$$(cf)'(x) = cf'(x)$$
$$(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$$
$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$
$$\frac{d}{dx}f(g(x)) = f'(g(x))g'(x).$$

Den sidste regneregel kaldes *kædergllen*.

1.9 Ubestemte integraler

En funktion f har *stamfunktion* F hvis

$$F'(x) = f(x).$$

Det ubestemte integral af f er

$$\int f(x)\,dx = F(x) + k,$$

hvor $F'(x) = f(x)$ og $k \in \mathbf{R}$.

1.9.1 Generelle regneregler

$$\int cf(x)\,dx = c\int f(x)\,dx$$

$$\int f(x) \pm g(x)\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx.$$

$$\int f(x)g(x)\,dx = f(x)G(x) - \int f'(x)G(x)\,dx$$

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = F(g(x)) + k.$$

Den 3. regel kaldes *delvis integration* og den sidste kaldes *integration ved substitution*.

1.9.2 Regneregler

Der gælder at

$f(x)$	$\int f(x)\,dx$
c	$cx + k$
x	$\frac{1}{2}x^2 + k$
x^n	$\frac{1}{n+1}x^{n+1} + k$
e^x	$e^x + k$
e^{cx}	$\frac{1}{c}e^{cx} + k$
$\frac{1}{x}$	$\ln(\lvert x\rvert) + k$
$\ln x$	$x\ln(x) - x + k$
$\cos x$	$\sin x + k$
$\sin x$	$-\cos x + k$
$\tan x$	$-\ln(\lvert\cos(x)\rvert) + k$

1.9.3 Integration ved substitution

Givet et integral på formen $\int f(g(x))g'(x)\,dx$ anvendes metoden:

1. Lad $u = g(x)$.
2. Udregn $\frac{du}{dx}$ og isoler dx.
3. Substituer $g(x)$ og dx.
4. Udregn integralet mht. u.
5. Substituer tilbage.

1.10 Besemte integraler

Det bestemte integral af f i intervallet $[a,b]$ til

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a),$$

hvor F er en stamfunktion til f.

1.10.1 Generelle regneregler

$$\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx$$

$$\int_a^b f(x) \pm g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$$

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = [f(x)G(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)G(x)\,dx$$

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = [F(x)]_{g(a)}^{g(b)}.$$

1.10.2 Integration ved substitution

Givet et integral på formen $\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx$ anvendes metoden

1. Lad $u = g(x)$.
2. Udregn $\frac{du}{dx}$ og isoler dx.
3. Substituer $g(x)$, dx samt grænser.
4. Udregn integralet mht. u.

1.11 Differentialligninger

1.11.1 Løsningsformler

Differentiallign.	Fuldstændig løsn.
$f'(x) = k$	$f(x) = kx + c$
$f'(x) = h(x)$	$f(x) = \int h(x)\,dx$
$f'(x) = kf(x)$	$f(x) = ce^{kx}$
$f'(x) + af(x) = b$	$f(x) = \frac{b}{a} + ce^{-ax}$

1.11.2 Panzerformlen

Differentialligningen

$$f'(x) + a(x)f(x) = b(x)$$

har fuldstændig løsning

$$f(x) = e^{-A(x)}\int b(x)e^{A(x)}dx + ce^{-A(x)},$$

hvor $A'(x) = a(x)$.

1.12 Vektorer i planen

En vektor $\vec{u}$ i planen skrives som $\vec{u} = [x,y]$ hvor $x,y \in \mathbf{R}$.

1.12.1 Regneregler

For $\vec{u} = [x_1,y_1]$, $\vec{v} = [x_2,y_2]$, $c \in \mathbf{R}$ er

$$\vec{u} \pm \vec{v} = \begin{bmatrix} x_1 \pm x_2 \\ y_1 \pm y_2 \end{bmatrix}, \qquad \vec{u}\cdot\vec{v} = x_1x_2 + y_1y_2,$$

$$c\vec{u} = \begin{bmatrix} cx_1 \\ cy_1 \end{bmatrix}, \quad \det(\vec{u},\vec{v}) = x_1y_2 - x_2y_1$$

Længden af $\vec{u}$ er $\left\|\vec{u}\right\| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$.

1.12.2 Vinklen mellem to vektorer

For vinklen θ mellem $\vec{u}$, $\vec{v}$ er

$$\cos\theta = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\left\|\vec{u}\right\|\left\|\vec{v}\right\|}, \quad \sin\theta = \frac{\det(\vec{u},\vec{v})}{\left\|\vec{u}\right\|\left\|\vec{v}\right\|}$$

Yderligere gælder

1. $\vec{u}$ og $\vec{v}$ er ortogonale $\Leftrightarrow \vec{u}\cdot\vec{v} = 0$.
2. $\vec{u}$ og $\vec{v}$ er parallelle $\Leftrightarrow \det(\vec{u},\vec{v}) = 0$.

1.13 Vektorer i rummet

En vektor $\vec{u}$ i rummet skrives som $\vec{u} = [x,y,z]$ hvor $x,y,z \in \mathbf{R}$.

1.13.1 Regneregler

For $\vec{u} = [x_1,y_1,z_1]$, $\vec{v} = [x_2,y_2,z_2]$ og $c \in \mathbf{R}$ gælder

$$\vec{u} \pm \vec{v} = \begin{bmatrix} x_1 \pm x_2 \\ y_1 \pm y_2 \\ z_1 \pm z_2 \end{bmatrix}, \qquad c\vec{u} = \begin{bmatrix} cx_1 \\ cy_1 \\ cz_1 \end{bmatrix},$$

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.$$

Længden af $\vec{u}$ er $\left\|\vec{u}\right\| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$. Krydsprocuktet er givet ved

$$\vec{u}\times\vec{v} = \begin{bmatrix} y_1z_2 - z_1y_2 \\ z_1x_2 - x_1z_2 \\ x_1y_2 - y_1x_2 \end{bmatrix}$$

1.13.2 Vinklen mellem to vektorer

For vinklen θ mellem $\vec{u}$ og $\vec{v}$ gælder

$$\cos\theta = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\left\|\vec{u}\right\|\left\|\vec{v}\right\|}, \quad \sin\theta = \frac{\left\|\vec{u}\times\vec{v}\right\|}{\left\|\vec{u}\right\|\left\|\vec{v}\right\|}$$

Yderligere gælder

1. $\vec{u}$ og $\vec{v}$ er ortogonale $\Leftrightarrow \vec{u}\cdot\vec{v} = 0$.
2. $\vec{u}$ og $\vec{v}$ er parallelle $\Leftrightarrow \vec{u}\times\vec{v} = 0$.

1.14 Linjer og Planer

Planen/linjen gennem punktet med stedvektor $\vec{x_0}$ med normalvektor $\vec{n}$ beskrives ved alle vektorer $\vec{x}$ der løser ligningen

$$\vec{n}\cdot(\vec{x} - \vec{x_0}) = 0$$

En linje i rummet/planen gennem punktet med stedvektor $\vec{x_0}$ og retning $\vec{r}$ har parameterfremstilling

$$\vec{x_0} + t\vec{r}, \quad t \in \mathbf{R}.$$

Kapitel 2

Basal matematik

2.1 Brøker

Når vi snakker om brøker tænker vi på tal på formen

$$\text{brøk } = \frac{\text{tæller}}{\text{nævner}},$$

hvor det eneste krav er at nævneren ikke må være 0.

Vi vil ofte skrive en brøk som

$$a = \frac{b}{c},$$

hvor b kan være et hvilket som helst tal og c kan være alle tal bortset fra 0.

Det kan f.eks. være 5 venner der vælger at dele en pizza ligeligt imellem sig, så de får $\frac{1}{5}$ hver, eller 3 venner der har tjent 200 kr og hver især får $\frac{200}{3}$ kr.

Størrelsesforhold: Der gælder at hvis nævneren i en brøk er større end tælleren, så er brøken mindre end 1, f.eks. $\frac{1}{2} < 1$. Hvis nævneren er lig med tælleren så er brøken lig med 1, f.eks. $\frac{4}{4} = 1$ og hvis nævneren er mindre end tælleren så er brøken større end 1, f.eks. $\frac{4}{3} > 1$.

En anden måde vi kan skrive dette på er:

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} &< 1, \quad \text{hvis } a < b, \\ \frac{a}{b} &= 1, \quad \text{hvis } a = b, \\ \frac{a}{b} &> 1, \quad \text{hvis } a > b. \end{aligned}$$

Derudover gælder der, at hvis man gør nævneren større så får man en mindre brøk, eksempelvis $\frac{2}{3} > \frac{2}{5}$, hvorimod hvis man gør tælleren større så får man en større brøk, som i tilfældet $\frac{3}{4} < \frac{7}{4}$.

Igen kan vi skrive dette mere præcist ved:

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} &< \frac{a}{c}, \quad \text{hvis } c < b, \\ \frac{a}{b} &< \frac{c}{b}, \quad \text{hvis } a < c. \end{aligned}$$

Regneregler: Det er ekstremt vigtigt at man lærer de følgende regneregler for brøker, da de vil dukke op igen og igen resten af kurset og i jeres videre studieforløb.

1. Når vi lægger to brøker sammen eller trækker dem fra hinanden, finder vi først fælles nævner og derefter lægger vi tællerne sammen eller trækker dem fra hinanden.

   En måde at finde fælles nævner, som altid virker, er at gange på kryds:

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot d} \pm \frac{b \cdot c}{b \cdot d} = \frac{a \cdot d \pm b \cdot c}{b \cdot d}.$$

2. Når vi ganger et tal med en brøk, ganger vi tallet op i tælleren:

$$a \cdot \frac{b}{c} = \frac{a \cdot b}{c}.$$

3. Når vi dividerer en brøk med et tal, ganger vi tallet ned i nævneren:

$$\frac{\frac{a}{b}}{c} = \frac{a}{b \cdot c}.$$

   Bemærk, at brøkstregen i den brøk der står i tælleren er mindre end den anden brøkstreg. Grunden til det er at så kan vi se forskel på om vi dividere en brøk med et tal eller et tal med en brøk.

4. Når vi diverer et tal med en brøk, ganger vi tallet på den omvendte brøk:

$$\frac{a}{\frac{b}{c}} = a \cdot \frac{c}{b} = \frac{a \cdot c}{b}.$$

   Bemærk, at når vi siger den omvendte brøk af $\frac{a}{b}$ så mener vi brøken $\frac{b}{a}$, hvor vi har byttet om på tæller og nævner.

5. Når vi ganger to brøker sammen, ganger vi tæller med tæller og nævner med nævner:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

6. Når vi dividerer en brøk med en brøk, ganger vi med den omvendte brøk:

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}.$$

Det er ofte nemmere at forstå regnereglerne hvis man ser nogle konkrete eksempler.

Eksempler:

1. Udregn $\frac{4}{5} - \frac{2}{3}$:

$$\frac{4}{5} - \frac{2}{3} = \frac{4 \cdot 3}{5 \cdot 3} - \frac{5 \cdot 2}{5 \cdot 3} = \frac{12}{15} - \frac{10}{15} = \frac{12 - 10}{15} = \frac{2}{15}.$$

2. Udregn $2 \cdot \frac{4}{5}$:

$$2 \cdot \frac{4}{5} = \frac{2 \cdot 4}{5} = \frac{8}{5}.$$

3. Udregn $\frac{\frac{4}{3}}{7}$:

$$\frac{\frac{4}{3}}{7} = \frac{4}{3 \cdot 7} = \frac{4}{21}.$$

4. Udregn $\frac{5}{\frac{2}{3}}$:

$$\frac{5}{\frac{2}{3}} = 5 \cdot \frac{3}{2} = \frac{5 \cdot 3}{2} = \frac{15}{2}.$$

5. Udreng $\frac{3}{4} \cdot \frac{9}{4}$:

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{9}{4} = \frac{3 \cdot 9}{4 \cdot 4} = \frac{27}{16}.$$

6. Udregn $\frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{5}}$:

$$\frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{5}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{3} = \frac{1 \cdot 5}{2 \cdot 3} = \frac{5}{6}.$$

Forlænge og forkorte brøker: Et trik i matematikken er at tage et tal og gange det med 1, da det ikke ændre noget ved det oprindelige tal, men hvis man skriver 1 på en smart måde kan det ofte simplificere ens udregninger.

Hvis vi ganger en brøk med a i både tæller og nævner kalder vi det at *forlænge brøken med a*:

$$\frac{b}{c} = \frac{b}{c} \cdot 1 = \frac{b}{c} \cdot \frac{a}{a} = \frac{b \cdot a}{c \cdot a}.$$

Hvis vi dividere en brøk med a i både tæller og nævner så kalder vi det at *forkorte brøken med a*:

$$\frac{b}{c} \cdot 1 = \frac{b}{c} \cdot \frac{\frac{1}{a}}{\frac{1}{a}} = \frac{\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}}.$$

Bemærk at ved at forlænge eller forkorte brøker, ændre vi ikke deres værdi.

Eksempler:

1. Forlæng brøken $\frac{4}{5}$ med 2:

$$\frac{4}{5} \cdot 1 = \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{2} = \frac{4 \cdot 2}{5 \cdot 2} = \frac{8}{10}.$$

2. Forkort brøken $\frac{8}{10}$ med 2:

$$\frac{8}{10} \cdot 1 = \frac{8}{10} \cdot \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{8}{2}}{\frac{10}{2}} = \frac{4}{5}.$$

Bemærk at dette betyder, at når vi forkorter en brøk med a dividerer vi samtlige led i både tæller og nævner med a. Det er en klassisk fejl som mange begår, at man tror man kan nøjes med at forkorte nogle af ledene i tælleren eller nævneren, f.eks. er

$$\frac{x^3 + x^2 + 1}{x} \neq x^2 + x + 1,$$

da x ikke går op i 1. Det rigtige vil i stedet være at forkorte brøken med x, hvilket giver

$$\frac{x^3 + x^2 + 1}{x} = \frac{\frac{x^3}{x} + \frac{x^2}{x} + \frac{1}{x}}{\frac{x}{x}} = x^2 + x + \frac{1}{x}.$$

Vi siger at en brøk er *uforkortelig* hvis der ikke eksisterer noget heltal større end 1, som går op i både tælleren og nævneren.

Alle facit i dette kursus, som er brøker, skal angives som uforkortelige brøker (ikke decimaltal), eksempelvis:

$$\frac{2}{4} + \frac{8}{4} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2},$$

har facit $\frac{5}{2}$ og ikke $\frac{10}{4}$, selvom tallene i princippet et ens.

2.1.1 Opgaver

1. Omskriv følgende tal til brøker hvor nævneren er 4:

$$2, \qquad \frac{60}{24}, \qquad \pi, \qquad \frac{3}{2}.$$

2. Omskriv følgende tal til brøker hvor nævneren er 3:

$$7, \qquad \frac{6}{9}, \qquad \frac{16}{12}, \qquad 4\pi.$$

3. Udregn følgende tal (forkort mest muligt):

$$\frac{6}{7} + \frac{8}{7}, \qquad \frac{1}{2} + \frac{3}{4}, \qquad \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}, \qquad \frac{3}{2} - \frac{4}{8}, \qquad -\frac{2}{3} + \frac{2}{6}.$$

4. Udregn følgende tal (forkort mest muligt):

$$2 \cdot \frac{3}{4}, \qquad \frac{1}{8} \cdot \frac{2}{3}, \qquad \frac{7}{8} \cdot \frac{1}{3}, \qquad 2 \cdot 3 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5}, \qquad \frac{2}{3} \cdot \frac{7}{3}, \qquad \frac{3}{5} \cdot \frac{15}{25}.$$

5. Udregn følgende tal (forkort mest muligt):

$$\frac{6}{\frac{3}{2}}, \qquad \frac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{9}}, \qquad \frac{\frac{3}{2}}{6}, \qquad \frac{\frac{2}{7}}{\frac{14}{49}}, \qquad \frac{\left(\frac{1}{2} : \frac{3}{4}\right)}{\frac{8}{15}}.$$

6. Forkort følgende brøker mest muligt:

$$\frac{x^2+x}{x}, \quad \frac{2x+4y}{2}, \quad \frac{2xy+7y}{y}, \quad \frac{x^2y+xy}{x(x+1)}, \quad \frac{(x+3)^2}{2x^2+6x}, \quad \frac{2(x-1)^2}{6x^2-6x}.$$

7. Udregn følgende tal (forkort mest muligt):

$$\frac{3}{2}-\left(\frac{1}{5}\cdot\frac{2}{10}\right), \quad -21\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{7}\right), \quad \frac{2}{4}\cdot\frac{8}{4}-\frac{3}{8}, \quad \frac{\frac{2}{5}}{3}-2\cdot\frac{2}{30}, \quad \frac{6}{\frac{2}{3}}+\frac{1}{2}.$$

8. Reducer følgende brøk mest muligt:

$$\frac{a-(2b-9)}{a-2b}-\frac{a-(b-5)}{a-2b}+\frac{a-(b+4)}{a-2b}.$$

9. Indsæt det tal som mangler:

$$\frac{1}{2}=\frac{3}{}, \quad \frac{6}{7}=\frac{}{49}, \quad \frac{2x}{y}=\frac{2xy}{}, \quad \frac{\pi}{\sqrt{2}}=\frac{}{3\pi^2\sqrt{2}}.$$

10. Udregn følgende tal (forkort mest muligt):

$$\frac{\frac{1}{2}+\frac{2}{5}}{1+\frac{1}{10}}, \quad \frac{\frac{3}{4}+1}{\frac{9}{8}-1}, \quad \frac{2}{3}\cdot\frac{\frac{5}{2}-2}{\frac{8}{3}+1}.$$

11. Reducer følgende brøk:

$$\frac{4a+(2c-4b)}{a-b}-(c-2)-\frac{2c-ac+bc}{a-b}.$$

12. Vis, at

$$\frac{\frac{1}{b}+1}{1-\frac{a}{b}}=\frac{1+b}{b-a},$$

hvor $b \notin \{0, a\}$.

13. Vis at

$$\frac{\frac{a}{b}+1}{\frac{b}{a}+1}=\frac{a}{b},$$

hvor $a, b \neq 0$ og $a \neq -b$. Hvorfor kræver vi at $a, b \neq 0$ samt at $a \neq -b$?

2.2 Kvadratsætninger

Hvis vi har et udtryk som vi gerne vil reducere, møder vi ofte noget på formen $(a+b)^2$. For at komme videre i vores udregning vil vi derfor gerne kunne omskrive sådanne udtryk så de bliver nemmere at reducere. Til at gøre dette introducerer vi kvadratsætningerne.

Vi husker at når vi ganger to parenteser sammen, så benytter vi følgende formel

$$(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd,$$

som vi får ved først at gange a ind på begge elementer i den anden parentes og dernæst gange b ind på de to elementer.

Hvis vi bruger denne regneregel får vi:

$$\begin{aligned}
(a+b)^2 &= (a+b)(a+b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + b^2 + 2ab \\
(a-b)^2 &= (a-b)(a-b) = a^2 - ab - ba + (-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab \\
(a+b)(a-b) &= a^2 - ab + ba - b^2 = a^2 - b^2.
\end{aligned}$$

Bemærk her, at $(-b)^2 \neq -b^2$ medmindre $b = 0$, da $(-b)^2 = (-b)\cdot(-b) = (-1)\cdot b\cdot(-1)\cdot b = (-1)^2 \cdot b^2 = b^2$ og $-b^2 = (-1)\cdot b^2$.

Det giver os de tre kvadratsætninger, som kort kan skrives:

1. $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$.
2. $(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$.
3. $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$.

Eksempler:

1. Reducer $(x+y)^2 + (x-y)^2 - x^2 - y^2$:

$$\begin{aligned}
(x+y)^2 + (x-y)^2 - x^2 - y^2 &= x^2 + y^2 + 2xy + x^2 + y^2 - 2xy - x^2 - y^2 \\
&= x^2 + y^2.
\end{aligned}$$

2. Reducer $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{a-b}$:

Ved at benytte brøkregnereglerne fra sidste kursusgang får vi

$$\begin{aligned}
\frac{1}{a+b} + \frac{1}{a-b} &= \frac{a-b}{(a+b)(a-b)} + \frac{a+b}{(a+b)(a-b)} \\
&= \frac{a-b+a+b}{(a+b)(a-b)} \\
&= \frac{2a}{a^2-b^2}.
\end{aligned}$$

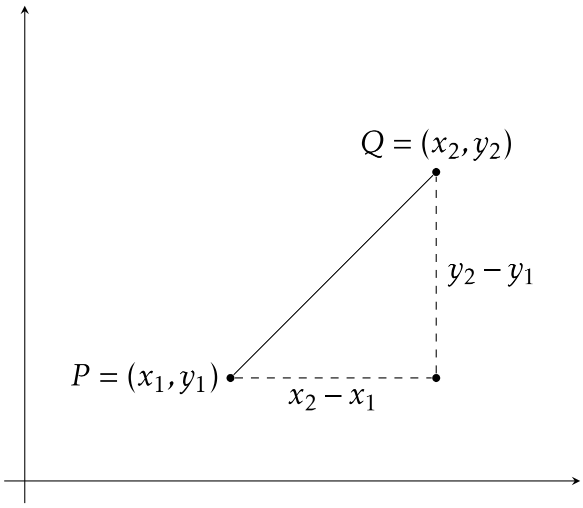
3. Reducer $\frac{2x^2+2-4x}{2x^2-2}$:

Vi ser ved hjælp af vores kvadratsætninger at

$$\begin{aligned}
2x^2 + 2 - 4x &= 2(x^2 + 1 - 2x) = 2(x-1)^2 \\
2x^2 - 2 &= 2(x^2 - 1) = 2(x-1)(x+1).
\end{aligned}$$

Hvis vi indsætter dette og reducere, får vi

$$\frac{2x^2+2-4x}{2x^2-2} = \frac{2(x-1)^2}{2(x-1)(x+1)} = \frac{x-1}{x+1}.$$



Figur 2.1:

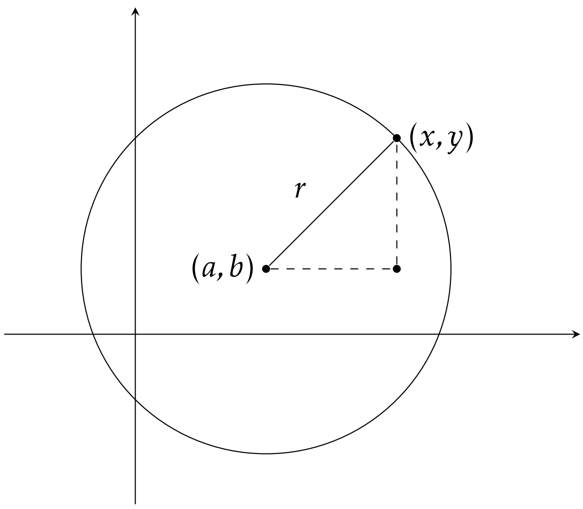
Afstandsformlen: Vi husker Pythagoras Sætning der siger at for en retvinklet trekant med sidelængderne a, b, c hvor c er hypotenusen, gælder der:

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Ved at benytte Pythagoras Sætning får vi at afstanden c mellem to punkter P og Q i et koordinatsystem som i Figur 2.1 er givet ved

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = c^2.$$

Cirklens ligning: Ved at bruge afstandsformlen kan vi nu opstille en ligning for en cirkel med centrum i punktet (a, b) og med radius r, som i Figur 2.2. Alle



Figur 2.2:

punkterne der ligger på denne cirkel vil opfylde at deres afstand til punktet (a, b) er r. Dette kan vi ved hjælp af afstandsformlen skrive som en ligning givet ved

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2,$$

hvor (x, y) er punkter på cirklen. Denne ligning kaldes for *cirklens ligning*.

Eksempler:

1. Find cirklens ligning for en cirkel med centrum i $(2,3)$ med radius $r = 4$:

   Vi indsætter $(2,3)$ og $r = 4$ i cirklens ligning og reducere

   $$(x-2)^2 + (y-3)^2 = 16.$$

2. Find centrum og radius for en cirkel med ligning $x^2 - 4x + y^2 - 2y = -4$:

   For a omskrive ligningen til noget på samme form som cirklens ligning vil vi bruge kvadratsætningerne den modsatte vej af hvad vi har gjort indtil nu. Vi ser at

   $$\begin{aligned} x^2 + 4 - 4x &= (x-2)^2 \\ y^2 + 1 - 2y &= (y-1)^2. \end{aligned}$$

   Dermed kan vi, hvis vi lægger 5 til på begge sider af den givne ligning, omskrive den til

   $$\begin{aligned} x^2 - 4x + y^2 - 2y = -4 &\Leftrightarrow x^2 - 4x + y^2 - 2y + 5 = 1 \\ &\Leftrightarrow (x^2 + 4 - 4x) + (y^2 + 1 - 2y) = 1 \\ &\Leftrightarrow (x-2)^2 + (y-1)^2 = 1^2, \end{aligned}$$

   hvilket viser at cirklen har centrum i punktet $(2,1)$ og radius $r = 1$.

3. Find centrum og radius for en cirkel med ligning $x^2 + 4x + y^2 - 4y = 1$:

   Vi benytter igen kvadratsætningerne den modsatte vej, og får at

   $$\begin{aligned} x^2 + 4 + 4x &= (x+2)^2 \\ y^2 + 4 - 4y &= (y-2)^2. \end{aligned}$$

   Dermed kan vi, hvis vi lægger 8 til på begge sider af ligningen, få at

   $$\begin{aligned} x^2 + 4x + y^2 - 4y = 1 &\Leftrightarrow x^2 + 4x + y^2 - 4y + 8 = 9 \\ &\Leftrightarrow (x^2 + 4 + 4x) + (y^2 + 4 - 4y) = 9 \\ &\Leftrightarrow (x+2)^2 + (y-2)^2 = 9 \\ &\Leftrightarrow (x-(-2))^2 + (y-2)^2 = 3^2, \end{aligned}$$

hvilket viser at cirklen har centrum i $(-2,2)$ og radius 3.

2.2.1 Opgaver

1. Reducer følgende udtryk:

   $$(x+1)^2, \qquad (2x-3)^2, \qquad (x-2)(x+2)+4, \qquad (3a-2b)^2 + 6ab.$$

2. Forkort følgende børker

   $$\frac{(x+3)^2}{2x^2+6x}, \qquad \frac{4x^2-9}{4x^2+9-12x}, \qquad \frac{2x^2+18+12x}{x^2+3x}, \qquad \frac{(x-y)^2-y^2}{2x}.$$

3. Følgende ligninger beskriver cirkler i planen. Angiv deres centrumskoordinater og radius.

$$x^2 + y^2 = 1, \qquad x^2 - 2x + y^2 + 2y - 23 = 0, \qquad x^2 + 4x + y^2 = 0.$$

4. Udregn følgende tal.

$$99^2 - 101^2, \qquad 999^2, \qquad 499^2 - 501^2, \qquad 99998^2 - 100002^2.$$

5. Reducer følgende udtryk

$$(a-2)^2 - (a-2)(a+2), \qquad \frac{x^2 - y^2}{x - y} + \frac{x^2 - y^2}{x + y}, \qquad \frac{4x^2 + 9 + 12x}{2x - 3} - \frac{24}{2 - \frac{3}{x}}.$$

6. Følgende ligninger beskriver cirkler i planen. Angiv deres centrumskoordinater og radius.

$$2x^2 - 12x + 2y^2 - 16y = 0, \qquad x^2 - x + y^2 + y = \frac{1}{2}.$$

7. Gør rede for hvordan formlen $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$ kan illustreres med Figur 2.3.

8. Gør rede for hvordan formlen $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$ kan illustreres med Figur 2.4.

9. Vis Pythagoras' Sætning $a^2 + b^2 = c^2$ ved hjælp af Figur 2.5.

10. Reducer følgende udtryk:

$$(-a - 6b)^2, \qquad (-4 - a)(-4 + a), \qquad \left(x + \frac{1}{x}\right)^2.$$

11. Vis, at

$$\frac{7a + b}{4a^2 - 4b^2} - \frac{3}{4a + 4b} - \frac{3}{4a - 4b} = \frac{1}{4a - 4b}.$$

12. Vis at

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc.$$

(Hint: lad $d = b + c$ og start med at betragte $(a + d)^2$.)

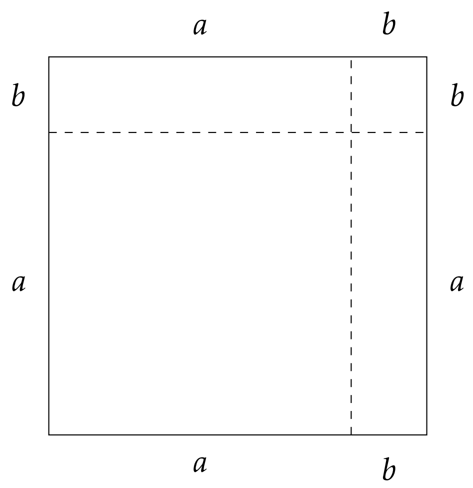
13. Lad a, b, c være reelle med $a \neq 0$. Bestem konstanter d, k således at ligningen

$$ax^2 + bx + c = 0$$

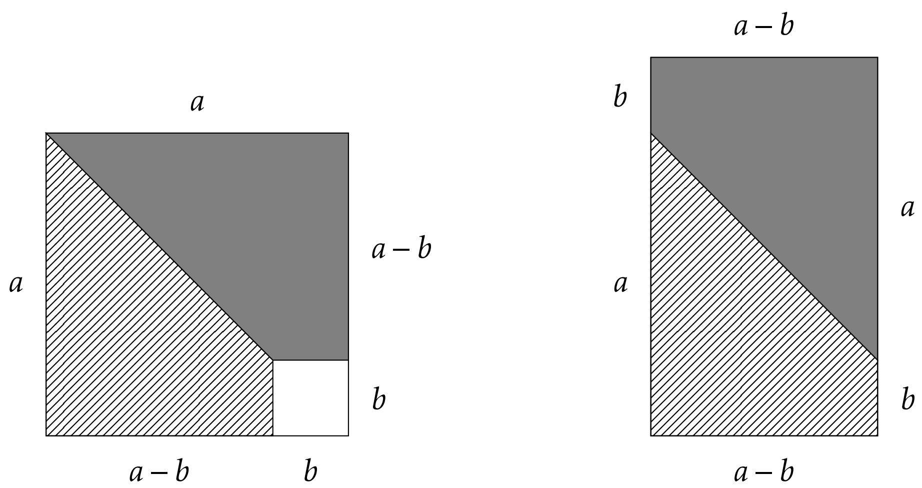
kan omskrives til

$$(x + k)^2 = \frac{d}{4a^2}.$$

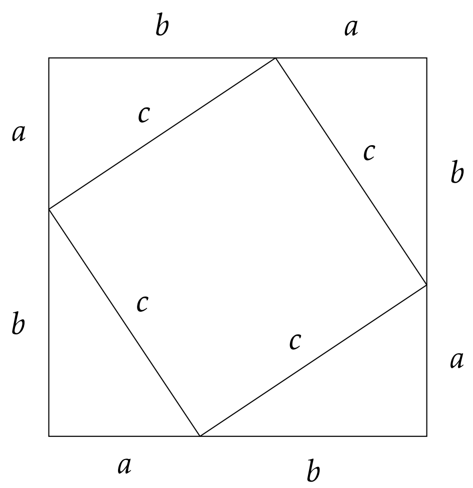
(Hint: Divider med a og brug en kvadratsætning.)



Figur 2.3: Opgave 7



Figur 2.4: Opgave 8



Figur 2.5: Opgave 9

2.3 Potenser

Når vi tænker på potenser, tænker vi på tal på formen

$$\text{potens} = \text{grundtal}^{\text{eksponent}},$$

hvor både grundtallet og eksponenten kan være alle tal, dog med den undtagelse at grundtallet og eksponenten ikke må være lig 0 på samme tid.

Hvis eksponenten er et positivt heltal, så som $1, 2, 3, \ldots$ osv., så udregner man potensen ved at gange grundtallet med sig selv det antal gange der står i eksponenten. Det kan skrives matematisk som

$$x^n = \underbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{\text{n gange}}.$$

En potens med negativ eksponent er det det samme som en brøk hvor nævneren er den samme potens men med positiv eksponent og tælleren er 1:

$$x^{-a} = \frac{1}{x^a},$$

hvor a kan være alle tal.

Hvis en potens har eksponent 0, så definerer vi potensen til at være lig med 1, altså er

$$x^0 = 1,$$

for alle tal x bortset fra 0.

Eksempler:

1. Udregn 3^4:

$$3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81.$$

2. Udregn 9871^0:

   Da eksponenten er lig med nul, har vi pr. definition at

$$9871^0 = 1.$$

3. Udregn 0^4:

$$0^4 = 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 = 0.$$

Regneregler: For potenser har vi følgende regneregler, som vi vil benytte igen og igen i de resterende kursusgange og i vil se dem i gentagende gange i jeres videre studieforløb. Det er derfor en god idé at øve sig på disse.

1. At gange to potenser med samme grundtal er det samme som grundtallet opløftet i summen af de to eksponenter:

$$x^a \cdot x^b = x^{a+b}.$$

2. At dividere to potenser med samme grundtal er det samme som at opløfte grundtallet i forskellen af de to eksponenter:

$$\frac{x^a}{x^b} = x^{a-b}.$$

3. At gange to potenser sammen med samme eksponent er det samme som at gange grundtallene sammen først og derefter opløfte i eksponenten:

$$x^a \cdot y^a = (x \cdot y)^a.$$

4. At dividere to potenser med samme eksponent er det samme som at dividere de to grundtal og så opløfte i eksponenten:

$$\frac{x^a}{y^a} = \left(\frac{x}{y}\right)^a.$$

5. At opløfte en potens i en eksponent er det samme som at op at opløfte grundtallet i de to eksponenter ganget samme:

$$(x^a)^b = x^{a \cdot b}.$$

Eksempler:

1. Udregn $\frac{(2\cdot 3)^2}{2^3}$:

$$\frac{(2\cdot 3)^2}{2^3} = \frac{2^2 \cdot 3^2}{2^3} = \frac{4\cdot 9}{8} = \frac{36}{8} = \frac{9}{2}.$$

2. Udregn $\left(\frac{2^3}{3}\right)^2$:

$$\left(\frac{2^3}{3}\right)^2 = \frac{(2^3)^2}{3^2} = \frac{2^{2\cdot 3}}{3^2} = \frac{2^6}{3^2} = \frac{64}{9}.$$

3. Reducer $\frac{(ab)^n}{a^n}$:

$$\frac{(ab)^n}{a^n} = \frac{a^n b^n}{a^n} = b^n.$$

4. Reducer $\frac{(ab)^n - a^n}{(ab)^n}$:

$$\frac{(ab)^n - a^n}{(ab)^n} = \frac{a^n b^n - a^n}{a^n b^n} = \frac{a^n(b^n - 1)}{a^n b^n} = \frac{b^n - 1}{b^n}.$$

Da $-x = (-1)\cdot x$ får vi ved at benytte regneregel 3. ovenfor, at

$$(-x)^n = ((-1)\cdot x)^n = (-1)^n \cdot x^n.$$

Det betyder at hvis vi opløfter et tal i en lige eksponent får vi et positivt tal og hvis vi opløfter et negativt tal i en ulige eksponent, så får vi et negativt tal.

Eksempel:

1. Udregn $(-x)^2$:

$$(-x)^2 = ((-1)\cdot x)^2 = (-1)^2 \cdot x^2 = x^2.$$

2.3.1 Opgaver

1. Udregn følgende potenser

$$1^{999}, \qquad 0^{123}, \qquad 2^4, \qquad 5^3, \qquad 3^4, \qquad 6^2.$$

2. Udregn følgende potenser

$$(-3)^3, \qquad 6^{-2}, \qquad \left(\frac{1}{2}\right)^3, \qquad \left(\frac{1}{3}\right)^{-1}, \qquad (-2)^4, \qquad 10^{-3}.$$

3. Udregn følgende potenser

$$\frac{5^3}{5^2}, \qquad \frac{2}{2^{-3}}, \qquad 3^2\cdot 3^2, \qquad 2^{-3}(-2)^3, \qquad \frac{3^{12}}{3^9}.$$

4. Antag at $0 \leq x \leq 1$. Bestem med udgangspunkt i Geogebra :

   (a) Hvilke værdier af a opfylder $x^a \leq x$?

   (b) Hvilke værdier af a opfylder $x^a \geq x$?

   (c) Hvad sker med x^a hvis a vokser?

   (d) Hvad sker med x^a hvis a aftager?

5. Antag at $x > 1$. Bestem med udgangspunkt i Geogebra:

   (a) Hvilke værdier af a opfylder $x^a \leq x$?

   (b) Hvilke værdier af a opfylder $x^a \geq x$?

   (c) Hvad sker med x^a hvis a vokser?

   (d) Hvad sker med x^a hvis a aftager?

6. Reducer følgende udtryk

$$(2x^2)^2, \qquad \left(\frac{(xy)^3}{x}\right)^{-3}, \qquad x^3\cdot(3x)^2x^{-4}\frac{x^0}{x^{-5}}, \qquad \frac{(x^2)^3}{x^5}.$$

7. Omskriv til tal på formen 2^n3^m.

$$6^2, \qquad 3\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^3, \qquad \frac{12^2}{2^2}, \qquad 24\cdot 12^{-2}\cdot 6^3\cdot 3^{-4}, \qquad \left(\frac{4}{9}\right)^2.$$

8. Reducer følgende udtryk

$$\frac{9a^2b^5}{3(ab)^3}, \qquad \frac{6a^3b^{-4}}{(2a^2b)^2}, \qquad \frac{2x^{-4}y^3}{(2y^2x)^{-2}}.$$

9. Vis at

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4.$$

(Hint: Brug at $(a+b)^4 = ((a+b)^2)^2$, samt kvadratsætningerne og Opgave 12 fra sidst.)

10. Reducer følgende udtryk

$$x^3(xy)^8y^{-4}zz^{-5}, \qquad \frac{xz^2y^{-3}(xyz)^{-3}}{xyz^4}, \qquad \left(\frac{xy^4z^{-1}x^2y}{zx^5y^2(xy)^3}\right)^{-2}$$

11. Omskriv til tal på formen $\left(\frac{1}{2}\right)^m 3^n$.

$$\frac{\left(\frac{3}{4}\right)^3 2^4(3^{-2})^3}{3^{-3}2^{10}}, \qquad \frac{2^3 6^3 12^3 3^{-8}}{4^2 9^3}, \qquad \frac{(12)^{-1}\frac{3}{2^3}2^{-1}}{6^2}.$$

2.4 Rødder

Vi har tidligere betragtet potenser og ligesom at der for plus og gange findes regneoperationer der gør det modsatte, henholdsvis minus og divider, er der en invers (modsat) regneoperation af potenser, som kaldes rødder.

Når vi snakker om rødder tænker vi på tal på formen

$$\text{rod} = \sqrt[\text{rodeksponent}]{\text{grundtal}}.$$

Vi siger at y er den n'te rod af x hvis vi kan opløfte y i n og få x, eller sagt på en anden måde

$$y = \sqrt[n]{x} \quad \text{hvis} \quad y^n = x,$$

hvor x kan være alle tal og n kan være alle positive heltal. Bemærk at dette betyder at hvis man opløfter et tal i n og dernæst tager den n'te rod (eller i modsatte rækkefølge), så vil de to regneoperationer gå ud med hinanden. Vi vil kun betragte rødder med negativ grundtal hvis n er ulige.

Kvadratrødderne af a er de b der opfylder at $b^2 = a$. Det betyder at hvis b er en kvadratrod så vil $-b$ også være en kvadratrod da $(-b)^2 = b^2 = a$. Hvis man bliver spurgt om at finde kvadratrodden af et tal, vil man medmindre der specifikt er angivet andet, altid nøjes med at give den positive værdi.

Hvis $n = 2$ vil vi ofte bare skrive $\sqrt{a}$.

Eksempler:

1. Udregn $\sqrt{81}$:

$$\text{Da} \quad 81 = 9^2 \quad \text{så er} \quad \sqrt{81} = 9.$$

2. Udregn $\sqrt[3]{-8}$:

$$\text{Da} \quad -8 = (-2)^3 \quad \text{så er} \quad \sqrt[3]{-8} = -2.$$

3. Udregn $\sqrt[4]{81}$:

$$\text{Da} \quad 81 = 3^4 \quad \text{så er} \quad \sqrt[4]{81} = 3.$$

Regneregler: Vi har følgende regneregler for rødder og igen er et utrolig vigtigt at man forstår at bruge disse, da de vil blive brugt igen og igen senere i kurset.

1. Vi har følgende sammenhæng mellem potenser og rødder:

$$\sqrt[n]{x} = x^{1/n}.$$

2. Mere generelt har vi:

$$\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{x})^m$$

3. At gange to n'te rødder sammen er det samme som at tage den n'te rod af de to grundtal ganget sammen:

$$\sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{x \cdot y}.$$

4. At dividere to n'te rødder med hinanden er det samme som at dividere de to grundtal og så tage den n'te rod:

$$\frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}} = \sqrt[n]{\frac{x}{y}}.$$

Eksempler:

1. Udregn $\sqrt[3]{5^6}$:

$$\sqrt[3]{5^6} = 5^{\frac{6}{3}} = 5^2 = 25.$$

2. Udregn $\sqrt{144}$:

$$\sqrt{144} = \sqrt{9 \cdot 16} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{16} = 3 \cdot 4 = 12.$$

3. Udregn $\sqrt{\frac{144}{81}}$:

$$\sqrt{\frac{144}{81}} = \frac{\sqrt{144}}{\sqrt{81}} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}.$$

4. Reducer $\sqrt[3]{\frac{(\sqrt{ab})^6}{b^3}}$:

$$\sqrt[3]{\frac{(\sqrt{ab})^6}{b^3}} = \sqrt[3]{\frac{(\sqrt{ab})^{2\cdot 3}}{b^3}} = \sqrt[3]{\frac{\left((\sqrt{ab})^2\right)^3}{b^3}} = \sqrt[3]{\frac{(ab)^3}{b^3}} = \sqrt[3]{\frac{a^3b^3}{b^3}} = \sqrt[3]{a^3} = a.$$

2.4.1 Opgaver

1. Udregn følgende

$$\sqrt{4}, \qquad \sqrt[3]{125}, \qquad \sqrt{\frac{1}{81}}, \qquad \sqrt[4]{81}, \qquad \sqrt{\sqrt{\sqrt{2^{16}}}}, \qquad \sqrt{10000}.$$

2. Omskriv følgende brøker så de ikke indeholder rødder i nævneren (reducer efterfølgende mest muligt).

$$\frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad \frac{2}{\sqrt{2}}, \qquad \frac{4}{\sqrt{8}}, \qquad \frac{9}{\sqrt{3}}, \qquad \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{8}}, \qquad \frac{7}{\sqrt[3]{7}}.$$

3. Udregn følgende tal.

$$\sqrt{2}(1+\sqrt{2}), \qquad 3\sqrt{8}+\sqrt{2}(3-2\sqrt{2}), \qquad (\sqrt{6}-\sqrt{5})(\sqrt{6}+\sqrt{5})$$

4. Omskriv fra rødder til potens.

$$\sqrt[3]{x^4}, \qquad \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}, \qquad \sqrt[4]{\frac{x^2y^3}{(2\sqrt{x})^3}}, \qquad \frac{\sqrt{x}}{x}, \qquad \sqrt{(x\sqrt{x^3})^2}$$

5. Reducer følgende udtryk

$$\frac{\sqrt{8x}}{\sqrt{2}}, \qquad \frac{\sqrt{27}}{3}, \qquad \frac{\sqrt{7}x-\sqrt{14}}{x-\sqrt{2}}, \qquad \frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}+\frac{2\sqrt{xy}}{x-y}.$$

6. Udregn følgende tal

$$\sqrt[3]{8^2}, \qquad 27^{\frac{2}{3}}, \qquad 4^{\frac{3}{4}}, \qquad 1000^{\frac{5}{3}}, \qquad \sqrt[3]{-125}.$$

7. Vis at

$$1 \pm \sqrt{3} = \sqrt{4 \pm 2\sqrt{3}}.$$

8. Udregn følgende tal

$$\frac{2\sqrt{14}+4\sqrt{63}}{\sqrt{2((2\sqrt{2})^2+10)}}, \qquad \frac{4-2\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{6}}, \qquad (4\sqrt{6}-3\sqrt{24})^2.$$

(Hint til den midterste: Brug Opgave 7.)

9. Reducer følgende udtryk:

$$\sqrt[12]{a^3b^4}\sqrt[3]{a^2b^3}, \qquad \frac{a^{1/3}a^{3/4}}{a^{3/6}a^{5/6}}, \qquad \frac{a^{1/2}a^{-1}(\sqrt{a})^3}{(a^8)^{1/2}}.$$

2.5 Ligninger og uligheder

En ligning består af to udtryk, en højre- og en venstreside, hvor mindst en af siderne indeholder en ubekendt variabel som vi gerne vil bestemme, samt et lighedstegn der binder de to sider sammen. Vores mål med ligninger er at bestemme alle de tal, som når vi sætter dem ind på den ubekendte variables plads gør at venstre siden er lig med højre siden. Dette kaldes også at løse ligningen.

Eksempel:

1. Løs ligningen $x + 2 = 7$:

   Vi ser at $x = 5$ er den eneste løsning til ligningen.

2. Løs ligningen $x = \sqrt{-2}$:

   Vi husker fra tidligere kursusgange at dette er ensbetydende med at finde de x der opfylder at $x^2 = -2$, men da alle tal opløftet i anden giver noget positivt, har denne ligning ingen reelle løsning.

3. Løs ligningen $x^2 = 9$:

   Vi ser at $x = 3$ og $x = -3$ er de eneste løsninger til ligningen.

4. Løs ligningen $x + 1 = \frac{1}{2}(2x + 2)$:

   Hvis vi reducere højresiden får vi

   $$\frac{1}{2}(2x+2) = x + 1,$$

   hvilket er sandt for alle x. Denne ligning har derfor uendeligt mange løsninger.

Disse eksempler er alle meget ligetil og vi kan ved at betragte dem aflæse løsningerne. Det er dog ikke altid muligt og i disse tilfælde vil vi gerne kunne reducere vores ligning til en ny ligning med præcis samme løsningsmængde, men hvor vi nemt kan aflæse løsningerne. Sådanne ligninger kaldes ækvivalente ligninger og noteres med en biimplikationspil $\Leftrightarrow$.

Regneregler: Når vi reducerer vores højre- og venstreside kan vi tænke på det som at de to er lig med hinanden. Det betyder at hvis vi gør noget på den ene side, så for at beholde ligheden er vi nød til at gøre præcis det samme på den anden side.

1. Vi må lægge tal til og trække fra, så længe vi gør det samme på begge sider af lighedstegnet, f.eks.:

   $$a + x = b \Leftrightarrow a + x \pm c = b \pm c,$$

   hvor a, b, c kan være alle tal.

2. Vi må gange begge sider med det samme tal, med undtagelse af 0, f.eks.:

   $$a + x = b \Leftrightarrow (a + x)c = bc \Leftrightarrow ac + xc = bc.$$

3. Vi må dividere begge sider med det samme tal, f.eks.:

   $$a + x = b \Leftrightarrow \frac{a+x}{c} = \frac{b}{c} \Leftrightarrow \frac{a}{c} + \frac{x}{c} = \frac{b}{c}.$$

Når vi løser ligninger vil vi gerne samle de ubekendte variable på den ene side, så vores reducerede ligning kommer til at ligne de nemme eksempler fra tidligere.

Eksempler:

1. Løs ligningen $4x+7=3(x+8)$:

   Vi ganger først ind i parentesen på højresiden og derefter isolerer vi x på venstresiden:

$$\begin{aligned} 4x+7=3(x+8)=3x+24 &\Leftrightarrow 4x+7-7=3x+24-7 \\ &\Leftrightarrow 4x=3x+17 \\ &\Leftrightarrow 4x-3x=3x+17-3x \\ &\Leftrightarrow x=17. \end{aligned}$$

2. Løs ligningen $\frac{2x+1}{4x}=3$:

   Vi ganger først med nævneren på venstresiden for at få brøken væk og isolerer derefter x på højresiden:

$$\begin{aligned} \frac{2x+1}{4x}=3 &\Leftrightarrow \frac{2x+1}{4x}\cdot 4x=3\cdot 4x \\ &\Leftrightarrow 2x+1=12x \\ &\Leftrightarrow 2x+1-2x=12x-2x \\ &\Leftrightarrow 1=10x \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{10}=\frac{10x}{10} \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{10}=x. \end{aligned}$$

3. Løs ligningen $\pi x=3-2x$:

   Vi isolere x på venstresiden og trække x udenfor en parentes:

$$\begin{aligned} \pi x=3-2x &\Leftrightarrow \pi x+2x=3-2x+2x \\ &\Leftrightarrow \pi x+2x=3 \\ &\Leftrightarrow x(\pi+2)=3 \\ &\Leftrightarrow \frac{x(\pi+2)}{\pi+2}=\frac{3}{\pi+2} \\ &\Leftrightarrow x=\frac{3}{\pi+2}. \end{aligned}$$

Nulreglen: Det er klart at hvis vi har to tal a,b hvor ingen af dem er 0, så giver $a\cdot b$ også noget der er forskelligt fra 0. Det betyder at hvis vi har en ligning hvor to tal ganget sammen skal give 0, så må det ene af de to tal være 0. Det kan vi også skrive mere matematisk:

$$\text{Hvis } a\cdot b=0, \text{ så er } a=0 \text{ eller } b=0.$$

Denne regel kaldes nulreglen og den er ekstremt nyttig når man skal løse ligninger hvor man kan trække den ubekendte variabel udenfor en parentes.

Eksempler:

1. Løs ligningen $2x^2 + 3x = 0$:

   Vi trækker x udenfor en parentes:

   $$2x^2 + 3x = 0 \Leftrightarrow x(2x + 3) = 0.$$

   Ved at bruge nulreglen ser vi nu at løsningerne er $x = 0$ eller $2x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-3}{2}$.

Uligheder Hvis vi erstatter lighedstegnet i en ligning med et ulighedstegn får vi en ulighed. Ligesom med ligninger vil vi gerne bestemme alle de tal vi kan sætte ind på den ubekendtes plads i vores ulighed, så den er sand. Det at løse en ulighed minder meget om at løse ligninger, men med den forskel at hvis vi ganger med et negativt tal på begge sider, så skal vi vende ulighedstegnet om. Det giver god mening da hvis vi f.eks. har uligheden $4 \leq 5$ og vi trækker først 5 fra på begge sider og dernæst trækker 4 fra på begge sider, så får vi

$$\begin{aligned} 4 \leq 5 &\Leftrightarrow 4 - 5 \leq 5 - 5 \\ &\Leftrightarrow 4 - 5 - 4 \leq 5 - 5 - 4 \\ &\Leftrightarrow -5 \leq -4. \end{aligned}$$

Regneregler: Det giver os følgende regneregler til at løse uligheder:

1. Vi må lægge tal til og trække fra, så længe vi gør det samme på begge sider af ulighedstegnet, f.eks.:

   $$a + x \leq b \Leftrightarrow a + x \pm c \leq b \pm c,$$

   hvor a, b, c kan være alle tal.

2. Vi må gange begge sider med det samme positive tal, f.eks.:

   $$a + x \leq b \Leftrightarrow (a + x)c \leq bc \Leftrightarrow ac + xc \leq bc,$$

   hvor c er et positivt tal.

3. Vi må gange begge sider med det samme negative tal, hvis vi vender ulighedstegnet, f.eks.:

   $$a + x \leq b \Leftrightarrow (a + x)d \geq bd \Leftrightarrow ad + xd \geq bd,$$

   hvor d er et negativt tal.

4. Vi må dividere begge sider med det samme positive tal, f.eks.:

   $$a + x \leq b \Leftrightarrow \frac{a + x}{c} \leq \frac{b}{c} \Leftrightarrow \frac{a}{c} + \frac{x}{c} \leq \frac{b}{c},$$

   hvor c er et positivt tal.

5. Vi må dividere begge sider med det samme negative tal, hvis vi vender ulighedstegnet, f.eks.:

   $$a + x \leq b \Leftrightarrow \frac{a + x}{d} \geq \frac{b}{d} \Leftrightarrow \frac{a}{c} + \frac{x}{d} \geq \frac{b}{d},$$

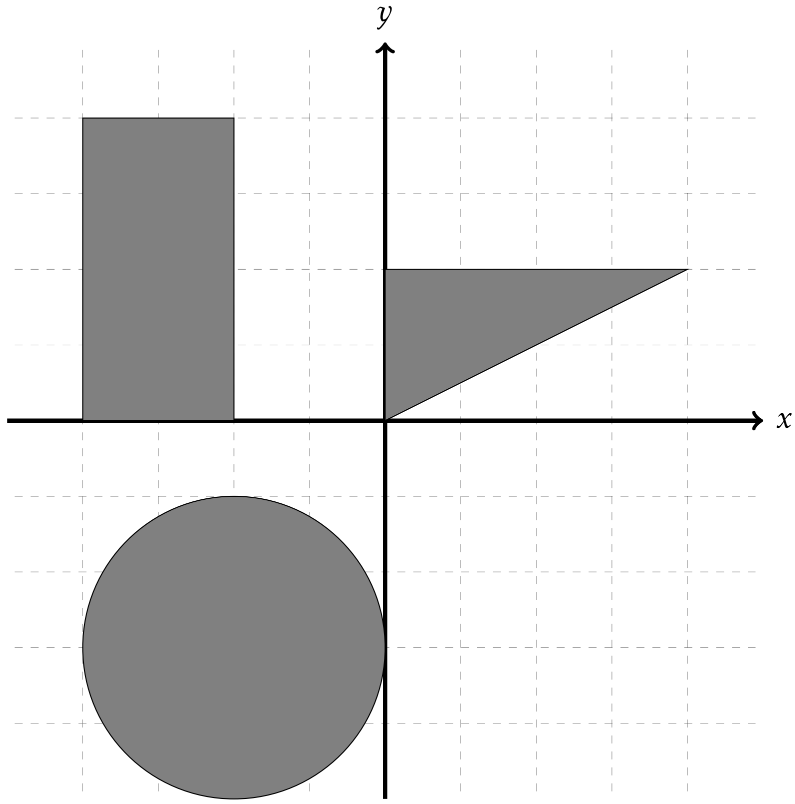
   hvor d er et negativt tal.

Eksempler:

1. Løs uligheden $4+x \le 5$:
   Vi isolerer x på venstresiden og får at $x \le 1$.
2. Løs uligheden $-2x+4 \le 3x$:
   Vi isolerer x på højresiden og får at $4 \le 5x \Leftrightarrow \frac{4}{5} \le x$.

2.5.1 Opgaver

1. Løs ligningerne
$$8x+2=26, \qquad -3x-5=4, \qquad -6x+7=-29, \qquad 8x+11=5.$$
2. Løs ligningerne
$$3x+7=-2x+2, \qquad 3(x-4)+2=2(x+1), \qquad -3x-4=-x+3.$$
3. Løs ulighederne
$$2x<4-5x, \qquad x-3>2-x, \qquad 2x-3 \ge 2x, \qquad -2x \le 2(x-7).$$
4. Betragt ligningen
$$ax+4=-x+b.$$
   Brug Geogebra til at visualisere alle værdier af a og b så at
   (a) Ligningen har præcis en løsning.
   (b) Ligningen har ingen løsning.
   (c) Ligningen har uendeligt mange løsninger.
5. Løs ligningerne
$$3(x-2)+2=3x-8, \qquad -(x+1)+2x=2(x-1)-x+1$$
6. Løs ligningerne
$$\frac{1}{x-2}=5, \qquad \frac{x^2+8}{x+2}=x+2, \qquad \frac{5}{x-1}=\frac{7}{x}, \qquad \frac{x^2+9-6x}{2x^2-6x}=1.$$
7. Løs ligningerne
$$\frac{2}{3}\left(x-\frac{5}{2}\right)=\frac{3}{6}, \qquad \frac{3}{8}(4x-2)=-\frac{1}{3}\left(x-\frac{3}{4}\right)$$
8. Løs ligningerne
$$\sqrt{2}x+4=8, \qquad \pi(x-1)=\sqrt{2}x+3, \qquad \sqrt{2}(2\sqrt{2}x-\sqrt{8})=2x+1.$$
9. Angiv hvilken figur i planen afgrænses af følgende uligheder, for polygoner angiv hjørnernes koordinater, for cirkelskiver angiv radius og centrumskoordinater.



Figur 2.6: Find uligheder der beskriver de grå områder.

(a) $0 \le x \le 2, 0 \le y \le 2$

(b) $x^2 + y^2 \le 4$

(c) $0 \le x \le 2, 0 \le y \le 2x + 2$.

10. Opstil uligheder der beskriver de grå områder der ses i Figur 2.6

11. Vis at

$$ab \le \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}.$$

(Hint: Betragt $(a-b)^2$.) Find derefter tal a, b, c, d så

$$ab = \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}, \quad \text{og} \quad cd < \frac{c^2}{2} + \frac{d^2}{2}.$$

12. Vis at

$$\sqrt{a+b} \le \sqrt{a} + \sqrt{b},$$

for $a, b \ge 0$. (Hint: betragt $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2$). Find derefter $a, b, c, d \ge 0$ således at

$$\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}, \quad \text{og} \quad \sqrt{c+d} < \sqrt{c} + \sqrt{d}.$$

2.6 Andengradsligninger og to ligninger med to ubekendte

Indtil videre har vi for det meste kun betragtet førstegradsligninger, som er ligninger på formen $ax+b=0$, hvor a kan være et hvilket som helst tal med undtagelse af 0 og c kan være alle tal. Det næste vi skal undersøge er andengradsligninger, som er på formen $ax^2+bx+c=0$, hvor a kan være alle tal bortset fra 0, og b,c kan være alle tal.

Vi finder løsningerne til en andengradsligning ud fra formlen

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{d}}{2a},$$

hvor a,b,c er de samme tal som indgår i den andengradsligning vi er ved at løse og $d = b^2-4ac$ kaldes diskriminanten. Løsningerne til en andengradsligning kaldes ofte for rødderne af andengradsligningen.

Vi ser først på antallet af løsninger til en andengradsligning:

1. Hvis $d>0$ så har andengradsligningen præcis 2 løsninger, givet ved

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \qquad \text{og} \qquad x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

2. Hvis $d=0$ så har andengradsligningen præcis 1 løsning, givet ved

$$x = \frac{-b}{2a}.$$

3. Hvis $d<0$ så har andengradsligningen ingen reelle løsninger (I modsætning til hvad mange får at vide i gymnasiet, så har den stadig løsninger, men dem vil I komme til at se i kurset *Calculus*, og vi vil ikke komme mere ind på dem her).

Eksempler:

1. Løs andengradsligningen $x^2+5x+4=0$:

   Vi ser at $a=1$, $b=5$ og $c=4$. Dernæst udregner vi diskriminanten

$$d = b^2-4ac = 5^2-4\cdot 1\cdot 4 = 25-16 = 9.$$

   Indsætter vi nu i løsningsformlen får vi

$$x = \frac{-b\pm\sqrt{d}}{2a} = \frac{-5\pm\sqrt{9}}{2\cdot 1} = \frac{-5\pm 3}{2} = \begin{cases} -1 \\ -4 \end{cases}.$$

2. Løs andengradsligningen $x^2-3x+10=8$:

   Før vi kan bruge løsningsformlen skal vi have højresiden til at være lig nul

$$x^2-3x+10=8 \Leftrightarrow x^2-3x+2=0.$$

   Vi ser at $a=1$, $b=-3$ og $c=2$, hvilket medfører at

$$d = b^2-4ac = (-3)^2-4\cdot 1\cdot 2 = 9-8 = 1.$$

   Det giver os rødderne

$$x = \frac{-b\pm\sqrt{d}}{2a} = \frac{-(-3)\pm\sqrt{1}}{2\cdot 1} = \frac{3\pm 1}{2} = \begin{cases} 2 \\ 1 \end{cases}.$$

Specialtilfælde: Hvis vi har nogle bestemte andengradspolynomier, så kan vi simplificere den generelle løsning.

1. Hvis $b = 0$ så har vi andengradsligningen $ax^2 + c = 0$ det kan vi omskrive for at finde rødderne

   $$ax^2 + c = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{-c}{a} \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{-c}{a}},$$

   givet at fortegnet på a og c er forskellige.

2. Hvis $c = 0$ har vi andengradsligningen $ax^2 + bx = 0$ og ved at sætte x udenfor en parentes får vi

   $$ax^2 + bx = 0 \Leftrightarrow x(ax + b) = 0.$$

   Nulreglen giver så at rødderne er

   $$x_1 = 0 \qquad \text{og} \qquad x_2 = \frac{-b}{a}.$$

Faktorisering: Hvis vi har en andengradsligning $ax^2 + bx + c = 0$, så kan man omskrive venstresiden til

$$ax^2 + bx + c = a(x - r_1)(x - r_2),$$

hvor r_1 og r_2 er rødder til den givne andengradsligning. Dette kaldes at faktorisere sin andengradsligning. Det viser også at enhver andengradsligning er entydigt bestemt ud fra a samt sine rødder, da vi, såfremt vi kender disse, kan genskabe den andengradsligning de kommer fra.

Eksempel:

1. Reducer udtrykket $\dfrac{2x^2 + 2x - 4}{x - 1}$.

   Først finder vi rødderne for vores andengradspolynomium. Vi har at $d = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-4) = 36$, hvilket medfører at vi har rødderne

   $$x = \frac{-b \pm \sqrt{d}}{2a} = \frac{-2 \pm 6}{4} = \begin{cases} 1 \\ -2 \end{cases}.$$

   Det betyder at vi kan faktorisere vores andengradspolynomium til

   $$2x^2 + 2x - 4 = 2(x - 1)(x + 2).$$

   Nu kan vi så reducere vores udtryk til

   $$\frac{2x^2 + 2x - 4}{x - 1} = \frac{2(x - 1)(x + 2)}{x - 1} = 2(x + 2) = 2x + 4.$$

To ligninger med to ubekendte: Indtil videre har vi kun betragtet én ligning med en ubekendt (ofte x) ad gangen. Det er ikke altid muligt at løse en ligning med flere ubekendte, men hvis vi har lige så mange ligninger som ubekendte så er det ofte muligt at løse dem. Vi vil her betragte to forskellige metoder til at løse sådanne ligningssystemer; *substitutionsmetoden* og *lige store koefficienters metode*. Vi vil primært holde os til to ligninger med to ubekendte men i kurset *Lineær Algebra* vil i lære hvordan man effektivt kan løse flere ligninger med flere ubekendte.

Vi vil løse de følgende to ligninger med to ubekendte

$$2x + y + 3 = 2y - 4 \tag{2.1}$$

$$4x + 2 = 5y \tag{2.2}$$

først ved substitutionsmetoden og derefter ved brug lige store koefficienters metode.

I substitutionsmetoden starter vi med at isolere den ene af de ubekendte variable i en af ligningerne. Hvis vi starter med at isolere x i (2.1) får vi

$$\begin{aligned} 2x + y + 3 = 2y - 4 &\Leftrightarrow 2x = y - 7 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{y-7}{2}. \end{aligned}$$

Det udtryk kan vi så indsætte i (2.2) så vi får én ligning med en ubekendt som vi kan løse

$$\begin{aligned} 4x + 2 = 5y &\Leftrightarrow 4 \cdot \frac{y-7}{2} + 2 = 5y \\ &\Leftrightarrow 2y - 14 + 2 = 5y \\ &\Leftrightarrow -12 = 3y \\ &\Leftrightarrow y = -4. \end{aligned}$$

Indsætter vi nu dette udtryk for y i (2.2) får vi

$$\begin{aligned} 4x + 2 = 5 \cdot (-4) &\Leftrightarrow 4x + 2 = -20 \\ &\Leftrightarrow 4x = -22 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{-22}{4} \\ &\Leftrightarrow x = \frac{-11}{2}, \end{aligned}$$

hvilket betyder at løsningen til vores to ligninger med to ubekendte er $x = \frac{-11}{2}$ og $y = -4$. Bemærk at vi kunne også have indsat vores udtryk for y i (2.1).

Idéen i lige store koefficienters metode er igen at omskrive de to ligninger til én ligning med en ubekendt, som vi godt kan løse og så derefter indsætte den variabel vi har fundet i en af de to givne ligninger, så vi igen har én ligning med én ubekendt bare med den anden ubekendte variabel.

Fra (2.1) har vi, at $2x + y + 3 = 2y - 4$, og ganger vi med 2 på begge sider får vi at $4x + 2y + 6 = 4y - 8$. Vi husker at vi gerne må trække noget fra på den ene side af en ligning, så længe vi trækker det samme fra på den anden side. Det betyder, at hvis vi trækker $4x + 2y + 6$ fra på den ene side i (2.2) så kan vi trække $4y - 8$ fra på den anden side uden at ændre ved vores lighed. Det giver

$$\begin{aligned} 4x + 2 - (4x + 2y + 6) = 5y - (4y - 8) &\Leftrightarrow 4x + 2 - 4x - 2y - 6 = 5y - 4y + 8 \\ &\Leftrightarrow -4 - 2y = y + 8 \\ &\Leftrightarrow -12 = 3y \\ &\Leftrightarrow y = -4. \end{aligned}$$

Grunden til at vi gangede (2.1) med 2 før vi trak den fra (2.2), var for at få det samme til til at stå foran x i begge ligninger. Det medførte at alle x'erne gik ud med hinanden i (2.2), og vi fik derfor én ligning med en ubekendt, som vi godt kunne løse. Vi mangler stadig at finde x, men det kan vi gøre ved at indsætte $y = -4$ i enten (2.1) eller (2.2) og så isolere x. Indsætter vi $y = -4$ i (2.2) får vi

$$\begin{aligned} 4x + 2 = 5 \cdot (-4) &\Leftrightarrow 4x + 2 = -20 \\ &\Leftrightarrow 4x = -22 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{-11}{2}. \end{aligned}$$

Det betyder at løsningen til vores to ligninger med to ubekendte er $x = \frac{-11}{2}$ og $y = -4$.

2.6.1 Opgaver

1. Opskriv en andengradsligning på formen $x^2 + bx + c = 0$ med rødderne
$$2 \text{ og } -1, \qquad \frac{1}{2} \text{ og } 3, \qquad -\sqrt{2} \text{ og } \sqrt{2}, \qquad \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ og } \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

2. Løs ligningerne
$$x^2 = 36, \qquad (x-1)(x+2) = 0, \qquad 2x^2 + 3x + 1 = 0, \qquad x^2 + 4x + 3 = 0.$$

3. Løs ligningssystemet
$$\begin{aligned} x + y &= 4 \\ \frac{1}{2}x + 1 &= 9 - 2y \end{aligned}$$

4. Løs ligningerne
$$2x^2 - 3x = 0, \qquad 3x^2 - 21x = 0, \qquad 5x^2 = 2x, \qquad \frac{(11x)^2}{49} = 1.$$

5. Løs ligningssystemet
$$\begin{aligned} 2y - x &= 3 \\ 4y - 5x &= -3 \end{aligned}$$

6. Forkort følgende brøker
$$\frac{x^2 - 36}{x^2 - 5x - 6}, \qquad \frac{(x+1)(x^2 - 4x + 3)}{x^2 - 2x - 3}, \qquad \frac{x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2}.$$

7. Løs ligningerne
$$-\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x = -2, \qquad -2x^2 + 6x = -8, \qquad \frac{5}{2}x^2 - 7x + 1 = 0, \qquad 4x^2 = 100.$$

8. Hvor skal man bøje en $\frac{7}{10}m$ lang stang i en ret vinkel for at afstanden mellem endepunkterne bliver:

(a) $\frac{1}{2}m$,

(b) $\frac{3}{5}m$.

9. Løs ligningessystemet

$$\begin{aligned} x-2y+5z &= 24\\ -x+3y-3z &= -6\\ -y-z &= -12 \end{aligned}$$

10. Løs ligningerne

$$x+7-\frac{5}{x-2}=5, \qquad \frac{3}{8}+\frac{1}{x}=-\frac{1}{2x^2}, \qquad -\frac{1}{12x}+3x=0.$$

11. Løs ligningerne

$$\frac{4}{x^2}+\frac{16}{x-3}=0, \qquad x=3+\frac{70}{x}, \qquad \frac{1}{x}-\frac{3}{x^2}=0.$$

12. For hvilke b har ligningen

$$2x^2+bx+2=0,$$

præcis en løsning?

13. For hvilke a har ligningen

$$ax^2-4x+1=0$$

ingen reelle løsninger?

14. Bestem de reelle løsninger til ligningerne

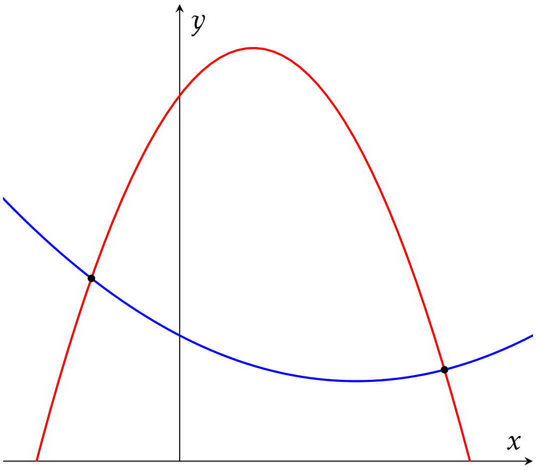
$$x^4-x^2-12=0, \qquad x^4=18+7x^2, \qquad x^6-7x^3-8=0.$$

(Hint: Lad $y=x^2$ i de to første ligninger og $y=x^3$ i den sidste.)

15. På Figur 2.7 ses graferne for andengradspolynomierne $\frac{1}{8}x^2-\frac{1}{2}x+\frac{11}{8}$ og $-\frac{3}{4}x^2+\frac{5}{4}x+4$. Bestem polynomiernes skæringspunkter.

16. Løs ligningssystemet nedenfor både vha. substitution og lige store koefficienters metode.

$$\begin{aligned} x+y+z+w &= 34\\ -x+y &= 1\\ -y+z &= 1\\ -z+w &= 1 \end{aligned}$$



Figur 2.7: Opgave 15

Figur 2.8: Opgave 17

17. På Figur 2.8 ses et linjestykke som er opdelt således at længderne a og b opfylder

$$\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a}.$$

Bestem forholdet $\phi = \frac{a}{b}$.

(Hint: gang ligningen igennem med ϕ og reducer til $\phi^2 = \phi + 1$.)

18. Papir i A format er designet således at hvis et ark deles på midten, som illustreret i Figur 2.9, så gælder at

$$\frac{b}{a} = \frac{\frac{a}{2}}{b}.$$

Hvis $A(n)$ betegner arealet af et ark An papir i m^2 så gælder at

$$A(n) = \frac{1}{2^n}.$$

(a) Bestem arealet af et A4 ark.

(b) Bestem sidelængderne af et A4 ark.

(c) Vis at sidelængderne for et An ark er givet ved

$$2^{\frac{-2n-1}{4}}, \quad \text{og} \quad 2^{\frac{-2n+1}{4}}.$$

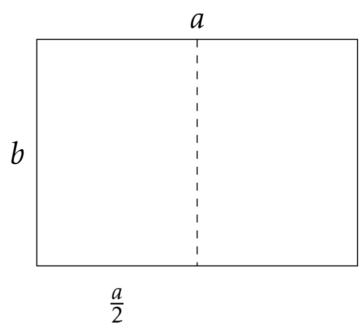
19. Vis at løsningerne til andengradsligningen

$$ax^2 + bx + x = 0$$

hvor $a \neq 0$, er givet ved

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

(Hint: Brug Opgave 13.)



Figur 2.9: A papirformat

Kapitel 3

Funktioner

3.1 Funktioner: Injektivitet, surjektivitet, summer og produkter

Vi vil nu se nærmere på hvad en funktion egentlig er, for at gøre dette starter vi med at kigge kort på mængder. Lad X og Y være to mængder, det kan f.eks. være et interval som $[0,1]$ eller $(0,1)$, der henholdsvis består af alle tal der opfylder $0 \leq x \leq 1$ og $0 < x < 1$, eller en endelig mængde $\{a,b,c,d\}$. Hvis vi lader $X = \{1,2,3,4\}$ så siger vi f.eks. at 2 ligger i X og notere det med $2 \in X$ mens vi siger at 5 ikke ligger i X hvilket vi notere $5 \notin X$. Hvis vi vil fjerne et element i en mængde skriver vi f.eks. $X \setminus 3 = \{1,2,4\}$. Derudover kan vi også tage en delmængde af en allerede givet mængde, hvilket vi notere f.eks. med $\{1,2\} \subset X$. For at simplificere vores notation vil vi ofte skrive intervallet $(-\infty,\infty)$ som $\mathbb{R}$ og kalde det for de reelle tal.

Vi siger at f er en funktion der går mellem X og Y, skrevet $f : X \to Y$, hvis $f(x)$ giver præcis et element i Y for alle $x \in X$. Vi kalder X for domænet (også kaldet definitionsmængden) af f og Y for codomænet af f. Bemærk, at det betyder at hvis f sender et element fra X over i flere forskellige elementer i Y så er f ikke en funktion, men en funktion kan godt sende flere elementer fra X over i det samme element i Y.

Eksempler:

1. Lad $f : \{1,2,3\} \to \{1,2,3,4,5,6\}$ være givet ved $f(x) = 2x$, så er f en funktion da ethvert element i X bliver sendt over i præcis et element af Y. Bemærk, at vi behøver ikke ramme alle elementer i Y.

2. Lad $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være givet ved $f(x) = x^2$ så er f en funktion.

3. Lad $X = \{a,b,c,d\}$ og $Y = \{1,2,\pi,\text{abe}\}$ og bestem en function $f : X \to Y$. Det eneste der skal gælde for en funktion er, at den tager ethvert element i sit domæne og sender over i præcis et element i codomænet. Det betyder at en mulig funktion f er givet ved, $f(a) = 1$, $f(b) = \pi$, $f(c) = \text{abe}$ og $f(d) = 2$. Dette kan også skrives som en "gaffel funktion" på følgende måde:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x = a \\ \pi & x = b \\ \text{abe} & x = c \\ 2 & x = d \end{cases}.$$

Bemærk, at hvis vi f.eks. havde sat både $f(a) = 1$ og $f(a) = 2$ så havde f ikke været en funktion!

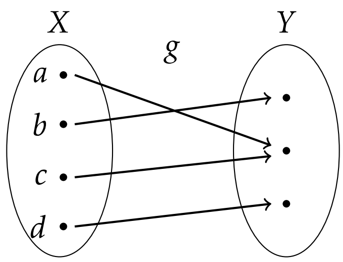
Injektiv og surjektiv: Hvis $f: X \to Y$ er en funktion, så kalder vi alle de elementer i Y som bliver ramt af f for værdimængden af f. Bemærk, at vi på intet tidspunkt har sagt at vi skal ramme alle elementer i Y, derfor er værdimængden af f en delmængde af codomænet for f. Vi siger derfor at en funktion f er surjektiv hvis der gælder at værdimængden og codomænet for f er den samme mængde, som det er tilfælder i Figur 3.1.

Derudover har vi at hvis en funktion opfylder at der ikke er to forskellige elementer i X der bliver sendt over i det samme element i Y, også skrevet

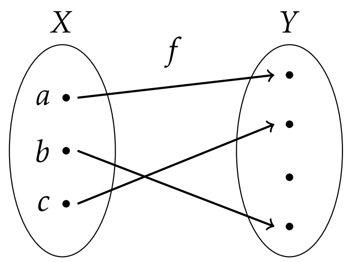
$$f(x_1) = y \text{ og } f(x_2) = y \quad \Rightarrow \quad x_1 = x_2,$$

så siges funktionen at være injektiv, som f.eks. i Figur 3.2.

Hvis en funktion er både injektiv og surjektiv, så kalder vi den for en bijektiv funktion.



Figur 3.1: En surjektiv funktion



Figur 3.2: En injektiv funktion

Eksempler:

1. Hvis $X = \{1,2,3,4\}$ og $Y = \{3,4,5,6,7\}$ så er funktionen $f: X \to Y$ givet ved $f(x) = x+2$ injektiv da ethvert $x \in X$ bliver sendt over i forskellige $y \in Y$ men den er ikke surjektiv, da 7 ikke bliver ramt af noget $x \in X$.

2. Vi betragtede tidligere funktionen $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ givet ved x^2, denne funktion er hverken injektiv eller surjektiv da $-x$ og $+x$ bliver sent i det samme y, og vi rammer ikke hele $\mathbb{R}$ da $f(x)$ altid er positiv. Ved at ændre på domænet og codomænet kan vi gøre funktionen henholdsvis injektiv eller surjekt. F.eks. er funktionen $f: [0,\infty) \to \mathbb{R}$ injektiv og $f: \mathbb{R} \to [0,\infty)$ er surjektiv. Vi ser endvidere at hvis vi har $f: [0,\infty) \to [0,\infty)$ så er f endda bijektiv.

Sum og produkt af funktioner: Ligesom at vi kan lægge tal sammen og gange tal sammen, kan vi også gøre det samme med funktioner.

Regneregler: Hvis f og g er funktioner, så har vi at

1. Summen af f og g evalueret i x er det samme som at evaluere de to funktioner i x og så lægge dem sammen:

$$(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x).$$

2. Produktet af f og g evalueret i x er det samme som at evaluere de to funktioner i x og så gange dem sammen:

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x).$$

3. At dividere funktionerne f og g og så evaluere i x er det samme som at evaluere de to funktioner i x og så dividere dem bagefter, såfremt $g(x) \neq 0$:

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)},$$

hvor $g(x) \neq 0$.

Eksempler:

1. Hvis $f(x) = 3x^2 + 1$ og $g(x) = \frac{1}{x}$ hvad er $(f + g)(2)$ så:

   Vi udregner først $f(2)$ og $g(2)$:

$$f(2) = 3 \cdot 2^2 + 1 = 3 \cdot 4 + 1 = 13,$$
$$g(2) = \frac{1}{2},$$

   hvilket betyder at

$$(f + g)(2) = f(2) + g(2) = 13 + \frac{1}{2} = \frac{27}{2}.$$

2. Hvis $f(x) = 2x$ og $g(x) = \frac{1}{x}$ hvad er $\left(\frac{f}{g}\right)(3)$ så:

   Vi udregner først $f(3)$ og $g(3)$:

$$f(3) = 2 \cdot 3 = 6,$$
$$g(3) = \frac{1}{3},$$

   hvilket medfører at

$$\left(\frac{f}{g}\right)(3) = \frac{f(3)}{g(3)} = \frac{6}{\frac{1}{3}} = 6 \cdot 3 = 18.$$

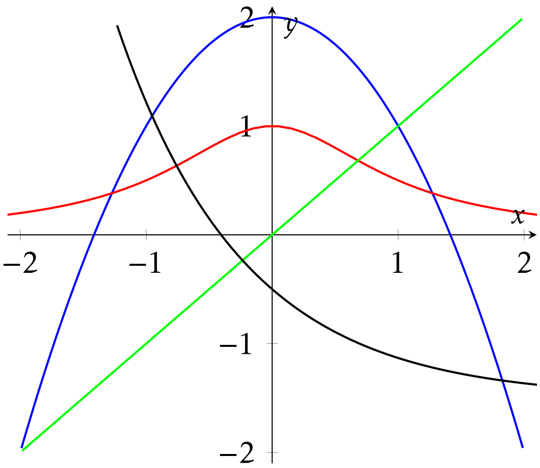
3.1.1 Opgaver

1. Lad $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ og $B = \{3, 5, \pi, 1, -1\}$. Bestem en funktion $f : A \to B$ sådes at

   (a) f er injektiv og surjektiv.

   (b) f er hverken injektiv eller surjektiv.

2. Kan cirklen med ligning $x^2 + (y - 1)^2 = 1$ beskrives som grafen af en funktion? Begrund dig svar, og i bekræftende tilfælde bedstem da funktionen.



Figur 3.3: Opgave 6.

3. Givet mængderne

$$A = \{0, 2, 4, 6, 8\},$$
$$B = \{\text{Hund}, \text{Hest}, \text{Struds}, \text{Fugleedderkop}, \text{Laks}, \text{Mariehøne}\}$$

bestem om følgende sammenhænge mellem A og B er funktioner. I bekræftende fald bestem også om de er injektive og/eller surjektive.

(a) Lad $f : B \to A$ være givet ved

$$f(x) = \text{antal ben } x \text{ har.}$$

(b) Lad g være givet ved

$$g(0) = \text{Hund}, \quad g(2) = \text{Struds}, \quad g(4) = \text{Laks},$$
$$g(6) = \text{Fugleedderkop}, \quad g(8) = \text{Hest}$$

(c) Lad $h : A \to B$ være givet ved at

$$h(x) = \text{Dyerne i } B \text{ som har } x \text{ ben.}$$

4. Lad $f(x) = x^2 - 1$, $g(x) = \frac{1}{1+x}$. Bestem

(a) $(f + g)(2)$

(b) $\frac{f}{g}(-2)$

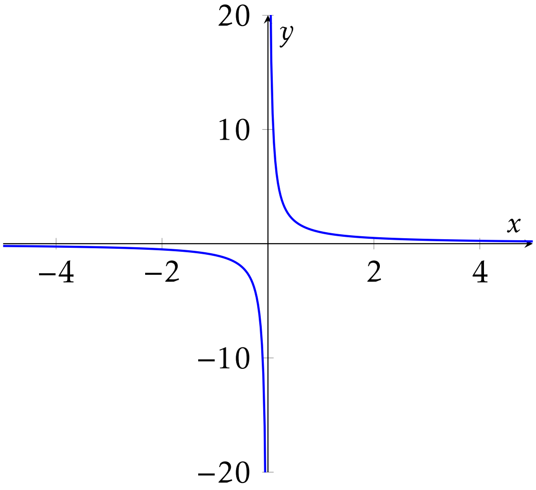
(c) $(fg)(0)$

(d) $\frac{g}{f}(x)$

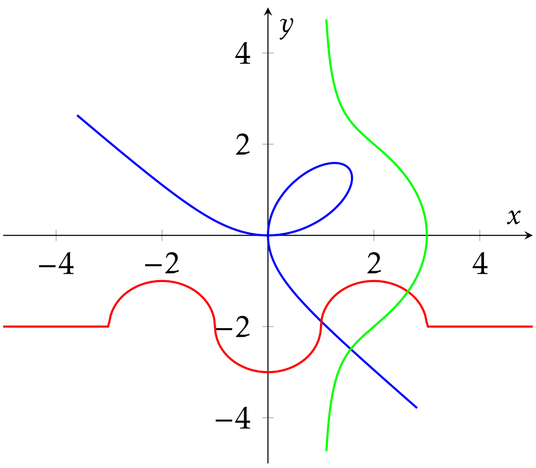
(e) $(g - f)(x)$.

5. Bestem værdimængden for funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ givet ved $f(x) = -3x^2 + 9$.

6. I Figur 3.3 ses graferne for forskellige funktioner med definitionsmængde $[-2, 2]$ og codomæne $[-2, 2]$. Bestem for hver funktion om den er injektiv, surjektiv og/eller bijektiv.



Figur 3.4: Opgave 8.



Figur 3.5: Opgave 11.

7. Bestem en mængde $D \subset \mathbf{R}$ således at funktionen $f : D \to \mathbf{R}$ givet ved $f(x) = x^2$ bliver injektiv.

8. På Figur 3.4 ses grafen for funktionen $f(x) = x^{-1}$. Brug grafen til at afgøre om f er injektiv, surjektiv og/eller bijektiv på $\mathbf{R}$. Hvis ikke f er bijektiv bestem så det størst mulige domæne og codomæne således at f bliver bijektiv.

9. Brug Geogebra til at bestemme for hvilke $a \in \{0, 1, 2, \ldots, 10\}$ funktionen $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ givet ved $f(x) = x^a$ er injektiv, surjektiv eller bijektiv.

10. Bestem den størst mulige definitionsmængde for funktionerne

$$f(x) = \sqrt{-x^2 + x + 2}, \qquad g(x) = \frac{1}{(1 + x^2)^{\frac{1}{2}}}, \qquad h(x) = \frac{2}{\sqrt{x + 2}}.$$

11. Figur 3.5 viser forskellige kurver i planen. Argumenter for hvilke kurver der beskriver grafen for en funktion.

12. Skitser grafen for en funktion som opfylder alle nedenstående puntker:

    (a) har domæne $[-2, 4[$, og codomæne $[-2, 4]$,

(b) går gennem punkterne $(-1,3)$ og $(2,-2)$,

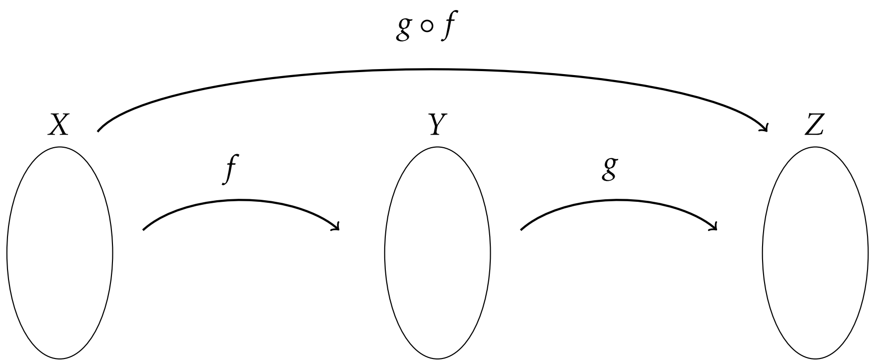
(c) skærer y-aksen i -2,

(d) ikke skærer x-aksen.

13. I Geogebra er en kurve afbildet. Kurven afhænger af en parameter a. Bestem for hvilke (om nogen) $a \in \{-3,-2,\ldots,2,3\}$ kurven beskriver grafen for en funktion.

3.2 Sammensatte og inverse funktioner

Sidste gang beskæftigede vi os med funktioner $f: X \to Y$, hvor X og Y var mængder. Hvis vi har en anden funktion $g: Y \to Z$, hvor Z også er en mængde, så kan man betragte sammensætningen af de to funktioner $g \circ f: X \to Z$ (se Figur 3.6) som er bestemt udfra formlen $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ (bemærk at $g \circ f$ skal læses som at vi først anvender f og dernæst g). Måden vi udregner $g \circ f$ er at indsætte funktionen f på den ubekendte variabels plads i g. I sådan et tilfælde kalder vi f for den indre funktion, g for den ydre funktion og $g \circ f$ for den sammensatte funktion.



Figur 3.6: En sammensat funktion

Eksempler:

1. Givet den sammensatte funktion $\frac{1}{x^2}$, find funktioner f og g så $f(g(x)) = \frac{1}{x^2}$:

   Vi genkender funktionerne $\frac{1}{x}$ og x^2 og ser at x^2 er sat ind på x plads i $\frac{1}{x}$. Det betyder at hvis vi sætter $g(x) = x^2$ og $f(x) = \frac{1}{x}$ så har vi at $f(g(x)) = \frac{1}{x^2}$.

2. Lad $f(x) = x^2 + 3x + \cos(x)$ og $g(x) = \tan(x)$ og bestem forskriften $(f \circ g)(x)$:

   Vi indsætter $g(x)$ på x plads i $f(x)$ og får:

   $$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = (\tan(x))^2 + 3\tan(x) + \cos(\tan(x)).$$

3. Lad $f(x) = x^3$ og $g(x) = \sqrt{x}$ og bestem både $(g \circ f)(2)$ og $(f \circ g)(2)$:

   Vi har at $f(2) = 2^3 = 8$ og $g(2) = \sqrt{2}$, hvilket giver:

   $$(g \circ f)(2) = g(f(2)) = g(8) = \sqrt{8} = \sqrt{4 \cdot 2} = \sqrt{4}\sqrt{2} = 2\sqrt{2},$$
   $$(f \circ g)(2) = f(g(2)) = f(\sqrt{2}) = (\sqrt{2})^3 = \sqrt{2^3} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}.$$

4. Generelt kender vi funktioner så som

$$\cos(x), \quad \sin(x), \quad \tan(x), \quad x^2, \quad \sqrt{x}, \quad \frac{1}{x}.$$

Hvis vi på x plads i de forskellige funktioner indsætter en anden funktion, så vil vi få en sammensat funktion, som f.eks.

$$\cos(x^3), \quad \sin(\sqrt{x}), \quad \tan\left(\frac{1}{x}\right), \quad (\sin(x))^2, \quad \sqrt{\tan(x)}, \quad \frac{1}{\cos(x)}.$$

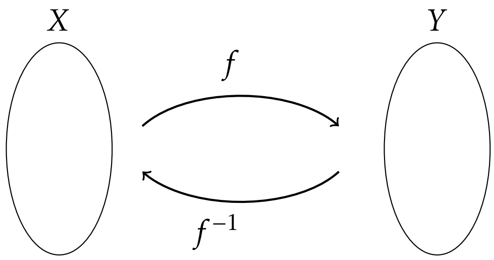
Bemærk, at der kan være forskel på at være den ydre og den indre funktion, f.eks. er $\sin(x^2)$ og $(\sin(x))^2$ ikke altid det samme.

Inverse funktioner: Hvis vi har to funktioner $f\colon X \to Y$ og $g\colon Y \to X$, som i Figur 3.7, som opfylder at

$$f(g(y)) = y \qquad \text{og} \qquad g(f(x)) = x,$$

for alle $x \in X$ og $y \in Y$, så siges f at være den inverse funktion til g og ligelede siges g at være den inverse funktion til f, hvilket også noteres med $g = f^{-1}$. Det betyder at den inverse funktion er en funktion der sender elementet $f(x)$ tilbage i det element det kom fra og tilsvarende for g.

For at en sådan funktion kan eksistere skal f være bijektiv, altså både injektiv og surjektiv. Hvis den ikke er injektiv så vil der være flere x'er der bliver sendt over i det samme y men det betyder, at $f^{-1}(y)$ skal sende y i mere end et punkt, hvilket ikke er muligt for en funktion. Derudover skal f være surjektiv, da f^{-1} skal kunne anvendes på alle elementer i Y og det kan den ikke, medmindre f rammer alle elementer i Y.



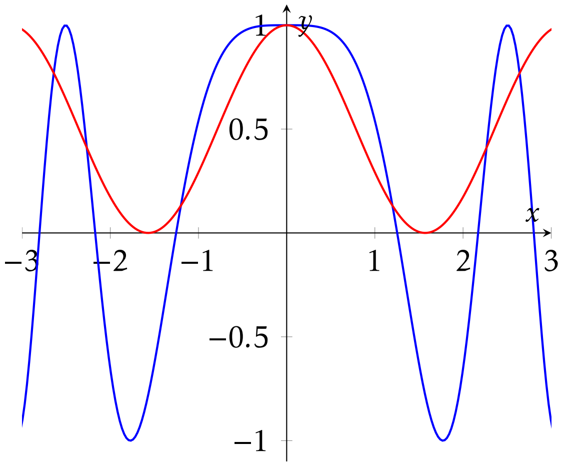
Figur 3.7: En invers funktion

Eksempler:

1. Lad $f\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ og $g(x)\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ være givet ved henholdsvis $f(x) = x^2$ og $g(x) = \sqrt{x}$, så har vi at

$$f(g(x)) = (\sqrt{x})^2 = x \qquad \text{og} \qquad g(f(x)) = \sqrt{x^2} = x,$$

så $g = f^{-1}$. Bemærk, at vi ikke kan udvide f og g til hele $\mathbb{R}$, da de så ikke er bijektive.



Figur 3.8: Opgave 3

2. Lad $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ og $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være givet ved henholdsvis $f(x) = 3x + 2$ og $g(x) = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}$, så har vi at

$$f(g(x)) = 3\left(\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}\right) + 2 = x - 2 + 2 = x$$
$$g(f(x)) = \frac{1}{3}(3x+2) - \frac{2}{3} = x + \frac{2}{3} - \frac{2}{3} = x,$$

hvilket betyder at $g = f^{-1}$.

3.2.1 Opgaver

1. Det oplyses at $f(1) = 2$, $f(4) = 1$, $g(1) = 1$ og $g(2) = 4$ for to funktioner f og g. Bestem
   (a) $f(g(2))$
   (b) $g(f(1))$
   (c) $g(f(f(4)))$

2. Lad f, g være givet ved $f(x) = x^2$ og $g(x) = 1/(1+x)$ på domænet $(0,\infty)$. Er $f \circ g = g \circ f$?

3. Lad $f(x) = x^2$ og $g(x) = \cos(x)$. På Figur 3.8 er graferne for $f \circ g$ of $g \circ f$ plottet. Bestem for hver graf den tilhørende funktionsforskrift.

4. Bestem $f \circ g$ og $g \circ f$ hvor $f(x) = \frac{1}{2}$ og $g(x) = 4x^2 + 2x - 1$.

5. Lad $f\colon \{1,2,3\} \to \{a,b,c\}$ være givet ved $f(1) = b$, $f(2) = a$, $f(3) = c$. Bestem $g\colon \{a,b,c\} \to \{1,2,3\}$ så $g = f^{-1}$.

6. Lad f, g, h være funktioner defineret på $(0,\infty)$ givet ved

$$f(x) = \sqrt{x},$$
$$g(x) = \frac{1}{1+x},$$
$$h(x) = \left(\frac{1}{x} - 1\right)^2.$$

Bestem forskriften for følgende funktioner:

(a) $f \circ g$,

(b) $g \circ f$,

(c) $f \circ h \circ g$,

(d) $g \circ h \circ f$,

(e) $f \circ g \circ h$,

(f) $g \circ g$.

7. Bestem den inverse funktion til $f : \mathbf{R} \setminus \{0\} \to \mathbf{R} \setminus \{0\}$ givet ved $f(x) = x^{-1}$. (Hint: Hvad er $f(f(x))$.)

8. Vis at funktionerne $f : \mathbf{R} \setminus \{\frac{1}{2}\} \to \mathbf{R} \setminus \{-\frac{1}{2}\}$ og $g : \mathbf{R} \setminus \{-\frac{1}{2}\} \to \mathbf{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$ givet ved

$$f(x) = \frac{x-1}{1-2x}, \qquad g(x) = \frac{x+1}{1+2x},$$

er inverse funktioner.

9. Lad $f(x) = \cos((x-2)^2)$

(a) Bestem funktioner g, h så $f(x) = g(h(x))$.

(b) Bestem to andre funktioner g_1, h_1 så $f(x) = g_1(h_1(x))$

(c) Bestem tre funktioner f_1, f_2, f_3 så $f(x) = f_1(f_2(f_3(x)))$

10. Lad funktionen $f(x) = e^{x^2}$ og bestem funktioner g og h så $f = g \circ h$.

11. Lad $f : \mathbf{R} \to [-2, \infty[$ være givet ved $f(x) = (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$ og lad $g : [-2, \infty[\to [0, \infty[$ være givet ved $g(x) = \sqrt{x+2}$.

(a) Bestem definitionsmængde, værdimængde og funktionsforskrift for $f \circ g$

(b) Er g og f inverse funktioner? (Hint: hvad er $(g \circ f)(-1)$?)

(c) Bestem en passende definitionsmængde D så $f : D \to [-2, \infty[$ er invers til g.

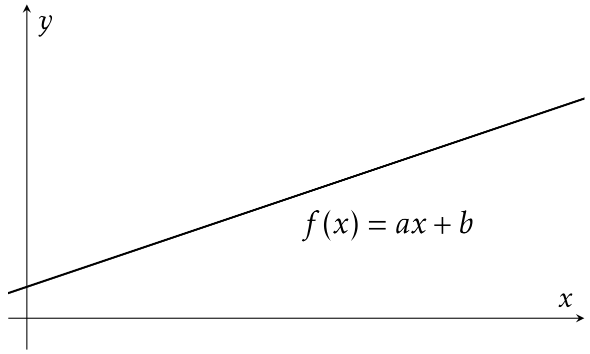
12. Betragt funktionerne $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ og $g : [0, \infty) \to [1, \infty)$ givet ved $f(x) = x^{3/2}$ og $g(x) = x^{2/3} + 1$.

(a) Bestem det størst mulige domæne D for funktionen $h : D \to \mathbf{R}$ givet ved $h(x) = x - 1$ så sammensætningen $f \circ h$ er defineret.

(b) Vis at $g^{-1} = f \circ h$.

3.3 Polynomier

Vi betragtede tidligere første- og andengradsligninger, hvor venstre siden var på formen $ax + b$ og $ax^2 + bx + c$, henholdsvis. Dette er to eksempler på funktionstyper som man kalder polynomier. Disse funktioner vil vi nu studere mere dybdegående.



Figur 3.9: Førstegradspolynomium.

Førstegradspolynomier: En funktion med forskrift

$$f(x) = ax + b,$$

hvor $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ og $b \in \mathbb{R}$, kaldes for et førstegradspolynomium. I genkender formentlig et førstegradspolynomium som ligningen for en ret linje.

Hvis vi sætter $x = 0$ i vores førstegradspolynomium får vi at

$$f(0) = a \cdot 0 + b = b,$$

hvilket viser at et førstegradspolynomium skærer y-aksen i b. Derudover får vi, hvis vi indsætter $x+1$ på x plads at

$$f(x+1) = a(x+1) + b = a + (ax + b) = a + f(x),$$

hvilket viser at hvis vi går 1 ud ad x-aksen, så gå vi a op ad y-aksen og vi kalder derfor a for hældningen af vores rette linje.

Hvis man får givet to punkter (x_1, y_1) og (x_2, y_2) i et koordinatsystem, så kan man bestemme forskriften for den rette linje der går gennem de to punkter ud fra formlerne

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \qquad \text{og} \qquad b = f(x_1) - ax_1 = y_1 - ax_1.$$

Bemærk, at man også kan bruge punktet (x_2, y_2) til at finde b.

Eksempler:

1. Givet punkterne $P = (1, 7)$ og $Q = (2, 4)$, bestem en forskrift for f:

   Vi udregner først a:

   $$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4-7}{2-1} = \frac{-3}{1} = -3.$$

   Det bruger vi så sammen med punktet P til at bestemme b:

   $$b = y_1 - ax_1 = 7 - (-3) \cdot 1 = 10,$$

   hvilket giver at forskriften for f er givet ved $f(x) = -3x + 10$.

2. Lad funktionerne f og g være givet ved henholdsvis $f(x) = -x+2$ og $g(x) = 2x+2$ og find det punkt hvor de skærer hinanden.

   Vi vil finde den værdi for x der gør at $f(x) = g(x)$. Det gør vi ved at sætte de to forskrifter lig med hinanden og så isolere x:

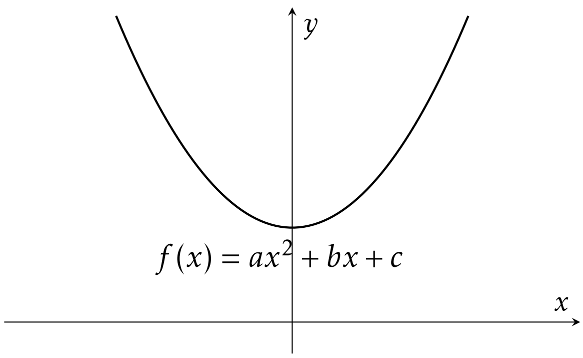
$$\begin{aligned} f(x) = g(x) &\Leftrightarrow -x+2 = 2x+2 \\ &\Leftrightarrow -3x = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0. \end{aligned}$$

   Ved at indsætte $x = 0$ i forskriften for enten f eller g får vi at $y = 2$, hvilket viser at f og g skærer hinanden i punktet $(0,2)$.

Andengradspolynomier: En funktion med forskrift

$$f(x) = ax^2 + bx + c,$$

hvor $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ og $b,c \in \mathbb{R}$, kaldes for et andengradspolynomium. Grafen for et andengradspolynomium er en parabel (se Figur 3.10).



Figur 3.10: Andengradspolynomium.

Ved at sætte $x = 0$ får vi, at et andengradspolynomium skærer y-aksen i

$$f(0) = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = c.$$

Hvis vi differentiere $f(x)$, får vi

$$f'(x) = 2ax + b,$$

og ved igen at indsætte $x = 0$ får vi at $f'(0) = b$. Vi husker at den afledte funktion beskriver hældningen i punktet, hvilket medfører, at b beskriver hvad hældningen af vores andengradspolynomium er i skæringspunktet med y-aksen.

Til sidst ser vi, at hvis x bliver meget stor, så bliver x^2 meget større end x gør. Det betyder, at leddet ax^2 bestemmer om $f(x)$ går mod $+\infty$ eller $-\infty$ når x bliver meget stor. Da x^2 altid er positiv, har vi, at fortegnet på a bestemmer om vores parabel går opad eller nedad.

Hvis man får givet tre punkter (x_1, y_1), (x_2, y_2) og (x_3, y_3), kan man entydigt bestemme det andengradspolynomium der går gennem de punkter ved at løse de tre ligninger med tre ubekendte:

$$\begin{aligned} f(x_1) &= ax_1^2 + bx_1 + c = y_1, \\ f(x_2) &= ax_2^2 + bx_2 + c = y_2, \\ f(x_3) &= ax_3^2 + bx_2 + c = y_3. \end{aligned}$$

Toppunktsformlen: Hvis $a > 0$ i vores andengradspolynomium så kaldes det punkt med den mindste funktionsværdi for andengradspolynomiets toppunkt og hvis $a < 0$ så kaldes punktet med den største funktionsværdi for toppunktet. Vi notere toppunktet med (x_0, y_0), hvor x_0 og y_0 kan bestemmes ud fra formlerne

$$x_0 = \frac{-b}{2a} \qquad \text{og} \qquad y_0 = \frac{-d}{4a},$$

hvor vi husker at $d = b^2 - 4ac$.

Eksempler:

1. Lad $f(x) = 2x^2 + 2x - 2$ og bestem funktionens toppunkt.

   Vi ser at $a = 2$, $b = 2$ og $c = -2$, hvilket medfører at $d = 2^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-2) = 20$. Indsætter vi dette i formlerne for toppunktet får vi

   $$x_0 = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2} \qquad \text{og} \qquad y_0 = \frac{-20}{8} = \frac{-5}{2},$$

   hvilket giver at toppunktet er $\left(\frac{-1}{2}, \frac{-5}{2}\right)$.

2. Givet de tre punkter $(-1,1)$, $(0,1)$ og $(-2,-2)$, bestem en ligning for det dertilhørende andengradspolynomium.

   Vi har de tre ligninger

   $$\begin{aligned} a(-1)^2 + b(-1) + c = 1 &\Leftrightarrow a - b + c = 1, \\ a(0)^2 + b(0) + c = 1 &\Leftrightarrow c = 1, \\ a(-2)^2 + b(-2) + c = -2 &\Leftrightarrow 4a - 2b + c = -2. \end{aligned}$$

   Fra ligning to ser vi at $c = 1$ og ved at indsætte dette i de to andre, får vi to ligninger med to ubekendte:

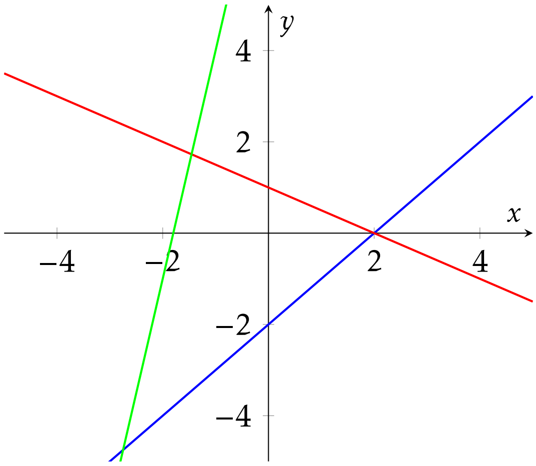
   $$\begin{aligned} a - b + 1 = 1 &\Leftrightarrow a - b = 0, \\ 4a - 2b + 1 = -2 &\Leftrightarrow 4a - 2b = -3. \end{aligned}$$

   Hvis vi benytter de lige store koefficienters metode til at løse disse to ligninger, får vi at

   $$\begin{aligned} 4a - 2b = -3 &\Leftrightarrow 4a - 2b - 4(a - b) = -3 \\ &\Leftrightarrow 2b = -3 \\ &\Leftrightarrow b = \frac{-3}{2}. \end{aligned}$$

   Indsætter vi nu dette i ligningen $a - b = 0$ får vi at $a = \frac{-3}{2}$, så vores andengradspolynomium er:

   $$f(x) = -\frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + 1.$$



Figur 3.11: Opgave 2

3.3.1 Opgaver

1. Lad $f(x) = 12x - 3$, $g(x) = -x^2 - 3x + 1$ og bestem

$$f\left(-\frac{1}{3}\right), \qquad f(-1), \qquad (f+g)(-2).$$

Bestem også x så $f(x) = 0$.

2. På Figur 3.11 ses graferne for funktionerne

$$f(x) = x - 2, \qquad g(x) = -\frac{1}{2}x + 1, \qquad h(x) = 5x + 9.$$

Bestem hvilke grafer hører til hvilke funktioner.

3. Bestem toppunktet for polynomiet $-2x^2 + 3x - 1$

4. Bestem hjørnepunkterne i den trekant som ses i Figur 3.11.

5. Grafen for funktionen $f(x) = ax + b$ går gennem punkterne $(-1, 3)$ og $(2, -1)$. Bestem a og b.

6. Lad $f(x) = 2x - 3$ og bestem x_0 så $f(x_0) = x_0$.

7. Lad $f(x) = \frac{3}{4}x^2 - 7x + 5$ og bestem først $f(-2)$ og derefter alle x_0 så $f(x_0) = x_0$

8. Bestem koefficienterne b og c således at $f(x) = -x^2 + bx + c$ har rødder -2 og 3.

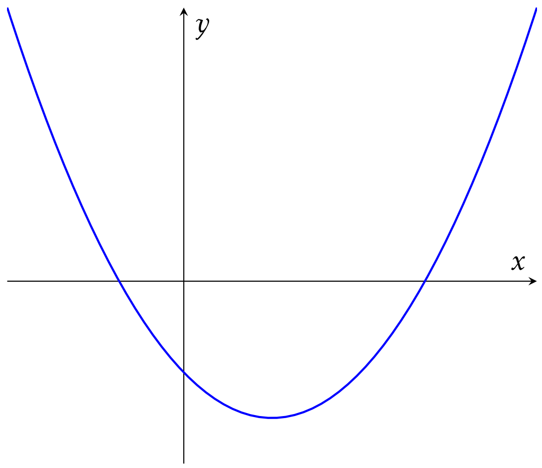
9. Bestem et andengradspolynomium som går gennem punkterne $(-1, 2)$, $(1, -1)$, $(2, 4)$

10. Bestem skæringspunkterne mellem $f(x) = 2x^3 - x^2 + x - 1$ og $h(x) = 2x - 1$.

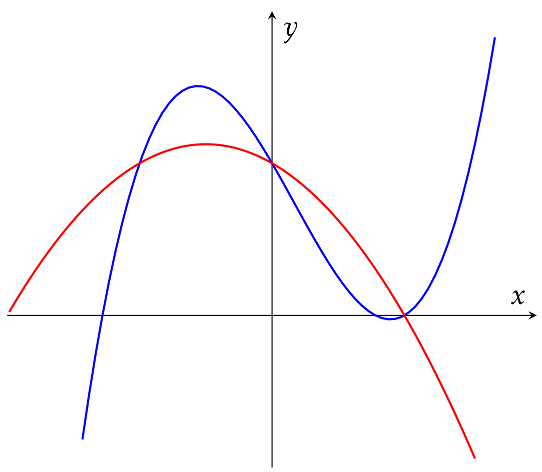
11. På Figur 3.12 ses grafen for et andengradspolynomium $f(x) = ax^2 + bx + c$. Bestem fortegnene for a, b, c, d ud fra grafen (d betegner diskriminanten).

12. Figur 3.13 viser skæringerne mellem $f(x) = 2x^3 - x^2 - 3x + 2$ og $g(x) = -x^2 - x + 2$. Bestem skæringspunkterne mellem disse to polynomier.

13. Lad $f(x) = 2x^2 - bx + 1$ (se Geogebra) og bestem



Figur 3.12: Opgave 11



Figur 3.13: Opgave 12

(a) For hvilke værdier af b ligger toppunktet for f i første kvadrant?

(b) For hvilke værdier af b ligger toppunktet for f i tredje kvadrant?

14. Lad a_0 og c_0 være faste tal og lad $f(x) = a_0x^2+bx+c_0$ være et polynomium hvor b er vilkårlig. Vis, at toppunktet for f ligger på parablen $-a_0x^2+c_0$ uanset værdien af b. Se eventuelt Geogebra

3.4 Logaritme-og eksponentialfunktioner

Vi definerer logaritmen $\log_a\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ ved

$$\log_a(x) = y \quad \text{hvis og kun hvis} \quad a^y = x,$$

hvor $a > 0$ kaldes for grundtallet af logaritme funktionen. Det skal forståes således at $\log_a(x)$ giver det tal, som a skal opløftes i for at give x. Hvis grundtallet $a = e$, hvor e er Eulers tal, så skriver vi $\ln(x)$ i stedet for $\log_e(x)$ og kalder det for den naturlige logaritme. Bemærk, at ud fra den måde vi definerede $\log_a(x)$ har vi, at

$$\log_a(a^y) = y \qquad \text{og} \qquad a^{\log_a(x)} = x. \tag{3.1}$$

Eksempler:

1. Udregn $\log_2(8)$:

   For at udregne $\log_2(8)$ skal vi finde et y som opfylder at $2^y = 8$, hvilket vi ser er $y = 3$. Derfor har vi at $\log_2(8) = 3$.

2. Udregn $\log_{10}(10000)$:

   Vi ser at $10000 = 10^4$ hvilket medfører at $\log_{10}(10000) = 4$.

3. Udregn $\log_a(1)$:

   Vi har for alle a, at $a^0 = 1$, hvilket betyder, at $\log_a(1) = 0$, lige meget hvad grundtallet a er.

Regneregler: Vi har følgende regneregler for logaritmefunktioner:

1. $\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$.
2. $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$.
3. $\log_a(x^r) = r\log_a(x)$.

Eksempler:

1. Udregn $\log_2(16)$:

   Vi ser at

   $$\log_2(16) = \log_2(2\cdot 8) = \log_2(2) + \log_2(8) = \log_2(2^1) + \log_2(2^3) = 1 + 3 = 4.$$

2. Udregn $\log_{10}(50) + \log_{10}(20)$:

   Vi kan ikke umiddelbart regne de to logaritmer, da vi ikke kan finde to pæne tal x, y, som opfylder at $10^x = 50$ og $10^y = 20$, men hvis vi bruger vores regneregler ser vi at

   $$\log_{10}(50) + \log_{10}(20) = \log_{10}(50\cdot 20) = \log_{10}(1000) = \log_{10}(10^3) = 3.$$

Eksponentialfunktioner: En funktion på formen

$$f(x) = a^x,$$

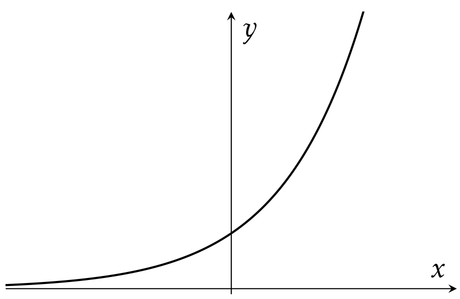
hvor $a > 0$ kaldes for en eksponentialfunktion. Vi husker fra opgaveregningen at hvis $a > 1$ så er $f(x)$ en voksende funktion, hvis $a = 1$ så er $f(x)$ en konstant funktion og hvis $0 < a < 1$ så er $f(x)$ en aftagende funktion.

Hvis vi får givet et punkt (x, y) kan vi, ligesom vi gjorde med førstegradspolynomier, bestemme forskriften for den eksponentialfunktion der går gennem disse punkter. Det kan vi gøre ved at bruge formlen

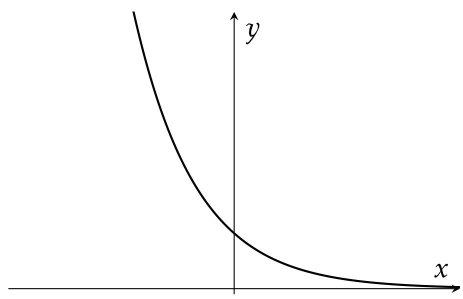
$$a = \sqrt[x]{y}.$$

En anden ting interessant ting man kan bestemme ud fra en eksponentialfunktion, såfremt denne er voksende, er dens fordoblingskonstant, som vi vil notere med T_2. Hvis vi har et punkt (x_0, y_0), så fortæller fordoblingskontanten hvor langt ud af x-aksen vi skal gå fra x_0 for at vores tilhørende y-værdi, som startede i y_0, er blevet dobbelt så stor. Fordoblingskonstanten er givet ud fra formlen

$$T_2 = \frac{\ln(2)}{\ln(a)}.$$



Figur 3.14: Voksende eksponentialfunktion.



Figur 3.15: Aftagende eksponentialfunktion.

Hvis vores eksponential funktion derimod er aftagende, kan vi i stedet bestemme dens halveringskonstant, som vi vil notere med $T_{1/2}$. Halveringskonstanten er givet ved

$$T_{1/2} = \frac{\ln(\frac{1}{2})}{\ln(a)}.$$

Når vi betragter fordoblings- og halveringskonstanter så er vi kun interesseret i hvordan funktionen voker/aftager. Det betyder, at en funktion givet ved $f(x) = ba^x$, har samme fordoblingskonstan/halveringskonstant som $f(x) = a^x$, da det at gange med en konstant ikke ændre noget ved hvordan funktionen vokser/aftager.

Bemærk, at vi ud fra (3.1) kan se at logaritme funktionen med grundtal a og eksponentialfunktionen med grundtal a er hinandens inverse.

Eksempler:

1. Bestem forskriften for den eksponentialfunktion der går gennem punktet $(4, 16)$:

Vi indsætter i vores formel og får

$$a = \sqrt[x]{y} = \sqrt[4]{16} = 2,$$

hvilket medfører at forskriften for eksponentialfunktionen er $f(x) = 2^x$.

2. Bestem fordoblingskonstanten for eksponentialfunktionen $f(x) = 2^x$:

   Vi ser at $a = 2$ og indsætter i formlen for fordoblingskonstanten

$$T_2 = \frac{\ln(2)}{\ln(2)} = 1,$$

   hvilket betyder at hver gang vi går en ud af x-aksen så fordobles vores y-værdi.

3. Løs ligningen $\ln(2x) = \ln(2) + 3$:

   Vi isolerer x på venstre side ved at samle logaritmen og så bruge at e^x er den inverse til $\ln(x)$:

$$\begin{aligned} \ln(2x) = \ln(2) + 3 &\Leftrightarrow \ln(2x) - \ln(2) = 3 \\ &\Leftrightarrow \ln\left(\frac{2x}{2}\right) = 3 \\ &\Leftrightarrow \ln(x) = 3 \\ &\Leftrightarrow e^{\ln(x)} = e^3 \\ &\Leftrightarrow x = e^3. \end{aligned}$$

3.4.1 Opgaver

1. Udregn følgende tal

$$2^4, \qquad 4^{-1}, \qquad e^3, \qquad \left(\frac{1}{2}\right)^3, \qquad \left(\frac{1}{3}\right)^{-3}, \qquad 123^0.$$

2. Udregn følgende tal

$$\log_2(256), \qquad \log_{10}(1000), \qquad \log_3\left(\frac{1}{9}\right), \qquad \ln(e^6), \qquad \log_{123}(1)$$

3. Bestem fordoblings- eller halveringskonstanten for hver af de følgende funktioner

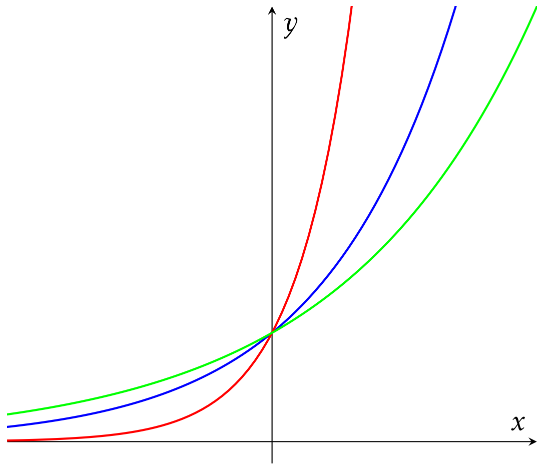
$$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x, \qquad g(x) = 3e^x, \qquad h(x) = e^{-x}.$$

4. Udregn følgende tal

$$\log_{10}(40) + \log_{10}(25), \qquad \log_{10}(40) - \log_{10}(4), \qquad \log_4(32) + \log_4\left(\frac{1}{2}\right)$$

5. Udregn følgende tal

$$\ln(\sqrt{2}), \qquad \log_{10}(5^{3/2}) + \frac{1}{2}\log_{10}(5) + \frac{1}{3}\log_{10}(64), \qquad \frac{1}{2}\log_5(4^2 + 9 + 10^2)$$



Figur 3.16: Opgave 14

6. Udregn følgende tal

$$e^{\ln(1)}, \qquad 2^{2+\log_2(10)}, \qquad 10^{3\log_{10}(7)}, \qquad 7^{-\log_7(9)}, \qquad 4^{\log_2(3)}$$

7. Bestem a og b så at $f(x) = ba^x$ går gennem punkterne $(1,2)$ og $(3,4)$.

8. Løs ligningerne

$$e^x = 5, \qquad 10^{x^2} = 100^x, \qquad 2^{x+1} = 3, \qquad e^{x^2-45} = e^{-135}e^{19x}$$

9. Løs ligningerne

$$\ln(x) = 4, \qquad 3\log_{10}(x) = \log_{10}(27), \qquad \ln(x) + \ln(x+2) = 3\ln(2)$$

10. Lad f være en eksponential funktion med halveringskonstant 7, som opfylder $f(3) = 12$.
    (a) Bestem $f(-11)$
    (b) Bestem $f(10)$
    (c) Løs ligningen $f(x) = \frac{3}{2}$.

11. Argumenter for, at det ikke giver mening at tage den naturlige logaritme af et negativt tal.

12. Funktionen $f(x) = a^x$ har fordoblingskonstanten $\ln(2^5)$. Bestem a.

13. Bestem a og b så $f(x) = ba^x$ går gennem punkterne $(1, e^3)$ og $(3, e^7)$.

14. Figur 3.16 viser graferne for tre forskellige eksponentialfunktioner. Hvilken af disse har den største fordoblingskonstant?

15. Bestem halvveringskonstanten for funktionen $f(x) = e^{-2x}$

16. Givet en eksponentialfunktion $f(x) = ba^x$ bestem c og d så $g(x) = cd^x$ er spejlingen af f i y-aksen. (Hint: Symmetri om y-aksen er ensbetydende med at $f(-x) = g(x)$.)

17. Vis at

$$\frac{\ln(a^y)}{\ln(a)} = y, \quad \text{og} \quad a^{\frac{\ln(x)}{\ln(a)}} = x.$$

Konkluder at

$$\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}.$$

(Hint: til at vise den anden lighed brug at $x = a^{\log_a(x)}$ på venstresiden.)

3.5 Trigonometriske funktioner

Vi er nu kommet til at studere trigonometriske funktioner som sinus, cosinus og tangens. For at gøre dette vil vi starte med at betragte vinkler. Man kan måle vinkler i enten radianer eller grader, i dette kursus vil vi oftest benytte radianer, som er et mål for hvor langt man går på enhedscirklen. Vi har følgende sammenhæng mellem grader og radianer

$$2\pi \text{ rad} = 360 \text{ grader}$$

hvilket medfører at

$$1 \text{ rad} = \frac{180}{\pi} \text{ grader} \qquad \text{og} \qquad 1 \text{ grader} = \frac{\pi}{180} \text{ rad}.$$

Eksempler:

1. Omskriv 2 radianer til grader:

   Vi har

$$2 \text{ rad} = 2 \cdot 1 \text{ rad} = 2 \cdot \frac{180}{\pi} \text{ grader} = \frac{360}{\pi} \text{ grader}.$$

2. Omskriv 280 grader til radianer:

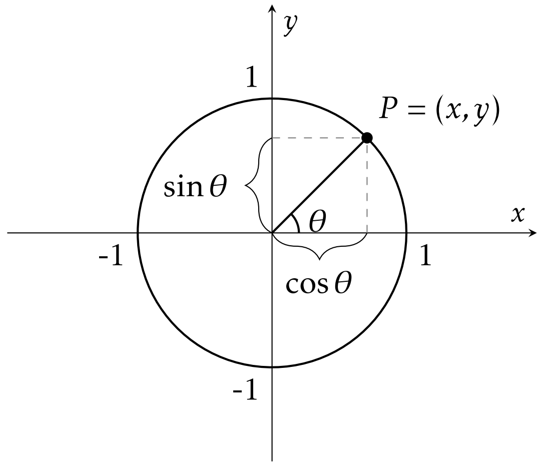
   Vi har

$$280 \text{ grader} = 280 \cdot 1 \text{ grader} = 280 \cdot \frac{\pi}{180} \text{ rad} = \frac{14\pi}{9} \text{ rad}.$$

For at kunne definere de trigonometriske funktioner vil vi betragte enhedscirklen (se Figur 3.17), som er en cirkel med radius 1 og centrum i origo, som er punktet $(0,0)$. Hvis vi starter i punktet $(1,0)$ på enhedscirklen og bevæger os med en vinkel θ mod uret (se Figur 3.17) så når vi til et punkt på enhedscirklen som vi kalder P. Hvis P har koordinaterne (x,y) så definerer vi $\cos\theta = x$ og $\sin\theta = y$. Hvis vi går imod urets retning i enhedscirklen, vil vi kalde det for den positive omløbsretning og hvis vi går i urets retning, vil vi kalde det for den negative omløbsretning.

Bemærk, at enhedscirklen er 2π-periodisk. Det betyder, at hvis vi går en vinkel på θ mod uret og får et punkt P, så vil vi få det samme punkt hvis vi går vinklen $\theta + 2\pi$, da der er 2π rundt om hele enhedscirklen. Det medfører også at sinus og cosinus er 2π-periodiske funktioner, hvilket betyder at

$$\sin\theta = \sin(\theta + 2\pi k) \qquad \text{og} \qquad \cos\theta = \cos(\theta + 2\pi k),$$



Figur 3.17: Sinus og cosinus i enhedscirklen.

hvor k er et heltal.

Hvis vi betragter Figur 3.18 ser vi, at hvis vi spejler et punkt (x, y), på enhedscirklen, omkring x-aksen får vi punktet $(x, -y)$ på enhedscirklen. Da det at spejle et punkt omkring x-aksen er det samme som at gå vinklen i den negative omløbsretning, får vi at

$$\sin(-\theta) = -\sin\theta \qquad \text{og} \qquad \cos(-\theta) = \cos\theta.$$

På tilsvarende vis ser vi, at hvis vi spejler punktet (x, y) i y-aksen får vi punktet $(-x, y)$. Da det at spejle i y-aksen, er det samme som at gå vinklen $\pi - \theta$ i positiv omløbsretning får vi, at

$$\sin(\pi - \theta) = \sin\theta \qquad \text{og} \qquad \cos(\pi - \theta) = -\cos\theta.$$

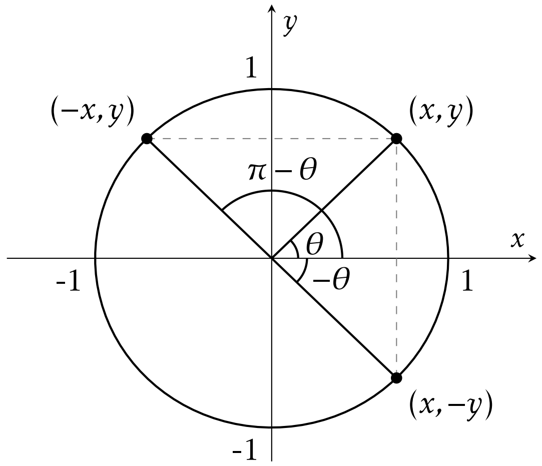
Vi definerer nu tangens ud fra sinus og cosinus, ved

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta},$$

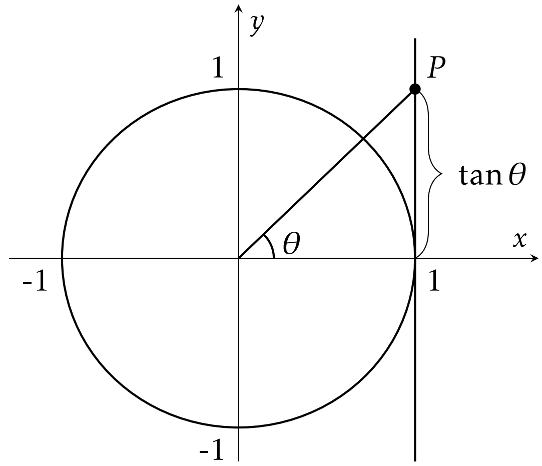
når $\theta \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, hvor k er et heltal. Tangens kan også bestemmes ud fra enhedscirklen (se Figur 3.19). Vi tegner en tangentlinje der skærer cirklen i punktet $(1, 0)$. Hvis vi går en vinkel θ i enhedscirklen og så forlænger linjen indtil den skærer vores tangent, så er $\tan\theta$ præcis y-koordinaten i skæringspunktet.

Trigonometriske identiter Vi opsummere her en liste over de trigonometriske identiteter vi har vist plus nogle flere som vil være brugbare i opgaveregningen:

1. $\cos(\theta + 2\pi k) = \cos(\theta)$, når k er et heltal.
2. $\sin(\theta + 2\pi k) = \sin(\theta)$, når k er et heltal.
3. $\sin(-\theta) = -\sin(\theta)$.
4. $\cos(-\theta) = \cos(\theta)$.
5. $\sin(\pi \pm \theta) = \mp\sin(\theta)$.
6. $\cos(\pi \pm \theta) = -\cos(\theta)$.



Figur 3.18: Symmetrien i enhedscirklen.



Figur 3.19: Tangens i enhedscirklen.

7. $\tan(\pi \pm \theta) = \pm\tan(\theta)$.
8. $\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$ (Idiotformlen).
9. $\sin(\theta \pm \phi) = \sin(\theta)\cos(\phi) \pm \cos(\theta)\sin(\phi)$ (Additionsformlen for sinus).
10. $\cos(\theta \pm \phi) = \cos(\theta)\cos(\phi) \mp \sin(\theta)\sin(\phi)$ (Additionsformlen for cosinus).
11. $\cos(2\theta) = \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) = 2\cos^2(\theta) - 1 = 1 - 2\sin^2(\theta)$.
12. $\sin(2\theta) = 2\sin(\theta)\cos(\theta)$.

Derudover giver vi en liste over værdierne for nogle udvalgte vinkler. Vi betragter her kun vinkler i første kvadrant, da vi kan finde værdier for de andre kvadranter ved at benytte de ovenstående formler.

θ	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$
0	0	1	0
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0	

Tabel 3.1: Værdier for udvalgte vinkler

Eksempler:

1. Beregn værdien $\cos(\frac{3\pi}{2})$:

   Ved at bruge den trigonometriske identitet nummer 6. får vi at

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{2}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = -0 = 0.$$

2. Beregn $\sin(9\pi)$:

   Ved at bruge den trigonometriske identitet nummer 2. får vi at

$$\sin(9\pi) = \sin(\pi + 8\pi) = \sin(\pi + 2 \cdot 4 \cdot \pi) = \sin(\pi) = 0.$$

3. Vis at den trigonometriske identitet nummer 5. gælder for plus, ved at bruge additionsformlen for sinus:

   Vi sætter $\phi = \pi$ i additionsformlen for sinus og får

$$\sin(\theta + \pi) = \sin(\theta)\cos(\pi) + \cos(\theta)\sin(\pi).$$

   Vi ser i enhedscirklen at 3.1 at $\cos(\pi) = -1$ og $\sin(\pi) = 0$. Indsætter vi det i den ovenstående ligning får vi at

$$\sin(\theta + \pi) = \sin\theta \cdot (-1) + \cos\theta \cdot 0 = -\sin\theta.$$

3.5.1 Opgaver

1. Omregn følgende fra grader til radianer

$$90°, \qquad 15°, \qquad 150°, \qquad 45°.$$

2. Omregn følgende radianer til grader

$$\frac{\pi}{3}, \qquad \frac{7\pi}{4}, \qquad \frac{5\pi}{12}.$$

3. Brug Geogebra til at undersøge de trigonometriske funktioner sinus og cosinus. Bemærk at Geogebra laver nogle afrundinger der kræver at man bruger sund fornuft når man aflæser funktionerne.

   (a) Bestem $\sin(0)$ og $\cos(0)$.
   (b) Bestem $\sin(\frac{\pi}{2})$ og $\cos(\frac{\pi}{2})$.
   (c) Bestem $\sin(\pi)$ og $\cos(\pi)$.
   (d) Bestem $\sin(\frac{3\pi}{2})$ og $\cos(\frac{3\pi}{2})$.
   (e) Bestem $\sin(2\pi)$ og $\cos(2\pi)$.

4. Udregn følgende tal

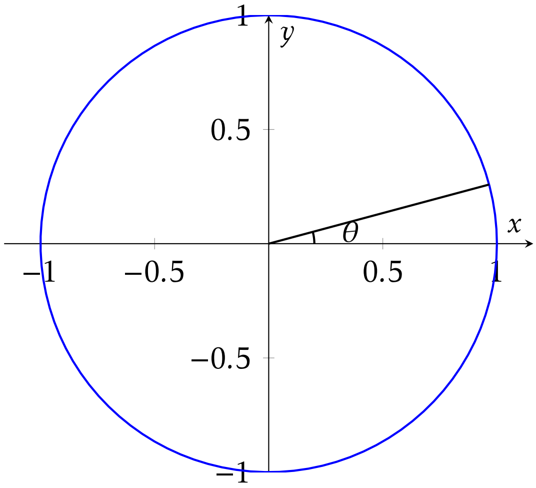
$$\sin(\frac{5\pi}{4}) + \cos(\frac{\pi}{4}), \qquad \tan(\frac{\pi}{6}) + \cos(\frac{\pi}{3}), \qquad \frac{\sin(\frac{\pi}{6}) + \cos(\frac{\pi}{3})}{\sin(\frac{4\pi}{6})}.$$

5. Brug sumformlerne til at vise formlerne $\sin(-\theta) = -\sin(\theta)$ og $\cos(-\theta) = \cos(\theta)$. Se evt. Geogebra. (Hint $\cos(-\theta) = \cos(0 - \theta)$ og $\sin(-\theta) = \sin(0 - \theta)$).

6. Brug Geogebra til at formode en sammenhæng mellem $\cos(\theta - \frac{\pi}{2})$ og $\sin(\theta)$. Brug efterfølgende sumformlerne til at be- eller afkræfte formodningen.

7. I Figur 3.20 er en vinkel på θ indtegnet i enhedscirklen. Skitser vinklerne

$$\theta + \frac{\pi}{2}, \qquad \pi - \theta, \qquad \theta + 3\pi, \qquad \frac{7\pi}{4} - \theta.$$



Figur 3.20: Opgave 7

8. Bestem to forskellige løsninger til ligningerne

$$\sin(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad \cos(x-\pi) = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad 2\sin^2(x) + 5\sin(x) + 2 = 0.$$

9. Brug enhedscirklen til at vise idiotformlen

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$

   (Hint:Pythagoras.)

10. Udregn følgende

$$\cos(-\frac{3\pi}{4}), \qquad \sin(\frac{5\pi}{6}), \qquad \tan(\frac{5\pi}{4}), \qquad \cos(\frac{5\pi}{3}).$$

11. Vis at $\sin(2\theta) = 2\cos(\theta)\sin(\theta)$. (Hint: Brug sumformlerne)

12. Løs ligningen $16\sin^2(x)\cos^2(x) = 3$ for $x \in [0,\pi]$. (Hint: Brug formlen fra Opgave 11)

13. Udregn

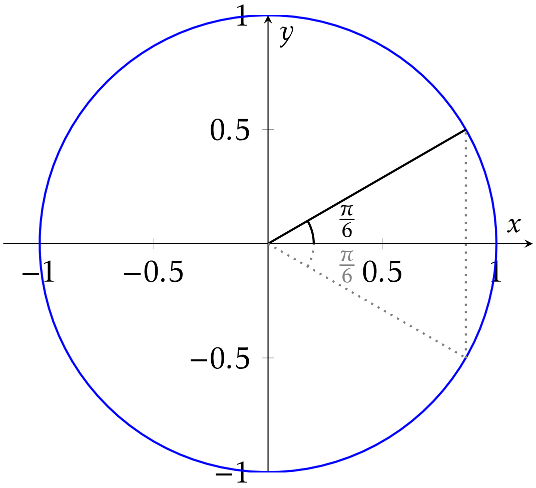
$$\cos(\frac{15\pi}{4}), \qquad \tan(\frac{14\pi}{6}), \qquad \sin(-\frac{10\pi}{3}), \qquad \tan(\frac{10\pi}{5}).$$

14. Vis at $\tan(x+\pi) = \tan(x)$ for alle hvor tangens er defineret. (Hint: Brug sumformlerne.)

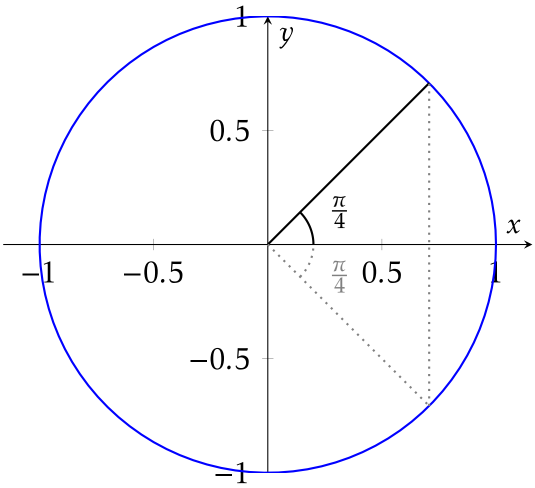
15. Løs ligningen $\sin^2(\theta) + 3\cos^2(\theta) = 2$ for $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$.(Hint: Idiotformlen)

16. I denne opgave beviser vi nogle af de eksakte værdier for sinus og cosinus til vinklerne $\frac{\pi}{6}$ og $\frac{\pi}{6}$.

   (a) Vis at $\sin(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$ ved at regne på trekanten i Figur 3.21. (Hint: Hvad kan man sige om sidelængderne i trekanten?)



Figur 3.21: Opgave 16



Figur 3.22: Opgave 17

(b) Brug idiotformlen til at vise at $\cos(\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

(c) Vis at $\sin(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$. (Hint: $\sin(\frac{\pi}{3}) = \sin(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6})$)

(d) Brug idiotformlen til at vise at $\cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$.

17. I denne opgave beviser vi nogle af de eksakte værdier for sinus og cosinus til vinklerne $\frac{\pi}{4}$.

 (a) Vis at $\sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ved at regne på trekanten i Figur 3.22.(Hint: Pythagoras)

 (b) Brug idiotformlen til at vise at $\cos(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

18. I denne opgave beviser vi nogle af de eksakte værdier for sinus og cosinus til vinklerne $\frac{\pi}{12}$ og $\frac{5\pi}{12}$.

 (a) Bestem $\cos(\frac{\pi}{12})$ og $\sin(\frac{\pi}{12})$ ved at bruge sumformlerne. (Hint: $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$)

 (b) Bestem $\cos(\frac{5\pi}{12})$ og $\sin(\frac{5\pi}{12})$ ved at bruge sumformlerne. (Hint: $\frac{5\pi}{12} = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}$)

3.6 Grænseværdier og kontinuitet

Når vi senere vil snakke om differentiabilitet, vil vi snakke om at tage grænsen af sekanthældningen, men hvad mener vi med at tage "grænsen", det vil vi nu specificere. Vi siger at $f(x)$ har en grænseværdi L^- fra venstre for x gående mod a fra venstre og noterer det med

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = L^-,$$

hvis $f(x)$ kan komme lige så tæt på L^- som vi ønsker, ved at lade x komme tættere og tættere på a fra venstre. På tilsvarende vis siger vi, at $f(x)$ har en grænseværdi L^+ fra højre for x gående mod a fra højre og notere det med

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = L^+.$$

Hvis der gælder at

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = L^- = L^+ = \lim_{x\to a^+} f(x),$$

så siger vi, at $f(x)$ har en grænseværdi L for x gående mod a og notere det med

$$\lim_{x\to a} f(x) = L.$$

Konceptet med en grænseværdi er ikke let at forstå, derfor illustrerer vi det nu ved hjælp af figurer, og dernæst med nogle simple eksempler. Hvis vi betragter Figur 3.23 ser vi, at hvis vi lader x nærme sig a fra henholdsvis højre og venstre så vil vi få

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = L \qquad \text{og} \qquad \lim_{x\to a^+} f(x) = L,$$

hvilket medfører at funktionen f har en grænseværdi i a som er

$$\lim_{x\to a} f(x) = L.$$

Hvis vi derimod betragter Figur 3.24, ser vi at

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = L^- \qquad \text{og} \qquad \lim_{x\to a^+} = L^+,$$

hvor $L^- \neq L^+$. Det betyder at grænsen fra højre og grænsen for venstre ikke er lig med hinanden i punktet a, og dermed har f ikke en grænseværdi for x gående mod a.

Bemærk, at man kan godt snakke om f har en grænseværdi for x gående mod a selvom $f(a)$ slet ikke er defineret.

Eksempler:

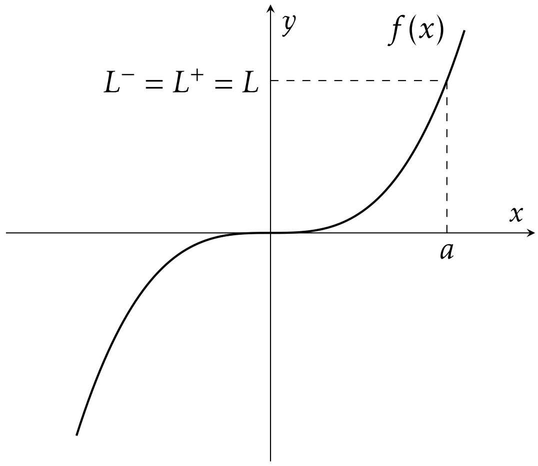
1. Lad $f(x) = x^3$ og vis at f har en grænseværdi for x gående mod 2 og bestem denne.

   Vi ser, at vi kan lade $f(x)$ komme lige så tæt på 8 som vi ønsker ved at lade x komme tættere og tættere på 2 fra både højre og venstre, hvilket medfører at

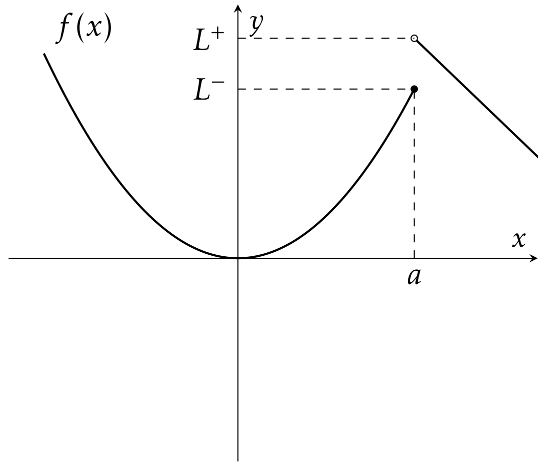
   $$\lim_{x\to 2^-} f(x) = 8 \qquad \text{og} \qquad \lim_{x\to 2^+} f(x) = 8.$$

   Da grænsen fra højre og venstre er den samme har vi

   $$\lim_{x\to 2} x^3 = 8.$$



Figur 3.23: Grænseværdi i $x = a$.



Figur 3.24: Ingen grænseværdi i $x = a$.

2. Har funktionen

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{hvis } x \leq 1, \\ -x+3 & \text{hvis } x > 1, \end{cases}$$

en grænseværdi for x gående mod 1?

Vi forklarer først kort hvad vi mener med den måde f er defineret på. Hvis vores x-værdi er mindre eller lig 1 så er $f(x) = x^2$, mens vi for alle x-værdier der er skarpt større end 1 har at $f(x) = -x + 3$. Hvis f er givet på denne måde, siger man, at f er en gaffelfunktion.

Vi finder grænsen for $f(x)$ når x går mod 1 fra henholdvis venstre og højre

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} x^2 = 1 \qquad \text{og} \qquad \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} -x+3 = 2,$$

da $f(x) = x^2$ kan komme vilkårligt tæt på 1 ved at lade x komme tættere og tættere på 1 og tilvarende kan vi lade $f(x) = -x + 3$ komme vilkårligt tæt på 2. Da

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) \neq \lim_{x\to 1^+} f(x),$$

har f ikke en grænseværdi for x gående mod 1.

Regneregler: Lad f og g være to funktioner med med grænseværdier når x går mod a. Så har vi følgende regneregler for grænseværdierne:

1. $\lim\limits_{x\to a}(f+g)(x) = \lim\limits_{x\to a} f(x) + \lim\limits_{x\to a} g(x)$.
2. $\lim\limits_{x\to a} cf(x) = c \lim\limits_{x\to a} f(x)$, hvor $c \in \mathbb{R}$.
3. $\lim\limits_{x\to a}(fg)(x) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to a} g(x)$.
4. $\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$, hvis $\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$.

Kontinuitet: En funktion f siges at være kontinuert i punktet a, hvis

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a). \tag{3.2}$$

Det betyder, at f er kontinuert i a hvis den har en grænseværdi i punktet a der er lig med $f(a)$.

Vi siger, at f er en kontinuert funktion, hvis den er kontinuert i alle punkter i dens definitionsmængde.

Hvis f og g er kontinuerte funktioner, så har vi fra (3.2), at

$$\lim_{x\to a} f(g(x)) = f(\lim_{x\to a} g(x)) = f(g(a)).$$

Bemærk, at funktioner så som $x, ax+b, ax^2+bx+c, \frac{1}{x}, \sqrt{x}, \ln(x), e^x, \sin(x), \cos(x)$ alle er kontinuerte på passende domæne.

Eksempler:

1. Vis at funktionen

$$f(x) = \begin{cases} 2x+3 & x \neq 0, \\ 3 & x = 0, \end{cases}$$

er kontinuert i 0.

Vi finder først grænseværdien for f når x går mod 0, ved at finde grænseværdien fra henholdsvis venstre og højre

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} 2x+3 = 3 \qquad \text{og} \qquad \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} 2x+3 = 3,$$

hvilket medfører at $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 3$.

Vi ser derudover at $f(0) = 3$, så

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 3 = f(0),$$

hvilket betyder at f er kontinuert i 0.

2. Vis at funktionen

$$f(x) = \begin{cases} 2x+3 & x \neq 0, \\ 4 & x = 0, \end{cases}$$

ikke er kontinuert i 0.

Vi har fra den forrige opgave at $\lim_{x\to 0} f(x) = 3$ men da $f(0) = 4$, har vi at

$$\lim_{x\to 0} f(x) \neq f(0),$$

og dermed er f ikke kontinuert i 0.

3.6.1 Opgaver

1. Lad $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ være givet ved

$$f(x) = \begin{cases} 2x+3, & \text{hvis } x \neq 1 \\ 6, & \text{ellers.} \end{cases}$$

Bestem $\lim_{x\to 1} f(x)$, $f(1)$ og afgør om f er kontinuert.

2. Lad $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ være givet ved

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2-1, & \text{hvis } x \neq 2 \\ 7, & \text{ellers.} \end{cases}$$

Bestem $\lim_{x\to 2} f(x)$ og afgør om f er kontinuert.

3. Bestem de følgende grænseværdier

$$\lim_{x\to 3} x^2, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{1}{x-1}, \qquad \lim_{x\to -2} \frac{x^2-4}{x+2}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{-2\frac{1}{x^3} - 4\frac{1}{x^2} + 12}{3\frac{1}{x^3} + \frac{1}{x}}$$

4. Lad $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ være givet ved

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}x + \frac{7}{6}, & \text{hvis } x < -\frac{1}{2} \\ -\frac{2}{3}x^2 - \frac{1}{3}x + 1, & \text{hvis } x \geq -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Bestem grænsen $\lim_{x\to -\frac{1}{2}} f(x)$ såfremt den er veldefineret.

5. Lad funktionen $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ være givet ved

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + x - 1, & \text{hvis } x < 1 \\ 4x^4 - 2x^2 + 1, & \text{hvis } x > 1 \\ 2, & \text{ellers.} \end{cases}$$

Hvad er $f(1)$? Er f kontinuert i 1.

6. Bestem a og b så funktionen

$$f(x) = \begin{cases} ax, & \text{hvis } x < 1 \\ 5, & \text{hvis } x = 1 \\ bx^2 + x + 1, & \text{hvis } x > 1 \end{cases}$$

er kontinuert i 1.

7. Lad $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ være givet ved

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{|x|}, & \text{hvis } x \neq 0 \\ 0, & \text{ellers.} \end{cases}$$

Bestem $f(0)$, $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ og $\lim_{x\to 0^-} f(x)$. I hvilke punkter er f kontinuert?

8. Bestem grænserne

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2+4-4x}{x^2-4}, \qquad \lim_{x\to -5} \frac{(x-1)(2x^2+14x+20)}{x^2+4x-5}$$

9. Lad f være givet som i Opgave 7 og lad $g(x) = -f(x)$.

   (a) Bestem $(f+g)(0)$, $\lim_{x\to 0^+}(f+g)(x)$ og $\lim_{x\to 0^-}(f+g)(x)$. I hvilke punkter er $(f+g)$ kontinuert?

   (b) Bestem $(fg)(0)$, $\lim_{x\to 0^+}(fg)(x)$ og $\lim_{x\to 0^-}(fg)(x)$. I hvilke punkter er (fg) kontinuert?

10. Funktionen $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ givet ved

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2+x+1, & \text{hvis } x \in [-a,a] \\ x+2, & \text{ellers} \end{cases}$$

er plottet i Geogebra.

   (a) Bestem $a > 0$ så f er kontinuert.

   (b) Er f kontinuert når $a = 0$?

11. Bestem grænserne

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x}, \qquad \lim_{x\to -2} (x^2-x)e^{x^2}, \qquad \lim_{x\to -1} x\ln(x+3).$$

12. I denne opgave bestemmes grænseværdien for funktionen $\frac{\sin x}{x}$ når x går mod nul.

   (a) Figur 3.25 viser vinklen $x \in [0, \frac{\pi}{2}[$ indtegnet i enhedscirklen. Brug figuren til at vise uligheden

$$\frac{1}{2}\sin x \le \frac{1}{2}x \le \frac{1}{2}\tan x.$$

   (Hint: Sammenlign arealet af det grå cirkeludsnit med arealet af ΔACD og ΔABD).

   (b) Omskriv uligheden fra (a) til

$$\cos(x) \le \frac{\sin x}{x} \le 1.$$

   (c) Brug at $\lim_{x\to 0}\cos(x) = 1$ samt uligheden i (b) til at argumentere for at

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

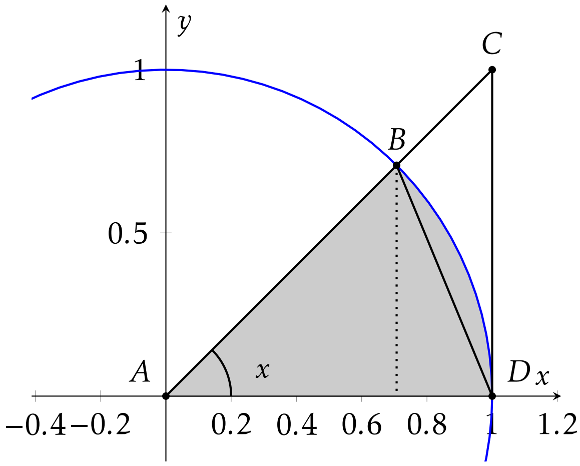
13. Vis at

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{x} = 0.$$

(Hint: Bruge Opgave 12, identiteten

$$\frac{\cos(x)-1}{x} = \frac{\sin^2 x}{x(1+\cos x)} = \frac{\sin x}{x}\frac{\sin x}{1+\cos x}$$

og produktreglen for grænser.)



Figur 3.25: Opgave 12

14. Brug Opgave 12 del (b) til at vise at

$$\frac{\cos(x)-1}{x} \leq \frac{\sin(x)-x}{x^2} \leq 0.$$

Argumenter vha. Opgave 13 for at

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)-x}{x^2} = 0.$$

15. Vis at

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

(Hint: Bruge Opgave 12, identiteten

$$\frac{\cos(x)-1}{x^2} = \frac{\sin^2 x}{x^2(1+\cos x)} = \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \frac{1}{1+\cos x}$$

og produktreglen for grænser.)

Kapitel 4

Differentiabilitet

4.1 Differentialkvotienter og differentialregneregler

Differentialregning omhandler at bestemme hældningen af en funktion f. Vi definerer hældningen af et punkt til at være

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}, \tag{4.1}$$

hvor $f'(x_0)$ kaldes differentialkvotienten i punktet x_0. Dette betyder, at vi skal finde grænsen fra både højre og venstre.

Motivationen for dette er, at vi tidligere kiggede på hældningen for en ret linje og hvis vi har en sekant der går igennem punkterne $(x_0, f(x_0))$ og $(x_0 + h, f(x_0 + h))$ (se Figur 4.1) så kender vi hældningen for den. Vi husker at sekantens hældning a er

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

og ved at indsætte vores to punkter får vi

$$a = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Idéen er så, at hvis vi lader h gå mod 0 så går sekantens hældning mod noget der minder om hældningen for f i punktet x_0 og denne grænse kalder vi så for f's hældning. Hvis differentialkvotienten $f'(x)$ eksisterer for alle x i domænet for f, så siger vi at f er en differentiabel funktion. Bemærk, at vi nogle gange noterer differentialkvotienten som

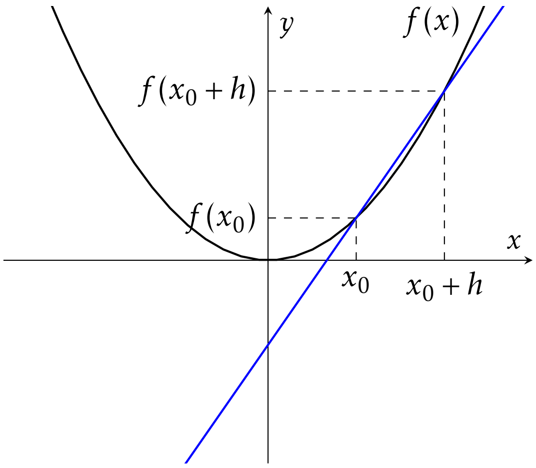
$$f'(x) = \frac{d}{dx} f(x) = \frac{df}{dx}(x).$$

Eksempler:

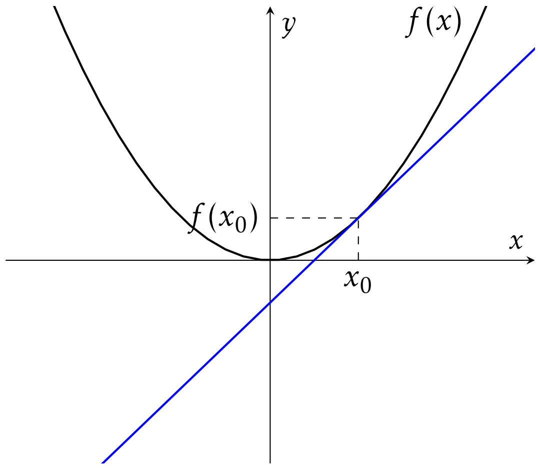
1. Bestem differentialkvotienten af funktionen $f(x) = ax + b$ i x_0:

   Vi indsæter funktionen i (4.1) og får

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$



Figur 4.1: En sekant i punktet x_0



Figur 4.2: Sekanten når h er tæt på 0

Vi kan ikke umiddelbart tage grænsen, da vi så vil dividere med 0. Derfor omskriver vi først og tager dernæst grænsen

$$
\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{a(x_0+h)+b-(ax_0+b)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{ax_0+ah+b-ax_0-b)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{ah}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} a \\
&= a.
\end{aligned}
$$

Dette viser, at $f'(x_0) = a$. Bemærk, at dette stemmer overens med at vi tidligere sagde at hældningen for en ret linje er a.

2. Vis at funktionen $f(x) = |x|$ ikke er differentiabel i $x = 0$:

   Vi husker, at $f(x) = |x|$ betyder at

$$
f(x) = \begin{cases} x & \text{hvis } x \geq 0, \\ -x & \text{hvis } x < 0. \end{cases}
$$

   Vi betragter grænsen fra venstre og får

$$
\begin{aligned}
\lim_{h\to 0^-} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} &= \lim_{h\to 0^-} \frac{|0+h|-|0|}{h} \\
&= \lim_{h\to 0^-} \frac{|h|}{h} \\
&= \lim_{h\to 0^-} \frac{-h}{h} \\
&= \lim_{h\to 0^-} -1 \\
&= -1,
\end{aligned}
$$

   hvor den tredje lighed gælder fordi h nærmer sig 0 fra venstre, hvilket betyder at h er negativ og så er $|h| = -h$.

4.1. DIFFERENTIALKVOTIENTER OG DIFFERENTIALREGNEREGLER

Dernæst kigger vi på grænsen fra højre og får

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0^+} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} &= \lim_{h\to 0^+} \frac{|0+h|-|0|}{h} \\
&= \lim_{h\to 0^+} \frac{|h|}{h} \\
&= \lim_{h\to 0^+} \frac{h}{h} \\
&= \lim_{h\to 0^+} 1 \\
&= 1,
\end{aligned}$$

hvor den tredje lighed gælder fordi h nærmer sig 0 fra højre, hvilket betyder at h er positiv og dermed har vi $|h| = h$.

Da grænsen i 0 fra højre ikke er lig med grænsen i 0 fra venstre, giver differentialkvotienten ikke mening i 0, og dermed er f ikke differentiabel i 0.

Regneregler: Vi har følgende regneregler for når man skal finde differentialkvotienten for en funktion.

1. $(c \cdot f)'(x) = c \cdot f'(x)$, hvor $c \in \mathbb{R}$.
2. $(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$.

Der findes flere regneregler for at finde differentialkvotienter, som vi vil betragte de næste par kursusgange.

Tabel over funktioner og deres differentialkvotient: Følgende er en tabel over de mest almindelige funktioner og deres differentialkvotienter.

Eksempler:

1. Differentier funktionen $f(x) = 3x^3$:

   Vi benytter regneregel 1. og Tabel 4.1 til at få

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(3x^3) = 3\frac{d}{dx}x^3 = 3 \cdot 3x^{3-1} = 9x^2.$$

2. Differentier funktionen $f(x) = \cos x$:

   Vi benytter Tabel 4.1 og får

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\cos x = -\sin x.$$

3. Differentier funktionen $f + g$ hvor $f(x) = e^{3x}$ og $g(x) = \ln x$:

   Vi har fra regneregl 2. at vi kan differentiere de to funktioner hver for sig, og ved at benytte Tabel 4.1 får vi at

$$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x) = \frac{d}{dx}e^{3x} + \frac{d}{dx}\ln x = 3e^{3x} + \frac{1}{x}.$$

$f(x)$	$f'(x)$
c	0
x	1
x^n	nx^{n-1}
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
e^x	e^x
e^{cx}	ce^{cx}
a^x	$a^x \ln a$
$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\cos x$	$-\sin x$
$\sin x$	$\cos x$
$\tan x$	$1 + \tan^2(x)$

Tabel 4.1: Udvalgte differentialkvotienter.

4. Differentier funktionen $f(x) = \ln(x^{\frac{1}{3}})$:

   Vi kan ikke umidbart bruge Tabel 4.1 til at differentiere $f(x)$ på denne form, men hvis vi i stedet omskriver funktionen ved hjælp af vores regneregler for den naturlige logaritme, så får vi

$$f(x) = \ln(x^{\frac{1}{3}}) = \frac{1}{3}\ln x.$$

   Ved at benytte Tabel 4.1 nu får vi at

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{3}\ln x\right) = \frac{1}{3}\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x} = \frac{1}{3x}.$$

4.1.1 Opgaver

1. Bestem $f'(1)$ for funktionen $f(x) = 3x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 1$.

2. Brug regnereglen $\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$ til at differentiere funktionerne

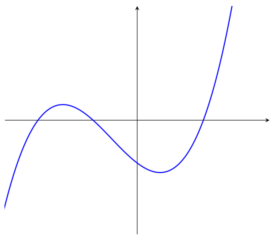
$$f(x) = x^3, \qquad f(x) = 3 + x, \qquad f(x) = \sqrt{x}, \qquad f(x) = \frac{1}{x}, \qquad f(x) = 2x^6.$$

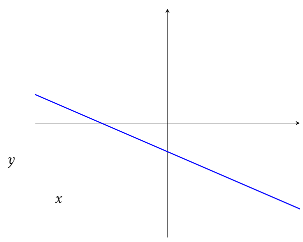
3. Differentier funktionerne

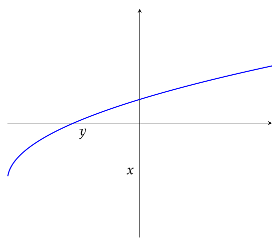
$$f(x) = 3e^{2x} - \frac{1}{2}\ln x, \qquad f(x) = \frac{1}{2}\sin x, \qquad f(x) = \ln(\frac{x^2}{13}) + 3e^{-\frac{1}{12}x}$$

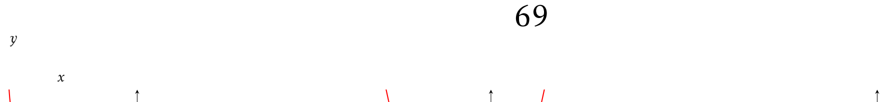
4. Differentier funktionerne

$$f(x) = 3x^7 + 2x^4 - 3x^2, \qquad f(x) = 2x^5 + 3x^{\frac{3}{2}} - 2x^{-2}, \qquad f(x) = 3\sqrt{x} + \frac{1}{x}.$$




y
x


y
x


y
x

5. Bestem for hver af de blå grafer i Figur 4.3 hvilken af de røde grafer der beskriver den afledede.

6. Brug Geogebra til bestemme

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(1+h)-f(1)}{h}$$

for funktionen

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x+3}, & \text{hvis } x \le 1 \\ \frac{x}{x+3} + 2, & \text{hvis } x > 1. \end{cases}$$

Hvorfor er f ikke differentiabel i $x = 1$?

7. Brug definitionen af differentialkvotienten til at finde den afledede af funktionerne

$$f(x) = k, \qquad f(x) = x, \qquad f(x) = kx.$$

8. Bestem, for hver af de følgende funktioner, de punkter hvor tangenthældningen er 2.

$$f(x) = \frac{x^3 - 2x}{x}, \qquad f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 2x + 7,$$

9. Differentier funktionerne

$$f(x) = 3\sqrt[3]{x}, \qquad f(x) = (2x-1)x^2, \qquad f(x) = (5x+3)(2x^2-2)(x+7).$$

10. Lad $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$ og $g(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$. Bestem $(f+g)'(x)$ og $(f-g)'(x)$.

11. Brug Geogebra til bestemme

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(h)-f(0)}{h}, \quad \text{og} \quad \lim_{h\to 0^-} \frac{f(h)-f(0)}{h}$$

for funktionen

$$f(x) = 1 - x^{2/5}.$$

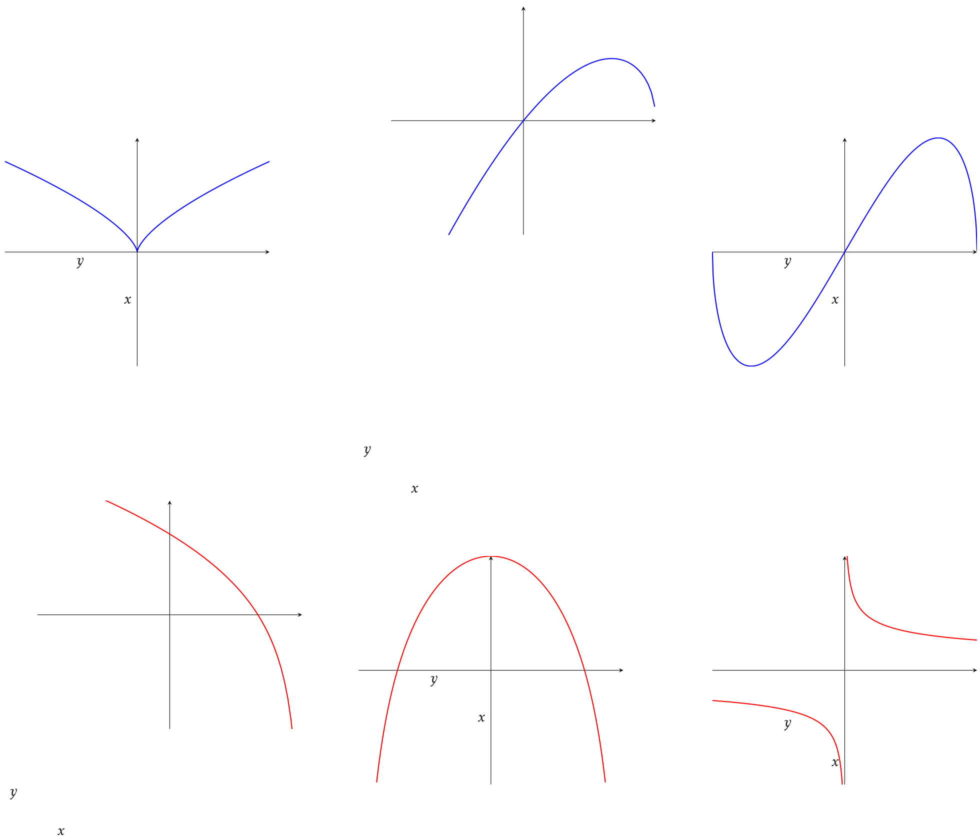
Hvorfor er f ikke differentiabel i $x = 0$?

12. Differentier funktionerne

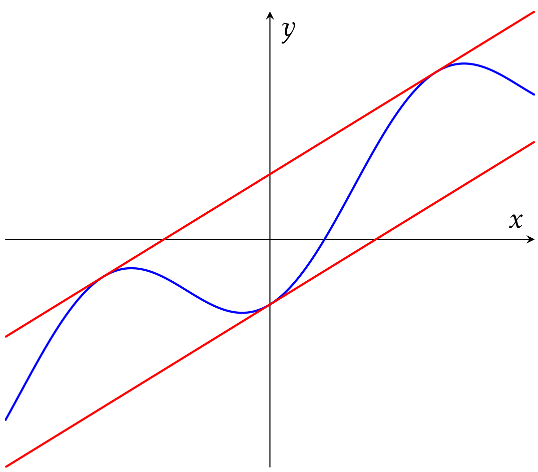
$$f(x) = \frac{\sqrt{x}+1}{x}, \qquad f(x) = \frac{x^2\sqrt{x^3}}{x^{-1/4}}, \qquad f(x) = 2\cos(\frac{x}{2})\sin(\frac{x}{2}), \qquad f(x) = \ln\frac{1}{x^2}$$

13. Bestem for hver af de blå grafer i Figur 4.4 hvilken af de røde grafer der beskriver den afledede.

14. Lad $f(x) = x - 2\cos x$.



Figur 4.4: Opgave 13



Figur 4.5: Opgave 14

(a) Bestem alle punkter hvor $f'(x) = 1$.

(b) Vis at alle punkter på formen $(x, f(x))$ hvor x er som i del (a) ligger på en af de to linjer

$$y = x + 2, \quad \text{eller} \quad y = x - 2.$$

(Hint: Se Figur 4.5.)

15. Brug definitionen af differentialkvotienten til at finde den afledede af funktionerne

$$f(x) = x^2, \qquad f(x) = \frac{1}{x}, \qquad f(x) = \sin x \qquad , f(x) = \sqrt{x}$$

(Hint: Brug sumformlerne, Opgave 12 og Opgave 13 til $\sin x$.)

16. Differentier funktionerne

$$f(x) = -\ln(\frac{1}{x^3}), \qquad f(x) = \sqrt{e^{6x}}.$$

17. Lad $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ være givet ved

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & \text{hvis } x \neq 0 \\ 1, & \text{ellers.} \end{cases}$$

Brug definitionen af differentialkvotienten til at bestemme $f'(0)$. (Hint: Brug resultatet fra Opgave 14.)

18. På Figur 4.6 ses en cirkel med radius r samt en tangent til cirklen som tangerer cirklen i punktet P. Lad s betegne buelængden fra punktet $(1, 0)$ til P, lad θ betegne vinklen mellem vandret og tangenten og lad ϕ betegne vinklen mellem vandret og P.

(a) Argumenter for at $\theta = \frac{\pi}{2} + \phi$.

(b) Brug formlen for længden af en cirkelbue, i.e. $\phi r = s$, til at beskrive θ som en funktion af s.

(c) Vis at

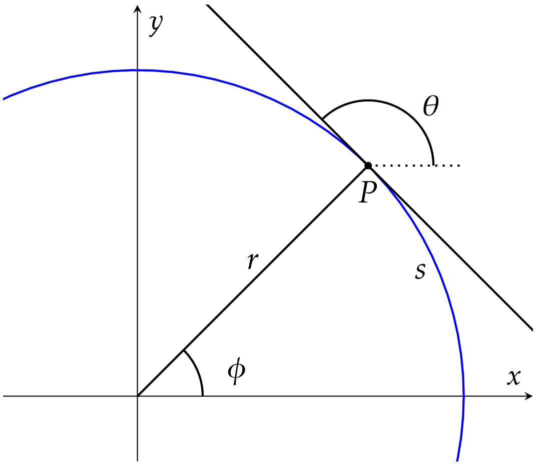
$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{r}.$$

4.2 Differentiation af produkter og kvotienter

Sidste gang betragtede vi hvordan man differentiere to funktioner lagt sammen eller en konstant gange en funktion. Denne gang vil vi studere, hvordan man differentierer to funktioner, der er ganget sammen eller divideret med hinanden.

Hvis vi har to funktioner f og g der begge afhænger af x så husker vi, at vi at deres produkt (de to funktioner ganget sammen) og kvotient (de to funktioner divideret) er givet på følgende måde

$$(fg)(x) = f(x) \cdot g(x) \qquad \text{og} \qquad \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)},$$



Figur 4.6: Opgave 18

hvor kvotienten kun giver mening, hvis $g(x) \neq 0$.

Eksempler på produkter og kvotienter af funktioner er

$$xe^x, \quad \frac{1}{x} \cdot \cos x = \frac{\cos x}{x}, \quad \sin x \cdot \ln(x), \quad \frac{\ln x}{\sqrt{x}}, \quad \sqrt{x} \cdot x.$$

Bemærk, at det sidste eksempel er et produkt af to funktioner, der begge afhænger af x, men hvis vi omskriver kvadratroden ved hjælp af vores potensregler får vi

$$\sqrt{x} \cdot x = x^{\frac{1}{2}} \cdot x = x^{\frac{3}{2}},$$

som ikke er et produkt af funktioner. Det kan derfor nogle gange være nemmere, at omskrive et produkt af funktioner før man differentierer.

Regneregler: Vi har følgende regneregler for at differentiere produkter og kvotienter.

1. $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$.
2. $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$, hvis $g(x) \neq 0$.

Man kan vise (som i kommer til at gøre i en senere opgaveregning) at regnereglen for at differentiere kvotienter, følger ud fra regnereglen om at differentiere produkter.

Eksempler:

1. Differentier xe^x:

   Vi sætter $f(x) = x$ og $g(x) = e^x$ og får at $f'(x) = 1$ og $g'(x) = e^x$. Ved at indsætte det i regneregel 1. får vi

   $$\frac{d}{dx}(xe^x) = 1 \cdot e^x + x \cdot e^x = e^x + xe^x = e^x(1+x).$$

2. Differentier $\frac{\cos x}{x}$:

   Vi sætter $f(x) = \cos x$ og $g(x) = x$, og får at $f'(x) = -\sin x$, $g'(x) = 1$ og $(g(x))^2 = x^2$. Indsætter vi det i regneregel 2. får vi

   $$\frac{d}{dx}\left(\frac{\cos x}{x}\right) = \frac{-\sin(x) \cdot x - \cos(x) \cdot 1}{x^2} = \frac{-(x \sin x + \cos x)}{x^2} = -\frac{x \sin x + \cos x}{x^2}.$$

3. Differentier $\sqrt{x} \cdot x$ først ud fra regneregel 1. og dernæst ved at omskrive udtrykket ved hjælp af potensregnereglerne:

   Vi gør det først ved at bruge regneregel 1. Lad $f(x) = \sqrt{x}$ og $g(x) = x$ så har vi at $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ og $g'(x) = 1$. Indsætter vi nu det i regneregel nummer 1. får vi

$$\frac{d}{dx}(\sqrt{x} \cdot x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot x + \sqrt{x} \cdot 1 = \frac{x}{2\sqrt{x}} + \sqrt{x} = \frac{1}{2}\sqrt{x} + \sqrt{x} = \frac{3}{2}\sqrt{x},$$

   hvor vi i den tredje lighed har brugt at $x = \sqrt{x} \cdot \sqrt{x}$.

   Hvis vi omskriver $\sqrt{x} \cdot x$ ved hjælp at potensregneregler, så vi tidligere at

$$\sqrt{x} \cdot x = x^{\frac{3}{2}},$$

   hvilket giver at

$$\frac{d}{dx}(\sqrt{x} \cdot x) = \frac{d}{dx} x^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}\sqrt{x}.$$

4.2.1 Opgaver

1. Bestem den afledede af funktionen $f(x) = x\ln(x) - x$.

2. Vis at

$$\frac{d}{dx}\tan x = 1 + \tan^2 x.$$

   (Hint: Brug $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$) Hvordan passer dette med Tabel 1 i oplægget fra sidste gang?

3. Bestem den afledede af funktionen $f(x) = (x-1)e^x$.

4. Differentier funktionerne

$$f(x) = 3xe^x, \qquad f(x) = 2x^2 \sin x, \qquad f(x) = \frac{3x^2 + 2x - 1}{x - 1}.$$

5. Differentier funktionerne

$$f(x) = \frac{2x^5 - 2x^3 + 1}{x^4 - 2x}, \qquad f(x) = \frac{\frac{2}{x} - \frac{3}{x^2}}{\frac{1}{x^3} + \frac{2}{x^4}}, \qquad f(x) = \frac{x \sin x}{-\cos x}$$

6. Lad f, g, h være differentiable funktioner. Brug produktreglen til at vise at

$$\frac{d}{dx}(fgh)(x) = f'(x)g(x)h(x) + f(x)g'(x)h(x) + f(x)g(x)h'(x).$$

7. Lad f og g være differentiable funktioner. Brug produktreglen til at vise at

$$(fg)''(x) = f''(x)g(x) + 2f'(x)g'(x) + f(x)g''(x).$$

8. Differentier følgende funktioner

$$f(x) = \frac{x - e^x}{1 + x}, \qquad f(x) = \frac{x}{e^x + 1}, \qquad f(x) = \frac{\ln(x)}{x}, \qquad f(x) = \frac{\cos x}{\sin x}$$

9. Udregn følgende

$$\frac{d^2}{dx^2}e^{-x}x^2, \qquad \frac{d^2}{dx^2}e^x \ln(x), \qquad \frac{d^2}{dx^2}(x^2+1)\sin(x).$$

10. Differentier funktionerne

$$f(x) = \frac{x^2e^x}{-\ln(x^x)}, \qquad g(x) = x^2e^x \ln x, \qquad h(x) = \tan(x)e^{-2x}\ln(x)x^2$$

11. Vis at den afledede af funktionen

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & \text{hvis } x \neq 0 \\ 1, & \text{ellers.} \end{cases}$$

Er givet ved

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{x\cos x - \sin x}{x^2}, & \text{hvis } x \neq 0 \\ 0, & \text{ellers.} \end{cases}$$

(Hint: Fra Opgave 17 kender vi $f'(0)$, så vi behøver kun betragte tilfældet $x \neq 0$.)

12. Vis at $f'(x)$ fra Opgave 11 er kontinuert. (Hint: Brug Opgave 14 og Opgave 15 til at bestemme $\lim_{x\to 0} f'(x)$)

13. Lad f være givet som i Opgave 11 og lad $g(x) = 1/x$. Vis at $g'(\frac{\pi}{2} + 2\pi k) = f'(\frac{\pi}{2} + 2\pi k)$ for alle heltal k.

4.3 Kædereglen

Vi er nu kommet til at studere, hvordan man differentiere sammensatte funktioner. Vi husker, at en sammensat funktion er en funktion på formen

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)).$$

Eksempler på sammensatte funktioner er

$$\cos(x^3), \quad \sin(\sqrt{x}), \quad \tan\left(\frac{1}{x}\right), \quad (\sin x)^2, \quad \sqrt{\tan x}, \quad \frac{1}{\cos x}, \quad \frac{1}{x^2}.$$

Regneregler: Vi har følgende regneregel for at differentiere sammensatte funktioner.

1. $(f \circ g)'(x) = \frac{d}{dx}(f(g(x))) = f'(g(x))g'(x)$.

Denne regel kaldes ofte for kædereglen. Bemærk, at kædereglen siger at hvis vi skal differentiere en sammensat funktion, så gør vi det ved at differentiere den ydre funktion og sætte den indre funktion ind på x plads deri, og så gange den indre funktion differentieret på.

Bemærk, at ligesom ved produkter af funktioner, kan det nogle gange være smart at omskrive en funktion ved hjælp at potensregneregler. F.eks. kan den sammensatte funktion $\frac{1}{x^2}$ omskrives til

$$\frac{1}{x^2} = x^{-2}.$$

Eksempler:

1. Differentier $\cos(x^2)$:

   Vi ser, at $f(x) = \cos x$ er den ydre funktion og $g(x) = x^2$ er den indre funktion. Derudover har vi, at $f'(x) = -\sin x$, $f'(g(x)) = -\sin(x^2)$ og $g'(x) = 2x$. Indsætter vi det i kædereglen får vi, at

$$\frac{d}{dx}\cos(x^2) = -\sin(x^2)2x = -2x\sin(x^2).$$

2. Differentier e^{x^2+3x}:

   Vi ser, at $f(x) = e^x$ er den ydre funktion og $g(x) = x^2+3x$ er den indre funktion. Derudover har vi, at $f'(x) = e^x$, $f'(g(x)) = e^{x^2+3x}$ og $g'(x) = 2x+3$. Indsætter vi det i kædereglen får vi, at

$$\frac{d}{dx}e^{x^2+3x} = e^{x^2+3x}(2x+3) = 2xe^{x^2+3x} + 3e^{x^2+3x}.$$

3. Differentier $\dfrac{1}{x^2}$ først ved at bruge kædereglen og dernæst ved at omskrive den ved brug af potensregneregler:

   Vi bruger først kædereglen. Vi ser, at $f(x) = \frac{1}{x}$ er den ydre funktion og $g(x) = x^2$ er den indre funktion. Derudover har vi, at $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$, $f'(g(x)) = -\frac{1}{(x^2)^2} = -\frac{1}{x^4}$ og $g'(x) = 2x$. Indsætter vi det i kædereglen får vi, at

$$\frac{d}{dx}\frac{1}{x^2} = -\frac{1}{x^4}\cdot 2x = \frac{-2}{x^3}.$$

   Dernæst differentierer vi funktionen ved at omskrive den ved hjælp af potensregneregler. Vi husker, at $\frac{1}{x^2} = x^{-2}$, hvilket giver at

$$\frac{d}{dx}\frac{1}{x^2} = \frac{d}{dx}x^{-2} = -2x^{-3} = \frac{-2}{x^3}.$$

4. Udregn $(f \circ g)'(2)$ givet at $f'(4) = 3$, $g(2) = 4$ og $g'(2) = 5$:

   Vi har fra kædereglen, at

$$(f \circ g)'(x) = \frac{d}{dx}(f(g(x))) = f'(g(x))\cdot g'(x).$$

   Indsætter vi nu de værdier vi har fået oplyst, får vi

$$(f \circ g)'(2) = f'(g(2))\cdot g'(2) = f'(4)\cdot 5 = 3\cdot 5 = 15.$$

4.3.1 Opgaver

1. Differentier funktionerne

$$f(x) = \sqrt{x^2+1}, \qquad f(x) = (3x^2+2x+1)^3, \qquad f(x) = (4x+2)^2$$

2. Differentier funktionerne

$$f(x) = e^{x^2}, \qquad g(x) = \frac{1}{\ln x} + \tan(x^2), \qquad h(x) = \sqrt{x^2+2x-1}$$

3. Brug Opgave 2 fra sidste gang til at vise at

$$\frac{d^2}{dx^2}\tan x = 2\tan x + 2\tan^3 x$$

4. Bestem den afledede af funktionerne $f(x) = \ln(\frac{1}{\cos x})$ og $g(x) = \ln(\sin x)$.

5. Differentier funktionen $f(t) = \sqrt{e^{4t} + e^{-4t} - 2}$.

6. Vis at

$$\frac{d}{dx}\cos^2 x = -\sin(2x), \qquad \frac{d}{dx}\sin^2 x = \sin(2x)$$

7. Lad $f(x) = \frac{\sin^2(x)\cos(x)}{\tan(x)}$. Vis at

$$f'(x) = \cos^3(x) - 2\sin^2(x)\cos(x)$$

8. Differentier funktionerne

$$f(x) = \ln(x+3), \qquad f(x) = e^{2x+x^2}, \qquad f(x) = \sin(x-1), \qquad f(x) = \sqrt{\ln(x)}.$$

9. Differentier funktionerne

$$f(x) = \ln((2x^4 - 3x^2)^3)^2, \qquad g(x) = \cos^2((x-1)^5), \qquad h(x) = e^{\cos(x^2)}.$$

10. Funktionen $f(x) = a^x$ hvor $a > 1$ er differentiabel. Brug kædereglen til at bestemme $f'(x)$. (Hint: Differentier begge sider af identiteten $a^x = e^{x\ln(a)}$.)

11. Funktionen $g(x) = \log_a(x)$ hvor $a > 1$ er differentiabel. Brug kædereglen samt Opgave 10 til at vise at

$$g'(x) = \frac{1}{x\ln a}.$$

(Hint: Differentier begge sider af identiteten $x = a^{\log_a(x)}$).

12. Differentier funktionen $f(x) = \ln(\ln(x))$

13. Brug produktreglen og kædereglen til at vise kvotientreglen. (Hint: Skriv $\frac{f(x)}{g(x)} = f(x)(g(x))^{-1}$.)

14. Vis at

$$\frac{d}{dx}\Big(x(\ln(x))^2 - 2x\ln(x) + 2x\Big) = (\ln(x))^2$$

15. Bestem den afledede til funktionen $f(x) = \log_a x$ ved at bruge Opgave 17.

16. Lad f, g, h være differentiable funktioner. Brug kædereglen til at vise at

$$(f \circ g \circ h)'(x) = f'(g(h(x)))g'(h(x))h'(x).$$

4.4 Tangentligning og monotoniforhold

Vi vil nu se på nogle anvendelser af differentiation. Den første anvendelse er, hvordan man finder forskriften for den rette linje der går gennem et punkt på grafen for f, f.eks. $(x_0, f(x_0))$ med hældning $f'(x_0)$. Denne linje kaldes for tangenten til f i punktet $(x_0, f(x_0)$.

Vi husker, at forskriften for den rette linje er givet ved

$$y = ax + b, \tag{4.2}$$

hvor a er hældningen og b er skæringspunktet med y-aksen. Vi har, at $a = f'(x_0)$ i forskriften for tangentens ligning da $f'(x_0)$ præcis beskriver hældningen. Det betyder at vi kun mangler at bestemme b, for at have en forskrift for tangentens ligning. Da vi ved, at tangenten går gennem punktet $(x_0, f(x_0))$ har vi, at

$$b = f(x_0) - f'(x_0)x_0.$$

Hvis vi indsætter dette i (4.2), får vi at

$$y = f'(x_0)x + (f(x_0) - f'(x_0)x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Denne ligning kaldes for tangents ligning til f i punktet $(x_0, f(x_0))$.

Eksempler:

1. Find tangentens ligning til $f(x) = x^2 - 4x + 7$ i punktet $(1, 4)$:

   Vi ser ud fra punktet, at $x_0 = 1$ og $f(x_0) = 4$. For at finde $a = f'(x_0)$ finder vi først $f'(x)$, som er

   $$f'(x) = \frac{d}{dx}(x^2 - 4x + 7) = 2x - 4.$$

   Det medfører, at

   $$f'(1) = 2 \cdot 1 - 4 = -2.$$

   Til sidst finder vi b ved

   $$b = f(x_0) - f'(x_0)x_0 = 4 - (-2) \cdot 1 = 4 + 2 = 6,$$

   så tangentens ligning til f i punktet $(1, 4)$ er

   $$y = -2x + 6.$$

Monotoniforhold: Den næste anvendelse vi vil betragte er monotoniforhold. At finde monotoniforhold går ud på at finde ud af i hvilke intervaller en given funktion er voksende og hvor den er aftagende. Vi siger, at

1. En funktion er voksende i intervallet $[a, b]$, hvis $f'(x) \geq 0$ for alle $x \in [a, b]$.

2. En funktion er aftagende i intervallet $[a, b]$, hvis $f'(x) \leq 0$ for alle $x \in [a, b]$.

 4.4. TANGENTLIGNING OG MONOTONIFORHOLD

Hvis vi har en funktion f som er differentiabel og hvor f' er en kontinuert funktion, så gælder der, at f kun kan skifte fra at være voksende (aftagende) til at være aftagende (voksende) i et punkt x_0, hvor $f'(x_0) = 0$. Vi kalder sådanne punkter x_0 for kritiske punkter. Bemærk dog, at selvom selvom f kan skifte fra at være voksende (aftagende) til at være aftagende (voksende) efter et kritisk punkt, så betyder det ikke at den nødvendigvis gør det. Hvis x_0 opfylder at $f'(x_0) = 0$, men f er voksende (aftagende) både før og efter x_0, så kaldes x_0 for et vendetangentspunkt.

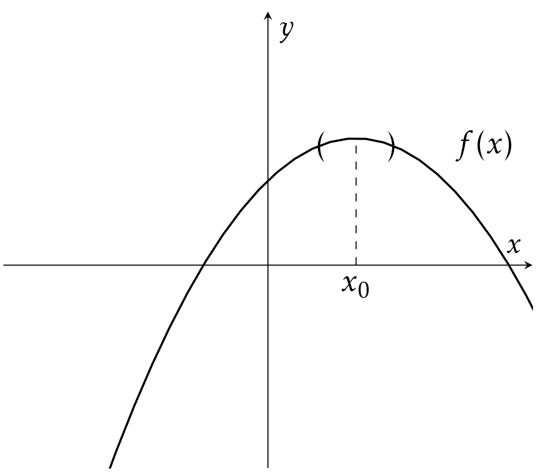
Hvis der findes et x_0 hvorom der gælder, at

$$f(x) \leq f(x_0),$$

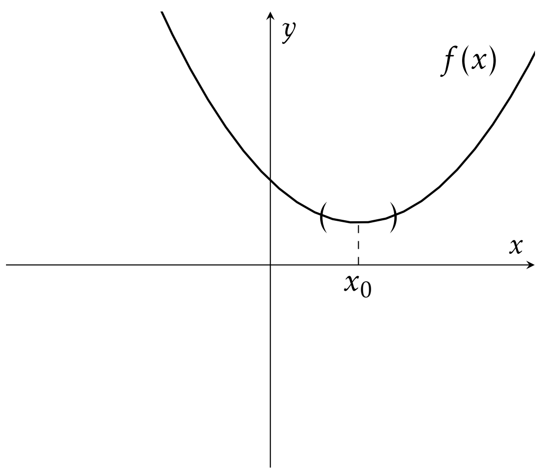
for alle x der både ligger i et lille interval omkring x_0 og i domænet for f, så kaldes x_0 for at lokalt maximum (se Figur 4.7). På tilsvarende vis, siger vi at x_0 er et lokalt minimum hvis der gælder, at

$$f(x) \geq f(x_0),$$

for alle x der både ligger i et lille interval omkring x_0 og i domænet for f (se Figur 4.8).



Figur 4.7: Lokalt maximum.



Figur 4.8: Lokalt minimum.

For at finde ud af i hvilke intervaller en funktion f er voksende og aftagende, finder vi først ud af i hvilke punkter $f'(x) = 0$. Dernæst finder vi ud af hvilket fortegn $f'(x)$ har i punkter henholdsvis før, efter og imellem disse kritiske punkter, da f' kun kan skifte fortegn efter et kritisk punkt. Disse værdier kan man så indsætte i en monotonilinje (se Tabel 4.2). Hvis $f'(x)$ er negativ så vil man i f's indgang i monotonilinjen lave en nedadgående pil, for at vise at f er aftagende og modsat, hvis $f'(x)$ er positiv vil man lave en opadgående pil (se det følgende eksempel).

x	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
$f'(x)$					
$f(x)$					

Tabel 4.2: Monotonilinje.

Til sidst kan man så ud fra monotonilinjen konkludere i hvilke intervaller funktionen er aftagende og voksende.

Eksempler:

1. Bestem monotoniforhold for funktionen $f(x) = -x^3 - 3x^2 + 2$:

   Vi finder først $f'(x)$ ved at differentiere

   $$f'(x) = (-x^3 - 3x^2 + 2)' = -3x^2 - 6x.$$

   Dernæst løser vi $f'(x) = 0$ og ser at

   $$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\Leftrightarrow -3x^2 - 6x = 0, \\ &\Leftrightarrow -3x(x+2) = 0. \end{aligned}$$

   Ved at benytte nulreglen får vi, at de kritiske punkter er $x = -2$ og $x = 0$. Dermed ser vores monotonilinje indtil videre ud som

x	x_1	-2	x_2	0	x_3
$f'(x)$		0		0	
$f(x)$					

   Tabel 4.3: Monotonilinje for $f(x) = -x^3 - 3x^2 + 2$.

   Vi vælger nu punkter x_1, x_2, x_3 hvor x_1 er mindre end -2, x_2 ligger mellem -2 og 0 og x_3 er større end 0, f.eks. $x_1 = -3$, $x_2 = -1$ og $x_3 = 1$. Vi indsætter nu disse punkter i forskriften for f' og får

   $$\begin{aligned} f'(-3) &= -3\cdot(-3)^2 - 6\cdot(-3) = -27 + 18 = -9, \\ f'(-1) &= -3\cdot(-1)^2 - 6\cdot(-1) = -3 + 6 = 3, \\ f'(1) &= -3\cdot 1^2 - 6\cdot 1 = -3 - 6 = -9. \end{aligned}$$

   Hvis vi indsætter disse oplysninger i vores monotonolinje, får vi

x	-3	-2	-1	0	1
$f'(x)$	-9	0	3	0	-9
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$

   Tabel 4.4: Monotonilinje for $f(x) = -x^3 - 3x^2 + 2$.

   Det giver at

   (a) f er aftagende i intervallet $(-\infty, -2]$,

   (b) f er voksende i intervallet $[-2, 0]$,

   (c) f er aftagende i intervallet $[0, \infty)$,

   og at $x = -2$ er et lokalt minimum og $x = 0$ er et lokalt maximum.

4.4.1 Opgaver

1. Bestem monotoniforholdene for funktionen $f(x) = 2x^2 - 2x - 1$.

2. Bestem en ligning for tangenten til grafen for funktionen $f(x) = x^3 + 3x^2 + 1$ i punktet $(1, f(1))$.

3. En differentiabel funktion f med definitionsmængde $]-1,\infty[$ opfylder at

   (a) f er aftagende i $]-1,1]$.

   (b) f er voksende i $[1,\infty[$.

   (c) f' har kun et nulpunkt.

   Bestem fortegnet for $f'(0)$, $f'(2)$ og $f'(1)$.

4. Bestem tangentligningen for funktionen $\ln(x)$ i punktet $(1,0)$.

5. Bestem monotoniforholdene for funktionen $f(x) = 3x^3 + 3x^2 + x + 1$

6. Lad f være en funktion der opfylder $f(2) = 4$ og $f'(2) = \frac{1}{2}$. I hvilket punkt skærer tangenten til f i punktet $(2, f(2))$ x-aksen.

7. Bestem tangentligningen for funktionen $f(x) = -3x^3 - 3x^2 + x + 1$ i de punkter hvor $f'(x) = 2$.

8. Lad $f(x) = (x-2)^2 + 1$. Bestem tangentligningerne for de tangenter til f som skærer x-aksen i punktet $(\frac{5}{4}, 0)$.

9. Lad f være en funktion der er symmetrisk om y-aksen, i.e. $f(-x) = f(x)$, som opfylder at $f'(1) = 2$ og $f(1) = -1$. Bestem tangentligningen for funktionen i punktet $(-1, f(-1))$.

10. Lad f og g være funktioner som opfylder $f(1) = 2$, $f'(1) = 4$, $g(-3) = 1$, $g'(-3) = -\frac{1}{2}$. Bestem tangentligningen for funktionen $f \circ g$ når $x = -3$.

11. Bestem monotoniforholdene for funktionen $f(x) = 5$

12. Bestem

    (a) Tangentens ligning for funktionen $\sin x$ i punktet $(0, \sin 0)$.

    (b) Tangentens ligning for funktionen $\cos x$ i punktet $(\frac{\pi}{2}, \cos\frac{\pi}{2})$.

    (c) Arealet af trekanten afgrænset af tangenterne og x-aksen.

4.5 Optimering

Den sidste anvendelse af differentiabilitet vi vil betragte er emnet optimering. Optimering omhandler at finde de maksimale og/eller minimale værdier for en funktion. Vi så sidste gang hvad et lokalt maksimum/minimum er. Vi kalder et punkt x_0 for et globalt maksimum, hvis der gælder

$$f(x) \leq f(x_0),$$

for alle x i domænet for f. På tilsvarende hvis kalder vi et punkt x_0 for et globalt minimum hvis

$$f(x) \geq f(x_0),$$

for alle x i domænet for f.

Hvis vi gerne vil finde den mindste eller den største værdi en funktion f antager på et lukket interval $[a,b]$ (lukket betyder at endepunkterne a og b er med i intervallet), så er der tre muligheder for hvor det kan ske:

1. Punktet x_0 kan være et globalt maksimum/minimum, hvis $f'(x_0) = 0$.
2. Punktet x_0 kan være et globalt maksimum/minimum, hvis $f'(x_0)$ ikke er defineret.
3. Punktet x_0 kan være et globalt maksimum/minimum, hvis $x_0 = a$ eller $x_0 = b$.

Det betyder, at hvis vi vil finde den største (mindste) værdi for en funktion i intervallet $[a,b]$, så skal vi undersøge disse tre tilfælde, og vælge den største (mindste) værdi.

Bonus info: Bemærk, at hvis vores interval (a,b) er åbent så skal punkt 3. byttes ud med

3*. Hvis $\lim_{y\to a} f(y) \geq f(x)$ eller $\lim_{y\to b} f(y) \geq f(x)$, for alle $x \in (a,b)$, så har f ikke noget maksimum i intervallet (a,b),

4*. Hvis $\lim_{y\to a} f(y) \leq f(x)$ eller $\lim_{y\to b} f(y) \leq f(x)$, for alle $x \in (a,b)$, så har f ikke noget minimum i intervallet (a,b),

da vi i det tilfælde ikke kan garantere, at der er et globalt maksimum/minimum.

Eksempler:

1. Find den mindste værdi som funktionen $f(x) = |x|$ i intervallet $[-3,3]$:

   Vi husker at $f(x) = |x|$ betyder at

   $$f(x) = \begin{cases} x & \text{hvis } x \geq 0, \\ -x & \text{hvis } x < 0. \end{cases}$$

   Vi tjekker nu de tre mulige tilfælde, hvor det globale minumum kan være. Først husker at vi $f(x) = |x|$ ikke er differentiabel i punktet $x = 0$, hvilket betyder at $f(0) = 0$ muligvis er det globale minimum.

   Derudover, har vi at

   $$f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{hvis } x > 0, \\ -1 & \text{hvis } x < 0, \end{cases}$$

   hvilket betyder at der ikke eksistere nogle punkter hvor $f'(x) = 0$.

   Til sidst tjekker vi værdien af f i endepunkterne, hvilket giver

   $$f(-3) = |-3| = 3 \qquad \text{og} \qquad f(3) = |3| = 3.$$

   Derfor har det globale minimum for $f(x) = |x|$ i intervallet $[-3,3]$ værdien 0.

2. Find den største værdi som funktionen $f(x) = |x|$ antager i intervallet $[-2, 4]$:

   Vi har fra Opgave 1. at der ikke er nogen løsninger til $f'(x) = 0$ og at værdien for det punkt hvor den afledede af f ikke eksisterer er 0. Derfor mangler vi kun at tjekke de to endepunkter

   $$f(-2) = |-2| = 2 \qquad \text{og} \qquad f(4) = |4| = 4.$$

   Dermed kan vi se, at værdien af det globale maksium for $f(x) = |x|$ i intervallet $[-2, 4]$ er 4.

3. Find det globale maksimum for funktionen $f(x) = -x^2$ i intervallet $[-10, 10]$:

   Vi tjekker igen de tre muligheder for et maksimum. Først finder vi den afledede af f ved at differentiere

   $$f'(x) = \frac{d}{dx}(-x^2) = -2x.$$

   Det betyder at $f'(x)$ er defineret i hele vores interval og det eneste punkt der opfylder at $f'(x) = 0$ er $x = 0$ med værdien $f(0) = 0$. Vi mangler nu kun at tjekke endepunkterne

   $$f(-10) = -(-10)^2 = -100 \qquad \text{og} \qquad f(10) = -10^2 = -100.$$

   Dermed kan vi se, at værdien af det globale maksium for $f(x) = -x^2$ i intervallet $[-10, 10]$ er 0.

4. Antag, at vi har en firkantet mark, der støder op til et vandløb. Derudover, har vi 120m hegn. Vi skal indhegne en del af marken i en firkant, hvor den ene side er afgrænset af vanløbet. Find længden og bredden af denne indhegning så arealet af indhegningen bliver størst mulig:

   Lad x og y betegne henholdsvis længden og bredden. Så beskriver funktionen

   $$A(x, y) = xy$$

   arealet af vores indhegning. Da vi har 120m hegn har vi derudover ligningen

   $$2x + y = 120$$

   og hvis vi isolerer y i den får vi

   $$y = 120 - 2x.$$

   Hvis vi indsætter dette på y's plads i A så får vi i stedet en funktion der kun afhænger af variablen x givet ved

   $$A(x) = x(120 - 2x) = 120x - 2x^2,$$

   hvor $x \in (0, 60)$. For at løse vores problem, skal vi derfor finde det globale maksimum for A. Vi finder først den afledede

   $$A'(x) = \frac{d}{dx}(120x - 2x^2) = 120 - 4x.$$

x	10	30	40
$f'(x)$	80	0	-40
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$

Tabel 4.5: Monotonilinje for $A(x) = 120x - x^2$.

Dernæst finder vi de $x \in (0,60)$ som opfylder at $A'(x) = 0$

$$\begin{aligned} A'(x) = 0 &\Leftrightarrow 120 - 4x = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 30. \end{aligned}$$

Ved at tegne en monotonilinje (se Tabel 4.5) ser vi at $x = 30$ er et lokalt maksimum (se Tabel 4.5) med værdien $A(30) = 1800$.

Derudover ser vi at $f'(x)$ er defineret for alle $x \in (0,60)$. Da vores interval $(0,60)$ er åbent, mangler vi nu kun at tjekke endepunkterne for at se om der er et globalt maksimum.

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0^+} A(x) &= \lim_{x\to 0^+} 120x - 2x^2 = 120 \cdot 0 - 2 \cdot 0^2 = 0 \\ \lim_{x\to 60^-} A(x) &= \lim_{x\to 60^-} 120x - 2x^2 = 120 \cdot 60 - 2 \cdot 60^2 = 0. \end{aligned}$$

Da $A(30)$ er større end de to grænseværdier, har vi, at $A(30)$ er vores globale maksimum. Dvs. at for at få det størst mulige areal skal $x = 30$ og $y = 120 - 2 \cdot 30 = 60$.

4.5.1 Opgaver

1. I denne opgave betragtes en kasse med højde $5cm$, længde x og bredde y. Bestem det maksimale rumfang kassen kan have når bundens omkreds skal være $20cm$.

2. Find lokale maksimum og minimum for funktionen $f(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 1$

3. Et $300m$ langt hegn skal indhegne et rektangulært område. Bestem sidelængderne i rektanglet så arealet bliver størst muligt.

4. Brug differentialregning til at vise toppunktsformlen for et andengradspolynomium.

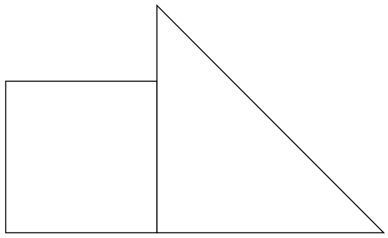
5. En åben kasse skal have kvadratisk bund og et rumfang på $5000cm^2$. Bestem sidelængden i bunden og højden så kassens overfladeareal bliver mindst muligt.

6. Funktionen f givet ved $f(x) = ax^3 + bx^2$ har et lokalt ekstremumspunkt i $(2,2)$. Bestem a og b.

7. Et kvadrat og en ligebenet trekant er givet som i Figur **??**.

   (a) Bestem x så det samlede areal af kvadratet og trekanten bliver størst muligt.

   (b) Bestem x så det samlede areal af kvadratet og trekanten bliver mindst muligt.



Figur 4.9: Opgave 7

8. Har funktionen $f(x) = 1 - \sqrt[5]{x^2}$ et maksimum. Hvis ja så bestem det givne maksimum.

9. Bestem de punkter hvor tangenthældningen til grafen for funktionen $f(x) = e^{-(x+1)^2}$ er størst og mindst. Hvad er den største og mindste tangenthældning. (Hint: Bemærk at
$$f''(x) = e^{-(x+1)^2}(4x^2 + 8x + 2),$$
samt at $e^{-(x+1)^2} > 0$ for alle $x \in \mathbf{R}$.)

10. Et rektangel er indskrevet i enhedscirklen som vist i Geogebra . Bestem sidelængderne så rektanglet får størst muligt areal. (Hint: Beskriv arealet af rektanglet ud fra punktet P.)

11. En sekskant er indskrevet i enhedscirklen som vist i Geogebra. Bestem det størst mulige areal af sekskanten. (Hint: Beskriv arealet af sekskanten ud fra punktet P.)

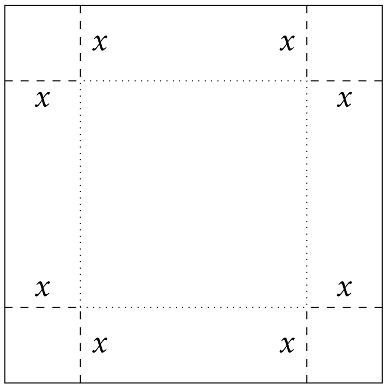
12. En trekant er indskrevet i enhedscirklen som vist i Geogebra. Bestem det størst mulige areal af trekanten. (Hint: Beskriv arealet af trekanten ud fra punktet P.)

13. Et rektangel er placeret i et koordinatsystem således at det har et hjørnepunkt i origo, et på den positive del af y-aksen, et på den positive del af x-asksen. Det sidste hjørnepunkt er placeret på linjen $y = -3x + 48$. Bestem sidelængderne på rektanglet som giver det størst mulige areal. Bestem også det maksimale areal af rektanglen.

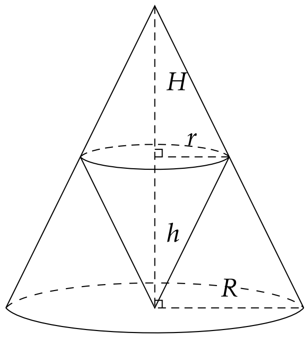
14. Et rektangel er placeret i et koordinatsystem således at det har et hjørnepunkt i origo, et på den positive del af y-aksen, et på den positive del af x-asksen. Det sidste hjørnepunkt er placeret på grafen for funktionen $\frac{\sin x}{x}$. Bestem sidelængderne på rektanglet som giver det størst mulige areal når $x \in [0\pi]$. Bestem også det maksimale areal af rektanglen.

15. Lad $f(x) = x^2 + 4 - 4x$. I intervallet $]-2, 2[$ danner tangenten til f samt x-aksen og y-aksen en retvinklet trekant. Bestem ligningen for den tangent der giver det størst mulige areal af trekanten. Bestem også arealet af denne trekant. Hvad er det mindst mulige areal areal af trekanten i det givne interval.

16. En kvadratisk plade med sidelængde 1 skæres som vist Figur 4.10 og foldes efterfølgende til en kasse uden top. Bestem x så kassen rumfang bliver størst muligt.



Figur 4.10: Opgave 16



Figur 4.11: Opgave 19

20. Vis Bernoullis ulighed,

$$(1+x)^r \geq 1 + rx$$

for $r \geq 1$ og $x > -1$. (Hint: Find minimum for funktionen $f(x) = (1+x)^r - (1+rx)$.)

17. I denne opgave betragtes 3 plader af typen som er afbildet i Figur 4.10. De afskårne kvadrater laves til to terninger. Bestem x således de tre kasser uden låg og de to terninger får størst mulig fælles rumfang.

18. Bestem den største og mindste værdi som funktionen $g(x) = x^3 + \frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{2}x$ antager intervallet

    (a) $[-2, \frac{3}{2}]$,

    (b) $[-\frac{3}{2}, 1]$.

19. I Figur 4.11 ses en kegle med højde H og radius R. Inden i denne kegle er en mindre kegle med højde h og radius r placeret på hovedet. Bestem h og r så rumfanget af den indre kegle bliver størst muligt. Bestem efterfølgende det maksimale rumfang af den lille kegle. (Hint: Rumfanget af en kegle med grundfladeareal G og højde h er $V = \frac{1}{3}Gh$. Brug at vinklen mellem grundfladen og siden af den store kegle er den samme som vinklen mellem grundfladen i den lille kegle og siden af den store kegle.)

Kapitel 5

Integralregning

5.1 Regneregler for ubestemte integraler

I differentialregning studerede vi problemet med at finde $f'(x)$ hvis vi kender $f(x)$. Nu vil vi i stedet betragte det inverse problem, hvordan man kan finde $f(x)$ hvis man kender $f'(x)$. For at løse dette problem vil vi introducere integralregning.

Hvis f er en kontinuert funktion, så siger vi, at F er en stamfunktion til f, hvis der gælder at

$$F'(x) = f(x).$$

Vi husker, at hvis $c \in \mathbb{R}$, så gælder der, at $\frac{d}{dx}c = 0$. Det betyder, at hvis F er en stamfunktion til f, så er

$$\frac{d}{dx}(F(x) + c) = \frac{d}{dx}F(x) = f(x),$$

også en stamfunktion til f. Dermed kan vi kun bestemme en stamfunktion op til en konstant (hvilket medfører at der er uendeligt mange stamfunktioner til en funktion). Vi definerer det ubestemte integral af en kontinuert funktion f til at være

$$\int f(x)\, dx = F(x) + c,$$

hvor $c \in \mathbb{R}$ og F er en stamfunktion til f (se Figur 5.1).

$$\begin{tikzcd}
F(x) \arrow[r, bend left, "\frac{d}{dx}"] & f(x) \arrow[l, bend left, "\int dx"] \arrow[r, bend left, "\frac{d}{dx}"] & f'(x) \arrow[l, bend left, "\int dx"]
\end{tikzcd}$$

Figur 5.1: Sammenhængen mellem integration og differentiation.

Eksempler:

1. Vis at både $F_1(x) = x^3 + 2x + 1$ og $F_2(x) = x^3 + 2x$ er stamfunktioner til $f(x) = 3x^2 + 2$:

   Vi tjekker om $F_1'(x) = f(x)$ og $F_2'(x) = f(x)$ ved at differentiere

$$
\begin{aligned}
F_1'(x) &= \frac{d}{dx}(x^3 + 2x + 1) = 3x^2 + 2 = f(x), \\
F_2'(x) &= \frac{d}{dx}(x^3 + 2x) = 3x^2 + 2 = f(x),
\end{aligned}
$$

   hvilket viser at både F_1' og F_2' er stamfunktioner til f.

2. Vis at $F(x) = e^x$ er stamfunktion til $f(x) = e^x$:

   Vi tjekker om $F'(x) = f(x)$ ved at differentiere

$$
F'(x) = \frac{d}{dx}e^x = e^x = f(x),
$$

   hvilket viser at F er en stamfunktion til f.

Regneregler: Hvis f og g begge er kontinuerte funktioner, så har vi følgende regneregler for ubestemte integraler

1. $\displaystyle\int cf(x)\,dx = c\int f(x)\,dx$, hvor $c \in \mathbb{R}$.
2. $\displaystyle\int f(x) \pm g(x)\,dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)\,dx$.

Der findes flere regneregler for ubestemte integraler, som vi vil betragte de næste par kursusgange.

Tabel over funktioner og deres stamfunktioner: I Tabel 5.1 er der en liste, over de mest almindelige funktioner og deres stamfunktioner

Eksempler:

1. Bestem enhver stamfunktion til $f(x) = x^3 + 9x + 1$:

   Ved at benytte begge regneregler og Tabel 5.1, får vi at

$$
\begin{aligned}
F(x) &= \int f(x)\,dx \\
&= \int (x^3 + 9x + 1)\,dx \\
&= \int x^3\,dx + 9\int x\,dx + \int 1\,dx \\
&= \frac{1}{4}x^4 + \frac{9}{2}x^2 + x + c.
\end{aligned}
$$

$f(x)$	$\int f(x)\,dx$
0	c
k	$kx+c$
x	$\frac{1}{2}x^2+c$
x^n	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}+c,\ n\neq -1$
$\sqrt{x}$	$\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+c$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert+c$
e^x	e^x+c
e^{kx}	$\frac{1}{k}e^{kx}+c,\ k\neq 0$
$\ln x$	$x\ln(x)-x+c$
a^x	$\frac{1}{\ln(a)}a^x+c,\ a\neq 1$
$\log_a x$	$\frac{x(\ln(x)-1)}{\ln(a)}+c,\ a\neq 1$
$\cos x$	$\sin x+c$
$\sin x$	$-\cos x+c$
$\tan x$	$-\ln\lvert\cos x\rvert+c$

Tabel 5.1: Udvalgte stamfunktioner.

2. Bestem enhver stamfunktion til $f(x)=\frac{1}{x}+\sqrt{x}+e^x$:

   Ved at benytte begge regneregel 2. og Tabel 5.1, får vi at

$$\begin{aligned} F(x) &= \int f(x)\,dx \\ &= \int \left(\frac{1}{x}+\sqrt{x}+e^x\right) dx \\ &= \int \frac{1}{x}\,dx + \int \sqrt{x}\,dx + \int e^x\,dx \\ &= \ln x + \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + e^x + c. \end{aligned}$$

3. Bestem den stamfunktion til $f(x)=3e^{3x}$, som går gennem punktet $(0,7)$:

   Vi finder først enhver stamfunktion til f, ved at bruge regneregel 1. og Tabel 5.1

$$\begin{aligned} F(x) &= \int f(x)\,dx \\ &= \int 3e^{3x}\,dx \\ &= 3\int e^{3x}\,dx \\ &= 3\cdot\frac{1}{3}e^{3x}+c \\ &= e^{3x}+c. \end{aligned}$$

Da vi ved, at F går gennem punktet $(0,7)$, har vi, at $F(0) = 7$. Indsætter vi dette, får vi én ligning med én ubekendt som vi kan løse, for at finde c

$$\begin{aligned} F(0) = 7 &\Leftrightarrow e^{3\cdot 0} + c = 7 \\ &\Leftrightarrow 1 + c = 7 \\ &\Leftrightarrow c = 6. \end{aligned}$$

Det giver, at den stamfunktion der går gennem punktet $(0,7)$, er $F(x) = e^{3x} + 6$.

5.1.1 Opgaver

1. Bestem en stamfunktion til funktionen f givet ved $f(x) = x + 2$
2. Hvilken funktion er F givet ved $F(x) = 2\sqrt{x} + 12$ stamfunktion til?
3. Vis at funktionen $F(x) = \frac{3}{5}x^{\frac{10}{3}}$ er en stamfunktion til $f(x) = 2x^{\frac{7}{3}}$.
4. Udregn følgende integraler
$$\int x^2 + 2x\,dx, \qquad \int 3(e^x - \sin x)\,dx, \qquad \int 2e^{2x} - \frac{1}{x}\,dx.$$
5. Bestem en stamfunktion til $f(x) = x^2 + x$ som går gennem punktet $(1,1)$.
6. Udregn følgende integraler
$$\int \frac{2}{x} + \sqrt{x} + x\,dx, \qquad \int \frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{x^3}\,dx, \qquad \int x^{\frac{3}{2}} - \sqrt{x^3}\,dx$$
7. Betragt funktionerne f og g givet ved
$$f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \text{og,} \quad g(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$
   (a) Bestem en stamfunktion til $f + g$.(Hint: udregn summen $f + g$ først).
   (b) Vis at f er en stamfunktion til g.
   (c) Er g en stamfunktion til f?
   (d) Vis at $\ln(g(x))$ er en stamfunktion til $\frac{f}{g}$

   Funktionen f kaldes også sinh mens g kaldes cosh.
8. Bestem en stamfunktion til $f(x) = xx^{3/2} + 2\sqrt[3]{x}$ som går gennem punket $(0, \sqrt{2})$.
9. Vis, at $F(x) = (1-x)^{-1}$ og $G(x) = x(1-x)^{-1}$ begge er stamfunktioner til samme funktion. Hvad er differensen mellem F og G.
10. Brug Opgave 2 til at bestemme en stamfunktion for $\tan^2 x$.
11. Er funktionen $f(x) = x\ln x$ en stamfunktion for $\ln x$? Hvis ikke, så bestem en stamfunktion til $\ln x$.(Hint: Opgave 1.)

5.2 Delvis integration for ubestemte integraler

Sidste gang betragtede vi hvordan man bestemmer stamfunktionen til to funktioner lagt sammen eller en konstant gange en funktion. Denne gang vil vi studere, hvordan man kan finde en stamfunktion af to funktioner ganget sammen.

Regneregel: Hvis f er en differentiabel funktion og g er en kontinuere funktion, så er integralet af deres produkt givet ved

1. $\int f(x)g(x)\,dx = f(x)G(x) - \int f'(x)G(x)\,dx.$

Denne regel kaldes ofte for delvis integration. Bemærk, at hvis man har et produkt af to funktioner ganget sammen, så bliver det ofte meget nemmere hvis man tænker sig lidt om før man vælger hvilken funktion man kalder f og hvilken man kalder g.

Eksempler:

1. Brug delvis integration en gang til at finde stamfunktionen til $h(x) = x\sin x$, ved først at sætte $g(x) = x$ og $f(x) = \sin x$ og dernæst $f(x) = x$ og $g(x) = \sin x$:

   Vi starter med at sætte $g(x) = x$ og $f(x) = \sin x$. Så har vi, at $f'(x) = \cos x$ og $G(x) = \frac{1}{2}x^2$. Ved delvis integration får vi

   $$\begin{aligned}\int x\sin x\,dx &= \sin(x)\frac{1}{2}x^2 - \int \cos(x)\frac{1}{2}x^2\,dx \\ &= \frac{1}{2}x^2\sin x - \int \frac{1}{2}x^2\cos x\,dx.\end{aligned}$$

   Hvis vi i stedet sætter $f(x) = x$ og $g(x) = \sin x$ så har vi, at $f'(x) = 1$ og $G(x) = -\cos x$. Indsætter vi dette i regneregel 1. får vi

   $$\begin{aligned}\int x\sin x\,dx &= x(-\cos x) - \int 1\cdot(-\cos x)\,dx \\ &= -x\cos x + \int \cos x\,dx \\ &= -x\cos x + \sin x + c.\end{aligned}$$

   Det viser, at valget af f og g, har betydning for, hvor pænt vores resultat bliver.

2. Bestem stamfunktionen til $h(x) = x^2e^x$:

   Vi vælger $f(x) = x^2$ og $g(x) = e^x$. Så har vi at $f'(x) = 2x$ og $G(x) = e^x$. Indsætter vi dette i regneregel 1. får vi at

   $$\begin{aligned}\int x^2e^x\,dx &= x^2e^x - \int 2xe^x\,dx \\ &= x^2e^x - 2\int xe^x\,dx.\end{aligned}$$

Det ser ikke videre pænt ud, men hvis vi ser, at det nye integral også består af to funktioner ganget sammen. Derfor kan vi bruge delvis integration endnu en gang. Lad $f(x) = x$ og $g(x) = e^x$, så er $f'(x) = 1$ og $G(x) = e^x$ og vi får

$$\begin{aligned}\int xe^x\,dx &= xe^x - \int 1\cdot e^x\,dx\\ &= xe^x - \int e^x\,dx\\ &= xe^x - e^x + c.\end{aligned}$$

Indsætter vi nu det i den forrige udregning får vi at

$$\int x^2e^x\,dx = x^2e^x - 2(xe^x - e^x + c) = x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + c.$$

3. Bestem stamfunktionen til $h(x) = 2^xe^x$:

   Vi lader $f(x) = 2^x$ og $g(x) = e^x$. Så har vi at $f'(x) = 2^x\ln 2$ og $G(x) = e^x$. Indsætter vi dette i regneregel 1. får vi

$$\begin{aligned}\int 2^xe^x\,dx &= 2^xe^x - \int 2^x\ln(2)e^x\,dx\\ &= 2^xe^x - \ln 2\int 2^xe^x\,dx.\end{aligned}$$

   Vi ser, at integralet på begge sider er det samme, så hvis vi ligger $\ln 2\int 2^xe^x\,dx$ til på begge sider får vi

$$\int 2^xe^x\,dx + \ln 2\int 2^xe^x\,dx = 2^xe^x - \ln(2)\int 2^xe^x\,dx + \ln(2)\int 2^xe^x\,dx$$

   og ved at reducere det får vi

$$(1+\ln 2)\int 2^xe^x\,dx = 2^xe^x \Leftrightarrow \int 2^xe^x\,dx = \frac{1}{1+\ln(2)}2^xe^x.$$

   Dermed har vi at stamfunktionen til $h(x) = 2^xe^x$ er givet ved $\frac{1}{1+\ln(2)}2^xe^x$.

5.2.1 Opgaver

1. Udregn følgende ubestemte integraler

$$\int x\sin x\,dx, \qquad \int xe^x\,dx, \qquad \int x^2e^{-2x}\,dx$$

2. Udregn følgende integraler

$$\int (x+1)\sin(x)\,dx, \qquad \int (2x-1)e^x\,dx.$$

3. Find en stamfunktion til $\ln x$ ved at bruge delvis integration.(Hint: Brug formlen på integralet $\int 1\cdot\ln x\,dx$)

4. Udregn følgende ubestemte integraler

$$\int \ln(x^x)\,dx, \qquad \int x^2 e^{3x+1}\,dx, \qquad \int e^x \ln x + \frac{e^x}{x}\,dx.$$

   (Hint: I den sidste opgave kan man med fordel starte med at fokusere på $\int e^x \ln x\,dx$.)

5. Bestem integralet

$$\int \frac{\ln x}{x}\,dx.$$

6. Brug produktreglen til at vise formlen for delvis integration.

7. Bestem

$$\int e^x \sin(x)\,dx$$

8. Brug delvis integration til at bestemme

$$\int x \cosh x\,dx.$$

   (Hint: Se Opgave 7)

9. Udregn

$$\int x^2 \ln x\,dx.$$

10. Brug delvis integration til at udregne

$$\int \ln^2(x)\,dx.$$

   Sammenlign evt. dig svar med Opgave 14.

5.3 Integration ved substitution for ubestemte integraler

Sidste gang studerede vi, hvordan man kan finde stamfunktionen til et produkt af funktioner. Hvis dette produkt er på formen

$$h(x) = f(g(x))g'(x), \tag{5.1}$$

så kan vi bruge en anden metode til at finde stamfunktionen. Denne metode kaldes integration ved substitution. Idéen med integration ved substitution er, at substituere den indre funktion i den sammensatte funktion ud, så vi ikke længere har en sammensat funktion. Derfor sætter vi $u = g(x)$ og hvis vi differentierer denne funktion får vi

$$\frac{du}{dx} = g'(x).$$

Hvis vi nu betragter venstresiden som en brøk og isolerer dx, får vi

$$dx = \frac{1}{g'(x)}du.$$

Indsætter vi dette i stamfunktionen for h, får vi

$$H(x) = \int g'(x)f(g(x))\,dx = \int g'(x)f(u)\frac{1}{g'(x)}\,du = \int f(u)\,du = F(u)+c,$$

hvor F er stamfunktionen til f. Nu kan vi så substituere $u = g(x)$ tilbage, hvilket giver at stamfunktionerne til h er

$$H(x) = F(g(x)) + c.$$

Integration ved substitution er tit nemmere at forstå ved hjælp af eksempler.

Eksempler:

1. Find stamfunktionerne til $h(x) = 5x^4e^{x^5}$:

   Vi følger samme strategi som ovenfor. Hvis vi lader $f(x) = e^x$ og $g(x) = x^5$, så har vi at

   $$h(x) = g'(x)f(g(x))$$

   og vi vil gerne bestemme stamfunktionerne til h, som er

   $$H(x) = \int 5x^4e^{x^5}\,dx + c.$$

   Vi sætter nu $u = g(x) = x^5$, differentierer og isolerer dx og får

   $$\frac{du}{dx} = 5x^4 \Leftrightarrow dx = \frac{1}{5x^4}du.$$

   Hvis vi indsætter dette i integralet for stamfunktionen får vi at

   $$H(x) = \int 5x^4e^u\frac{1}{5x^4}\,du = \int e^u\,du = e^u.$$

   Substituerer vi nu $u = x^5$ tilbage får vi

   $$H(x) = e^{x^5} + c.$$

2. Find stamfunktionerne til $h(x) = x\sin(x^2)$:

   Hvis vi lader $f(x) = \sin x$ og $g(x) = x^2$, så har vi at

   $$h(x) = x\sin(x^2) = 2\frac{1}{2}x\sin(x^2) = \frac{1}{2}g'(x)f(g(x))$$

   og vi vil gerne bestemme stamfunktionen til h, som er

   $$H(x) = \int x\sin(x^2)\,dx.$$

Vi sætter nu $u = g(x) = x^2$, differentierer og isolerer dx og får

$$\frac{du}{dx} = 2x \Leftrightarrow dx = \frac{1}{2x} du.$$

Hvis vi indsætter dette i integralet for stamfunktionerne får vi at

$$H(x) = \int x \sin(u) \frac{1}{2x}\, du = \frac{1}{2} \int \sin u\, du = -\frac{1}{2} \cos u + c.$$

Substituerer vi nu $u = x^2$ tilbage får vi

$$H(x) = -\frac{1}{2} \cos(x^2) + c.$$

3. Find stamfunktionerne til $h(x) = 4x^7 \cos x^4$:

   Vi har indtil videre kun betragtet integration ved substitution af funktioner på formen $h(x) = g'(x) f(g(x))$, men i visse tilfælde er det muligt at benytte integration ved substitution selv for funktioner der ikke er på den form. Vi kan dog ikke garantere at integration ved substitution giver noget nyttigt så. Derfor må man nogle gange prøve sig frem, og se om man får noget nyttigt ud af det.

   Hvis vi prøver at substituere $u = x^4$, så får vi

$$\frac{du}{dx} = 4x^3 \Leftrightarrow \frac{1}{4x^3} du = dx.$$

   Indsætter vi dette i stamfunktionen for h, får vi

$$H(x) = \int 4x^7 \cos(u) \frac{1}{4x^3}\, du = \int x^4 \cos u\, dx = \int u \cos u\, du.$$

   Vi ser at vi stadig har et produkt af to funktioner, men det kan vi nu integrere ved brug af delvis integration. Vi sætter $f(u) = u$ og $g(u) = \cos u$, hvilket giver at $f'(u) = 1$ og $G(u) = \sin u$. Dermed får vi at

$$\int u \cos u\, du = u \sin u - \int \sin u\, du = u \sin u + \cos u + c.$$

   Substituere vi nu $u = x^4$ tilbage igen får vi

$$H(x) = \int 4x^7 \cos x^4\, dx = x^4 \sin(x^4) + \cos(x^4) + c.$$

5.3.1 Opgaver

1. Udregn integralerne

$$\int \sin(3x+1)\, dx, \qquad \int \cos(-2x+1)\, dx, \qquad \int e^{5x-3}\, dx$$

2. Bestem

$$\int \frac{3x^2+1}{x^3+x-1}\, dx, \qquad \int (x+1)^5\, dx, \qquad \int (2x^3-1)(\tfrac{1}{2}x^4 - x + 12)^3\, dx.$$

3. Udregn integralerne
$$\int xe^{x^2}\,dx, \qquad \int \ln(x+1)\,dx, \qquad \int 2x\sin(x^2-1)\,dx$$

4. Udregn integralerne
$$\int \cos(x)\sin(x)\,dx, \qquad \int \sin^3(x)\cos(x)\,dx, \qquad \int (3x^2-1)\cos(x^3-x+2)\,dx$$

5. Lad $a \neq 0$ og b være reelle tal. Bestem stamfunktioner til funktionerne
$$\sin(ax+b), \qquad \cos(ax+b), \qquad e^{ax+b}, \qquad \ln(ax+b).$$

6. Bestem integralet
$$\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx.$$

7. Lad f, g og h være funktioner og lad F være en stamfunktion for f. Vis at
$$\int f(g(h(x)))g'(h(x))h'(x)\,dx = F(g(h(x))) + C.$$

8. Brug delvis integration samt integration ved substitution til at vise
$$\int x\sqrt{x+1}\,dx = \frac{2}{3}x(1+x)^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{15}(1+x)^{\frac{5}{2}} + C.$$
Brug efterfølgende dette til at udregne
$$\int \sqrt{1+\sqrt{x}}\,dx$$

9. Udregn integralerne
$$\int x^3\sin(x^2)\,dx, \qquad \int e^{-\sqrt{x}}\,dx.$$
(Hint: Substituer hhv. x^2 og $\sqrt{x}$ og brug efterfølgende delvisintegration.)

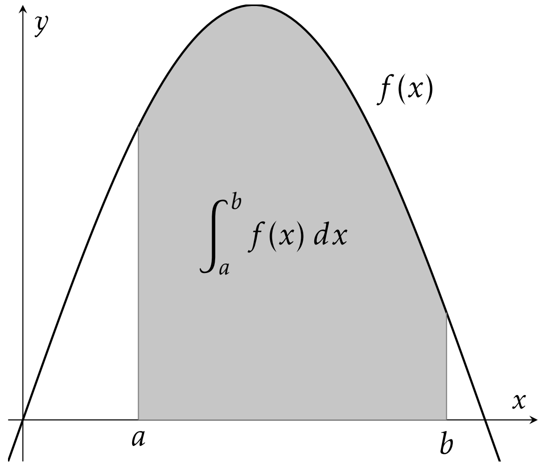
10. Brug integration ved substitution til at bestemme en stamfunktion til $\tan x$.

5.4 Regneregler for bestemte integraler

De sidste par gange har vi studeret ubestemte integraler. Det næste vi vil betragte er bestemte integraler.

Hvis f er en kontinuert funktion, så er det bestemte integral af f i intervallet $[a,b]$ givet ved
$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a),$$
hvor F er en stamfunktion til f. Et ubestemt integrale er en funktion, hvorimod et bestemt integrale er et tal, som beskriver arealet mellem en funktion og x-aksen i intervallet $[a,b]$ (se Figur 5.2).

 5.4. REGNEREGLER FOR BESTEMTE INTEGRALER



Figur 5.2: Arealet under f og over x-aksen mellem a og b.

Regneregler: Hvis f og g begge er kontinuerte funktioner, så har vi følgende regneregler for bestemte integraler (bemærk, at de minder meget om dem for ubestemte integraler).

1. $\displaystyle\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx$, hvor $c \in \mathbb{R}$.
2. $\displaystyle\int_a^b f(x) \pm g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx.$

Eksempler:

1. Bestem arealet under $f(x) = \frac{1}{x}$ og over x-aksen i intervallet $[1,2]$:

   Vi udregner det bestemte integrale

$$
\begin{aligned}
\int_1^2 f(x)\,dx &= \int_1^2 \frac{1}{x}\,dx \\
&= [\ln x]_1^2 \\
&= \ln 2 - \ln 1 \\
&= \ln 2.
\end{aligned}
$$

2. Bestem arealet under $f(x) = 3x^2 + 3e^x$ og over x-aksen i intervallet $[0,4]$:

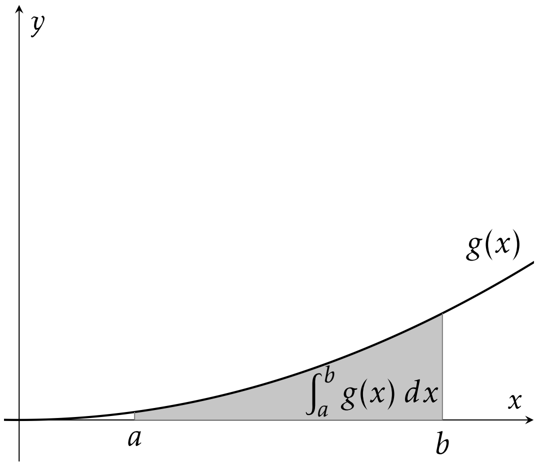
   Vi udregner det bestemte integrale ved at benytte regnereglerne

$$
\begin{aligned}
\int_0^4 f(x)\,dx &= \int_0^4 (3x^2 + 3e^x)\,dx \\
&= 3\int_0^4 x^2\,dx + 3\int_0^4 e^x\,dx \\
&= 3\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^4 + 3[e^x]_0^4 \\
&= 3\left(\frac{1}{3}\cdot 4^3 - \left(\frac{1}{3}\cdot 0^4\right)\right) + 3(e^4 - (e^0)) \\
&= 3\cdot\frac{64}{3} + 3e^4 - 3 \\
&= 61 + 3e^4.
\end{aligned}
$$

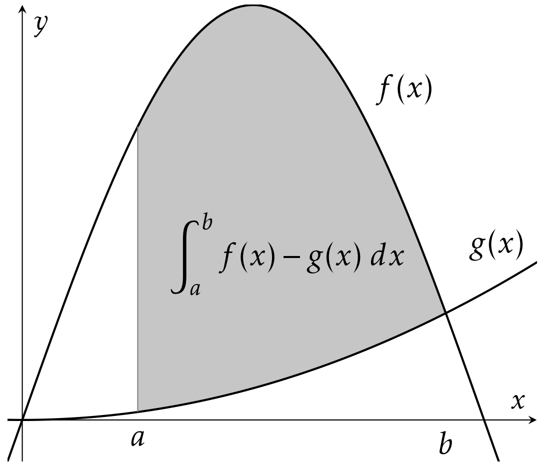
Arealet mellem to funktioner: Vi har indtil nu kun betragtet arealet mellem en funktion og x-aksen, men det er også muligt at finde arealet mellem to funktioner. Hvis f og g er to funktioner hvor $f(x) \geq g(x)$ for alle $x \in [a,b]$, så er arealet mellem de to funktioner givet ved

$$\int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b f(x) - g(x)\,dx.$$

Det betyder, at for at finde arealet mellem f og g findet vi arealet mellem f og x-aksen, og trækker så arealet mellem g og x-aksen fra (se Figur 5.2, 5.3 og 5.4).



Figur 5.3: Arealet under g.



Figur 5.4: Arealet mellem f og g.

Eksempel:

1. Find arealet under $f(x) = 12 - 2x^2$ og over $g(x) = x^2$ i intervallet $[-2,2]$:

   Vi udregner det bestemte integralet af de to funktioner trukket fra hinanden

$$\begin{aligned}
\int_{-2}^{2} f(x) - g(x)\,dx &= \int_{-2}^{2} \left(12 - 2x^2 - x^2\right)dx \\
&= \int_{-2}^{2} 12 - 3x^2\,dx \\
&= \left[12x - \frac{3}{3}x^3\right]_{-2}^{2} \\
&= \left[12x - x^3\right]_{-2}^{2} \\
&= 24 - 8 - \Big(-24 - (-8)\Big) \\
&= 24 - 8 + 24 - 8 \\
&= 32.
\end{aligned}$$

5.4.1 Opgaver

1. Udregn følgende bestemte integraler

$$\int_1^2 x^2\,dx, \qquad \int_{-1}^{0} x + 3x^2\,dx, \qquad \int_1^2 \frac{1}{x}\,dx, \qquad \int_{-1}^{1} \sin x\,dx.$$

2. Bestem
$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\tan(x)\,dx.$$

3. Bestem arealet under grafen for funktionen $f(x) = e^x$ i intervallet $[1,3]$.

4. Vis at det bestemte integral af den konstante funktion $f(x) = 1$ over intervallet $[a,b]$ er lig intervallængden.

5. Bestem arealet som afgrænses af funktionerne $f(x) = x^2$ og $g(x) = \sqrt{x}$ i intervallet $(0,1)$.

6. Brug bestemte integraler til at vise at et rektangel med sidelængder a og b har areal ab.

7. Vis at
$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx,$$
for alle punkter $a,b,c \in \mathbf{R}$ og alle kontinuerte f. (Hint: Lad F være en stamfunktion til f og regn på højresiden af ovenstående lighed.)

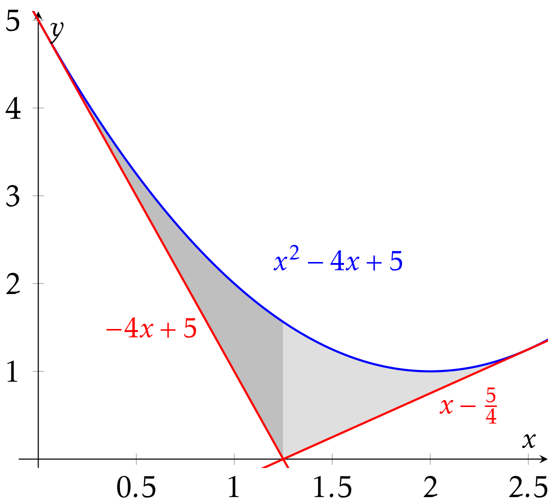
8. Bestem arealet under kurven $f(x) = |x|$ i intervallet $[-2,1]$. (Hint: Anvend Opgave 7 med $a = -2$, $b = 1$ og $c = 0$.)

9. Vis at
$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx.$$
(Hint: Regn på højresiden.)

10. Bestem en værdi af a således at
$$\int_0^a \sin(x)\,dx = 2$$

11. Bestem arealet under grafen for funktionen $f(x) = -\cos x$ i intervallet $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$.

12. Lad $k > 0$ og definer $f(x) = x^k$ og $g(x) = x^{1/k}$.
   (a) Vis at arealet mellem graferne for f og g fra 0 til 1 er givet ved
   $$\frac{k-1}{k+1}.$$
   (b) I Geogebra kan man se at hvis k bliver meget stor så er arealet meget tæt på 1. Hvad er den første værdi af k hvor Geogebra siger at arealet er 1?
   (c) Brug formlen til at vise, at arealet mellem de to kurver aldrig kan være 1.
   (d) Hvad er det korrekte areal når $k = 399$?



Figur 5.5: Opgave 15

13. Lad

$$f(x) = \begin{cases} x^{\frac{2}{3}}, & \text{hvis } x < 0, \\ x^{\frac{1}{3}}, & \text{hvis } x \geq 0, \end{cases}$$

    Bestem arealet mellem grafen for f og x-aksen i intervallet $[-1, 1]$.

14. Bestem arealet mellem graferne for funktionerne $f(x) = x^2$ og $g(x) = 1 - x^2$.

15. Hvilket af de to grå områder i Figur 5.5 har det største areal? Hvad er det samlede areal af begge grå områder?

5.5 Delvis integration og substitution for bestemte integraler

Vi har tidligere betragtet delvis integration og integration ved substitution for ubestemte integraler. Vi vil nu indføre disse tekniker for bestemte integraler.

Regneregel: Hvis f er en differentiabel funktion og g er en kontinuert funktion, så er det bestemte integral af deres produkt i intervallet $[a, b]$ givet ved

1. $\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\,dx = [f(x)G(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)G(x)\,dx.$

Husk, at det ofte er en fordel, hvis man tænker sig lidt om, før man vælger, hvilken funktion man tager som f og hvilken man tager som g.

Eksempler:

1. Bestem integralet af funktionen $h(x) = x \sin x$ i intervallet $[0, \frac{\pi}{2}]$:

Hvis vi vælger $f(x) = x$ og $g(x) = \sin x$, så har vi at $f'(x) = 1$ og $G(x) = -\cos x$. Indsætter vi dette i regneregel 1. får vi

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x \, dx &= [x(-\cos x)]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1(-\cos x) \, dx \\
&= [x(-\cos x)]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx \\
&= [-x \cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} + [\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= -\frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2} - \Big(-0 \cdot \cos 0 \Big) + \sin \frac{\pi}{2} - \sin 0 \\
&= -\frac{\pi}{2} \cdot 0 - 0 + 1 - 0 \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Integration ved substitution: Integration ved substitution for bestemte integraler minder meget om integration ved substitution for ubestemte integraler. Den eneste forskel er, at når vi substituerer den indre funktion skal vi huske at ændre grænserne tilsvarende.

Hvis vi har en funktion h som er givet som et produkt af to funktioner på formen

$$h(x) = f(g(x))g'(x),$$

så er det bestemte integral i intervallet $[a, b]$ af h givet ved

$$\int_a^b h(x) \, dx = \int_a^b f(g(x))g'(x) \, dx. \tag{5.2}$$

Hvis vi nu substituerer $u = g(x)$ og differentierer i forhold til x, får vi

$$\frac{du}{dx} = g'(x) \Leftrightarrow \frac{1}{g'(x)} du = dx.$$

Vi indsætter nu dette i (5.2), hvilket giver

$$\int_a^b h(x) \, dx = \int_a^b f(g(x))g'(x) \, dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)g'(x) \frac{1}{g'(x)} \, du = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u) \, du.$$

Bemærk, at når vi substituere er vi nød til at ændre vores grænser. Vi kan nu integrere f i forhold til u og dernæst substituere tilbage igen

$$\int_a^b h(x) \, dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u) \, du = [F(u)]_{g(a)}^{g(b)} = F(g(b)) - F(g(a)).$$

En anden måde at bestemme det bestemte integral af h er ved først at finde stamfunktionen til h og dernæst bruge at

$$\int_a^b h(x) \, dx = H(b) - H(a).$$

Vi finder nu stamfunktionen til h ved substitution

$$\begin{aligned} H(x) &= \int h(x)\,dx \\ &= \int f(g(x))g'(x)\,dx \\ &= \int f(u)g'(x)\frac{1}{g'(x)}\,du \\ &= \int f(u)\,du \\ &= F(u)+c \\ &= F(g(x))+c. \end{aligned}$$

Dermed har vi, at det bestemte integral af h i intervallet $[a,b]$ er givet ved

$$\int_a^b h(x)\,dx = H(b)-H(a) = F(g(b))-F(g(a)).$$

Eksempler:

1. Udregn det bestemte integral i intervallet $[0,2]$ af funktionen $h(x)=5x^4e^{x^5}$:
   Vi udregner det bestemte integrale

   $$\int_0^2 h(x)\,dx = \int_0^2 5x^4e^{x^5}\,dx, \tag{5.3}$$

   ved at bruge de to ovenstående metoder. Vi lader $f(x)=e^x$ og $g(x)=x^5$, så har vi at $h(x)=f(g(x))g'(x)$.
   Hvis vi nu sætter $u=g(x)=x^5$ og differentierer i forhold til x får vi

   $$\frac{du}{dx}=5x^4 \Leftrightarrow \frac{1}{5x^4}du = dx.$$

   Vi indsætter nu dette i (5.3), hvilket giver

   $$\int_0^2 h(x)\,dx = \int_0^2 5x^4e^{x^5}\,dx = \int_{g(0)}^{g(2)} 5x^4e^u\frac{1}{5x^4}\,du = \int_{0^5}^{2^5} e^u\,du = \int_0^{32} e^u\,du.$$

   Ved at integrere og substituere tilbage får vi nu

   $$\int_0^2 h(x)\,dx = \int_0^{32} e^u\,du. = [e^u]_0^{32} = e^{32}-1.$$

   I den anden metode, finder vi først stamfunktionen til h

   $$H(x)=\int h(x)\,dx = \int 5x^4e^{x^5} = \int 5x^4e^u\frac{1}{5x^4}\,du = \int e^u\,du = e^u = e^{x^5}$$

   og dernæst finder vi det bestemte integral udfra

   $$\int_0^2 h(x)\,dx = H(b)-H(a) = e^{2^5}-e^{0^5} = e^{32}-1.$$

5.5.1 Opgaver

1. Udregn

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(-x)\,dx, \qquad \int_0^{\sqrt[3]{\frac{\pi}{2}}} 3x^2\cos(x^3)\,dx, \qquad \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos(x)\sin^2(x)\,dx$$

2. Udregn

$$\int_0^3 x^2\sqrt{x^3+9}\,dx, \qquad \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{1+\sin x}\,dx, \qquad \int_0^1 \frac{x}{(1+x^2)^2}\,dx.$$

3. En funktion f siges at være ulige hvis $f(-x) = -f(x)$. Vis at

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0,$$

   såfremt f er kontinuert. (Hint: Brug variabelskiftet $u = -x$ og Opgave 9 til at vise

$$\int_{-a}^{0} f(x)\,dx = -\int_0^a f(x)\,dx.$$

   Brug efterfølgende Opgave 7 til at færdiggøre opgaven.)

4. Udregn

$$\int_{-\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\frac{\sqrt{3}}{3}} (3x^2-1)(x^3-x)^3\,dx, \qquad \int_{-1}^{1} \sin(x)e^{\cos(x)}\,dx, \qquad \int_{-100}^{100} x|x|\,dx.$$

   (Hint: Brug Opgave 3)

5. En funktion f siges at være lige hvis $f(-x) = f(x)$. Vis at

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx,$$

   såfremt f er kontinuert. (Hint: Brug variabelskiftet $u = -x$ og Opgave 9 til at vise

$$\int_{-a}^{0} f(x)\,dx = \int_0^a f(x)\,dx.$$

   Brug efterfølgende Opgave 7 til at færdiggøre opgaven.)

6. Udregn

$$\int_{-\sqrt[3]{\frac{\pi}{2}}}^{\sqrt[3]{\frac{\pi}{2}}} 6x^2\cos(x^3)\,dx, \qquad \frac{1}{2}\int_{-\frac{pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \cos(x)\sin^2(x)\,dx$$

   (Hint: Brug Opgave 5)

7. Lad $f(x) = x^{-2}\sin(\frac{1}{x})$.

(a) Vis at f er en ulige funktion.

(b) Bestem en stamfunktion til f.

(c) Integralet

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx,$$

er ikke defineret. Hvordan stemmer det overens med resultatet i Opgave 3?

8. I Opgave 3 blev det vist at

$$\int xe^x\,dx = (x-1)e^x + C.$$

Brug dette til at vise at

$$\int_0^1 e^{\sqrt{x}}\,dx = 2.$$

(Hint: substituer $u = \sqrt{x}$ så variabelskiftet bliver $2u\,du = dx$.)

9. I Opgave 1 så vi at

$$\int x\sin x\,dx = \sin x - x\cos x + C.$$

Brug dette til at vise at

$$\int_0^{\pi^2} \sin\sqrt{x}\,dx = 2\pi$$

(Hint: substituer $u = \sqrt{x}$ så variabelskiftet bliver $2u\,du = dx$.)

10. I denne opgave vil vi beskrive arealet af en cirkel med vilkårlig radius.

(a) Tallet π kan defineres som arealet af enhedscirklen. Brug denne definition til at konkludere at

$$4\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \pi.$$

(Hint: Enhedscirklen er defineret ved $x^2 + y^2 = 1$.)

(b) Brug formlen ovenfor til at vise at arealet af cirklen givet ved $x^2 + y^2 = r^2$ har areal $A = \pi r^2$. (Hint: Brug udregniningen

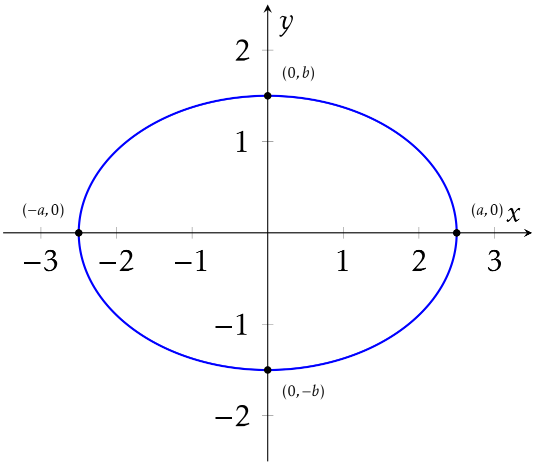
$$A = 4\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\,dx = 4r\int_0^r \sqrt{1 - \frac{x^2}{r^2}}\,dx,$$

og substituer $u = \frac{x}{r}$.)

11. En ellipse kan beskrives ved ligningen

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{5.4}$$

hvor betydningen af a og b kan ses i Figur 5.6.



Figur 5.6: Opgave 11

(a) Vis at hvis $a = b$ så beskriver (5.4) en cikel.

(b) Brug samme fremgangsmåde som i Opgave 11 til at vise at arealet af en ellipse er givet ved πab.

(c) Hvordan stemmer dette over ens med at arealet af en cirkel er givet ved πr^2.

12. Bestem

$$\int_0^{\pi} x^2 \cos x \, dx.$$

13. Bestem integralerne

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x \, dx, \qquad \int_0^{\ln 2} x e^{2x} \, dx, \qquad \int_1^4 3x^2 \ln x \, dx.$$

14. Bestem arealet afgrænset af x-aksen og grafen for funktionen $f(x) = x^2 \sin x$ fra 0 til π.

15. Funktionerne $\sin(x)\cos(x)$ og $\frac{1}{2}\sin x$ skærer hinanden i 0 og $\frac{\pi}{3}$. Hvad er arealet mellem graferne for funktionerne i intervallet givet af deres skæringspunkter?

Kapitel 6

Differentialligninger

6.1 Introduktion til Differntialligninger

Vi har tidligere studeret både ligninger og differentialkvotienter. Det næste vi gerne vil betragte er ligninger der indeholder differentialkvotienter, også kaldet differentialligninger. I modsætning til en almindelig ligning, hvor den ubekendte er et tal, er den ubekendte i en differentialligning en funktion. Det betyder, at vi gerne vil bestemme alle de funktioner, vi kan indsætte på den ubekendtes plads i en differentialligning, så den er sand.

Eksempler på differentialligninger er

$$\frac{d}{dx}f(x) = f(x), \quad y'(x) = 5, \quad f'(x) + x = 3, \quad y'(x) = x^2.$$

Hvis man får givet en funktion f og en differentialligning, så er den nemmeste måde at tjekke om f er en løsning ved at "gøre prøve". At gøre prøve betyder, at vi indsætter f i differentialligningen og ser om den opfylder, at venstresiden er lig med højresiden. Hvis en funktion f løser differentialligningen, så kalder man f for en partikulær løsning til differentialligningen.

Eksempler:

1. Vis at $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 9$ er en løsning til differentialligningen $\dfrac{d}{dx}f(x) = x^2$:

   Vi ser, at f ikke indgår i vores differentiallignings højreside, hvilket betyder vi kun behøver at betragte venstresiden. Vi udregner derfor venstresiden

   $$\frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{3}x^3 + 9\right) = \frac{1}{3} \cdot 3x^2 = x^2.$$

   Da både venstresiden og højresiden af vores ligning er lig x^2, så er $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 9$ en partikulær løsning til differentialligningen.

2. Vis at $f(x) = 2 + 5e^{-3x}$ er en løsning til differentialligningen $y' - 6 = -3y$:

   Vi tjekker først hvad venstresiden giver

   $$y' - 6 = f'(x) - 6 = \frac{d}{dx}(2 + 5e^{-3x}) - 6 = 5 \cdot (-3)e^{-3x} - 6 = -15e^{-3x} - 6.$$

Dernæst udregner vi højresiden

$$-3y = -3f(x) = -3(2+5e^{-3x}) = -6-15e^{-3x}.$$

Vi ser nu at både højre og venstre siden er lig med $-6-15e^{-3x}$, hvilket betyder at $f(x) = 2+5e^{-3x}$ er en partikulær løsning til vores differentialligning.

Fuldstændige løsning: Hvis vi igen betragter differentialligningen $\frac{d}{dx}f(x) = x^2$ så ser vi at funktionen $f(x) = \frac{1}{3}x^3+1$ også er en løsning da

$$\frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{3}x^3+1\right) = x^2.$$

Det betyder at der er mere end en løsning til differentialligningen $\frac{d}{dx}f(x) = x^2$, faktisk er der uendeligt mange, da vi kan ændre konstanten der er lagt til. Det næste vi vil studere er de fuldstændige løsninger, som er en måde at finde alle de mulige løsninger til en given differentialligning.

Hvis vi har en differentialligning på formen

$$f'(x) = k,$$

hvor $k \in \mathbb{R}$, så kan vi finde den fuldstændige løsning ved at integrere begge sider

$$\begin{aligned}\int f'(x)\,dx = \int k\,dx &\Leftrightarrow f(x)+c_1 = kx+c_2\\ &\Leftrightarrow f(x) = kx+(c_2-c_1)\\ &\Leftrightarrow f(x) = kx+c.\end{aligned}$$

Ved at gøre prøve ser vi, at venstresiden er

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(kx+c) = k,$$

hvilket viser, at venstresiden er lig med højresiden. Det betyder, at samtlige løsninger til differentialligningen $f'(x) = k$ er på formen $f(x) = kx+c$.

Tabel over differentialligninger og deres fuldstændige løsninger: Tabel 6.1 indeholder en liste over de mest almindelige differentialligninger og deres fuldstændige løsninger (nogle af dem kommer I selv til at vise i opgaveregningen).

Differentialligning	Fuldstændig løsning
$f'(x) = k$	$f(x) = kx+c$
$f'(x) = h(x)$	$f(x) = \int h(x)\,dx$
$f'(x) = kf(x)$	$f(x) = ce^{kx}$
$f'(x)+af(x) = b$	$f(x) = \frac{b}{a}+ce^{-ax}$

Tabel 6.1: Udvalgte fuldstændige løsninger.

Eksempler:

1. Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningen $f'(x) = x^2$:

   Vi ser at det er en differentialligning på formen $f'(x) = h(x)$, hvor $h(x) = x^2$. Ved at bruge Tabel 6.1 ser vi at den fuldstændige løsning er givet ved

   $$f(x) = \int h(x)\,dx = \int x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3 + c.$$

2. Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningen $f'(x) - 3f(x) = 5$:

   Vi ser, at det er en differentialligning på formen $f'(x) + af(x) = b$ med $b = 5$ og $a = -3$. Ved at benytte Tabel 6.1 ser vi, at den fuldstændige løsning er givet ved

   $$f(x) = \frac{b}{a} + ce^{-ax} = \frac{5}{-3} + ce^{-(-3)x} = -\frac{5}{3} + ce^{3x}.$$

6.1.1 Opgaver

1. Er funktionen $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 5$ en løsning til differentialligningen

   $$y' = x^2?$$

2. Vis at $f(x) = -x - 1 + e^x$ er en løsning til differentialligningen

   $$y' = y + x.$$

   Er $g(x) = -x - 1$ en løsning?.

3. Find den fuldstændige løsning til differentialligningen

   $$y' = 0.$$

4. Vis at $f(x) = 3e^{2x}$ løser ligningen

   $$y' = 2y.$$

   Er funktionen $g(x) = f(x) + 2$ også en løsning?

5. Lad y være en positiv funktion. Vis at

   $$\frac{d}{dx}\ln y = \frac{y'}{y}.$$

   Brug dette til at finde den fuldstændig løsning til differentialligningen

   $$y' = ky.$$

6. Er $f(x) = \ln(e^x + e + 1)$ en løsning til differentialligningen

   $$y' = e^{x-y}?$$

7. Vis at $f(x) = 4e^{3x} - e^{2x}$ ikke er en løsning til differentialligningen
$$y' - 2y = e^{2x}.$$

8. Bestem a og b så $f(x) = ax + b$ løser ligningen
$$y' - y = 2x - 3$$

9. Lad $f(x)$ være med en differentiabel stamfunktion $F(x)$. Vis at funktionen
$$g(x) = \int_0^x f(x)\,dx$$
løser differentialligningen
$$y' = f.$$
Vil g stadig være en løsning hvis vi vælger en anden stamfunktion $\tilde{F}$ til f?

10. Gør rede for at $f(x) = 2e^x$ løser differentialligningen
$$\frac{y'}{y^2} = \frac{1}{2}e^{-x}.$$

11. Gør rede for at $\sin x$ løser differentialligningen
$$(y'')^2 + (y')^2 = 1.$$

12. Bestem a så $f(x) = axe^{-x}$ løser ligningen
$$y'' - y = e^{-x}.$$

6.2 Begyndelsesværdiproblemer

Sidste gang studerede vi fuldstændige løsninger til differentialligninger. Vi så at der var uendeligt mange løsninger til en differentialligning og vi kaldte hver af disse løsninger for en partikulær løsning. Denne gang vil vi studere differentialligninger, der opfylder en såkaldt begyndelsesbetingelse.

Hvis man bliver bedt om at finde en funktion $f(x)$ og den eneste ledetråd man får, er at $f(x)$ er en partikulær løsning til differentialligningen
$$\frac{d}{dx}f(x) = 5f(x),$$
kan man så finde $f(x)$? Fra sidste gang, ved vi at den fuldstændige løsning til differentialligningen er på formen
$$f(x) = ce^{5x},$$
men vi har ingen mulighed for at finde ud af hvad c er. Hvis man derudover får at vide at funktionen opfylder at $f(0) = 10$, så kan man bestemme hvad c er. Hvis vi indsætter, at $f(0) = 10$ i den fuldstændige løsning får vi at
$$10 = f(0) = ce^{5\cdot 0} = ce^0 = c,$$

hvilket betyder, at den partikulære løsning jeg tænkte på må være

$$f(x) = 10e^{5x}.$$

Betingelsen $f(0) = 10$ kaldes for en begyndelsesbetingelse og noteres generelt ved

$$f(t_0) = y_0.$$

Det betyder, at hvis vi har en differentialligning, hvor løsningen skal opfylde at den går igennem punktet (t_0, y_0), så findes der præcis én løsning. Det at løse en differentialligning med begyndelsesbetingelse kaldes ofte for et begyndelsesværdiproblem.

Eksempler:

1. Løs begyndelsesværdiproblemet $f'(x) = 5$ med $f(2) = 4$:

   Vi finder først den fuldstændige løsning til differentialligningen $f'(x) = 5$. Ved at benytte tabelen fra sidste gang ser vi at differentialligningen er på formen $f'(x) = k$ og har dermed den fuldstændige løsning

   $$f(x) = 5x + c.$$

   Vi indsætter nu vores begyndelsesbetingelse og bestemmer c

   $$4 = f(2) = 5 \cdot 2 + c = 10 + c \Leftrightarrow c = -6.$$

   Det betyder at den løsning vi leder efter er $f(x) = 5x - 6$.

2. Vis at $f(x) = ce^{x^2}$ er en løsning til differentialligningen $f'(x) = 2xf(x)$ og bestem den partikulære løsning der opfylder at $f(0) = 3$:

   Vi viser, at $f(x) = ce^{x^2}$ er en løsning ved at gøre prøve. Vi har, at venstresiden i vores differentialligning giver

   $$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(ce^{x^2}\right) = 2xce^{x^2},$$

   hvor vi har brugt kædereglen til at differentiere. Derudover har vi, at højresiden er

   $$2xf(x) = 2xce^{x^2}.$$

   Da venstresiden er lig højresiden er $f(x) = ce^{x^2}$ en løsning. Vi bestemmer nu c ved at benytte begyndelsesbetingelsen

   $$3 = f(0) = ce^{0^2} = ce^0 = c.$$

   Dermed er den partikulære løsning vi leder efter $f(x) = 3e^{x^2}$.

Tangentligningen: Vi har tidligere studeret tangentens ligning

$$f(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Hvis vi er givet en differentialligning, f.eks.

$$f'(x) = x^2 - f(x),$$

og vi gerne vil bestemme tangentens ligning for en løsning f i punktet $(3,7)$, så har vi at $x_0 = 3$ og $f(x_0) = 7$. Det betyder at vi kun mangler at bestemme $f'(x_0)$. Hvis vi indsætter $x_0 = 3$ i vores differentialligning får vi at

$$f'(3) = 3^2 - f(3) = 9 - 7 = 2.$$

Hvilket giver at tangentens ligning i punktet $(3,7)$ er givet ved

$$f(x) = 2(x-3) + 7 = 2x - 6 + 7 = 2x + 1.$$

Bemærk, at det ikke er nødvendigt at løse differentialligningen for at finde tangentens ligning til en løsning gennem et givet punkt, såfremt man kender x_0 og $f(x_0)$.

Eksempel:

1. Lad f være en funktion der løser differentialligningen $\dfrac{d}{dx}f(x) = \dfrac{2f(x)-1}{x}$ med begyndelsesbetingelse $f(1) = 3$. Bestem tangentens ligning til f i punktet $(1,3)$:

   Vi har at $x_0 = 1$ og $f(x_0) = 3$. Vi finder dernæst $f'(x_0)$ ved

   $$f'(x_0) = \frac{2f(1)-1}{1} = \frac{2 \cdot 3 - 1}{1} = \frac{5}{1} = 5.$$

   Dermed har vi, at tangentens ligning i punktet $(1,3)$ er givet ved

   $$f(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) = 5(x-1) + 3 = 5x - 5 + 3 = 5x - 2.$$

6.2.1 Opgaver

1. Løs differentialligningerne

   $$y' = 3, \qquad y' = \sin(x), \qquad y' = e^{-2x},$$

   alle med begyndelsesbetingelser $y(0) = 2$.

2. Bestem løsningen til differentialligningen

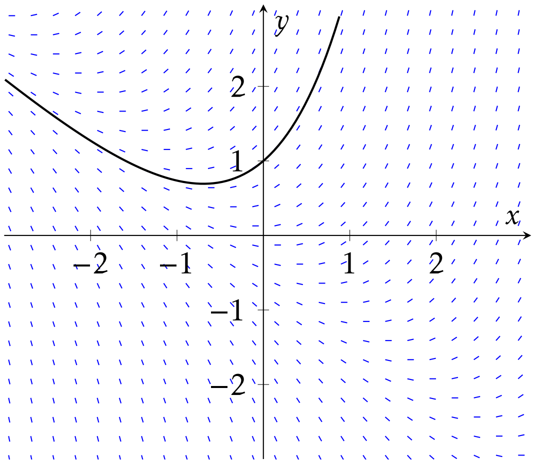
   $$y' = -y$$

   som går gennem punktet $(1, \frac{1}{e^2})$.

3. Differentialligningen

   $$y' = \frac{x + 2y}{3},$$

   har en løsning som går gennem punktet $(1,3)$. Bestem en ligning for tangenten til løsningen i dette punkt.



Figur 6.1: Opgave 6

4. Løs følgende differentialligninger med begyndelsesbetingelser

   (a) $y' = 3x^3 - 1$, $y(0) = -1$.

   (b) $y' - y = 0$, $y(0) = \sqrt{2}$.

   (c) $3y' + y = 0$, $y'(0) = 1$.

5. Differentialligningen

$$y' = x - y^2,$$

   har en løsning som går gennem punktet $(3, 5)$. Bestem en ligning for tangenten til løsningen i dette punkt.

6. For at få en forståelse for hvordan løsningerne til en differentialligning kan se ud kan man tegne såkaldte linjeelementer. Måden man gør det på er ved at udvælge punkter og så for hvert punkt tegne en linje med samme hældning som løsningen vil have i punktet.

   I Figur 6.1 ses en skitse af linjeelemener tilhørende differentialligningen

$$y' = x + y,$$

   samt grafen for løsningen med begyndelsesbetingelse $y(0) = 1$. Skitser grafen for løsningen med begyndelsesbetingelser

   (a) $y(0) = 0$.

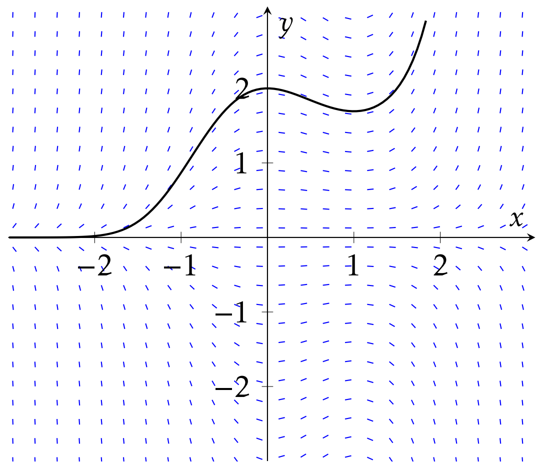
   (b) $y(0) = -1$.

   (c) $y(0) = -2$.

7. Differentialligningen

$$y' = \frac{x}{1 + y^2},$$

   har en løsning som går gennem punktet $(4, 1)$. Bestem en ligning for tangenten til løsningen i dette punkt.



Figur 6.2: Opgave 11

8. I Opgave 5 så vi at den fuldstændige løsning til differentialligningen

$$y' = ky$$

er givet ved $y = ce^{kx}$ hvor $c \in \mathbf{R}$. Bestem løsninger som opfylder begyndelsesbetingelserne

(a) $y(0) = a$.

(b) $y'(0) = b$.

9. Differentialligningen

$$y' = 3\sqrt{xy},$$

har en løsning som går gennem punktet $(1,4)$. Bestem en ligning for tangenten til løsningen i dette punkt.

10. Differentialligningen

$$y' = \frac{y-1}{x},$$

har en løsning som går gennem punktet $(2,7)$. Bestem en ligning for tangenten til løsningen i dette punkt.

11. I Figur 6.2 ses en skitse af linjeelemener tilhørende differentialligningen

$$\frac{y'}{y} = x^2 - x,$$

samt grafen for løsningen med begyndelsesbetingelse $y(0) = 2$. Skitser grafen for løsningen med begyndelsesbetingelser

(a) $y(0) = 1$.

(b) $y(0) = -1$.

(c) $y(0) = -2$.

12. Lad $f(x)$ være med en stamfunktion $F(x)$. Vis at funktionen

$$g(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx$$

løser differentialligningen

$$y' = f,$$

med begyndelsesbetingelsen $y(x_0) = y_0$.

6.3 Homogene førsteordens differentialligninger

Vi har hidtil kun betragtet differentialligninger med konstante koefficienter. Vi vil nu betragte mere generelle differentialligninger.

En homogen lineær førsteordens differentialligning med variable koefficienter er på formen

$$f'(x) + a(x)f(x) = 0.$$

Homogen betyder at højresiden er lig 0, førsteordens betyder, at der kun indgår en første afledede af f og variable koefficienter betyder, at funktionen a kan varierer når x varierer (i modsætning til konstante koefficienter hvor $a(x) = k$).

En sådan ligning har den fuldstændige løsning

$$f(x) = ce^{-A(x)}, \tag{6.1}$$

hvor $A(x)$ er en vilkårlig stamfunktionen til a (ofte valgt med konstant lig 0).

Eksempler:

1. Løs begyndelsesværdiproblemet $f'(x) + \cos(x)f(x) = 0$ med $f(0) = \frac{1}{2}$:

   Vi ser at $a(x) = \cos x$. Derudover har vi fra (6.1) at den fuldstændige løsning er på formen

   $$f(x) = ce^{-A(x)}.$$

   Vi bestemmer først $A(x)$, ved at integrere $a(x) = \cos x$

   $$A(x) = \int a(x)\,dx = \int \cos x\,dx = \sin x + c,$$

   hvor vi vælger $c = 0$. Dermed har vi, at $f(x) = ce^{-\sin x}$. Vi bestemmer nu c ved at benytte vores begyndelsesbetingelse

   $$\frac{1}{2} = f(0) = ce^{-\sin 0} = ce^0 = c.$$

   Det giver, at løsningen til vores begyndelsesværdiproblem er $f(x) = \frac{1}{2}e^{-\sin x}$.

2. Løs begyndelsesværdiproblemet $f'(x) + e^x f(x) = 0$ med $f(0) = e$:

   Vi ser, at $a(x) = e^x$. Derudover har vi igen, at den fuldstændige løsning er på formen

   $$f(x) = ce^{-A(x)}.$$

   Vi bestemmer først $A(x)$, ved at integrere $a(x) = e^x$

   $$A(x) = \int a(x)\,dx = \int e^x\,dx = e^x + c,$$

   hvor vi vælger $c = 0$. Dermed har vi, at $f(x) = ce^{-e^x}$. Vi bestemmer nu c ved at benytte vores begyndelsesbetingelse

   $$e = f(0) = ce^{-e^0} = ce^{-1} \Leftrightarrow c = e^2$$

   Det giver at, løsningen til vores begyndelsesværdiproblem er $f(x) = e^2 e^{-e^x}$.

6.3.1 Opgaver

1. Løs ligningerne

   $$y' - 2y = 0, \qquad y' = -\sqrt{2}y, \qquad \frac{y'}{y} = \pi.$$

2. Løs ligningerne

   $$\frac{y'}{2} + 3y = 0, \qquad \frac{3}{y} = \frac{-2}{y'},$$

   begge med begyndelsesbetingelser $y(0) = -1$.

3. Et radioaktivt materiale henfalder med en hastighed der er proportional til mængden af materiale. Hvis $A(t)$ betegner mængden af det radioaktive materiale til tiden t så vil A opfylde differentialligningen

   $$A' = -kA,$$

   for en konstant k. Bestem en formel for A når $k = 4$ og der til $t = 0$ er $3kg$ materiale. Hvor lang tid går der gør der er $\frac{3}{2}kg$ materiale?

4. Lad $p(x)$ være en funktion med stamfunktion $P(x)$. Brug samme metode som i Opgave 5 til at finde den fuldstændige løsning til

   $$y' + p(x)y = 0.$$

5. Bestem den fuldstændige løsning til

   $$y' = \frac{x^2 y - 4y}{2 + x}.$$

6. Bestem en løsning til

   $$y' - \frac{y}{x} = 0.$$

7. Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningen

$$\frac{y'}{\ln(x)} = y,$$

hvor $x > 0$.

8. Bestem den generelle løsning til hver af differentialligningerne

$$y' + 3x^2 y = 0, \qquad y' + 2xy = 0, \qquad xy' + y = 0.$$

9. Tidligere har vi løst ligningssystemer, altså flere ligninger med flere ubekendte. På tilsvarende vis findes der systemer af differentialligninger. Et eksempel kunne være

$$\begin{aligned} y_1' &= 4y_1 + y_2 \\ y_2' &= 3y_1 + 2y_2. \end{aligned}$$

Vis at

$$y_1(x) = 20(e^x + 5e^{5x}), y_2(x) = 10(-6e^x + 10e^{5x}).$$

er en løsning til systemet af differentialligninger ovenfor som opfylder begyndelsesbetingelserne $y_1(0) = 120$ og $y_2(0) = 40$.

10. I denne opgave vil vi løse differentialligningen

$$y'' + \frac{k}{x} y' = 0,$$

hvor $k \in \mathbf{R}$ og $y', x > 0$.

(a) Substituer $u = y'$ og vis at

$$y'(x) = \frac{c}{x^k}, \tag{6.2}$$

for en konstant $c \in \mathbf{R}$.

(b) Bestem y ud fra (6.2) for $k = 1$ og $k \neq 1$.

(c) Bestem for $k = 1$ en løsning som opfylder $y(1) = 1$ og $y'(1) = 2$.

6.4 Inhomogene førsteordens differentialligninger

Sidste gang betragtede vi homogene første ordens differentialligninger (hvor højresiden var lig 0) nu vil vi i stedet studere inhomogone lineære første ordens differentialligninger.

En inhomogen lineær førsteordens differentialligning med variable koefficienter er på formen

$$f'(x) + a(x)f(x) = b(x).$$

Inhomogen betyder at højresiden er forskelig fra 0, førsteordens betyder, at der kun indgår en første afledede af f og variable koefficienter betyder, at funktionerne

a og b kan varierer, når x varierer (i modsætning til konstante koefficienter hvor $a(x) = k_1$ og $b = k_2$).

En sådan ligning har den fuldstændige løsning

$$f(x) = e^{-A(x)} \int b(x)e^{A(x)}\,dx + ce^{-A(x)}. \tag{6.3}$$

hvor $A(x)$ er en vilkårlig stamfunktionen til a (ofte valgt med konstant lig 0). Formlen for den fuldstændige løsning kaldes ofte for Panzerformlen.

Bemærk, at hvis $b(x) = 0$, så vi i stedet har en homogen første ordens differentialligning, så vil den fuldstændige løsning reducere til

$$f(x) = ce^{-A(x)},$$

som vi genkender fra sidste gang.

Eksempler:

1. Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningen $f'(x) + 6xf(x) = 18x$:

   Vi ser, at det er en differentialligning på formen $f'(x) + a(x)f(x) = b(x)$, hvor $a(x) = 6x$ og $b(x) = 18x$. Vi har fra (6.3) at den fuldstændige løsning er givet ved

   $$f(x) = e^{-A(x)} \int b(x)e^{A(x)}\,dx + ce^{-A(x)}.$$

   Vi finder først en stamfunktion til a

   $$A(x) = \int a(x)\,dx = \int 6x\,dx = 3x^2 + c,$$

   hvor vi vælger $c = 0$. Det giver, at den fuldstændige løsning er

   $$f(x) = e^{-3x^2} \int 18xe^{3x^2}\,dx + ce^{-3x^2}.$$

   Vi udregner integralet ved hjælp af substitution, sæt $u = 3x^2$, så har vi at $\frac{du}{dx} = 6x$ og $\frac{1}{6x}du = dx$, hvilket giver

   $$\begin{aligned} f(x) &= e^{-3x^2} \int 18xe^{3x^2}\,dx + ce^{-3x^2} \\ &= e^{-3x^2} \int 18xe^{u}\frac{1}{6x}\,du + ce^{-3x^2} \\ &= e^{-3x^2} \int 3e^{u}\,du + ce^{-3x^2} \\ &= e^{-3x^2}3e^{3x^2} + ce^{-3x^2} \\ &= 3 + ce^{-3x^2}. \end{aligned}$$

2. Løs begyndelsesværdiproblemet $xf'(x) + 2f(x) = 3x$ med $f(1) = 5$:

   Vi ser først at vores differentialligning ikke er på formen $f'(x)+a(x)f(x) = b(x)$, men hvis vi dividere igennem med x på begge sider, får vi

   $$\frac{xf'(x) + 2f(x)}{x} = \frac{3x}{x} \Leftrightarrow f'(x) + \frac{2}{x}f(x) = 3,$$

som er på formen $f'(x)+a(x)f(x)=b(x)$ med $a(x)=\frac{2}{x}$ og $b(x)=3$. Vi har igen, at den fuldstændige løsning er på formen

$$f(x)=e^{-A(x)}\int b(x)e^{A(x)}\,dx+ce^{-A(x)}.$$

Vi starter med at bestemme $A(x)$

$$A(x)=\int a(x)\,dx=2\int\frac{1}{x}\,dx=2\ln x+c,$$

hvor vi vælger $c=0$. Hvis vi indsætter det i den fuldstændige løsning, får vi

$$\begin{aligned}f(x)&=3e^{-2\ln x}\int e^{2\ln x}\,dx+ce^{-2\ln x}\\&=3(e^{\ln x})^{-2}\int(e^{\ln x})^2\,dx+c(e^{\ln x})^{-2}\\&=3x^{-2}\int x^2\,dx+cx^{-2}\\&=3x^{-2}\frac{1}{3}x^3+cx^{-2}\\&=x+cx^{-2}\end{aligned}$$

Vi bestemmer så c ved at benytte vores begyndelsesbetingelse

$$5=f(1)=1+c1^{-2}=1+c\Leftrightarrow c=4.$$

Hvilket betyder at løsningen til vores begyndelsesværdiproblem er

$$f(x)=x+4x^{-2}.$$

6.4.1 Opgaver

1. Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningen

$$\frac{dy}{dx}+y=x.$$

(Hint: Brug Opgave 1).

2. Betragt ligningen

$$y'+y=\sin(x). \tag{6.4}$$

(a) Bestem den fuldstændige løsning y_h til den homogene ligning

$$y'+y=0.$$

(b) Bestem a og b så $y_p(x)=a\cos(x)+b\sin(x)$ bliver en partikulær løsning til (6.4).

(c) Brug løsningsformlen for inhomogene førsteordens differentialligninger til at løse ligningen. Hvad er forskellen på denne løsning og y_h+y_p. (Hint: Brug Opgave 7.)

3. Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningen

$$y' - 2y = x^2.$$

(Hint: Opgave 1.)

4. Den generelle løsningsformel for en inhomogen førsteordens differentialligning med konstante koefficienter

$$y' + ky = q(x),$$

er givet ved

$$y(x) = e^{-kx} \int q(x) e^{kx}\, dx + ce^{-kx}.$$

Brug dette til at bestemme en formel for løsningen af en inhomogen førsteordens differentialligning som ikke indeholder et y afhængigt led.

5. Antag at det radioaktive materiale fra Opgave 3, med mængde beskrevet ved $A(t)$, henfalder til et andet radioaktivt materiale, med mængde beskrevet ved $B(t)$. Dette radioaktive materiale henfalder også med en hastighed der er proportionel med mængden $B(t)$. Det betyder at den aflede af B både afhænger af A og B. Vi har dermed ligningen

$$B' = k_1 A - k_2 B.$$

Løs ligningen når $k_1 = 4$, $k_2 = 2$, $A(0) = 3$ og $B(0) = 0$. (Hint: Brug formlen for $A(t)$ fundet i Opgave 3). Hvad er den største værdi af $B(t)$ og hvor stor er $A(t)$ på det tidspunkt?

6. Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningen

$$y' + y = \frac{1}{x} + \ln x.$$

(Hint:Opgave 4)

7. Vi vil gerne finde en generel formel til at løse differentialligninger på formen

$$y' + p(x)y = q(x), \tag{6.5}$$

hvor p og q er kontinuerte funktioner. En måde at gøre dette på er at anvende produktreglen for differentiation:

$$(yf)'(x) = y'(x)f(x) + y(x)f'(x). \tag{6.6}$$

   (a) Ved at gange (6.5) igennem med $f(x)$ får vi at

$$y'(x)f(x) + p(x)f(x)y(x) = f(x)q(x). \tag{6.7}$$

   Hvilken differentialligning skal f opfylde for at vi kan anvende produktreglen? (Hint: sammenlign højresiden af (6.6) med venstresiden af (6.7))

6.4. INHOMOGENE FØRSTEORDENS DIFFERENTIALLIGNINGER

(b) Brug Opgave 4 til at finde en løsning til differentialligning vi bestemte i del (a).

(c) Redegør for at vi kan omskrive (6.5) til

$$\frac{d}{dx}\left(y(x)e^{P(x)}\right) = e^{P(x)}q(x),$$

hvor P er en stamfunktion til p. Brug dette til at bestemme den generelle løsning til (6.5). (Hint: Ved at integrere begge sider af ligningen ovenfor får vi at

$$y(x)e^{P(x)} = \int q(x)e^{P(x)}\,dx + c,$$

hvorefter vi kan isolere for y.

8. Bestem den fuldstændige løsning til

$$xy' = 2(y-4).$$

9. Bestem den fuldstændige løsning til

$$y' + \frac{y}{x} = \ln(x).$$

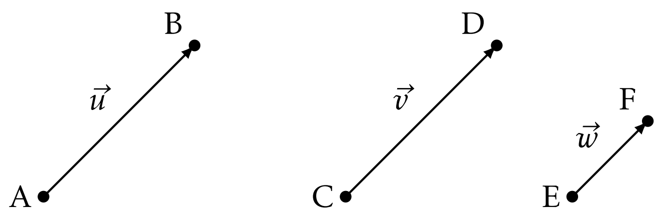
(Hint: Brug første delopgave i Opgave 4.)

Kapitel 7

Vektorer

7.1 Vektorer i planen

Vi er nu kommet til kursets sidste emner, som omhandler vektorer. En vektor er defineret ved at den har en længde og en retning, ofte tegnet som en pil (se Figur 7.1 hvor $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ er vektorer). Da vi kun er interesseret i en vektors længde og retning har vi at vektorerne $\vec{u}$ og $\vec{v}$ i Figur 7.1 er ens, da de har samme længde og samme retning, selvom de ikke er bestemt af de samme punkter.



Figur 7.1: Vektorer.

Vi vil starte ud med at studere 2-dimensionelle vektorer, som vi kan tænke på som værende punkter i et 2-dimensionalt koordinatsystem. Vi noterer en sådan vektor ved

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

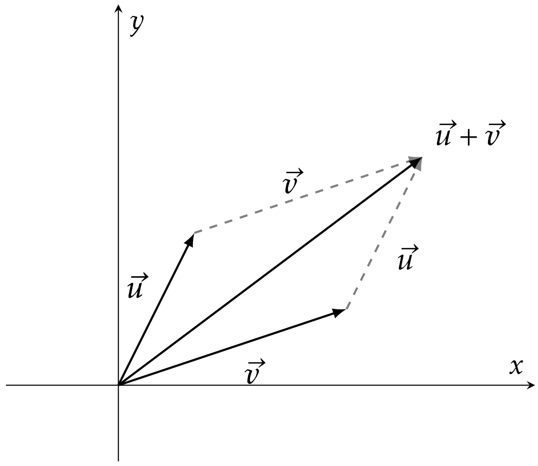
Regneregler: Lad $\vec{u} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$ og $\vec{v} = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$, så har vi har følgende regneregler for vektorer.

1. $\vec{u} \pm \vec{v} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} \pm \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \pm x_2 \\ y_1 \pm y_2 \end{bmatrix}$.

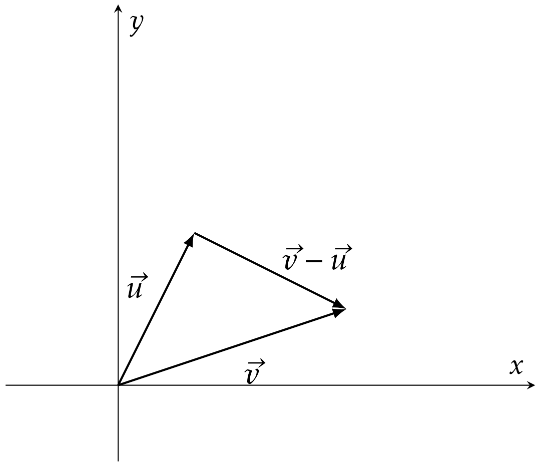
2. $c\vec{u} = c\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cx_1 \\ cy_1 \end{bmatrix}$, hvis $c \in \mathbb{R}$.

3. Længden af $\vec{u}$ noteres $\|\vec{u}\|$ og er givet ved $\|u\| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$

For en illustration af hvad det vil sige at lægge to vektorer sammen og trække to vektorer fra hinanden se Figur 7.2 og 7.3. Bemærk, at hvis man ganger en vektor



Figur 7.2: $\vec{u}+\vec{v}$.



Figur 7.3: $\vec{v}-\vec{u}$.

med en tal, så forlænger (forkorter) man vektoren med tallet og hvis tallet er negativ så ændrer også retningen, så vektoren går i den modsatte retning.

Hvis vi får givet to punkter i vores koordinatsystem $A = (x_1, y_1)$ og $B = (x_2, y_2)$ og vi gerne vil bestemme vektoren fra A til B, så er den givet ved

$$\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{bmatrix}.$$

Det betyder at hvis O er origo i vores koordinatsystem og $A = (x, y)$ så er vektoren fra origo til A givet ved

$$\overrightarrow{OA} = \begin{bmatrix} x - 0 \\ y - 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Vi kalder vektoren der går fra origo til A for stedvektoren til A. Da vi kun er interesseret i længden og retningen for en vektor og ikke de to punkter den går mellem, så vil vi som udgangspunkt tænke på en vektor som værende stedvektoren. Bemærk, at $\overrightarrow{OA}$ og A har de samme koordinater, og derfor kan man både tænke på en vektor som et objekt med en længde og en retning, men også som et punkt i et koordinatsystem.

Eksempler:

1. Lad $\vec{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ og $\vec{v} = \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \end{bmatrix}$ og udregn $\vec{u}+\vec{v}$ og $\vec{v}-\vec{u}$:

   Vi benytter regneregel 1. og får

$$\vec{u}+\vec{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3+7 \\ 2+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 3 \end{bmatrix}.$$
$$\vec{v}-\vec{u} = \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7-3 \\ 1-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

2. Lad $\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ og udregn $3\vec{u}$:

Vi benytter regneregel 2. og får

$$3\vec{u} = 3\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\cdot 1\\3\cdot 2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\\6\end{bmatrix}.$$

3. Lad $\vec{u} = \begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix}$ og udregn $\|\vec{u}\|$:

   Vi benytter regneregel 3. og får

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{4^2+3^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5.$$

Prikprodukt: Vi definerer prikproduktet mellem to vektorer $\vec{u} = \begin{bmatrix}x_1\\y_1\end{bmatrix}$ og $\vec{v} = \begin{bmatrix}x_2\\y_2\end{bmatrix}$ til at være

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \begin{bmatrix}x_1\\y_1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_2\\y_2\end{bmatrix} = x_1x_2 + y_1y_2. \tag{7.1}$$

Bemærk, at prikproduktet af to vektorer er et tal og ikke en vektor og at man ikke kan gange to vektorer sammen, man prikker dem sammen (så prikken mellem de to vektorer er ikke et gange tegn, men tegnet for et prikprodukt)!

Ved at benytte prikproduktet kan vi udregne vinklen θ mellem to vektorer $\vec{u}$ og $\vec{v}$ ved brug af formlen

$$\cos\theta = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|}. \tag{7.2}$$

Hvis prikproduktet $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$, så har vi at

$$\cos\theta = 0,$$

hvilket betyder at θ er lig enten $\frac{\pi}{2}$ eller $\frac{3\pi}{2}$. Hvis vinklen mellem to vektorer er $\frac{\pi}{2}$ eller $\frac{3\pi}{2}$, så siger vi at de to vektorer er ortogonale (vinkelrette). Dermed har vi at

$$\vec{u}\perp\vec{v} \qquad \text{hvis og kun hvis} \qquad \vec{u}\cdot\vec{v} = 0,$$

hvor $\perp$ betyder at $\vec{u}$ og $\vec{v}$ er ortogonale.

Hvis man får givet en vektor $\vec{u} = \begin{bmatrix}x_1\\y_1\end{bmatrix}$, og man gerne vil finde en vektor, som står ortogonalt på $\vec{u}$, så kan man gøre det ved at finde hatvektoren til $\vec{u}$, som er givet ved

$$\widehat{\vec{u}} = \begin{bmatrix}-y_1\\x_1\end{bmatrix}.$$

I kommer selv i opgaveregningen til at vise at $\vec{u}$ og $\widehat{\vec{u}}$ faktisk er ortogonale.

Determinant: Det næste vi vil betragte er determinanten af to vektorer. Hvis $\vec{u} = \begin{bmatrix}x_1\\y_1\end{bmatrix}$ og $\vec{v} = \begin{bmatrix}x_2\\y_2\end{bmatrix}$ så er determinanten af $\vec{u}$ og $\vec{v}$ givet ved

$$\det(\vec{u},\vec{v}) = \begin{vmatrix}x_1 & x_2\\y_1 & y_2\end{vmatrix} = x_1y_2 - x_2y_1. \tag{7.3}$$

Bemærk igen, at determinanten af to vektorer er et tal.

Ligesom ved prikproduktet kan vi også benytte determinanten mellem to vektorer $\vec{u}$ og $\vec{v}$ til at bestemme vinklen i mellem dem ud fra formlen

$$\sin\theta = \frac{\det(\vec{u},\vec{v})}{||\vec{u}||||\vec{v}||}. \tag{7.4}$$

Hvis determinanten $\det(\vec{u},\vec{v}) = 0$, så har vi at

$$\sin\theta = 0,$$

hvilket betyder at θ er lig enten 0 eller π. Hvis vinklen mellem to vektorer er 0 eller π, så siger vi at de to vektorer er parallelle. Dermed har vi at

$$\vec{u} \parallel \vec{v} \qquad \text{hvis og kun hvis} \qquad \det(\vec{u},\vec{v}) = 0,$$

hvor $\parallel$ betyder at $\vec{u}$ og $\vec{v}$ er parallelle.

Derudover har vi, at absolutværdien af determinanten af $\vec{u}$ og $\vec{v}$ er lig med arealet af det parallellogram, der er udspændt af $\vec{u}$ og $\vec{v}$ (se Figur 7.2), altså

$$A = |\det(\vec{u},\vec{v})|,$$

hvor A er arealet af det udspændte parallellogram.

Eksempler:

1. Lad $\vec{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ og $\vec{v} = \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \end{bmatrix}$ og udregn $\vec{u}\cdot\vec{v}$ og $\det(\vec{u},\vec{v})$:

   Vi benytter (7.1) og (7.3) til at finde henholdsvis prikproduktet og determinanten

   $$\vec{u}\cdot\vec{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \end{bmatrix} = 3\cdot 7 + 2\cdot 1 = 21 + 2 = 23.$$
   $$\det(\vec{u},\vec{v}) = \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3\cdot 1 - 2\cdot 7 = 3 - 14 = -11.$$

2. Lad $\vec{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ og $\vec{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ og udregn vinklen mellem $\vec{u}$ og $\vec{v}$:

   Vi kan udregne vinklen enten ved at benytte (7.2) eller (7.4). Vi vælger at benytte (7.2), så vi finder først prikproduktet og normen af de to vektorer

   $$\vec{u}\cdot\vec{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = 0\cdot 0 + 1\cdot -1 = -1$$
   $$||\vec{u}|| = \sqrt{0^2 + 1^2} = \sqrt{1} = 1$$
   $$||\vec{v}|| = \sqrt{0^2 + (-1)^2} = \sqrt{1} = 1.$$

   Dermed har vi, at

   $$\cos\theta = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{||\vec{u}||||\vec{v}||} = \frac{-1}{1\cdot 1} = \frac{-1}{1} = -1.$$

   Dvs. at vinklen mellem $\vec{u}$ og $\vec{v}$ er den vinkel, der opfylder at $\cos\theta = -1$ og vi husker, at det gør $\theta = \pi$.

3. Lad $\vec{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ og $\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ og bestem om $\vec{u} \perp \vec{v}$ eller $\vec{u} \parallel \vec{v}$:

   Vi udregner prikproduktet og determinanten af de to vektorer

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{v} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 = 0 \\ \det(\vec{u}, \vec{v}) &= \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = 1. \end{aligned}$$

   Da $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ men $\det(\vec{u}, \vec{v}) \neq 0$, har vi at $\vec{u}$ og $\vec{v}$ er ortogonale men ikke parallelle. Bemærk, at det eneste tidspunkt hvor to vektorer er både ortogonale og parallelle er hvis den ene af vektorerne er nulvektoren.

7.1.1 Opgaver

1. Lad

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \text{og} \quad \vec{v} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

   Udregn

$$3\vec{u}, \qquad -\vec{v}, \qquad \vec{u} + \vec{v}, \qquad \vec{u} - \vec{v}, \qquad \|\vec{u}\|, \qquad \|\vec{v}\|, \qquad \vec{u} \cdot \vec{v}, \qquad \hat{\vec{u}} \cdot (2\vec{v}).$$

2. Bestem arealet af det parallelogram som udspændes af de to vektorer

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \vec{v} = \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

3. Lad

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} 5 - t \\ 2 \end{bmatrix}, \vec{v} = \begin{bmatrix} 4 \\ t + 1 \end{bmatrix},$$

   hvor $t \in \mathbf{R}$. For hvilke t gælder at

   (a) $\vec{u}$ og $\vec{v}$ er vinkelrette?

   (b) $\vec{u}$ og $\vec{v}$ er parallelle?

4. Udregn vinklen mellem vektorerne

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \text{og} \quad \vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix}.$$

5. Bestem $\vec{u}$ så at

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} + 2\vec{u}$$

6. Lad
$$\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \text{og} \quad \vec{v} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \text{og} \quad \vec{w} = \begin{bmatrix} 7 \\ -3 \end{bmatrix}$$
Udregn
$$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}), \qquad 3\vec{u} + \vec{v} - 2\vec{w}, \qquad \det(\vec{u} - \vec{w}, \vec{v}), \qquad \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}, \qquad \frac{\vec{w}}{\|\vec{u} - \vec{v}\|}.$$

7. Bestem arealet af det parallelogram som udspændes af de to vektorer
$$\vec{u} = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix}, \vec{v} = \begin{bmatrix} -12 \\ -21 \end{bmatrix}.$$

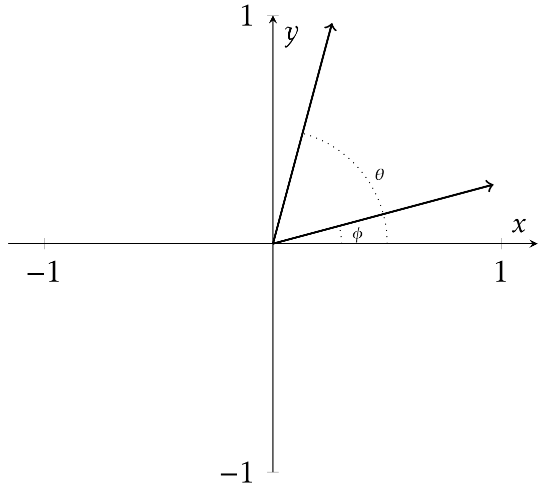
8. Lad
$$\vec{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \text{og} \quad \vec{v} = \begin{bmatrix} 6t \\ t^2 - 4 \end{bmatrix}.$$
Bestem t så at
   (a) $\vec{u}$ og $\vec{v}$ er parallelle.
   (b) $\vec{u}$ og $\vec{v}$ er vinkelrette.

9. Bestem alle vektorer som står vinkelret på
$$\vec{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

10. Lad
$$\vec{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix},$$
og vis med en eksplicit udregning at $\vec{u} \cdot \hat{\vec{u}} = 0$.

11. Lad $\vec{u}$ og $\vec{v}$ være vektorer i $\mathbf{R}^2$ og vis at
$$(\vec{u} \cdot \vec{v})^2 \leq \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2.$$
(Hint: Brug at $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(\theta)$, hvor θ er vinklen mellem $\vec{u}$ og $\vec{v}$.)

12. I denne opgave vil vi bruge resultater fra vektorregning til at bevise sumformlerne for sinus og cosinus. Lad θ og ϕ være vinkler med $\theta > \phi$ og definer
$$\vec{u} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{bmatrix}, \qquad \vec{v} = \begin{bmatrix} \cos(\phi) \\ \sin(\phi) \end{bmatrix}.$$
Disse to vektorer er skitseret i Figur 7.4
   (a) Redegør for at vinklen mellem $\vec{u}$ og $\vec{v}$ er $\theta - \phi$.
   (b) Brug formlen for vinklen mellem vektorer til at vise sumformlen
$$\cos(\theta - \phi) = \cos(\theta)\cos(\phi) + \sin(\theta)\sin(\phi).$$



Figur 7.4: Opgave 12

(c) Vis at man kan opnå formlen

$$\sin(\theta - \phi) = \sin(\theta)\cos(\phi) - \cos(\theta)\sin(\phi),$$

at anvende determinanten af $\vec{u}$ og $\vec{v}$. (Hint: vinklen regnes fra $\vec{v}$ til $\vec{u}$.)

13. Vis at $\|\vec{u}\|^2 = \vec{u} \cdot \vec{u}$. Brug dette til at vise at

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2(\vec{u} \cdot \vec{v}).$$

14. Brug Opgave 11 og Opgave 13 til at vise uligheden $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$. (Hint Regn på $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2$.)

15. Lad $\vec{v} \neq 0$ og vis at $\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$ er en enhedsvektor.

16. Vis at

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}, \qquad \det(\vec{u}, \vec{v}) = -\det(\vec{v}, \vec{u}), \qquad \|k\vec{u}\| = |k|\|\vec{u}\|,$$

for alle vektorer $\vec{u}, \vec{v}$ og $k \in \mathbf{R}$.

7.2 Linjer i planen

Det næste vi vil studere er, hvordan man kan beskrive linjer i planen (i.e. i to dimensioner). Vi vil betragte to metoder, kaldet linjens ligning og parameterfremstillingen for en linje.

Vi starter med at studere linjens ligning. Hvis vi får givet et fast punkt $A = (x_0, y_0)$ som ligger på den linje vi gerne vil bestemme, samt en vektor $\vec{n} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ som står vinkelret på linjen (en sådan vektor kaldes for en normalvektor) så har vi for ethvert punkt $B = (x, y)$ der ligger på vores linje, at

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{bmatrix} = 0,$$

da de to vektorer er ortogonale. Hvis vi udregner prikproduktet får vi ligningen

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0, \tag{7.5}$$

som kaldes linjens ligning i planen.

Eksempler:

1. Lad $\vec{n} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ og $A = (4, 0)$ og bestem linjens ligning:

   Vi indsætter i (7.5) og får
   $$0 \cdot (x - 4) + 1 \cdot (y - 0) = 0 \Leftrightarrow y = 0,$$
   hvilket viser at vores linje er x-aksen i et koordinatsystem.

2. Bestem linjens ligning for den linje der går gennem punkterne $A = (1, 1)$ og $B = (2, 3)$ og bestem om punktet $(-1, -1)$ ligger på linjen:

   Da vi ikke er givet nogen normaltvektor, starter vi med at bestemme sådan en. Vi ser at vektoren
   $$\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} 2-1 \\ 3-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix},$$
   ligger på linjen. Vi finder nu en normalvektor ved at tage hatvektoren til $\overrightarrow{AB}$, hvilket giver
   $$\vec{n} = \hat{\overrightarrow{AB}} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$
   Indsætter vi nu $\vec{n}$ og punktet A i (7.5) får vi linjens ligning
   $$\begin{aligned} -2 \cdot (x-1) + 1 \cdot (y-1) = 0 &\Leftrightarrow -2x + 2 + y - 1 = 0 \\ -2x + y + 1 = 0. \end{aligned}$$
   Bemærk, at vi kunne have benyttet punktet B i stedet for A. Vi tjekker nu om punktet $(-1, -1)$ løser ligningen
   $$-2 \cdot (-1) + (-1) + 1 = 2 - 1 + 1 = 2,$$
   hvilket viser at punktet $(-1, -1)$ ikke ligger på linjen.

Parameterfremstilling: En anden måde at beskrive en linje i planen er ved parameterfremstillingen. Hvis vi får givet et fast punkt $A = (x_0, y_0)$ på den linje vi gerne vil bestemme samt en vektor $\vec{r} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix}$ som er parallel med vores linje (en sådan vektor kaldes for en retningsvektor), så er parameterfremstillingen givet ved
$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix}, \tag{7.6}$$
hvor $t \in \mathbb{R}$. Det skal forståes således at vi starter med et punkt (x_0, y_0) på vores linje og så går vi i retningen af vores retningsvektor (som er parallel med vores linje) og dermed kan vi beskrive samtlige punkter på vores linje, ved at skifte på t, som bestemmer længden vi går.

Bemærk, at i linjens ligning bruger vi en vektor der står vinkelret på linjen, mens vi i parameterfremstillingen bruger en vektor der er parallel med linjen.

Eksempler:

1. Lad $A = (2,2)$ og $\vec{r} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ og bestem parameterfremstillingen for linjen:

   Vi indsætter i (7.6) og får

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

2. Bestem parameterfremstillingen for linjen der går gennem punkterne $A = (3,4)$ og $B = (8,1)$:

   Vi bestemmer først en retningsvektor

$$\vec{r} = \overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} 8-3 \\ 1-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

   Vi indsætter nu $\vec{r}$ og A i (7.6) og får

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

3. Find skæringspunkterne mellem cirklen $x^2 + y^2 = 2$ og linjen beskrevet ved parameterfremstillingen

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}:$$

   Ud fra parameterfremstillingen får vi de to ligninger

$$x = 2 - t.$$
$$y = 2 - t.$$

   Vi indsætter nu disse i cirklens ligning og får

$$2 = x^2 + y^2 = (2-t)^2 + (2-t)^2 = 2(2-t)^2 = 2(4 + t^2 - 4t) = 2t^2 - 8t + 8.$$

   Det giver os andengradsligningen

$$2t^2 - 8t + 6 = 0,$$

   som vi kan løse

$$t = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{8 \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 6}}{2 \cdot 2} = \frac{8 \pm \sqrt{16}}{4} = \frac{8 \pm 4}{4} = \begin{cases} 3 \\ 1 \end{cases}.$$

Ved at indsætte $t = 3$ og $t = 1$ i vores ligninger for x og y får vi de to skæringspunkter $(-1,-1)$ og $(1,1)$.

7.2.1 Opgaver

1. En linje l går gennem punkterne $(1,-6)$ og $(-2,3)$. Bestem både parameterfremstillingen og ligningen for l samt linjens skæringspunkter med akserne.

2. Linjen l har ligning
$$x+2y-6=0$$
og linjen m har parameterfremstilling
$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$
hvor $t \in \mathbf{R}$. Gør rede for at l og m er parallelle.

3. Bestem skæringspunkterne mellem cirklen $x^2+y^2=2$ og linjen med parameterfremstilling
$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

4. Bestem ligningen for linjen gennem punkterne $(-2,1)$ og $(1,-1)$. Hvordan ligger denne linje i forhold til linjen med parameterfremstilling
$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ -5 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 9 \\ -6 \end{bmatrix}.$$

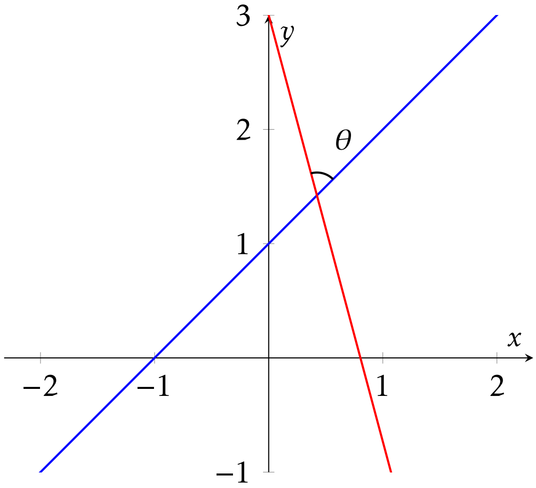
5. Bestem parameterfremstillingen for linjen gennem punkterne $(-2,0)$ og $(5,5)$. Hvordan ligger denne linje i forhold til linjen med parameterfremstilling
$$-10x+14y=21$$

6. Bestem parameterfremstillingen for linjen gennem punkterne $(-6,-2)$ og $(8,8)$. Hvordan ligger denne linje i forhold til linjen med parameterfremstilling
$$3x+2y=9$$

7. Bestem parameterfremstillingen for linjen det går gennem skæringspunkterne til de to cirkler
$$(x-1)^2+(y-1)^2=1, \qquad (x+1)^2+(y+1)^2=5.$$

8. I Figur 7.5 er linjerne $-x+y=1$ og $(2+\sqrt{3})x+y=3$ samt vinklen θ indtegnet. Bestem vinklen θ. (Hint: Bestem koordinater til vektorer som ligger parallelt med de to linjer og bestem vinklen mellem dem. Det kan også være nødvendigt at anvende Opgave 7)

9. I denne opgave vil vi projicere vektorer. Lad $\vec{u}$ og $\vec{v}$ være vektorer. Projektionen af $\vec{u}$ på $\vec{v}$ er en vektor $\vec{w}$ der har samme retning som $\vec{w}$ og så at afstanden fra $\vec{u}$ til $\vec{v}$ er mindst mulig. linjestykket fra $\vec{u}$ til $\vec{w}$ må derfor være vinkelret på $\vec{w}$.



Figur 7.5: Opgave 8

(a) På Figur 7.6 ses en skitse af vektorerne $\vec{u}$, $\vec{v}$ og $\vec{w}$. Argumenter vha. trekanten afgrænset af $\vec{u}$, $\vec{w}$ og $\vec{u}-\vec{w}$ at

$$\cos(\theta) = \frac{||\vec{w}||}{||\vec{u}||}.$$

(b) Brug formlen for vinklen mellem $\vec{u}$ og $\vec{v}$ til at konkludere at

$$||\vec{w}|| = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{||\vec{v}||}. \tag{7.7}$$

(c) Da $\vec{v}$ og $\vec{w}$ har samme retning gælder at

$$\frac{\vec{w}}{||\vec{w}||} = \frac{\vec{v}}{||\vec{v}||}.$$

Brug dette sammen med (7.7) til at vise at projektionen $\vec{w}$ af $\vec{u}$ på $\vec{v}$ er givet ved

$$\vec{w} = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{||\vec{v}||^2}\vec{v}$$

10. Lad

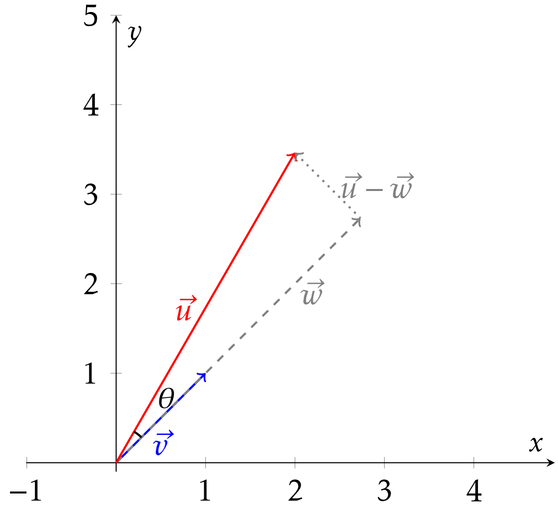
$$\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \text{og} \quad \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \text{og} \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ -6 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Beregn

(a) projektionen af $\vec{u}$ på $\vec{v}_1$.

(b) projektionen af $\vec{u}$ på $\vec{v}_2$.

(c) projektionen af $\vec{u}$ på $\vec{v}_3$.



Figur 7.6: Opgave 9

7.3 Vektorer i rummet

Vi er nu kommet til at studere 3-dimensionelle vektorer, som vi kan tænke på som værende punkter i et 3-dimensionalt koordinatsystem. Vi noterer en sådan vektor ved

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

Regneregler: Lad $\vec{u} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}$ og $\vec{v} = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}$, så har vi har følgende regneregler for vektorer i rummet.

1. $\vec{u} \pm \vec{v} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} \pm \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \pm x_2 \\ y_2 \pm y_2 \\ z_1 \pm z_2 \end{bmatrix}$.

2. $c\vec{u} = c\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cx_1 \\ cy_1 \\ cz_1 \end{bmatrix}$, hvis $c \in \mathbb{R}$.

3. Længden af $\vec{u}$ noteres $||\vec{u}||$ og er givet ved $||\vec{u}|| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$

Hvis vi får givet to punkter i vores koordinatsystem $A = (x_1, y_1, z_1)$ og $B = (x_2, y_2, z_2)$ og vi gerne vil bestemme vektoren fra A til B, så er den givet ved

$$\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{bmatrix}.$$

Det betyder, at hvis O er origo i vores koordinatsystem og $A = (x, y, z)$ så er vektoren fra origo til A givet ved

$$\overrightarrow{OA} = \begin{bmatrix} x-0 \\ y-0 \\ z-0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

Vi kalder vektoren der går fra origo til A for stedvektoren til A. Da vi kun er interesseret i længden og retningen for en vektor og ikke de to punkter den går mellem, så vil vi altid tænke på en vektor som værende stedvektoren. Bemærk, at $\overrightarrow{OA}$ og A har de samme koordinater, og derfor kan man både tænke på en vektor som et objekt med en længde og en retning, men også som et punkt i et koordinatsystem.

Eksempler:

1. Lad $\vec{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$ og $\vec{v} = \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ og udregn $\vec{u}+\vec{v}$ og $\vec{v}-\vec{u}$:

   Vi benytter regneregel 1. og får

$$\vec{u}+\vec{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3+7 \\ 2+1 \\ 4+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

$$\vec{v}-\vec{u} = \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7-3 \\ 1-2 \\ 2-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

2. Lad $\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ og udregn $3\vec{u}$:

   Vi benytter regneregel 2. og får

$$3\vec{u} = 3\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\cdot 1 \\ 3\cdot 2 \\ 3\cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{bmatrix}.$$

3. Lad $\vec{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ og udregn $||\vec{u}||$:

   Vi benytter regneregel 3. og får

$$||\vec{u}|| = \sqrt{2^2+2^2+1^2} = \sqrt{4+4+1} = \sqrt{9} = 3.$$

Prikprodukt: Vi definerer prikproduktet mellem to vektorer $\vec{u} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}$ og $\vec{v} = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}$ til at være

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2. \tag{7.8}$$

Bemærk, at prikproduktet af to vektorer er et tal og ikke en vektor og at man ikke kan gange to vektorer sammen, man prikker dem sammen (så prikken mellem de to vektorer er ikke et gange tegn, men tegnet for et prikprodukt)!

Ved at benytte prikproduktet kan vi udregne vinklen θ mellem to vektorer $\vec{u}$ og $\vec{v}$ ved brug af formlen

$$\cos\theta = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|}. \tag{7.9}$$

Hvis prikproduktet $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$, så har vi at

$$\cos\theta = 0,$$

hvilket betyder at θ er lig enten $\frac{\pi}{2}$ eller $\frac{3\pi}{2}$. Hvis vinklen mellem to vektorer er $\frac{\pi}{2}$ eller $\frac{3\pi}{2}$, så siger vi, at de to vektorer er ortogonale (vinkelrette). Dermed har vi at

$$\vec{u}\perp\vec{v} \qquad \text{hvis og kun hvis} \qquad \vec{u}\cdot\vec{v} = 0,$$

hvor $\perp$ betyder at $\vec{u}$ og $\vec{v}$ er ortogonale.

Krydsprodukt: Det næste vi vil betragte er krydsproduktet af to vektorer. Hvis $\vec{u} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}$ og $\vec{v} = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}$ så er krydsproduktet af $\vec{u}$ og $\vec{v}$ givet ved

$$\vec{u}\times\vec{v} = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix} \\ \\ \begin{vmatrix} z_1 & z_2 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix} \\ \\ \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \det\begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{bmatrix} \\ \\ \det\begin{bmatrix} z_1 & z_2 \\ x_1 & x_2 \end{bmatrix} \\ \\ \det\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1z_2 - z_1y_2 \\ z_1x_2 - x_1z_2 \\ x_1y_2 - y_1x_2 \end{bmatrix}. \tag{7.10}$$

Bemærk, at krydsproduktet af to vektorer er en vektor, som står vinkelret på både u og v.

Ligesom ved prikproduktet kan vi også benytte krydsproduktet af to vektorer $\vec{u}$ og $\vec{v}$ til at bestemme vinklen i mellem dem ud fra formlen

$$\sin\theta = \frac{\|\vec{u}\times\vec{v}\|}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|}, \tag{7.11}$$

hvor $0 \leq \theta \leq \pi$. Hvis krydsproduktet har norm $\|\vec{u}\times\vec{v}\| = 0$, så har vi at

$$\sin\theta = 0,$$

hvilket betyder at θ er lig enten 0 eller π. Hvis vinklen mellem to vektorer er 0 eller π, så siger vi, at de to vektorer er parallelle. Dermed har vi at

$$\vec{u}\parallel\vec{v} \qquad \text{hvis og kun hvis} \qquad \|\vec{u}\times\vec{v}\| = 0,$$

hvor $\|$ betyder at $\vec{u}$ og $\vec{v}$ er parallelle. Da den eneste vektor der har norm lig med 0 er nulvektoren, har vi at

$$\vec{u} \parallel \vec{v} \qquad \text{hvis og kun hvis} \qquad \vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}.$$

Derudover har vi at normen af $\vec{u} \times \vec{v}$ er lig med arealet af det parallellogram der er udspændt af $\vec{u}$ og $\vec{v}$, altså

$$A = \|\vec{u} \times \vec{v}\|,$$

hvor A er arealet af det udspændte parallellogram.

Eksempler:

1. Lad $\vec{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$ og $\vec{v} = \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ og udregn $\vec{u} \cdot \vec{v}$ og $\vec{u} \times \vec{v}$:

   Vi benytter (7.8) og (7.10) til at finde henholdsvis prikproduktet og krydsproduktet

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 3 \cdot 7 + 2 \cdot 1 + 4 \cdot 2 = 21 + 2 + 8 = 31.$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 2 - 4 \cdot 1 \\ 4 \cdot 7 - 3 \cdot 2 \\ 3 \cdot 1 - 2 \cdot 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 22 \\ -11 \end{bmatrix}.$$

2. Lad $\vec{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ og $\vec{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ og udregn vinklen mellem $\vec{u}$ og $\vec{v}$:

   Vi kan udregne vinklen enten ved at benytte (7.9) eller (7.11). Vi vælger at benytte (7.9), så vi finder først prikproduktet og normen af de to vektorer

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \cdot 0 + 0 \cdot -1 + 1 \cdot 0 = 0$$

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{1} = 1$$

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{0^2 + (-1)^2 + 0^2} = \sqrt{1} = 1.$$

   Dermed har vi, at

$$\cos\theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|} = \frac{0}{1 \cdot 1} = 0.$$

   Dvs. at vinklen mellem $\vec{u}$ og $\vec{v}$ er den vinkel der opfylder at $\cos\theta = 0$ og vi husker, at det gør $\theta = \frac{\pi}{2}$ eller $\theta = \frac{3\pi}{2}$.

3. Lad $\vec{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$ og $\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ og bestem om $\vec{u} \perp \vec{v}$ eller $\vec{u} \parallel \vec{v}$:

Vi udregner prikproduktet og krydsproduktet af de to vektorer

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \begin{bmatrix}3\\0\\3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix} = 3\cdot 1 + 0\cdot 0 + 3\cdot 1 = 6$$

$$\vec{u}\times\vec{v} = \begin{bmatrix}0\cdot 1 - 3\cdot 0\\3\cdot 1 - 1\cdot 3\\3\cdot 0 - 0\cdot 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}.$$

Da $\vec{u}\cdot\vec{v}\neq 0$ men $\vec{u}\times\vec{v}=\vec{0}$, har vi at $\vec{u}$ og $\vec{v}$ er parallelle men ikke ortogonale. Bemærk, at det eneste tidspunkt to vektorer kan være både ortogonale of paralelle, er hvis den ene af dem er nulvektoren.

7.3.1 Opgaver

1. Lad

$$\vec{u} = \begin{bmatrix}7\\1\\4\end{bmatrix}, \quad \text{og} \quad \vec{v} = \begin{bmatrix}2\\-1\\8.\end{bmatrix}.$$

Udregn

$$3\vec{u}, \qquad -\vec{v}, \qquad \vec{u}+\vec{v}, \qquad \vec{u}-\vec{v}, \qquad \|\vec{u}\|, \qquad \|\vec{v}\|, \qquad \vec{u}\cdot\vec{v}, \qquad \vec{u}\times\vec{v}.$$

2. Er vektorerne

$$\vec{u} = \begin{bmatrix}1\\5\\0\end{bmatrix}, \quad \text{og} \quad \vec{v} = \begin{bmatrix}3\\6\\-1.\end{bmatrix}$$

ortogonale?

3. Lad

$$\vec{u} = \begin{bmatrix}2\\-2\\4\end{bmatrix}, \quad \text{og} \quad \vec{v} = \begin{bmatrix}1\\2\\-1.\end{bmatrix}.$$

Bestem de værdier af t hvor $\vec{u}+t\vec{v}$ står vinkelret på $\vec{u}-t\vec{v}$.

4. Bestem arealet af parallelogrammet udspændt af vektorerne

$$\vec{u} = \begin{bmatrix}1\\-2\\3\end{bmatrix}, \quad \text{og} \quad \vec{v} = \begin{bmatrix}2\\2\\1.\end{bmatrix}.$$

5. Vis at $\vec{u}\times\vec{u}=\vec{0}$.

6. Lad

$$\vec{u} = \begin{bmatrix}0\\3\\2\end{bmatrix}, \quad \text{og} \quad \vec{v} = \begin{bmatrix}-1\\3\\1\end{bmatrix}$$

og bestem t så parallelogrammet udspændt af $\vec{u}$ og $t\vec{v}$ har areal 3.

7. Lad

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \text{og} \quad \vec{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \vec{w} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

   Udregn

$$\vec{u} \times \vec{v}, \qquad \vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}), \qquad \vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}), \qquad \vec{v} \times \vec{u}, \qquad \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}, \qquad \vec{w} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}).$$

8. Vis at der også i rummet gælder at $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$.

9. Vis at der også i rummet gælder at $||k\vec{u}|| = |k|||\vec{u}||$.

10. Vis at der også i rummet gælder at $||\vec{u} + \vec{v}||^2 = ||\vec{u}||^2 + ||\vec{v}||^2 + 2(\vec{u} \cdot \vec{v})$.

11. Vis at $\vec{u}$ og $\vec{v}$ står vinkelret på $\vec{u} \times \vec{v}$ for alle vektorer u og v.

7.4 Planer i rummet

Det næste vi vil studere er, hvordan man kan beskriver linjer og planer i rummet (i.e. i tre dimensioner). Vi vil betragte parameterfremstillingen for en linje i rummet, samt planens ligning.

Hvis vi får givet et fast punkt $A = (x_0, y_0, z_0)$ på den linje vi gerne vil bestemme samt en vektor $\vec{r} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix}$ som er parallel med vores linje (en sådan vektor kaldes for en retningsvektor), så er parameterfremstillingen givet ved

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix}, \tag{7.12}$$

hvor $t \in \mathbb{R}$. Det skal forståes således at vi starter med et punkt (x_0, y_0, z_0) på vores linje og så går vi i retningen af vores retningsvektor (som er parallel med vores linje) og dermed kan vi beskrive samtlige punkter på vores linje, ved at ændre på t, som bestemmer længden vi går.

Eksempler:

1. Lad $A = (2, 2, 2)$ og $\vec{r} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ og bestem parameterfremstillingen for linjen:

   Vi indsætter i (7.12) og får

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

2. Find skæringspunkterne mellem kuglen $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ og linjen beskrevet ved parameterfremstillingen

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}:$$

Ud fra parameterfremstillingen får vi de tre ligninger

$$\begin{aligned} x &= 2 - t. \\ y &= 2 - t. \\ z &= 2 - t. \end{aligned}$$

Vi indsætter nu disse i kuglens ligning og får

$$3 = x^2 + y^2 + z^2 = (2-t)^2 + (2-t)^2 + (2-t)^2 = 3(2-t)^2 = 3t^2 - 12t + 12.$$

Det giver os andengradsligningen

$$3t^2 - 12t + 9 = 0,$$

som vi kan løse

$$t = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{12 \pm \sqrt{36}}{6} = \frac{12 \pm 6}{6} = \begin{cases} 3 \\ 1 \end{cases}.$$

Ved at indsætte $t = 3$ og $t = 1$ i vores ligninger for x og y får vi de to skæringspunkter $(-1, -1, -1)$ og $(1, 1, 1)$.

Planens ligning: Hvis vi får givet et fast punkt $A = (x_0, y_0, z_0)$, som ligger på den plan vi gerne vil bestemme, samt en vektor $\vec{n} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ som står vinkelret på planen (en sådan vektor kaldes for en normalvektor) så har vi for ethvert punkt $B = (x, y, z)$ der ligger på vores plan, at

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{bmatrix} = 0,$$

da de to vektorer er ortogonale. Hvis vi udregner prikproduktet får vi ligningen

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0, \tag{7.13}$$

som kaldes planens ligning i rummet.

Hvis vi får givet et punkt $A = (x_1, y_1, z_1)$ samt et plan α med ligning

$$ax + by + cz + d = 0,$$

så kan vi bestemme afstanden fra vores punkt til planen ud fra formlen

$$\operatorname{dist}(A, \alpha) = \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}. \tag{7.14}$$

Eksempler:

1. Lad $\vec{n} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ og $A = (4, 0, 3)$ og bestem planens ligning:

   Vi indsætter i (7.13) og får

   $$0 \cdot (x-4) + 1 \cdot (y-0) + 2(z-3) \Leftrightarrow y + 2z - 6 = 0.$$

2. Bestem afstanden fra punktet $A = (0, 1, 0)$ til plnanen α med ligning

   $$2x + 2y + z - 9 = 0:$$

   Vi benytter (7.14) og får

   $$\text{dist}(A, \alpha) = \frac{|2 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 0 - 9|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{|-7|}{\sqrt{9}} = \frac{7}{3}.$$

3. Bestem skæringen mellem de to planer α og β givet ved ligningerne

   $$\alpha: x - 3y + z - 1 = 0 \qquad \text{og} \qquad \beta: 2x - 5y - 2z + 4 = 0:$$

   Vi benytter de lige store koefficienters metode ved at tage 2 gange ligningen for α og trække fra ligningen for β og dernæst at tage 2 gange ligningen for α og lægge til ligningen for β. Så får vi de to ligninger

   $$y - 4z + 6 = 0 \qquad \text{og} \qquad 4x - 11y + 2 = 0.$$

   Vi ser, at y indgår i begge ligninger, så hvis vi lader $y = t$ og isolerer z i den ene ligning samt x i den anden ligning, så får vi

   $$z = \frac{1}{4}t + \frac{3}{2} \qquad \text{og} \qquad x = \frac{11}{4}t - \frac{1}{2}.$$

   Det giver os at parameterfremstillingen for skæringslinjen er

   $$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{2} \\ 0 \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} \frac{11}{4} \\ 1 \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}.$$

7.4.1 Opgaver

1. Bestem en parameterfremstilling for linjen m gennem punkterne $P_1 = (11, 3, -4)$ og $P_2 = (1, -2, 6)$. Ligger $P = (5, 0, 1)$ på m?

2. Bestem en ligning for planen der indeholder $P = (1, -5, 4)$ og har normalvektor

   $$\vec{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

3. En plan er givet ved ligningen

   $$2x + y - 5z + 2 = 0.$$

   Beregn afstanden fra planen til punktet $P = (3, 2, -4)$.

4. Planen α er givet ved ligningen

$$3x - 2y + z - 20 = 0,$$

og linjen l har parameterfremstilling

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Bestem skæringspunkterne mellem α og l.

5. En plan α er givet ved ligningen

$$4x - 2y + z - 12 = 0.$$

Bestem skæringspunkterne mellem α og koordinatakserne.

6. Udspænder vektorerne

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \text{og} \quad \vec{v} = \begin{bmatrix} -3 \\ 6 \\ -6 \end{bmatrix}$$

en plan?

7. Bestem en parameterfremstilling for skæringslinjen mellem planerne givet ved

$$x - y - z = 0, \qquad\qquad 2x + y + z = 2.$$

8. Lad

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ \frac{5}{2} \end{bmatrix}, \quad \text{og} \quad \vec{v} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

I denne opgave betragter vi $\vec{u}$ og $\vec{v}$ som stedvektorer

(a) Bestem en ligning for planen P som indeholder $\vec{u}$, $\vec{v}$ og origo.

(b) Hvad er arealet af parallelogrammet udspændt af $\vec{u}$ og $\vec{v}$.

(c) Planen Q har ligning

$$2x + 3y + 2z = 1.$$

Vis at P og Q hverken er parallelle eller sammenfaldende.

(d) Vis at skæringen mellem P og Q er givet ved linjen

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -10 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

9. Lad $P = (2, -1, 1)$ og lad α være planen med ligning $2x - y - 2z + 3 = 0$. Bestem afstanden fra P til α.

10. Hvis $\vec{v}_1$ og $\vec{v}_2$ er stedvektorer der udspænder en plan i rummet så er projektionen $\vec{w}$ af stedvektoren $\vec{u}$ på denne plan givet ved

$$\vec{w} = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}_1}{\|\vec{v}_1\|^2}\vec{v}_1 + \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}_2}{\|\vec{v}_2\|^2}\vec{v}_2.$$

Lad

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \text{og} \quad \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

og bestem projektionen $\vec{w}$ af $\vec{u}$ på planen udspændt af $\vec{v}_1$ og $\vec{v}_2$.

Kapitel 8

Repetition

8.1 Repetitionsopgaver

1. Udregn følgende
$$\frac{2}{3}-\frac{3}{4}, \qquad \frac{\frac{4}{6}+\frac{1}{3}}{2}, \qquad \frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{5}}\cdot\frac{2}{5}+\frac{1}{2}.$$

2. Løs ligningerne
$$\frac{x}{5}+2=7, \qquad 2x^2-3x=2, \qquad \frac{3}{x}=x+2, \qquad x^4-6x^2+8=0.$$

3. Reducer følgende
$$\frac{x^2+4-4x}{x^2+x-6}, \qquad \frac{9-x^2}{x^2-2x-3}.$$

4. Udregn følgende
$$(3x^2)^3, \qquad \frac{x^2y}{(xy)^2}, \qquad \frac{x^2}{\sqrt{x}^3}.$$

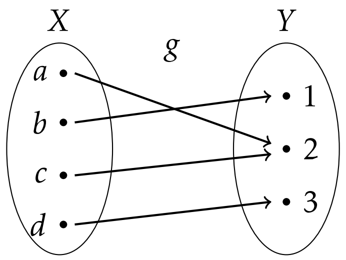
5. Løs ligningssystemet
$$\begin{aligned} 4y+3x &= 4 \\ 2y-x &= -3 \end{aligned}$$

6. Afgør om funktionerne f og g afbildet i Figur 8.1 og Figur 8.2 er surjektive, injektive og/eller bijektive.

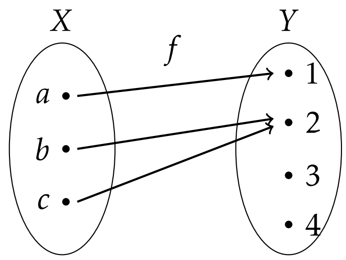
7. Funktionerne f, g og h opfylder $f(3)=-1$, $g(-1)=2$ og $h(2)=-1$. Bestem $h(g(-1))$ og $g(f(3))$.

8. Lad $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ og $g(x)=\cos^2(x)$. Bestem $f(g(x))$ og $g(f(x))$.

9. Udregn følgende:
$$\ln((e^3)^2), \qquad 8^{\log_2(3)}, \qquad e^{\frac{1}{\ln(e^{-3})}}.$$



Figur 8.1: g



Figur 8.2: f

10. Løs ligningerne

$$e^{x^2+1} = e^{2x}, \qquad \ln(2x+1) + \ln(x) = 0$$

11. Udregn følgende:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right)\tan\left(\frac{2\pi}{3}\right), \qquad \frac{\sin(\frac{2\pi}{3}) - \cos(\frac{\pi}{4} - \frac{13\pi}{12})}{\tan(\frac{\pi}{6})}.$$

12. Bestem alle punkter hvor funktionen f givet ved

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{når } x < 0 \\ 1, & \text{når } 0 \leq x < 1 \\ 2, & \text{når } 1 \leq x < 2 \\ 3, & \text{ellers} \end{cases}$$

er kontinuert.

13. Bestem $\lim_{x\to 2} xe^{x^2-4} - x$.

14. Differentier funktionerne

$$f(x) = 2x^2 - \frac{1}{\sqrt{x}}, \qquad g(x) = \sqrt[3]{x^2} - \cos(x), \qquad h(x) = \ln(x^{\frac{3}{2}}) + (e^{2x})^x.$$

15. Differentier funktionerne

$$f(x) = \tan(x^2), \qquad g(x) = e^{2\sin(x)}\sin(x), \qquad h(x) = xe^{-3\ln(\sqrt{x})}$$

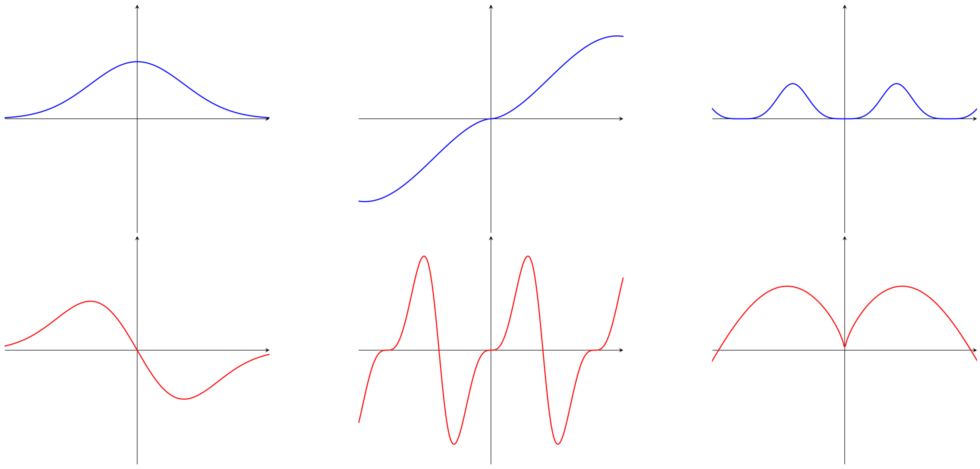
16. Bestem for hver af de blå grafer i Figur 8.3 hvilken af de røde grafer der beskriver den afledede.

17. Lad funktionen f være givet ved $f(x) = x^2 + \cos(x) - 4$ og lad g være en funktion som opfylder at $g(3) = \frac{\pi}{6}$ og at $g'(3) = -\frac{1}{2}$. Bestem $(f \circ g)'(3)$.

18. Bestem monitoniforholdene for funktionen $f(x) = x^2 + 4 - 4x$ og find tangentligningen gennem punktet $(1, f(1))$.

19. Bestem ekstremumsværdierne for $f(x) = 3x^2 + 2x + 4$ i intervallet $[-1, 1]$.

20. I Geogebra er en ligesidet trekant med sidelængder 1 skitseret i et koordinatsystem. I trekanten er tegnet et indskrevet rektangel som er symmetrisk om linjen $x = \frac{1}{2}$. Bestem det størst mulige areal af rektanglet.



Figur 8.3: Opgave 16

21. Er $F(x) = 12\sqrt{x} - 2x^2 + 1$ en stamfunktion til $f(x) = \frac{6}{\sqrt{x}} + 4x$?

22. Udregn følgende integraler
$$\int x^2 + 1\,dx, \qquad \int \frac{x}{\sqrt{x}} + \sin(x)\,dx, \qquad \int \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}\,dx.$$

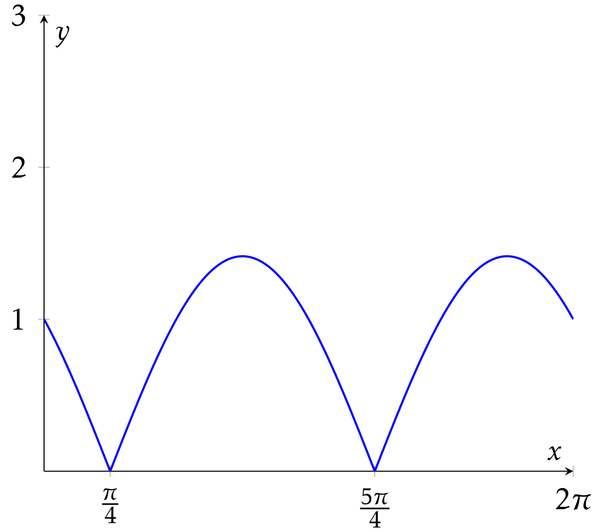
23. Udregn følgende integraler
$$\int x\cos(x)\,dx, \qquad \int x^2\ln(x)\,dx.$$

24. Udregn følgende integraler
$$3\int (x^2+1)e^{x^3+3x-1}\,dx, \qquad \int x\ln(x^2)\,dx, \qquad \int \frac{4x^3+2x-1}{e^{x^4+x^2-x}}\,dx.$$

25. Udregn følgende bestemte integraler
$$2\int_0^1 x^2+1\,dx, \qquad \int_{-3}^{3} x^3 - 3x\,dx, \qquad \int_{-1}^{0} xe^x\,dx.$$

26. Udregn følgende bestemte integraler:
$$\int_{-1}^{0} 2xe^{x^2}\,dx, \qquad \int_0^{-\sqrt{\pi}} 5x\cos(x^2)\,dx.$$

27. Lad $f\colon [0,2\pi] \to \mathbf{R}$ være givet ved
$$f(x) = \begin{cases} \cos(x) - \sin(x), & \text{hvis } 0 \le x < \frac{\pi}{4} \\ \sin(x) - \cos(x), & \text{hvis } \frac{\pi}{4} \le 0 < \frac{5\pi}{4} \\ \cos(x) - \sin(x), & \text{hvis } \frac{5\pi}{4} \le x \le 2\pi. \end{cases}$$
Grafen for f er plottet i Figur 8.4. Bestem arealet mellem x-aksen og f i intervallet $[0,2\pi]$.



Figur 8.4: Opgave 27

28. Bestem en løsning til differentialligningen

$$y' + 3y = 0.$$

29. Vis at $f(x) = e^{-e^x}$ er en løsning til differentialligningen

$$-\frac{y'}{y} = e^x$$

30. Hvilke af funktionerne

$$y_1(x) = \cos(3x), \qquad y_2(x) = 3\sin(3x), \qquad y_3(x) = 2e^{-3x}, \qquad y_4(x) = 3x^3$$

løser differentialligningen

$$-y'' = 9y?$$

31. Differentialligningen

$$y' - y = x$$

har en løsning som går gennem punktet $(-\ln(2), \ln(2))$. Bestem ligningen for tangenten til løsningen i dette punkt.

32. Vis at $y_1(x) = \cos x$ og $y_2(x) = \sin x$ er løsninger til differentialligningssystemet

$$\begin{aligned} y_1' &= -y_2 \\ y_2' &= y_1, \end{aligned}$$

med begyndelsesværdibetingelserne $y_1(0) = 1$ og $y_2(0) = 0$.

33. Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningen

$$y' + xy = x.$$

34. Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningen

$$y' - \sin(x)y = \sin(x).$$

35. Hvilke af funktionerne

$$y_1(x) = \frac{-1}{4}\cos(2x), \quad y_2(x) = \frac{1}{4}\sin(2x) \quad y_3(x) = \frac{-1}{2}\cos^2(x), \quad y_4(x) = \frac{1}{2}\sin^2(x)$$

løser differentialligningen

$$y' = \sin(x)\cos(x)?$$

36. Lad

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \text{og} \quad \vec{v} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Udregn

$$-\vec{u}, \qquad 2\vec{v}, \qquad \vec{u}+\vec{v}, \qquad \vec{u}-3\vec{v}, \qquad ||\vec{u}||, \qquad ||\vec{v}||, \qquad \vec{u}\cdot\vec{v}, \qquad \hat{\vec{u}}\cdot(3\vec{v}).$$

37. Bestem arealet af det parallelogram som udspændes af de to vektorer

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

38. Vis at vektorerne

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{-\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}, \vec{v} = \begin{bmatrix} \frac{-\sqrt{2}}{2} \\ \frac{-\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

er ortogonale og begge har norm 1.

39. Linjen l har ligning

$$3x + -2y = 1$$

og linjen m har parameterfremstilling

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

hvor $t \in \mathbf{R}$. Er l og m er parallelle?

40. Lad

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \text{og} \quad \vec{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -3. \end{bmatrix}.$$

Udregn

$$-\vec{u}, \qquad -2\vec{v}, \qquad \vec{u}+\vec{v}, \qquad \vec{u}-\vec{v}, \qquad ||\vec{u}||, \qquad ||\vec{v}||, \qquad \vec{u}\cdot\vec{v}, \qquad \vec{u}\times\vec{v}.$$

41. Bestem arealet af parallelogrammet udspændt af vektorerne

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \text{og} \quad \vec{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2. \end{bmatrix}.$$

42. Bestem en parameterfremstilling for linjen m gennem punkterne $P_1 = (2,3,-1)$ og $P_2 = (2,-2,0)$. Ligger $P = (2,8,-2)$ på m?

43. Bestem en ligning for planen der indeholder $P = (1,1,1)$ og har normalvektor

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Ligger $P_1 = (2,-1,\frac{-1}{3})$ i planen?

Kapitel 9

Facit

9.1 Brøker

1. Svarene er:
$$\frac{8}{4}, \qquad \frac{10}{4}, \qquad \frac{4\pi}{4}, \qquad \frac{6}{4}.$$

2. Svarene er:
$$\frac{21}{3}, \qquad \frac{2}{3}, \qquad \frac{4}{3}, \qquad \frac{12\pi}{3}.$$

3. Svarene er:
$$2, \qquad \frac{5}{4}, \qquad \frac{13}{12}, \qquad 1, \qquad -\frac{1}{3}.$$

4. Svarene er:
$$\frac{3}{2}, \qquad \frac{1}{12}, \qquad \frac{7}{24}, \qquad \frac{3}{10}, \qquad \frac{14}{9}, \qquad \frac{9}{25}.$$

5. Svarene er:
$$4, \qquad \frac{3}{2}, \qquad \frac{1}{4}, \qquad 1, \qquad \frac{5}{4}.$$

6. Svarene er:
$$x+1, \qquad x+2y, \qquad 2x+7, \qquad y, \qquad \frac{x+3}{2x}, \qquad \frac{x-1}{3x}.$$

7. Svarene er:
$$\frac{73}{50}, \qquad -11, \qquad \frac{5}{8}, \qquad 0, \qquad \frac{19}{2}.$$

8. Svaret er:
$$1.$$

9. Svarene er:

$$\frac{1}{2} = \frac{3}{6}, \qquad \frac{6}{7} = \frac{42}{49}, \qquad \frac{2x}{y} = \frac{2xy}{y^2}, \qquad \frac{\pi}{\sqrt{2}} = \frac{3\pi^3}{3\pi^2\sqrt{2}}.$$

10. Svarene er:

$$\frac{9}{11}, \qquad 14, \qquad \frac{1}{11}.$$

11. Svaret er:

$$6.$$

12. Vi regner på venstresiden og får

$$\frac{\frac{1}{b}+1}{1-\frac{a}{b}} = \frac{b}{b}\frac{\frac{1}{b}+1}{1-\frac{a}{b}} = \frac{1+b}{b-a},$$

hvor $b \notin \{0, a\}$.

13. Vi regner på venstresiden og får

$$\frac{\frac{a}{b}+1}{\frac{b}{a}+1} = \frac{\frac{a}{b}+\frac{b}{b}}{\frac{b}{a}+\frac{a}{a}} = \frac{a+b}{b} \cdot \frac{a}{a+b} = \frac{a}{b}.$$

hvor $a, b \neq 0$

9.2 Kvadratsætninger

1. Svarene er:

$$x^2+1+2x, \qquad 4x^2+9-12x, \qquad x^2, \qquad 9a^2+4b^2-6ab.$$

2. Svarene er:

$$\frac{x+3}{2x}, \qquad \frac{2x+3}{2x-3}, \qquad \frac{2x+6}{x}, \qquad \frac{x-2y}{2}.$$

3. Centrumskoordinaterne og radierne er:

$$(0,0), r=1, \qquad (1,-1), r=5, \qquad (-2,0), r=2.$$

4. Vi har at

$$\begin{aligned} 99^2-101^2 &= (99-101)(99+101) = -2(200) = -400, \\ 999^2 &= (1000-1)^2 = 1000^2+1^2-2000 = 998001, \\ 499^2-501^2 &= (499-501)(499+501) = -2(1000) = -2000, \\ 99998^2-100002^2 &= (99998-100002)(99998+100002) = -4(200000) = -800000. \end{aligned}$$

5. Ved at reducere fås

$$8-4a, \qquad 2x, \qquad 2x-3.$$

6. Centrumskoordinaterne og radierne er:

$$(3,4), r=5, \qquad \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right), r=1.$$

7. Arealet af figuren i Figur 2.3 er $(a+b)^2$ hvilket figuren viser kan beskrives som a^2+b^2+2ab.

8. Den højre del af Figur 2.4 viser, at summen af det grå areal og det skraverede areal er $(a+b)(a-b)$. Den venstre figur viser, at dette areal er det samme som a^2-b^2.

9. Det totale areal som ses i Figur 2.5 kan beskrives både som $(a+b)^2$ og som $c^2+4(1/2)ab$. Dette giver ligningen

$$c^2+4\frac{1}{2}ab = (a+b)^2,$$

som kan reduceres til $c^2=a^2+b^2$.

10. Svarene er:

$$a^2+36b^2+12ab, \qquad 16-a^2, \qquad x^2+\frac{1}{x^2}+2.$$

11. Ved at sætte brøkerne på fælles nævner fås

$$\begin{aligned}\frac{7a+b}{4a^2-4b^2}-\frac{3}{4a+4b}-\frac{3}{4a-4b}&=\frac{7a+b-3(a-b)-3(a+b)}{4(a-b)(a+b)}\\&=\frac{a+b}{4(a-b)(a+b)}\\&=\frac{1}{4a-4b}.\end{aligned}$$

12. Lader vi $d=b+c$ får vi

$$\begin{aligned}(a+b+c)^2=a^2+d^2+2ad&=a^2+(b+c)^2+2a(b+c)\\&=a^2+b^2+c^2+2bc+2ab+2ac.\end{aligned}$$

13. Dividerer vi med a får vi

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0.$$

Hvis vi skal omskrive dette så vi får en parentes $(x+k)^2$ på venstresiden må $\frac{b}{a}x$ være det dobbelte produkt hvilket betyder, at

$$k=\frac{b}{2a}.$$

For at samle parentesen skal vi så lægge k^2 til på begge sider, hvilket giver

$$x^2+2\frac{b}{2a}x+\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}=\frac{b^2}{4a^2}.$$

Samler vi parentesen og reducerer får vi

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2},$$

hvilket medfører at $d=b^2-4ac$.

9.3 Potenser

1. Svarene er:

$$1, \qquad 0, \qquad 16, \qquad 125, \qquad 81, \qquad 36.$$

2. Svarene er:

$$-27, \qquad \frac{1}{36}, \qquad \frac{1}{8}, \qquad 3, \qquad 16, \qquad \frac{1}{1000}.$$

3. Svarene er:

$$5, \qquad 16, \qquad 81, \qquad -1, \qquad 27.$$

4. Svarene er:

   (a) $a \geq 1$.
   (b) $a \leq 1$.
   (c) x^a aftager.
   (d) x^a vokser.

5. Svarene er:

   (a) $a \leq 1$.
   (b) $a \geq 1$.
   (c) x^a vokser.
   (d) x^a aftager.

6. Svarene er:

$$4x^4, \qquad x^{-6}y^{-9}, \qquad 9x^6, \qquad x.$$

7. Svarene er:

$$2^2 3^2, \qquad 3^{-2}2^6, \qquad 2^2 3^2, \qquad 2^2 3^{-2}, \qquad 2^4 3^{-4}$$

8. Svarene er:

$$3a^{-1}b^2, \qquad \frac{3}{2}a^{-1}b^{-6}, \qquad 8x^{-2}y^7.$$

9. Ved at bruge hintet får vi

$$(a+b)^4 = ((a+b)^2)^2 = (a^2+b^2+2ab)^2 og$$

fra Opgave 12 får vi så at

$$\begin{aligned}(a^2+b^2+2ab)^2 &= (a^2)^2+(b^2)^2+(2ab)^2+2a^2b^2+2a^2(2ab)+2b^2(2ab)\\ &= a^4+b^4+4a^2b^2+2a^2b^2+4a^3b+4ab^3\\ &= a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4.\end{aligned}$$

10. Svarene er:

$$x^{11}y^4z^{-4}, \qquad x^{-3}y^{-7}z^{-5}, \qquad x^{10}z^4.$$

11. Svarene er:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{12}, \qquad \left(\frac{1}{2}\right)^{-8}3^{-8}, \qquad \left(\frac{1}{2}\right)^{8}3^{-2}.$$

9.4 Rødder

1. Svarene er:

$$2, \qquad 5, \qquad \frac{1}{9}, \qquad 3, \qquad 4, \qquad 100.$$

2. Svarene er:.

$$\frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad \sqrt{2}, \qquad \sqrt{2}, \qquad 3\sqrt{3}, \qquad \frac{1}{2}, \qquad 7^{2/3}.$$

3. Svarene er:.

$$\sqrt{2}+2, \qquad 9\sqrt{2}-4, \qquad 1.$$

4. Svarene er:.

$$x^{4/3}, \qquad x^{-1/6}, \qquad 2^{-3/4}x^{1/8}y^{3/4}, \qquad x^{-1/2}, \qquad x^{5/2}.$$

5. Svarene er:

$$2\sqrt{x}, \qquad \sqrt{3}, \qquad \sqrt{7}, \qquad \frac{x+y}{x-y}.$$

6. Svarene er:

$$4, \qquad 9, \qquad 2\sqrt{2}, \qquad 100000, \qquad -5.$$

7. Ved at anvende kvadratsætningerne får vi at

$$(1 \pm \sqrt{3})^2 = 1 + 3 \pm 2\sqrt{3} = 4 \pm 2\sqrt{3},$$

og fra definitionen af kvadratroden følger det at

$$1 \pm \sqrt{3} = \sqrt{4 + 2\sqrt{3}}$$

8. Svarene er:

$$\frac{\sqrt{7}(\sqrt{2}+6)}{3}, \qquad \frac{(1-\sqrt{3})^2}{\sqrt{2}(1-\sqrt{3})} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}, \qquad 24.$$

9. Svarene er:

$$a^{11/12}b^{4/3}, \qquad a^{-1/4}, \qquad a^{-3}.$$

9.5 Ligninger og uligheder

1. Svarene er:

$$x = 3, \qquad x = -3, \qquad x = 6, \qquad x = \frac{-3}{4}.$$

2. Svarene er:

$$x = -1, \qquad x = 12, \qquad x = \frac{-7}{2}.$$

3. Svarene er:

$$x < \frac{4}{7}, \qquad x > \frac{5}{2}, \qquad \text{ingen løsning}, \qquad \frac{7}{2} \le x.$$

4. Svarene er:
   (a) $a \neq -1, b \in \mathbb{R}$
   (b) $a = -1, b \neq 4$
   (c) $a = -1, b = 4$.

5. Svarene er:

$$\text{ingen løsning}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

6. Svarene er:

$$x = \frac{11}{5}, \qquad x = 1, \qquad x = \frac{7}{2}, \qquad x = -3.$$

7. Svarene er:

$$x = \frac{13}{4}, \qquad x = \frac{6}{11}.$$

8. Svarene er:

$$x = 2\sqrt{2}, \qquad x = \frac{\pi + 3}{\pi - \sqrt{2}}, \qquad x = \frac{5}{2}.$$

9. Svarene er:
   (a) Kvadrat med hjørner $(0,0),(2,0),(0,2),(2,2)$.
   (b) Cirkelskive med centrum $(0,0)$ og $r = 2$.
   (c) Trapez med hjørner $(0,0),(0,2),(2,6),(2,0)$.

10. Svarene er:
    (a) Rektangel: $-4 \le x \le -2$, $0 \le y \le 4$.
    (b) Cirkelskive: $(x+2)^2 + (y+3)^2 \le 4$.
    (c) Trekant: $0 \le x \le 4$, $\frac{1}{2}x \le y \le 2$, eller $0 \le y \le 2$, $0 \le x \le 2y$.

11. Det er klart at $0 \leq (a-b)^2$. Bruger vi kvadratsætningerne har vi

$$0 \leq (a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab.$$

Ved at flytte lidt rundt på ovenstående ulighed får vi

$$ab \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}.$$

Bemærk der findes uendeligt mange valg af a, b, c, d. Et muligt kunne være $a = 1$, $b = 1$, $c = 0$, $d = 1$.

12. Bruger vi kvadratsætningerne får vi

$$(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 = a + b + 2\sqrt{ab}.$$

Da $a, b \geq 0$ er det sidste led positivt. Derfor kan vi fjerne det og opnå følgende ulighed

$$(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 \geq a + b.$$

Tager vi kvadratroden på begge sider får vi den ønskede ulighed

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} \geq \sqrt{a+b}.$$

Bemærk at der findes uendeligt mange valg af a, b, c, d som løser opgaven. Et valg kunne være $a = 0$, $b = 0$, $c = 1$, $d = 1$.

9.6 Andengradsligninger og flere ligninger med flere ubekendte

1. Svarene er:

$$x^2 - x - 2 = 0, \qquad x^2 - \frac{7}{2}x + \frac{3}{2} = 0, \qquad x^2 - 2, \qquad x^2 - x - 1 = 0.$$

2. Svarene er:

$$x = \pm 6, \qquad x = 1, x = -2, \qquad x = -1, x = -\frac{1}{2}, \qquad x = -1, x = -3.$$

3. Svarene er:

$$x = 0, y = 4$$

4. Svarene er:

$$x = 0, x = \frac{3}{2}, \qquad x = 0, x = 7, \qquad x = 0, x = \frac{2}{5}, \qquad x = \pm\frac{7}{11}.$$

5. Svarene er:

$$x = 3, y = 3$$

6. Svarene er:

$$\frac{x+6}{x+1}, \qquad x - 1 \qquad \frac{x+1}{x-2}.$$

7. Svarene er:

$$x = 1, x = -4, \qquad x = -1, x = 4, \qquad x = \frac{7 \pm \sqrt{39}}{5}, \qquad x = \pm 5.$$

8. Svarene er:
   (a) I en afstand af $\frac{3}{10}m$ fra den ene ende af stangen.
   (b) I en afstand af $\frac{7-\sqrt{23}}{20}m$ fra den ene ende af stangen.

9. Svarene er:

$$x = 6, y = 6, z = 6.$$

10. Svarene er:

$$x = \pm 3, \qquad x = -2, x = -\frac{2}{3}, \qquad x = \pm\frac{1}{6}.$$

11. Svarene er:

$$x = -1, x = \frac{3}{4}, \qquad x = -7, x = 10, \qquad x = 3.$$

12. Svaret er $b = \pm 4$.

13. Svaret er $a > 4$.

14. Svarene er:

$$x = \pm 2, \qquad x = \pm 3, \qquad x = 2, x = -1.$$

15. Polynomierne skærer hinanden i $(-1, 2)$ og $(3, 1)$).

16. Svarene er:

$$x = 7, y = 8, z = 9, w = 10.$$

17. Svaret er

$$\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

18. Svarene er:

    (a) $A(4) = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}$

    (b) Ved at løse de to ligninger med to ubekendte

$$\begin{aligned} ab &= \frac{1}{16} \\ \frac{b}{a} &= \frac{\frac{a}{2}}{b}, \end{aligned}$$

    fås $a = \frac{\sqrt[4]{2}}{4}$ og $b = \frac{\sqrt[4]{2^3}}{8}$

    (c) Ved at isolere b i den anden af de to ligninger med to ubekendte

$$\begin{aligned} ab &= \frac{1}{2^n} \\ \frac{b}{a} &= \frac{\frac{a}{2}}{b}, \end{aligned}$$

    får vi at $b = \frac{a}{\sqrt{2}}$. Indsættes dette i den første ligning får vi at

$$\frac{a^2}{\sqrt{2}} = 2^{-n}.$$

    Ganger vi igennem med $\sqrt{2}$ og anvender regneregler for rødder og potenser får vi at

$$a = 2^{\frac{-2n+1}{4}}$$

    og indsætter vi dette i formlen $b = \frac{a}{\sqrt{2}}$ får vi

$$b = 2^{\frac{-2n-1}{4}}.$$

19. Fra Opgave 10 har vi allerede at

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2},$$

og tager vi kvadratroden på begge sider fås

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Hvis vi trækker $\frac{b}{2a}$ fra på begge sider får vi den velkendte formel

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

9.7 Funktioner: Injektivitet, surjektivitet, summer og produkter

1. Svarene kunne være:

   (a) En mulighed er $f(1) = 3, f(2) = 5, f(3) = \pi, f(4) = 1, f(5) = -1$, men der er 119 andre rigtige svar..

   (b) En mulighed kunne være $f(x) = \pi$ for alle $x \in A$.

2. En cirkel kan ikke beskrives som grafen for en funktion da denne funktion i såfald ville have x-værdier som skulle sendes i to y-værdier. Man kan dog beskrive enhver cirkel ved hjælp at to funktioner, en øvre og nedre halvcirkel, givet ved $y = b \pm \sqrt{r^2 - (x-a)^2}$.

3. Svarene er:

   (a) f er en funktion som er surjektiv men ikke injektiv.

   (b) g er en funktion som er injektiv men ikke surjektiv.

   (c) h er ikke en funktion da $h(4) = \text{Hest}, \text{Hund}$.

4. Svarene er:

   (a) $(f+g)(2) = \frac{10}{3}$

   (b) $\frac{f}{g}(-2) = -3$

   (c) $(fg)(0) = -1$

   (d) $\frac{g}{f}(x) = \frac{1}{x^3+x^2-x-1}$

   (e) $(g-f)(x) = \frac{-x^3-x^2+x+2}{1+x}$.

5. Værdimængden for funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ givet ved $f(x) = -3x^2 + 9$ er $f(\mathbb{R}) =]-\infty, 9]$.

6. Svarene er:

   (a) Blå: Surjektiv men ikke injektiv.

   (b) Rød: Hverken injektiv eller surjektiv.

   (c) Grøn: Injektiv og surjektiv.

   (d) Sort: Injektiv men ikke surjektiv.

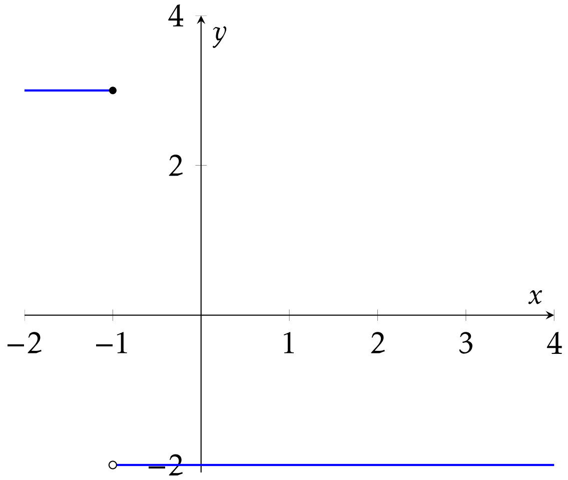
7. Så længe $D \subset [0, \infty[$ eller $D \subset]-\infty, 0]$ vil f være injektiv.

8. Funktionen f er injektiv da

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{y} \quad \Leftrightarrow \quad y = x.$$

   Den er ikke surjektiv da $f(x) \neq 0$ for alle $x \in \mathbf{R} \neq \{0\}$, dog er alle andre punkter med i værdimængden for f. Derfor bliver f bijektiv hvis domænet ændres til $\mathbf{R} \setminus \{0\}$.

9. Når a er ulige er f bijektiv og når a er lige er f hverken injektiv eller surjektiv.



Figur 9.1: Opgave 12.

10. Svarene er:

$$D(f) = [-1, 2], \qquad D(g) = \mathbf{R}, \qquad D(h) =]-2, \infty[.$$

11. Kun den røde kurve i Figur **??** er grafen for en funktion.

12. I Figur 9.1 ses et eksempel på en sådan funktion.

13. Uanset værdien af $a \in \{-3-2, \ldots, 2, 3\}$ vil kurven aldrig være grafen for en funktion.

9.8 Sammensatte og inverse funktioner

1. Svarene er:

   (a) $f(g(2)) = 1$

   (b) $g(f(1)) = 4$

   (c) $g(f(f(4))) = 4$

2. Nej.

3. Svarene er:

   (a) Rød: $\cos(x)^2$ fordi funktionsværdien er ikke-negativ.

   (b) Blå: $\cos(x^2)$.

4. Svarene er $(f \circ g)(x) = \frac{1}{2}$ og $(g \circ f)(x) = 1$.

5. Svaret er:

$$g(a) = 2, \quad g(b) = 1, \quad g(c) = 3.$$

6. Svarene er:

   (a) $(f \circ g)(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}}$,

(b) $(g \circ f)(x) = \frac{1}{1+\sqrt{x}}$,

(c) $(f \circ h \circ g)(x) = x$,

(d) $(g \circ h \circ f)(x) = \frac{1}{1+\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-1\right)^2}$,

(e) $(f \circ g \circ h)(x) = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{x}-1\right)^2}}$,

(f) $(g \circ g)(x) = \frac{x+1}{x+2}$.

7. Svaret er $f^{-1} = f$.

8. Simple udregninger giver at

$$(f \circ g)(x) = \frac{\frac{x+1}{1+2x} - 1}{1 - 2\frac{x+1}{1+2x}} = \frac{\frac{-x}{1+2x}}{\frac{-1}{1+2x}} = x,$$

og

$$(g \circ f)(x) = \frac{\frac{x-1}{1-2x} + 1}{1 + 2\frac{x-1}{1-2x}} = \frac{\frac{-x}{1-2x}}{\frac{-1}{1-2x}} = x.$$

9. Svarene er:

(a) Man kan vælge $g(x) = \cos x$ og $h(x) = (x-2)^2$.

(b) Man kan vælge $g_1(x) = \cos(x^2)$ og $h_1(x) = x-2$.

(c) Man kan vælge $f_1(x) = \cos x$, $f_2(x) = x^2$ og $f_3(x) = x-2$.

10. Tag eksemplevis $g(x) = e^x$ og $h(x) = x^2$.

11. Svarene er:

(a) $D(f \circ g) = [-2, \infty[$, $(f \circ g)([-2, \infty[) = [-2, \infty[$. $(f \circ g)(x) = x$.

(b) Funktionerne er ikke hinandens inverse fordi f ikke er injektiv.

(c) Tag $D = [0, \infty[$.

12. Svarene er:

(a) $D(h) = [1, \infty[$.

(b) Simple udregninger giver

$$(g \circ (f \circ h))(x) = ((x-1)^{\frac{3}{2}})^{\frac{2}{3}} + 1 = x - 1 + 1 = x,$$

og

$$((f \circ h) \circ g)(x) = ((x^{\frac{2}{3}} + 1) - 1)^{\frac{3}{2}} = x.$$

9.9 Polynomier

1. Svarene er:

$$f\left(-\frac{1}{3}\right) = -7, \qquad f(-1) = -15, \qquad (f+g)(-2) = -24,$$

samt $x = \frac{1}{4}$.

2. Svarene er:

   (a) Rød: g.
   (b) Blå: f.
   (c) Grøn: h.

3. Toppunket er $(\frac{3}{4}, \frac{1}{8})$.

4. Hjørnepunkterne er $(-\frac{11}{4}, -\frac{19}{4})$, $(2,0)$, $(-\frac{16}{11}, \frac{19}{11})$.

5. Vi har $a = -\frac{4}{3}$, $b = \frac{5}{3}$.

6. Svaret er $x_0 = 3$.

7. Svarene er: $f(-2) = 22$ samt $x_0 = 10$ og $x_0 = \frac{2}{3}$

8. Svaret er $b = 1$ og $c = 6$.

9. Lad $f(x) = ax^2 + bx + c$ være et vilkårligt polynomium. Hvis f skal gå gennem punkterne $(-1,2)$, $(1,-1)$, $(2,4)$ kan vi løse ligningerne

$$\begin{aligned} 2 &= a - b + c \\ -1 &= a + b + c \\ 4 &= 4a + 2b + c, \end{aligned}$$

og få $a = \frac{13}{6}$, $b = -\frac{3}{2}$, $c = -\frac{5}{3}$. Dette giver at løsningen er $f(x) = \frac{13}{6}x^2 - \frac{3}{2}x - \frac{5}{3}$.

10. Skæringspunkterne er $(-\frac{1}{2}, -2)$, $(0,-1)$, $(1,1)$.

11. Fortegnene er givet ved $a > 0$, $b < 0$, $c < 0$ og $d > 0$.

12. Skæringspunkterne er $(-1,2)$,$(0,2)$ og $(1,0)$.

13. Svarene er:

   (a) $0 < b < 2\sqrt{2}$.
   (b) $b < -2\sqrt{2}$.

14. En simpel udregning giver resultatet:

$$-a_0\left(\frac{-b}{2a_0}\right)^2 + c_0 = -\frac{b^2}{4a_0} + c_0 = -\frac{b^2 - 4a_0c_0}{4a_0} = -\frac{d}{4a_0}.$$

9.10 Eksponentiel og logaritme funktioner

1. Svarene er:
$$16, \qquad \frac{1}{4}, \qquad e^3, \qquad \frac{1}{8}, \qquad 27, \qquad 1.$$
2. Svarene er:
$$8, \qquad 3, \qquad -2, \qquad 6, \qquad 0.$$
3. Svarene er:
$$1, \qquad \ln 2, \qquad \ln 2.$$
4. Svarene er:
$$3, \qquad 1, \qquad 2.$$
5. Svarene er:
$$\frac{1}{2}\ln(2), \qquad 2, \qquad \frac{3}{2}$$
6. Svarene er:
$$1, \qquad 40, \qquad 343, \qquad \frac{1}{9}, \qquad 9.$$
7. Svaret er $a = \sqrt{2}$ og $b = \sqrt{2}$.
8. Svarene er:
$$x = \ln 5, \qquad x = 0, x = 2, \qquad x = \log_2(3) - 1, \qquad x = 9, \qquad x = 10.$$
9. Svarene er:
$$x = e^4, \qquad x = 3, \qquad x = 2.$$
10. Svarene er:
    (a) $f(-11) = 48$.
    (b) $f(10) = 6$.
    (c) $x = 24$.
11. Da e^x altid er positiv og $\ln x$ er den inverse til e^x må $\ln x$ nødvendigvis kun være defineret på de positive tal.
12. Svaret er $a = e^{\frac{1}{5}}$.
13. Svaret er $a = e^2$ og $b = e$.
14. Eksponentialfunktionen med den grønne graf har den største fordoblignskonstant, da den vokser langsomst.

15. Svaret er $T_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\ln 2$.

16. Bruger vi hintet få vi at $g(x) = ba^{-x}$ er spejlingen, så $c = b$ og $d = a^{-1}$.

17. Vi har at

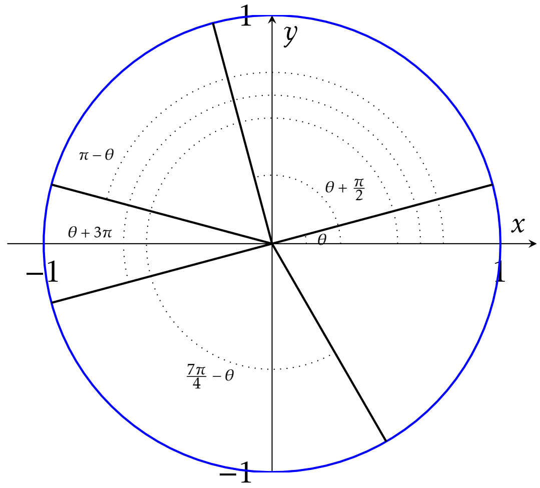
$$\frac{\ln(a^y)}{\ln(a)} = \frac{y\ln(a)}{\ln(a)} = y.$$

Hvis vi bruger at $x = a^{\log_a(x)}$ så får vi

$$a^{\frac{\ln(x)}{\ln(a)}} = a^{\frac{\ln(a^{\log_a(x)})}{\ln(a)}} = a^{\frac{\log_a(x)\ln(a)}{\ln(a)}} = a^{\log_a(x)} = x.$$

Disse to udregninger viser, at $\frac{\ln x}{\ln a}$ er invers til funktionen a^x og vi har derfor at

$$\log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a}.$$



Figur 9.2: Opgave 7

9.11 Trigonometriske funktioner

1. Svarene er:
$$\frac{\pi}{2}, \qquad \frac{\pi}{12}, \qquad \frac{5\pi}{6}, \qquad \frac{\pi}{4}.$$
2. Svarene er:
$$60°, \qquad 315°, \qquad 75°.$$
3. Svarene er:
   (a) Bestem $\sin(0) = 0$ og $\cos(0) = 1$.
   (b) Bestem $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$ og $\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$.
   (c) Bestem $\sin(\pi) = 0$ og $\cos(\pi) = -1$.
   (d) Bestem $\sin(\frac{3\pi}{2}) = -1$ og $\cos(\frac{3\pi}{2}) = 0$.
   (e) Bestem $\sin(2\pi) = 0$ og $\cos(2\pi) = 1$.
4. Svarene er:
$$0, \qquad \frac{3+2\sqrt{3}}{6}, \qquad \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$
5. Vi får at
$$\cos(-\theta) = \cos(0-\theta) = \cos(0)\cos(\theta) + \sin(0)\sin(\theta) = \cos(\theta),$$
og
$$\sin(-\theta) = \sin(0-\theta) = \sin(0)\cos(\theta) - \cos(0)\sin(\theta) = -\sin(\theta).$$
6. Vi har at
$$\cos(\theta - \frac{\pi}{2}) = \cos(\theta)\cos(\frac{\pi}{2}) + \sin(\theta)\sin(\frac{\pi}{2}) = \sin(\theta).$$

7. Se Figur 9.2 for en skitse af vinklerne

$$\theta + \frac{\pi}{2}, \qquad \pi - \theta, \qquad \theta + 3\pi, \qquad \frac{7\pi}{4} - \theta.$$

8. Svarene kan være:

$$x = \frac{\pi}{3}, x = \frac{2\pi}{3}, \qquad x = \frac{\pi}{4}, x = \frac{3\pi}{4}, \qquad x = -\frac{\pi}{6}, x = \frac{7\pi}{6}.$$

9. Indtegner man vinklen x i enhedscirklen dannes en retvinklet trekant med kateter $\cos x$, $\sin x$ og hypotenuse 1. Dermed giver Pythagoras sætning at

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$

10. Svarene er:

$$-\frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad \frac{1}{2}, \qquad 1, \qquad \frac{1}{2}.$$

11. Vi har at

$$\sin(2\theta) = \sin(\theta+\theta) = \sin(\theta)\cos(\theta) + \sin(\theta) = 2\sin(\theta)\sin(\theta).$$

12. Hvis vi bruger hintet får vi at ligningen reducerer til

$$(2\sin(2x))^2 = 3, \quad \Leftrightarrow \quad \sin(2x) = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Hvis vi finder de vinkler $x \in [0,\pi]$, hvor $\sin(2x) = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ får vi $x = \frac{\pi}{6}$, $x = \frac{\pi}{3}$, $x = \frac{2\pi}{3}$, $x = \frac{5\pi}{6}$.

13. Svarene er:

$$\frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad \sqrt{3}, \qquad \frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad 0.$$

14. Vi har at

$$\frac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)} = \frac{\sin(x)\cos(\pi) + \sin(\pi)\cos(x)}{\cos(x)\cos(\pi) - \sin(x)\sin(\pi)} = \frac{\sin(x)\cos(\pi)}{\cos(x)\cos(\pi)} = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

15. Bruger vi hintet reducerer ligningen til

$$\sin^2 x + 3\cos^2 x = 2 \quad \Leftrightarrow \quad 1 + 2\cos^2 x = 2 \quad \Leftrightarrow \quad \cos x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Dermed er den eneste løsning i intervallet $[0, \frac{\pi}{2}]$ givet ved $x = \frac{\pi}{4}$.

16. Svarene kan være er:

    (a) Trekanten i Figur 3.21 har en vinkel på 60 grader og to af siderne har længde 1. Dermed må det være en ligesidet trekant hvor alle sidelængderne nødvendigvis er 1. Dette medfører at $\sin(\frac{\pi}{6})$, som er halvdelen af den lodrette stiplede linje, må være $\frac{1}{2}$.

(b) Idiotformlen giver, at $\sin^2\frac{\pi}{6}+\cos^2\frac{\pi}{6}=1$ og ved at løse ligningen for $\cos(\frac{\pi}{6})$ får vi at $\cos(\frac{\pi}{6})=\sqrt{1-\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(c) Ved at bruge formlen fra Opgave 11

$$\sin(\frac{\pi}{3})=\sin(2\frac{\pi}{6})=2\sin(\frac{\pi}{6})\cos(\frac{\pi}{6})=2\frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

(d) Vi har at

$$\sin^2\frac{\pi}{3}+\cos^2\frac{\pi}{3}=1 \quad\Leftrightarrow\quad \cos^2\frac{\pi}{3}=1-\frac{3}{4} \quad\Leftrightarrow\quad \cos\frac{\pi}{3}=\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}.$$

17. Svarene kan være:

(a) Da trekanten i Figur 3.22 er retvinklet og begge kateter har længde 1 kan vi anvende Pythagoras og få at hypotenusen har længde $\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$. Da $\sin\frac{\pi}{4}$ er halvdelen af hypotenusen fås at $\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

(b) Vi har at

$$\cos\frac{\pi}{4}=\sqrt{1-\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

18. Svarene kan være:

(a) Vi bruger hintet og får

$$\sin\frac{\pi}{12}=\sin(\frac{\pi}{3})\cos(\frac{\pi}{4})-\sin(\frac{\pi}{4})\cos(\frac{\pi}{3})=\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{2}=\frac{1}{4}(\sqrt{6}-\sqrt{2}).$$

Gør vi det samme for cosinus får vi at

$$\cos\frac{\pi}{12}=\cos(\frac{\pi}{3})\cos(\frac{\pi}{4})+\sin(\frac{\pi}{4})\sin(\frac{\pi}{3})=\frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{4}(\sqrt{6}+\sqrt{2}).$$

(b) Ved at bruge præcis samme fremgangsmåde som før får vi at

$$\sin\frac{5\pi}{12}=\frac{1}{4}(\sqrt{6}+\sqrt{2}),$$

og

$$\cos\frac{5\pi}{12}=\frac{1}{4}(\sqrt{6}-\sqrt{2}).$$

9.12 Grænseværdier og kontinuitet

1. Svarene er: $\lim_{x\to 1} f(x) = 5$ og $f(1) = 6$, hvorfor f er ikke kontinuert.

2. Svarene er: $\lim_{x\to 2} f(x) = 7$ så f er kontinuert da $f(2) = 7$.

3. Svarene er:

$$9, \qquad -1, \qquad -4, \qquad \frac{-2}{3}$$

4. Grænsen eksisterer og er lig 1 fra både højre og venstre.

5. Svarene er: $f(1) = 2$ samt at f er ikke kontinuert i 1 da $\lim_{x\to 1^+} f(x) = 3$ og $\lim_{x\to 1^-} f(x) = 1$.

6. Svarene er: $a = 5$ og $b = 3$.

7. Svarene er: $f(0) = 0$, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$ og $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -1$. Funktionen f er kontinuert i alle punkter undtagen 0.

8. Svarene er:

$$0, \qquad -6$$

9. Svarene er:

   (a) $(f+g)(0) = 0$, $\lim_{x\to 0^+}(f+g)(x) = 0$ og $\lim_{x\to 0^-}(f+g)(x) = 0$. Funktionen $(f+g)$ er kontinuert i alle punkter.

   (b) $(fg)(0) = 0$, $\lim_{x\to 0^+}(fg)(x) = -1$ og $\lim_{x\to 0^-}(fg)(x) = -1$. Funktionen (fg) er kontinuert i alle punkter undtagen 0.

10. Svarene er:

    (a) $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

    (b) Da $\lim_{x\to 0} = 2$ og $f(0) = 1$ er funktionen ikke kontinuert når $a = 0$.

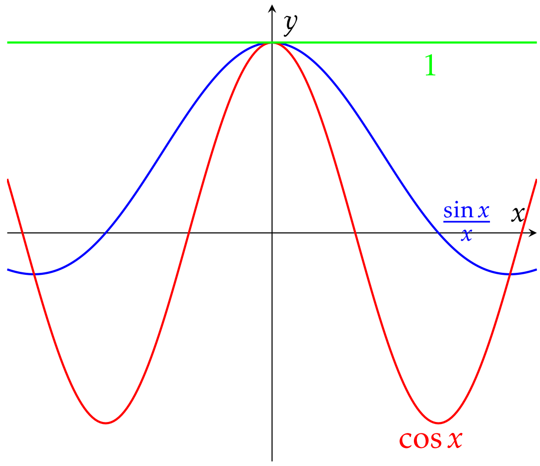
11. Svarene er:

$$0, \qquad 6e^4, \qquad \ln\frac{1}{2}.$$

12. Svarene kan være:

    (a) Arealet af ΔABD er givet ved $\frac{1}{2}\sin(x)$ da grundlinjen i trekanten er 1. Arealet af enhedcirklen er π så da det grå cirkeludsnit udgør $\frac{x}{2\pi}$ af hele cirklen må dets areal være $\pi\frac{x}{2\pi} = \frac{x}{2}$. Arealet af ΔACD er givet ved $\frac{1}{2}\tan x$ da grundlinjen i cirklen er 1. Det er klart at ΔADB har areal mindre end det grå cirkeludsnit som så har areal mindre end ΔACD. Dette giver den ønskede ulighed

$$\frac{1}{2}\sin x \leq \frac{1}{2}x \leq \frac{1}{2}\tan x.$$



Figur 9.3: Funktionen $\frac{\sin x}{x}$ "klemmes" af 1 og $\cos x$.

(b) Ved at gange uligheden med 2 og dividere med $\sin x$ får vi

$$1 \leq \frac{x}{\sin x} \leq \frac{1}{\cos x}. \tag{9.1}$$

Bemærk at vi har brugt at $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$. Hvis vi ganger den første ulighed i (9.1) igennem med $\frac{\sin x}{x}$ får vi at

$$\frac{\sin x}{x} \leq 1. \tag{9.2}$$

Ganger vi den anden ulighed i (9.1) igennem med $\frac{\sin(x)\cos(x)}{x}$ får vi at

$$\cos x \leq \frac{\sin x}{x}. \tag{9.3}$$

Kombinerer vi (9.2) og (9.3) får vi den ønskede ulighed

$$\cos(x) \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1. \tag{9.4}$$

(c) Fra (9.4) ses at $\frac{\sin x}{x}$ ligger mellem $\cos x$ og 1. Når x går mod 0 går $\cos x$ mod 1 og da uligheden gælder for alle x tæt på nul må $\frac{\sin x}{x}$ nødvendigvis også gå mod 1. Man kan se det som at $\frac{\sin x}{x}$ bliver klemt sammen af $\cos x$ og 1 omkring punktet $x = 0$ (se evt. Figur 9.3).

13. Hvis vi benytter os af hintet får vi

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{x} = \left(\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}\right)\left(\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{1+\cos x}\right) = \frac{\sin 0}{1+\cos 0} = 0.$$

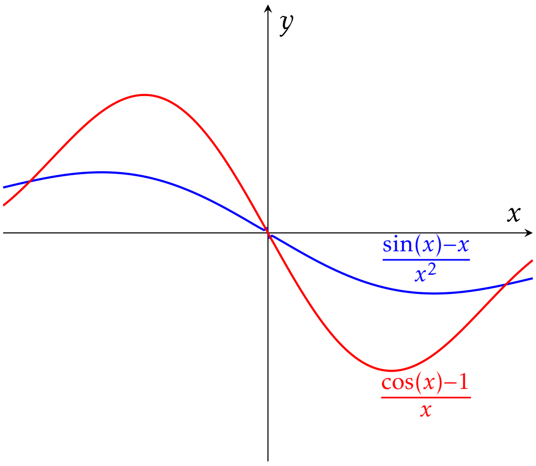
14. Hvis vi trækker 1 fra på alle sider af ulighederne i (9.4) og dividerer med $x \neq 0$ får vi at

$$\cos(x) - 1 \leq \frac{\sin x}{x} - 1 \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\cos(x)-1}{x} \leq \frac{\sin(x)-x}{x^2} \leq 0.$$

Vi ved fra Opgave 13 at

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0,$$

så igen giver et klemmeargument at $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)-x}{x^2} = 0$ (se evt. Figur 9.4).



Figur 9.4: Funktionen $\frac{\sin(x)-x}{x^2}$ “klemmes” af 0 og $\frac{\cos x-1}{x}$.

15. Hvis vi benytter os af hintet får vi

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2}=\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\right)^2\left(\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\cos x}\right)=\frac{1}{1+\cos 0}=\frac{1}{2}.$$

9.13 Differentialkvotienter og differentialregneregler

1. Svaret er $f'(1)=10$.

2. Svarene er:

$$f'(x)=3x^2,\quad f'(x)=1,\quad f'(x)=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}},\quad f'(x)=-x^{-2},\quad f'(x)=12x^5.$$

3. Svarene er:

$$f'(x)=6e^{2x}-\frac{1}{2x},\qquad f'(x)=\frac{1}{2}\cos x,\qquad f'(x)=\frac{2}{x}-\frac{1}{4}e^{-\frac{1}{12}x}.$$

4. Svarene er:

$$f'(x)=21x^6+8x^3-6x,\quad f(x)=10x^4+\frac{9}{2}x^{\frac{1}{2}}+4x^{-3},\quad f(x)=\frac{3}{2}x^{-\frac{1}{2}}-x^{-2}.$$

5. Svarene er:
   (a) Den første blå og den anden røde hører sammen.
   (b) Den anden blå og den tredje røde hører sammen.
   (c) Den tredje blå og den første røde hører sammen.

6. Ved brug af Geogebra ses at

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\infty.$$

Funktionen f er ikke differentiabel i 1 da det ville kræve at differentialkvotienten er endelig.

7. Svarene kan være:

   (a) Vi indsætter f i differentialkvotienten og reducerer indtil det er let at tage grænsen $h \to 0$.

   $$\lim_{h\to 0} \frac{k-k}{h} = 0.$$

   (b) Vi indsætter f i differentialkvotienten og reducerer indtil det er let at tage grænsen $h \to 0$.

   $$\lim_{h\to 0} \frac{x+h-x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h} = 1.$$

   (c) Vi indsætter f i differentialkvotienten og reducerer indtil det er let at tage grænsen $h \to 0$.

   $$\lim_{h\to 0} \frac{k(x+h)-kx}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{kh}{h} = k.$$

8. Svarene er:

   $$x = 1, \qquad x = 0, x = 4.$$

9. Svarene er:

   $$f'(x) = x^{-\frac{2}{3}}, \qquad f'(x) = 6x^2 - 2x, \qquad f'(x) = 40x^3 + 228x^2 + 64x - 76.$$

10. Vi har $(f+g)'(x) = 3x^2 - 2x$ og $(f-g)'(x) = -3x^2 + 10x - 6$.

11. Svarene er:

    $$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(h)-f(0)}{h} = -\infty, \quad \text{og} \quad \lim_{h\to 0^-} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \infty.$$

    Funktionen f er ikke differentiabel i $x = 0$ da det ville kræve at grænserne ovenfor er endelige.

12. Svarene er:

    $$f'(x) = \frac{-1}{2}x^{-\frac{3}{2}} - x^{-2}, \qquad f'(x) = \frac{15}{4}x^{\frac{11}{4}}, \qquad f'(x) = \cos(x), \qquad f(x) = -\frac{2}{x}.$$

13. Svarene er:

    (a) Den første blå og den tredje røde hører sammen.

    (b) Den anden blå og den første røde hører sammen.

    (c) Den tredje blå og den anden røde hører sammen.

14. Svarene er:

    (a) $x = \pi k$ hvor k er et heltal.

(b) Vi har at

$$f(\pi k) = \pi k + 2\cos(\pi k) = \pi k - (-1)^k 2,$$

hvilket viser, at når k er lige ligger $(x, f(x))$ på linjen $y = x - 2$ og når k er ulige ligger punktet på $y = x + 2$.

15. Svarene er:

(a) Vi indsætter f i differentialkvotienten og reducerer indtil det er let at tage grænsen $h \to 0$.

$$\lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2 + 2xh}{h} = \lim_{h\to 0} h + 2x = 2x.$$

(b) Vi indsætter f i differentialkvotienten og reducerer indtil det er let at tage grænsen $h \to 0$.

$$\lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{x-(x+h)}{x(x+h)}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{-h}{x(x+h)}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-1}{x(x+h)} = -\frac{1}{x^2}.$$

(c) Vi indsætter f i differentialkvotienten og reducerer indtil det er let at tage grænsen $h \to 0$.

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x)\cos(h) + \sin(h)\cos(x) - \sin(x)}{h} \\ &= \sin(x) \lim_{h\to 0} \frac{\cos(h) - 1}{h} + \cos(x) \lim_{h\to 0} \frac{\sin(h)}{h} \\ &= 0 \sin(x) + 1 \cos(x) = \cos(x)\end{aligned}$$

(d) Vi indsætter f i differentialkvotienten og reducerer indtil det er let at tage grænsen $h \to 0$.

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{(\sqrt{x+h} - \sqrt{x})(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.\end{aligned}$$

16. Svarene er:

$$f'(x) = \frac{3}{x}, \qquad\qquad f'(x) = 3e^{3x}.$$

17. Bruger vi hintet får vi at

$$\lim_{h\to 0} \frac{\frac{\sin(h)}{h} - 1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(h) - h}{h^2} = 0.$$

18. Svarene er:

(a) Da en tangent til en cirkel står vinkelret på radius vil den stiplede linje tegnet i forlængelse af radius på Figur 4.6 dele θ i en del på $\frac{\pi}{2}$ og en som er præcis ϕ. Dermed er $\theta = \frac{\pi}{2} + \phi$.

(b) Hvis vi isolerer for ϕ får vi at

$$\phi = \frac{s}{r},$$

og dermed bliver

$$\theta = \frac{\pi}{2} + \frac{s}{r}.$$

(c) Differentierer vi θ i forhold til s i formlen ovenfor følger det det direkte at

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{r}.$$

9.14 Differentiation af produkter og kvotienter

1. $f'(x) = \ln(x)$.

2. Bruger vi hintet får vi

$$\frac{d}{dx}\tan x = \frac{d}{dx}\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}.$$

Dividerer vi igennem med $\cos^2 x$ får vi at

$$\frac{d}{dx}\tan x = 1 + \tan^2 x$$

og havde vi i stedet brugt idiotformlen ville vi få

$$\frac{d}{dx}\tan x = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

3. $f'(x) = xe^x$.

4. Svarene er:

$$f'(x) = 3(x+1)e^x, \qquad f'(x) = 4x\sin x + 2x^2\cos x, \qquad f'(x) = \frac{3x^2 - 6x - 1}{(x-1)^2}.$$

5. Svarene er:

$$f'(x) = \frac{2x^8 + 2x^6 - 16x^5 + 4x^3 + 2}{(x^4 - 2x)^2}, \quad f'(x) = \frac{4x^3 + 9x^2 - 12x}{(x+2)^2}, \quad f'(x) = -\frac{x + \cos x \sin x}{\cos^2 x}$$

6. Hvis vi definerer $k(x) = (fg)(x)$ giver produktreglen at

$$\frac{d}{dx}(fgh)(x) = \frac{d}{dx}(kh)(x) = k'(x)h(x) + k(x)h'(x).$$

Bruger vi produktreglen for k får vi at

$$k'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x),$$

og indsættes dette i forrige formel får vi at

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(fgh)(x) &= (f'(x)g(x) + f(x)g'(x))h(x) + f(x)g(x)h'(x)\\ &= f'(x)g(x)h(x) + f(x)g'(x)h(x) + f(x)g(x)h'(x)\end{aligned}$$

7. Vi ved allerede at

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

og differentierer vi dette engang til får vi

$$(fg)'(x) = \frac{d}{dx}(f'(x)g(x)) + \frac{d}{dx}(f(x)g'(x)).$$

Anvender vi produktreglen på hvert led og reducerer udtrykket får vi

$$\begin{aligned}(fg)'(x) &= f''(x)g(x) + f'(x)g'(x) + f'(x)g'(x) + f(x)g''(x)\\ &= f''(x)g(x) + 2f'(x)g'(x) + f(x)g''(x).\end{aligned}$$

8. Svarene er:

$$f'(x) = \frac{1 - xe^x}{(1+x)^2}, \quad f'(x) = \frac{e^x + 1 - xe^x}{(e^x+1)^2}, \quad f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}, \quad f'(x) = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

9. Svarene er:

$$e^{-x}x^2 - 4xe^{-x} + 2e^{-x}, \quad e^x \ln(x) + 2\frac{e^x}{x} - 1\frac{e^x}{x^2}, \quad \sin(x) + 4x\cos(x) - x^2 \sin x.$$

10. Svarene er:

$$\begin{aligned}&f'(x) = \frac{e^x(1 - (x+1)\ln x)}{(\ln x)^2}, \qquad g'(x) = xe^x(1 + (2+x)\ln x),\\ &h'(x) = xe^{-2x}((1 - \tan x)^2 \ln(x)x + (1 + 2\ln x)\tan x).\end{aligned}$$

11. Hvis $x \neq 0$ kan vi bruge kvotientreglen og få

$$f'(x) = \frac{x\cos(x) - \sin x}{x^2}.$$

Kombinerer vi det med Opgave 17 får vi at

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{x\cos x - \sin x}{x^2}, & \text{hvis } x \neq 0\\ 0, & \text{ellers.}\end{cases}$$

12. Denne opgave er ikke måske ikke så nem. Fra regnereglerne for kontinuerte funktioner følger det at f' er kontinuert i alle punkter $x \neq 0$. For at vise at f' også er kontinuert i 0 skal vi have at

$$\lim_{x \to 0} \frac{x \cos x - \sin x}{x^2} = 0.$$

En måde at gøre dette på er at omskrive brøken så vi kan anvende Opgave 13 og Opgave 15. Vi kan altid lægge 0 til en størrelse uden at ændre den, eksempelvis kan vi lægge $0 = -x + x$ til i brøkens tæller

$$\frac{x \cos x - \sin x}{x^2} = \frac{x \cos x + 0 - \sin x}{x^2} = \frac{x \cos x - x + x - \sin x}{x^2}.$$

Ideen med dette er at vi nu kan sætte x udenfor en parentes og omskrive brøken til

$$\begin{aligned} \frac{x \cos x - \sin x}{x^2} &= \frac{x \cos x - x + x - \sin x}{x^2} \\ &= \frac{x(\cos x - 1) + x - \sin x}{x^2} \\ &= x\frac{(\cos x - 1)}{x^2} - \frac{\sin(x) - x}{x^2}. \end{aligned}$$

Nu har vi omskrevet brøken så det er nemt at anvende Opgave 13 og Opgave 15 til at tage grænsen. Vi får at

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0} \frac{x \cos x - \sin x}{x^2} &= \lim_{x \to 0}\left(x\frac{(\cos x - 1)}{x^2}\right) - \lim_{x \to 0}\left(\frac{\sin(x) - x}{x^2}\right) \\ &= 0 \cdot \frac{1}{2} - 0 = 0. \end{aligned}$$

13. Vi har at $g'(x) = -x^{-2}$, hvorfor

$$g'(\frac{\pi}{2} + 2\pi k) = -(\frac{\pi}{2} + 2\pi k)^{-2}.$$

Indsætter vi punktet $\frac{\pi}{2} + 2\pi k$ i f' får vi at

$$f'(\frac{\pi}{2} + 2\pi k) = \frac{(\frac{\pi}{2} + 2\pi k)\cos(\frac{\pi}{2} + 2\pi k) - \sin(\frac{\pi}{2} + 2\pi k)}{(\frac{\pi}{2} + 2\pi k)^2} = \frac{-1}{(\frac{\pi}{2} + 2\pi k)^2}.$$

Omskrivning vha. potensregneregler viser at $g'(\frac{\pi}{2} + 2\pi k) = f'(\frac{\pi}{2} + 2\pi k)$. Figur 9.5 viser graferne for de to funktioner.

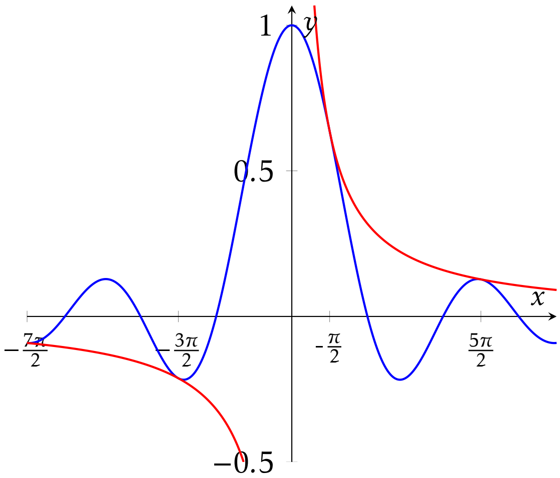
9.15 Kædereglen

1. Svarene er:

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}, \qquad f'(x) = 3(3x^2 + 2x + 1)^2(6x + 2), \qquad f'(x) = 32x + 16.$$

2. Svarene er:

$$f'(x) = 2xe^{x^2}, \quad g'(x) = -\frac{1}{x(\ln x)^2} + 2x(1 + \tan^2(x^2)), \quad h'(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2 + 2x - 1}}$$



Figur 9.5: Opgave 1

3. Vi ved allerede at

$$\frac{d}{dx}\tan x = 1 + \tan^2 x.$$

Differentierer vi vha. kædereglen får vi

$$\frac{d^2}{dx^2}\tan x = 2\tan(x)(1 + \tan^2 x) = 2\tan x + 2\tan^3 x.$$

4. Svarene er: $f'(x) = \tan x$ og $g'(x) = \frac{1}{\tan x}$.

5. Hvis man er skarp kan man se at

$$f(t) = \sqrt{e^{4t} + e^{-4t} - 2} = \sqrt{(e^{2t} - e^{-2t})^2} = e^{2t} - e^{-2t},$$

hvilket let giver at $f'(t) = 2(e^{2t} + e^{-2t})$. Indser man ikke dette vil man få

$$f'(t) = \frac{2(e^{4t} - e^{-4t})}{\sqrt{e^{4t} + e^{-4t} - 2}}.$$

Vil man gerne reducere dette kan vi bruge nogle kvadratsætninger til at få

$$f'(t) = \frac{2(e^{4t} - e^{-4t})}{\sqrt{e^{4t} + e^{-4t} - 2}} = \frac{2(e^{2t} - e^{-2t})(e^{2t} + e^{-2t})}{(e^{2t} - e^{-2t})} = 2(e^{2t} + e^{-2t}).$$

6. Ved at anvende kædereglen samt formlen $\sin(2x) = 2\cos(x)\sin(x)$ (se Opgave 11) får vi

$$\frac{d}{dx}\cos^2 x = 2\cos(x)(-\sin(x)) = -\sin(2x).$$

Gør vi det samme med $\sin^2 x$ får vi

$$\frac{d}{dx}\sin^2 x = 2\sin(x)\cos(x) = \sin(2x).$$

7. For at simplificere vores udregninger reducerer vi først brøken. Ved at anvende $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ får vi at

$$f(x) = \frac{\sin^2(x)\cos(x)}{\frac{\sin x}{\cos x}} = \sin(x)\cos^2(x).$$

Ved at differentiere får vi så

$$f'(x) = \cos^3 x + \sin(x)(2\cos(x)(-\sin(x))) = \cos^3(x) - 2\sin^2(x)\cos(x).$$

8. Svarene er:

$$f'(x) = \frac{1}{x+3}, \quad f'(x) = (2x+2)e^{2x+x^2}, \quad f'(x) = \cos(x-1), \quad f'(x) = \frac{1}{2x\sqrt{\ln(x)}}.$$

9. Svarene er:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{12\ln((2x^4-3x^2)^3)(4x^3-3x)}{2x^4-3x^2}, \\ g'(x) &= -5(x-1)^4\sin(2(x-1)^5), \\ h'(x) &= -2x\sin(x^2)e^{\cos(x^2)}. \end{aligned}$$

10. Hvis vi bruger hintet får vi at

$$\frac{d}{dx}a^x = e^{x\ln a}\ln a = a^x \ln a.$$

11. Hvis vi bruger hintet samt den forrige opgave får vi at

$$1 = a^{\log_a(x)}\ln(a)\frac{d}{dx}\log_a(x),$$

og isolerer vi for $\frac{d}{dx}\log_a(x)$ får vi at

$$\frac{d}{dx}\log_a(x) = \frac{1}{x\ln a}.$$

12. Vi har at

$$f'(x) = \frac{1}{x\ln(x)}$$

13. Bruger vi hintet får vi at

$$\frac{d}{dx}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{d}{dx}f(x)(g(x))^{-1} = f'(x)g^{-1}(x) - f(x)g^{-2}(x)g'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

14. Ved at differentiere får vi

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\Big(x(\ln(x))^2 - 2x\ln(x) + 2x\Big) &= (\ln(x))^2 + \frac{2x\ln(x)}{x} - 2\ln(x) - \frac{2x}{x} + 2 \\ &= (\ln(x))^2 + 2\ln(x) - 2\ln(x) - 2 + 2 = (\ln(x))^2. \end{aligned}$$

15. Fra Opgave 17 har vi at
$$\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)},$$
så ved at differentiere ser vi at
$$\frac{d}{dx}\log_a(x) = \frac{1}{x\ln(a)}.$$

16. Lad $k(x) = (g \circ h)(x)$. Så er $k'(x) = g'(h(x))h'(x)$ og bruger vi kædereglen får vi at
$$(f \circ g \circ h)'(x) = (f \circ k)'(x) = f'(k(x))k'(x) = f'(g(h(x)))g'(h(x))h'(x).$$

9.16 Tangentligningen og monotoniforhold

1. Det ses let at $f'(x) = 4x-2$ så $f'(x) = 0$ har løsningen $x = \frac{1}{2}$. Vælger vi punkterne $x_1 = 0$ og $x_2 = 1$ ser vi at $f'(x_1) = -2$ og at $f(x_2) = 2$. Dette giver monotonilinjen som ses i Tabel 9.1. Vi ser dermed at f er aftagende i intervallet $]-\infty, \frac{1}{2}]$ og voksende i intervallet $[\frac{1}{2}, \infty[$.

x	0	$\frac{1}{2}$	1
$f'(x)$	-2	0	2
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

Tabel 9.1: Opgave 1.

2. Tangentlignignen er $y = 9(x-1)+5 = 9x-4$.

3. Svarene er: $f'(0) < 0$, $f'(2) > 0$ og $f'(1) = 0$.

4. Tangentligningen er $y = x - 1$.

5. Ved at differentiere får vi at $f'(x) = 9x^2 + 6x + 1$ og løser vi ligningen $f'(x) = 0$ får vi at $x = -\frac{1}{3}$. Vi ser også at $f'(-1)) = 4$ og at $f'(0) = 1$. Dermed har vi at f er voksende på hele den reelle akse med en vendetangent i punktet $x = -\frac{1}{3}$. I Tabel 9.2.

x	-1	$-\frac{1}{3}$	0
$f'(x)$	4	0	1
$f(x)$	$\nearrow$		$\nearrow$

Tabel 9.2: Opgave 5.

6. Tangentligningen er givet ved $y = \frac{1}{2}(x-2)+4$. Sætter vi $y = 0$ og løser ligningen får vi at $x = -6$.

7. Ligningen $f'(x) = 2$ har løsningen $x = -\frac{1}{3}$ og tangentligningen i $(-\frac{1}{3}, f(-\frac{1}{3}))$ er $y = 2(x + \frac{1}{3}) + \frac{4}{9} = 2x + \frac{10}{9}$.

8. For at bestemme tangentligningerne for tangenterne til f som går gennem punktet $(\frac{5}{4}, 0)$ skal vi bestemme hvilke punkter på grafen tangenterne går gennem. Hvis vi vælger et vilkårligt punkt $(a, f(a))$ på grafen så er tangentliningen gennem punktet givet ved

$$y = f'(a)(x-a) + f(a) = (2a-4)(x-a) + (2-a)^2 + 1 = 2ax - 4x - a^2 + 5.$$

Indsætter vi punktet $(\frac{5}{4}, 0)$ i denne ligning får vi at

$$0 = \frac{5}{2}a - a^2.$$

Løsningerne er $a = 0$ og $a = \frac{5}{2}$. Indsættes dette i ligningen for tangenten får vi at

$$y_1 = -4(x-0) + 5 = -4x + 5,$$
$$y_2 = 1(x - \frac{5}{2}) + \frac{5}{4} = x - \frac{5}{4}.$$

9. Da f er symmetrisk giver kædereglen at

$$f'(-x) = -f'(x).$$

Derfor bliver tangentligningen $y = -2(x+1) - 1 = -2x - 3$

10. Tangentligningen er $y = f'(g(-3))g'(-3)(x+3) + f(g(-3)) = -2x - 4$.

11. Funktionen er konstant.

12. Svarene er:

    (a) $y = x$

    (b) $-x + \frac{\pi}{2}$.

    (c) $\dfrac{\pi^2}{16}$.

9.17 Optimering

1. Da omkræsen skal være $20cm$ har vi at

$$20 = 2x + 2y.$$

Rumfanget V for kassen er en funktion der afhænger af både x og y givet ved

$$V(x, y) = 5xy.$$

Isolerer vi y i formlen for omkredsen og indsætter i definitionen af V får vi

$$V(x) = 50x - 5x^2.$$

Dette er en parabel som åbner nedad så den vil nødvendigvis have et maksimum i toppunktet. For at finde det løser vi ligningen

$$0 = v'(x) = 50 - 10x,$$

og får $x = 5$. Det giver at det maksimale rumfang er $V(5) = 125$.

2. De lokale minima findes i punkterne $(-2,-\frac{5}{3})$ og $(1,\frac{7}{12})$ og det lokale maksimum findes i $(0,1)$.

3. Hvis sidelængderne betegnes med x og y får vi at $x = 75$ og $y = 75$.

4. Lad $f(x) = ax^2 + bx + c$ være et generelt andengradspolynomium. Ved at differentiere f får vi at

$$f'(x) = 2ax + b.$$

Dermed får at $x = -\frac{b}{2a}$ løser ligningen, hvilket giver x-koordinatet til toppunktet. Indsætter vi denne værdi i f får vi

$$f(-\frac{b}{2a}) = a(-\frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2}{2a} + c = -\frac{b^2}{4a} + \frac{4ac}{4a} = -\frac{d}{4a}.$$

5. Hvis x er bundens sidelængder og h er højden af kassen så skal disse størrelser opfylde

$$x^2h = 5000.$$

Overfladearealet O er en funktion som afhænger af x og h således:

$$O(x,h) = x^2 + 4xh.$$

Bruger vi formlen for rumfanget til at isolere h og efterfølgende indsætter i O får vi at

$$O(x) = x^2 + \frac{20000}{x}.$$

Ved at løse ligningen $O'(x) = 0$ får vi at $x = 10\sqrt[3]{10}$ er det lokale minimum for O. For at bestemme det tilhørende h har vi at

$$h = \frac{5000}{10^2 10^{\frac{2}{3}}} = \frac{10^3 5}{10^2 10^{\frac{2}{3}}} = 10^{\frac{1}{3}} 5 = 5\sqrt[3]{10}.$$

6. Svaret er $a = -\frac{1}{2}$ og $b = \frac{3}{2}$.

7. Svarene er:

   (a) Det er klart at det størst mulige areal er 1 og opnås når $x = 1$.

   (b) Arealet er givet ved formlen $A(x) = \frac{3}{2}x^2 - x + \frac{1}{2}$, og løser man $A'(x) = 0$ fås at $x = \frac{1}{3}$ og det samlede areal bliver så $A(\frac{1}{3}) = \frac{1}{3}$.

8. Funktionen har et globalt maksimum i punktet $(0,1)$.

9. Da vi bliver bedt om at finde den største og mindste tangenthældning skal vi maksimere og minimere funktionen $f''(x)$. Vi har at

$$f'(x) = -2(x+1)e^{-(x+1)^2}$$

og fra hintet har vi at

$$f''(x) = e^{-(x+1)^2}(4x^2 + 8x + 2).$$

Da $e^{-(x+1)^2}$ er positiv får vi at

$$f''(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 4x^2 + 8x + 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Med dette resultat kan vi opstille en monotonilinje for f' (se Tabel 9.3). Monotonilinjen viser at f' har lokalt maksimum i $-1-\frac{\sqrt{2}}{2}$ og lokalt minimum i $-1+\frac{\sqrt{2}}{2}$. Den eksponentielle faktor $e^{-(x+1)^2}$ går mod 0 hurtigere end polynomiet $-2x-2$ går mod uendelig, hvorfor de punkter vi har fundet er globale ekstremumspunkter. Ved at indæstte i f' får vi at den maksimale og minimale hældning er $\sqrt{\frac{2}{e}}$ og $-\sqrt{\frac{2}{e}}$.

x	-2	$-1-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-1+\frac{\sqrt{2}}{2}$	0
$f''(x)$	$\frac{2}{e}$	0	-2	0	$\frac{2}{e}$
$f'(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

Tabel 9.3: Monotonilinje for f'

10. Punktet P kan beskrives som

$$P = (\cos\theta, \sin\theta),$$

hvor θ er vinklen til P i radianer. Arealet af rektanglet kan så beskrives som

$$A(\theta) = 2\sin(\theta)2\cos(\theta) = 2\sin(2\theta).$$

Løser vi $A'(\theta) = 0$ får vi at

$$4\cos(2\theta) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \cos(2\theta) = 0.$$

Da vi kun er interesserede i $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ får vi at $\theta = \frac{\pi}{4}$. Dermed bliver sidelængderne af rektanglet alle lig $\sqrt{2}$ of det størst mulige areal er dermed 2.

11. Inddeler vi sekskanten i et rektangel som i forrige opgave og to trekanter bliver formlen for arealet

$$A(\theta) = 2\sin(\theta)2\cos(\theta) + 2\sin\theta(1-\cos(\theta)) = \sin(2\theta) + 2\sin\theta.$$

Betragter vi ligningen $A'(\theta) = 0$ for $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ ser vi at

$$\cos(2\theta) = -\cos(\theta)$$

og bruger vi at $-\cos(\theta) = \cos(\pi - \theta)$ må vi have at

$$2\theta = \pi - \theta \quad \Leftrightarrow \quad \theta = \frac{\pi}{3}.$$

Dette giver et areal på $\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

12. Formlen for trekantens areal er

$$A(\theta) = \cos(\theta)(1 + \sin(\theta)) = \cos(\theta) + \frac{1}{2}\sin(2\theta),$$

Vi får at

$$A'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sin(\theta) = \cos(2\theta).$$

Bruger vi at $\sin(\theta) = \cos(\frac{\pi}{2} - \theta)$ får vi at $\theta = \frac{\pi}{6}$, hvilket giver et areal på $\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

13. Sidelængderne bliver $x = 8$ og $y = 24$. Arealet er 192.

14. Arealet af rektanglet er givet ved

$$A(x) = \sin(x),$$

og fra vores kursusgang om trigonometriske funktioner ved vi allerede at $\sin x$ har sit første maksimum i $\frac{\pi}{2}$. Dette giver sidelængder på $\frac{\pi}{2}$ og $\frac{2}{\pi}$ og et areal på 1.

15. I et vilkårligt punkt x_0 er ligningen for tangenten givet ved

$$y = 2(x_0 - 2)(x - x_0) + (x_0 - 2)^2.$$

Denne tangent skærer koordinatakserne i

$$x = \frac{1}{2}x_0 + 1$$
$$y = 4 - x_0^2.$$

Arealet af trekanten som funktion af x_0 er dermed givet ved

$$A(x_0) = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}x_0 + 1)(4 - x_0^2) = -\frac{1}{4}x_0^3 - \frac{1}{2}x_0^2 + x_0 + 2.$$

Løser vi ligningen $A'(x_0) = 0$ får vi at $x_0 = \frac{2}{3}$ og $x_0 = -2$. Den første værdi ligger i vores interval og kan let vises at være et maksimum. Vi får en tangentligning givet ved

$$y = -\frac{8}{3}(x - \frac{2}{3}) + \frac{16}{9},$$

samt at det maksimale areal er $\frac{64}{27}$. Var intervallet vi betragtede lukket ville det mindste areal af trekanten være 0 og være taget i -2 og 2, men da intervallet er åbent er der ikke noget mindste areal.

16. Når kassen er foldet vil den have en højde på x og sidelængder på $1 - 2x$. Derfor er rumfanget

$$V(x) = x(1 - 2x)^2 = 4x^3 - 4x^2 + x.$$

Ved at løse $V'(x) = 0$ fås at $x = \frac{1}{2}$ og $x = \frac{1}{6}$. Ved at undersøge monotoniforholdene ses at $x = \frac{1}{6}$ er det maksimum vi søger.

17. Funktionen vi skal optimere er

$$V(x) = 3(4x^3 - 4x^2 + x) + 2x^3 = 14x^3 - 12x^2 + 3x,$$

hvor $x \in [0, \frac{1}{2}]$. Gør vi det ser vi at V har et lokalt maksimum i $x = \frac{4-\sqrt{2}}{14}$, hvor funktionsværdien er

$$\frac{10+\sqrt{2}}{49} < \frac{12}{49} < \frac{1}{4}.$$

Ved at undersøge endepunkterne ser vi at $x = \frac{1}{2}$ er det globale maksimum for V på intervallet $[0, \frac{1}{2}]$. Dermed får man det største udbytte ved at lave to lukkede kasser.

18. De kritiske punkter for $g(x) = x^3 + \frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{2}x$ er $x = -1$ og $x = \frac{1}{2}$.

    (a) Vi skal undersøge g i de kritiske punkter som ligger i $[-2, \frac{3}{2}]$, samt intervalendepunkterne. Det giver at vi finder et globalt maksimum i $x = \frac{3}{2}$ og et globalt minimum i $x = -2$. Yderligere har vi at $g(\frac{3}{2}) = \frac{45}{16}$ og at $g(-2) = -2$.

    (b) Vi skal undersøge g i de kritiske punkter som ligger i $[-\frac{3}{2}, 1]$, samt intervalendepunkterne. Det giver at vi finder et globalt maksimum i $x = -1$ og et globalt minimum i $x = \frac{1}{2}$. Yderligere har vi at $g(-1) = \frac{5}{4}$ og at $g(\frac{1}{2}) = -\frac{7}{16}$.

19. Hvis θ betegner vinklen nævnt i hintet får vi at

$$\frac{H}{R} = \tan\theta = \frac{H-h}{r}.$$

Isolerer vi for h får vi at

$$h = H(1 - \frac{r}{R}),$$

hvilket betyder at rumfanget af den lille kegle er

$$V(r) = \frac{\pi}{3}r^2 H(1 - \frac{r}{R}).$$

Ved at differentiere V og løse ligningen $V'(r) = 0$, ser vi at

$$V'(r) = \frac{2}{3}\pi H r - \pi r^2 \frac{H}{R},$$

og at

$$\frac{2}{3}\pi H r - \pi r^2 \frac{H}{R} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2}{3} = r\frac{1}{R} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2}{3}R = r.$$

Man kan vise at dette er det maksimum vi søger. Hvis vi sætter r ind i formlen for h får vi at

$$h = \frac{1}{3}H.$$

Det maksimale rumfang af den lille kegle bliver dermed

$$V = \frac{\pi}{3}\frac{4}{27}R^2 H.$$

hvilket er $\frac{4}{27}$ af rumfanget af den store kegle.

20. Bemærk at hvis $r = 1$ så gælder

$$(1+x)^r = (1+x)^1 = 1 + x = 1 + rx.$$

Hvis $r > 1$ bruger vi hintet og får at

$$f'(x) = r(1+x)^{r-1} - r,$$

og løser vi ligningen $f'(x) = 0$ får vi

$$r(1+x)^{r-1} - r = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (1+x)^{r-1} = 1.$$

Da $r > 1$ så har vi at

$$(1+x)^{r-1} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad 1 + x = 1^{\frac{1}{r-1}} \quad \Leftrightarrow \quad 1 + x = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0.$$

Altså er $x = 0$ et kritisk punkt og vi mangler blot at vise at det er det globale minimum for f. Vælger vi punkter til venstre og højre for $x = 0$ får vi at

$$f'(-\frac{1}{2}) = r(1-\frac{1}{2})^{r-1} - r = r((\frac{1}{2})^{r-1} - 1) = r((\frac{1}{2})^{r-1} - 1^{r-1}) < 0,$$
$$f'(1) = r(1+1)^{r-1} - r = r(2^{r-1} - 1) = r(2^{r-1} - 1^{r-1}) > 0,$$

hvor den sidste ulighed i hver udregning kommer af at x^a er en voksende funktion når $a > 0$. Dette betyder at f e aftagende før $x = 0$ og voksende efter. Altså må $x = 0$ være det globale minimum for f. Dette medfører at

$$0 = f(0) \le f(x) = (1+x)^r - (1+rx) \quad \Leftrightarrow \quad (1+x)^r \ge 1 + rx.$$

9.18 Regneregler for ubestemte integraler

1. Svaret kan være $F(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x$.

2. Svaret er $f(x) = x^{-\frac{1}{2}}$.

3. Vi har at

$$F'(x) = \frac{3}{5}\frac{10}{3}x^{\frac{10}{3}-1} = 2x^{\frac{7}{3}} = f(x).$$

4. Svarene er:

$$\frac{1}{3}x^3 + x^2 + c, \qquad 3(e^x + \cos x) + c, \qquad e^{2x} - \ln x + c.$$

5. $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}$.

6. Svarene er:

$$2\ln(x) + \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}x^2 + c, \qquad x^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{2}\frac{1}{x^2} + c, \qquad c$$

7. Svarene er:

   (a) Da $f + g = e^x$ er $f + g$ en stamfunktion til sig selv.

(b) Vi har at

$$f'(x) = \frac{1}{2}(e^x - (-1)e^{-x}) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = g(x).$$

(c) Ja.

(d) Vi har at

$$\frac{d}{dx}\ln(g(x)) = \frac{1}{g(x)}g'(x) = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

8. $F(x) = \frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}} + \frac{3}{2}x^{\frac{4}{3}} + \sqrt{2}$.

9. Vi har at

$$F'(x) = -(1-x)^{-2}(-1) = (1-x)^{-2} = \frac{1}{(1-x)^2}$$
$$G'(x) = (1-x)^{-1} + x(1-x)^{-2} = \frac{1}{1-x} + \frac{x}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

Yderligere er $F(x) - G(x) = 1$.

10. Fra Opgave 2 har vi at

$$\frac{d}{dx}\tan x = 1 + \tan^2 x$$

Skriver vi $1 = \frac{d}{dx}x$ og isolerer for $\tan^2 x$ får vi at

$$\tan^2 x = \frac{d}{dx}(\tan(x) - x).$$

11. Da

$$\frac{d}{dx}x\ln x = \ln(x) + 1$$

er f ikke en stamfunktion til $\ln x$. I Opgave 1 så vi at $x\ln(x) - x$ er en stamfunktion til $\ln x$.

9.19 Delvis integration for ubestemte integraler

1. Svarene er:

$$-x\cos x + \sin x + c, \qquad (x-1)e^x + c, \qquad \frac{e^{-2x}}{4}(-2x^2 - 2x - 1) + c$$

2. Svarene er:

$$\sin(x) - (1+x)\cos(x) + c, \qquad (2x-3)e^x + c.$$

3. Vi har at

$$\int \ln x\,dx = x\ln(x) - \int \frac{x}{x}\,dx = x\ln(x) - x + c.$$

4. Svarene er:

$$\frac{1}{4}x^2(2\ln(x)-1)+c, \qquad \frac{1}{27}e^{3x+1}(9x^2-6x+2)+c, \qquad e^x\ln(x)+c$$

5. Vi har at

$$\int \frac{\ln x}{x}\,dx = \ln(x)^2 - \int \frac{\ln x}{x}\,dx.$$

Isolerer vi for $\int \frac{\ln x}{x}\,dx$ får vi at

$$\int \frac{\ln x}{x}\,dx = \frac{\ln^2 x}{2} + c$$

hvor vi har lagt c til for at få samtlige stamfunktioner.

6. Lad f og g være vilkårlige funktioner. Produktreglen giver at

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

Isolerer vi $f'(x)g(x)$ og integrerer begge sider får vi

$$\int f'(x)g(x)\,dx = \int (fg)'(x)\,dx - \int f(x)g'(x)\,dx.$$

Da stamfunktionen til $(fg)'(x)$ er $(fg)(x)$ får vi at

$$\int f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx$$

og hvis vi erstatter f med en stamfunktion F får vi at

$$\int f(x)g(x)\,dx = F(x)g(x) - \int F(x)g'(x)\,dx.$$

7. Anvender vi formlen for delvis integration to gange fås

$$\begin{aligned}\int e^x\sin(x)\,dx &= e^x\sin(x) - \int e^x\cos(x)\,dx\\ &= e^x\sin(x) - e^x\cos(x) - \int e^x\sin(x)\,dx.\end{aligned}$$

Isolerer vi $\int e^x\sin(x)\,dx$ får vi at

$$\int e^x\sin(x)\,dx = \frac{e^x}{2}(\sin(x)-\cos(x)) + c,$$

hvor konstanten er lagt til for at få alle stamfunktioner.

8. Vi har at

$$\int x\cosh x\,dx = x\sinh(x) - \int \sinh(x)\,dx = x\sinh(x) - \cosh(x) + c.$$

9. Vi har at

$$\int x^2 \ln x \, dx = \frac{1}{3}x^3 \ln(x) - \frac{1}{3}\int x^2 \, dx = \frac{1}{3}x^3 \ln(x) - \frac{1}{9}x^3 + C.$$

10. Vi får at

$$\begin{aligned}\int \ln^2(x) \, dx &= \ln(x)(x\ln(x) - x) - \int \ln(x) - 1 \, dx \\ &= x\ln^2(x) - x\ln(x) - (x\ln(x) - x - x) + c \\ &= x\ln^2(x) - 2x\ln(x) + 2x + c.\end{aligned}$$

9.20 Integration ved substitution for ubestemte integraler

1. Svarene er:

$$-\frac{1}{3}\cos(3x+1) + c, \qquad -\frac{1}{2}\sin(-2x+1) + c, \qquad \frac{1}{5}e^{5x-3} + c.$$

2. Svarene er

$$\ln(x^3 + x - 1) + c, \qquad \frac{1}{6}(x+1)^6 + c, \qquad \frac{1}{4}(\frac{1}{2}x^4 - x + 12)^4 + c.$$

3. Svarene er:

$$\frac{1}{2}e^{x^2} + c, \qquad (x+1)\ln(x+1) - (x+1) + c, \qquad -\cos(x^2 - 1) + c.$$

4. Svarene er:

$$\begin{aligned}&\int \cos(x)\sin(x) \, dx = \frac{1}{2}\int \sin(2x) \, dx = -\frac{1}{4}\cos(2x) + c. \\ &\int \sin^3(x)\cos(x) \, dx = \frac{1}{4}\sin^4(x) + c. \\ &\int (3x^2 - 1)\cos(x^3 - x + 2) \, dx = \sin(x^3 - x + 2) + c.\end{aligned}$$

5. Lad a og b være reelle tal. Bestem stamfunktioner til funktionerne

$$-\frac{1}{a}\cos(ax+b), \quad \frac{1}{a}\sin(ax+b), \quad \frac{1}{a}e^{ax+b}, \quad \frac{1}{a}((ax+b)\ln(ax+b) - (ax+b)) + c.$$

6. Svaret er:

$$\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \, dx = 2e^{\sqrt{x}} + c.$$

7. Vi har at

$$\frac{d}{dx}(F(g(h(x))) + C) = F'(g(h(x)))g'(h(x))h'(x) = f(g(h(x))g'(h(x))h'(x).$$

8. Lad os først bruge integration ved substitution til at udregne

$$\int (x+1)^a \, dx,$$

for $a \neq -1$. Substituerer vi $u = x + 1$ får vi at $du = dx$ og

$$\int (x+1)^a \, dx \int u^a \, du = \frac{1}{a+1} u^{a+1} = \frac{1}{a+1}(x+1)^{a+1}.$$

Ved at bruge denne mellemregning for $a = \frac{1}{2}$ og $a = \frac{3}{2}$ får vi at

$$\begin{aligned} \int x\sqrt{x+1} \, dx &= \frac{2}{3}x(x+1)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}\int (x+1)^{\frac{3}{2}} \, dx \\ &= \frac{2}{3}x(x+1)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}\frac{2}{5}(x+1)^{\frac{5}{2}} + C \\ &= \frac{2}{3}x(1+x)^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{15}(1+x)^{\frac{5}{2}} + C. \end{aligned}$$

For at udregne

$$\int \sqrt{1+\sqrt{x}} \, dx$$

substituerer vi $u = \sqrt{x}$ og får

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \Leftrightarrow \quad 2\sqrt{x}du = dx \quad \Leftrightarrow \quad 2udu = dx.$$

Dette giver at

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1+\sqrt{x}} \, dx &= 2\int u\sqrt{1+u} \, du \\ &= \frac{4}{3}u(1+u)^{\frac{3}{2}} - \frac{8}{15}(1+u)^{\frac{5}{2}} + C \\ &= \frac{4}{3}\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^{\frac{3}{2}} - \frac{8}{15}(1+\sqrt{x})^{\frac{5}{2}} + C. \end{aligned}$$

Bemærk at begge facit kan reduceres yderligere.

9. Ved at substituere $u = x^2$ får vi at $\frac{1}{2x}du = dx$, hvilket giver

$$\begin{aligned} \int x^3 \sin(x^2) \, dx &= \frac{1}{2}\int u \sin(u) \, du = \frac{1}{2}(\sin(u) - u\cos(u)) + c \\ &= \frac{1}{2}(\sin(x^2) - x^2\cos(x^2)) + c. \end{aligned}$$

Ved at substituere $u = \sqrt{x}$ får vi at $2udu = dx$, hvilket giver

$$\begin{aligned} \int e^{-\sqrt{x}} \, dx &= 2\int ue^{-u} \, du = -2(1+u)e^{-u} + c \\ &= -2(1+\sqrt{x})e^{-\sqrt{x}} + c. \end{aligned}$$

10. Da $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ kan vi substituere $u = \cos(x)$ og få at $\frac{du}{-\sin(x)} = dx$, hvilket giver

$$\int \tan x \, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} \, dx = -\int \frac{1}{u} \, du = -\ln(u) + c = -\ln(\cos(x)) + c.$$

9.21 Regneregler for bestemte integraler

1. Svarene er:
$$\frac{7}{3}, \qquad \frac{1}{2}, \qquad \ln(2), \qquad 0.$$
2. Svarene er:
$$\frac{\sqrt{2}}{2}.$$
3. Arealet er $e^3 - e$.
4. Vi har at
$$\int_a^b 1\,dx = [x]_a^b = b - a.$$
5. Da $\sqrt{x} > x^2$ i det givne interval har vi
$$\int_0^1 \sqrt{x} - x^2\,dx = [\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}x^3]_0^1 = \frac{1}{3}.$$
6. Arealet af rektanglet kan beskrives som
$$\int_0^a b\,dx = [bx]_0^a = ba.$$
7. Vi har at
$$\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = F(c) - F(a) + F(b) - F(c) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx.$$
8. Husk at
$$f(x) = \begin{cases} -x, & \text{hvis } x < 0 \\ x, & \text{hvis } x \geq 0. \end{cases}$$
Anvender vi hintet får fi at
$$\int_{-2}^1 |x|\,dx = \int_{-2}^0 -x\,dx + \int_0^1 x\,dx = [-\frac{1}{2}x^2]_{-2}^0 + [\frac{1}{2}x^2]_0^1 = \frac{5}{2}.$$
9. Vi har at
$$-\int_b^a f(x)\,dx = -(F(a) - F(b)) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx.$$
10. Et muligt svar er $a = \pi$.
11. Arealet er 2.

12. Svarene er:

 (a) Vi har at

$$\int_0^1 x^{\frac{1}{k}} - x^k \, dx = [\frac{k}{k+1}x^{\frac{k+1}{k}} - \frac{1}{k+1}x^{k+1}]_0^1 = \frac{k-1}{k+1}$$

 (b) $k = 399$.

 (c) Vi får at

$$\frac{k-1}{k+1} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad k-1 = k+1,$$

 hvilket viser at denne ligning ikke har nogen løsninger.

 (d) Det korrekte areal når $k = 399$ er

$$\frac{398}{400} = \frac{199}{200}.$$

13. Vi har at

$$\int_{-1}^1 f(x)\,dx = \int_{-1}^0 x^{\frac{2}{3}}\,dx + \int_0^1 x^{\frac{1}{3}}\,dx = [\frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}}]_{-1}^0 + [\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}]_0^1 = \frac{27}{20}.$$

14. De to funktioner skærer hinanden når $x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$. Vi har dermed at

$$\int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} 1 - x^2 - x^2\,dx = [x - \frac{2}{3}x^3]_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

15. Først ser vi at de to tangenter skærer hinanden i $(\frac{5}{4}, 0)$ samt at $y = -4x + 5$ skærer parablen i $(0, 5)$ og $y = x + \frac{5}{4}$ skærer parablen i $(\frac{5}{2}, \frac{5}{2})$. Ved at integrere får vi at

$$\int_0^{\frac{5}{4}} x^2 - 4x + 5 - (-4x + 5)\,dx = \int_0^{\frac{5}{4}} x^2\,dx = [\frac{1}{3}x^3]_0^{\frac{5}{4}} = \frac{125}{192}$$

og at

$$\begin{aligned}\int_{\frac{5}{4}}^{\frac{5}{2}} x^2 - 4x + 5 - (x - \frac{5}{4})\,dx &= \int_{\frac{5}{4}}^{\frac{5}{2}} x^2 - 5x + \frac{25}{4}\,dx \\ &= [\frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + \frac{25}{4}x]_{\frac{5}{4}}^{\frac{5}{2}} \\ &= \frac{125}{24} - \frac{125}{8} + \frac{125}{8} - (\frac{125}{192} - \frac{125}{32} + \frac{125}{16}) \\ &= \frac{125}{24} - \frac{125}{192} - \frac{125}{32} = \frac{1000 - 125 - 750}{192} = \frac{125}{192}.\end{aligned}$$

Dermed ses at de to arealer er lige store. Det totale areal er $\frac{125}{96}$.

9.22 Delvis integration og substitution for bestemte integraler

1. Svarene er:

$$\frac{\sqrt{2}-2}{2}, \qquad 1, \qquad \frac{1}{24}$$

2. Svarene er:

$$42, \qquad \ln\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right), \qquad \frac{1}{4}.$$

3. Hvis $u = -x$ så er $-du = dx$ hvilket giver at

$$\int_{-a}^{0} f(x)\,dx = -\int_{a}^{0} f(-u)\,du = -\int_{a}^{0} -f(u)\,du = \int_{a}^{0} f(u)\,du = -\int_{0}^{a} f(u)\,du.$$

Da u bare er navnet på variablen kunne vi lige så godt kalde den for x. Dermed får vi

$$\int_{-a}^{0} f(x)\,dx = -\int_{0}^{a} f(x)\,dx.$$

Bruger vi Opgave 7 får vi at

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx = -\int_{0}^{a} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx = 0.$$

4. Da alle funktionerne der integreres er ulige og intervallerne der integreres over er symmetriske om y-aksen giver alle integralerne 0.

5. Hvis $u = -x$ så er $-du = dx$ hvilket giver

$$\int_{-a}^{0} f(x)\,dx = -\int_{a}^{0} f(-u)\,du = -\int_{a}^{0} f(u)\,du = \int_{0}^{a} f(u)\,du.$$

Da u bare er navnet på variablen kunne vi lige så godt kalde den for x. Dermed får vi

$$\int_{-a}^{0} f(x)\,dx = \int_{0}^{a} f(x)\,dx.$$

Bruger vi Opgave 7 får vi at

$$\begin{aligned}\int_{-a}^{a} f(x)\,dx &= \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx \\ &= \int_{0}^{a} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx \\ &= 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx.\end{aligned}$$

6. Svarene er:

$$4, \qquad \frac{1}{24}$$

7. Svarene er:

   (a) $f(-x) = (-x)^{-2}\sin(\frac{1}{-x}) = -x^{-2}\sin(\frac{1}{x}) = f(x)$.

   (b) $F(x) = \cos(\frac{1}{x})$.

   (c) I Opgave 3 var det en antagelse at funktionen vi betragtede var kontinuert, men f er ikke kontinuert.

8. Hvis $u = \sqrt{x}$ så er $2udu = dx$, hvilket giver at

$$\int_0^1 e^{\sqrt{x}}\,dx = 2\int_0^1 ue^u\,du = 2[(u-1)e^u]_0^1 = 2.$$

9. Hvis $u = \sqrt{x}$ så er $2udu = dx$, hvilket giver at

$$\int_0^{\pi^2} \sin\sqrt{x}\,dx = \int_0^{\pi} u\sin u\,du = [\sin u - u\cos u]_0^{\pi} = 2\pi.$$

10. I denne opgave vil vi beskrive arealet af en cirkel med vilkårlig radius.

   (a) Den øvre halvdel af enhedscirklen kan beskrives med funktionen $y = \sqrt{1-x^2}$. integrerer vi denne funktion fra 0 til 1 må vi få en fjerdedel af cirklen areal. Dermed er

$$4\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \pi.$$

   (b) Den øvre halvcirkel kan beskrives som funktionen $y = \sqrt{r^2-x^2}$. Integrerer vi dette fra 0 til r og ganger med 4 må vi få arealet af hele cirklen. Altså er

$$A = 4\int_0^r \sqrt{r^2-x^2}\,dx = 4r\int_0^r \sqrt{1-\frac{x^2}{r^2}}\,dx,$$

   og hvis vi substituer $u = \frac{x}{r}$ så er $rdu = dx$ og dermed får vi ved at anvende del (a) at

$$A = 4r\int_0^1 r\sqrt{1-u^2}\,du = r^2\pi.$$

11. Svarene er:

   (a) Hvis hvis $a = b$ kan ellipsens ligning omskrives til

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + y^2 = a^2.$$

(b) Den øvre halvellipse kan beskrives som funktionen $y = b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$. Integrerer vi dette fra 0 til a og ganger med 4 må vi få arealet af hele cirklen. Altså er

$$A = 4\int_0^a b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\,dx,$$

og hvis vi substituer $u = \frac{x}{a}$ så er $a du = dx$ og dermed får vi ved at anvende del (a) i forrige opgave at

$$A = 4b\int_0^1 a\sqrt{1-u^2}\,du = ab\pi.$$

(c) Hvis $a = b$ så har vi vist at ellipsen bliver en cirkel med radius $a = b$, hvorfor formlen πab for ellipser generaliserer formlen πab for ellipser.

12. Svaret er -2π.

13. Svarene er:

$$\frac{\pi}{2} - 1, \qquad 2\ln(2) - \frac{3}{4}, \qquad \frac{64}{3}\ln(4) - 21.$$

14. Arealet er $\pi^2 - 4$.

15. Først omskriver vi $\sin(x)\cos(x) = \frac{1}{2}\sin(2x)$. Ved at integrere får vi at

$$\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin(2x) - \sin(x)\,dx = [\frac{1}{2}\cos(x) - \frac{1}{4}\cos(2x)]_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{8}.$$

9.23 Introduktion til Differntialligninger

1. Da $f'(x) = x^2$ er f en løsning til differentialligningen.

2. Da $f'(x) = -1 + e^x$ og $f(x) + x = -1 + e^x$ er f en løsning til differentialligningen. Funktionen g ses også at være en løsning.

3. Den fuldstændige løsning er $y(x) = c$ hvor $c \in \mathbf{R}$.

4. Ved at differentiere f ses at

$$f'(x) = 6e^{2x} = 2(3e^{2x}) = 2f(x).$$

Dermed er f en løsning til differentialligningen. Da $g'(x) = f'(x) = 2f(x) = 2g(x) - 4$ er det ikke en løsning.

5. Ved at dividere med y på begge sider af differentialligningen får vi at

$$\frac{y'}{y} = k \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{dx}\ln(y) = k.$$

Integrerer vi begge sider får vi at

$$\ln(y) = kx + c \quad \Leftrightarrow \quad y = e^c e^{kx} = Ce^{kx},$$

hvor $C = e^c$.

6. Da
$$f'(x) = \frac{e^x}{e^x + e + 1},$$
og
$$e^{x-f(x)} = \frac{e^x}{e^{f(x)}} = \frac{e^x}{e^x + e + 1}$$
er f en løsning.

7. Vi har at
$$f'(x) - 2f(x) = 12e^{3x} - 2e2x - 2(4e^{3x} - e^{2x}) = 4e^{3x}$$
hvilket viser at f ikke er en løsning.

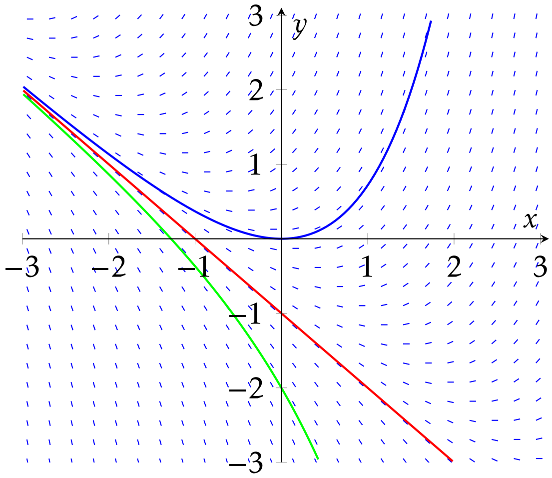
8. Svaret er $a = -2$ og $b = 1$.

9. Da $g(x) = F(x) - F(0)$ får vi at
$$g'(x) = F'(x) = f(x).$$
Hvis $\tilde{F}(x) = F(x) + c$ for et $c \in \mathbf{R}$ så vil
$$g(x) = \tilde{F}(x) + c - (\tilde{F}(0) + c) = \tilde{F}(x) + \tilde{F}(0).$$
Differentierer vi fås
$$g'(x) = \tilde{F}'(x) = f(x).$$

10. Vi har at
$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{2e^x}{4e^{2x}} = \frac{1}{2}e^{x-2x} = \frac{1}{2}e^{-x}$$

11. Da
$$\frac{d}{dx}\sin x = \cos x \quad \text{og} \quad \frac{d^2}{dx^2}\sin x = -\sin x$$
har vi at
$$\left(\frac{d^2}{dx^2}\sin x\right)^2 + \left(\frac{d}{dx}\sin x\right)^2 = \sin^2(x) + \cos^2(x) = 1.$$

12. Vi har at
$$f'(x) = ae^{-x}(1-x), \quad \text{og} \quad f''(x) = ae^{-x}(x-2),$$
hvorfor
$$f''(x) - f(x) = ae^{-x}(x-2) - axe^{-x} = -2ae^{-x}.$$
For at løse ligningen
$$y'' - y = e^{-x}$$
ses at $a = -\frac{1}{2}$.



Figur 9.6: Opgave 6

9.24 Begyndelsesværdiproblemer

1. Svarene er:

$$y(x) = 3x + 2, \qquad y(x) = -\cos(x) + 3, \qquad y(x) = -\frac{1}{2}e^{-2x} + \frac{5}{2}.$$

2. Løsningen er

$$y(x) = e^{-(x+1)}$$

som går gennem punktet $(1, \frac{1}{e^2})$.

3. Tangenten har ligningen $y = \frac{7}{3}(x-1) + 3$.

4. Svarene er

   (a) $y(x) = \frac{3}{4}x^4 - x - 1$.

   (b) $y(x) = \sqrt{2}e^x$.

   (c) $y(x) = -3e^{-\frac{x}{3}}$.

5. Tangenten har ligning $y = -22(x-3) + 5$

6. I Figur 9.6 ses en skitse af løsningerne til differentialligningen

$$y' = x + y,$$

med begyndelsesbetingelser

   (a) $y(0) = 0$.

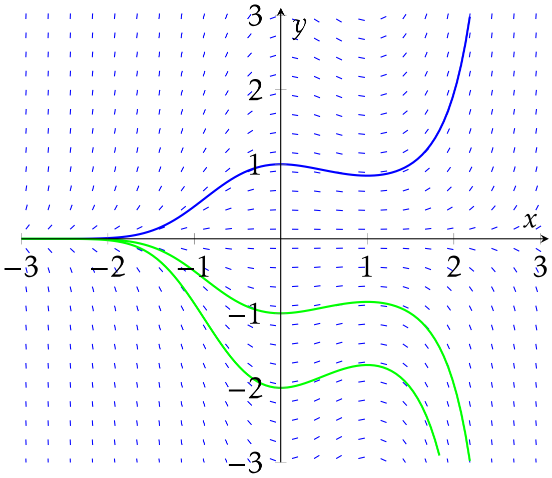
   (b) $y(0) = -1$.

   (c) $y(0) = -2$.

7. Tangenten har ligning $y = 2(x-4) + 1 = 2x - 7$.

8. Svarene er:

9.25. HOMOGENE FØRSTEORDENS DIFFERENTIALLIGNINGER



Figur 9.7: Opgave 11

(a) $y(x) = ae^{kx}$.

(b) $y(x) = \frac{b}{k}e^{kx}$.

9. Tangentens har ligning $y = 6(x-1)+4$.

10. Tangenten har ligning $y = 3(x-2)+7$.

11. I Figur 9.7 ses en skitse løsningerne til differentialligningen

$$\frac{y'}{y} = x^2 - x,$$

med begyndelsesbetingelser

(a) $y(0) = 1$.

(b) $y(0) = -1$.

(c) $y(0) = -2$.

12. Vi har at

$$g'(x) = \frac{d}{dx}(F(x) - F(x_0)) = F'(x) = f(x),$$

samt $g(x_0) = y_0$.

9.25 Homogene førsteordens differentialligninger

1. Svarene er:

$$y(x) = ce^{2x}, \qquad y(x) = ce^{-\sqrt{2}x}, \qquad y(x) = ce^{\pi x}.$$

2. Svarene er:

$$y(x) = -e^{-6x}, \qquad y(x) = -e^{-\frac{2}{3}x}.$$

3. Løsningen er $A(t) = 3e^{-4t}$. Halveringstiden er $\frac{\ln(2)}{4}$.

4. Lad $p(x)$ være en funktion med stamfunktion $P(x)$. Brug samme metode som i Opgave 5 til at finde den fuldstændige løsning til

$$y' + p(x)y = 0.$$

Omskriver vi differentialligningen fås

$$y' + p(x)y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y' = -p(x)y \quad \Leftrightarrow \quad \frac{y'}{y} = -p(x) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{dx}\ln(y) = -p(x).$$

Integrerer vi begge sider og isolerer for y fås

$$\ln(y) = -P(x) + c \quad \Leftrightarrow \quad y = e^c e^{-P(x)} = Ce^{-P(x)}$$

hvor $C = e^c$.

5. Ved at reducere fås

$$y' = (x-2)y,$$

hvilket har løsningen

$$y(x) = ce^{\frac{1}{2}x^2 - 2x}.$$

6. Løsningen er $y(x) = ce^{\ln(x)} = cx$.

7. Løsningen er $y(x) = ce^{x\ln(x) - x}$.

8. Svarene er:

$$y(x) = ce^{-x^3}, \qquad y(x) = ce^{-x^2}, \qquad y(x) = \frac{c}{x}.$$

9. Vi har at

$$y_1'(x) = 20(e^x + 25e^{5x}), \quad \text{og} \quad y_2'(x) = 10(-6e^x + 50e^{5x}).$$

Yderligere gælder at

$$\begin{aligned} 4y_1(x) + y_2(x) &= 20e^x + 500e^{5x}, \\ 3y_1(x) + 2y_2(x) &= -60e^x + 500e^{5x}, \end{aligned}$$

hvilket viser at y_1 og y_2 løser differentialligningerne. Derudover ses det nemt at $y_1(0) = 120$ og $y_2(0) = 40$.

10. Svarene er:

(a) Substituerer vi $u = y'$ får vi ligningen

$$u' + \frac{k}{x}u = 0,$$

som har løsningen

$$u = ce^{-k\ln(x)} = \frac{c}{x^k}.$$

Substituerer vi tilbage får vi at

$$y'(x) = \frac{c}{x^k}. \tag{9.5}$$

(b) Ved at integrere begge sider får vi

$$y(x) = \begin{cases} c\ln(x) + C, & \text{når } k = 1 \\ \frac{c}{-k+1}x^{-k+1} + C, & \text{når } k \neq 1. \end{cases}$$

(c) Svaret er $y(x) = 2\ln(x) + 1$.

9.26 Inhomogene førsteordens differentialligninger

1. Svaret er:

$$y(x) = ce^{-x} + x - 1.$$

2. Svarene er:

   (a) $y_h(x) = ce^{-x}$.

   (b) Vi har at $y_p'(x) = -a\sin(x) + b\cos(x)$ og indsætter vi dette i ligningen fås

   $$-a\sin(x) + b\cos(x) + a\cos(x) + b\sin(x) = \sin(x).$$

   Ud fra denne ligning ser vi at $a = -b$ og $-a + b = 1$. Disse to ligninger har løsningen $a = -\frac{1}{2}$ og $b = \frac{1}{2}$.

   (c) Vi har at

   $$y(x) = e-x\int \sin(x)e^x\,dx + ce^{-x} = \frac{1}{2}(\sin(x) - \cos(x)) + ce^{-x}.$$

   Dette er præcis den samme funktion som $y_h + y_p$.

3. Svaret er:

$$y(x) = ce^{2x} - \frac{1}{4}(2x^2 + 2x + 1).$$

4. At der ikke er noget y led i differentialligningen svarer til at $k = 0$. Indsættes det i løsningsformlen får vi

$$y(x) = \int q(x)\,dx + c,$$

Hvilket viser at løsningen fås ved at integrere begge sider.

5. I Opgave 3 så vi at $A(t) = 3e^{-4t}$. Indsættes dette i differentialligningen for B fås

$$B' = 4(3e^{-4t}) - 2B.$$

Bruger vi Panzerformlen får vi at

$$B(t) = e^{-2t}\int 12e^{-4t}e^{2t}\,dt + ce^{-2t} = -6e^{-4t} + ce^{-2t}$$

Begyndelsesbetingelsen $B(0) = 0$ giver at $c = 6$ så $B(t) = 6(e^{-2t} - e^{-4t})$. Ved at anvende de sædvanlige optimeringsmetoder ses at B har et globalt maksimum når $t = \ln(\sqrt{2})$ og at $B(\ln(\sqrt{2})) = \frac{3}{2}$ og at $A(t) = \frac{3}{4}$.

6. Svaret er:

$$y(x) = ce^{-x} + \ln(x).$$

7. Svarene er:

   (a) Funktionen f skal opfylde differentialligningen

   $$f'(x) = p(x)f(x)$$

   (b) Svaret er: $f(x) = e^{-P(x)}$.

   (c) Ved at gange differentialligningen igennem med $f(x) = e^{-P(x)}$ og bruge at $f' = pf$ så får vi at

   $$e^{P(x)}y'(x) + p(x)e^{P(x)}y(x) = q(x)e^{P(x)},$$

   hvilket vi ved hjælp af produktreglen omskriver til

   $$\frac{d}{dx}\Big(y(x)e^{P(x)}\Big) = e^{P(x)}q(x).$$

   Integrerer vi begge sider af ligningen ovenfor fås

   $$e^{P(x)}y(x) = \int q(x)e^{P(x)}\,dx + c$$

   og dividerer vi med $e^{P(x)}$ får vi at

   $$y(x) = e^{-P(x)}\int q(x)e^{P(x)}\,dx + ce^{-P(x)}$$

8. Svaret er

$$y(x) = e^{2\ln(x)}\int \frac{-8}{x}e^{-2\ln(x)}\,dx + ce^{2\ln(x)} = x^2(4x^{-2}) + cx^2 = 4 + cx^2$$

9. Svaret er:

$$y(x) = \frac{c}{x} - \frac{x}{4} + \frac{1}{2}x\ln(x).$$

9.27 Vektorer i planen

1. Svarene er:

$$\begin{bmatrix}6\\9\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}1\\5\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix},\quad \sqrt{13},\quad \sqrt{5},\quad 4,\quad 14.$$

2. Arealet er 19.

3. Svarene er:

   (a) $t = 11$.

   (b) $t = 1$ og $t = 3$.

4. Vinklen er $\frac{\pi}{6}$.
5. Svaret er:

$$\vec{u} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

6. Svarene er:

$$13, \qquad \begin{bmatrix} -6 \\ 5 \end{bmatrix}, \qquad -22, \qquad 13, \qquad \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 7 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

7. Arealet er 0.
8. Svarene er:
   (a) $t = 4$ og $t = -1$.
   (b) $t = -6 \pm 2\sqrt{10}$.
9. Svaret er: Alle vektorer på formen

$$t\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

hvor $t \in \mathbf{R}$.

10. Vi har at

$$\vec{u} \cdot \hat{\vec{u}} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -u_2 \\ u_1 \end{bmatrix} = u_1(-u_2) + u_2 u_2 = 0.$$

11. Bruger vi at $\cos(x) \in [-1, 1]$ får vi at

$$(\vec{u} \cdot \vec{v})^2 = \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2 \cos^2(\theta) \leq \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2.$$

12. Svarene er:
   (a) Figur 9.8 viser at vinklen mellem $\vec{u}$ og $\vec{v}$ er $\theta - \phi$.
   (b) Da $\vec{u}$ og $\vec{v}$ begge har norm 1 giver formlen for vinklen mellem vektorer at

$$\cos(\theta - \phi) = \vec{v} \cdot \vec{u} = \cos(\theta)\cos(\phi) + \sin(\theta)\sin(\phi).$$

   (c) Bruger vi formlen for determinanten får vi at

$$\sin(\theta - \phi) = \det(\vec{v}, \vec{u}) = \cos(\phi)\sin(\theta) - \sin(\phi)\cos(\theta).$$

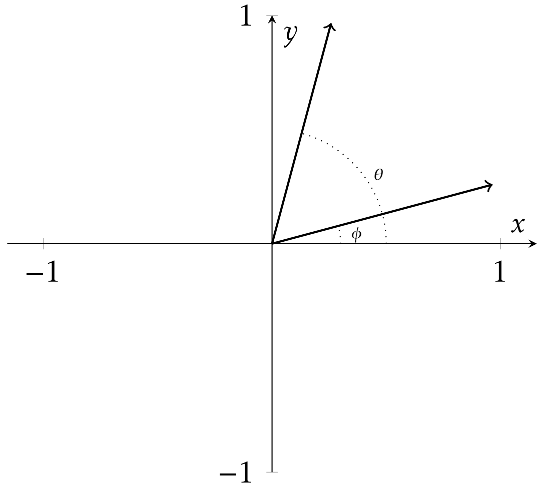
   Bemærk at vi anvender $\det(\vec{v}, \vec{u})$ da vinklen regnes fra $\vec{v}$ til $\vec{u}$.

13. Det ses at

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = u_1^2 + u_2^2 = \|\vec{u}\|^2.$$

Bruger vi dette får vi at

$$\begin{aligned} \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 &= (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = (u_1 + v_1)(u_1 + v_1) + (u_2 + v_2)(u_2 + v_2) \\ &= u_1^2 + v_1^2 + 2u_1 v_1 + u_2^2 + v_2^2 + 2u_2 v_2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2(\vec{u} \cdot \vec{v}). \end{aligned}$$



Figur 9.8: Opgave 12

14. Bruger vi Opgave 13 har vi at
$$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2(\vec{u}\cdot\vec{v}).$$
Fra uligheden i Opgave 11 får vi at
$$(\vec{u}\cdot\vec{v}) \leq |\vec{u}\cdot\vec{v}| \leq \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|.$$
Bruger vi denne ulighed i ligningen ovenfor får vi at
$$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\| = (\|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|)^2.$$
Ved at tage kvadratroden på begge sider får vi den ønskede ulighed. Denne kaldes typisk for trekantsuligheden.

15. Vi har at
$$\|\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}\| = \sqrt{\frac{v_1^2}{\|\vec{v}\|^2} + \frac{v_2^2}{\|\vec{v}\|^2}} = \frac{1}{\|\vec{v}\|}\sqrt{v_1^2+v_2^2} = \frac{\|\vec{v}\|}{\|\vec{v}\|} = 1.$$

16. Vi har at
$$\begin{aligned} \vec{u}\cdot\vec{v} &= u_1v_1 + u_2v_2 = v_1u_1 + v_2u_2 = \vec{v}\cdot\vec{u}, \\ -\det(\vec{v},\vec{u}) &= -(v_1u_2 - v_2u_1) = u_1v_2 - u_2v_1 = \det(\vec{u},\vec{v}), \\ \|k\vec{u}\| &= \sqrt{k^2u_1^2 + k^2u_2^2} = \sqrt{k^2}\sqrt{u_1^2+u_2^2} = |k|\|\vec{u}\|. \end{aligned}$$

9.28 Linjer i planen

1. Linjen l har parameterfremstilling
$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -6 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$$
og ligning
$$3(x-1) + (y+6) = 0.$$
Skæringspunkterne er $(-1,0)$ og $(0,-3)$.

2. Prikker man retningsvektoren for m med normalvektoren for l får man 0, hvorfor linjerne må være parallelle.

3. Indsætter vi x- og y-koordinaterne for linjen i cirklens ligning får vi
$$(3+t)^2 + (-3-t)^2 = 2 \quad \Leftrightarrow \quad 2t^2 + 12t + 18 = 2.$$
Løsningerne til denne ligning er $t = -4$ og $t = -2$. Indsætter vi disse værdier i linjens ligning får vi skæringspunkterne $(1,-1)$ og $(-1,1)$.

4. Linjens ligning er
$$2(x-1) + 3(y+1).$$
Hvordan ligger denne linje i forhold til linjen med parameterfremstilling. Prikker man normalvektoren for denne linje med retningsvektoren for den anden får man 0. Altså er de to linjer parallelle. Dade begge går gennem punktet $(7,5)$ må de være sammenfaldende.

5. Linjen har parameterfremstilling
$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \end{bmatrix}.$$
Prikker man retningsvektoren for denne linje med normalvektoren for den anden får man 0. Dermed er linjerne parallelle. da $(-2,0)$ ligger på den ene linje men ikke den anden er de ikke sammenfaldende.

6. Prikker man retningsvektoren for denne linje med normalvektoren for den anden får man 31. Dermed er de to linjer ikke parallelle og de må have præcist et skæringspunkt. Indsætter vi koordinaterne fra parameterfremstillingen i linjens ligning får vi ligningen
$$3(7t-6) + 2(5t-2) = 9.$$
Løsningen er $t = 1$ hvilket giver et skæringspunkt på $(1,3)$.

7. Først bestemmer vi cirklernes skæringspunkter. Ved at gange ud har de to ligninger formen
$$x^2 + 1 - 2x + y^2 + 1 - 2y = 1, \qquad x^2 + 1 + 2x + y^2 + 1 + 2y = 5.$$
Trækker vi den første ligning fra den anden får vi
$$4x + 4y = 4 \quad \Leftrightarrow \quad x + y = 1.$$
Lægger vi de to cirklers ligninger sammen får vi
$$2x^2 + 4 + 2y^2 = 6 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + y^2 = 1.$$
Indsætter vi $x = 1 - y$ i denne ligning får vi
$$2y^2 - 2y = 0$$
hvilket giver at $y = 0$ og $y = 1$. Når $y = 0$ skal $x = 1$ og når $y = 1$ skal $x = 0$. Dermed har vi fundet skæringspunkterne $(0,1)$ og $(1,0)$. Parameterfremstillingen bliver så
$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

8. De to linjer har retningsvektorer

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \text{og} \quad \vec{v} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2+\sqrt{3} \end{bmatrix}.$$

Formlen for vinklen mellem vektorer giver at

$$\cos(\theta) = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{||\vec{u}||||\vec{v}||} = \frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}\sqrt{1+(2+\sqrt{3})^2}} = \frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}\sqrt{8+4\sqrt{3}}} = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{4+2\sqrt{3}}} = \frac{1}{2}.$$

Dermed ser vi at $\theta = \frac{\pi}{3}$.

9. Svarene er:

(a) Da trekanten er retvinklet følger det fra klassiske trigonometriske former at

$$\cos(\theta) = \frac{||\vec{w}||}{||\vec{u}||}.$$

(b) Vi har at $\cos(\theta) = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{||\vec{u}||||\vec{v}||}$ hvilket kombineret med forrige formel giver at

$$\frac{||\vec{w}||}{||\vec{u}||} = \cos\theta = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{||\vec{u}||||\vec{v}||}.$$

Ganger vi denne ligning igennem med $||\vec{u}||$ får vi at

$$||\vec{w}|| = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{||\vec{v}||}. \tag{9.6}$$

(c) Da $\vec{v}$ og $\vec{w}$ har samme retning gælder at

$$\frac{\vec{w}}{||\vec{w}||} = \frac{\vec{v}}{||\vec{v}||}.$$

Isolerer vi $\vec{w}$ i denne ligning får vi

$$\vec{w} = ||\vec{w}||\frac{\vec{v}}{||\vec{v}||}$$

og bruger vi udtrykket for $||\vec{w}||$ i (7.7) får vi at

$$\vec{w} = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{||\vec{v}||}\frac{\vec{v}}{||\vec{v}||} = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{||\vec{v}||^2}\vec{v}.$$

10. Svarene er:

(a) $\vec{w}_1 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$.

(b) $\vec{w}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

(c) $\vec{w}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

9.29 Vektorer i rummet

1. Svarene er:

$$\begin{bmatrix}21\\3\\12\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}-2\\1\\-8\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}9\\0\\12\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}5\\2\\-4\end{bmatrix}, \quad \sqrt{66}, \quad \sqrt{69}, \quad 45, \quad \begin{bmatrix}12\\-48\\-9\end{bmatrix}$$

2. Nej

3. Prikker vi vektorerne $\vec{u}+t\vec{v}$ og $\vec{u}-t\vec{v}$ får vi ligningen

$$0 = 4 - t^2 + 4 - 4t^2 + 16 - t^2 = 24 - 6t^2.$$

Denne har løsningerne $t = \pm 2$.

4. Vi har at

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{bmatrix}-8\\5\\6\end{bmatrix}, \quad \text{og} \quad \|\vec{u} \times \vec{v}\| = 5\sqrt{5}.$$

5. Lad

$$\vec{u} = \begin{bmatrix}u_1\\u_2\\u_3.\end{bmatrix}.$$

Så er

$$\vec{u} \times \vec{u} = \begin{bmatrix}u_2u_3 - u_2u_3\\-(u_1u_3 - u_1u_3)\\u_1u_2 - u_1u_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}.$$

6. Vi har at

$$\vec{u} \times t \cdot \vec{v} = t\begin{bmatrix}-3\\-2\\3\end{bmatrix}, \quad \text{og} \quad \|\vec{u} \times t\vec{v}\| = |t|\sqrt{22}.$$

Dermed har parallelogrammet areal 3 for $t = \pm\frac{3}{\sqrt{22}}$.

7. Svarene er

$$\begin{bmatrix}-2\\-6\\-4\end{bmatrix}, \quad 3\begin{bmatrix}1\\-3\\-1\end{bmatrix}, \quad 9, \quad \begin{bmatrix}2\\6\\4\end{bmatrix}, \quad 3\begin{bmatrix}1\\-3\\-1\end{bmatrix}, \quad -18.$$

8. Vi har at

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 = v_1u_1 + v_2u_2 + v_3u_3 = \vec{v} \cdot \vec{u}.$$

9. Vi har at

$$\|k\vec{u}\| = \sqrt{k^2u_1^2 + k^2u_2^2 + k^2u_3^2} = \sqrt{k^2}\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} = |k|\|\vec{u}\|.$$

10. Bemærk først at $\vec{u}\cdot\vec{u} = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = \|\vec{u}\|^2$. Bruger vi dette får vi

$$\begin{aligned}\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 &= (\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}+\vec{v}) = (u_1+v_1)^2 + (u_2+v_2)^2 + (u_3+v_3)^2 \\ &= u_1^2 + v_1^2 + 2u_1v_1 + u_2^2 + v_2^2 + 2u_2v_2 + u_3^2 + v_3^2 + 2u_3v_3 \\ &= \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2(\vec{u}\cdot\vec{v}).\end{aligned}$$

11. Lad

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \vec{v}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}.$$

Så er

$$\vec{u}\times\vec{v} = \begin{bmatrix} u_2v_3 - u_3v_2 \\ u_3v_1 - u_1v_3 \\ u_1v_2 - u_2v_1 \end{bmatrix}$$

og vi får

$$\vec{u}\cdot(\vec{u}\times\vec{v}) = u_1(u_2v_3 - u_3v_2) + u_2(u_3v_1 - u_1v_3) + u_3(u_1v_2 - u_2v_1) = 0,$$

samt

$$\vec{v}\cdot(\vec{u}\times\vec{v}) = v_1(u_2v_3 - u_3v_2) + v_2(u_3v_1 - u_1v_3) + v_3(u_1v_2 - u_2v_1) = 0.$$

9.30 Planer i rummet

1. Parameterfremstillingen er:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 6 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Punktet P ligger ikke på linjen.

2. Ligningen for planen er

$$3(x-1) + 2(y+5) + 6(z-4) = 0.$$

3. Afstanden er $\sqrt{30}$

4. Indsætter vi koordinaterne for linjen i planens ligning får vi

$$\begin{aligned}0 &= 3(1+t) - 2(-2-2t) + (2+4t) - 20 \\ &= 3 + 3t + 4 + 4t + 2 + 4t - 20 = 11t - 11.\end{aligned}$$

Denne ligning har løsningen $t = 1$ og dermed bliver skæringspunktet $(2, -4, 6)$.

5. Ved skiftevis at holde to af variablerne x, y, z lig 0 får vi skæringspunkterne $(0, 0, 12)$, $(0, -6, 0)$ og $(3, 0, 0)$.

6. Da $\vec{u}\times\vec{v} = 0$ udspænder vektorerne ikke en plan.

7. Hvis vi lægger de to ligninger sammen får vi at $3x = 2$ hvilket giver at $x = \frac{2}{3}$. Ganger vi den første ligning igennem med 2 og trækker den fra den anden får vi ligningen

$$3y + 3z = 2.$$

Isolerer vi for y får vi at $y = \frac{2}{3} - z$ og hvis vi skriver $t = z$ får vi parameterfremstillingen

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

8. Svarene er

   (a) Vi har at

$$\vec{v} \times \vec{v} = 4\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix},$$

   hvorfor planens ligning bliver

$$x - 2y + 2z = 0.$$

   (b) Arealet er 12.

   (c) Krydsproduktet for normalvektorerne til P og Q er

$$\begin{bmatrix} -10 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

   og for at planerne kan være parallelle eller sammenfaldende skal dette krydsprodukt være $\vec{0}$.

   (d) Indsætter vi linjens koordinater i venstresiden af ligningen for P får vi

$$\frac{2}{7} - 10t - 2\left(\frac{1}{7} + 2t\right) + 2(7t) = 0$$

   hvilket viser at linjen er indehold i P. Gør vi det samme for Q får vi

$$2\left(\frac{2}{7} - 10t\right) + 3\left(\frac{1}{7} + 2t\right) + 2(7t) = 1.$$

   Altså ligger linjen både i P og Q.

9. Afstanden er 2.

10. Vi har at

$$\vec{w} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 6 \\ 15 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

9.31 Repetition

1. Svarene er:

$$-\frac{1}{12}, \qquad \frac{1}{2}, \qquad \frac{11}{6}.$$

2. Svarene er:

$$x = 25, \qquad x = 2, x = -\frac{1}{2}, \qquad x = 1, x = -3, \qquad x = \pm 2, x = \pm\sqrt{2}.$$

3. Svarene er:

$$\frac{x-2}{x+3}, \qquad -\frac{x+3}{x+1}.$$

4. Svarene er:

$$27x^6, \qquad y^-1, \qquad \sqrt{x}.$$

5. Svarene er:

$$x = 2, y = \frac{-1}{2}.$$

6. g er surjektiv men ikke injektiv og f er hverken injektiv eller surjektiv.
7. Svarene $h(g(-1)) = -1$ og $g(f(3)) = 2$.
8. Svarene er

$$f(g(x)) = \frac{1}{1+\cos^4(x)}, \qquad g(f(x)) = \cos^2(\frac{1}{1+x^2}).$$

9. Svarene er:

$$6, \qquad 27, \qquad \frac{1}{\sqrt[3]{e}}.$$

10. Svarene er:

$$x = 1, \qquad x = \frac{1}{2}.$$

11. Svarene er:

$$\frac{3}{2}, \qquad 3.$$

12. Funkionen f er kontinert på mængden $\mathbf{R} \setminus 0, 1, 2$, altså i alle punkter undtagen 1,2 og 3.
13. Svaret er: $\lim_{x\to 2} xe^{x^2-4} - x = 0$.

14. Svarene er:

$$f'(x) = 4x + \frac{1}{2x^{\frac{3}{2}}}, \qquad g'(x) = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} + \sin(x), \qquad h'(x) = \frac{3}{2x} + 4xe^{2x^2}.$$

15. Svarene er:

$$f'(x) = 2x(1+\tan^2(x^2)), \quad g(x) = e^{2\sin(x)}(\sin(2x)+\cos(x)), \quad h(x) = -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}.$$

16. (a) Den første blå og den første røde hører sammen.
    (b) Den anden blå og den tredje røde hører sammen.
    (c) Den tredje blå og den anden røde hører sammen.

17. Svaret er: $(f \circ g)'(3) = \frac{1}{4} - \frac{\pi}{6}$.

18. Det ses let at $f'(x) = 2x - 4$ så $f'(x) = 0$ har løsningen $x = 2$. Vælger vi punkterne $x_1 = 0$ og $x_2 = 3$ ser vi at $f'(x_1) = -4$ og at $f(x_2) = 2$. Dette giver monotonilinjen som ses i Tabel 9.1. Vi ser dermed at f er aftagende i intervallet $]-\infty, 2]$ og voksende i intervallet $[2, \infty[$. Tangenten gennem punktet $(1, f(1))$ har forskriften

$$y = -2(x-1) + 1 = -2x + 3.$$

x	0	2	3
$f'(x)$	-4	0	2
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

Tabel 9.4: Opgave 18.

19. Ved at undersøge kritiske punkter og interval endepunkter ses det at maksimumsværdien antages i $x = 1$ samt at $f(1) = 9$. Yderligere ses det at minimumsværdien tages i $x = -\frac{1}{3}$ samt at $f(-\frac{1}{3}) = \frac{11}{3}$.

20. Lad a og b være givet som i Figur 9.9 i.e. b er højden af rektanglet og a er halvdelen af længden. Ved at anvende trekantsberegninger får vi at

$$\tan(\frac{\pi}{3}) = \frac{b}{\frac{1}{2} - a}.$$

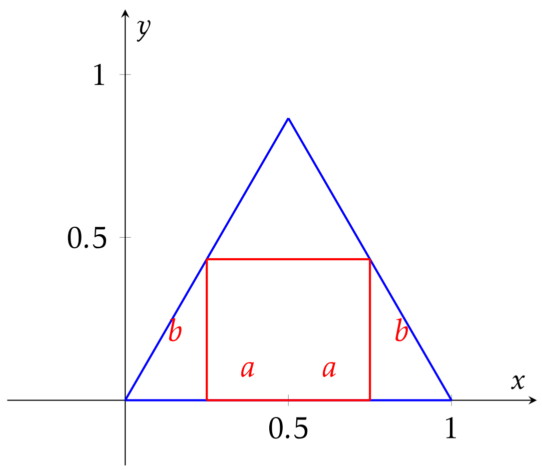
Isolerer vi b får vi at

$$b = \frac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3}a.$$

Arealet af rektanglet kan dermed beskrives ved følgende funktion af a:

$$A(a) = 2a(\frac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3}a) = \sqrt{3}a - 2\sqrt{3}a^2.$$

Ved at anvende den sædvanlige optimeringsmetode finder vi at A tager sit maksimum når $a = \frac{1}{4}$. Dette giver et maksimalt areal på $A(\frac{1}{4}) = \frac{\sqrt{3}}{8}$.



Figur 9.9: Opgave 20

21. Nej.

22. Svarene er:

$$\frac{1}{3}x^3 + x + c, \qquad \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \cos(x) + c, \qquad e^{\frac{x}{2}} + c.$$

23. Svarene er:

$$x\sin(x) + \cos(x) + c, \qquad \frac{1}{3}x^3\ln(x) - \frac{1}{9}x^3 + c.$$

24. Svarene er:

$$e^{x^3+3x-1} + c, \qquad \frac{1}{2}(x^2\ln(x^2) - x^2) + c, \qquad -e^{-(x^4+x^2-x)} + c.$$

25. Svarene er:

$$\frac{8}{3}, \qquad 0, \qquad 2e^{-1} - 1.$$

26. Udregn følgende bestemte integraler:

$$1 - e, \qquad 0.$$

27. Vi har at

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} f(x)\,dx &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(x) - \sin(x)\,dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \sin(x) - \cos(x)\,dx + \int_{\frac{5\pi}{4}}^{2\pi} \cos(x) - \sin(x)\,dx \\
&= [\sin(x) + \cos(x)]_0^{\frac{\pi}{4}} + [-\cos(x) - \sin(x)]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} + [\sin(x) + \cos(x)]_{\frac{5\pi}{4}}^{2\pi} \\
&= (\sqrt{2} - 1) + (\sqrt{2} + \sqrt{2}) + (1 + \sqrt{2}) \\
&= 4\sqrt{2}.
\end{aligned}$$

28. Den fuldstændige løsning er $y(x) = ce^{-3x}$ hvor $c \in \mathbf{R}$. Da man blot bliver bedt om at finde en løsning kunne man være doven og vælge $y(x) = 0$.

29. Ved at anvende kædereglen ses at $f'(x) = -e^x e^{-e^x}$. Indsætter vi f og f' i differentialligningen får vi

$$-\frac{f'(x)}{f(x)} = -\frac{-e^x e^{-e^x}}{e^{-e^x}} = -(-e^x) = e^x.$$

30. Funktionerne y_1 og y_2 er løsninger.

31. Tangentligningen har forskriften $y = \ln(2)$.

32. Vi har at

$$y_1'(x) = \frac{d}{dx}\cos(x) = -sin(x) = -y_2(x)$$
$$y_2'(x) = \frac{d}{dx}\sin(x) = \cos(x) = y_1(x).$$

Derudover er det velkendt at $\cos(0) = 1$ og $\sin(0) = 0$.

33. Bruger vi Panzerformlen får vi at

$$y(x) = e^{-\frac{1}{2}x^2}\int xe^{\frac{1}{2}x^2}\,dx + ce^{-\frac{1}{2}x^2} = e^{-\frac{1}{2}x^2}e^{\frac{1}{2}x^2} + ce^{-\frac{1}{2}x^2} = 1 + ce^{-\frac{1}{2}x^2}.$$

34. Bruger vi Panzerformlen får vi at

$$y(x) = e^{-\cos(x)}\int \sin(x)e^{\cos(x)}\,dx + ce^{-\cos(x)} = e^{-\cos(x)}(-e^{\cos(x)}) + ce^{-\cos(x)} = ce^{-\cos(x)} - 1.$$

35. Funktionerne y_1, y_3 og y_4 løser differentialligningen.

36. Svarene er:

$$\begin{bmatrix}-4\\2\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}-2\\-4\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}3\\-4\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}7\\4\end{bmatrix}, \quad 2\sqrt{5}, \quad \sqrt{5}, \quad 0, \quad 0.$$

37. Arealet er 5.

38. Vi har at

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = -\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 0,$$

samt at

$$||\vec{u}|| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = 1,$$
$$||\vec{v}|| = \sqrt{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = 1,$$

39. Nej.

40.

41. Svarene er:

$$\begin{bmatrix}-1\\1\\-2\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}0\\-2\\6\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}1\\-2\\5\end{bmatrix}, \quad \sqrt{6}, \quad \sqrt{10}, \quad -7, \quad \begin{bmatrix}1\\3\\1\end{bmatrix}.$$

42. Arealet er $6\sqrt{3}$.

43. Bestem en parameterfremstilling for linjen m gennem punkterne $P_1 = (2,3,-1)$ og $P_2 = (2,-2,0)$. Ligger $P = (2,8,-2)$ på m?

44. En mulig parameterfremstilling er

$$\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\-2\\0\end{bmatrix} + t\begin{bmatrix}0\\5\\-1\end{bmatrix}.$$

P ligger på linjen.

En mulig ligning for planen er

$$2x - y + 3z - 4 = 0$$

Punktet P_1 ligger i planen.