

Math101

Benjamin Støttrup
benjamin@math.aau.dk

Institut for matematiske fag
Aalborg universitet
Danmark



AALBORG UNIVERSITY
DENMARK

Agenda



Inverse funktioner

Logaritmer og eksponentialfunktioner

Trigonometriske funktioner

Inverse funktioner

- ▶ To funktioner $f: X \rightarrow Y$ og $g: Y \rightarrow X$ er hinandens *inverse* hvis

$$f(g(y)) = y, \quad \text{og} \quad g(f(x)) = x$$

for alle x i X og y i Y .

- ▶ Eksempel: $f(x) = x^2$ og $g(x) = \sqrt{x}$ begge defineret på $[0, \infty[$ er inverse funktioner.
- ▶ Eksempel: $f(x) = \frac{1}{x}$ defineret på $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ er sin egen invers.

Inverse funktioner

- To funktioner $f: X \rightarrow Y$ og $g: Y \rightarrow X$ er hinandens *inverse* hvis

$$f(g(y)) = y, \quad \text{og} \quad g(f(x)) = x$$

for alle x i X og y i Y .

- Eksempel: $f(x) = x^2$ og $g(x) = \sqrt{x}$ begge defineret på $[0, \infty[$ er inverse funktioner.
- Eksempel: $f(x) = \frac{1}{x}$ defineret på $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ er sin egen invers.



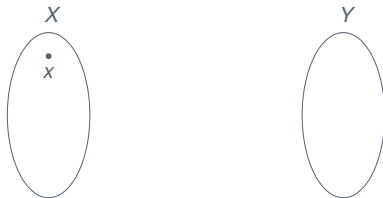
Inverse funktioner

- To funktioner $f: X \rightarrow Y$ og $g: Y \rightarrow X$ er hinandens *inverse* hvis

$$f(g(y)) = y, \quad \text{og} \quad g(f(x)) = x$$

for alle x i X og y i Y .

- Eksempel: $f(x) = x^2$ og $g(x) = \sqrt{x}$ begge defineret på $[0, \infty[$ er inverse funktioner.
- Eksempel: $f(x) = \frac{1}{x}$ defineret på $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ er sin egen invers.



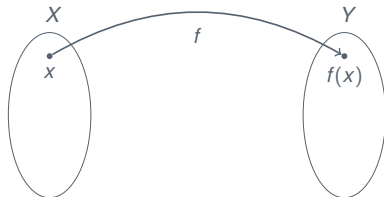
Inverse funktioner

- To funktioner $f: X \rightarrow Y$ og $g: Y \rightarrow X$ er hinandens *inverse* hvis

$$f(g(y)) = y, \quad \text{og} \quad g(f(x)) = x$$

for alle x i X og y i Y .

- Eksempel: $f(x) = x^2$ og $g(x) = \sqrt{x}$ begge defineret på $[0, \infty[$ er inverse funktioner.
- Eksempel: $f(x) = \frac{1}{x}$ defineret på $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ er sin egen invers.



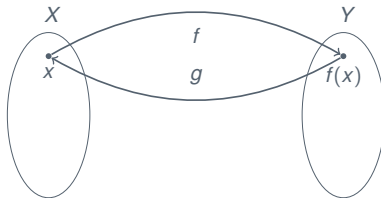
Inverse funktioner

- To funktioner $f: X \rightarrow Y$ og $g: Y \rightarrow X$ er hinandens *inverse* hvis

$$f(g(y)) = y, \quad \text{og} \quad g(f(x)) = x$$

for alle x i X og y i Y .

- Eksempel: $f(x) = x^2$ og $g(x) = \sqrt{x}$ begge defineret på $[0, \infty[$ er inverse funktioner.
- Eksempel: $f(x) = \frac{1}{x}$ defineret på $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ er sin egen invers.



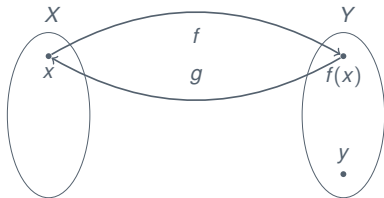
Inverse funktioner

- To funktioner $f: X \rightarrow Y$ og $g: Y \rightarrow X$ er hinandens *inverse* hvis

$$f(g(y)) = y, \quad \text{og} \quad g(f(x)) = x$$

for alle x i X og y i Y .

- Eksempel: $f(x) = x^2$ og $g(x) = \sqrt{x}$ begge defineret på $[0, \infty[$ er inverse funktioner.
- Eksempel: $f(x) = \frac{1}{x}$ defineret på $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ er sin egen invers.



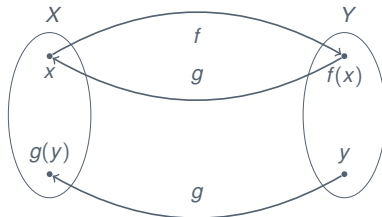
Inverse funktioner

- To funktioner $f: X \rightarrow Y$ og $g: Y \rightarrow X$ er hinandens *inverse* hvis

$$f(g(y)) = y, \quad \text{og} \quad g(f(x)) = x$$

for alle x i X og y i Y .

- Eksempel: $f(x) = x^2$ og $g(x) = \sqrt{x}$ begge defineret på $[0, \infty[$ er inverse funktioner.
- Eksempel: $f(x) = \frac{1}{x}$ defineret på $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ er sin egen invers.



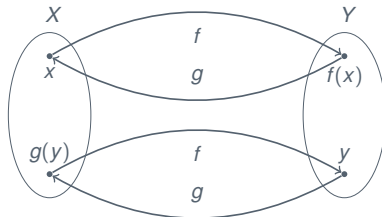
Inverse funktioner

- To funktioner $f: X \rightarrow Y$ og $g: Y \rightarrow X$ er hinandens *inverse* hvis

$$f(g(y)) = y, \quad \text{og} \quad g(f(x)) = x$$

for alle x i X og y i Y .

- Eksempel: $f(x) = x^2$ og $g(x) = \sqrt{x}$ begge defineret på $[0, \infty[$ er inverse funktioner.
- Eksempel: $f(x) = \frac{1}{x}$ defineret på $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ er sin egen invers.



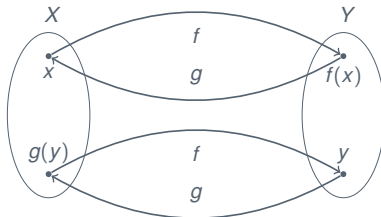
Inverse funktioner

- To funktioner $f: X \rightarrow Y$ og $g: Y \rightarrow X$ er hinandens *inverse* hvis

$$f(g(y)) = y, \quad \text{og} \quad g(f(x)) = x$$

for alle x i X og y i Y .

- Eksempel: $f(x) = x^2$ og $g(x) = \sqrt{x}$ begge defineret på $[0, \infty[$ er inverse funktioner.
- Eksempel: $f(x) = \frac{1}{x}$ defineret på $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ er sin egen invers.



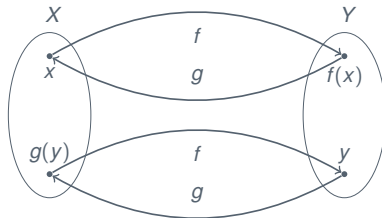
Inverse funktioner

- To funktioner $f: X \rightarrow Y$ og $g: Y \rightarrow X$ er hinandens *inverse* hvis

$$f(g(y)) = y, \quad \text{og} \quad g(f(x)) = x$$

for alle x i X og y i Y .

- Eksempel: $f(x) = x^2$ og $g(x) = \sqrt{x}$ begge defineret på $[0, \infty[$ er inverse funktioner.
- Eksempel: $f(x) = \frac{1}{x}$ defineret på $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ er sin egen invers.





Logaritmer og eksponentialfunktioner

- ▶ For ethvert positivt $a \neq 1$ kalder vi funktionen $f_a: \mathbb{R} \rightarrow]0, \infty[$ givet ved $f_a(x) = a^x$ for *eksponentialfunktionen med grundtal a* .
- ▶ Funktionen $f_a(x) = a^x$ har en invers funktion $\log_a:]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ som kaldes *logaritmen med grundtal a* .
- ▶ Hvis $a = e$ så skriver vi \ln i stedet for \log_e og hvis $a = 10$ skriver vi \log i stedet for \log_{10} .
- ▶ Der gælder at

$$\log_a(a^x) = x \quad \text{og} \quad a^{\log_a(y)} = y,$$

for alle $x \in \mathbb{R}$ og $y \in]0, \infty[$.

- ▶ Eksempler: Udregn

$$\log_2(8) \quad , \quad \log_{10}(10000) \quad , \quad \log_a(1) \quad .$$



Logaritmer og eksponentialfunktioner

- ▶ For ethvert positivt $a \neq 1$ kalder vi funktionen $f_a: \mathbb{R} \rightarrow]0, \infty[$ givet ved $f_a(x) = a^x$ for *eksponentialfunktionen med grundtal a* .
- ▶ Funktionen $f_a(x) = a^x$ har en invers funktion $\log_a:]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ som kaldes *logaritmen med grundtal a* .
- ▶ Hvis $a = e$ så skriver vi \ln i stedet for \log_e og hvis $a = 10$ skriver vi \log i stedet for \log_{10} .
- ▶ Der gælder at

$$\log_a(a^x) = x \quad \text{og} \quad a^{\log_a(y)} = y,$$

for alle $x \in \mathbb{R}$ og $y \in]0, \infty[$.

- ▶ Eksempler: Udregn

$$\log_2(8) \quad , \quad \log_{10}(10000) \quad , \quad \log_a(1) \quad .$$



Logaritmer og eksponentialfunktioner

- ▶ For ethvert positivt $a \neq 1$ kalder vi funktionen $f_a: \mathbb{R} \rightarrow]0, \infty[$ givet ved $f_a(x) = a^x$ for *eksponentialfunktionen med grundtal a* .
- ▶ Funktionen $f_a(x) = a^x$ har en invers funktion $\log_a:]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ som kaldes *logaritmen med grundtal a* .
- ▶ Hvis $a = e$ så skriver vi \ln i stedet for \log_e og hvis $a = 10$ skriver vi \log i stedet for \log_{10} .
- ▶ Der gælder at

$$\log_a(a^x) = x \quad \text{og} \quad a^{\log_a(y)} = y,$$

for alle $x \in \mathbb{R}$ og $y \in]0, \infty[$.

- ▶ Eksempler: Udregn

$$\log_2(8) \quad , \quad \log_{10}(10000) \quad , \quad \log_a(1) \quad .$$



Logaritmer og eksponentialfunktioner

- ▶ For ethvert positivt $a \neq 1$ kalder vi funktionen $f_a: \mathbb{R} \rightarrow]0, \infty[$ givet ved $f_a(x) = a^x$ for *eksponentialfunktionen med grundtal a* .
- ▶ Funktionen $f_a(x) = a^x$ har en invers funktion $\log_a:]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ som kaldes *logaritmen med grundtal a* .
- ▶ Hvis $a = e$ så skriver vi \ln i stedet for \log_e og hvis $a = 10$ skriver vi \log i stedet for \log_{10} .
- ▶ Der gælder at

$$\log_a(a^x) = x \quad \text{og} \quad a^{\log_a(y)} = y,$$

for alle $x \in \mathbb{R}$ og $y \in]0, \infty[$.

- ▶ Eksempler: Udregn

$$\log_2(8) \quad , \quad \log_{10}(10000) \quad , \quad \log_a(1) \quad .$$



Logaritmer og eksponentialfunktioner

- ▶ For ethvert positivt $a \neq 1$ kalder vi funktionen $f_a: \mathbb{R} \rightarrow]0, \infty[$ givet ved $f_a(x) = a^x$ for *eksponentialfunktionen med grundtal a* .
- ▶ Funktionen $f_a(x) = a^x$ har en invers funktion $\log_a:]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ som kaldes *logaritmen med grundtal a* .
- ▶ Hvis $a = e$ så skriver vi \ln i stedet for \log_e og hvis $a = 10$ skriver vi \log i stedet for \log_{10} .
- ▶ Der gælder at

$$\log_a(a^x) = x \quad \text{og} \quad a^{\log_a(y)} = y,$$

for alle $x \in \mathbb{R}$ og $y \in]0, \infty[$.

- ▶ Eksempler: Udregn

$$\log_2(8) \quad , \quad \log_{10}(10000) \quad , \quad \log_a(1) \quad .$$



Logaritmer og eksponentialfunktioner

- ▶ For ethvert positivt $a \neq 1$ kalder vi funktionen $f_a: \mathbb{R} \rightarrow]0, \infty[$ givet ved $f_a(x) = a^x$ for *eksponentialfunktionen med grundtal a* .
- ▶ Funktionen $f_a(x) = a^x$ har en invers funktion $\log_a:]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ som kaldes *logaritmen med grundtal a* .
- ▶ Hvis $a = e$ så skriver vi \ln i stedet for \log_e og hvis $a = 10$ skriver vi \log i stedet for \log_{10} .
- ▶ Der gælder at

$$\log_a(a^x) = x \quad \text{og} \quad a^{\log_a(y)} = y,$$

for alle $x \in \mathbb{R}$ og $y \in]0, \infty[$.

- ▶ Eksempler: Udregn

$$\log_2(8) = \log_2(2^3) \quad , \quad \log_{10}(10000) \quad , \quad \log_a(1) \quad .$$



Logaritmer og eksponentialfunktioner

- ▶ For ethvert positivt $a \neq 1$ kalder vi funktionen $f_a: \mathbb{R} \rightarrow]0, \infty[$ givet ved $f_a(x) = a^x$ for *eksponentialfunktionen med grundtal a* .
- ▶ Funktionen $f_a(x) = a^x$ har en invers funktion $\log_a:]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ som kaldes *logaritmen med grundtal a* .
- ▶ Hvis $a = e$ så skriver vi \ln i stedet for \log_e og hvis $a = 10$ skriver vi \log i stedet for \log_{10} .
- ▶ Der gælder at

$$\log_a(a^x) = x \quad \text{og} \quad a^{\log_a(y)} = y,$$

for alle $x \in \mathbb{R}$ og $y \in]0, \infty[$.

- ▶ Eksempler: Udregn

$$\log_2(8) = \log_2(2^3) = 3, \quad \log_{10}(10000) = 4, \quad \log_a(1) = 0.$$



Logaritmer og eksponentialfunktioner

- ▶ For ethvert positivt $a \neq 1$ kalder vi funktionen $f_a: \mathbb{R} \rightarrow]0, \infty[$ givet ved $f_a(x) = a^x$ for *eksponentialfunktionen med grundtal a* .
- ▶ Funktionen $f_a(x) = a^x$ har en invers funktion $\log_a:]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ som kaldes *logaritmen med grundtal a* .
- ▶ Hvis $a = e$ så skriver vi \ln i stedet for \log_e og hvis $a = 10$ skriver vi \log i stedet for \log_{10} .
- ▶ Der gælder at

$$\log_a(a^x) = x \quad \text{og} \quad a^{\log_a(y)} = y,$$

for alle $x \in \mathbb{R}$ og $y \in]0, \infty[$.

- ▶ Eksempler: Udregn

$$\log_2(8) = \log_2(2^3) = 3, \quad \log_{10}(10000) = 4, \quad \log_a(1) = 0.$$



Logaritmer og eksponentialfunktioner

- ▶ For ethvert positivt $a \neq 1$ kalder vi funktionen $f_a: \mathbb{R} \rightarrow]0, \infty[$ givet ved $f_a(x) = a^x$ for *eksponentialfunktionen med grundtal a* .
- ▶ Funktionen $f_a(x) = a^x$ har en invers funktion $\log_a:]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ som kaldes *logaritmen med grundtal a* .
- ▶ Hvis $a = e$ så skriver vi \ln i stedet for \log_e og hvis $a = 10$ skriver vi \log i stedet for \log_{10} .
- ▶ Der gælder at

$$\log_a(a^x) = x \quad \text{og} \quad a^{\log_a(y)} = y,$$

for alle $x \in \mathbb{R}$ og $y \in]0, \infty[$.

- ▶ Eksempler: Udregn

$$\log_2(8) = \log_2(2^3) = 3, \quad \log_{10}(10000) = \log_{10}(10^4) \quad , \quad \log_a(1)$$



Logaritmer og eksponentialfunktioner

- ▶ For ethvert positivt $a \neq 1$ kalder vi funktionen $f_a: \mathbb{R} \rightarrow]0, \infty[$ givet ved $f_a(x) = a^x$ for *eksponentialfunktionen med grundtal a* .
- ▶ Funktionen $f_a(x) = a^x$ har en invers funktion $\log_a:]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ som kaldes *logaritmen med grundtal a* .
- ▶ Hvis $a = e$ så skriver vi \ln i stedet for \log_e og hvis $a = 10$ skriver vi \log i stedet for \log_{10} .
- ▶ Der gælder at

$$\log_a(a^x) = x \quad \text{og} \quad a^{\log_a(y)} = y,$$

for alle $x \in \mathbb{R}$ og $y \in]0, \infty[$.

- ▶ Eksempler: Udregn

$$\log_2(8) = \log_2(2^3) = 3, \quad \log_{10}(10000) = \log_{10}(10^4) = 4, \quad \log_a(1)$$

Logaritmer og eksponentialfunktioner

- ▶ For ethvert positivt $a \neq 1$ kalder vi funktionen $f_a: \mathbb{R} \rightarrow]0, \infty[$ givet ved $f_a(x) = a^x$ for *eksponentialfunktionen med grundtal a* .
- ▶ Funktionen $f_a(x) = a^x$ har en invers funktion $\log_a:]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ som kaldes *logaritmen med grundtal a* .
- ▶ Hvis $a = e$ så skriver vi \ln i stedet for \log_e og hvis $a = 10$ skriver vi \log i stedet for \log_{10} .
- ▶ Der gælder at

$$\log_a(a^x) = x \quad \text{og} \quad a^{\log_a(y)} = y,$$

for alle $x \in \mathbb{R}$ og $y \in]0, \infty[$.

- ▶ Eksempler: Udregn

$$\log_2(8) = \log_2(2^3) = 3, \quad \log_{10}(10000) = \log_{10}(10^4) = 4, \quad \log_a(1)$$



Logaritmer og eksponentialfunktioner

- ▶ For ethvert positivt $a \neq 1$ kalder vi funktionen $f_a: \mathbb{R} \rightarrow]0, \infty[$ givet ved $f_a(x) = a^x$ for *eksponentialfunktionen med grundtal a* .
- ▶ Funktionen $f_a(x) = a^x$ har en invers funktion $\log_a:]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ som kaldes *logaritmen med grundtal a* .
- ▶ Hvis $a = e$ så skriver vi \ln i stedet for \log_e og hvis $a = 10$ skriver vi \log i stedet for \log_{10} .
- ▶ Der gælder at

$$\log_a(a^x) = x \quad \text{og} \quad a^{\log_a(y)} = y,$$

for alle $x \in \mathbb{R}$ og $y \in]0, \infty[$.

- ▶ Eksempler: Udregn

$$\log_2(8) = \log_2(2^3) = 3, \quad \log_{10}(10000) = \log_{10}(10^4) = 4, \quad \log_a(1) = \log_a(a^0) \quad .$$

Logaritmer og eksponentialfunktioner

- ▶ For ethvert positivt $a \neq 1$ kalder vi funktionen $f_a: \mathbb{R} \rightarrow]0, \infty[$ givet ved $f_a(x) = a^x$ for *eksponentialfunktionen med grundtal a* .
- ▶ Funktionen $f_a(x) = a^x$ har en invers funktion $\log_a:]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ som kaldes *logaritmen med grundtal a* .
- ▶ Hvis $a = e$ så skriver vi \ln i stedet for \log_e og hvis $a = 10$ skriver vi \log i stedet for \log_{10} .
- ▶ Der gælder at

$$\log_a(a^x) = x \quad \text{og} \quad a^{\log_a(y)} = y,$$

for alle $x \in \mathbb{R}$ og $y \in]0, \infty[$.

- ▶ Eksempler: Udregn

$$\log_2(8) = \log_2(2^3) = 3, \quad \log_{10}(10000) = \log_{10}(10^4) = 4, \quad \log_a(1) = \log_a(a^0) = 0.$$



Logaritmer og eksponentialfunktioner

Regneregler

- ▶ Når vi arbejder med eksponentialfunktioner kan vi anvende potensregneregler.
- ▶ For logaritmer har vi følgende regneregler

$$\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y),$$

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y),$$

$$\log_a(x^r) = r \log_a(x).$$

- ▶ Eksempler: Udregn

$$\log(50) + \log(20)$$

$$2^{2+\log_2(5)}$$

$$9^{\log_3(2)}$$



Logaritmer og eksponentialfunktioner

Regneregler

- ▶ Når vi arbejder med eksponentialfunktioner kan vi anvende potensregneregler.
- ▶ For logaritmer har vi følgende regneregler

$$\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y),$$

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y),$$

$$\log_a(x^r) = r \log_a(x).$$

- ▶ Eksempler: Udregn

$$\log(50) + \log(20)$$

$$2^{2+\log_2(5)}$$

$$9^{\log_3(2)}$$



Logaritmer og eksponentialfunktioner

Regneregler

- ▶ Når vi arbejder med eksponentialfunktioner kan vi anvende potensregneregler.
- ▶ For logaritmer har vi følgende regneregler

$$\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y),$$

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y),$$

$$\log_a(x^r) = r \log_a(x).$$

- ▶ Eksempler: Udregn

$$\log(50) + \log(20)$$

$$2^{2+\log_2(5)}$$

$$9^{\log_3(2)}$$



Logaritmer og eksponentialfunktioner

Regneregler

- ▶ Når vi arbejder med eksponentialfunktioner kan vi anvende potensregneregler.
- ▶ For logaritmer har vi følgende regneregler

$$\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y),$$

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y),$$

$$\log_a(x^r) = r \log_a(x).$$

- ▶ Eksempler: Udregn

$$\log(50) + \log(20)$$

$$2^{2+\log_2(5)}$$

$$9^{\log_3(2)}$$



Logaritmer og eksponentialfunktioner

Regneregler

- ▶ Når vi arbejder med eksponentialfunktioner kan vi anvende potensregneregler.
- ▶ For logaritmer har vi følgende regneregler

$$\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y),$$

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y),$$

$$\log_a(x^r) = r \log_a(x).$$

- ▶ Eksempler: Udregn

$$\log(50) + \log(20)$$

$$2^{2+\log_2(5)}$$

$$9^{\log_3(2)}$$



Logaritmer og eksponentialfunktioner

Regneregler

- ▶ Når vi arbejder med eksponentialfunktioner kan vi anvende potensregneregler.
- ▶ For logaritmer har vi følgende regneregler

$$\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y),$$

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y),$$

$$\log_a(x^r) = r \log_a(x).$$

- ▶ Eksempler: Udregn

$$\log(50) + \log(20) = \log(50 \cdot 20)$$

$$2^{2+\log_2(5)}$$

$$9^{\log_3(2)}$$



Logaritmer og eksponentialfunktioner

Regneregler

- ▶ Når vi arbejder med eksponentialfunktioner kan vi anvende potensregneregler.
- ▶ For logaritmer har vi følgende regneregler

$$\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y),$$

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y),$$

$$\log_a(x^r) = r \log_a(x).$$

- ▶ Eksempler: Udregn

$$\log(50) + \log(20) = \log(50 \cdot 20) = \log(1000)$$

$$2^{2+\log_2(5)}$$

$$9^{\log_3(2)}$$



Logaritmer og eksponentialfunktioner

Regneregler

- ▶ Når vi arbejder med eksponentialfunktioner kan vi anvende potensregneregler.
- ▶ For logaritmer har vi følgende regneregler

$$\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y),$$

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y),$$

$$\log_a(x^r) = r \log_a(x).$$

- ▶ Eksempler: Udregn

$$\log(50) + \log(20) = \log(50 \cdot 20) = \log(1000) = 3,$$

$$2^{2+\log_2(5)}$$

$$9^{\log_3(2)}$$



Logaritmer og eksponentialfunktioner

Regneregler

- ▶ Når vi arbejder med eksponentialfunktioner kan vi anvende potensregneregler.
- ▶ For logaritmer har vi følgende regneregler

$$\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y),$$

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y),$$

$$\log_a(x^r) = r \log_a(x).$$

- ▶ Eksempler: Udregn

$$\log(50) + \log(20) = \log(50 \cdot 20) = \log(1000) = 3,$$

$$2^{2+\log_2(5)}$$

$$9^{\log_3(2)}$$



Logaritmer og eksponentialfunktioner

Regneregler

- ▶ Når vi arbejder med eksponentialfunktioner kan vi anvende potensregneregler.
- ▶ For logaritmer har vi følgende regneregler

$$\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y),$$

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y),$$

$$\log_a(x^r) = r \log_a(x).$$

- ▶ Eksempler: Udregn

$$\log(50) + \log(20) = \log(50 \cdot 20) = \log(1000) = 3,$$

$$2^{2+\log_2(5)} = 2^2 2^{\log_2(5)}$$

$$9^{\log_3(2)}$$



Logaritmer og eksponentialfunktioner

Regneregler

- Når vi arbejder med eksponentialfunktioner kan vi anvende potensregneregler.
- For logaritmer har vi følgende regneregler

$$\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y),$$

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y),$$

$$\log_a(x^r) = r \log_a(x).$$

- Eksempler: Udregn

$$\log(50) + \log(20) = \log(50 \cdot 20) = \log(1000) = 3,$$

$$2^{2+\log_2(5)} = 2^2 2^{\log_2(5)} = 4 \cdot 5$$

$$9^{\log_3(2)}$$



Logaritmer og eksponentialfunktioner

Regneregler

- Når vi arbejder med eksponentialfunktioner kan vi anvende potensregneregler.
- For logaritmer har vi følgende regneregler

$$\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y),$$

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y),$$

$$\log_a(x^r) = r \log_a(x).$$

- Eksempler: Udregn

$$\log(50) + \log(20) = \log(50 \cdot 20) = \log(1000) = 3,$$

$$2^{2+\log_2(5)} = 2^2 2^{\log_2(5)} = 4 \cdot 5 = 20,$$

$$9^{\log_3(2)}$$



Logaritmer og eksponentialfunktioner

Regneregler

- ▶ Når vi arbejder med eksponentialfunktioner kan vi anvende potensregneregler.
- ▶ For logaritmer har vi følgende regneregler

$$\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y),$$

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y),$$

$$\log_a(x^r) = r \log_a(x).$$

- ▶ Eksempler: Udregn

$$\log(50) + \log(20) = \log(50 \cdot 20) = \log(1000) = 3,$$

$$2^{2+\log_2(5)} = 2^2 2^{\log_2(5)} = 4 \cdot 5 = 20,$$

$$9^{\log_3(2)}$$



Logaritmer og eksponentialfunktioner

Regneregler

- ▶ Når vi arbejder med eksponentialfunktioner kan vi anvende potensregneregler.
- ▶ For logaritmer har vi følgende regneregler

$$\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y),$$

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y),$$

$$\log_a(x^r) = r \log_a(x).$$

- ▶ Eksempler: Udregn

$$\log(50) + \log(20) = \log(50 \cdot 20) = \log(1000) = 3,$$

$$2^{2+\log_2(5)} = 2^2 2^{\log_2(5)} = 4 \cdot 5 = 20,$$

$$9^{\log_3(2)} = (3^2)^{\log_3(2)}$$



Logaritmer og eksponentialfunktioner

Regneregler

- ▶ Når vi arbejder med eksponentialfunktioner kan vi anvende potensregneregler.
- ▶ For logaritmer har vi følgende regneregler

$$\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y),$$

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y),$$

$$\log_a(x^r) = r \log_a(x).$$

- ▶ Eksempler: Udregn

$$\log(50) + \log(20) = \log(50 \cdot 20) = \log(1000) = 3,$$

$$2^{2+\log_2(5)} = 2^2 2^{\log_2(5)} = 4 \cdot 5 = 20,$$

$$9^{\log_3(2)} = (3^2)^{\log_3(2)} = 3^{2 \log_3(2)}$$



Logaritmer og eksponentialfunktioner

Regneregler

- Når vi arbejder med eksponentialfunktioner kan vi anvende potensregneregler.
- For logaritmer har vi følgende regneregler

$$\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y),$$

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y),$$

$$\log_a(x^r) = r \log_a(x).$$

- Eksempler: Udregn

$$\log(50) + \log(20) = \log(50 \cdot 20) = \log(1000) = 3,$$

$$2^{2+\log_2(5)} = 2^2 2^{\log_2(5)} = 4 \cdot 5 = 20,$$

$$9^{\log_3(2)} = (3^2)^{\log_3(2)} = 3^{2 \log_3(2)} = 3^{\log_3(2^2)}$$



Logaritmer og eksponentialfunktioner

Regneregler

- ▶ Når vi arbejder med eksponentialfunktioner kan vi anvende potensregneregler.
- ▶ For logaritmer har vi følgende regneregler

$$\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y),$$

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y),$$

$$\log_a(x^r) = r \log_a(x).$$

- ▶ Eksempler: Udregn

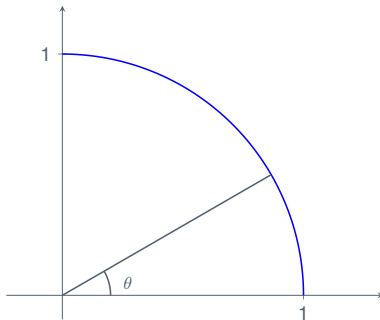
$$\log(50) + \log(20) = \log(50 \cdot 20) = \log(1000) = 3,$$

$$2^{2+\log_2(5)} = 2^2 2^{\log_2(5)} = 4 \cdot 5 = 20,$$

$$9^{\log_3(2)} = (3^2)^{\log_3(2)} = 3^{2 \log_3(2)} = 3^{\log_3(2^2)} = 4.$$

Trigonometriske funktioner

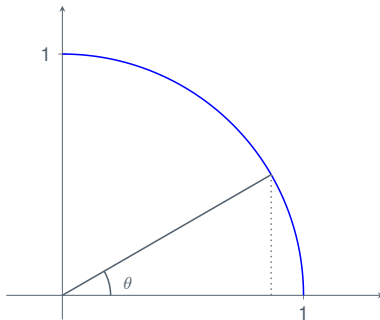
- ▶ Vi definerer de trigonometriske funktioner ud fra enhedscirklen.



- ▶ Bemærk at $\tan(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}$.

Trigonometriske funktioner

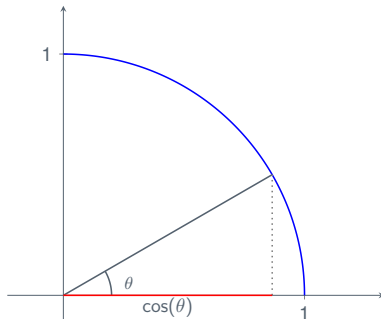
- Vi definerer de trigonometriske funktioner ud fra enhedscirklen.



- Bemærk at $\tan(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}$.

Trigonometriske funktioner

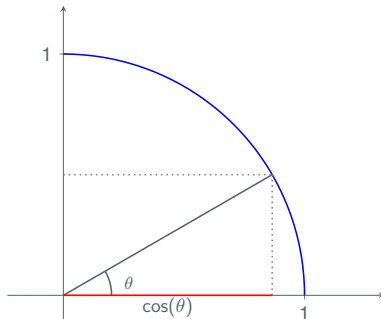
- Vi definerer de trigonometriske funktioner ud fra enhedscirklen.



- Bemærk at $\tan(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}$.

Trigonometriske funktioner

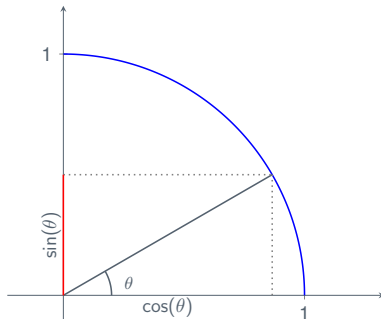
- Vi definerer de trigonometriske funktioner ud fra enhedscirklen.



- Bemærk at $\tan(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}$.

Trigonometriske funktioner

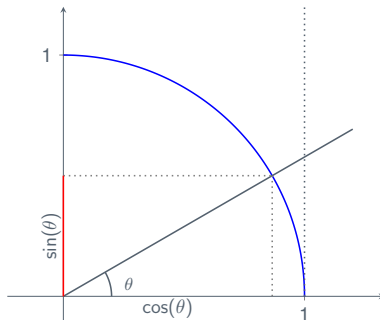
- Vi definerer de trigonometriske funktioner ud fra enhedscirklen.



- Bemærk at $\tan(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}$.

Trigonometriske funktioner

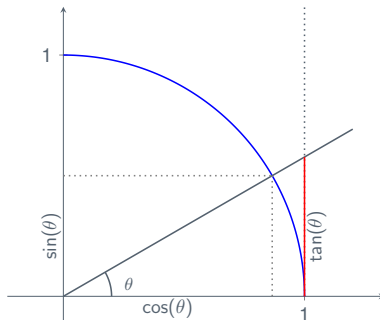
- Vi definerer de trigonometriske funktioner ud fra enhedscirklen.



- Bemærk at $\tan(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}$.

Trigonometriske funktioner

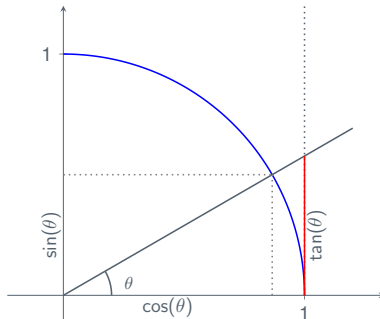
- Vi definerer de trigonometriske funktioner ud fra enhedscirklen.



- Bemærk at $\tan(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}$.

Trigonometriske funktioner

- Vi definerer de trigonometriske funktioner ud fra enhedscirklen.

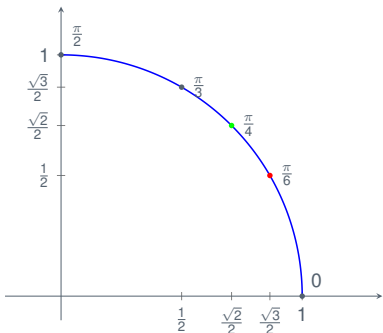


- Bemærk at $\tan(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}$.

Trigonometriske funktioner

Eksakte værdier

- For særlige vinkler kan vi bestemme eksakte værdier af de trigonometriske funktioner.

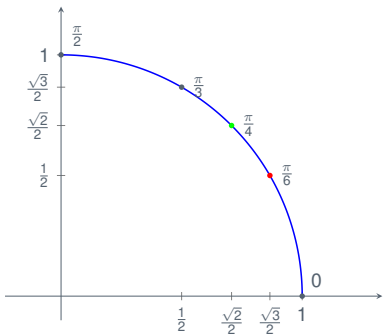


θ	$\sin \theta$	$\cos \theta$	$\tan \theta$
0	0	1	0
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0	

Trigonometriske funktioner

Eksakte værdier

- For særlige vinkler kan vi bestemme eksakte værdier af de trigonometriske funktioner.

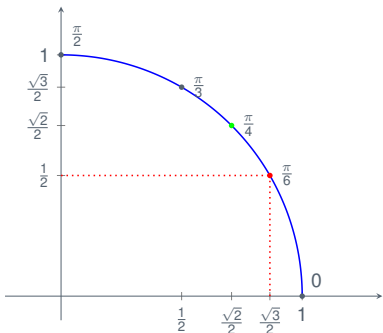


θ	$\sin \theta$	$\cos \theta$	$\tan \theta$
0	0	1	0
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0	

Trigonometriske funktioner

Eksakte værdier

- For særlige vinkler kan vi bestemme eksakte værdier af de trigonometriske funktioner.

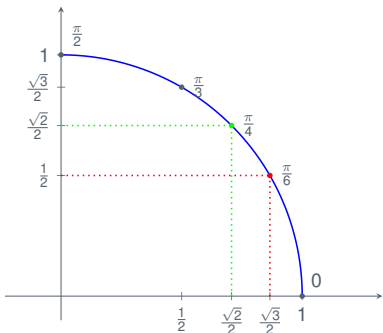


θ	$\sin \theta$	$\cos \theta$	$\tan \theta$
0	0	1	0
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0	

Trigonometriske funktioner

Eksakte værdier

- For særlige vinkler kan vi bestemme eksakte værdier af de trigonometriske funktioner.

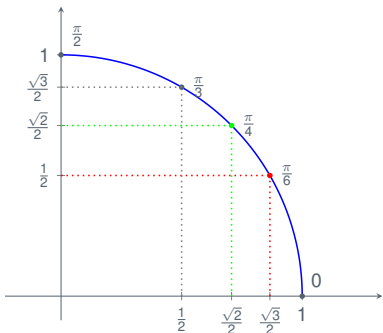


θ	$\sin \theta$	$\cos \theta$	$\tan \theta$
0	0	1	0
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0	

Trigonometriske funktioner

Eksakte værdier

- For særlige vinkler kan vi bestemme eksakte værdier af de trigonometriske funktioner.

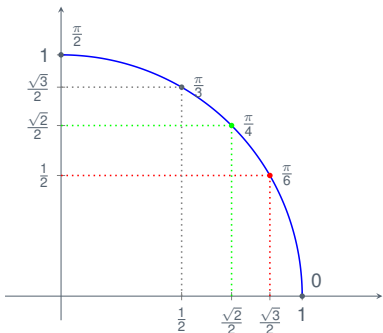


θ	$\sin \theta$	$\cos \theta$	$\tan \theta$
0	0	1	0
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0	

Trigonometriske funktioner

Eksakte værdier

- For særlige vinkler kan vi bestemme eksakte værdier af de trigonometriske funktioner.



θ	$\sin \theta$	$\cos \theta$	$\tan \theta$
0	0	1	0
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0	

Trigonometriske funktioner

Eksempler

- ▶ Når I skal løse opgaver så tegn altid enhedscirklen og udnyt symmetri.
- ▶ Eksempler: Udregn

$$\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$$

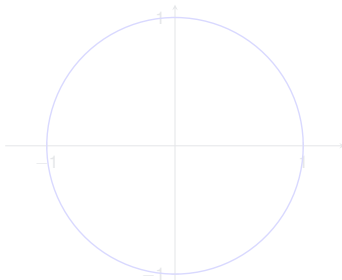
,

$$\sin(9\pi)$$

,

$$\sin\left(-\frac{5\pi}{4}\right)$$

.



Trigonometriske funktioner

Eksempler

- ▶ Når I skal løse opgaver så tegn altid enhedscirklen og udnyt symmetri.
- ▶ Eksempler: Udregn

$$\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$$

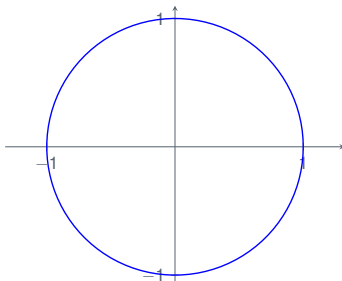
,

$$\sin(9\pi)$$

,

$$\sin\left(-\frac{5\pi}{4}\right)$$

.



Trigonometriske funktioner

Eksempler

- ▶ Når I skal løse opgaver så tegn altid enhedscirklen og udnyt symmetri.
- ▶ Eksempler: Udregn

$$\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$$

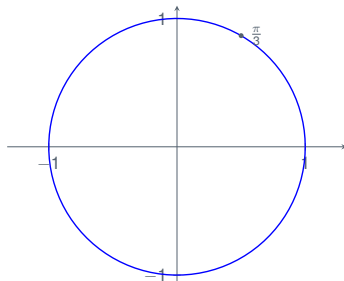
,

$$\sin(9\pi)$$

,

$$\sin\left(-\frac{5\pi}{4}\right)$$

.



Trigonometriske funktioner

Eksempler

- ▶ Når I skal løse opgaver så tegn altid enhedscirklen og udnyt symmetri.
- ▶ Eksempler: Udregn

$$\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$$

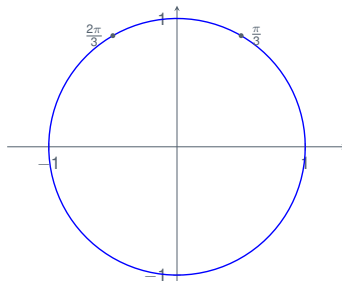
,

$$\sin(9\pi)$$

,

$$\sin\left(-\frac{5\pi}{4}\right)$$

.



Trigonometriske funktioner

Eksempler

- ▶ Når I skal løse opgaver så tegn altid enhedscirklen og udnyt symmetri.
- ▶ Eksempler: Udregn

$$\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$$

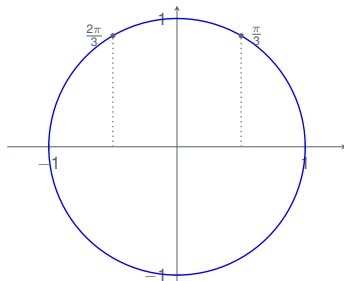
,

$$\sin(9\pi)$$

,

$$\sin\left(-\frac{5\pi}{4}\right)$$

.

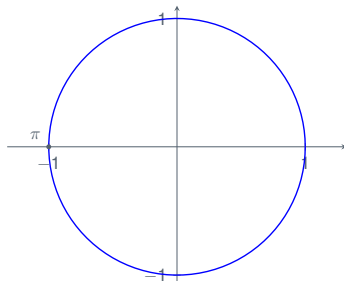


Trigonometriske funktioner

Eksempler

- ▶ Når I skal løse opgaver så tegn altid enhedscirklen og udnyt symmetri.
- ▶ Eksempler: Udregn

$$\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}, \quad \sin(9\pi) \quad , \quad \sin\left(-\frac{5\pi}{4}\right)$$

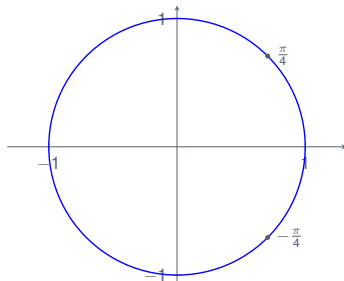


Trigonometriske funktioner

Eksempler

- ▶ Når I skal løse opgaver så tegn altid enhedscirklen og udnyt symmetri.
- ▶ Eksempler: Udregn

$$\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}, \quad \sin(9\pi) = \sin(\pi) = 0, \quad \sin\left(-\frac{5\pi}{4}\right)$$

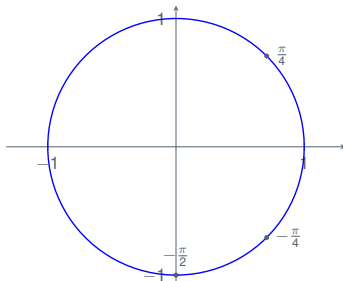


Trigonometriske funktioner

Eksempler

- ▶ Når I skal løse opgaver så tegn altid enhedscirklen og udnyt symmetri.
- ▶ Eksempler: Udregn

$$\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}, \quad \sin(9\pi) = \sin(\pi) = 0, \quad \sin\left(-\frac{5\pi}{4}\right)$$

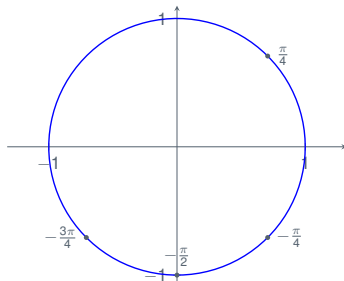


Trigonometriske funktioner

Eksempler

- ▶ Når I skal løse opgaver så tegn altid enhedscirklen og udnyt symmetri.
- ▶ Eksempler: Udregn

$$\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}, \quad \sin(9\pi) = \sin(\pi) = 0, \quad \sin\left(-\frac{5\pi}{4}\right)$$

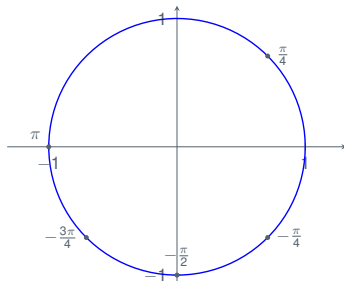


Trigonometriske funktioner

Eksempler

- ▶ Når I skal løse opgaver så tegn altid enhedscirklen og udnyt symmetri.
- ▶ Eksempler: Udregn

$$\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}, \quad \sin(9\pi) = \sin(\pi) = 0, \quad \sin\left(-\frac{5\pi}{4}\right)$$

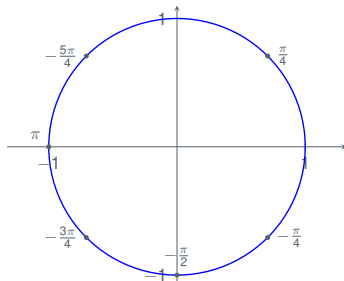


Trigonometriske funktioner

Eksempler

- ▶ Når I skal løse opgaver så tegn altid enhedscirklen og udnyt symmetri.
- ▶ Eksempler: Udregn

$$\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}, \quad \sin(9\pi) = \sin(\pi) = 0, \quad \sin\left(-\frac{5\pi}{4}\right)$$

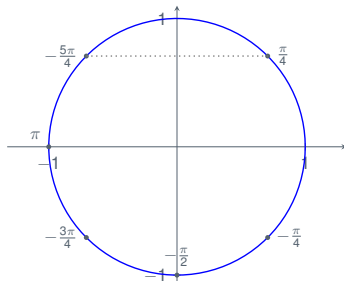


Trigonometriske funktioner

Eksempler

- Når I skal løse opgaver så tegn altid enhedscirklen og udnyt symmetri.
- Eksempler: Udregn

$$\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}, \quad \sin(9\pi) = \sin(\pi) = 0, \quad \sin\left(-\frac{5\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$



Opgaveregning!



AALBORG UNIVERSITY
DENMARK