Repetition af gymnasiematematik

eller:

Matematik man som minimum bør kende når man starter på universitetet

Udarbejdet til Brush-up i matematik på Aalborg Universitet i 2018.

af

Kasper Studsgaard Sørensen, Benjamin Buus Støttrup

Senest opdateret 25. marts 2021

Indhold

Introduktion

Dette notesæt er udarbejdet til Brush-up kurserne der afholdes inden studiestart på Aalborg universitet. I Brush-up kurserne gennemgås emner indenfor matematikken som det forventes at førsteårsstuderende på teknisk-naturvidenskabelige udannelser på Aalborg universitet mestre. Kurset er tiltænkt de kommende studerende der har haft et (eller flere) sabbatår, eller blot trænger til at få opfrisket deres gymnasiematematik. Hovedfokuset er på at få styr på færdighederne man burde have fået i gymnasiet. Derfor lægger dette notesæt primært vægt på at præsentere gældende regneregler, og vise illustrative eksempler. Der vil være minimal fokus på at bevise regneregler.

Brush-up kurset består typisk af 30 korte lektioner, et til hvert underafsnit i dette notesæt. En lektion består typisk af en kort gennemgang af lektionens emne samt regning af de tilhørende opgaver. Det er vigtigt at understrege at størstedelen af opgaverne er udarbejdet således at de kan løses ved at regne i hånden. Den eneste undtagelse er de opgaver, hvor der refereres til GeoGeobra. Til disse opgaver skal man følge linket til GeoGebra, hvor man finder et forlavet GeoGebra dokument. Alle andre opgaver bør løses uden brug af lommeregner o.l. elektroniske hjælpemiddler. *Har man ikke tænkt sig at regne i hånden kan man lige så godt lade være med at regne opgaverne!*. Bagerst i dette notesæt findes en liste med svar til opgaverne. Nogle af svarene er med uddybende forklaringer, og det er ikke alle spørgsmål som har entydige (præcis en) løsninger.

Dette notesæt sammensat af flere små noter (en for hver underafsnit), og alle disse noter blev udarbejdet til Brush-up kurset i sommeren 2018. Dette skete i forbindelse med en større revision af Brush-up kurset. Noterne er baseret på personlige forelæsningsnoter lavet af tidligere Brush-up kursusholder Emil Solsbæk Ottosen.

1. Formelsamling

Nedenfor findes en formelsamling der dækker de emner der gennemgås i dette dokument. Formålet med formelsamlingen er at gøre det nemmere for læseren at løse opgaverne uden at skulle bladre alt for meget i dokumentet. Formelsamnlingen er meget kompakt, og er derfor også velegnet til at udprinte og medbringe til skriftlige eksamener ol. hvor det er godt at have en hurtigt opslagsværk over de mest almindelige formler.

1.1 Brøker

Brøker er tal på formen

$$\frac{a}{b},$$

hvor a, b er tal samt $b \neq 0$. a er *tælleren* og b er *nævneren*.

1.1.1 Regneregler

Der gælder

$$\frac{a}{c} \pm \frac{b}{c} = \frac{a \pm b}{c}, \quad \frac{a}{b}\frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}, \quad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{ad}{bc},$$

$$a\frac{b}{c} = \frac{ab}{c}, \quad \frac{\frac{a}{b}}{c} = \frac{a}{bc}, \quad \frac{a}{\frac{b}{c}} = \frac{ac}{b}.$$

1.1.2 Forkorte/Forlænge Brøker

Fælles faktorer kan forkortes:

$$\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}$$

1.2 Potenser

Potenser er tal på formen x^a, x er *grundtallet* og a er *eksponenten*.

1.2.1 Regneregler

Der gælder

$$x^a x^b = x^{a+b}, \quad \frac{x^a}{x^b} = x^{a-b}, \quad (xy)^a = x^a y^a,$$

$$\left(\frac{x}{y}\right)^a = \frac{x^a}{y^a}, \quad (x^a)^b = x^{ab}, \quad x^{-a} = \frac{1}{x^a}.$$

1.3 Rødder

Hvis $x \geq 0$ og $n \in \mathbf{Z}_+$ så findes et tal $\sqrt[n]{x} > 0$ så

$$(\sqrt[n]{x})^n = x.$$

Bemærk at $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$.

1.3.1 Regneregler

Der gælder

$$\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}, \quad \sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{x})^m,$$

$$\sqrt[n]{xy} = \sqrt[n]{x}\sqrt[n]{y}, \qquad \sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}.$$

1.4 Kvadratsætninger

Der gælder

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$
$$(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$$
$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2.$$

1.5 Ligninger

Ligninger kan reduceres med følgende regler:

1. Man må lægge til/trække fra med det samme tal på begge sider af et lighedstegn.
2. Man må gange/dividere med det samme tal (undtagen 0) på begge sider af et lighedstegn.

1.5.1 Andengradsligninger

Andengradsligninger er på formen

$$ax^2 + bx + c = 0, \tag{1.1}$$

Løsningerne til (1.1) er

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

1.5.2 Faktorisering

Hvis $ax^2 + bx + c = 0$ har rødder r_1 og r_2 så gælder.

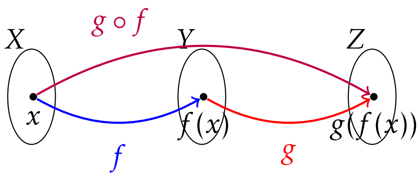
$$ax^2 + bx + c = a(x - r_1)(x - r_2).$$

1.6 Funktioner

En funktion $f\colon X \to Y$ tildeler alle $x \in X$ *præcis ét* element $f(x) \in Y$.

1.6.1 Sammensatte funktioner

Hvis $f\colon X \to Y$ og $g\colon Y \to Z$ defineres sammensætningen $g \circ f\colon X \to Z$ ved $(g \circ f)(x) = g(f(x))$. f er den *indre funktion*, g er den *ydre funktion*



1.6.2 Inverse funktioner

To funktioner $f\colon X \to Y$ og $g\colon Y \to X$ er hinandens *inverse* hvis

$$f(g(y)) = y, \quad \text{og} \quad g(f(x)) = x$$

for alle x i X og y i Y.

1.6.3 Polynomier

Et førstegradspolynomium har forskrift:

$$f(x) = ax + b.$$

Et andengradspolynomium har forskrift:

$$f(x) = ax^2 + bx + c.$$

1.6.4 Logaritmer og eksponentialfunktioner

Logaritmen med grundtal a, $\log_a\colon\,]0,\infty[\to \mathbf{R}$ er invers til eksponentialfunkionen $f_a(x) = a^x$ $(a > 0,\ a \neq 1)$. Der gælder at

$$\log_a(a^x) = x \quad \text{og} \quad a^{\log_a(y)} = y$$

og vi har

$$\ln x = \log_e x, \qquad \log x = \log_{10} x$$

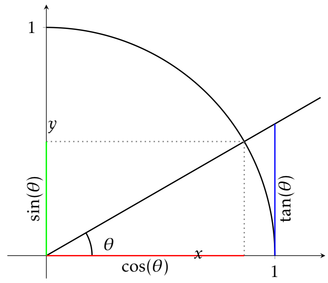
1.6.5 Regneregler

Der gælder

$$\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y),$$
$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y),$$
$$\log_a(x^r) = r\log_a(x).$$

1.7 Trigonometriske funktioner

De trigonometriske funkioner er defineret ud fra enhedscirklen:



Der gælder at $\tan(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}$ samt

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\theta$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	-

1.8 Differentialregning

Den afledede af f skrives som $f' = \frac{d}{dx}f = \frac{df}{dx}$.

1.8.1 Regneregler

Der gælder at

$f(x)$	$f'(x)$
c	0
x	1
x^n	nx^{n-1}
e^x	e^x
e^{cx}	ce^{cx}
a^x	$a^x \ln a$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\cos x$	$-\sin x$
$\sin x$	$\cos x$
$\tan x$	$1 + \tan^2(x)$

1.8.2 Generelle regneregler

Der gælder at

$$(cf)'(x) = cf'(x)$$
$$(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$$
$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$
$$\frac{d}{dx}f(g(x)) = f'(g(x))g'(x).$$

Den sidste regneregel kaldes *kædergeln*.

1.9 Ubestemte integraler

En funktion f har *stamfunktion* F hvis

$$F'(x) = f(x).$$

Det ubestemte integral af f er

$$\int f(x)\,dx = F(x) + k,$$

hvor $F'(x) = f(x)$ og $k \in \mathbf{R}$.

1.9.1 Generelle regneregler

$$\int cf(x)\,dx = c\int f(x)\,dx$$
$$\int f(x) \pm g(x)\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx.$$
$$\int f(x)g(x)\,dx = f(x)G(x) - \int f'(x)G(x)\,dx$$
$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = F(g(x)) + k.$$

Den 3. regel kaldes *delvis integration* og den sidste kaldes *integration ved substitution*.

1.9.2 Regneregler

Der gælder at

$f(x)$	$\int f(x)\,dx$
c	$cx + k$
x	$\frac{1}{2}x^2 + k$
x^n	$\frac{1}{n+1}x^{n+1} + k$
e^x	$e^x + k$
e^{cx}	$\frac{1}{c}e^{cx} + k$
$\frac{1}{x}$	$\ln(\lvert x\rvert) + k$
$\ln x$	$x\ln(x) - x + k$
$\cos x$	$\sin x + k$
$\sin x$	$-\cos x + k$
$\tan x$	$-\ln(\lvert\cos(x)\rvert) + k$

1.9.3 Integration ved substitution

Givet et integral på formen $\int f(g(x))g'(x)\,dx$ anvendes metoden:

1. Lad $u = g(x)$.
2. Udregn $\frac{du}{dx}$ og isoler dx.
3. Substituer $g(x)$ og dx.
4. Udregn integralet mht. u.
5. Substituer tilbage.

1.10 Besemte integraler

Det bestemte integral af f i intervallet $[a,b]$ til

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a),$$

hvor F er en stamfunktion til f.

1.10.1 Generelle regneregler

$$\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx$$
$$\int_a^b f(x) \pm g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$$
$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = [f(x)G(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)G(x)\,dx$$
$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = [F(x)]_{g(a)}^{g(b)}.$$

1.10.2 Integration ved substitution

Givet et integral på formen $\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx$ anvendes metoden

1. Lad $u = g(x)$.
2. Udregn $\frac{du}{dx}$ og isoler dx.
3. Substituer $g(x)$, dx samt grænser.
4. Udregn integralet mht. u.

1.11 Differentialligninger

1.11.1 Løsningsformler

Differentiallign.	Fuldstændig løsn.
$f'(x) = k$	$f(x) = kx + c$
$f'(x) = h(x)$	$f(x) = \int h(x)\,dx$
$f'(x) = kf(x)$	$f(x) = ce^{kx}$
$f'(x) + af(x) = b$	$f(x) = \frac{b}{a} + ce^{-ax}$

1.11.2 Panzerformlen

Differentialligningen

$$f'(x) + a(x)f(x) = b(x)$$

har fuldstændig løsning

$$f(x) = e^{-A(x)}\int b(x)e^{A(x)}dx + ce^{-A(x)},$$

hvor $A'(x) = a(x)$.

1.12 Vektorer i planen

En vektor $\vec{u}$ i planen skrives som $\vec{u} = [x,y]$ hvor $x,y \in \mathbf{R}$.

1.12.1 Regneregler

For $\vec{u} = [x_1,y_1]$, $\vec{v} = [x_2,y_2]$, $c \in \mathbf{R}$ er

$$\vec{u} \pm \vec{v} = \begin{bmatrix} x_1 \pm x_2 \\ y_1 \pm y_2 \end{bmatrix}, \qquad \vec{u}\cdot\vec{v} = x_1x_2 + y_1y_2,$$
$$c\vec{u} = \begin{bmatrix} cx_1 \\ cy_1 \end{bmatrix}, \quad \det(\vec{u},\vec{v}) = x_1y_2 - x_2y_1$$

Længden af $\vec{u}$ er $\|\vec{u}\| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$.

1.12.2 Vinklen mellem to vektorer

For vinklen θ mellem $\vec{u}$, $\vec{v}$ er

$$\cos\theta = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|}, \quad \sin\theta = \frac{\det(\vec{u},\vec{v})}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|}$$

Yderligere gælder

1. $\vec{u}$ og $\vec{v}$ er ortogonale $\Leftrightarrow \vec{u}\cdot\vec{v} = 0$.
2. $\vec{u}$ og $\vec{v}$ er parallelle $\Leftrightarrow \det(\vec{u},\vec{v}) = 0$.

1.13 Vektorer i rummet

En vektor $\vec{u}$ i rummet skrives som $\vec{u} = [x,y,z]$ hvor $x,y,z \in \mathbf{R}$.

1.13.1 Regneregler

For $\vec{u} = [x_1,y_1,z_1]$, $\vec{v} = [x_2,y_2,z_2]$ og $c \in \mathbf{R}$ gælder

$$\vec{u} \pm \vec{v} = \begin{bmatrix} x_1 \pm x_2 \\ y_1 \pm y_2 \\ z_1 \pm z_2 \end{bmatrix}, \qquad c\vec{u} = \begin{bmatrix} cx_1 \\ cy_1 \\ cz_1 \end{bmatrix},$$
$$\vec{u}\cdot\vec{v} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.$$

Længden af $\vec{u}$ er $\|\vec{u}\| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$. Krydsprocuktet er givet ved

$$\vec{u}\times\vec{v} = \begin{bmatrix} y_1z_2 - z_1y_2 \\ z_1x_2 - x_1z_2 \\ x_1y_2 - y_1x_2 \end{bmatrix}$$

1.13.2 Vinklen mellem to vektorer

For vinklen θ mellem $\vec{u}$ og $\vec{v}$ gælder

$$\cos\theta = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|}, \quad \sin\theta = \frac{\|\vec{u}\times\vec{v}\|}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|}$$

Yderligere gælder

1. $\vec{u}$ og $\vec{v}$ er ortogonale $\Leftrightarrow \vec{u}\cdot\vec{v} = 0$.
2. $\vec{u}$ og $\vec{v}$ er parallelle $\Leftrightarrow \vec{u}\times\vec{v} = 0$.

1.14 Linjer og Planer

Planen/linjen gennem punktet med stedvektor $\vec{x}_0$ med normalvektor $\vec{n}$ beskrives ved alle vektorer $\vec{x}$ der løser ligningen

$$\vec{n}\cdot(\vec{x} - \vec{x}_0) = 0$$

En linje i rummet/planen gennem punktet med stedvektor $\vec{x}_0$ og retning $\vec{r}$ har parameterfremstilling

$$\vec{x}_0 + t\vec{r}, \quad t \in \mathbf{R}.$$