Déterminant

Delhomme Fabien

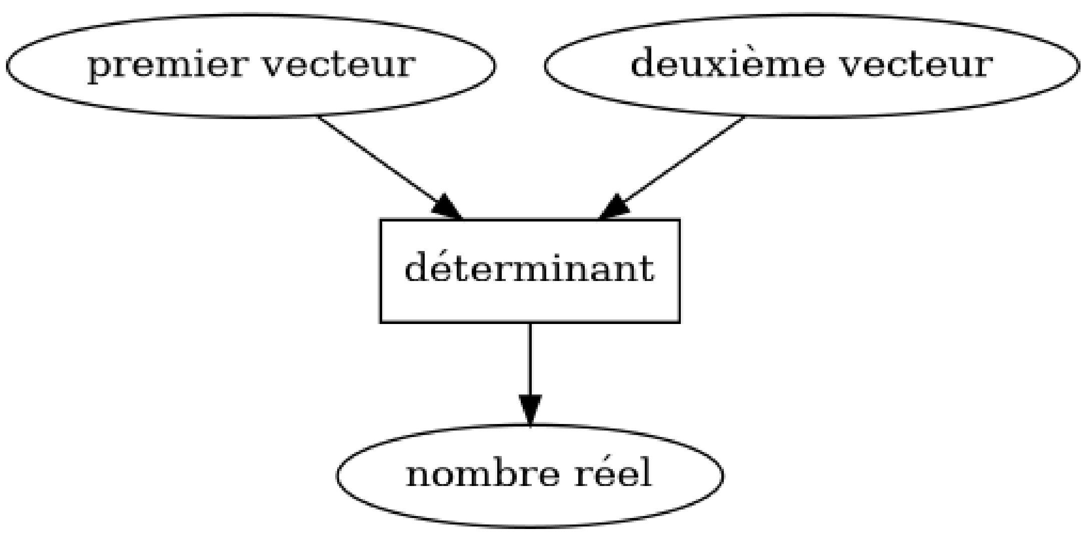
4 novembre 2021

Table des matières

I Définition

Nous allons donner la définition, ainsi que les propriétés du déterminant, *sans* donner sa manière de la calculer ! Nous verrons dans la deuxième partie comment calculer cette application si pratique.

Le déterminant prend deux vecteurs et renvoi un nombre.



Mathématiquement, on le note comme il suit :

Déterminant, la notation

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs. On pose alors $\det(\vec{u}, \vec{v})$ le **déterminant** des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, qui est un nombre réel (c'est à dire, négatif, nul, ou positif).

Le déterminant est une application qui permet de **détecter** les vecteurs qui sont **colinéaires**.

Proposition

Si $\det(\vec{u},\vec{v}) = 0$, alors les deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires. Inversement, si $\vec{v}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires, alors $\det(\vec{u},\vec{v}) = 0$

Le déterminant a bien d'autres propriétés.

Proposition

Avec deux vecteurs, on dit qu'il est **bilinéaire**, c'est à dire que par exemple :

$$\det(k\vec{u},\vec{v}) = k\det(\vec{u},\vec{v})$$

avec $\vec{u}$, $\vec{v}$ deux vecteurs, et k un nombre réel.

La proposition précédente permet parfois de simplifier les calculs.

Proposition

On peut voir aussi que :

$$\det(\vec{u},\vec{v}) = -\det(\vec{v},\vec{u})$$

Autrement dit, ça changer l'ordre des vecteurs ne change pas trop le calcul du déterminant,à part le signe. C'est pas très grave, car on va seulement regarder si le déterminant est nul. Et dans ce cas, dans les deux sens, (puisque $0 = -0$) on obtient heureusement la même conclusion.

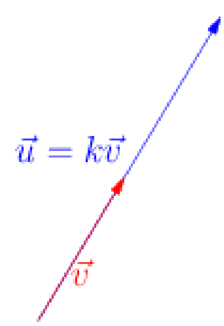
I.1 **TODO** Exemple de calcul simplifié

II Mais quel calcul permet de nous donner ce coefficient ?!

Dans cette partie, on fixe deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de cordonnées respectives $\vec{u} = (x, y)$ et $\vec{v} = (z, w)$, dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ orthonormé.

On cherche un calcul qui permette de détecter, uniquement à partir des coordonnées de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, si ces vecteurs sont colinéaires.

Imaginons qu'il soit colinéaires. Alors, cela signifie qu'il existe un scalaire k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$.



Autrement dit, on sait que $x = kz$ et $y = kw$. Si on suppose qu'aucune cordonnées sont nulles (c'est à dire ni x, y, z, et w ne sont des nombres nuls.), alors on peut dire que $\frac{x}{z} = k = \frac{y}{w}$. Donc :

$$\frac{x}{z} = \frac{y}{w}$$

Pratique, mais cette formule ne marche pas si z ou w sont nuls. On aurait pu inverser chaque formule, mais là encore il faudrait que x et y sont différents de 0. À la place de ça, on va multiplier la formule précédente par z et w. On obtient :

$$x \times w = z \times y$$

Si ces deux quantités sont égales, c'est que leur différence est nulle ! Donc la formule qui peut détecter si deux vecteurs sont colinéaires pourrait être :

$$\det(\vec{u},\vec{v}) = x \times w - z \times y$$

Ce qui est exactement la définition que l'on va retenir pour le déterminant. On peut vérifier que cette formule a exactement les propriétés que l'on a donné plus haut, et quelle fonctionne même si les coordonnées sont nulles.

II.1 **TODO** Exemples

III Une autre interprétation du déterminant.

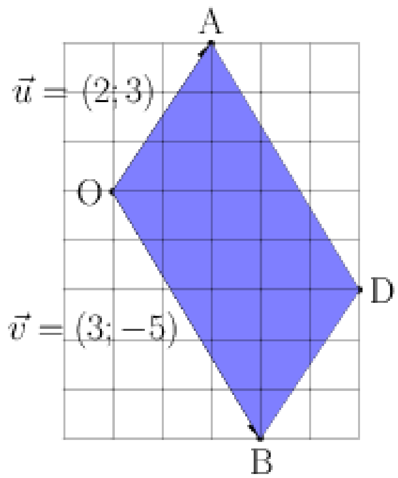
S'il y a bien quelque chose à retenir du déterminant, la voici :

Proposition

Le déterminant : c'est de la magie.

Quelques explications s'imposent.

Lorsque l'on se donne deux vecteurs dans le plan, comme les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans l'image ci contre :



On peut alors former un parallélogramme, en remarquant que $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{BD} = \vec{u}$, mais aussi $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BD} = \vec{v}$, donc que $\overrightarrow{OD} = \vec{u} + \vec{v}$.

On peut se demander comment **calculer l'aire** du parallélogramme $OADB$. Et bien, voici comment on peut faire :

Proposition

Soit un parallélogramme dont les cotés sont donnés par deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ du plan.

Alors :

$$|\det(\vec{u}, \vec{v})| = \text{Aire du parallélogramme}(OADB)$$

III.1 Exemple

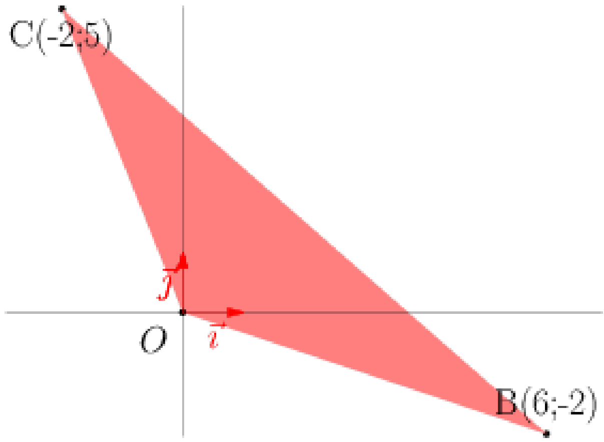
Si on a, comme sur le dessin, $\vec{u} = (2; 3)$ et $\vec{v} = (3; -5)$, alors l'aire du parallélogramme est donnée par :

$$|\det(\vec{u}, \vec{v})| = |2 \times (-5) - 3 \times 3| = |-10 - 9| = |-19| = 19$$

Donc, si on considère que $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1$ cm, autrement dit, si les carreaux sur la grille font 1cm de coté, alors on peut en conclure que le déterminant du parallélogramme $OADB$ est de 19cm^2 (ou dit autrement que l'aire du parallélogramme fait exactement 19 carreaux).

III.2 Exercice

Calculer l'aire du **triangle** OBC ci-dessous.



Indice chez vous : Ce triangle a comme aire exactement la moitié qu'un parallélogramme. Pourriez-vous trouver lequel ?

III.3 Pourquoi une valeur absolue ?

Dans la formule précédente, on voit apparaître une valeur absolue. C'est parce que le déterminant peut être négatif, alors qu'une aire non. En fait, le déterminant va compter une aire négative lorsque l'on lui donne des vecteurs dans le sens horaire.

III.4 Mais ça marche tout le temps ?

Oui. Même dans des dimensions supérieures (dans le plan, dans l'espace, et vers l'infini et l'au delà).

III.5 Que se passe-t-il lorsque les vecteurs sont colinéaires ?

Réfléchissons un peu. Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires s'ils peuvent être placés sur un même droite. Mais alors, le parallélogramme formé est plat. Donc son aire est... Nulle ! On retrouve la proposition :

Proposition

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$$

Comme les choses sont bien faites !