Déterminant

Delhomme Fabien

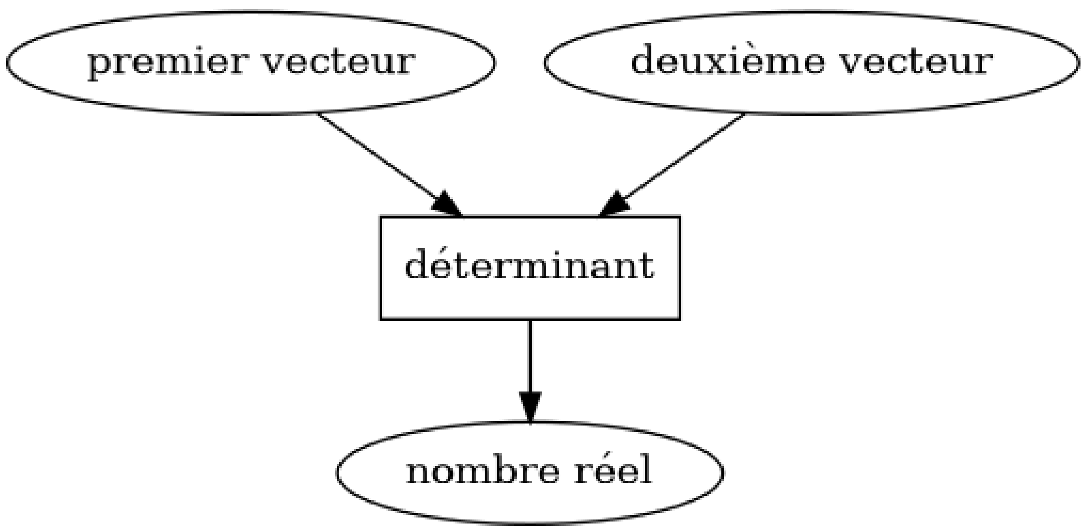
2 novembre 2021

Table des matières

I Définition

Nous allons donner la définition, ainsi que les propriétés du déterminant, *sans* donner sa manière de la calculer ! Nous verrons dans la deuxième partie comment calculer cette application si pratique.

Le déterminant prend deux vecteurs et renvoi un nombre.



Mathématiquement, on le note comme il suit :

Déterminant, la notation

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs. On pose alors $\det(\vec{u}, \vec{v})$ le **déterminant** des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, qui est un nombre réel (c'est à dire, négatif, nul, ou positif).

Le déterminant est une application qui permet de **détecter** les vecteurs qui sont **colinéaires**.

Proposition

Si $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$, alors les deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires. Inversement, si $\vec{v}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires, alors $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$

Le déterminant a bien d'autres propriétés.

Proposition

Avec deux vecteurs, on dit qu'il est **bilinéaire**, c'est à dire que par exemple :

$$\det(k\vec{u}, \vec{v}) = k\det(\vec{u}, \vec{v})$$

avec $\vec{u}$, $\vec{v}$ deux vecteurs, et k un nombre réel.

La proposition précédence permet parfois de simplifier les calculs.

Proposition

On peut voir aussi que :

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = -\det(\vec{v}, \vec{u})$$

Autrement dit, ça changer l'ordre des vecteurs ne change pas trop le calcul du déterminant,à part le signe. C'est pas très grave, car on va seulement regarder si le déterminant est nul. Et dans ce cas, dans les deux sens, (puisque $0 = -0$) on obtient heureusement la même conclusion.

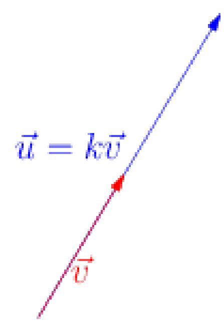
I.1 TODO Exemple de calcul simplifié

II Mais quel calcul permet de nous donner ce coefficient ?!

Dans cette partie, on fixe deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de cordonnées respectives $\vec{u} = (x, y)$ et $\vec{v} = (z, w)$, dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ orthonormé.

On cherche un calcul qui permette de détecter, uniquement à partir des coordonnées de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, si ces vecteurs sont colinéaires.

Imaginons qu'il soit colinéaires. Alors, cela signifie qu'il existe un scalaire k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$.



Autrement dit, on sait que $x = kz$ et $y = kw$. Si on suppose qu'aucune cordonnées sont nulles (c'est à dire ni x, y, z, et w ne sont des nombres nuls.), alors on peut dire que $\frac{x}{z} = k = \frac{y}{w}$. Donc :

$$\frac{x}{z} = \frac{y}{w}$$

Pratique, mais cette formule ne marche pas si z ou w sont nuls. On aurait pu inverser chaque formule, mais là encore il faudrait que x et y sont différents de 0. À la place de ça, on va multiplier la formule précédente par z et w. On obtient :

$$x \times w = z \times y$$

Si ces deux quantités sont égales, c'est que leur différence est nulle ! Donc la formule qui peut détecter si deux vecteurs sont colinéaires pourrait être :

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = x \times w - z \times y$$

Ce qui est exactement la définition que l'on va retenir pour le déterminant. On peut vérifier que cette formule a exactement les propriétés que l'on a donné plus haut, et quelle fonctionne même si les coordonnées sont nulles.

II.1 TODO Exemples