

# Cours Probabilités Conditionnelles

Delhomme Fabien

12 novembre 2021

## Table des matières

<b>I Les probabilités conditionnelles</b>	<b>1</b>
I.1 Définitions . . . . .	1
I.2 Formule de Bayes . . . . .	2
I.3 Formule des probabilités totales . . . . .	2
I.4 Exemples pour bien comprendre . . . . .	2
I.4.1 Des dés cachottiers . . . . .	2
I.4.2 Qui porte des lunettes ? . . . . .	3

## I Les probabilités conditionnelles

### I.1 Définitions

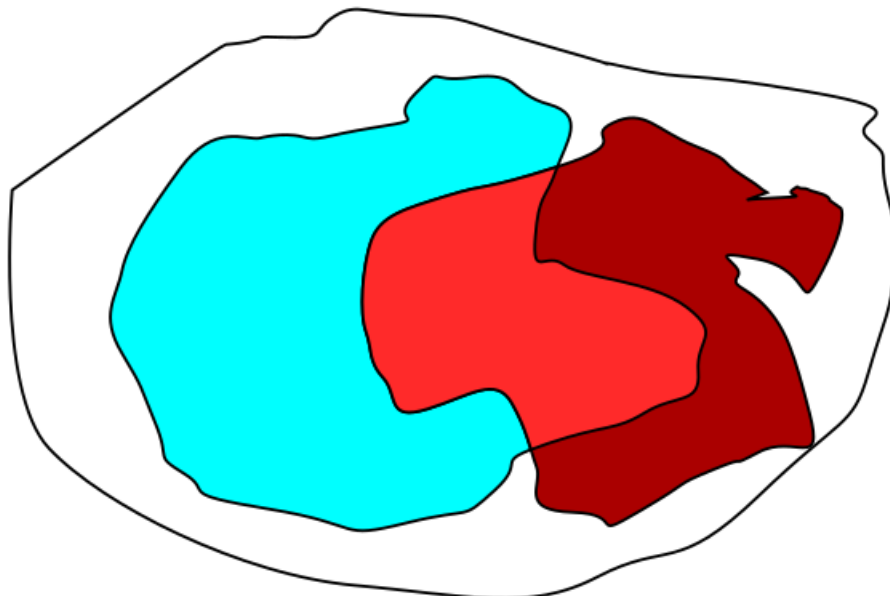


#### Probabilités conditionnelles

Soit  $A$  et  $B$  deux événements, avec  $B$  un événement de probabilité non nulle. Alors, on définit  $\mathbb{P}_B(A)$  par :

$$\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

D'où vient cette définition ? Et bien, du dessin suivant. Rappelez-vous que, dans ces dessins, la probabilité de chaque événement est donnée par **l'aire** des patates qui les représentent.



Sur cette image,  $\mathbb{P}_B(A)$  calcule la proportion qu'occupe l'intersection des deux événements, par rapport à l'événement  $A$ .



### Proposition

Cette formule ne fonctionne pas si  $\mathbb{P}(B)$  est nul

En effet, dans ce cas, on effectue une division par 0, ce qui n'a pas de sens.

## I.2 Formule de Bayes

C'est l'une des formules les plus puissantes qui existe. Elle est utile dans énormément de domaines différents.



### Proposition

Soit  $A$  et  $B$  deux événements, de probabilités non nulles (pour les deux). Alors :

$$\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}_A(B) \times \mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}$$

Cette formule permet **d'échanger** d'une certaine manière les rôles de  $A$  et  $B$ , c'est-à-dire qu'elle donne un moyen de calculer  $\mathbb{P}_B(A)$  à partir de  $\mathbb{P}_A(B)$ , et vice versa.

## I.3 Formule des probabilités totales

Cette formule forme un combo avec la précédente.



### Proposition

Soit  $A$  un événement, et  $B$  un événement de probabilité non nulle. Alors, si on note  $\bar{B}$  l'événement contraire à  $B$  on a :

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}_B(A) + \mathbb{P}(\bar{B})\mathbb{P}_{\bar{B}}(A)$$

Autrement dit, on dissectionne l'événement  $A$  selon  $B$  ou selon  $\bar{B}$ .

## I.4 Exemples pour bien comprendre

La formule de Bayes peut s'appliquer dans de très très nombreux exemples. En voici quelques uns.

### I.4.1 Des dés cachottiers

#### 1. Énoncé

Charlie a deux dés de 6 faces avec lui. Mais ses dés sont spéciaux. Voici les faces du premier dé :

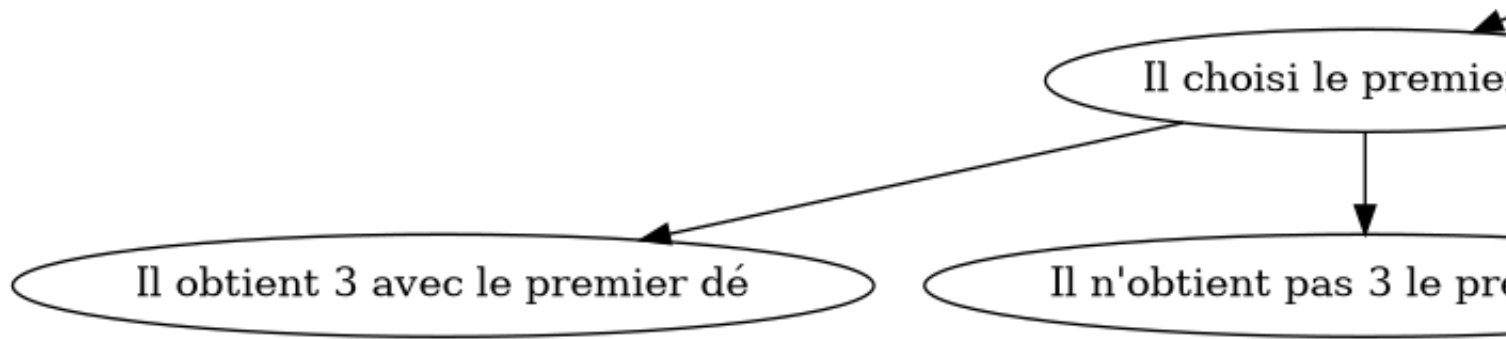
$$\{1; 1; 1; 2; 2; 3\}$$

Voici les faces du deuxième dé :

$$\{1; 1; 2; 2; 3; 3\}$$

Charlie prend un dé au hasard. Chaque dé a autant de chances d'être pris. Il lance le dé qu'il a pris, et obtient le nombre 3. Quelle est la probabilité qu'il ait pris le premier dé ?

#### 2. Correction



desCachotiers On note :

$A =$  «Charlie a pris le premier dé»

et

$B =$  «Charlie obtient le nombre 3 »

On cherche à calculer le nombre  $\mathbb{P}(A)$ .

Dans cet exemples, on a cette correspondance :

Symbolisme mathématiques	Traduction française dans cet exemple
$\mathbb{P}_B(A)$	La probabilité d'avoir choisi le premier dé sachant que l'on a obtenu 3
$\mathbb{P}_A(B)$	La probabilité d'obtenir 3 sachant que l'on a choisi le premier dé
$P(B)$	La probabilité d'obtenir 3 quelque soit le dé considéré
$P(A)$	La probabilité que Charlie ait pris le premier dé
$\mathbb{P}(A \cap B)$	La probabilité que Charlie ait pris le premier dé et d'obtenir 3

On peut calculer facilement le terme  $\mathbb{P}_A(B)$ . Si on *imagine* qu'il a pris le premier dé, alors il a une seule chance sur six d'obtenir 3. Donc :

$$\mathbb{P}_A(B) = \frac{1}{6}$$

On peut donc utiliser la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}_B(A) + \mathbb{P}(\bar{B})\mathbb{P}_{\bar{B}}(A)$$

Il nous faut donc calculer  $\mathbb{P}(B)$ , et  $\mathbb{P}_B(A)$ .

### I.4.2 Qui porte des lunettes ?

On considère une classe de 17 élèves. On compte parmi eux :

- 8 filles, et 9 garçons
- 12 personnes qui portent des lunettes, dont 5 qui sont des filles.

On a donc le tableau suivant .

	lunettes	pas lunettes	total
garçons	7	2	9
filles	5	3	8
total	12	5	17