Factorisation et Developpement

Delhomme Fabien

27 septembre 2021

I Reconnaître une forme factorisée et une forme développée

Certains calculs sont sous forme factorisée.

Exemple
L'expression :

$$(x+7)\times(x-4)$$

est sous forme factorisée

Exemple
L'expression :

$$x^2+3x$$

n'est pas factorisée, puisque on peut encore trouver des facteurs communs aux différents termes. Cette expression est sous forme développé car il n'y a que des produit de termes simples

Exemple
L'expression :

$$x(x+1)+1$$

N'est ni sous forme factorisée (car le terme 1 n'est pas dans un produit) ni sous forme développée (car il existe le terme $x(x+1)$ qui peut encore être développé

II Développer

Développement

On appelle développement le processus qui permet de passer d'une forme développer à une forme factorisée.

Exemple

$$x\times(x+5)=x^2+5x$$

II.1 Techniques pour développer un produit de deux facteurs

On peut faire appel à un tableau.
Si on veut développer le produit suivant :

$$(x-4)\times(x+3)$$

on peut utiliser le tableau suivant :

×	x	3
x	x^2	3x
-4	-4x	-12

Puis faire la somme de tous les termes du tableau :

$$(x-4)\times(x+3) = x^2+3x-4x-12 = x^2-x-12$$

III Factoriser

On appelle la factorisation le processus qui permet de passer d'une forme développée à une forme factorisée

III.1 Identités remarquables

Les identités remarquables servent à reconnaitres des expressions pour développer ou factoriser. Il faut donc les connaître dans les deux sens (de gauche à droite du signe égal, mais également de droite à gauche).

III.1.1 Première identité

Proposition

Pour tout nombres réels a et b, on a l'égalité suivante

$$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$$

Demonstration

Version graphique

Version littérale

On développe le carré par :

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= (a+b)\times(a+b)\\ &= a\times(a+b)+b\times(a+b)\\ &= a\times a+a\times b+b\times a+b\times b\\ &= a^2+ab+ba+b^2\\ &= a^2+2a\times b+b^2\end{aligned}$$

En on trouve bien l'égalité annoncée

III.1.2 Deuxième identité

En partant de la première identité, on peut en déduire la deuxième facilement.

Proposition

Pour tout nombre réel a, b, on a :

$$(a-b)^2 = a^2-2a\times b+b^2$$

Demonstration

Pour montrer cette identité, on peut soit redévelopper comme cela a été fait à la démonstration précédente, soit, puisque l'identité précédente est valable pour tous les nombres a, et b, on peut *remplacer* b par $-b$ pour obtenir :

$$(a+(-b)) = a^2+2\times a\times(-b)+(-b)^2$$

Sauf que $(-b)^2 = b^2$, donc on obtient

$$(a-b) = a^2-2\times a\times b+b^2$$

Exemple

On peut par exemple calculer 98^2 en remarquant que $98 = 100 - 2$, et donc :

$$98^2 = (100-2)^2 = 100^2 - 2 \ \times 100 \times 2 + 2^2$$

Finalement :

$$98^2 = 10000 - 400 + 4 = 9604$$

III.1.3 Troisième identité

La troisième identité est bien différente des deux autres.

Proposition

Pour tout a et b réel, on a l'égalité suivante :

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

Demonstration

On démontre cette égalité à l'aide d'un développement comme pour la première identité

$$\begin{aligned}(a+b)(a-b) &= a \times (a-b) + b \times (a-b) \\ &= a \times a - a \times b + b \times a - b \times b \\ &= a^2 - b^2\end{aligned}$$

Qu'obtient-on lorsque l'on remplace b par $-b$, quelle nouvelle identité découvre-t-on ?

IV Applications théoriques : résolution d'équations

Les identités remarquables permettent de résoudre des équations sans faire d'erreur. Regardons précisemment l'équations :

$$x^2 = 49$$

On sait déjà qu'une solution est donnée par $x = 7$, puisque le carré de 7 fait 49. Mais est-ce la seule solution ?

On va utiliser une identité remarquable pour le savoir.

Méthode

On soustrait 49 à chaque membre de l'équation, pour obtenir la nouvelle équation (équivalente à la première) suivante :
$x^2 - 49 = 0$

On peut remplacer 49 par 7^2, pour obtenir :

$$x^2 - 7^2 = 0$$

On peut utiliser l'identité remarquable $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$, avec $a = x$ et $b = 7$, on obtient donc :
$(x-7)(x+7) = 0$

Puis, si un produit est nul, c'est que l'un de ses facteurs est nul, donc soit x vaut 7 (on retrouve une solution vue précédemment), soit x vaut -7 (et c'est souvent l'equation que l'on oublie !)

V Applications concrètes : calculer mentalement des carrés

Si on considère le calcul de 204^2, on peut utiliser la relation suivante :

$$\begin{aligned}
204^2 &= (200+4)^2 \\
&= 200^2 + 2 \times 200 \times 4 + 4^2 \\
&= 40000 + 1600 + 16 \\
&= 41616
\end{aligned}$$

VI Application concrete et théorique : extraction d'une racine carré

Méthode

On vient de voir par exemple que $\sqrt{41616} = 204$. Peut-on calculer à la main les premieres décimales de $\sqrt{41617}$?

On sait que $\sqrt{41617} \approx 204$. Que doit-on rajouter à 204 pour s'approcher le plus possible de $\sqrt{41617}$?

On pose h le nombre tel que

$$\sqrt{41617} = 204 + h$$

On obtient donc

$$\begin{aligned}
41617 &= (204+h)^2 \\
&= 204^2 + 2 \times 204 \times h + h^2 \\
&= 41616 + 408 \times h + h^2
\end{aligned}$$

Le terme h^2 devrait être très très petit, donc on va à partir de maintenant considérer qu'il est nul (alors qu'il ne l'est pas ! Mais on cherche une approximation !)

On se retrouve ainsi avec l'expression :

$$1 = 408 \times h$$

Donc, si on considère que h^2 est négligeable car très petit, on obtient finalement $h = \frac{1}{408}$. Il vient :

$$\sqrt{41617} \approx 204 + \frac{1}{408}$$