

Factorisation et Developpement

Delhomme Fabien

6 octobre 2021

I Reconnaître une forme factorisée et une forme développée

Certains calculs sont sous forme factorisée.



Exemple

L'expression :

$$(x + 7) \times (x - 4)$$

est sous forme factorisée



Exemple

L'expression :

$$x^2 + 3x$$

n'est pas factorisée, puisque on peut encore trouver des facteurs communs aux différents termes. Cette expression est sous forme développée car il n'y a que des produit de termes simples



Exemple

L'expression :

$$x(x + 1) + 1$$

N'est ni sous forme factorisée (car le terme 1 n'est pas dans un produit) ni sous forme développée (car il existe le terme $x(x + 1)$ qui peut encore être développé

II Développer

`#+begin_def{Développement}` On appelle développement le processus qui permet de passer d'une forme développer à une forme factorisée. `#+end_def`



Exemple

$$x \times (x + 5) = x^2 + 5x$$

II.1 Techniques pour développer un produit de deux facteurs

On peut faire appel à un tableau.

Si on veut développer le produit suivant :

$$(x - 4) \times (x + 3)$$

on peut utiliser le tableau suivant :

×	x	3
x	x ²	3x
-4	-4x	-12

Puis faire la somme de tous les termes du tableau :

$$(x - 4) \times (x + 3) = x^2 + 3x - 4x - 12 = x^2 - x - 12$$

III Factoriser

On appelle la factorisation le processus qui permet de passer d'une forme développée à une forme factorisée

III.1 Identités remarquables

Les identités remarquables servent à reconnaître des expressions pour développer ou factoriser. Il faut donc les connaître dans les deux sens (de gauche à droite du signe égal, mais également de droite à gauche).

III.1.1 Première identité



Proposition

Pour tout nombres réels a et b , on a l'égalité suivante

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$



Démonstration

Version graphique

Version littérale

On développe le carré par :

$$\begin{aligned}
 (a + b)^2 &= (a + b) \times (a + b) \\
 &= a \times (a + b) + b \times (a + b) \\
 &= a \times a + a \times b + b \times a + b \times b \\
 &= a^2 + ab + ba + b^2 \\
 &= a^2 + 2a \times b + b^2
 \end{aligned}$$

En on trouve bien l'égalité annoncée

III.1.2 Deuxième identité

En partant de la première identité, on peut en déduire la deuxième facilement.



Proposition

Pour tout nombre réel a , b , on a :

$$(a - b)^2 = a^2 - 2a \times b + b^2$$



Démonstration

Pour montrer cette identité, on peut soit redévelopper comme cela a été fait à la démonstration précédente, soit, puisque l'identité précédente est valable pour tous les nombres a , et b , on peut *remplacer* b par $-b$ pour obtenir :

$$(a + (-b))^2 = a^2 + 2 \times a \times (-b) + (-b)^2$$

Sauf que $(-b)^2 = b^2$, donc on obtient

$$(a - b)^2 = a^2 - 2 \times a \times b + b^2$$

Exemple

On peut par exemple calculer 98^2 en remarquant que $98 = 100 - 2$, et donc :

$$98^2 = (100 - 2)^2 = 100^2 - 2 \times 100 \times 2 + 2^2$$

Finalement :

$$98^2 = 10000 - 400 + 4 = 9604$$

III.1.3 Troisième identité

La troisième identité est bien différente des deux autres.

Proposition

Pour tout a et b réel, on a l'égalité suivante :

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

Démonstration

On démontre cette égalité à l'aide d'un développement comme pour la première identité

$$\begin{aligned}(a + b)(a - b) &= a \times (a - b) + b \times (a - b) \\ &= a \times a - a \times b + b \times a - b \times b \\ &= a^2 - b^2\end{aligned}$$



Qu'obtient-on lorsque l'on remplace b par $-b$, quelle nouvelle identité découvre-t-on ?

IV Applications théoriques : résolution d'équations

Les identités remarquables permettent de résoudre des équations sans faire d'erreur. Regardons précisément l'équation :

$$x^2 = 49$$

On sait déjà qu'une solution est donnée par $x = 7$, puisque le carré de 7 fait 49. Mais est-ce la seule solution ?

On va utiliser une identité remarquable pour le savoir.

Méthode

On soustrait 49 à chaque membre de l'équation, pour obtenir la nouvelle équation (équivalente à la première) suivante :

$$x^2 - 49 = 0$$

On peut remplacer 49 par 7^2 , pour obtenir :

$$x^2 - 7^2 = 0$$

On peut utiliser l'identité remarquable $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$, avec $a = x$ et $b = 7$, on obtient donc :

$$(x - 7)(x + 7) = 0$$

Puis, si un produit est nul, c'est que l'un de ses facteurs est nul, donc soit x vaut 7 (on retrouve une solution vue précédemment), soit x vaut -7 (et c'est souvent l'équation que l'on oublie !)

V Applications concrètes : calculer mentalement des carrés

Si on considère le calcul de 204^2 , on peut utiliser la relation suivante :

$$\begin{aligned}204^2 &= (200 + 4)^2 \\&= 200^2 + 2 \times 200 \times 4 + 4^2 \\&= 40000 + 1600 + 16 \\&= 41616\end{aligned}$$

VI Application concrete et théorique : extraction d'une racine carré



Méthode

On vient de voir par exemple que $\sqrt{41616} = 204$. Peut-on calculer à la main les premières décimales de $\sqrt{41617}$?

On sait que $\sqrt{41617} \approx 204$. Que doit-on rajouter à 204 pour s'approcher le plus possible de $\sqrt{41617}$?

On pose h le nombre tel que

$$\sqrt{41617} = 204 + h$$

On obtient donc

$$\begin{aligned}41617 &= (204 + h)^2 \\&= 204^2 + 2 \times 204 \times h + h^2 \\&= 41616 + 408 \times h + h^2\end{aligned}$$

Le terme h^2 devrait être très très petit, donc on va à partir de maintenant considérer qu'il est nul (alors qu'il ne l'est pas ! Mais on cherche une approximation !)

On se retrouve ainsi avec l'expression :

$$1 = 408 \times h$$

Donc, si on considère que h^2 est négligeable car très petit, on obtient finalement $h = \frac{1}{408}$. Il vient :

$$\sqrt{41617} \approx 204 + \frac{1}{408}$$