Vecteur, deuxième partie

Delhomme Fabien

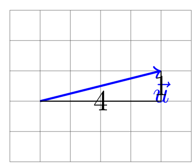
29 septembre 2021

I Coordonnées d'un vecteur dans un repère orthonormé

I.1 Définition

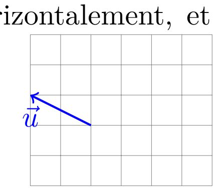
Coordonées d'un vecteur

Soit $\vec{u}$ un vecteur, et on considère un repère orthonormé du plan. Alors, le vecteur $\vec{u}$ admet des coordonnées qui le décrivent.



Exemple

Les coordonnées $(3;4)$ désigne un vecteur qui déplace de 3 horizontalement, et de 4 verticalement. Les coordonnées peuvent aussi être négatives, voici par exemple le vecteur $(-2;1)$.



Coordonées du vecteur nul

Les coordonnées nulles, c'est-à-dire $(0;0)$ désignent le vecteur nul, noté $\vec{0}$.

I.2 Coordonnées d'un vecteur définit par deux points du plan

À partir de deux points, A et B, on peut définir le vecteur qui «emmène» le point A vers le point B, et on le note $\overrightarrow{AB}$. À partir des coordonnées de A et de celle de B, on peut en déduire les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Proposition

Si A et B admettent les coordonnées (x_A, y_A), (x_B, y_B), alors le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées :

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A)$$

Exemple

Si $A(3;4)$ et $B(-2;-3)$ alors le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées

$$\overrightarrow{AB} = (-2-3; -3-4) = (-5; -7)$$

Donc pour se rendre de A vers B, il faut se déplacer de 5 horizontalement (vers la gauche, puisque la première coordonnée de $\overrightarrow{AB}$ est -5), et de 7 verticalement (vers le bas).

I.3 Opérations sur les vecteurs, et coordonnées

I.3.1 Coordonnées d'une somme de vecteurs

Proposition

Si on considère deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de coordonnée $(x; y)$ et $(w; z)$, alors si on note $\vec{z} = \vec{u} + \vec{v}$, le vecteur $\vec{z}$ a pour coordonnées :

$$\vec{z} = (x + w; y + z)$$

Exemple

Si $\vec{u} = (-3; 4)$ et $\vec{v} = (2; 5)$ alors $\vec{u} + \vec{v} = (-1; 9)$

I.3.2 Multiplication d'un vecteur par un scalaire

Si $\vec{u}$ est un vecteur, alors $2\vec{u}$, $3\vec{u}$, $\sqrt{2}\vec{u}$, etc, sont aussi des vecteurs. On peut multiplier un vecteur par n'importe quel nombre réel k, et on notera l'opération $k\vec{u}$

Proposition

Soit $\vec{u}$ un vecteur, de coordonnées $(x; y)$. Alors, le vecteur $k\vec{u}$ a pour coordonnées

$$k\vec{u} = (kx; ky)$$

Exemple

Si $\vec{u} = (-3; 5)$, alors $-2\vec{u} = (6; -10)$

I.3.3 Produit scalaire de deux vecteurs

Nous verrons plus tard à quoi sert le produit scalaire $(\vec{u}, \vec{v})$ de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, mais en quelques mots, le produit scalaire permet d'avoir une idée de l'angle qu'il y a entre deux vecteurs. Le produit scalaire est simple à calculer si vous connaissez les coordonnées de deux vecteurs.

Produit scalaire de deux vecteurs

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs, de coordonnées respectives $(x; y)$ et $(w; z)$. Alors, le produit scalaire est un nombre, noté $(\vec{u}, \vec{v})$, qui se calcule par :

$$(\vec{u}, \vec{v}) = xw + yz$$

Avec cette formule, on peut remarquer énormément de propriétés associées au produit scalaire. Par exemple,

Proposition

Pour tout vecteur $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on a :

$$(\vec{u}, \vec{v}) = (\vec{v}, \vec{u})$$

Autrement dit, on peut calculer un produit scalaire en notant les vecteurs «dans le sens que l'on veut».

II Norme d'un vecteur

La norme d'un vecteur $\overrightarrow{AB}$ représente la distance à parcourir pour emmener A vers B.
À partir des coordonnées d'un vecteur, on peut calculer sa norme !

Proposition

Soit $\vec{u}$ un vecteur, de coordonnées $(x; y)$. Alors, sa norme se calcule par

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Exemple

Ce résultat provient du théorème de Pythagore ! Sur l'image, puisque le triangle est rectangle, d'apres le théorème de Pythagore, on sait que

$$\|\vec{u}\|^2 = b^2 + c^2$$

Ce qui revient au calcul plus haut.

Ici, puisque $\vec{u} = (4; 5)$, on a :

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{4^2 + 5^2} = \sqrt{16 + 35} = \sqrt{41} \approx 6,4$$

Proposition

Pour tout vecteur $\vec{u}$, on peut remarquer que :

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{(u, u)}$$

Le produit scalaire est décidement partout !