Cours Valeur Absolue

Delhomme Fabien

15 mai 2022

Table des matières

I Definition

I.1 Symbolisme

La fonction valeur absolue est une fonction qui s'écrit $x \mapsto |x|$.

I.2 Calcul

La valeur absolue

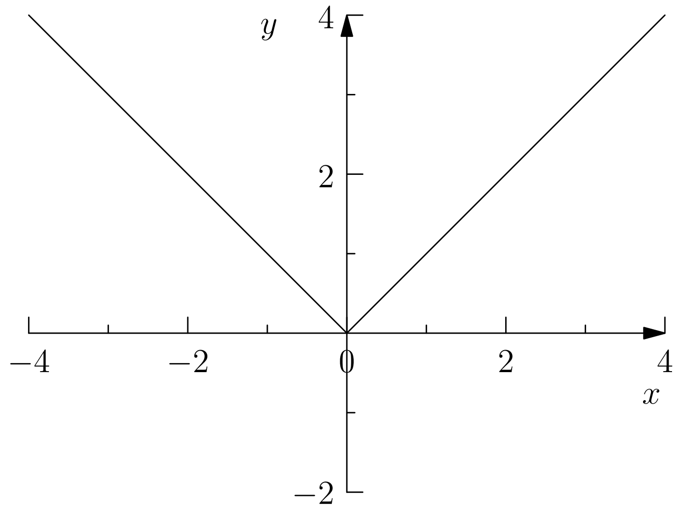
La valeur absolue d'un réel x est définie par $-x$ si x est négatif, et x si x est positif. On remarque que la valeur absolue de 0 est bien 0. On désigne la valeur absolue d'un nombre x avec la notation $|x|$.

Exemple

La valeur absolue de -3 s'écrit $|-3|$, et vaut 3, puisque -3 est à distance 3 de 0.

II Représentation graphique

Voici à quoi ressemble la représentation graphique de la fonction valeur absolue.



On remarque que la fonction valeur absolue est sur la partie droite du graphique, exactement identique à la fonction identité. Sur la partie gauche néanmoins, elle est différente.
On peut donc confirmer graphiquement que la fonction valeur absolue est une fonction **paire** !

Proposition

La fonction valeur absolue est une fonction paire. Sa représentation graphique est constitué de tous les points du plan qui admettent comme coordonnées $(x; |x|)$.

III Lien entre la valeur absolue et la distance entre deux nombres

La valeur absolue d'un nombre représente sa distance avec 0.
Mais la valeur absolue de la différence entre deux nombres représente la distance entre ces deux nombres.

Exemple

Le nombre $|2-3|$ représente la distance entre le nombre 2 et le nombre 3, qui vaut donc 1. Si on fait le calcul, on a :

$$\begin{aligned} |2-3| &= |-1| \\ &= 1 \end{aligned}$$

On remarque par ailleurs que $|2-3|$ est égal à $|3-2|$, puisque la distance entre 2 et 3 est la même que la distance entre 3 et 2.

Distance entre deux nombres réels

Soient a et b deux nombres réels. Alors, la distance $d(a, b)$ entre ces deux nombres est donnée :

$$d(a, b) = b - a \quad \text{si } b > a$$

et

$$d(a,b) = a - b \quad \text{si } a > b$$

Donc, dans tous les cas :

$$d(a,b) = |b - a| = |a - b|$$

IV Résolution d'équations avec la valeur absolue

Proposition

Soit a, et r deux nombres réels, avec $r > 0$.
Alors l'inéquation :

$$|x - a| \leq r$$

admet pour solution :

$$x \in [a - r; a + r]$$

Intervalle centré

Un intervalle I dont les bornes sont de la forme $[a - r; a + r]$ avec $r > 0$ et $a \in \mathbb{R}$ est un intervalle dit **centré en** a.

Exemple

L'intervalle $[10; 15]$ est centré en $12,5$ car :

$$[10; 15] = [12,5 - 2,5; 12,5 + 2,5]$$

On peut toujours trouver le «centre» d'un intervalle, s'il est **borné** (c'est à dire si ces bornes se sont pas l'infini.)

Proposition

Soit I un intervalle dont les bornes sont données par $a < b$ où a et b sont deux nombres réels.
Alors, I est centré autour de $\frac{a+b}{2}$

Exemple

Dans l'exemple précédent, pour trouver le centre de l'intervalle, j'ai calculé :

$$\frac{10 + 15}{2} = 12,5$$

On peut alors faire correspondre un intervalle **borné** à une inéquation avec des valeurs absolues :

Proposition

Soit I un intervalle dont les bornes sont données par a et b deux nombres réels, où $a < b$. Alors, si I est fermé en a et en b, I désigne l'ensemble des nombres solutions de l'inéquation : $\left|x - \frac{a+b}{2}\right| \leq \frac{b-a}{2}$

V Autre méthode de résolution

En partant de la définition suivante :

Définition alternative de la fonction valeur absolue

On peut définir la fonction valeur absolue sur $\mathbb{R}$ $f(x) = |x|$ avec l'écriture suivante :

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{Quand } x \text{ est positif} \\ -x & \text{Quand } x \text{ est négatif} \end{cases}$$

Si on souhaite résoudre :

$$|2x - 3| \leq 5$$

Pour que la valeur absolue de $2x - 3$ soit inférieure à 5, cela signifie que $2x - 3$ appartient à l'intervalle $[-5; 5]$, ou dit autrement, que $2x$ est compris dans l'intervalle $[-2; 8]$
On a résolu la double inégalité :

$$\begin{aligned} -5 \leq 2x - 3 \leq 5 & \\ -2 \leq 2x \leq 8 & \quad \text{On a ajouté 3} \\ -1 \leq x \leq 4 & \quad \text{On a divisé par 2 qui est strictement positif} \end{aligned}$$

Donc $|2x - 3| \leq 5$ si et seulement si $x \in [-1; 4]$.

VI Application : chercher une bonne approximation d'un nombre réel.

Lorsque l'on va essayer d'approximer un nombre réel comme $x = \sqrt{2}$ à l'aide d'un algorithme, il va falloir écrire une boucle de la forme :

```
TANT QUE d(a, x) > 0.01
ALORS
        ....
```

Autrement dit, dans ces codes, l'approximation sera donnée par la valeur de la variable a, et x est la valeur que l'on essaie d'approcher. On demande à l'algorithme de **continuer** tant que notre approximation est au dessus d'un centième. Lorsque l'on sortira de la boucle, nous obtiendrons donc une approximation telle que la première décimale sera juste !