Cours Logarithme

Delhomme Fabien

1er janvier 2022

Table des matières

I Les puissances

I.1 Definition

#+attr$_{\text{latex}}$:options {La notation puissance}

O

n rappelle que la notation a^n désigne le calcul :

$$a^n = \underbrace{a \times \ldots \times a}_{\text{n fois}}$$

I.2 Propriétés des puissances

Voici toutes les propriétés de calcul sur les puissances.

Proposition

Soit a un nombre réel non nul, p et q deux nombres quelconque. Alors :

$$a^{p+q} = a^p \times a^q$$

Mais aussi :

$$(a^p)^q = a^{pq}$$

Enfin, pour b un nombre réel non nul, on a :

$$(a \times b)^p = a^p \times b^p$$

Ces propriétés auront des répercussions sur les propriétés du logarithme, que nous verrons juste après.

Exemple
Le calcul
$$5^{3+7}$$
est le même calcul que
$$5^3 \times 5^7$$
Mais cela fonctionne aussi pour les nombres à virgules, par exemple
$$4^{2,2+3,5} = 4^{2,2} \times 4^{3,5}$$

On peut donc remarquer que la fonction puissance permet de transformer les sommes de puissances en produit. Expliquons cela plus précisément.

Si on définit la fonction f par
$$f : x \mapsto 2^x$$
Alors, on aura par exemple que $f(3) = 2^3 = 8$. Mais aussi $f(-1) = 2^{-1} = \frac{1}{2}$.

Cette fonction permet de transformer des «plus» en «produit», par exemple :
$$f(2+3) = f(2) \times f(3)$$
Autrement dit,
$$2^{2+3} = 2^2 \times 2^3$$

I.3 La fonction puissance

I.3.1 Définition

La fonction puissance

On définit la fonction puissance de 10 par la fonction qui associe à un nombre x le nombre 10^x. Si on note f cette fonction, alors on peut écrire que
$$f(x) = 10^x$$

#+begin$_{\text{ex}}$

I.3.2 Tableau de valeurs de la fonction puissance

Si on construit un tableau avec à gauche des valeurs de x, et à droite les valeurs de 10^x correspondante, voici ce que l'on obtient.

nombre de départ	puissance de 10 de ce nombre
x	10^{x}
-3	0,001
-2	0,01
-1	0,1
0	1
1	10
2	100
3	1000
4	10000
...	...

Donc par exemple, on peut lire dans ce tableau que
$$10^4 = 10000$$
Mais aussi, que
$$10^0 = 1$$
La valeurs des puissances **entières** de 10 sont à connaître par cœur.

I.3.3 Puissance 0 et puissances négatives, comment ça marche ?

Faisons un petit rappel sur les puissances négatifs d'un nombre. Regardons par exemple ce que signifie 10^{-3}. D'après le tableau précédent, on doit obtenir $0,001$. Montrons pourquoi.

Déjà, rappelons que $10^3 = 10 \times 10 \times 10 = 1000$. Ensuite, que $10^2 = 10 \times 10$. Donc, pour passer de 10^3 à 10^2 on peut diviser par 10. Donc pour passer de 10^3 à 10^1 il faut diviser par 100. Enfin, on peut donc passer de 10^3 à 10^0 en divisant par 1000, mais puisque $10^3 = 1000$, on retrouve le résultat suivant :

$$10^0 = \frac{1000}{1000} = 1$$

Maintenant, on peut continuer notre route vers 10^{-3} en divisant une fois de plus par 1000. On trouve donc :

$$10^{-3} = \frac{1}{1000}$$

En règle générale, ce qu'il faut retenir, donc, c'est deux choses. La première, c'est que si on cherche à calculer 10 à une puissance négative, il suffit de calculer 10 à cette puissance de signe opposé puis de prendre l'inverse du résultat obtenu. Concrètement :

$$10^{-4} = \frac{1}{10^4}$$

Et que ce principe marche pas seulement pour 10,

$$5^{-4} = \frac{1}{5^4}$$

Deuxièmement, pour les puissances de 10, tout est plus simple, puisque diviser par 10 décale d'un 0. Donc, on peut retenir que la puissance de 10 indique le nombre de zéro dans le résultat. Par exemple

$$10^{-4} = 0,0001 \quad \text{Il y a 4 zéros}$$

Ou encore

$$10^4 = 10000 \quad \text{Il y a 4 zéros}$$

I.3.4 Puissance non entières

Bien que cela ne semble pas intuitif, on peut définir mathématiquement (et c'est d'ailleurs un peu compliqué) des puissances de 10 qui ne sont pas entières. Par exemple :

$$10^{1.5} \approx 31.6227766017$$

Pour calculer ces valeurs, il faut utiliser la calculatrice, ou écrire un programme de calcul en Python. On pourrait le calculer à la main, mais c'est très compliqué.

Si vous commencez avec une puissance qui n'est pas entière, vous avez peu de chance de tomber sur un nombre entier. Ici, on a pris comme puissance 1.5, et le résultat, $31,622$ n'est pas entier.

1. Exemple de puissance non entière : la puissance $\frac{1}{2}$

   On peut expliquer par exemple comment calculer le nombre $10^{\frac{1}{2}}$ (qui se lit donc «10 puissance $\frac{1}{2}$). Pour le comprendre, remarquons d'abord que .

   $$\left(10^{\frac{1}{2}}\right)^2 = 10^{\frac{1}{2}\times 2} = 10^{\frac{2}{2}} = 10$$

   Autrement dit, le nombre $10^{\frac{1}{2}}$ est un nombre qui, élevé au carré, donne 10. Donc, c'est $\sqrt{10}$!
   On peut donc écrire :

   $$10^{\frac{1}{2}} = \sqrt{10}$$

   C'est de cette manière que l'on arrive à progressivement définir les puissances non entières d'un nombre, en mathématiques.

II La fonction logarithme décimale

#+attr$_{\text{latex}}$:options {Fonction logarithme}

C

ette fonction est la fonction qui «lit» le tableau de la fonction puissance de 10 dans l'autre sens. Cette fonction se note log.

nombre de départ	logarithme décimale de ce nombre
10	1
31.622	1.5
100	2
1000	3
10000	4
...	...
x	$\log x$

Donc, on peut en déduire les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} \log(10) &= 1 \quad \log(31,622) &\approx 1,5 \\ \log(100) &= 2 \quad \log(1000) &= 3 \end{aligned}$$

Le logarithme décimale permet de «mesurer» entre quelles puissances de dix un nombre se trouve. Par exemple :

$$\log(100) < \log(327) < \log(1000)$$
$$2 < \log(327) < 3$$

II.1 Propriétés magiques du logarithme

Puisque la fonction puissance a des propriétés, le logarithme qui est exactement la fonction «anti-puissance», a aussi des propriétés.

Proposition

Soit a et b des nombres strictement positifs. Alors

$$\log(a \times b) = \log(a) + \log(b)$$

C'est **la propriété fondamentale du logarithme** qui rend cette fonction si pratique dans beaucoup de domaines, que ce soit les mathématiques (bien sûr), mais aussi la physique, la chimie, l'astronomie, l'économie, les statistiques, etc..

Exemple

Un petit exemple pour bien comprendre. Si par exemple je veux calculer

$$\log(6)$$

Alors, puisque $6 = 2 \times 3$, je peux écrire donc que

$$\log(6) = \log(2 \times 3)$$

D'après la proposition précédente, pour $a = 2$ et $b = 3$, on obtient

$$\log(2 \times 3) = \log(2) + \log(3)$$

Vous pouvez vérifier cette égalité à l'aide de votre calculatrice !

À partir du résultat que l'on vient d'énoncer, on peut démontrer tout une série de propriétés magiques qui sont propres au logarithme. Je vous conseille donc de bien vous familiarisé avec la propriété fondamentale du logarithme, puis, d'essayer de vous frotter aux suivantes.

Proposition

Soit a un nombre strictement positif, et p un nombre quelconque. alors

$$\log(a^p) = p\log(a)$$

Proposition

Pour a et b deux nombres strictement positifs, on a :

$$\log(\frac{a}{b}) = \log(a) - \log(b)$$

Dit autrement, le logarithme transforme les divisions en soustractions. Plutôt logique puisque la propriété fondamentale du logarithme est de transformer les produits en sommes.

Proposition

Soit a un nombre strictement positif. Alors :

$$\log(10 \times a) = 1 + \log(a)$$

Un petit exemple de la dernière proposition.

Exemple

$$\log(60) = \log(10 \times 6) = 1 + \log(6)$$

En multipliant par 10 le nombre de départ, on ajoute seulement 1 au résultat ! Le logarithme d'un nombre très grand reste un nombre assez petit. Encore besoin d'un exemple pour voir à quel point le logarithme grandit lentement ? En voici un !

$$\log(1000000000000) = 12$$

Le nombre $1000000000000 = 10^{12}$ a beau être gigantesque, le logarithme de ce nombre fait seulement 12.

Proposition

Soit a un nombre strictement positif. Alors

$$\log(\frac{1}{a}) = -\log(a)$$

Exemple

Un exemple pour la route.

$$\log(\frac{1}{6}) = -\log(6)$$

C'est une manière de voir pourquoi pour un nombre entre 0 et 1 (comme $\frac{1}{6}$ par exemple) le logarithme de ce nombre est **négatif**.

II.2 Avertissement : on ne peut pas calculer le logarithme de tous les nombres

Proposition

Le logarithme n'est défini **que** pour les nombres strictement positifs.

Exemple

Par exemple, le $\log(0)$ est un nombre **qui n'existe pas**, dans le sens où l'on ne peut pas lui donner une valeur qui ait du sens.

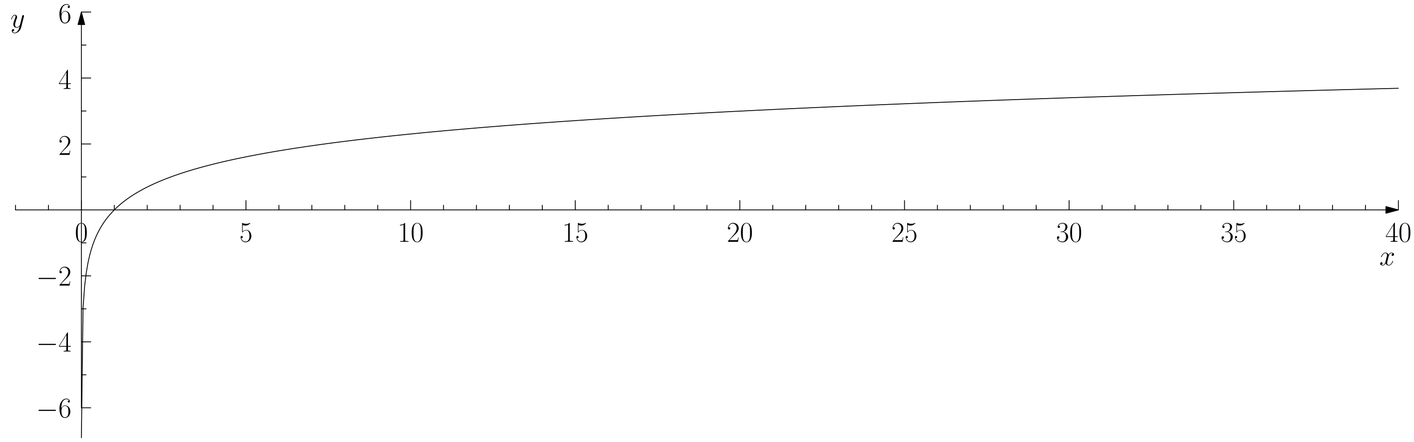
Demonstration

Pour donner une explication, il faut se souvenir que le logarithme a été créé pour supprimer une «puissance de 10». C'est-à-dire, que pour toutes puissances x, on a :

$$\log(10^x) = x$$

Mais, quelque soit la valeur de x, le nombre 10^x est **toujours** strictement postif. Même pour $x = -3$, on a vu que $10^x = 10^{-3} = 0,001 > 0$.

On peut regarder la courbe représentative du logarithme pour se souvenir graphiquement de toutes ces informations.



On vois nettement que lorsque l'on approche x de 0 la courbe plonge infiniement loin dans les négatifs. C'est pour cela que $\log(0)$ n'a pas vraiment de sens (ou alors, on devrait dire que $\log(0) = -\infty$, mais $-\infty$ n'est pas vraiment un nombre).

Remarquez aussi qu'il n'y a pas de courbe sur la partie gauche du dessin (c'est à dire à gauche de l'axe vertical, l'axe des ordonnées). Ceci est dû au fait que le logarithme de nombre négatif (donc **avant** 0, à gauche donc) n'est pas défini. Donc, il n'y a rien à afficher.