Projete Orthogonal

Delhomme Fabien

15 mai 2022

Table des matières

I Définitions

On considère M un point du plan, et Δ une droite du plan, qui ne passe pas par M.
On peut donner plusieurs définitions équivalentes aux projeté orthogonal.

Projeté orthogonal d'un point sur une droite

Le projeté orthogonal d'un point M sur une droite Δ est le point M' tel que la distance MM' est minimale.

```
import mesFonctions;
defaultpen(fontsize(13pt));

size(7cm);

//show(defaultcoordsys);

point M = (-2, 1), A = (-2, -2), B = (7, 5);
transform proj = projection(A, B);
point Mp = proj*M;
dot("$M$", M); dot("$M'$", Mp, S);
draw(line(A, B));
draw(line(M, Mp), dashed);
label("$\Delta$", A--B);
shipout(bbox(2mm, Fill(white)));
```

II Pourquoi ce point existe ?

La distance entre un point M' qui appartient à la droite Δ et le point M est une fonction qui dépend de la position de M' sur la droite.
Mais cette fonction ressemble à une parabole, puisque si l'on connaît les coordonnée de M et de M', on sait que :

$$MM'^2 = (x_{M'} - x_M)^2 + (y_{M'} - y_M)^2$$

Autrement dit, la fonction $M' \mapsto MM'^2$ ressemble à une parabole (il y a des carrés dans la formule, ce n'est pas un argument suffisant, c'est un argument que l'on appelle «heuristique», qui repose sur l'intuition plutôt que de la formalisation pure. Mais vous pouvez me faire confiance ici, cela fonctionne bien) ! Donc, cette parabole admet un point minimale atteint pour un certain point M_0', qui est le projeté orthogonale de M sur la droite Δ.
La puissance de feu des mathématiques en action ! Ce raisonnement se retrouve dans de très nombreux domaines, notamment… Dans les algorithmes de deep learning (!).

III Approche géométrique

Projeté orthogonal d'un point sur une droite

Le projeté d'un point M sur une droite Δ est le point M' tel que l'angle entre Δ et $M'M$ est droit.

Proposition

Les deux définitions sont équivalentes ! C'est-à-dire que trouver le point M' tel que la distance entre $M'M$ est le minimum revient à tracer la perpendiculaire à la droite Δ qui passe par M !

Remarquez l'angle droit formé sur la figure ci-contre (qui a la même configuration que la figure précédente.)

```
import mesFonctions;
defaultpen(fontsize(13pt));

size(7cm);

//show(defaultcoordsys);

point M = (-2, 1), A = (-2, -2), B = (7, 5);
transform proj = projection(A, B);
point Mp = proj*M;
dot("$M$", M); dot("$M'$", Mp, S);
draw(line(A, B));
draw(line(M, Mp), dashed);
label("$\Delta$", A--B);
markrightangle(M, Mp, B, 2bp + black);
shipout(bbox(2mm, Fill(white)));
```

IV Trigonométrie

IV.1 Définitions

Définition du cosinus d'un angle

On considère un triangle **rectangle** ABC rectangle en A. Alors, on définit la fonction cos de l'angle $\widehat{ABC}$ par :

$$\cos(\widehat{ABC}) = \frac{AB}{BC} = \frac{\text{Adjacent}}{\text{Hypoténuse}}$$

```
import mesFonctions;
defaultpen(fontsize(13pt));

unitsize(1cm);

//show(defaultcoordsys);

triangle t = triangleAbc(90, 4, 3, angle = 233) ;
show(Lb = "", Lc="Adjacent", La="Hypoténuse", t);
markrightangle(t.B, t.A, t.C);
markangle("$\widehat{ABC}$", t.C, t.B, t.A);
label("$\cos{(\widehat{ABC})} = \frac{Adjacent}{Hypotenuse}$", (3, 0));

shipout(bbox(2mm, Fill(white)));
```

V Le chemin difficile : trouver les coordonnées d'un projeté.

On considère le problème suivant. On connaît $A(2,3)$ et $B(4;5)$ les coordonnées de deux points dans le plan. Soit $C(4,6)$ un point qui n'est pas sur la droite (AB) (ça se voit, puisque C a la même abscisse que B, mais pas la même ordonnées). Comment calculer les coordonnées de I le projeté de C sur la droite (AB) ?

Si on demande à l'ordinateur de représenter la situation, voici ce que l'on obtient :

```
import mesFonctions;
defaultpen(fontsize(13pt));

size(7cm);

//show(defaultcoordsys);

pair A=(2,3), B=(4, 5), C=(4, 6);

line D = line(A, B);
//label(afficherpoint(A, "A"), A);
dot(A);
dot(B);
dot(C);
transform proj = projection(A, B);
point I = proj*C;
dot(I);
draw(line(I, C), dashed);
markrightangle(C, I, A, 1bp + black);
draw(D);
```

```
label("A", A, S);
label("B", B, S);
label("C", C, SW);
label("I", I, N);
shipout(bbox(2mm, Fill(white)));
```

V.1 Première étape, trouver l'équation de la droite (AB)

On a déjà vu avec le chapitre sur le déterminant comment déterminer une équation de droite. Ici, elle est simple, puisque l'on remarque que l'ordonnée des points A et B est égale à 1 ajouté aux abscisses de ces points. Donc si $(x; y)$ représente les coordonnées d'un point sur (AB), on a :

$$(AB) \quad : \quad x - y = -1$$

V.2 Calculer la distance entre C et un point M de la droite.

D'après les formules déjà vues en cours, on peut calculer entre le point C et un point $M = (x; y)$. On va calculer cette distance au carré pour éviter d'être embêté avec d'éventuelles racines carrés :

$$\begin{aligned} CM^2 = \|CM\|^2 &= (x-4)^2 + (y-6)^2 \\ &= x^2 + y^2 - 8x - 12y + 52 \end{aligned}$$

V.3 Rappeler que $M \in (AB)$

On rappelle que l'on sait que $x - y = -1$ pour $M(x; y) \in (AB)$, donc, on peut remplacer chaque y par $x + 1$ dans la formule suivante :

$$CM^2 = x^2 + y^2 - 8x - 12y + 52$$

Et on obtient :

$$CM^2 = x^2 + (x+1)^2 - 8x - 12(x+1) + 52$$

Finalement, après développement et simplification (il y a donc quelques lignes de calculs qu'il faut compléter) :

$$CM^2 = 2x^2 - 18x + 41 = 2 \times (x^2 - 9x + 20,5)$$

On peut donc poser f la fonction :

$$f(x) = x^2 - 9x + 20,5$$

Et il s'agit de trouver le minimum de cette fonction. Si on représente cette fonction par ordinateur, on observe la courbe suivante :

```
import mesFonctions;
defaultpen(fontsize(13pt));

unitsize(1cm, 0.5cm);

//show(defaultcoordsys);

real xmin = 0, xmax = 7;

real f (real x) { return x^2-9x+20.5 ; }
```

```
path cf = graph(f, xmin, xmax);
label("$f$", cf);
draw(graph(f, xmin, xmax));
xaxis("$x$",LeftTicks(Step=1, step=0.5),Arrow, xmin=xmin, xmax=xmax);
yaxis("$y$",RightTicks(NoZero, Step=2, step=0.5),Arrow);

dot((4.5, f(4.5)));

shipout(bbox(2mm, Fill(white)));
```

On voit que le minimum semble être atteint en $x = 4,5$. Pour le démontrer, on calcule alors :

$$\begin{aligned} f(x) - f(4,5) &= x^2 - 9x + 20,5 - 0,25 \\ &= x^2 - 9x + 20,25 \\ &= (x - 4,5)^2 \end{aligned}$$

Car il se trouve que $f(4,5) = 0,25$ et $4,5^2 = 20,25$. Donc $f(x)$ est un nombre toujours plus grand que le nombre $f(4,5)$ car $(x - 4,5)^2$ est un nombre toujours positif !
Donc le minimum est atteint en $x = 4,5$, ce qui est l'absicce du point I, projeté orthogonal de C sur la droite (AB). Le point I est donc de coordonnées $I = (4,5; 5,5)$.