

Vecteur, deuxième partie

Delhomme Fabien

14 avril 2022

Table des matières

I	Coordonnées d'un vecteur dans un repère orthonormé	1
I.1	Définitions	1
I.1.1	Repère dans le plan	1
I.1.2	Repère orthonormé dans le plan	2
I.1.3	Convention	3
I.2	Coordonnées d'un vecteur dans un repère orthonormé	3
I.2.1	Lorsque le vecteur est défini par deux points.	5
I.2.2	Somme, multiplication par un scalaire.	5
II	Application : coordonnées du milieu d'un segment	6
II.1	Énoncé du problème	6
II.2	Résolution	6
II.2.1	Méthode longue, mais intuitive	6
II.2.2	HOLD Méthode simple, et géométrique.	7
III	Norme d'un vecteur, et calcul de la distance entre deux points	7

I Coordonnées d'un vecteur dans un repère orthonormé

I.1 Définitions

I.1.1 Repère dans le plan

Pour se repérer sur le plan, on a besoin de se mettre d'accord sur :

1. Un point de référence
2. Une échelle horizontale, et verticale

Donc un repère va être constitué d'un point de référence que l'on va appeler l'origine, et de deux vecteurs qui indiquent les directions que l'on considère «verticale» et «horizontale».



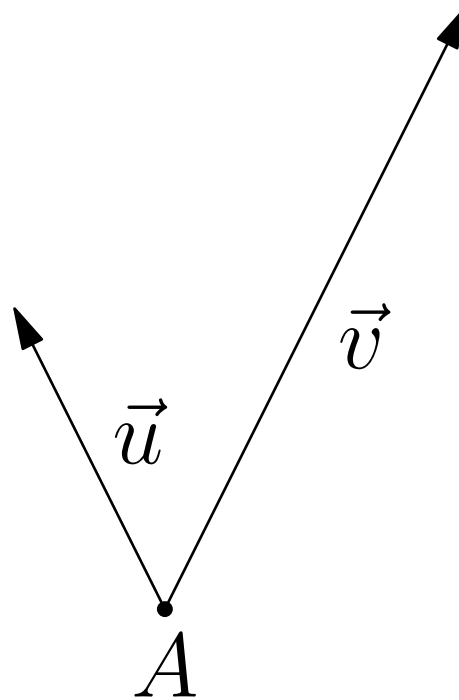
Proposition

On appelle (A, \vec{u}, \vec{v}) un repère du plan si A est un point du plan, et que les vecteurs \vec{u} , et \vec{v} n'ont pas la même direction.



Exemple

Voici un exemple de repère dans le plan.



I.1.2 Repère orthonormé dans le plan

ORTHONORMÉ
droit | de même taille



Repère orthonormé

Un repère est dit **orthonormé** lorsque les vecteurs du repères sont :

1. De même norme (souvent de norme égale à 1).
2. De direction perpendiculaire

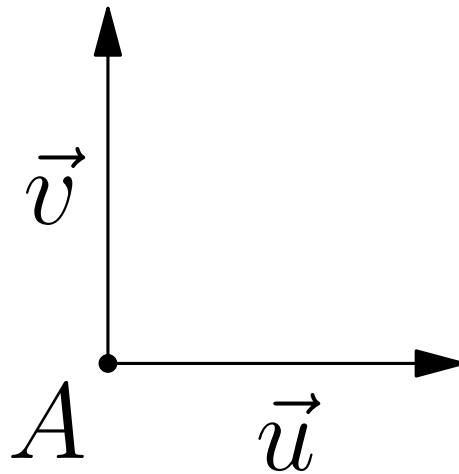
La quasi-totalité des repères des exercices sont orthormés, car cela permet une lecture des coordonnées plus simple, ainsi que des calculs de normes plus faciles.



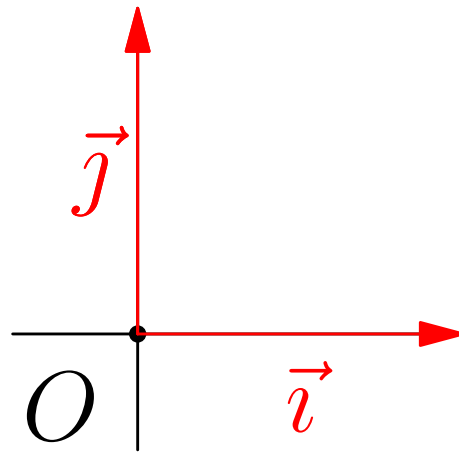
Exemple

Vous trouverez un exemple de repère orthornormé dans l'image ci-dessous.

Voici un repère orthonormé, nommé (A, \vec{u}, \vec{v})



Voici un repère orthonormé, nommé (O, \vec{i}, \vec{j})



I.1.3 Convention

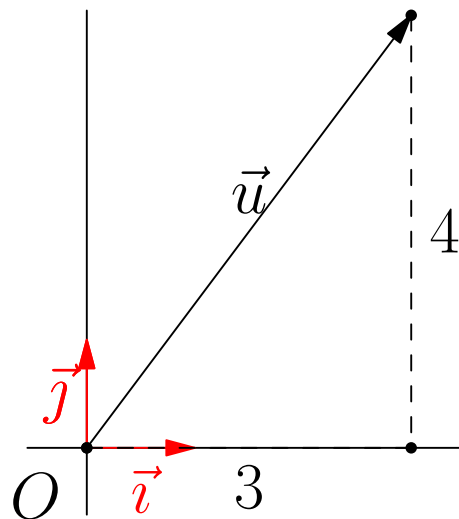
Très souvent, on notera (O, \vec{i}, \vec{j}) un repère orthonormé, le vecteur \vec{i} désignera les abscisses, et \vec{j} les ordonnées. Dans toutes les images dans ce cours, nous utiliserons le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) pour donner les coordonnées des vecteurs.

I.2 Coordonnées d'un vecteur dans un repère orthonormé



Coordonnées d'un vecteur

Soit \vec{u} un vecteur, et on considère un repère orthonormé, (O, \vec{i}, \vec{j}) , du plan. Alors, le vecteur \vec{u} admet des coordonnées qui le décrivent.



Exemple

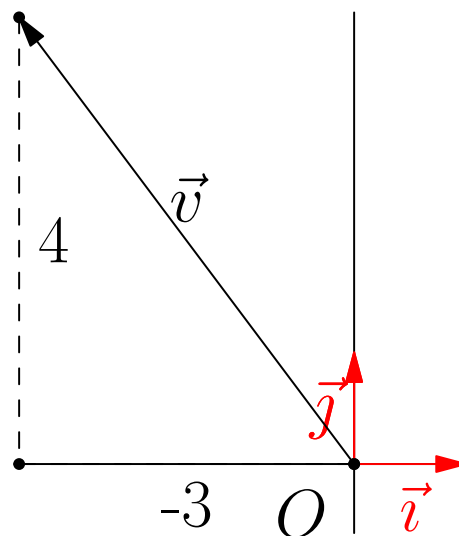
Dans l'image suivante, vous trouverez un exemple de vecteur \vec{u} qui admet pour coordonnées $(3; 4)$. Ainsi, l'égalité

$$\vec{u} = (3; 4)$$

désigne un vecteur qui déplace de 3 horizontalement, et de 4 verticalement.

Exemple

Un vecteur peut aussi admettre des coordonnées négatives. Par exemple, dans l'image suivante, le vecteur \vec{v} admet une abscisse négative.



Coordonnées du vecteur nul

| Les coordonnées nulles, c'est-à-dire $(0; 0)$ désignent le vecteur nul, noté $\vec{0}$.

I.2.1 Lorsque le vecteur est défini par deux points.

À partir de deux points, A et B , on peut définir le vecteur qui «emmène» le point A vers le point B , et on le note \overrightarrow{AB} . À partir des coordonnées de A et de celle de B , on peut en déduire les coordonnées du vecteur \overrightarrow{AB} .

Proposition

Si A et B admettent les coordonnées (x_A, y_A) , (x_B, y_B) , alors le vecteur \overrightarrow{AB} a pour coordonnées :

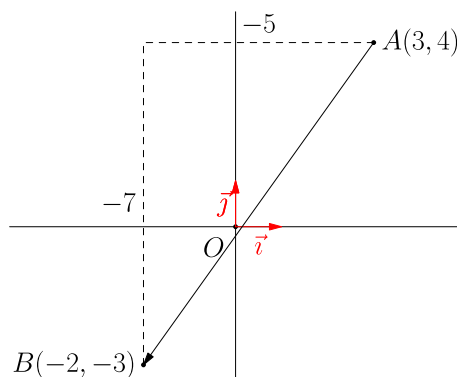
$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A)$$

Exemple

Si $A(3; 4)$ et $B(-2; -3)$ alors le vecteur \overrightarrow{AB} a pour coordonnées

$$\overrightarrow{AB} = (-2 - 3; -3 - 4) = (-5; -7)$$

Donc pour se rendre de A vers B , il faut se déplacer de 5 horizontalement (vers la gauche, puisque la première coordonnée de \overrightarrow{AB} est -5), et de 7 verticalement (vers le bas). L'image suivante illustre cette situation.



I.2.2 Somme, multiplication par un scalaire.

1. Somme de vecteurs

Proposition

Si on considère deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} de coordonnées $(x; y)$ et $(w; z)$, alors si on note $\vec{z} = \vec{u} + \vec{v}$, le vecteur \vec{z} a pour coordonnées :

$$\vec{z} = (x + w; y + z)$$

Exemple

Si $\vec{u} = (-3; 4)$ et $\vec{v} = (2; 5)$ alors $\vec{u} + \vec{v} = (-1; 9)$

2. Multiplication d'un vecteur par un scalaire

Si \vec{u} est un vecteur, alors $2\vec{u}$, $3\vec{u}$, $\sqrt{2}\vec{u}$, etc, sont aussi des vecteurs. On peut multiplier un vecteur par n'importe quel nombre réel k , et on notera l'opération $k\vec{u}$



Proposition

Soit \vec{u} un vecteur, de coordonnées $(x; y)$. Alors, le vecteur $k\vec{u}$ a pour coordonnées

$$k\vec{u} = (kx; ky)$$



Exemple

Si $\vec{u} = (-3; 5)$, alors $-2\vec{u} = (6; -10)$

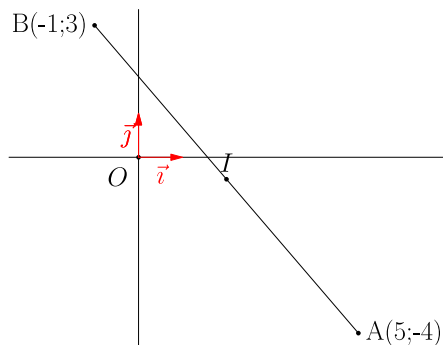
II Application : coordonnées du milieu d'un segment

II.1 Énoncé du problème

Le problème est le suivant :

Calculer les coordonnées du point I , milieu du segment $[AB]$ en connaissant les coordonnées des points A et B .

Concrètement, si on considère la situation suivante :



Comment calculer les coordonnées de I , milieu du segment $[AB]$?

Sachant que :

- $A(5; -4)$
- $B(-1; 3)$

II.2 Résolution

II.2.1 Méthode longue, mais intuitive

On calcule les coordonnées du vecteur \overrightarrow{AB} :

$$\overrightarrow{AB} = (-1 - 5; 3 - (-4))$$

On trouve finalement que $\overrightarrow{AB} = (-6; 7)$.

Maintenant, on sait que I est le milieu du segment $[AB]$. Donc on a l'égalité suivante :

$$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$

Donc, il suffit de diviser par deux les coordonnées de \overrightarrow{AB} pour trouver les coordonnées de \overrightarrow{AI} . Finalement,

$$\overrightarrow{AI} = (-3; 3, 5)$$

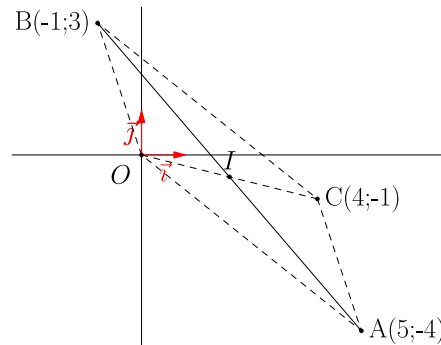
Pour trouver les coordonnées de I , il suffit d'appliquer le vecteur \overrightarrow{AI} au point A , on trouve alors :

$$I(2; -0.5)$$

II.2.2 HOLD Méthode simple, et géométrique.

Je vous conseille cette méthode, car les calculs sont beaucoup plus courts.

Mais il faut observer la figure suivante :



On voit que la figure $OBCA$ est un parallélogramme ! Donc le point I , milieu de AB est **aussi** le milieu du segment OC . L'avantage, c'est que cela signifie que les coordonnées de I sont directement lisibles par les coordonnées de \overrightarrow{OC} , puisque :

$$\overrightarrow{OI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OC}$$

Et, de plus :

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA}$$

Donc, on peut calculer directement les coordonnées de I , en calculant la moyenne des coordonnées de A et de B :

$$I\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}\right)$$

III Norme d'un vecteur, et calcul de la distance entre deux points

La norme d'un vecteur \overrightarrow{AB} représente la distance à parcourir pour emmener A vers B .

À partir des coordonnées d'un vecteur, on peut calculer sa norme !



Proposition

Soit \vec{u} un vecteur, de coordonnées $(x; y)$. Alors, sa norme se calcule par

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Exemple

Ce résultat provient du théorème de Pythagore ! Sur l'image, puisque le triangle OAH est rectangle en H , d'après le théorème de Pythagore, on sait que

$$\|\vec{u}\|^2 = \|\vec{OA}\|^2 = OH^2 + HA^2$$

Ici, puisque $\vec{u} = (4; 5)$, on a $OH = 4$ et $HA = 5$, donc :

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{4^2 + 5^2} = \sqrt{16 + 25} = \sqrt{41} \approx 6,4$$

```
import mesFonctions;
import geometry;
defaultpen(fontsize(16pt));

unitsize(1cm);

show(defaultcoordsys);

pair O = (0, 0);
pair A = (4, 5);
pair H = (A.x, 0);

dot(A);
dot(H);
label("$H$", H, SE);
label(afficherPoint(A, "A"), A, E);
draw(O--A, EndArrow);
draw(O--H--A -- cycle);
fill(O--H--A -- cycle, palered);
label("4", O--H);
label("5", H--A );
perpendicularmark(line(H, A), line(H, O));
shipout(bbox(2mm, Fill(white)));
label(rotate(50)*"$||\vec{u}|| = \sqrt{4^2 + 5^2}$", O--A, NW);
```

Et finalement, si on donne deux points A et B du plan, on obtient une méthode pour calculer la longueur entre les deux points.

Proposition

Soit $A(x_A; y_A)$, et $B(x_B; y_B)$ deux points dans un plan munit d'un repère orthonormé. Alors :

$$AB = \|\vec{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$