Probabilite

Table des matières

I Définitions

Expérience aléatoire

Une expérience aléatoire est une expérience dont le résultat n'est pas prévisible à l'avance. Une expérience aléatoire peut avoir deux, trois voire une infinité de résultats différents.

Événements

Un événement est un ensemble d'issus. Ensemble étant compris comme un ensemble en mathématiques. On note souvent les événements par des lettres majuscules. Ainsi, si w est une issue qui *appartient* à A, on écrira : $w \in A$. Pour désigner un événement qui ne contient qu'une seule issue est désigné par $A = \{w\}$.

Univers

En probabilité, l'univers Ω désigne l'ensemble des événements d'une expérience aléatoire.

Probabilité

Une probabilité est une application qui associe à un événement A un nombre réel entre 0 et 1. On peut écrire ainsi, pour $A \subset \Omega$, $P(A) \in [0; 1]$. Une probabilité suit d'autre conditions que nous décrirons juste après.

II Modéliser en mathématique une expérience aléatoire

On lance deux dés à six faces, équilibré. Quelle est la chance que la somme des deux faces tirées fasse 7 ?

L'éxpérience aléatoire dans cet exemple est le résultat de la somme de deux dés. Donc, toutes les issues possibles sont $\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$, car la somme de deux dés est compris entre 2 (le minimum possible, avec deux dés de faces 1) et 12 (le maximum, avec deux dés de faces 6). On note donc

$$\Omega = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$$

l'univers associé à cet expérience aléatoire. L'événement qui nous intéresse est l'événement consitué d'une seule issue, l'obtiention de la somme égale à 7. On note A cet événement, et on a :

$$A = \{7\}$$

On cherche donc à calculer la probabilité associée à l'événement A. On note mathématiquement ce nombre $P(A)$.
Pour calculer $P(A)$, il faut dénombrer les issues qui appartiennent à notre événement. On divisera ce nombre d'issues par le nombre d'issues total.
Commençons par lister *toutes les issues possibles*. Nous avons deux dés, lancés indépendamment l'un par rapport à l'autre. Il y a six possibilités pour le premier, six pour le deuxième. Pour chaque possibilité du premier, il y a six possibilité pour le second. Ainsi, il y a $6 \times 6 = 36$ possibilités au total.
Quelles sont les issues qui réalise l'événement $A =$« la somme des deux dés est égal à 7 » ?
Nous devons les lister pour les compter :

1. $1 + 6 = 7$
2. $2 + 5 = 7$
3. $3 + 4 = 7$
4. $4 + 3 = 7$
5. $5 + 2 = 7$
6. $6 + 1 = 7$

On peut maintenant se convaincre que toutes les possibilités sont listées.
Finalement, la probabilité associée à l'événement A est :

$$P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

II.1 Vérifier expérimentalement nos résultats

Nous pourrions réaliser à la main un grand nombre de fois cette expérience, mais nous pouvons aussi demander à l'ordinateur de le faire à notre place.
Voici un programme python qui calcule la somme de deux dés aléatoires et qui compte le nombre de fois ou le résultat donne 7. Ici, le programme lance 10000 dés.

```python
import random

c = 0
n = 10000

for i in range(n):
    if random.randint(1,6) + random.randint(1,6) == 7 :
        c = c + 1
print(c/n)
```

Nous avons obtenu une fréquence de :

```
0.1579
```

En relançant plusieurs fois le programme, on voit qu'on obtient une fréquence autour de $0,16666... = \frac{1}{6}$.