Ensemble De Nombres

Delhomme Fabien

15 mai 2022

Table des matières

I Motivations

Les mathématiques n'ont pas toujours été construite autour de la notion d'**ensemble**, mais c'est un formalisme utile dans la plupart des cas pour exprimer des propriétés sur les nombres, par exemple.

II Définition

Élément d'un ensemble

Un ensemble est constitué d'éléments. On dit que l'élément x *appartient* à l'ensemble A par l'écriture $x \in A$.

Exemple

On sait par exemple que $\sqrt{2} \in [0;10]$. L'intervalle $[0;10]$ est un ensemble de nombre, et $\sqrt{2}$ est l'un de ses éléments.

Sous ensemble

On dit que B est un sous-ensemble de A lorsque **tous** les éléments de B sont aussi des éléments de A. On notera alors $B \subset A$, et on dira aussi que B est **inclus** dans A.

III Ensembles de référence

L'ensemble des entiers naturels

On note $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels, autrement dit, $\mathbb{N}$ est constitué de :

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$$

Parfois, certains manuels de mathématiques préfèrent omettre 0 des entiers naturels. Mais depuis que l'on programme en Python et que nos tableaux commencent à l'indice 0, on peut bien dire que 0 est naturel non ? Dans tous les cas, ça ne change pas vraiment la structure de $\mathbb{N}$.

L'ensemble des nombres relatifs

Vous savez depuis la cinquième qu'il existe pour tout nombre naturel, son opposé relatif. On note $\mathbb{Z}$ l'ensemble constitué de :

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

Proposition

On a donc que $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$, autrement dit, tous les entiers naturels sont des entiers relatifs, mais l'inverse n'est pas toujours vrai.

Nombres décimales

On dit que x est un nombre décimal s'il existe a un entier relatif, et p un entier naturel, tel que :

$$x = \frac{a}{10^p}$$

Exemple

Les nombres $0,23$, $80123, 29791230$ sont décimaux. Plus généralement, tous les nombres qui admettent une partie décimale *finie* est un nombre décimal.

Exemple

Il existe aussi des nombres qui ne sont pas décimaux, par exemple, nous avons déjà vu que $\frac{1}{3}$ n'est pas un nombre décimal. Mais on peut en trouver une infinité. Par exemple, $\sqrt{2}$ n'est pas décimal.

L'ensemble des nombres décimaux

On note $\mathbb{D}$ l'ensemble des entiers décimaux.

Proposition

On obtient pour l'instant que $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D}$

Les nombres rationnels

On dit que x est un nombre rationnel s'il existe p un entiers relatif, et q un entier naturel non nul tel que :

$$x = \frac{p}{q}$$

Ensemble des nombres rationnels

On note $\mathbb{Q}$ l'ensemble des nombres rationnels.

Proposition

On obtient pour l'instant que $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$

Exemple

On a déjà vu que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Nombres réels

Il serait bien difficile de donner une définition mathématiquement exacte des nombres réels... Vous verrez une définition en première année de licence ou de prépa. On se contentera en seconde de définir les nombres réels comme l'ensemble des nombres que l'on connaît, et que l'on peut situer sur la «droite réelle».

Ensemble des nombres réels

On note $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels. Oui, c'est bien la droite réelle, que l'on utilise très souvent pour définir nos fonctions numériques de référence que l'on étudie depuis le début de l'année.

Proposition

On obtient finalement : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. Intuitivement, gardez en tête que $\mathbb{R}$ est infiniement plus «gros» que $\mathbb{N}$ (on pourra préciser un peu plus en classe, si on a le temps).

Il existe bien d'autres ensembles de nombres en mathématiques. On peut même en inventer une infinité, qui auront des propriétés bien différentes des nombres que l'on utilise en seconde, mais ne divulgâchons rien !