Récapitulatif des démonstrations

Delhomme Fabien

14 février 2022

Table des matières

I Démonstration portant sur la parité

I.1 Somme de deux entiers, et parité

Parité d'un nombre

La parité d'un nombre signifie sa propriété à être pair ou impair.

Exemple

La parité de 132 est pair. La parité de 147 est impair.

Proposition

Si a et b sont deux nombres pairs, alors leur somme est pair aussi

Demonstration

Puisque a et b sont deux nombres pairs, alors, il existe deux entiers k et k' tels que :

$$\begin{cases} a & = 2k \\ b & = 2k' \end{cases}$$

Donc,

$$a + b = 2k + 2k' = 2 \times (k + k') \quad k \text{ et } k' \text{sont pairs !}$$

Finalement $a + b$ est pair, puisqu'il s'écrit comme 2 multiplié par un entier.

I.2 Carré d'entiers, et parité

On va montrer qu'élever un nombre entier au carré ne change pas sa parité. Par exemple :

$$3^2 = 9$$

On a bien que 3 et 9 sont impairs.

$$16^2 = 256$$

On a là encore que 16 et 256 sont pairs.

Proposition

Soit n un entier impair, alors n^2 est impair aussi.

Demonstration

Puisque n est impair, il existe k un entier tel que

$$n = 2k + 1$$

Grâce à l'identité remarquable $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, on sait que :

$$n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 2 \times 2k \times 1 + 1^2$$

Finalement, $n^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$. Donc n s'écrit comme le multiple de 2 plus 1, donc n est impair.

Montrer que si n est pair, alors n^2 est pair est plus facile. Je vous laisse retrouver la démonstration.

Mais comment montrer que si n^2 est impair, alors n est impair ? Il existe plusieurs raisonnements qui fonctionnent. En voici un qui utilise une identité remarquable très astucieuse.

Proposition

Si n^2 est impair, alors n est impair.

Demonstration

On commence par remarquer que, quelque soit n, on a :

$$n^2 - 1 = (n + 1)(n - 1)$$

Cela provient de l'identité remarquable $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$, avec $a = n$ et $b = 1$.

Si n^2 est impair, alors $n^2 - 1$ est pair. Donc $(n + 1)(n - 1)$ est pair. Donc, $n + 1$ est pair, ou bien $n - 1$ est pair (mais en réalité les deux le sont nécessairement, vois-tu pourquoi ?). Dans les deux cas, on retrouve que n est impair, puisque $n + 1$ est pair par exemple.

Il ne nous manque plus que la démonstration suivante,

Proposition

Si n^2 est pair, alors n est pair

On peut donner un argument de logique, puisque les nombres entiers sont soit pairs, soit impairs, il n'y a pas d'autre alternative.

Demonstration

On sait que n^2 est pair. Si jamais n est impair, alors, d'après la démonstration vue plus haut, on aurait que n^2 est impair. Mais ce n'est pas le cas, donc n ne peut pas être impair, donc n est pair.

Pas de calcul, seulement de la logique ici ! Ces deux démonstrations sont intéressantes, car elles nous montre qu'il existe souvent beaucoup de moyens démontrer des résultats en mathématiques. Dans que la démonstration est correcte, tous les moyens sont bons ! Il suffit de trouver son propre chemin.

II La racine carré de 2 est irrationnel

II.1 Rappels sur les racines carrés

Racine carré

La racine carré peut se comprendre comme une annulation du carré. Plus précisément, si x est un nombre positif, alors :

$$\sqrt{x^2} = x$$

Exemple

$$\sqrt{3^2} = \sqrt{9} = 3$$

Attention, pour les nombres négatifs on a une petite surprise, par exemple, si on prend $x = -3$, on obtient :

$$\sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3$$

Alors qu'on aurait dû obtenir -3 comme résultat, on obtient ici 3, autrement dit son opposé.

Racine carré, deuxième

Soit x un nombre positif, alors $\sqrt{x}$ est le nombre qui, élevé au carré, donne x.

Exemple

Le nombre $\sqrt{9} = 3$ est le nombre qui, élevé au carré, donne 9.

Le nombre $\sqrt{2} \approx 1,4142\ldots$ est le nombre qui, élevé au carré, donne 2.

II.2 Définition

Nombres rationnels

Les nombres rationnels sont les nombres qui s'écrivent comme un quotient de nombres entiers. Plus précisément, x est un nombre rationnel si et seulement s'il existe p et q deux nombres entiers, avec $q \neq 0$ tel que :

$$x = \frac{p}{q}$$

Exemple

Le nombre $0,2$ est rationnel, puisque :

$$0,2 = \frac{1}{5}$$

C'est plus difficile de donner un exemple intuitif de nombres qui n'est pas rationnel. Mais nous allons voir qu'effectivement $\sqrt{2}$ est un exemple de nombre non rationnel.

#+attr$_{\text{latex}}$:options {Nombres irrationnels}

U

n nombre qui n'est pas rationnel est dit *irrationnel*

II.3 Démonstration

Proposition

$\sqrt{2}$ est irrationnel

Demonstration

Cette démonstration est l'occasion de voir en pratique un raisonnement logique utilisé très souvent en mathématiques : le raisonnement par l'absurde.

On suppose que $\sqrt{2}$ est rationnel. D'après la définition, cela signifie qu'il existe p et q deux entiers avec q non nul tels que :

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}$$

On peut supposer que la fraction $\frac{p}{q}$ est une fraction déjà simplifiée au maximum, c'est-à-dire qu'il n'existe aucun facteur en commun entre les entiers p et q.

Puisque $\sqrt{2}^2 = 2$, on en déduit donc que :

$$2 = \frac{p^2}{q^2}$$

Nous allons voir que cette équation est impossible à satisfaire, ou plutôt nous allons voir que s'il en existe une, alors on peut en trouver une «plus petite» et comme ça à l'infini, ce qui n'est pas possible.

En multipliant dans le membre de droite et de gauche par q^2, on aurait alors que :

$$2 \times q^2 = p^2$$

Mais, alors p^2 est pair. Donc p est pair d'après ce que l'on a vu plus haut. Et donc, p^2 est divisible par 4, puisque si $p = 2k$, alors $p^2 = 4k^2$. Ainsi, le nombre $\frac{p^2}{2}$ est un nombre entier qui est pair.

Seulement,

$$q^2 = \frac{p^2}{2}$$

Donc q^2 est pair. Ainsi, de nouveau, on applique la proposition précédente, et on obtient que q est pair.

Finalement, p et q sont pairs, mais on avait supposé en même temps qu'ils n'avaient pas de facteurs communs. On est donc confronté à une impossibilité.

III Inégalités

III.1 La racine carré de somme est plus petite que la somme des racines carrés

Soit a et b deux nombres réels strictement plus grand que 0. On va montrer alors que :

$$\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

Demonstration

Premièrement, pour tout $x, y \in [0; +\infty[$, on a xy si et seulement si x^2y^2. C'est parce que la fonction carré est (strictement) croissante sur $[0; +\infty[$.

Si on pose $x = \sqrt{a+b}$ et $y = \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

Si on montre que x^2y^2 alors on aura montré que xy car $\sqrt{a+b}$ et $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ sont strictement positifs.

On a d'une part :

$$\begin{aligned} x^2 &= (\sqrt{a+b})^2 \\ &= a + b \end{aligned}$$

Et d'autre part :

$$\begin{aligned} y^2 &= (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 \\ &= (\sqrt{a})^2 + (\sqrt{b})^2 + 2\sqrt{a}\sqrt{b} \\ &= a + b + 2\sqrt{a}\sqrt{b} \end{aligned}$$

Donc $y^2 > x^2$ car $\sqrt{a}\sqrt{b} \geq 0$. Donc $y > x$, et donc xy. Et finalement :

$$\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

Et voilà !