

Résolution de l'équation de Laplace, par la méthode de Monte-Carlo

Victor SCHNEIDER, Christophe RIVIERE, Fabien DELHOMME

29 mars 2016

Résumé

L'objectif de ce projet est de calculer une solution de l'équation de Laplace à l'aide de la méthode de Monte-Carlo.

1 Présentation de la méthode de Monte-Carlo

1.1 Introduction

La méthode de Monte-Carlo est une méthode d'approximation numérique qui s'appuie sur les propriétés de la marche aléatoire.

Cette méthode est très utilisée dans les domaines scientifiques nécessitant des approximations numériques. Un exemple, lors de l'expérience permettant de mettre en évidence les oscillations des neutrinos (en 2001), il était nécessaire de comparer les données énergétiques expérimentales avec les valeurs numérique que donnait la théorie, valeurs qu'il a fallu estimer numériquement. On a utilisé pour ce faire la méthode de Monte-Carlo.

source : <http://arxiv.org/abs/nucl-ex/0110005v1>

1.2 Idée générale de la méthode

Théorème (Rappel). *Théorème de transfert dans le cas d'une loi continue.*

Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction densité associée à la variable aléatoire $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$.

Alors

$$\mathbb{E}(\phi(X_1, \dots, X_n)) = \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x_1, \dots, x_n) f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n.$$

Si l'on veut calculer une valeur numérique A bien exprimée, on peut la voir grâce au théorème ci-dessus comme une espérance.

Soit A notre valeur numérique à calculer sur un pavé,

$$A = \int_{[a,b]^n} \phi(x_1, \dots, x_n) f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n.$$

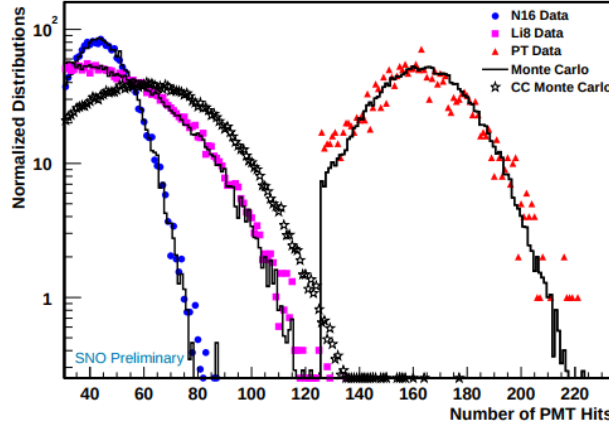


FIGURE 5. Comparison of the Monte Carlo predicted responses to different calibrated sources.

FIGURE 1 – Exemple d'utilisation de la méthode de Monte-Carlo

Alors

$$A = \mathbb{E}(\phi(X_1, \dots, X_n)).$$

où les X_i sont des variables indépendantes suivant toutes la loi uniforme sur $[a, b]$.

L'idée derrière cette méthode est de pouvoir approximer une valeur numérique par une moyenne de marches aléatoires. Le théorème clef qui autorise cette démarche est la loi forte des grands nombres :

Théorème (Rappel). *Loi forte des grands nombres.*

Soit $(Y_k)_{k \geq 0}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et suivant toutes la même loi, à valeurs dans \mathbb{R}^n . On suppose $\mathbb{E}(|Y_1|) < +\infty$. Alors

$$\frac{Y_1 + \dots + Y_N}{N} \xrightarrow[N \rightarrow +\infty]{} \mathbb{E}(Y_1) \text{ presque sûrement.}$$

Autrement dit, si l'on prend un N assez grand, on peut estimer une espérance de manière relativement précise. On peut alors estimer notre valeur numérique A "simplement" par une moyenne de variable aléatoire. On peut donc utiliser cette méthode pour effectuer un calcul numérique de A .

$$A \approx \frac{\phi(Y_1) + \dots + \phi(Y_N)}{N}$$

où tous les Y_i suivent la même loi que X précédemment.

Or numériquement, on sait faire une moyenne, et on sait modéliser des variables aléatoires.

1.3 Monte-Carlo appliquée à la résolution d'un problème de Laplace

Nous allons nous utiliser cette méthode pour établir des solutions numériques à l'équation de Laplace en tout point du domaine.

2 Schéma retenu

2.1 Discrétisation

On commence par discrétiser le domaine choisi. On a choisi de quadriller le domaine. Au début, nous avons commencé par utiliser les coordonnées des points du plan puis exécuter la marche aléatoire en «sautant» de points en points où la distance entre chaque saut est donnée par $1/N$, où N était un paramètre du schéma. Malheureusement, au fur et à mesure des pas, à cause des erreurs d'arrondi, on «sort» de la grille du domaine. Nous avons donc préféré construire une grille (une matrice) qui représente les points du domaine, puis effectuer la marche aléatoire dans cette grille. Les indices d'une matrice étant entier, il n'y a plus d'erreur d'arrondi possible.

La discrétisation s'effectue donc grâce à une matrice remplie de 1 ou 0 pour indiquer respectivement si un point se trouve ou non dans le domaine.

2.2 Marche aléatoire

Il faut maintenant parcourir tout les points de la grille qui sont à l'intérieure du domaine. Pour chaque point du domaine, on lance K marches aléatoires qui commencent en ce point. On fait ensuite la moyenne de toutes les valeurs données par la fonction au bord en tout les points à l'extérieure du domaine atteint après une marche aléatoire.

2.3 Paramètres du schéma

- N correspond au nombres de carré de la grille qui discrétise le domaine. Plus ce nombre est élevé, plus la discrétisation est fine.
- K nombre de marches aléatoires effectuées pour chaque points du plan.

3 Convergence

Pour analyser la convergence nous avons procédés comme il suit.

4 Avantages et désavantages de la méthode de Monte-Carlo

On voit tout de suite les intérêt de cette méthode pour le calcul de la solution de l'équation de Laplace :

- La relative simplicité du schéma : la seule difficulté qui s'est présentée fut de créer une grille pour lancer la marche aléatoire.
- Une parallélisation du calcul possible : la solution est construite point par point (!). En effet, contrairement aux schémas classiques qui calculent la valeur en chaque point en faisant la moyenne des points autour, ce schéma aléatoire peut par exemple calculer la solution en un point précis. On remarque aussi que l'on peut facilement stopper le calcul d'une solution pour le reprendre plus tard : il suffit de faire une moyenne des deux résultats.

On notera tout de même quelques désavantages :

- Le bon fonctionnement de l'algorithme dépend en pratique d'un bon générateur de hasard. Ce sujet dépasse (de loin) le cadre de ce projet, mais il serait bon de vérifier la qualité du hasard proposée par *Scilab*
- La difficulté théorique pour justifier la convergence du schéma : il nous faut en effet les résultats issue de la théorie de la probabilité, et en particulier de la marche aléatoire.