

Résolution de l'équation de Laplace, par la méthode de Monte-Carlo

Victor SCHNEIDER, Christophe RIVIERE, Fabien DELHOMME

28 mars 2016

Résumé

L'objectif de ce projet est de calculer une solution de l'équation de Laplace à l'aide de la méthode de Monte-Carlo.

1 Présentation de la méthode de Monte-Carlo

La méthode de Monte-Carlo s'appuie sur les propriétés de la marche aléatoire.

2 Schéma retenu

2.1 Discrétisation

On commence par discrétiser le domaine choisi. On a choisi de quadriller le domaine. Au début, nous avons commencé par utiliser les coordonnées des points du plan puis exécuter la marche aléatoire en «sautant» de points en points où la distance entre chaque saut est donnée par $1/N$, où N était un paramètre du schéma. Malheureusement, au fur et à mesure des pas, à cause des erreurs d'arrondi, on «sort» de la grille du domaine. Nous avons donc préféré construire une grille (une matrice) qui représente les points du domaine, puis effectuer la marche aléatoire dans cette grille. Les indices d'une matrice étant entier, il n'y a plus d'erreur d'arrondi possible.

La discrétisation s'effectue donc grâce à une matrice remplie de 1 ou 0 pour indiquer respectivement si un point se trouve ou non dans le domaine.

2.2 Marche aléatoire

Il faut maintenant parcourir tout les points de la grille qui sont à l'intérieure du domaine. Pour chaque point du domaine, on lance K marches aléatoires qui commencent en ce point. On fait ensuite la moyenne de toutes les valeurs données par la fonction au bord en tout les points à l'extérieure du domaine atteint après une marche aléatoire.

2.3 Paramètres du schéma

- N correspond au nombre de carré de la grille qui discrétise le domaine. Plus ce nombre est élevé, plus la discrétisation est fine.
- K nombre de marches aléatoires effectuées pour chaque points du plan.

3 Convergence

Pour analyser la convergence nous avons procédés comme il suit.

4 Avantages et désavantages de la méthode de Monte-Carlo

On voit tout de suite les intérêt de cette méthode pour le calcul de la solution de l'équation de Laplace :

- La relative simplicité du schéma : la seule difficulté qui s'est présentée fut de créer une grille pour lancer la marche aléatoire.
- Une parallélisation du calcul possible : la solution est construite point par point (!). En effet, contrairement aux schémas classiques qui calculent la valeur en chaque point en faisant la moyenne des points autour, ce schéma aléatoire peut par exemple calculer la solution en un point précis. On remarque aussi que l'on peut facilement stopper le calcul d'une solution pour le reprendre plus tard : il suffit de faire une moyenne des deux résultats.

On notera tout de même quelques désavantages :

- Le bon fonctionnement de l'algorithme dépend en pratique d'un bon générateur de hasard. Ce sujet dépasse (de loin) le cadre de ce projet, mais il serait bon de vérifier la qualité du hasard proposée par *Scilab*
- La difficulté théorique pour justifier la convergence du schéma : il nous faut en effet les résultats issue de la théorie de la probabilité, et en particulier de la marche aléatoire.