Intégration de fonctions réelles

Delhomme Fabien

1 Motivation

Ce cour présente le dernier outil de l'arsenal du mathématicien, et il s'agit, avec la dérivée, d'un des outils sans doute les plus puissants : l'intégration. Là encore, ce procédé est utilisé *dans quasiment toutes les sciences* comme la physique, la chimie, mais aussi l'économie, l'ingénierie et bien bien d'autres encore.

Un mot sur le concept d'intégration en mathématiques. Vous apprendrez ici ce qu'on appelle l'intégration de Riemann. Pour une multitude de raisons, cette manière d'intégrer n'est pas très efficace (mais cela va être suffisamment puissant pour nous !). C'est pourquoi en troisième année de licence vous serez sensibilisé (si vous suivez un cursus universitaire) à une autre définition de l'intégration, plus générale et abstraite, l'intégration de Lesbegue. Pour ceux d'entre vous qui continue à faire des maths, sachez que le *principe* est presque le même, donc concentrez vous sur la démarche de la définition de l'intégrale, votre apprentissage n'en sera que facilité.

Tout commence par une question assez simpliste au premier abord : comment calculer l'aire sous la courbe d'une fonction positive ?

C'est-à-dire, regardez la figure 1, comment calculer l'aire nommée I pour une fonction f qui est définie entre a et b deux nombres réels ?

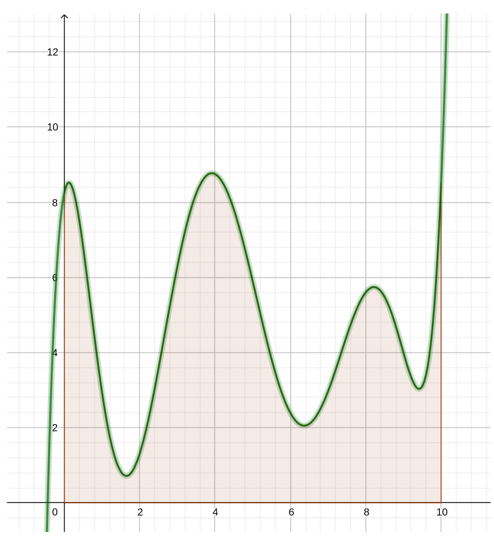

Figure 1 – Aire sous la courbe d'une fonction f compliquée

Nous verrons que cette question a des liens très profond avec la notion de dérivation, et qu'elle permet aussi (entre autre) d'approximer des fonctions comme les fonctions trigonométriques, exponentielle, ou logarithmique.

Enfin, beaucoup (si ce n'est tous) d'énoncé au bac portent sur ces fameuses *intégrales*.

2 Définition

2.1 Contexte

On souhaite donc définir **l'aire sous la courbe d'une fonction**. C'est littéralement le but premier de l'intégration.

Pour plus de simplicité, nous allons d'abord considéré uniquement dans les premières propositions, les fonctions $f : I \to \mathbb{R}$ qui sont positive et continue sur $I = [a, b]$ où $a, b \in \mathbb{R}$. Nous verrons comment étendre ce cas à d'autres fonctions (par exemple des fonctions négatives). Dans les années supérieure d'étude, vous verrez comment définir l'intégrale d'une fonction qui n'est pas forcément continue, ou encore qui admet des valeurs complexes. Tout cela est pour l'instant trop compliqué pour nous, et nous nous restreignons aux fonctions continues et réelles. Pour les preuves des théorèmes fondamentaux de l'intégration, nous présenterons uniquement le cas où la fonction est de plus positives (voire même croissante).

Même pour cette classe de fonction, le problème, c'est qu'il n'existe pas vraiment de formule toute faite pour donner exactement l'aire sous la courbe d'une fonction. La preuve, si vous regarder la figure 1, vous pouvez vous convaincre qu'il est très difficile, si on imagine une fonction qui varie beaucoup, de définir la notion d'aire sous la courbe.

Dans le reste du paragraphe je vous présente les principales idées qui permettent de définir proprement l'intégration. Je vous conseille de lire cela en *deuxième lecture*. Ceci n'est pas vraiment au programme du bac, mais néanmoins vous *devez* comprendre les grandes lignes. Un bon test pour savoir si vous avez compris, est le suivant : êtes vous, après la lecture de ce cours, capable d'écrire un algorithme qui calcule l'aire d'une fonction continue entre $[a, b]$ avec une précision de 10^{-1} ?

Voici donc une démarche, fondamentale en mathématiques, pour définir certaine notion en analyse, comme l'intégration :

- En premier, définir la notion que l'on souhaite sur une classe de fonction restreinte, où l'on peut définir facilement cette fonction
- Deuxièmement, étendre cette définition à toutes les autres fonctions que l'on peut *approximer* au moyen de la définition suivante.

2.2 Première étape : calculer l'aire sous la courbe de fonctions constantes

Pour la première étape, considérons l'ensemble des fonctions constantes définie sur un intervalle $[a, b]$, avec a et b des nombres réels. Il est très facile de calculer l'aire sous la courbe de telle fonction.

Vous pouvez vous convaincre que c'est exactement l'aire d'un *rectangle*, et il suffit de multiplier la largeur par la longueur pour obtenir l'aire sous la courbe. Notons $\int_a^b f(t)dt$ l'aire sous la courbe d'une fonction f sur l'intervalle $[a, b]$.

On aboutit donc à la formule suivante, qui est donc valide uniquement pour des *fonctions constantes sur l'intervalle* $[a, b]$:

$$\int_a^b f(t)dt = f(a)(b-a) = f(b)(b-a)$$

En effet, f est constante sur $[a, b]$, donc $f(a) = f(b)$.

2.3 Deuxième étape : approximer toutes les fonctions positives par des fonctions constantes

Décrivons pourquoi une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$ peut être approximée par plusieurs fonctions constantes.

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$, positive. On va supposer de plus que f est croissante. Alors, on peut *découper* l'intervalle $[a, b]$ en plusieurs sous intervalle. Vous trouverez dans les figures suivantes 2 et 3, des schémas avec un découpage en 10 puis 100 sous intervalles.

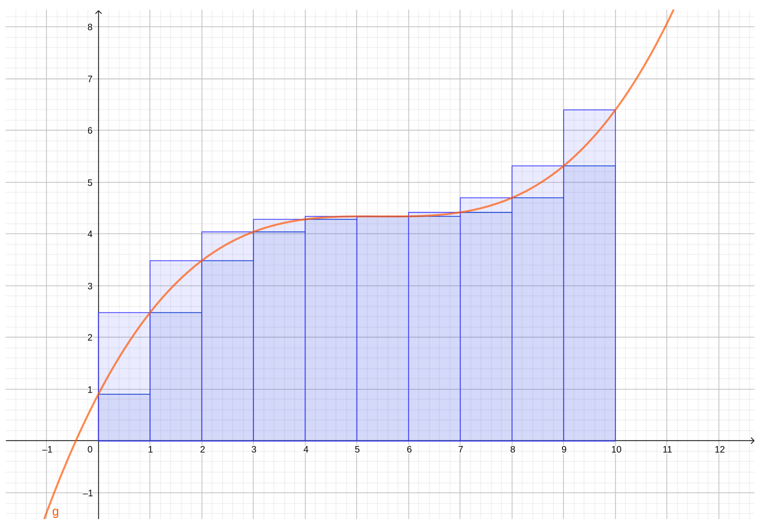

FIGURE 2 – Découpage de l'intervalle en 10 sous intervalles identiques

Ensuite, sur chaque sous intervalle, on approxime l'expression de f par sa valeur au début du sous intervalle. Certes, on fait une erreur, mais on peut dire que cette erreur n'est pas trop grande si on prend des sous intervalles très petits, puisque pour x compris entre a et $a + h$ (avec h un nombre strictement positif mais petit), alors $f(x)$ est proche de $f(a)$. Si vous réfléchissez, vous trouverez que c'est exactement l'idée de la définition d'une fonction continue.

Ainsi, on peut approximer l'aire sous la courbe de f par la somme des rectangles qui sont en dessous de la courbe f. L'idée est donc d'obtenir une équation du style :

$$\int_a^b f(t)dt \approx \sum_{k=0}^{n} \text{aire du rectangle de l'intervalle } I_k$$

$$\int_a^b f(t)dt \approx \sum_{k=0}^{n} \text{valeur de f au début du sous intervalle } k * \text{taille du sous intervalle}$$

Avec n le nombre de sous intervalles qui découpent notre intervalle $[a, b]$.

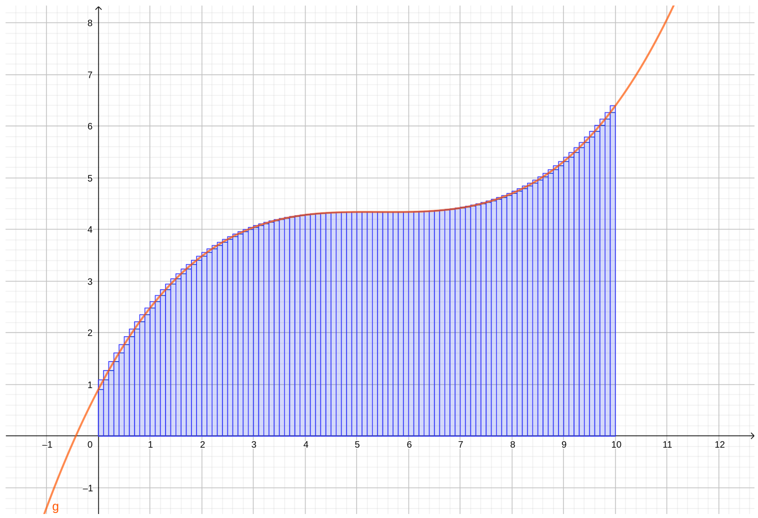

FIGURE 3 – Découpage de l'intervalle en 100 sous intervalles identiques

Maintenant, précisons une manière de découper notre intervalle. On souhaite donc découper en n morceaux notre intervalle $[a, b]$. Cela nous donne des morceaux d'intervalle de taille $\frac{b-a}{n}$. Ensuite, il nous faut un moyen de sauter de début de sous intervalle à début de sous intervalle suivant.

Pour cela, imaginons que nous sommes au 4eme sous intervalle en partant de la gauche. Cela veut dire que nous sommes séparée de 4 sous intervalles du point de départ, a. Donc, nous sommes au point $a + 4 * \frac{b-a}{n}$. Finalement, le k-ième intervalle I_k peut donc se définir comme :

$$I_k = \left[a + k\frac{b-a}{n}, a + (k+1)\frac{b-a}{n}\right]$$

Exercice Vérifiez que b appartient bien à l'intervalle I_n. Vérifiez que chaque intervalle est de longueur $\frac{1}{n}$ (Indication, pour trouver la longueur d'un intervalle $[c, d]$, il suffit de calculer $d - c$).

Ensuite, sur chaque sous intervalle I_k, nous approximons $f(x)$ par le nombre $f(a + k\frac{b-a}{n})$. Ainsi, on aboutit à l'expression suivante :

$$\int_a^b f(t)dt \approx \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) * \frac{1}{n}$$
$$\int_a^b f(t)dt \approx \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)$$

En effet, le terme $\frac{1}{n}$ est donc présent dans chaque terme de la somme, et ne change pas de terme en terme. La deuxième ligne est donc une simple factorisation par ce terme.

Il s'agit donc de montrer que $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)$ converge vers quelque chose, et nous noterons ensuite :

$$\boxed{\int_a^b f = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)}$$

2.4 Troisième étape : vérification de la convergence

Pour montrer que cette convergence a bien lieu, il faut être un peu plus fin. On va d'une part surestimer et d'autre part sous-estimer l'aire d'une fonction sous la courbe. En effet, si on regarde bien ce que l'on a fait, avec une fonction croissante, si on calcule la somme décrite plus haut, pour un n très grand par exemple, nous *sous-estimons* la véritable valeur de l'aire de la courbe. En effet, f est croissante, donc, pour tout k compris entre 0 et $n-1$ $x \in \left[a + k\frac{b-a}{n}, a + (k+1)\frac{b-a}{n}\right]$:

$$f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) \leq f(x) \leq f\left(a + (k+1)\frac{b-a}{n}\right)$$

Alors, nous allons encadrer la véritable valeur de l'intégrale de f par :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) \leq \int_a^b f \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) \tag{1}$$

D'où finalement :

$$0 \leq \int_a^b f - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) \leq \frac{f(a)-f(b)}{n} \tag{2}$$

Donc, par le théorème des gendarmes, le membre de droite tend vers 0 quand n tend vers l'infini, donc :

$$\boxed{\int_a^b f = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)}$$

2.5 Conclusion et notation

2.5.1 Les détails techniques qui ne sont pas au programme.

Nous avons donc vu dans les paragraphes précédents comment était définie la notion d'aire sous la courbe. Il suffit de calculer une approximation avec des rectangles, puis de rendre cette approximation de plus en plus précise en augmentant le nombre de subdivision de l'intervalle. Il y a beaucoup de détails techniques qui sont passés sous silence, mais qui sont très intuitif à comprendre. Voici les détails qui ne sont pas explicités :

— On peut montrer que la définition de l'aire sous la courbe d'une fonction f ne *dépend pas* de la subdivision choisie. Les détails techniques sont inutilement compliqués pour en gros affirmer que plus on affine les rectangles, meilleurs est l'approximation, et ceci quelque soit la manière dont on a choisi la largeur de chaque rectangle.

— On peut montrer que la définition fonctionne aussi pour des fonctions qui ne sont ni croissante ni décroissante sur $[a, b]$. La démonstration, bien que pas foncièrement difficile, est légèrement différente, et utilise des techniques qui ne sont pas au programme du bac.

Nous allons donc admettre tous ces résultats. Ainsi, nous avons une définition d'une aire sous la courbe.

2.5.2 Notation

Il existe deux notations pour désigner l'aire sous la courbe d'une fonction f sur l'intervalle $[a,b]$. Les deux notations contiennent le symbole $\int$ qui forme un « S » pour rappeler que l'on *Somme* sur des quantités infiniment petite.

La première notation, est la suivante :

$$\int_a^b f(t)dt$$

On note l'apparition du symbole dt qui désigne en quelque sorte la largeur infiniment petite du rectangle, et $f(t)$ représente sa hauteur.

Sachez que la « variable » t est ce que appelle une *variable muette*. C'est-à-dire que son *nom* n'a pas d'importance, on peut remplacer le symbole t par x ou encore par un smiley « :D » que cela marcherait tout autant.

Attention par contre à ne pas appeler une variable muette par le même symbole qu'une autre variable d'un énoncé.

La deuxième notation, est simplement :

$$\int_a^b f$$

On ne fait donc pas apparaître le variable muette. C'est un style qui n'est pas souvent utilisé dans les copies du bac, mais qui apparaît parfois.

Maintenant que vous avez été sensibilisé au deux principales notations de l'intégrale, nous pouvons passer au paragraphe suivant qui a pour objectif de déterminer comment varie l'aire sous la courbe sachant une fonction f continue sur $[a,b]$ donnée. En outre, la question que l'on se pose est la suivante : existe-t-il un lien entre la fonction qui donne l'aire sous la courbe entre $[a,x]$ avec $x \in [a,b]$ et f ?

3 Propriété de l'intégrale

3.1 Positivité de l'intégrale

Commençons par une première propriété, appelée la propriété de *positivité de l'intégrale*. Cette propriété, innocente aux premiers abords, et en fait très importante, et admet de nombreuses et utiles propositions !

Proposition : Soit une fonction f continue et positive sur un intervalle $[a,b]$. Alors on a :

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0 \quad \text{et, si } a = b \text{ alors} \quad \int_a^b f(x)dx = 0$$

Exercice : Prouver ce résultat en interprétant $\int_a^b f(x)dx$ comme l'aire sous la courbe d'une fonction f.

3.2 Relation de Chasles

Encore une relation très connue, que nous retrouverons avec les vecteurs (gardez en tête la structure de cette proposition). Là encore la démonstration est «facile» si on fait un dessin, et toujours en interprétant $\int_a^b f(x)dx$ comme l'aire sous la courbe de la fonction f.

Proposition : Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a;c]$ et soit $b \in [a;c]$. On a :

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$$

Exercice : Faites un dessin qui correspond à une démonstration heuristique de cette proposition.

3.3 Comment définir l'aire sous la courbe d'une fonction négative ?

La propriété de Chasles nous «oblige» pour être cohérent à définir, pour une fonction négative sur un intervalle $[a, b]$:

$$\int_a^b f = -\int_a^b (-f)$$

Où $-f$ est une (donc) fonction *positive*.

Ainsi, par exemple, si on doit intégrer entre 0 et 10 une fonction qui est :

— positive entre 0 et 2 et 5 et 10
— négative entre 2 et 5

Alors, on calculera :

$$\int_0^{10} f = \int_0^2 f - \int_2^5 (-f) + \int_5^{10} f$$

3.4 Propriété d'invariance

Encore très classique, sert un peu moins souvent, et se retrouve très vite avec un dessin.

Proposition : Soient f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a, b]$. Soit $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal et T un réel.
Si $\mathcal{C}$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées, alors

$$\int_{-a}^0 f(x)dx = \int_0^a f(x)dx$$

Si $\mathcal{C}$ est invariante par translation de vecteur $T * \vec{i}$ alors

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{a+T}^{b+T} f(x)dx$$

L'énoncé de cette proposition peut être déroutant mais reste très simple. Essayez de comprendre seul cette proposition, et si définitivement vous ne comprenez pas ce que l'on entend par « $T * \vec{i}$ » alors posez moi la question directement.

4 Lien avec la dérivée, théorème fondamentale

Maintenant, que nous avons défini proprement à quoi correspondait l'aire sous la courbe d'une fonction f continue et positive, nous essayons de comprendre la fonction :

$$F : x \mapsto \int_a^x f(t)dt$$

Là encore, on va supposer, pour la démonstration, que la fonction f est croissante et positive.

Pour comprendre une fonction qui a des valeurs réelles, on peut essayer de la dérivée, ou dans un premier temps, voir si la dérivée existe !

Pour cela, il nous faut calculer la limite (revoir le cours sur la dérivation pour comprendre pourquoi) suivante, pour tout $x \in]a, b[$ [1]:

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h}$$

Pour mener à bien ce calcul, il nous faut prendre $x \in]a, b[$ et h suffisamment petit pour que $x + h$ soit encore dans l'intervalle $]a, b[$ [2].

On a :

$$\begin{aligned} F(x+h) - F(x) &= \int_a^{x+h} f(t)\, dt - \int_a^x f(t)\, dt \\ &= \int_x^{x+h} f(t)\, dt \end{aligned}$$

Or, si la fonction f est croissante sur l'intervalle $]a, b[$, cela signifie que quelque soit la valeur de $h > 0$, $f(x+h) \geq f(x)$.

Autrement dit l'aire sous la courbe de f entre x et $x + h$:

— Peut toujours être minorée par l'aire $h * f(x)$ du petit rectangle,
— Peut toujours être majorée par l'aire $h * f(x+h)$ du grand rectangle.

Mathématiquement, on obtient, pour tout $h > 0$ suffisamment petit :

$$hf(x) \leq \int_x^{x+h} f(t)\, dt \leq hf(x+h)$$

En divisant chaque terme par h, qui est strictement positif, on obtient :

$$f(x) \leq \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)\, dt \leq f(x+h)$$

1. Alors, pourquoi prendre l'intervalle ouvert ?
2. Alors, pourquoi prendre l'intervalle ouvert ?

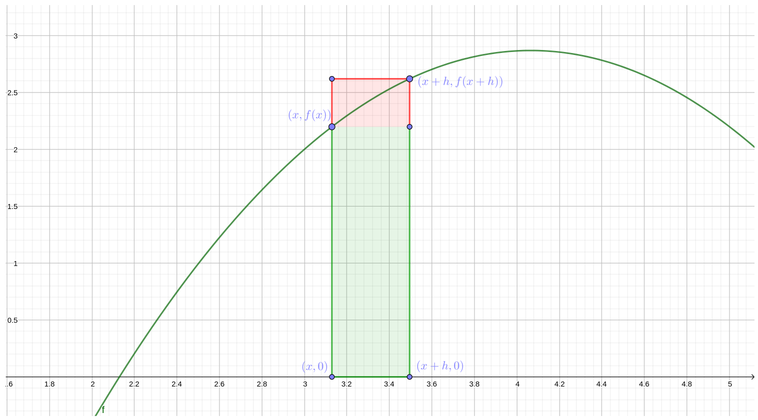

FIGURE 4 – Situation de la preuve

D'où, pour tout $h > 0$:

$$f(x) \leq \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \leq f(x+h)$$

Or, la fonction f est continue, donc si h tend vers 0 on sait que $f(x+h)$ tend vers $f(x)$. Par théorème des gendarmes en passant à la limite lorsque h tend vers 0, on obtient ainsi que F est dérivable pour tout $x \in]a, b[$, et que sa dérivée F' vaut :

$$\boxed{F'(x) = f(x)}$$

Exercice : Dans les calculs effectués plus haut, h est considéré comme un nombre strictement positif. Démontrer que les calculs sont les même pour h strictement négatif. Autrement dit, la fonction F est de dérivée *continue* !

Finalement nous avons prouvé un théorème fondamental de l'intégration :

Théorème : Soient f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a, b]$ et F la fonction définie sur $[a, b]$ par

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

La fonction F est dérivable sur $[a, b]$ et a pour dérivée f.

Ce théorème motive donc la définition suivante :

Définition : Soit f une fonction définie sur un intervalle I. F est une primitive de f sur I si F est dérivable sur I et si $F' = f$.

Donc finalement, avec quelques autres calculs que l'on passe sous silence, nous avons le théorème suivant :

Théorème : Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur I.

Attention Je dois vous mettre en garde sur l'expression « admet *des* primitives » à ne pas confondre avec « admet *une* primitive». En effet, il n'existe pas d'unique primitive à proprement parler d'une fonction f. S'il en existe une, alors il en existe une infinité d'autres ! Si vous avez F une primitive de f, alors $x \mapsto F(x) + 2$ est encore une autre primitive ! En remplaçant 2 par n'importe quelle valeur de votre choix, vous avez autant de primitive que de valeurs réelles ! Mais la question est : existe-t-il d'autres primitives possibles ? Réponse :

Théorème : Soit f une fonction continue sur un intervalle I et soit F une primitive de f sur I.

- Les primitives de f sur I sont les fonctions G définies sur I par $G(x) = F(x) + k$ où $k \in \mathbb{R}$.
- Quels que soient x_0 et y_0 appartenant à I, il existe *une unique* primitive F de f sur I telle que $F(x_0) = y_0$

Pour vérifier que vous avez bien compris ce théorème, essayez de faire cet exercice qui en est une application directe !

Exercice d'application Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 6x^2 - 3x + 1$

- Montrer que la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = 2x^3 - \frac{3}{2}x^2 + x$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
- En déduire l'ensemble des primitives de f sur $\mathbb{R}$.
- Déterminer l'unique primitive de H de f sur $\mathbb{R}$ qui vérifie la relation $H(1) = 0$.

4.1 Ultime lien : le calcul de l'aire à l'aide d'une intégrale

Maintenant vous avez vu deux aspects de l'intégration :

- C'est l'aire sous la courbe d'une fonction continue
- Intégrer c'est aussi trouver une primitive d'une fonction.

Dans ce paragraphe, nous verrons donc *comment* calculer en pratique l'aire des fonctions dont on connait une primitive.

Propriété Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a, b]$. Soit F une primitive de f sur $[a, b]$. On a alors :

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)}$$

Quelques remarques qui s'imposent :

- Ce calcul ne *dépend pas* de la primitive que vous avez choisie (pourquoi ? **Exercice** le prouver par calcul).
- Le nombre $F(b) - F(a)$ est noté $[F(x)]_a^b$.

5 Applications de l'intégration

5.1 En analyse

Les applications en analyse sont très nombreuses. Nous verrons dans cette section qu'un seul cas. Dans les calculs détaillés plus bas, nous utiliserons *toutes* les propriétés de l'intégrale, donc vous pouvez tester votre compréhension sur toutes les notions rattachées à l'intégration en un seul exemple. Prenez donc le temps de bien lire la suite, et de refaire les calculs par vous même sur une feuille à coté.

Nous nous intéresserons donc à la fonction exponentielle. Commençons par un petit calcul en guise d'échauffement, calculons :

$$\int_0^1 \exp x dx$$

C'est-à-dire l'aire sous la courbe de la fonction exponentielle entre 0 et 1.

Eh bien, nous connaissons une primitive de la fonction $x \mapsto \exp(x)$. Cette fonction est continue, et de plus $\exp' = \exp$. Donc **une** primitive de la fonction exponentielle est donnée par la fonction exponentielle. Donc, d'après le théorème fondamentale de l'analyse :

$$\int_0^1 \exp(x)dx = [\exp(x)]_0^1 = \exp(1) - \exp(0) = e - 1 \approx 1.718$$

Maintenant que nous nous sommes échauffés, essayons de combiner la propriété de *positivité de l'intégrale* avec l'exponentielle.

Dans les exercices, nous avons déjà pourquoi $\exp x \geq x + 1$ pour tout x dans $\mathbb{R}$ (pour retrouver ce résultat, détailler le tableau de variation de la fonction $x \mapsto \exp x - x - 1$ sur $\mathbb{R}$, puis dresser le tableau de signe).

À partir de cette inégalité, on peut intégrer. Pour éviter de faire des confusions, je vais remplacer l'inégalité par la suivante, parfaitement identique :

$$\text{Pour tout} \quad u \in \mathbb{R} \exp u \geq u + 1$$

J'ai simplement changé la variable (u va devenir la variable muette d'intégration). Maintenant, pour tout x dans $\mathbb{R}$, je peux intégrer le membre de gauche et le membre de droite entre de 0 et x. On obtient ainsi :

$$\int_0^x \exp(u)\ du \geq \int_0^x (u+1)du$$

Or, nous pouvons calculer chaque membre de cette nouvelle inéquation. En effet :

$$\int_0^x \exp(u)\ du = [\exp u]_0^x = \exp(x) - \exp(0) = \exp(x) - 1$$

Et d'autres part, par *linéarité de l'intégrale* :

$$\int_0^x u + 1\ du = \int_0^x u\ du + \int_0^x 1\ du$$

Or :

$$\int_0^x u\ du = \left[\frac{1}{2}u^2\right]_0^x = \frac{1}{2}x^2 - 0$$

En effet, **une** primitive de la fonction $u \mapsto u$ (qui est évidemment continue), est donnée par la fonction $u \mapsto \frac{1}{2}u^2$ (vérifier en dérivant cette dernière fonction).
Et :

$$\int_0^x 1 = x$$

Vous pouvez trouver ce résultat en disant qu'une primitive de la fonction $u \mapsto 1$ est la fonction

$u \mapsto u$, mais honnêtement, si vous faites un dessin, vous vous rendez compte que vous êtes en train d'intégrer une fonction constante, donc l'aire sous la courbe d'une telle fonction est donné par l'aire du rectangle ainsi dessiné (faites un dessin). Et $1 * x = x$.

On aboutit ainsi à une nouvelle inéquation :

$$\text{Pour tout } x \in \mathbb{R} \quad \exp(x) - 1 \geq \frac{1}{2}x^2 + x$$

Finalement :

$$\text{Pour tout } x \in \mathbb{R} \quad \boxed{\exp(x) \geq \frac{x^2}{2} + x + 1}$$

Vous retrouvez par exemple le résultat :

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\exp(x)}{x} = +\infty$$

En divisant par $x \neq 0$, puis en utilisant le théorème de comparaison.

Mais vous pouvez réitérer le processus que l'on vient d'effectuer ! Essayez, et intégrez le terme à gauche et le terme à droite de cette nouvelle équation, vous trouverez :

$$\text{Pour tout } x \in \mathbb{R} \quad \boxed{\exp(x) \geq \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + x + 1}$$

Et par exemple :

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\exp(x)}{x^2} = +\infty$$

En poussant la généralisation plus loin, essayez de montrer par récurrence que :

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, \text{ pour tout } x \in \mathbb{R} \quad \boxed{\exp(x) \geq \frac{x^n}{n!} + \ldots + \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + x + 1}$$

Avec $n! = n * (n-1) * \ldots * 1$.

Puis, que pour tout $n \in \mathbb{N}$ (attention il faut utiliser le résultat précédent au rang $n+1$ et non pas au rang n) :

$$\boxed{\lim_{x \to \infty} \frac{\exp(x)}{x^n} = +\infty}$$

5.2 En physique

Dans ce court paragraphe, je vais essayer de détailler les opérations effectuée en mécanique du solide en physique.

En effet, la première principe de la mécanique classique est l'énoncé suivant :

$$m\vec{a} = \sum_i \vec{F}_i$$

Où, m est une constante et représente la *masse* d'un objet, $\vec{a}$ est le vecteur accélération de cet objet, et les $\vec{F_i}$ représente les différentes forces qui s'exercent sur cet objet.

Pour simplifier la situation, considérons la chute d'un objet (disons une pomme) dans le *vide* dans un repère galiléen (sinon nous ne pouvons pas appliquer la loi de Newton). Plaçons donc un objet à disons 30 mètres de hauteur de mon repère, placé sur le sol. Lachons l'objet *sans vitesse initiale* au temps $t_0 = 0$. Puisque la seule force qui s'exerce sur cet objet (c'est là que l'on utilise l'hypothèse de l'expérience dans le vide) est la force de gravitation [3] qui se calcule par mg, où g est la constante de gravitation de la Terre, on obtient donc :

$$mg = ma$$

L'accélération n'est plus un vecteur, puisque l'on regarde simplement l'accélération verticale de l'objet en fonction du temps. D'ailleurs, mathématiquement, il faudrait en toute rigueur noter $a(t)$ pour signifier que a est une fonction (au sens mathématique du terme !) qui dépend du temps. Ici, notre accélération est constante et vaut g pour tout temps t. Dit autrement, pour tout t :

$$a(t) = g$$

IL serait intéressant sachant cette information, de connaitre la trajectoire de l'objet. Pour cela, il faut déterminer la *position* de l'objet dans notre repère. Notons cette position, comme il est coutume de le faire, par $x(t)$. Nous savons de plus que :

— La dérivée de la position, est la vitesse de l'objet,
— la dérivée de la vitesse de l'objet est son accélération.

Dit autrement :

$$\begin{cases} x'(t) & = v(t) \\ v'(t) & = a(t) \end{cases}$$

On reconnait donc que la vitesse est *une primitive* de l'accélération, et la position est une *primitive* de la vitesse. Pour connaitre la position, il faut d'abord *intégrer* la vitesse, et pour avoir la vitesse, il faut intégrer l'accélération. Ainsi, pour obtenir la position de l'objet, il faut *intégrer deux fois* l'accélération.

Ainsi, pour un temps $t > t_0 = 0$, on a, d'après ce même cours :

$$\begin{aligned} v(t) - v(t_0) &= \int_{t_0}^{t} a(u)du \\ v(t) - v(t_0) &= \int_{0}^{t} gdu \\ v(t) - v(t_0) &= [gu]_{u=0}^{u=t} \end{aligned}$$

D'où $v(t) = gt + v(t_0)$.

Intégrons une nouvelle fois pour obtenir la *position* en fonction du temps, en utilisant à loisir la *linéarité de l'intégrale* !

$$x(t) = \int_{t_0}^{t} v(u)\ du = \int_{t_0}^{t} gu + v(t_0)\ du = g\int_{t_0}^{t} u + (t - t_0) * v(t_0)$$

3. est-ce vraiment une force ? Soyez curieux, et renseignez vous !

Ainsi :

$$x(t) = \frac{1}{2}gt^2 - \frac{1}{2}gt_0^2 + (t - t_0) * v(t_0)$$

Ce qui devrait coller avec les calculs que vous avez fait en physique.

5.3 En probabilité

Deux mots pour résumer en quoi l'intégration a un lien très fort avec la probabilité. En effet, nous verrons lors du cours sur les probabilités que l'on est souvent amené, lorsque l'on considère une expérience aléatoire avec un nombre fini d'issues, des sommes tels que :

$$P(\{X = 0, X = 1, \dots X = n\}) = \sum_{i=1}^{n} P(\{X = i\})$$

Pour que cette somme soit valable, il manque plein d'hypothèses que je ne détaillerai pas ici, mais retenez que lorsque l'on a affaire à une expérience aléatoire qui admet une infinité d'issues possibles, alors la somme « $\sum$ » se transforme en somme infinie, soit l'intégrale « $\int$ ». Je reste volontairement flou pour l'instant.

6 Bonus : l'intégration par partie (hors programme)

Dans ce paragraphe, je vous présenterai une technique qui n'est plus enseignée au bac (mais qui l'était il n'y a pas si longtemps), et qui est très puissante (on pourrait presque dire que des domaines entiers des mathématiques sont construits autour de cette technique).

Tout commence avec la simple formule de la dérivée d'un produit de fonction :

$$(uv)' = u'v + v'u$$

Si on intègre entre a et b, on obtient

$$\int_a^b (uv)' = \int_a^b u'v + \int_a^b v'u$$

Finalement :

$$\boxed{\int_a^b u'v = [uv]_{x=a}^{x=b} - \int_a^b v'u}$$

Exemple : calculer à l'aide de l'intégration par partie :

- $\int_1^2 \ln(x)dx$
- $\int_0^\pi \cos(x) * \sin(x)dx$

Cette méthode est extrêmement puissante. Elle est très utilisée en analyse mathématique, mais aussi en physique.