Les nombres complexes

Delhomme Fabien

1 Introduction

1.1 Motivation

Les complexes, un des chapitres les plus compliqués à introduire peut-être. Pour commencer, sachez que les complexes ont été d'abord appelés les *imaginaires*, car on pensait qu'ils n'étaient pas *réels*[1].

Or, rien de plus faux. Les complexes sont présents, et incontournables dans de nombreux domaines :

— Physique (électronique, mécanique)
— Ingénierie (conception de machine, étude de vibrations d'un véhicule par exemple une voiture etc)
— Mathématiques (évidemment) : les complexes jouent un rôle plus que central, en géométrie, en algèbre et en analyse !
— Informatique : nous verrons que les complexes servent à encoder les rotations, et donc par exemple de faire des rotations d'images
— Et surement beaucoup d'autres.

Le grand paradoxe, c'est que pour découvrir les complexes, on passe nécessairement par une incompréhension totale, devant des « nombres » qui sortent de nulle part, etc. Ne vous inquiétez pas, vous verrez que contrairement au nom, les complexes sont simples d'utilisations, voire même nous simplifie grandement la vie !

1.2 Portes d'entrées

Comme souvent en mathématiques, il existe plusieurs « portes d'entrée » pour découvrir les complexes :

— Les polynômes
— La géométrie
— Les matrices

Nous verrons dans ce cours les deux premiers, en insistant beaucoup sur le premier. La relation avec les matrices sera peut-être expliquée dans le cours de l'enseignement spécialisé.

Je vous propose donc d'entrer dans le monde des complexes par la grande porte : les polynômes !

2 Les nombres complexes : définition

2.1 Soit i un nombre tel que...

Nous avons vu dans le chapitre sur les polynômes, que certains d'entre eux n'admettent pas de racine réelle. Rapellons qu'une racine désigne un nombre x tel que $P(x) = 0$. Autrement dit, une racine d'un polynôme est un nombre qui « annule » un polynôme.

1. comprenez réel au sens non mathématique du terme. On pourrait remplacer par « palpable »

Prenons l'exemple le plus simple que l'on puisse imaginer :

$$P(x) = x^2 + 1$$

. Ce polynôme n'a effectivement pas de racine réelle puisque $x^2 \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, et ainsi $x^2 + 1 > 0$.

Mais imaginez un peu, (et vous comprenez peut-être pourquoi historiquement, les premiers mathématiciens qui ont osé, étaient un peu fébriles à ce moment là), que l'on *rajoute* une racine à ce polynôme. C'est-à-dire que, puisque P n'a pas de racine, on va lui en *ajouter* une !! C'est-à-dire que l'on va *définir* i comme étant un nombre, tel que $i^2 = -1$ (et donc $P(i) = 0$). Attention, i n'est pas un nombre réel, vous l'aurez bien compris !

Nous avons donc défini, ou plutôt imaginé, un nombre i tel que :

$$\boxed{i^2 = -1}$$

Remarquons alors dès à présent que notre polynôme de départ $P(x) = x^2 + 1$, admet à présent deux racines (complexes donc). En effet, on a créé la première avec $x = i$ mais on remarque, par analogie avec la multiplication que l'on connait depuis la tendre enfance que :

$$(-i)^2 = (-1 * i)^2 = (-1)^2 * i^2 = 1 * (-1) = -1$$

On a donc une autre racine de P avec $x = -i$.

2.2 Opérations dans les complexes

2.2.1 Multiplier i par un réel

Nous allons maintenant présenter les opérations possibles que l'on peut faire avec ce nouveau nombre i.

Dans les calculs effectués plus haut, le nombre i est considéré comme une inconnue quelconque, et les règles de calculs sont les mêmes que les manipulations effectuées pour résoudre une équation comme $3x + 2 = 3$. On définit donc naturellement la multiplication de i par un réel quelconque $a \in \mathbb{R}$ par le nombre (complexe) $a * i$ noté souvent ai. Notez alors que $ai = ia$, comme d'habitude.

Par exemple, si on veut multiplier 3 par i, alors on écrit tout simplement $3i$. Maintenant une petite question :

> **Question 1** Vérifier que le polynôme $x^2 + 3$ n'admet pas de racine réelle. Donner alors ses racines complexes. (*Indication* Essayer de calculer $(3i)^2$, et donnez l'autre racine par la même remarque que celle décrite au paragraphe ci-dessus).

2.2.2 Additionner avec i

On peut aussi définir une opération « plus » avec i et un réel. Par exemple, si on veut ajouter 4 à i, alors on écrira $4 + i$.

Allons un peu plus loin, que vaut :

$$z = 4 + i + 3 - 2i$$

Premièrement, notre 4 et notre 3 sont des nombres réels, donc on sait les additionner :

$$z = 7 + i - 2i$$

Maintenant, tout comme le traitement d'une inconnue «x» dans une équation, on devrait pouvoir s'autoriser à factoriser par i :

$$z = 7 + (1 - 2)i$$

On obtient finalement :

$$z = 7 - i$$

Remarquons alors que les deux opérations décrites peuvent être effectuées simultanément, par analogie avec la « distribution » que l'on connait depuis le collège. Par exemple, considérez l'expression complexe suivante :

$$z = (2 + 4i) * 7$$

On distribue comme dans les réels :

$$z = 14 + 28i$$

Et on obtient le résultat !

Question 2 Que vaut $(2 + 4i - 2 - 2i) * 4$?

2.2.3 Multiplions sans gênes avec des complexes !

Nous avons vu comment on pouvait multiplier un nombre i par un nombre réel. Maintenant, imaginons que nous ayons deux nombres $z_1 = 3 + 7i$ et $z_2 = -1 + 3i$. Est-ce qu'on peut définir $z_1 * z_2$? C'est-à-dire une multiplication entre deux complexes quelconque ? Essayons, et commençons par distribuer le produit, comme on sait le faire depuis le collège, puis utilisons les règles vues plus haut pour simplifier l'expression. On obtient alors successivement :

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (3 + 7i)(-1 + 3i) \\ &= -3 + 9i - 7i + (7i) * (3i) \\ &= -3 + 2i + (7 * 3) * (i * i) \\ &= -3 + 2i + 21 * (-1) \\ z_1 z_1 &= -24 + 2i \end{aligned}$$

Vous avez vu ce qui s'est passé ? Le produit des deux nombres (complexes) $7i$ et $3i$ a redonné un nombre réel, qui s'est additionné ensuite avec le nombre -3 !

Question 3 Que vaut $(1 - 2i)(3 - 5i)$. Que vaut $(5 - 4i)(5 + 4i)$. Des remarques concernant ce dernier ?

Question 4 Soient deux complexes $z = a + ib$ et $w = c + id$. Exprimer zw en fonction de a, b, c et d.

Question 5 Est-ce que les identités remarquables vues (et connues ?) depuis le collège fonctionnent avec des complexes ?

2.2.4 Trouver les racines de n'importe quel polynôme de second degré.

Allons un peu plus loin, et tâchons de comprendre ce qui se passe pour les autres polynômes de second degré. Par exemple, si on prend un autre polynôme qui n'admet pas de racine réelle, est-ce que je peux, avec mon nouveau nombre i lui trouver des racines complexes ? La réponse est **OUI**, et c'est un véritable miracle !

Prenons un exemple. Soit Q le polynôme $Q(x) = x^2 + x + 1$, vérifions que ce polynôme n'admet pas de racines réelles.

$$\Delta = 1^2 - 4 * 1 * 1 = -3$$

Δ est strictement négatif, ainsi les formules déjà connues ne marchent plus, à cause de la racine carrée $\sqrt{\Delta}$ qui n'est pas définie sur les nombres négatifs. Il faudrait donc, pour trouver les racines de mon polynôme, pouvoir définir un nombre tel que son carré vaille Δ. Hum, essayons $\sqrt{-\Delta} * i = \sqrt{3} * i$ (forcément, ce nombre ne peut pas être réel, car aucun nombre réel ne peut, une fois élevé au carré, être négatif !).

Qu'est-ce que cela nous donne ?

$$(\sqrt{3} * i)^2 = \sqrt{3}^2 * i^2 = 3 * (-1) = 3$$

Nous avons trouvé une « racine carrée » [2] de Δ ! Donc je peux continuer les formules que nous avons vues en cours, pour obtenir deux nouvelles racines, complexes, de mon polynôme Q :

$$x_1 = \frac{1 + i * \sqrt{3}}{2}$$
$$x_2 = \frac{1 - i * \sqrt{3}}{2}$$

On peut même vérifier que $Q(x_1) = Q(x_2) = 0$!

Question 6 Vérifier que $Q(x_1) = Q(x_2) = 0$.

Nous avons donc [3] rajouté des racines à tous les polynômes !!!

Question 7 Pour un polynôme $az^2 + bz + c$ à discriminant strictement négatif, quelles sont les formules qui nous donne les racines de ce polynôme, en vous aidant de la discussion ci-dessus ?

2.3 Définition du plan complexe

2.3.1 Le plan complexe, et premières notions

L'addition et la multiplication de deux nombres complexes nous redonnent donc toujours un nombre de la forme $a + ib$ avec a et b des nombres réels. D'après les calculs effectués plus haut, on voit que les réels a et les nombres ib avec $b \in \mathbb{R}$ ne se «mélangent» jamais. On pourra interpréter cela géographiquement comme une sorte d'indépendance, si bien que l'on a envie d'associer un complexe $z = a + ib$ avec un **point du plan** (a, b). On peut donc définir les complexes par :

$$\mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

Pour un nombre complexe $z = a + ib$ avec a, b qui sont des nombres réels, on appelle :

— a la *partie réelle* de z, on la note $\mathrm{Re}(z)$
— b la *partie imaginaire* de z, on la note $\mathrm{Img}(z)$

Nous avons ainsi deux notions qui se dégagent :

— Un nombre est réel si et seulement si sa partie imaginaire est nulle
— Un nombre est dit *imaginaire pur* si et seulement si sa partie réelle est nulle.

Remarque Les parties imaginaires et réelles sont *toujours* des nombres réels, faites bien attention à la définitions des parties réelles et imaginaires (relisez-la).

Une notion très importante est la notion de *conjugué* d'un complexe. Soit un complexe z de partie réelle a et de partie imaginaire b. On définit alors le *conjugué* de z, qui est noté $\bar{z}$ par :

$$\boxed{\bar{z} = \overline{a + ib} = a - ib}$$

2. Faites bien attention, on ne parle *jamais* de racine d'un nombre négatif, et encore moins de la racine d'un nombre complexe. Nous avons *simplement* remarqué que ce nombre complexe mis au carré, nous donnait le résultat souhaité, *c'est tout.* D'ailleurs, essayez de trouver un autre nombre qui aurait pu marcher, et regardez si vous trouvez les mêmes formules.

3. noter que nous l'avons réellement fait que pour un seul polynôme, et que pour un seul degré. Ceci ne constitue donc pas vraiment une « preuve ». Mais j'espère vous avoir donné l'intuition de ce résultat, hautement non trivial à démontrer (renseignez vous sur le théorème fondamentale de d'Alembert-Gauss).

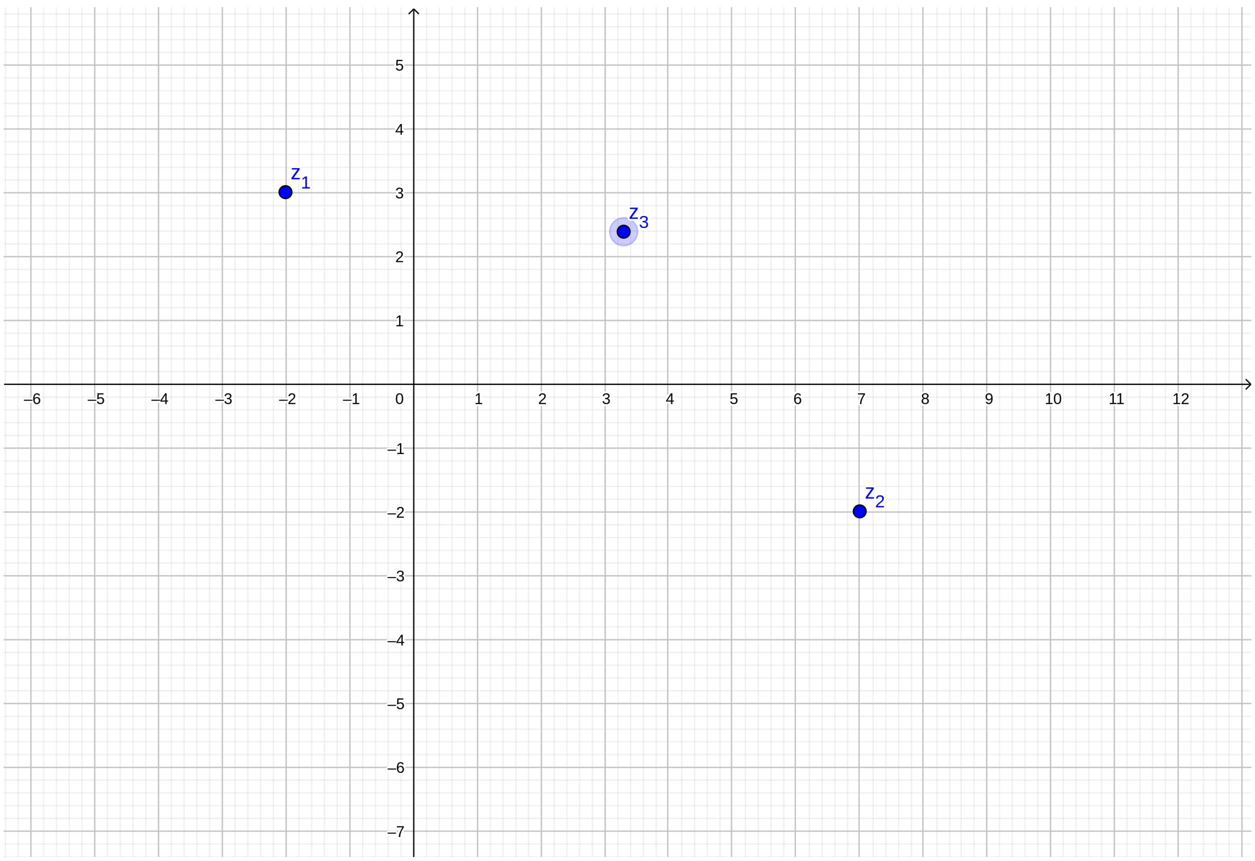

FIGURE 1 – Le plan complexe, avec quelques points tracés dessus

Question 8 Relisez la définition d'une partie imaginaire et d'une partie réelle d'un nombre complexe. Que vaut la partie imaginaire de $1 + 5i$?

Question 9 Dans le plan complexe, que dire d'un point z et de son conjugué $\bar{z}$ (on attend une interprétation géométrique).

Question 10 Quelle est la partie imaginaire du nombre $z\bar{z}$?

Question 11 Quelles sont les parties réelle et imaginaire de $(2 + i)(\sqrt{2} - 5i)$?

Question 12 Si je me donne un nombre complexe z de partie réelle a et de partie imaginaire b. Essayez d'exprimer a en fonction de z et $\bar{z}$ (Indication, que donne la somme $z + \bar{z}$?). Essayer d'exprimer b en fonction de z et $\bar{z}$ (Indication, que donne la différence $z - \bar{z}$?)

2.3.2 Deux moyens de représenter les nombres complexes.

Au paragraphe précédent, nous avons montré pourquoi les complexes sont représentés par des points du plan, avec deux coordonnées, la partie réelle et la partie imaginaire. Mais comme tout point dans un plan munit d'un repère, il admet deux représentations (deux moyens d'indiquer sa localisation).

— Soit on lit les coordonnées par rapport au repère du point, et on sait ainsi ou se trouve le point. Exemple : Dans mon plan complexe, mon repère est formé par les points $(0, 1, i)$, ainsi le nombre $3 + 2i$ admet 3 «pour abscisse» et 2 «pour ordonné» dans le plan.

— Soit on donne la distance du point au centre du repère, et l'angle formé entre la droite qui passe par le point et le centre, avec l'abscisse. Exemple : Pour le point $3 + 2i$, d'après le théorème de Pythagore, la distance entre $3 + 2i$ et 0 est $\sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$. Et on peut ensuite soit trouver graphiquement l'angle entre $3 + 2i$ et l'axe des abscisses, soit s'aider des fonctions trigonométriques pour trouver l'angle. Nous verrons comment faire en détail dans le chapitre qui suit (vous pouvez d'ores et déjà regarder la figure 2).

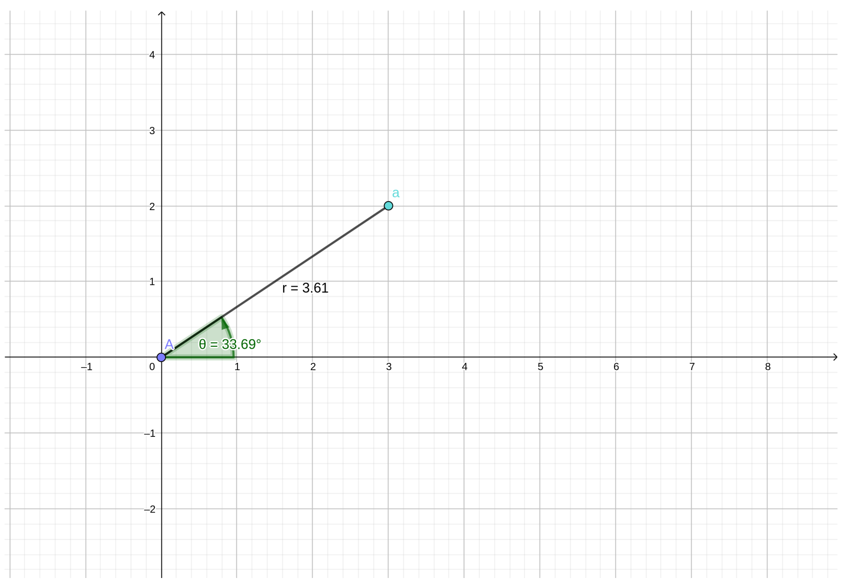

FIGURE 2 – Le nombre $3 + 2i$ dans le plan complexe

La deuxième manière de représenter un nombre complexe s'appelle la *forme trigonométrique* (puisque cette forme est définie à partir d'angle).

Le chapitre suivant nous introduira la notion d'exponentielle complexe, qui montre la puissance de la représentation trigonométrique d'un complexe.

Question 13 Placer dans le plan complexe $\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}$ et $5\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$, $6\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$.
Calculer la distance de chacun de ces nombres avec le centre.

2.3.3 La forme trigonométrique

Si je reprends les remarques du paragraphe suivante, de la distance d'un point à l'origine, et de l'angle que forme le point avec l'abscisse [4] ont des noms très précis :

— La distance entre le point complexe z et l'origine s'appelle la *norme* de z et se note $|z|$.
— L'angle formé avec l'axe des abscisses s'appelle *l'argument* du nombre complexe, et se note $\arg(z)$.

2.3.3.1 Calculer la norme d'un complexe

Pour calculer la norme d'un nombre complexe $z = a + ib$, rien de plus simple, il suffit de calculer :

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Question 14 D'où vient cette formule ? Retrouver la à l'aide du théorème de Pythagore (et d'un dessin !)

Pour éviter de vous parachuter un résultat venu de nulle part, essayer réellement de répondre à la question suivante :

Question 15 Calculer $z * \overline{z}$, avec $z = a + ib$. (Je rappelle que $\overline{z}$ correspond au conjugué de z)

Donc, cette question vous permet de calculer la norme d'un nombre complexe d'une autre manière (qui est en fait très utile lorsque l'on connait pas les coordonnées d'un nombre complexes !) :

$$\boxed{|z|^2 = z\overline{z}}$$

Question 16 Dessiner l'ensemble des nombres complexes de module 1.

Question 17 Quelle est la différence entre la norme d'un complexe et de son conjugué ?

2.3.3.2 Calculer l'argument d'un nombre complexe

Cette partie est plus délicate. Pour calculer l'argument d'un nombre complexe, nous devons *d'abord* calculer sa norme.

En effet, si je prend un point complexe $z = a + ib$ que je suppose non nul (cela revient à dire que $\overline{z} \neq 0$ [5]), alors je peux faire cette manipulation :

$$z = (a + ib)$$
$$z = |z|\left(\frac{a}{|z|} + i\frac{b}{|z|}\right)$$

Question 18 Montrer alors que $\left(\frac{a}{|z|} + i\frac{b}{|z|}\right)$ est de norme 1.

4. cette phrase est fausse écrite telle quelle, mais je ne voulais pas préciser pour éviter de l'alourdir.
5. pourquoi ?

Or, dans ce cas, puisque $\left(\frac{a}{|z|}\right)^2 + \left(\frac{b}{|z|}\right)^2 = 1$, il existe un nombre θ (qui sera l'argument de z), tel que :

$$\begin{cases} \frac{a}{|z|} = \cos(\theta) \\ \frac{b}{|z|} = \sin(\theta) \end{cases}$$

Et ce nombre est unique si on demande $\theta \in [0, 2\pi[$, et cela donne l'argrument de notre nombre complexe.

Question 19 Ce paragraphe est difficile, essayer de le comprendre avec un dessin. En pratique, le jour du bac, il sera très simple de calculer l'argument d'un nombre complexe.

2.3.3.3 Calculer la forme trigonométrique

Une fois que vous avez calculé la norme et l'argument d'un nombre complexe z, vous pouvez alors donner sa [6] forme trigonométrique :

$$\boxed{z = |z|\left(\cos(\theta) + i\sin(\theta)\right)}$$

Très souvent on note $r = |z|$, pour ainsi écrire $z = r\left(\cos(\theta) + i\sin(\theta)\right)$

3 L'exponentielle complexe

Certaines fonctions définies sur les réels (donc pas toutes, loin de là) admettent une définition valide pour des nombres complexes. C'est le cas de l'exponentielle.

3.1 Définition formelle de l'exponentielle pour les complexes (hors programme)

Pour définir l'exponentielle sur les nombres complexes, nous avons vu la formule suivante dans le cours de l'exponentielle (qui est complètement hors programme) :

$$\exp(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!}$$

En effet, nous savons comment multiplier et additionner les complexes, donc si cette formule a bien un sens (ce que nous admettons) alors cette formule fonctionne aussi avec les complexes.

Question 20 (difficile) Pourquoi la définition à l'aide de l'équation différentielle de l'exponentielle est plus délicate pour définir cette fonction dans les complexes ?

3.2 Définition au programme

L'exponentielle d'un nombre complexe $z = a + ib \in \mathbb{C}$, où $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ est définie comme il suit :

$$\exp(z) = \exp(a + ib) = \exp(a) * \exp(ib)$$

6. On dit donc « la » forme trigonométrique, puisqu'elle est unique. Nous l'avons en fait prouvé, mais sans mettre le doigt sur les passages qui mettent en évidence que deux nombres complexes de même forme trigonométrique, où leur argument appartient à l'intervalle $[0, 2\pi[$, sont nécessairement égaux.

On essaie effectivement de conserver l'équation fonctionnelle de l'exponentielle, pour l'étendre au complexe. Mais comment est donc définie [7] l'exponentielle d'un nombre imaginaire pur ? Et bien comme il suit :

$$\boxed{\exp(ib) = \cos(b) + i\sin(b)}$$

Cette formule s'appelle la *formule d'Euler* !

Question 21 Qui était Euler ? Dans quel domaine a-t-il travaillé ? À quelle époque vivait-il ?

3.2.1 Formule divine

Voici une conséquence de la formule d'Euler . Si on prend $b = \pi$ dans la formule vu plus haut, on obtient :

$$\exp(i\pi) = \cos(\pi) + i\sin(\pi)$$

autrement dit, en passant $\cos\pi = -1$ de l'autre coté ($\sin\pi = 0$), nous obtenons :

$$\boxed{e^{i\pi} + 1 = 0}$$

Cette formule porte souvent le nom de « formule divine » car elle réunit à elle seule toutes les stars des nombres en mathématiques, $i, \pi, 1, 0$, avec une des fonctions les plus centrales, l'exponentielle !

3.3 Conséquence de la formule d'Euler

Nous pouvons ainsi réécrire la forme trigonométrique d'un nombre complexe z de module r et d'argument θ par :

$$\boxed{z = r * e^{i\theta}}$$

Cette notation s'appelle la *notation exponentielle.* Si vous avez trouvé la forme trigonométrique d'un nombre complexe, alors il est très facile de donner sa notation exponentielle.

3.3.1 La multiplication entre deux complexes

Dans ce paragraphe, nous allons, grâce à la formule d'Euler, comprendre ce qu'il se passe lorsque l'on multiplie deux complexes entre eux. En particulier, on va regarder comment se comporte l'argument et le module du produit de deux nombres complexes.

Supposons que l'on veuille regarder la multiplication du complexe $a \in \mathbb{C}$ par le nombre $z \in \mathbb{C}$. On note alors θ_a l'argument de a, et r_a le module de a. De même pour z. Alors, on remarque que :

$$\begin{aligned} z * a &= r_z * e^{i\theta_z} * r_a * e^{i\theta_a} \\ &= r_z r_a e^{i(\theta_z + \theta_a)} \quad \text{Grâce à la formule d'Euler !} \end{aligned}$$

Donc, multiplier par a par z a eu pour effet vis à vis de a de :

- *multiplier* son module par celui de z, autrement dit $|az| = |a||z|$
- *ajouter* à son argument celui de z, autrement dit $\arg(a * z) = \arg(a) + \arg(z)$

Vous pouvez confirmer ces formules avec la figure 3.

Question 22 Je disais en introduction que les complexes permettent d'*encoder* une rotation d'angle quelconque. Détaillez ces propos, en essayant de trouver comment appliquer une rotation de $\frac{\pi}{3}$ au nombre complexe $1 + 2i$ (qui s'identifie au point du plan (1, 2)). (*Indication* il faudra multiplier $1 + 2i$ par un nombre complexe bien choisi).

7. ce n'est pas une définition mais bien un théorème. Nous n'avons pas les moyens de le prouver, nous l'admettrons donc comme un fait.

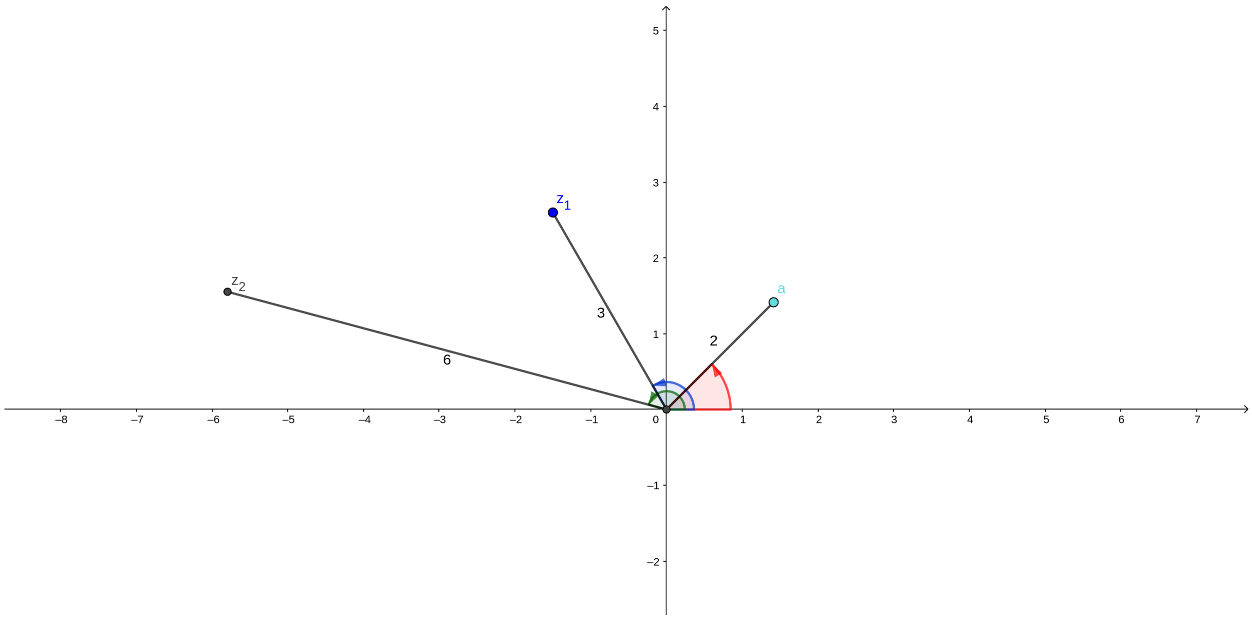

FIGURE 3 – Produit de deux nombres complexes. Ici, $z_2 = z_1 * a$

3.3.2 Le quotient de deux nombres complexes

Il se passe un peu près la même chose pour le quotient, au vue des propriétés de l'exponentielle, mais cette fois-ci, diviser un nombre complexe a par z a eu pour effet vis à vis de a de :

- *diviser* son module par celui de z, autrement dit $|\frac{a}{z}| = \frac{|a|}{|z|}$
- *soustraire* à son argument celui de z autrement dit $\arg(\frac{a}{z}) = \arg(a) - \arg(z)$

Question 23 Complétez les calculs comme fait plus haut, mais cette fois-ci pour $\frac{a}{z}$ et essayez de retrouver ces résultats.

Question 24 On dirait bien que la fonction arg ressemble à une fonction réelle que l'on connait déjà, mais laquelle ? Revenez quelque peu sur cette question, et demandez vous pourquoi l'argument d'un nombre complexe n'est pas vraiment une « fonction » (aidez vous d'un dessin). Cette remarque est à la base d'un des domaines les plus riches en mathématiques, qui s'appelle *l'analyse complexe* (vue en troisième année de licence mathématique).

Encore plus fort, on peut utiliser à son plein potentiel la formule d'Euler pour montrer que, quelque soit $n \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{(\cos(\theta) + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)}$$

Cette formule a pour nom la formule de Moivre.

Question 25 Détaillez les calculs pour obtenir la formule de Moivre.

Question 26 Développer $(\cos(\theta) + i \sin(\theta))^2$ à l'aide d'une identité remarquable. En utilisant la formule de Moivre, prouver alors que, quelque soit $\theta \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} \cos^2(\theta) = \dfrac{1 + \cos(2\theta)}{2} \\ \sin^2(\theta) = \dfrac{1 - \cos(2\theta)}{2} \end{cases}$$

Question 27 Quelle est la période de la fonction $x \mapsto \cos x^2$?

3.3.3 Calculer le conjugué d'un nombre complexe avec la notation exponentielle

On peut maintenant voir le nombre conjugué d'un nombre complexe z comme étant le nombre complexe de même module, mais d'argument opposé !

Autrement dit, si $z = re^{i\theta}$, alors :

$$\boxed{\overline{z} = re^{-i\theta}}$$

Question 28 Prouver cette formule détaillant les calculs, en passant par la forme trigonométrique.

Question 29 Soit z un nombre complexe de module 1. Alors, comparez, à l'aide de la formule d'Euler, les nombres complexes $\frac{1}{z}$ et $\overline{z}$. Vous pouvez aussi comparer ces deux nombres plus astucieusement en remarquant alors que $z\overline{z} = 1$.

Question 30 D'après l'équation fonctionnelle de l'exponentielle, on a

$$\exp(a+b) = \exp a \exp b$$

Montrer alors, à l'aide de la formule d'Euler, que pour tout $a, b \in \mathbb{R}$:

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$$

Trouver une formule similaire pour le sinus.

3.3.4 Trouver des formules trigonométriques

Avec les questions plus haut, vous devriez avoir vu comment obtenir des formules trigonométriques à l'aide de la formule d'Euler. Ici, je vais vous montrer comment généraliser ce principe, en utilisant uniquement les notions que nous avons déjà vues dans ce cours !

Rappelez vous que l'on peut utiliser z et $\overline{z}$ pour calculer la partie réelle et la partie imaginaire d'un nombre complexe. En effet, pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a :

$$\begin{cases} \mathrm{Re}(z) = \dfrac{z+\overline{z}}{2} \in \mathbb{R} \\ \mathrm{Im}(z) = \dfrac{z-\overline{z}}{2i} \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Question 31 Redémontrez ces formules

En appliquant ces deux formules avec $z = e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$, avec évidemment (précisez...) $\mathrm{Re}(z) = \cos\theta$ et $\mathrm{Im}(z) = \sin\theta$, on obtient alors, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} \\ \sin\theta = \dfrac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2} \end{cases}$$

Ultime question de la mort 32 Essayer alors de simplifier l'expression de $\cos^3\theta$, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$.