Découvrir les propriétés de l'exponentielle

Delhomme Fabien

1 But de ce document

Ce document a pour but de vous faire découvrir par vous-même les propriétés de l'exponentielle. Il vous permettra d'une part de connaître et de mieux retenir ces propriétés, essentielles pour le bac, et d'autre part de trouver par vous même ces démonstrations qui sont *exigibles* au bac (même s'il y a peu de chances qu'elles soient demandées).

Pour des besoins pédagogiques, j'ai pris la liberté de faire intervenir un personnage qui va vous accompagner le long de ces activités, le *mathématicien*. Il est rusé, mais il n'hésite pas à tester et à explorer différentes possibilités avant de trouver la bonne. J'espère que vous apprécierez sa compagnie !

2 Les propriétés algébriques.

Je vous propose de commencer par les propriétés de la fonction exponentielle en elle-même, c'est à dire sa positivité, puis d'étudier l'équation fonctionnelle qu'elle satisfait.

Noter que pour l'activité 2 j'ai besoin du résultat de l'activité 1, mais la démonstration de l'activité 1 est inspirée de la démonstration de l'activité 2. Le bon déroulement du document est donc de commencer l'activité 1, puis de sauter à l'activité 2 au moment indiqué, puis de revenir sur l'activité 1 pour conclure.

2.1 La positivité de l'exponentielle – Activité 1

2.1.1 Présentation du contexte.

Dans cette activité, nous prouverons que la fonction exponentielle sur les réels et toujours positive. Nous prouverons ce résultat en deux étapes. Nous allons d'abord montrer qu'elle ne s'annule jamais, puis en déduire qu'elle est toujours positive. Pour cela, nous utiliserons la définition de l'exponentielle sous forme d'équation différentielle (voir le cours pour plus de précisions).

Le mathématicien remarque que cette équation différentielle nous donne deux « règles du jeu » qu'il faut assembler astucieusement pour arriver à nos fins.

Question 0 Quelles sont ces «règles du jeu» ?

2.1.2 Premier résultat, l'exponentielle ne s'annule jamais

Commençons donc par montrer que l'exponentielle ne s'annule jamais. Un premier réflexe dans ce cas de figure pour le mathématicien est de *réécrire* la propriété qu'il veut montrer dans des termes plus « mathématiques ».

Question 1 Écrivez cette propriété avec des connecteurs logiques (c'est-à-dire sous une forme plus mathématicienne).

Ensuite, notre mathématicien exploite le plus possible les données (autrement dit, les « règles du jeu »).

Question 2 Essayer de jouer avec les propriétés de l'exponentielle (uniquement celles des règles du jeu !) pour montrer que c'est une fonction positive.

Beaucoup de calculs plus tard, il apparaît que le problème est un peu plus difficile qu'il n'y parait.

Dans ce cas, il faut sortir une artillerie plus lourde. Si notre exponentielle ne s'annule jamais, c'est qu'il faut trouver pour tout nombre e^x un inverse, c'est-à-dire un nombre qui, multiplié par e^x, donne 1. Tous les nombres peuvent faire cela, sauf 0. Donc en trouvant un inverse pour e^x, cela revient à montrer qu'effectivement $e^x \neq 0$.

Question 3 Faites une pause maintenant, regardez ensuite ce qui se passe dans l'activité 2, puis revenez ici. Réfléchissez à une forme possible pour l'inverse, en vous rappelant la deuxième « règle du jeu ».

En se souvenant que l'exponentielle se comporte un peu comme une fonction puissance, notre mathématicien nous propose de tester si l'inverse de e^x que l'on cherche ne serait pas e^{-x}.

Question 4 Quel est le lien entre cette proposition est le comportement de l'exponentielle ?

Question 5 En suivant la démonstration de l'activité 2, quelle fonction auriez vous envie de poser ?

Le mathématicien propose alors d'étudier la fonction qui soit le produit des deux termes que l'on soupçonne d'être les inverses mutuels.

Question 6 Dérivez cette fonction, et concluez comme dans l'activité précédente.

Nous avons maintenant prouvé notre premier résultat : l'exponentielle ne s'annule jamais ! Fort de cette réussite, le mathématicien veut aller plus loin, et il veut montrer que l'exponentielle est toujours positive.

Pour cela, il existe un outil logique particulièrement puissant dans ce genre de situation, c'est la démonstration par l'absurde.

Le mathématicien commence par énoncer (dans son papier ou dans son esprit) que ce qu'il veut montrer est faux[1]. C'est-à-dire que l'on va proclamer que l'exponentielle n'est *pas* toujours positive. C'est donc qu'il existerait un moment où la fonction exponentielle est négative !

1. ce qui, nous sommes d'accord, est absurde, mais particulièrement efficace vous le verrez !

Question 7 Écrivez cette dernière phrase avec des connecteurs logiques, et d'une manière plus mathématicienne.

En exploitant l'une des règles du jeu, le mathématicien se rend compte que l'exponentielle est un moment strictement positive.

Question 8 Quel est ce moment ?

Le mathématicien conclut par un théorème très connu que dans ces conditions, il existe un endroit pour lequel la fonction exponentielle est nulle.

Question 9 Quel théorème le mathématicien a utilisé ? Vérifier que toutes les hypothèses sont satisfaites, et rédiger convenablement la conclusion du théorème.

Le mathématicien se rend alors compte de l'absurdité...

Question 10 Ah oui, laquelle ?

...et conclut que l'exponentielle est toujours positive.

Question 11 Rédigez la conclusion qui se trouve dans le cahier de brouillon du mathématicien.

2.1.3 Conclusion

Dans cette démonstration, nous avons vu comment prouver proprement que l'exponentielle est toujours strictement positive, donc en exploitant le fait que la dérivée de l'exponentielle est elle même, c'est-à-dire que $\exp' = \exp$, on peut en déduire que la fonction est toujours croissante sur $\mathbb{R}$.

On voit donc que ces règles du jeu sont assez restrictives, puisqu'en demandant à une fonction d'être sa propre dérivée et de valoir 1 en 0, on peut en déduire qu'elle est strictement croissante et strictement positive sur $\mathbb{R}$. Mais on peut aller beaucoup plus loin, et montrer que cette fonction admet une équation dite *fonctionnelle*, comme cela est montré dans l'activité 2 ci-dessous.

2.2 L'équation fonctionnelle – Activité 2

2.2.1 Présentation du contexte, et simplification

Dans cette deuxième activité, nous allons montrer **la** propriété centrale pour l'exponentielle, son l'équation fonctionnelle :

$$\text{Pour tout} \quad x, y \in \mathbb{R}\ e^{x+y} = e^x e^y$$

Ici et comme dans l'activité précédente, on va donc définir l'exponentielle uniquement au moyen de son équation différentielle [2] (encore ces «règles du jeu»).

Le premier problème pour montrer ce résultat est la présence de deux variables, x et y. Pour pouvoir se ramener à une étude de fonction à un seul paramètre (c'est le seul cas étudié à notre niveau), on doit donc *fixer* un paramètre.

2. revoyez vraiment le cours si vous ne savez pas de quoi je parle à ce stade.

On va donc partir du principe que y est nombre réel fixé quelconque. Ensuite, on pourra dire que notre démonstration marchait quelque soit notre choix de y (c'est une grosse astuce de mathématiciens !). Et donc que la proposition est vraie pour tout $y \in \mathbb{R}$.

Mais quelle fonction doit-on étudier ?

2.2.2 Choix de la fonction

Nous voulons donc prouver l'égalité donnée dans la partie précédente. Pour cela, il nous faut nous ramener à une fonction qui va de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, qui soit de préférence dérivable, car la dérivée est un outil particulièrement puissant à notre disposition, il serait dommage de s'en priver.

Donc, regardons de nouveau l'égalité que l'on veut montrer :

$$\text{Pour tout } \ x, y \in \mathbb{R} \ e^{x+y} = e^x e^y$$

Et **garder en tête que** la seule quantité qui « bouge » est x. En effet dans la section précédente nous avons montré que nous pouvons fixer y.

Souvent en mathématiques, lorsqu'on veut montrer une égalité, on préfère montrer que la différence des deux membres (celui de gauche, et celui de droite) qui la composent est nulle. Cela revient exactement au même, mais on préfère alors montrer qu'une certaine fonction (la différence des deux membres) est tout le temps nulle.

Question 1 En suivant ce principe, quelle est la fonction qu'un mathématicien aimerait poser ?

Malheureusement cette fonction n'a pas de bonne propriété.

Question 2 Essayer de comprendre le sens de la phrase précédente, en dérivant la fonction que vous avez obtenue à la question précédente, et en vous demandant si vous avez, après dérivation, obtenue une expression plus simple.

Le mathématicien a d'autres outils à sa disposition, si la différence de deux termes ne lui donne pas ce qu'il faut, il peut alors étudier le quotient des deux !

Question 3 En suivant les conseils du mathématicien, quelle est donc la deuxième fonction que vous proposez d'étudier ?

Maintenant que le mathématicien a posé cette nouvelle fonction, un problème déjà survient : est-ce que cette fonction est bien définie ? Cela le contrarie, et vous remarquez que sa respiration s'accélère.

Question 4 Quel aurait pu être le problème lorsqu'on étudie le quotient de deux termes ? Pourquoi ici ce problème ne se pose pas (pensez au résultat de l'activité 1)? Vous remarquez que le mathématicien est alors rassuré.

Bien, maintenant, notre mathématicien peut utiliser de nouveau les outils mise à sa disposition pour *montrer* le résultat qu'il désire obtenir.

2.2.2.1 Exploiter cette fonction

Question 5 Dériver la fonction que vous avez obtenu à la question 3.

Et la surprise ! Ces outils (la dérivation) lui ont permis de simplifier grandement le problème !

Question 6 Que peut-on déduire du résultat de la question précédente ?

Le reste n'est qu'une formalité, puisque notre fonction est en fait constante, notre mathématicien remplace x par un nombre de son choix, et conclue en prouvant l'égalité.

Question 7 Quel choix peut-on faire pour x ? Finissez la preuve.

Mais le mathématicien veut montrer un peu plus fort !

Question 8 Qu'est-ce qu'il se passe lorsqu'on regarde e^{x-y} au lieu de e^{x+y} ?

Question 9 Donnez encore plus de force à ce résultat en montrant par récurrence que $(e^x)^n = e^{x*n}$

2.2.3 Conclusion

Ici nous avons montré la propriété principale de l'exponentielle, son équation fonctionnelle. Vous pouvez maintenant utiliser cette propriété de l'exponentielle pour aborder d'autres problèmes : considérez cette proposition comme un outil précieux !