L'exponentielle et sa copine le logarithme

Fabien Delhomme

1 L'exponentielle

1.1 Motivations

Maintenant que vous connaissez le merveilleux outil qu'est la dérivée, nous allons étudier deux autres fonctions dont les propriétés sont *indispensables* en mathématique, et en science en général.

Ces deux fonctions sont l'exponentielle et le logarithme, qui sont réciproques l'une de l'autre. Nous reverrons l'exponentielle dans le chapitre des complexes (notamment en géométrie).

1.2 Définition

Il existe en fait plusieurs définitions de la fonction exponentielle. Ces différentes définitions désignent évidement le même objet, mais sont de natures assez différentes. Je vais maintenant vous présenter trois définitions de la fonctions exponentielles. Dans tous les cas, on admet que ces définitions sont valides, c'est-à-dire qu'elles définissent effectivement une fonction. Seulement les deux premières sont au programme du bac, la troisième me servira au chapitre sur les complexes pour vous convaincre que la fonction exponentielle peut aussi se définir sur d'autres ensembles que les nombres réels (nous verrons que nous pouvons parler de l'exponentielle pour les nombres complexes).

1.2.1 Définition par une équation différentielle

Voici la première définition de la fonction exponentielle réelle, c'est la définition du programme du bac.

La fonction exponentielle est donc définie comme l'unique fonction, notée exp, qui va de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, telle que :

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R} & \exp' x & = \exp x \\ & \exp 0 & = 1 \end{cases}$$

L'unicité est l'existence d'une telle fonction sont garantis par des théorèmes très puissants, qui n'est pas au programme du bac.

Ce que représente l'équation plus haut, est une *équation différentielle*. C'est-à-dire une équation dans laquelle l'inconnue est une fonction, et qui fait apparaitre les dérivées de la fonction.

À notre niveau, on admet qu'une telle fonction existe, et qu'elle est définie sur $\mathbb{R}$. Il existe des moyens pas très compliqués pour le prouver, ils sont néanmoins abordés en toute rigueur qu'en licence de mathématique. Une démonstration élémentaire s'appuie sur la méthode d'Euler, que l'on abordera peut-être dans autre activité.

Veuillez vous reportez aux activités présentées dans le document « PropExponentielle » pour montrer que cette définition entraine la définition suivante (par une « équation fonctionnelle »).

1.2.2 Définition par une équation fonctionnelle

L'équation fonctionnelle respectée par l'exponentielle est la suivante :

$$\text{Pour tout } x, y \in \mathbb{R} \ \ \exp(x) * \exp(y) = \exp(x + y)$$

De la même manière, nous allons admettre que cette équation n'est vérifiée que par une seule fonction, et donc que cela nous donne bien une définition, et qu'elle est équivalente à la définition précédente (c'est-à-dire que dans les deux cas, on parle de la même fonction).

On dit que c'est une *équation fonctionnelle* parce que c'est une équation dans laquelle l'inconnue est une fonction, et implique une égalité entre plusieurs termes qui correspondent à plusieurs évaluations de la fonction en différents points. Les équations fonctionnelles sont plus difficiles à étudier, et en général ne sont abordées qu'en master. Dans le cas de l'exponentielle néanmoins, cette équation est simple à vérifier, et vous trouverez une démonstration du fait que la définition à partir d'une équation différentielle implique la définition à partir de l'équation fonctionnelle dans l'activité annexe déjà mentionnée.

1.2.3 Définition par une somme infinie

Oui, vous avez bien lu, une somme infinie ! Évidemment, vous n'avez pas assez le baguage mathématique pour que je puisse vous définir proprement ce que cela signifie, et dans quel sens on peut parler d'une somme infinie. Mais tout ce que vous pouvez savoir, c'est que cette formule permet de définir l'exponentielle sur beaucoup d'autres ensembles que les réels (par exemple les complexes, mais aussi les matrices etc..).

Sans plus attendre, voici la définition :

$$\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots$$

Ici $k!$ signifie que l'on calcule $k * (k-1) * (k-2) * \dots * 1$. Par exemple $5!$, qui se lit «5 factoriel» se calcule par $5! = 5 * 4 * 3 * 2 * 1 = 120$. Notez que par convention, on dit que $0! = 1$. Nous retrouverons cette notation en probabilité (pour les coefficients binomiaux).

Exercice Écrivez les 5 premiers termes de cette somme.

Cette formule est vue en pratique en première année de licence de mathématiques. C'est souvent par elle d'ailleurs que l'on commence par introduire la notion d'exponentielle, puis ensuite on démontre les autres définitions de l'exponentielle (soit une démarche totalement inverse de celle du bac).

1.2.3.1 Petite application et explication de cette formule

Ce paragraphe pourra être ignorer en première lecture

Je ne peux pas m'empêcher de revenir sur cette dernière définition, car elle explique très bien de nombreuses notions qui sont au programme du bac.

Par exemple, si vous voulez calculer le nombre e qui est *défini* par $\exp(1)$. Nous y reviendrons, mais autrement dit e est le nombre qui correspond à la fonction exponentielle en $x = 1$, et ceci est une *définition* (c'est-à-dire que l'on a choisi de nommer $\exp(1)$ par e). Ce nombre e est parfois appelé le nombre d'Euler, ou encore, la constante de Néper [1].

Vous pouvez remplacer dans l'équation donnée dans la partie précédente le x par 1, pour obtenir

$$\exp(1) = e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1^k}{k!} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{120} \dots$$

Essayer de calculer les premiers termes de cette somme, et comparer le résultat obtenu avec la valeur $\exp(1)$ donné par votre calculatrice !

Exercice Pour savoir d'où vient cette formule, essayer de dériver (en oubliant que c'est une somme infinie, faites comme-ci on pouvait dériver la somme en dérivant termes à termes). Que remarquez vous ? Autre question, que vaut cette somme pour $x = 0$?

Exercice Vous pouvez même comprendre pourquoi on parle de *croissance comparée*. En effet, d'après cette formule, que vaut la limite suivante :

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\exp(x)}{x}$$

Exercice Que remarque-t-on pour une puissance de x plus grande, comme par exemple $\frac{\exp(x)}{x^3}$, lorsque x tend vers l'infini ?

Exercice Peut-on dire quelque chose pour x qui tend vers moins l'infini ? pourquoi [2] ?

1.2.4 Commentaires sur ces définitions

Les deux premières définitions sont *essentielles* pour le programme du bac, car elles servent *tout le temps*. Par exemple pour dériver une fonction qui est composée d'exponentielles, ou alors pour résoudre des équations simples etc.

La troisième n'est absolument pas à citer au bac ! C'est-à-dire que vous ne devrez *jamais* écrire $\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ pour un exercice au bac, même si cela est parfaitement valide du point de vue mathématique.

Néanmoins, vous voyez ici une formule qui permet de *calculer* l'exponentielle ! Par exemple, essayer de comparer à la calculatrice $\exp(1)$ et la somme $1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120}$ qui correspond à la somme des cinq premiers termes de la somme infinie citée plus haut.

1. le même Néper que dans logarithme *népérien*
2. Montrez que c'est une formée indéterminée.

1.3 Propriétés de l'exponentielle

Voyons maintenant les propriétés de l'exponentielle. Mais avant, regardez attentivement le graphe de cette fonction, et ensuite vérifiez que chaque propriété se retrouve graphiquement à l'aide de la courbe de l'exponentielle. Dans ce paragraphe, seuls les résultats seront donnés, sans les démonstrations. Néanmoins, j'ai laissé des calculs que j'espère simple qui vous montre pourquoi ces propriétés sont vraies.

Pour avoir de vraies et solides démonstrations, allez voir les activités sur l'exponentielle.

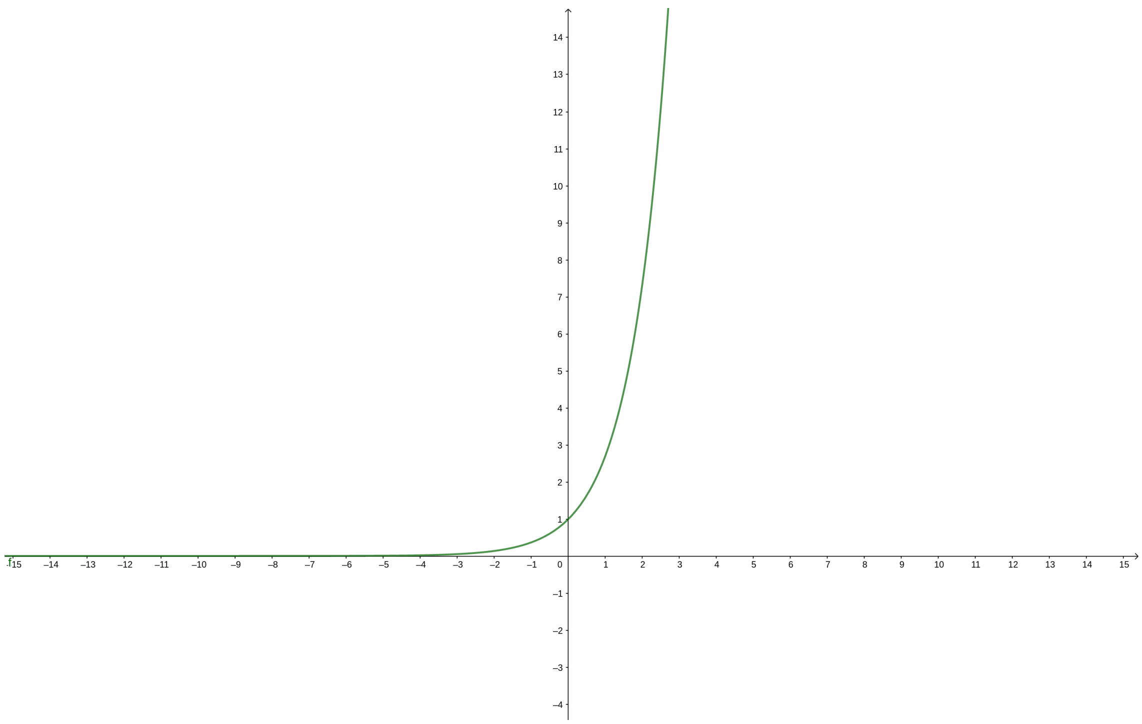

Figure 1 – Courbe représentative de la fonction exponentielle

1.3.1 Propriétés conséquences de la définition

En combinant les deux premières définitions (l'équation différentielle et l'équation fonctionnelle), nous pouvons avoir les premières propriétés de la fonction exponentielle.

1.3.1.1 Stricte positivité

L'exponentielle n'est jamais nulle, en effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$, nous avons :

$$\exp(x) * \exp(-x) = \exp(x - x) = \exp(0)$$

Donc, pour tout $\exp x$ admet *un inverse*, donc nécessairement n'est pas nul.

Maintenant, nous pouvons montrer que la fonction exponentielle est en fait positive, en effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\exp(x) = \exp\left(2\frac{x}{2}\right) = \exp\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\right) = \exp\frac{x}{2} * \exp\frac{x}{2} = \left(\exp\frac{x}{2}\right)^2$$

Donc, puisque qu'un carré est toujours positif dans $\mathbb{R}$, le nombre $\exp x$ est toujours positif, et ceci quel que soit le $x \in \mathbb{R}$ pris au départ. Donc la fonction est positive sur tout $\mathbb{R}$.

Finalement, nous avons montré que la fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$.

1.3.1.2 Stricte croissance

Donc, grâce à la première définition, nous savons que l'exponentielle est sa propre dérivée, donc vu que l'on vient de voir qu'elle est strictement positive, alors on peut en conclure que l'exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

1.3.1.3 Lien entre l'exponentielle est les fonctions puissance

La formule de l'équation fonctionnelle $\exp x + y = \exp x * \exp y$ fait écho avec la formule $a^{x+y} = a^x * a^y$. C'est pour cela que l'on note :

$$\exp x = \mathrm{e}^x$$

Donc, calculer $\exp x$ revient à calcule e *puissance* x, avec e un nombre réel qui vaut par définition $\exp(1)$. Pour un calcul approché de ce nombre, vous pouvez vous reportez à cette section.

En fait, on peut même *définir* comment élever un nombre a a la puissance x pour tout $x \in \mathbb{R}$. Cela sera fait dans le paragraphe 2.4.3, au chapitre du logarithme.

1.4 Exemples de calcul numérique

On sait que $\exp\frac{1}{2}$ est plus petit que $\exp 1$, mais plus grand que $\exp 0 = 1$ donc $\exp\frac{1}{2} > 0$ puisque la fonction exponentielle est croissante. De plus,

$$\left(\exp\frac{1}{2}\right)^2 = \exp\frac{1}{2} * \exp\frac{1}{2} = \exp\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right) = \exp 1 = \mathrm{e}$$

Or, le nombre $\exp\frac{1}{2} > 0$, donc :

$$\exp\frac{1}{2} = \sqrt{\mathrm{e}}$$

Jetez un coup d'œil à la figure 1 la croissance extraordinaire de cette fonction lorsque x devient de plus en plus grand ! Graphiquement, on peut retenir :

— Les limites de l'exponentielle en plus et moins l'infini
— Sa propriété de croissance sur tout $\mathbb{R}$
— Sa propriété de positivité sur tout $\mathbb{R}$

1.5 Calculs de limites

1.5.1 Limites en plus et moins l'infini

Puisque l'exponentielle est sa propre dérivée, on peut se convaincre que plus elle croit, plus en va croitre vite, et donc va très rapidement vers $+\infty$. Finalement, on obtient :

$$\lim_{x\to\infty} e^x = \infty$$

De même, avec un peu de réflexion[3], on peut se convaincre que :

$$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$$

Ce sont des limites qu'il faut connaitre pour le bac.

1.5.2 Formes indéterminées avec l'exponentielle

Il arrive très fréquemment au bac que l'on vous demande de calculer des limites faisant apparaître des exponentielles. Souvent, ce sera des formes indéterminées. Il en existe deux types.

1.5.2.1 Résolution par la définition de la dérivation

Nous pouvons, par définition de la dérivation, calculer la limite de :

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x}$$

C'est une forme indéterminée, du type «$\frac{0}{0}$», et pour lever cette indétermination, il faut voir que c'est simplement le nombre qui correspond à la dérivée de la fonction exponentielle en 0 :

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^0}{x - 0} = \exp' 0 = \exp(0) = 1$$

Ce calcul de limite est plutôt «rare» au bac.

1.5.2.2 Résolution par croissance comparée

Un type de limite plus fréquent à calculer, et la croissance comparée. En effet, on peut montrer que quelque soit la puissance $k \in \mathbb{R}$ de x, alors l'exponentielle l'emportera sur la puissance de x. Que ce soit en plus l'infini ou en moins l'infini. Mathématiquement parlant, cela donne, pour tout $k \in \mathbb{R}^+$.

$$\lim_{x\to\infty} x^k * e^{-x} = 0$$

Et,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^k} = \infty$$

Ce qu'il faut retenir c'est que «l'exponentielle l'emporte devant n'importe quelle puissance de x».

3. c'est un exercice ! Utilisez l'équation fonctionnelle de l'exponentielle.

Méthode, le jour du bac : Lorsque vous serez devant une **forme indéterminée**, il faudra alors toujours factoriser l'équation par le terme dominant (comme on a toujours fait jusqu'à présent), puis se ramener à des limites du type donné plus haut. Ensuite, vous écrivez, « d'après le cours, cette limite vaut », et vous concluez.

Exercice Calculez la limite suivante :

$$\lim_{x \to \infty} x^2 e^x - 3e^{2x}$$

2 Le logarithme

2.1 Définition

Dans cette partie, je vais vous montrer que le logarithme est la fonction réciproque de la fonction exponentielle. Tout comme pour la fonction racine carrée, définir une réciproque est toujours un peu délicat, ou tout du moins, il faut faire attention au domaine de définition de cette fameuse réciproque.

Reprenons quelques propriétés de l'exponentielle pour définir proprement le domaine de définition de la fonction réciproque, le logarithme. On a vu dans la partie précédente que l'exponentielle était définie pour toutes les valeurs de $\mathbb{R}$ et que pour tout x dans $\mathbb{R}$, $\exp x > 0$. Donc, on peut résumer cela par :

$$\exp \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^{*+}$$

Où la notation $\mathbb{R}^{*+}$ désigne que les réels strictement positifs.

De plus, l'exponentielle est **strictement** croissante sur $\mathbb{R}$. Donc, si l'on veut résoudre l'équation :

$$\exp x = y$$

(Qu'il faut lire « Quel est le x tel que, pour un y donné, $\exp x = y$? ») il y aura :

- Soit une unique solution si $y > 0$ (l'unicité est garantie par la stricte croissance, l'existence par le théorème des valeurs intermédiaires, à cause des limites de l'exponentielle en $-\infty$ et $+\infty$)
- Soit aucune solution si $y \leq 0$.

Donc, dans le cas où $y > 0$ **et seulement dans ce cas là**, on peut définir une fonction, que l'on appelle le logarithme, qui répond à la question posée plus haut, « Quel est le x tel que, pour un y donné, $\exp x = y$? ». On pose donc, pour $y < 0$:

$$\ln y = x = \text{l'unique réel tel que } \exp x = y$$

Quelques remarques :

- Pour l'instant, nous n'avons aucune formule pour calculer le logarithme !
- Cette définition est essentielle si vous voulez comprendre le logarithme.
- Faites bien attention au domaine de définition du logarithme.
- Le logarithme est noté ln. Nous verrons plus tard ce que signifie log.

On récapitule, on vient donc de définir une fonction, nommée logarithme, qui est définie sur $\mathbb{R}^{*+}$, à valeur dans $\mathbb{R}$. Résumé autrement :

$$\begin{array}{rl} \exp \ : \ \mathbb{R} \longrightarrow & \mathbb{R}^{*+} \\ \mathbb{R} \longleftarrow & \mathbb{R}^{*+} \ : \ \ln \end{array}$$

2.2 Exemples

Quelques exemples pour bien comprendre.

— Puisque que $\exp 0 = 1$, alors, $\ln 1 = 0$.
— Si je cherche le nombre x tel que $\exp x = 3$, alors je tape sur la calculatrice (qui connait son logarithme !) $\ln 3$.
— Si je veux résoudre $\exp(x) = -x^2 - 1$, alors vu que l'exponentielle est strictement positive, je sais que cette équation n'a pas de solution.
— Si je veux résoudre $\exp(2x - 1) = 2$, alors je passe au logarithme, et j'obtiens $2x - 1 = \ln 2$, donc $x = \frac{\ln 2 + 1}{2}$.

Exercice Résoudre l'équation $e^{2x} - 2e^x - 9 = 0$ en posant $y = e^x$ et en remarquant alors que y satisfait une équation polynômiale de second degré.

2.3 Graphe du logarithme

Pour obtenir le graphe du logarithme, on procède de la même manière que lorsqu'on voulait obtenir le graphe de la fonction racine carré sachant le graphe de la fonction racine ! Mathématiquement, on prend la courbe symétrique à l'axe $y = x$ de la courbe exponentielle pour obtenir celle du logarithme.

Sinon, reportez vous au graphe donné par votre calculatrice, ou à la figure 2. Le graphe suivant montre la fonction exponentielle et la fonction logarithme sur le même graphique, ce qui permet de mettre en évidence la symétrie des courbes représentatives autour de l'axe $y = x$ des deux fonctions, ce qui est due à la définition du logarithme comme réciproque de la fonction exponentielle.

2.3.1 Produit en somme

Toutes les propriétés du logarithme viennent de celles de l'exponentielle ! Par exemple, puisque :

$$\exp x + y = \exp x * \exp y$$

On a donc [4], en passant au logarithme

$$\ln a * b = \ln a + \ln b$$

4. pour une démonstration détaillée, n'hésitez pas à demander !

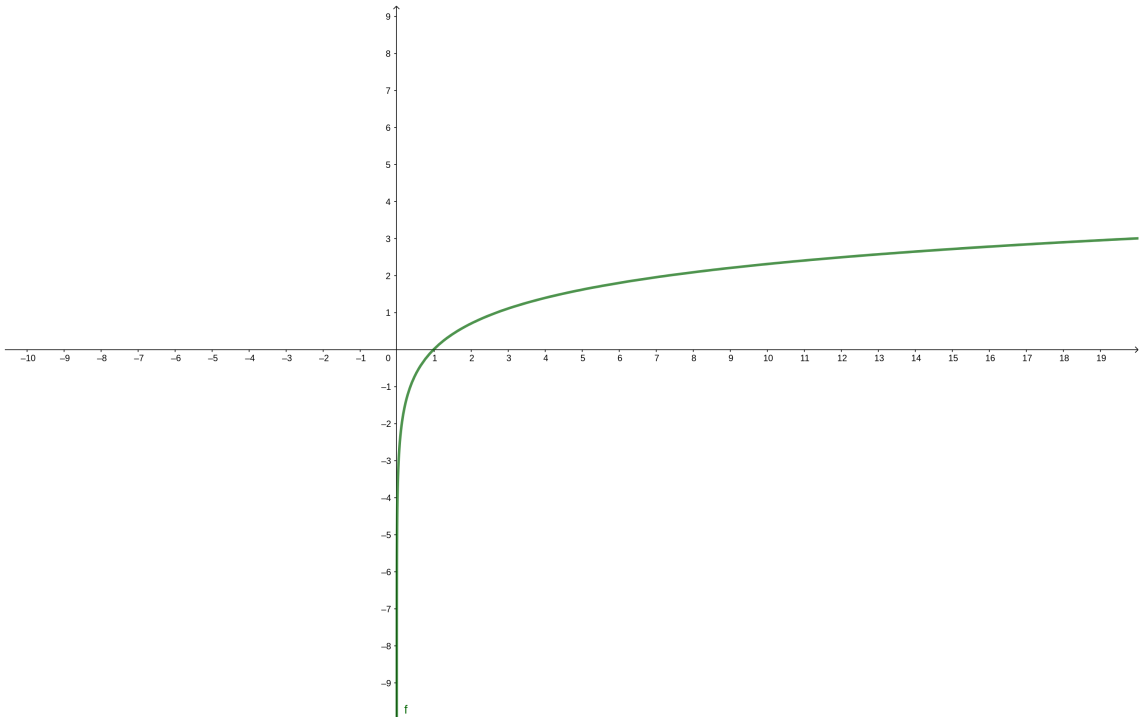

Figure 2 – Courbe représentative du logarithme

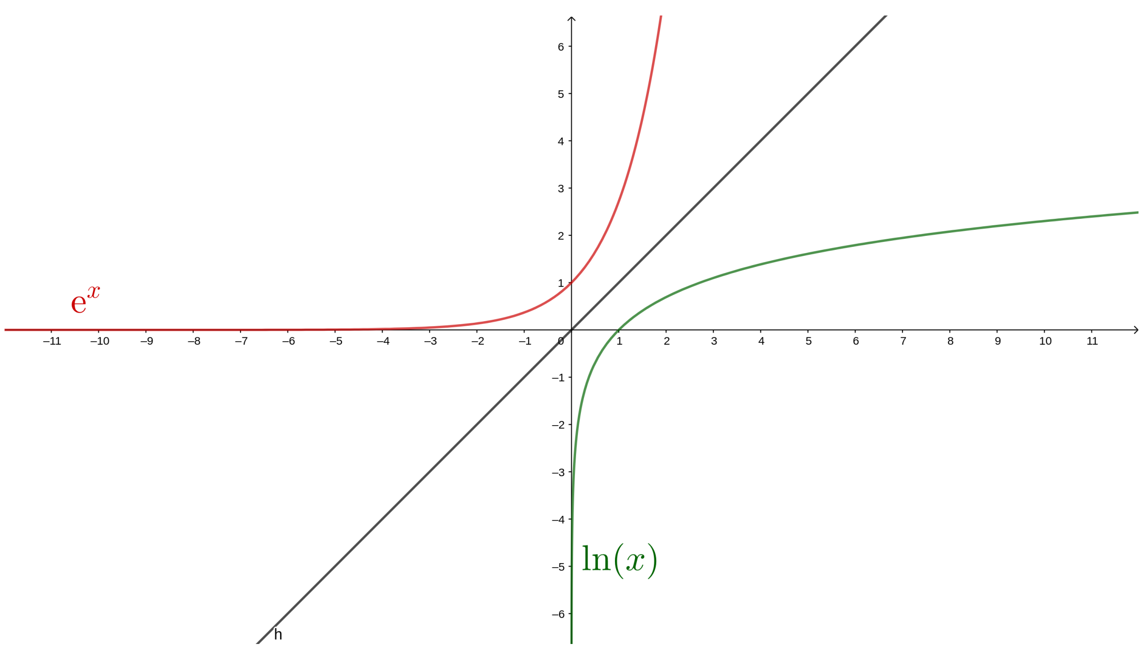

Figure 3 – Symétrie entre le logarithme et l'exponentielle

Alors que l'exponentielle transforme une somme en produit, le logarithme fait l'opération inverse, en transformant un produit en somme ! Comme l'exponentielle, c'est cette propriété qui est très recherchée en pratique !

Un petit exemple ? Et bien :

$$\ln(6) = \ln(2 * 3) = \ln(2) + \ln(3)$$

2.4 La puissance et le logarithme

2.4.1 Premier exemple

Comme l'exponentielle c'est un peu la fonction «puissance», on peut voir le logarithme comme «l'anti-puissance». Cela est résumé par la propriété suivante :

$$\ln a^p = p \ln a$$

Pour tout a, p deux réels strictement positifs.

Un petit exemple ?

$$\ln \sqrt{2} = \ln 2^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \ln 2$$

Nous verrons par exemple comment trouver directement un nombre p tel que $2^p = 1024$. Cela sera très utile pour (au moins) deux notions :

- Pour les suites, pour savoir à quel moment elle dépasse un seuil donné
- Pour l'algorithmie, par exemple pour exprimer le nombre d'opérations nécessaires pour trouver un nombre dans une liste de 1024 [5] nombres. Pour la dichotomie, ou l'on coupe à chaque fois la liste en deux, ce nombre d'opérations, que l'on note p, est donc le nombre tel que $2^p = 1024$. C'est-à-dire, $p * \ln(2) = \ln(1024)$, d'où

  $$\boxed{p = \frac{\ln 1024}{\ln 2}}$$

  . Ce qui nous donne $p = 10$.

2.4.2 Le logarithme dans une base différente

Dans l'exemple précédent, on se demandait quelle puissance de p permet d'avoir $2^p = 1024$. On aboutit à la formule $\frac{\ln 1024}{\ln 2}$. On peut voir alors cette formule comme le calcul d'une puissance non pas de e mais de 2, ainsi, on note :

$$\log_2 1024 = \frac{\ln 1024}{\ln 2}$$

5. c'est un exemple ! On pourra remplacer 1024 par n'importe quel nombre.

Et on lit « logarithme de p en base 2 du nombre 1024 ». Plus généralement, on note le logarithme en base $a > 0$ du nombre x :

$$\log_a x := \frac{\ln x}{\ln a}$$

(Les deux points signifiant que l'on *définit* ainsi le nombre $\log_a x$)On distingue alors le logarithme en base 10, qui se nomme alors le *logarithme décimal* et qui est parfois simplement noté log (donc, si on ne précise pas, log signifie dans la plupart des cas le logarithme en base 10) [6].

Exercice Montrer que ln est le logarithme en base e.

Exercice Combien de chiffre composent l'écriture décimale du nombre $2^{23084} + 1$? (Indice : calculez le logarithme décimal de ce nombre)

2.4.3 Définition de la fonction puissance

Nous pouvons maintenant *définir* proprement la fonction $x \mapsto a^x$, pour $a > 0$ (Cette condition est nécessaire ! Gardez là en tête)

En effet, on peut poser :

$$\text{Pour tout } \; x \in \mathbb{R} \; a^x = e^{x * \ln a}$$

Exercice Pourquoi fallait-il que $a > 0$?

Exercice À l'aide de cette formule, calculez 2^π. Que vaut $2^{-\pi}$?

Exercice À l'aide des propriétés de la fonction exponentielle, retrouver *toutes* les propriétés des fonctions puissances.

2.5 Limites

De même, on peut calculer les limites du logarithme :

$$\lim_{x \to 0} \ln x = -\infty$$
$$\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$$

Dans le même ordre d'idée, la fonction logarithme est *indéfiniment dérivable* (comme la fonction exponentielle) **sur son domaine de définition**.

Mais, question légitime, si la fonction logarithme est dérivable, que vaut sa dérivée ?

6. Notez aussi que ce genre de définition dépend d'un pays à l'autre. Par exemple, outre Atlantique, on aura plutôt tendance à noter log le logarithme que l'on noterai nous ln.

2.6 Dérivée de la fonction logarithme

La fonction logarithme est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$, et sa dérivée vaut (accrochez vous bien !) :

$$\ln' x = \frac{1}{x} \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}^{+*}$$

3 Dérivées composée des fonctions logarithmes et exponentielles

Finissons ce cours par les deux formules qui permettent de dériver des fonctions que l'on peut croiser au bac. Il s'agit ici de calculer les dérivées de $\ln u$ et $\exp v$, où u est une fonction dérivable à valeurs positives, et v une fonction dérivable à valeurs quelconque dans $\mathbb{R}$.

3.1 Dérivée composée du logarithme

Par la formule d'une dérivée composée, on trouve que si on a une fonction u qui est **strictement positive** pour tout x sur le domaine de définition de u, alors :

$$(\ln \circ u)' = \frac{u'}{u}$$

Exemple: soit la fonction $f(x) = \ln(x^2+1)$. La fonction $x \mapsto x^2+1$ est strictement positive sur $\mathbb{R}$, alors la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$, et est dérivable sur $\mathbb{R}$. Sa dérivée vaut :

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2+1}$$

3.2 Dérivée composée de l'exponentielle

Toujours par la formule d'une dérivée composée, on trouve que si on a une fonction dérivable sur son domaine de définition v qui est à valeurs réelles, alors pour tout x qui est dans le domaine de définition de v, on a :

$$(\exp v)' = v' \exp v$$

Exemple La dérivée de $x \mapsto \exp(x^2+1)$ est $x \mapsto 2x \exp(x^2+1)$