L'exponentielle et sa copine le logarithme

Fabien Delhomme

Table des matières

1 L'exponentielle

1.1 Motivations

Maintenant que vous connaissez le merveilleux outils qu'est la dérivée, nous allons étudier deux autres fonctions dont les propriétés sont *indispensables* en mathématique, et en science en général.

Ces deux fonctions sont l'exponentielle et le logarithme, qui sont réciproques l'une de l'autre. Nous reverrons l'exponentielle dans le chapitre des complexes (en géométrie).

1.2 Définition

1.2.1 Définition par une équation différentielle

Voici la définition de la fonction exponentielle réelle. C'est une fonction, notée exp, qui va de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, telle que :

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R} & \exp' x &= \exp x \\ & \exp 0 &= 1 \end{cases}$$

On dit que c'est une *équation différentielle* parce que c'est équation dans laquelle l'inconnue est une fonction, et l'équation fait apparaitre les dérivées de la fonction.

À notre niveau, on admet qu'une telle fonction existe, et qu'elle est définie sur $\mathbb{R}$. Il existe des moyens pas très compliqués pour le prouver, ils sont néanmoins abordés en toute rigueur en licence de mathématique. Une démonstration élémentaire s'appuie sur la méthode d'Euler, une méthode que l'on explore dans le cas de la fonction exponentielle dans la partie suivante.

1.2.2 Définition par une équation fonctionnelle

L'équation fonctionnelle respectée par l'exponentielle est la suivante :

$$\text{Pour tout } x, y \in \mathbb{R} \ \ \exp(x) * \exp(y) = \exp(x+y)$$

De la même manière, nous allons admettre que cette équation n'est vérifiée que par une seule fonction, et donc que cela nous donne bien une définition, et qu'elle est équivalente à la définition précédente (c'est-à-dire que dans les deux cas, on tombe parle de la même fonction).

On dit que c'est une *équation fonctionnelle* parce que c'est une équatio

1.3 Propriétés de l'exponentielle

1.3.1

1.3.2 Propriétés conséquetes de la définiot

À cause de sa définition, l'exponentielle admet plusieurs propriétés.

- Elle n'est jamais nulle,
- Elle est toujours strictement positive,
- Elle est toujours croissante,
- Sa limite en plus l'infini vaut l'infini
- Sa limite en moins l'infini vaut 0
- Elle se comporte comme une fonction puissance (voir le paragraphe du dessous), à cause de sa propriété : $\exp x + y = \exp x * \exp y$.

De plus, on $\exp 1 = \mathrm{e}$. C'est un nombre que l'on peut calculer, et qui donne d'après la calculatrice (ou google !) $\mathrm{e} = \approx 2.71828182846$

1.3.3 Lien entre l'exponentielle est les fonctions puissance

La formule $\exp x + y = \exp x * \exp y$ fait écho avec la formule $a^{x+y} = a^x * a^y$. C'est pour cela que l'on note :

$$\exp x = \mathrm{e}^x$$

Donc, calculer $\exp x$ revient à calculer e *puissance* x.

1.3.3.1 Exemple de calcul :

On sait que $\exp \frac{1}{2}$ est plus petit que $\exp 1$, mais plus grand que $\exp 0 = 1$ donc $\exp \frac{1}{2} > 0$ puisque la fonction exponentielle est croissante. De plus,

$$\left(\exp \frac{1}{2}\right)^2 = \exp \frac{1}{2} * \exp \frac{1}{2} = \exp \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = \exp 1 = \mathrm{e}$$

Or, le nombre $\exp \frac{1}{2} > 0$, donc :

$$\exp \frac{1}{2} = \sqrt{\mathrm{e}}$$

Jetez un coup d'œil à la figure 1 la croissance extraordinaire de cette fonction lorsque x devient de plus en plus grand ! Graphiquement, on peut retenir :

- Les limites de l'exponentielle en plus et moins l'infini
- Sa propriété de croissance sur tout $\mathbb{R}$
- Sa propriété de positivité sur tout $\mathbb{R}$

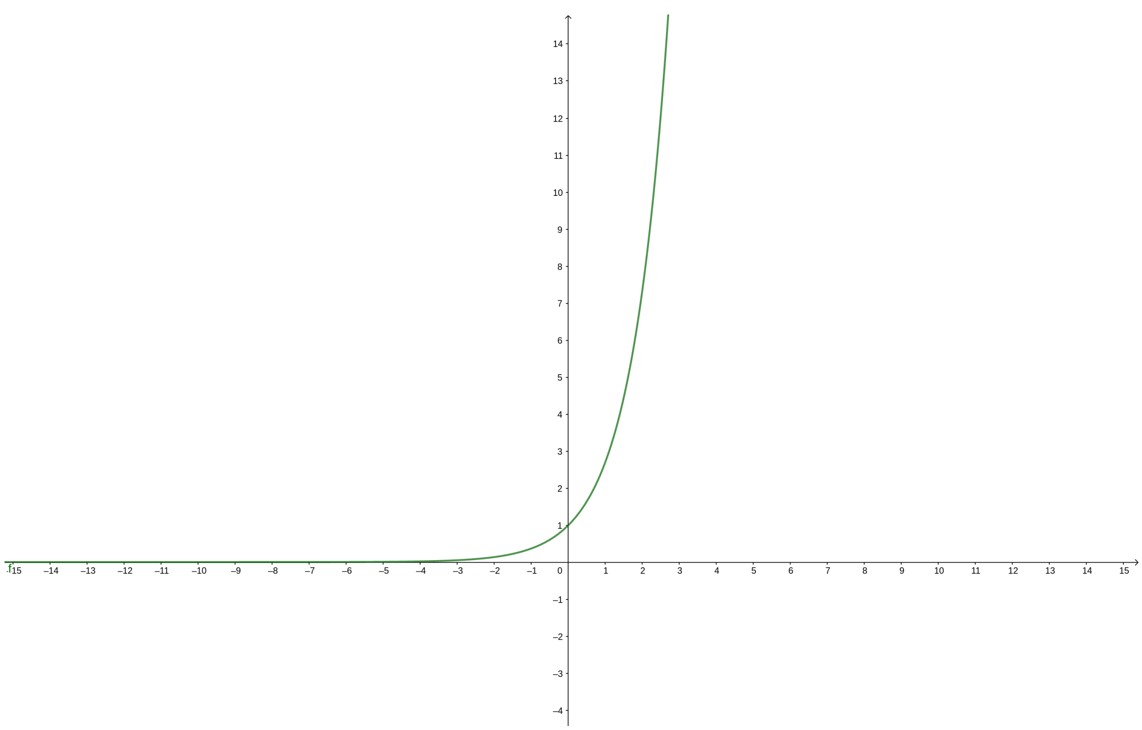

FIGURE 1 – Courbe représentative de la fonction exponentielle

2 Le logarithme

2.1 Définition

Dans cette partie, je vais vous montrer que le logarithme est la fonction réciproque de la fonction exponentielle. Tout comme pour la fonction racine carrée, définir une réciproque est toujours un peu délicat, ou tout du moins, il faut faire attention au domaine de définition de cette fameuse réciproque.

Reprenons quelques propriétés de l'exponentielle pour définir proprement le domaine de définition de la fonction réciproque, le logarithme. On a vu dans la partie précédente que l'exponentielle était définie pour toutes les valeurs de $\mathbb{R}$ et que pour tout x dans $\mathbb{R}$, $\exp x > 0$. Donc, on peut résumer cela par :

$$\exp \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^{*+}$$

Où la notation $\mathbb{R}^{*+}$ désigne que les réels strictement positifs.

De plus, l'exponentielle est **strictement** croissante sur $\mathbb{R}$. Donc, si l'on veut résoudre l'équation :

$$\exp x = y$$

(Qu'il faut lire « Quel est le x tel que, pour un y donné, $\exp x = y$? ») il y aura :

- Soit une unique solution si $y > 0$ (l'unicité est garantie par la stricte croissance, l'existence par le théorème des valeurs intermédiaires, à cause des limites de l'exponentielle en $-\infty$ et $+\infty$)
- Soit aucune solution si $y \leq 0$.

Donc, dans le cas où $y > 0$, on peut définir une fonction, que l'on appelle le logarithme, qui répond à la question posée plus haut, « Quel est le x tel que, pour un y donné, $\exp x = y$? ». On pose donc, pour $y < 0$:

$$\ln y = x = \text{l'unique réel tel que } \exp x = y$$

Quelques remarques :

- Pour l'instant, nous n'avons aucune formule pour calculer le logarithme !
- Cette définition est essentielle si vous voulez comprendre le logarithme.
- Faites bien attention au domaine de définition du logarithme.

On récapitule, on vient donc de définir une fonction, nommée logarithme, qui est définie sur $\mathbb{R}^{*+}$, à valeur dans $\mathbb{R}$. Résumé autrement :

$$\begin{array}{rrcll} \exp & : & \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^{*+} & & \\ & & \mathbb{R} \longleftarrow \mathbb{R}^{*+} & : & \ln \end{array}$$

2.2 Exemples

Quelques exemples pour bien comprendre.

— Puisque que $\exp 0 = 1$, alors, $\ln 1 = 0$.
— Si je cherche le nombre x tel que $\exp x = 3$, alors je tape sur la calculatrice (qui connait son logarithme !) $\ln 3$.

2.3 Propriété du logarithme

2.3.1 Graphe du logarithme

Pour obtenir le graphe du logarithme, on procède de la même manière que lorsqu'on voulait obtenir le graphe de la fonction racine carré sachant le graphe de la fonction racine ! Mathématiquement, on prend la courbe symétrique à l'axe $y = x$ de la courbe exponentielle pour obtenir celle du logarithme.

Sinon, reportez vous au graphe donné par votre calculatrice, ou à la figure 2. Le graphe suivant montre la fonction exponentielle et la fonction logarithme sur le même graphique, ce qui permet de mettre en évidence la symétrie des courbes représentatives autour de l'axe $y = x$ des deux fonctions, ce qui est du à la définition du logarithme comme réciproque de la fonction exponentielle.

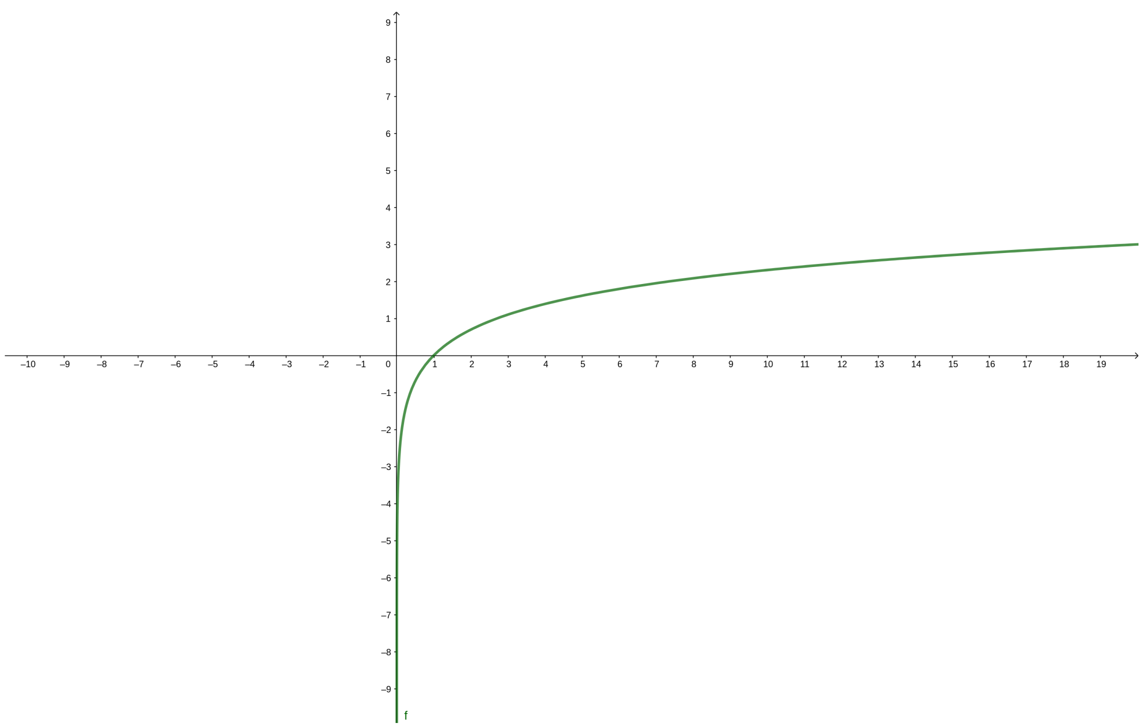

FIGURE 2 – Courbe représentative du logarithme

2.3.2 Produit en somme

Toutes les propriétés du logarithme viennent de celles de l'exponentielle ! Par exemple, puisque :

$$\exp x + y = \exp x * \exp y$$

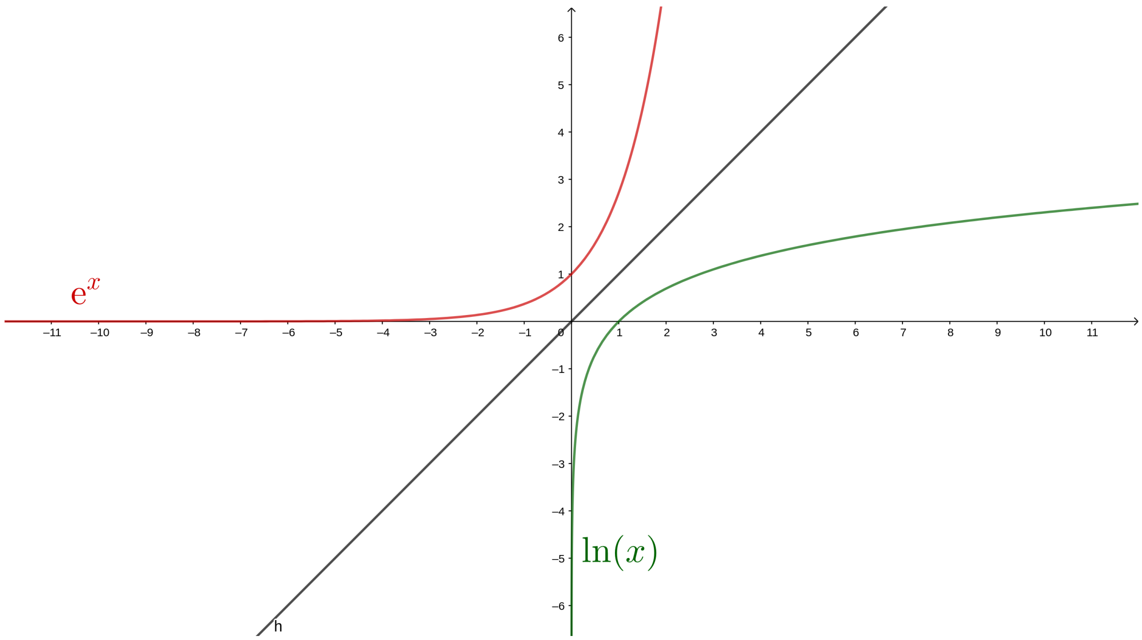

FIGURE 3 – Symétrie entre le logarithme et l'exponentielle

On a donc [1], en passant au logarithme

$$\ln a * b = \ln a + \ln b$$

. Alors que l'exponentielle transforme une somme en produit, le logarithme fait l'opération inverse, en transformant un produit en somme ! Comme l'exponentielle, c'est cette propriété qui est très recherchée en pratique !

Un petit exemple ? Et bien :

$$\ln(6) = \ln(2 * 3) = \ln(2) + \ln(3)$$

2.3.2.1 La puissance et le logarithme

Comme l'exponentielle c'est un peu la fonction «puissance», on peut voir le logarithme comme «l'anti-puissance». Cela est résumé par la propriété suivante :

$$\ln a^p = p \ln a$$

Pour tout a, p deux réels strictement positifs.

Un petit exemple ?

$$\ln \sqrt{2} = \ln 2^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \ln 2$$

Nous verrons par exemple comment trouver directement un nombre p tel que $2^p = 1024$. Cela sera très utile pour (au moins) deux notions :

1. pour une démonstration détaillée, n'hésitez pas à demander !

— Pour les suites, pour savoir à quel moment elle dépasse un seuil donné
— Pour l'algorithmie, par exemple pour exprimer le nombre d'opérations nécessaires pour trouver un nombre dans une liste de 1024 [2] nombres.

2.3.3 Limites

De même, on peut calculer les limites du logarithme :

— $\lim_{x\to 0} \ln x = -\infty$
— $\lim_{x\to +\infty} \ln x = +\infty$

Dans le même ordre d'idée, la fonction logarithme est *indéfiniment dérivable* (comme la fonction exponentielle) **sur son domaine de définition**.

Mais, question légitime, si la fonction logarithme est dérivable, que vaut sa dérivée ?

2.3.4 Dérivée de la fonction logarithme

La fonction logarithme est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$, et sa dérivée vaut (accrochez vous bien !) :

$$\ln' x = \frac{1}{x} \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}^{+*}$$

Et par la formule d'une dérivée composée, on trouve que si on a une fonction u qui est **strictement positive** pour tout x sur le domaine de définition de u, alors :

$$(\ln \circ u)' = \frac{u'}{u}$$

Exemple: soit la fonction $f(x) = \ln(x^2 + 1)$. La fonction $x \mapsto x^2 + 1$ est strictement positive sur $\mathbb{R}$, alors la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$, et est dérivable sur $\mathbb{R}$. Sa dérivée vaut :

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$$

2. c'est un exemple ! On pourra remplacer 1024 par n'importe quel nombre.