

Les suites

Delhomme Fabien

1 Introduction

Dans ce cours, je vais vous montrer toutes les méthodes relatives aux suites. Vous pourrez ainsi résoudre tous les exos du bac. Il arrive *très fréquemment* qu'un exercice au bac porte sur les suites.

2 Définition

2.1 Définition basique

Par basique, j'entends une définition que l'on peut donner à n'importe qui peut importe son parcours.

Une suite réel, qui s'écrit mathématiquement $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, est un ensemble de nombres réels indexés par les entiers naturels. Voici un exemple de suite :

$$(1, 5, 2, 5, 3, 3, 4, 6 \dots)$$
$$(1, 2, 3, 4, \dots)$$

C'est donc un ensemble contenant une *infinité de valeurs*.

2.2 À quoi servent les suites ?

Les suites servent typiquement à modéliser des phénomènes qui évoluent de manière *discrète* (dans le sens, opposé du continu) dans le temps. Par exemple, l'argent qui se trouve dans votre banque en fonction du nombre de mois passés. La quantité de pétales sur une fleur en fonction de son rang, le nombre de personnes en fonction du temps dans une ville données, ou encore l'approximation successive de e en fonction du nombre de terme que l'on a rajouté pour améliorer l'approximation etc.

2.3 Premiers types de suite

Il existe deux types de suites, qui sont les suites *géométriques* et les suites *arithmétiques* qu'il faut connaître.

2.3.1 Suites arithmétiques

C'est l'exemple de suite le plus simple, mais illustrons différentes suites arithmétiques à l'aide d'un exemple.

Voici donc plusieurs suites, et la valeurs qu'elle prennent pour les premiers termes.

n	0	1	2	3	4	5	...
u_n	1	3	5	7	9	11	...
v_n	-3	0	3	6	9	12	...

À votre avis, quel est la règle qui a défini chacune de ces suites ?

En fait, pour ces suites, pour calculer un terme, on a pris le terme précédent, et on lui a ajouté un nombre r unique pour obtenir le terme suivant. Par exemple, pour calculer u_1 , on a fait $u_0 + 2 = 1 + 2 = 3$. Pour calculer u_3 , on a calculé $u_3 = u_2 + 2 = 5 + 2 = 7$.

Donc, pour u_n le nombre r vaut 2 !

Que vaut r pour v_n ?

2.3.2 Suite géométrique

Maintenant, on peut faire exactement la même chose, mais en multipliant par toujours le même terme. Partons par exemple de $u_0 = 6$. Alors, on peut définir

n	6	12	24	48	96	192	...
-----	---	----	----	----	----	-----	-----

C'est exactement la même chose, sauf que cette fois-ci, on a *multiplier* à chaque fois le terme précédent par 2 pour obtenir le terme suivant.

2.4 Définition d'une suite

2.4.1 Définition récursive

On peut avoir plusieurs définitions pour une même suite. Soit une définition récursive, par exemple, comme par exemple :

$$u_{n+1} = 3u_n + 2 \quad u_0 = 2$$

2.4.2 Définition explicite

Cette définition permet de calculer le n -ième terme, sans calculer les autres termes de la suite, c'est par exemple le cas des suites suivantes :

- $u_n = n^2$
- $u_n = (0.5)^n + 2$
- $u_n = \frac{1}{n}$

2.4.3 Un peu de hauteur : une suite définie par rapport à une fonction

2.4.3.1 Pour une définition récursive

Soit f une fonction définie (au moins) sur \mathbb{N} à valeur réelle. Alors, on peut définir une suite u_n , avec u_0 fixé quelconque, et la définition récursive :

$$u_{n+1} = f(u_n) \quad n \in \mathbb{N}$$

Par exemple :

- Avec $f : x \mapsto 3x$, on retrouve la définition d'une suite géométrique de raison 3.
- Avec $f : x \mapsto x + 2$, on retrouve la définition d'une suite arithmétique de raison 2.

Maintenant peut-être vous voyez mieux pourquoi ces deux suites sont les «bases» des suites mathématiques, elles ont une correspondance avec les fonctions de «base», les fonctions linéaire et affine, que l'on rencontre habituellement en mathématiques.

2.4.3.2 Pour une définition explicite

Cette fois ci, pour une fonction f définie (au moins) sur \mathbb{N} à valeur réelle, on peut définir une suite u_n par :

$$u_n = f(n)$$

Remarques

- Regardez bien la différence entre les deux écriture !
- Si je voulais être plus précis, j'aurais du dire que je définissais pour les suites récursives, uniquement les suites récursives d'ordre 1, c'est à dire que u_{n+1} ne dépend que de u_n . On peut très bien imaginer des suites *d'ordre deux* telle que u_{n+2} dépendent de u_{n+1} et u_n (auquel cas, il faut préciser u_0 **et** u_1). Évidemment, tous les ordres existent en mathématiques.

3 Premières propriétés des suites

Ce paragraphe permet l'introduction de plusieurs mot de vocabulaire qu'il faut maîtriser.

3.1 Convergence

Voici la définition de la convergence d'une suite.

Convergence Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dite **convergente**, si et seulement si il existe $l \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = l$$

3.1.1 Définition plus précise de la convergence

La définition donnée plus haut se mord la queue : j'ai pas voulu préciser pour plus de facilité de compréhension en première lecture. Mais ce qu'il faut retenir c'est que la vraie définition d'une suite convergente qui converge vers $l \in \mathbb{R}$ est celle-ci :

Quelque soit la précision $\varepsilon > 0$ que l'on se donne, il existe un rang, c'est-à-dire un entier N , tel que dès que $n > N$, alors la distance entre u_n et l est plus petite que ε .

Dit plus rapidement, quelque soit $\varepsilon > 0$, il existe un rang N tel que dès que $n > N$, alors $|u_n - l| < \varepsilon$.

3.2 Divergence

La définition de la divergence est nettement plus simple (mais regroupe plusieurs comportements différents !)

Divergence Une suite est dite divergente si et seulement si elle ne converge pas.

Il y a plusieurs raisons pour une suite de ne pas converger :

- Soit, elle tend vers $+\infty$, dans ce cas, effectivement, elle ne s'approche d'aucun réel l particulier.
- Soit elle oscille indéfiniment sans vraiment se stabiliser, par exemple $u_n = (-1)^n$.

3.3 Minorant, majorant, suite bornée

On peut commencer par deux définitions

Majorant M est un majorant de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ si et seulement si, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$u_n \leq M$$

Minorant m est un minorant de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ si et seulement si, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$m \leq u_n$$

Bornée Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dite bornée si jamais elle admet un majorant **et** un minorant. Ou, cela revient au même, si et seulement si la suite $(|u_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée¹.

4 Théorèmes pour calculer la limite d'une suite

Toutes les règles de calcul des limites que l'on a vu dans le chapitre portant sur les fonctions sont valables ici !

Voici des théorèmes qui ne s'applique qu'aux suites.

1. un petit moment de réflexion est nécessaire ici.

4.1 Théorème de la convergence monotone

C'est un théorème difficile à montrer (en tout cas en terminale !), mais il est essentiellement intuitif. Voilà ce qu'il affirme :

Toute suite majorée et croissante admet une limite, c'est-à-dire, est convergente.

Quelle est la version pour une suite minorée ?

4.2 Théorème des gendarmes

C'est exactement le même énoncé que pour les fonctions !

Soient deux suites (u_n) et (v_n) qui **convergent** vers la même limite $l \in \mathbb{R}$. Soit (w_n) une suite numérique quelconque.

Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$u_n \leq w_n \leq v_n$$

Alors, la suite (w_n) converge et admet comme limite l !

4.3 Théorème de comparaison

Très semblable quelque par au théorème des gendarmes !

Soient deux suites numériques (u_n) et (v_n) telles qu'à partir d'un certain rang

$$u_n \leq v_n$$

Alors, si $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \infty$, il en est de même pour v_n !

Il existe une autre version de ce théorème, pourrez vous la trouver ?

5 Étude des suites arithmétiques et géométriques

5.1 Formules explicites

Les suites arithmétiques et géométriques sont suffisamment gentille pour avoir une forme explicites simple à déterminer.

5.1.1 Suites arithmétiques

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r et de terme initiale $u_0 \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N} \quad u_n = u_0 + nr$$

5.1.2 Suites géométriques

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q et de terme initiale $u_0 \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N} \quad u_n = u_0 q^n$$

5.2 Limites des suites géométriques

La limite d'une suite arithmétique est très simple à calculer, et est laissée en exercice pour le lecteur (il suffit de faire attention au signe de la raison de la suite). Mais le critère pour les suites géométriques est un peu plus délicat.

On a le théorème suivant :

Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q \in \mathbb{R}$. Alors :

- Si $|q| < 1$, la suite converge et admet comme limite 0
- Si $|q| > 1$, la suite diverge, et si q est positif, alors la suite tend vers plus l'infini. Si q est négatif, la suite n'admet pas de limite.
- Si $q = 1$, la suite est constante, donc converge vers u_0
- Si $q = -1$, la suite diverge et n'admet pas de limite.

Il faut savoir que cette distinction autour de la valeur 1 se retrouve dans beaucoup de théorèmes mathématiques à cause du théorème ci-dessus !

6 Techniques pour savoir si une suite est croissante ou décroissante

Il n'y a pas trois mille techniques à maîtriser. Il y a seulement que trois possibilités pour connaître la croissance ou la décroissance d'une suite (u_n)

- Soit, on étudie le signe de la suite $(u_{n+1} - u_n)$. Si il est négatif, alors la suite est décroissante, sinon la suite est croissante.
- Soit, *si la suite ne s'annule pas et qu'elle est de signe constant*, on étudie la suite $\frac{u_{n+1}}{u_n}$. Si le quotient est supérieure à 1, alors la suite est croissante, sinon la suite est décroissante.
- Soit, si la suite est définie par $u_{n+1} = f(u_n)$, alors il faut étudier la croissance de la fonction, et les choses sont un peu plus compliquées. Mais tout à fait faisable. Nous verrons quelques cas en cours !

Dans la grande majorité des cas, c'est la première méthode qui marchera. La deuxième méthode est à privilégier quand la suite est définie avec beaucoup de multiplications, et peu (voire aucune) somme. Puisque les quotients et les sommes ne font pas bon ménage ! La troisième méthode sera toujours guidée dans les exercices de type bac.

Remarque Il est intéressant de constater qu'étudier la différence d'une suite revient à une espèce de «dérivée discrète». Je vous laisse méditer là dessus.

7 Le raisonnement par récurrence

Ce type de raisonnement logique est très adapté pour démontrer des résultats qui sont indexés sur des réels, par exemple :

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N} \quad \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Il s'agit donc de montrer, que :

$$P(n) := \ll \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2} \gg$$

Est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Comment cela fonctionne ? Il y a trois étapes. L'*initialisation*, l'*hérédité*, et la *conclusion*. Les deux premières étapes sont **cruciales** pour la validité du raisonnement. La dernière est une sorte de synthèse pour bien montrer au correcteur que vous avez compris l'enjeu de la démonstration.

Imaginons que nous ayons à montrer une proposition qui est indexée par un entier naturel $n \in \mathbb{N}$. On peut donc noter cette proposition $P(n)$. La démonstration par récurrence fonctionne alors ainsi :

Initialisation On commence par montrer que la propriété au rang 0 est vraie. C'est-à-dire que l'on montre que $P(0)$ est vraie.

Hérédité On continue ensuite, en montrant alors que **si la propriété est vraie pour UN RANG QUELCONQUE** $n \in \mathbb{N}$, alors elle sera vraie au rang $n+1$. C'est-à-dire qu'il faut montrer l'implication $P(n) \implies P(n+1)$

Conclusion Ce raisonnement nous garantit que :

$$P(0) \implies P(1) \implies P(2) \implies \dots \implies P(n) \dots$$

Or $P(0)$ est vraie, donc l'ensemble des propositions $P(n)$ sont vraies pour tout $n \in \mathbb{N}$.