Exercices sur l'exponentielle

Delhomme Fabien

1 Résolution d'équation

1.1 Équations simples

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

- $e^x = 3$
- $e^x = -2$
- $e^x = 0$

1.2 Équations d'ordre 2

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

- $2e^{2x} + 12e^x + 18 = 0.$
- $-4e^{2x} + 4e^x + 8 = 0.$
- $-4e^{2x} + 60e^x - 216 = 0.$

2 Équations affines

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

- $e^{9x-3} = e^8$
- $e^{7x-3} = e^9$
- $e^{9x-7} = e$

3 Calculs de limites, et études de fonctions

3.1 Calculs de limites

Établir le tableau de variation de $x * \exp x$ sur $\mathbb{R}$, et calculer la limite en moins l'infini.

Avec les résultats de la fonction précédente, trouvez la limite de $x \exp(-x)$ pour $x \to +\infty$.

3.2 Établir la limite d'une fonction avec la formule de la dérivée

Calculer la limite suivante :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x}$$

Plus difficile

Calculer la limite suivante :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x + \frac{x^2}{2}}$$

Graphiquement, que pensez vous de :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}}$$

Applications

À partir des calculs précédents, donnez une approximation de e. À combien êtes vous proches de la vraie valeur de e ?

Essayer de la même manière de calculer $\sqrt{e}$. Cette fois ci, à combien êtes vous de la vraie valeur de $\sqrt{e}$?

4 Exercices

4.1 Fonction que l'on retrouvera en probabilité

On considère la fonction $f : x \longrightarrow \exp(-\frac{1}{x^2})$.

— Démontrer que la fonction f est paire
— Déterminer les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$
— Donner la dérivée de f. Quel est le sens de variation de f ?
— Dresser le tableau de variation de f.
— Tracer la courbe de la fonction f dans un repère orthogonal.

4.2 Exercice en lien avec la physique

On admet que la charge q d'un condensateur est donnée en fonction du temps t exprimée en secondes par :

$$q(t) = 6(1 - \mathrm{e}^{-0.2t})$$

- Démontrer que la fonction q est strictement croissante sur $[0; +\infty[$ (le condensateur se charge)
- Donner la limite de q en $+\infty$.
- Dresser le tableau de variation de q.
- Déterminer une équation de la tangente T à la courbe de q au point d'abscisse 0.
- Tracer l'allure de la courbe de la fonction q.
- Justifier qu'il existe un instant t_0 unique tel que $q(t_0) = 5.7$
- Au bout de combien de secondes la charge du condensateur sera-t-elle supérieure à 5.7 ?

5 Problèmes

5.1 Approximation de banquier

Les banquiers calculent rapidement le temps approximatif du doublement d'un capital, placé à intérêts composés, de la façon suivante :

Pour un taux d'intérêt de t%, le capital double au bout de $\frac{70}{t}$ années

On essaie de comprendre d'où vient cette astuce.

1. Au bout de n années, par quel nombre est multiplié la valeur d'un capital placé à t% ?
2. On sait que la courbe représentative de ln est située sous sa tangente au point d'abscisse 1. Par quelle inégalité vérifiée par $\ln(x)$ pour tout x de $]0, +\infty[$ cela se traduit-il ? En déduire une inégalité vérifiée par $\ln(1 + x)$ pour tout x de $]-1, +\infty[$.
3. Étudier le sens de variation de la fonction $g : x \mapsto \ln(1 + x) - x + \frac{x^2}{2}$
4. En déduire des deux questions précédentes, que pour tout x de $]0, +\infty[$, on ait
$$x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1 + x) \leq x$$
Puis, donner un majorant de l'erreur commise quand on remplace $\ln(1+x)$ par x.
5. Expliciter les approximations qui conduisent à l'astuce du banquier pour des valeurs raisonnables de t (c'est-à-dire pour $0 < t < 14$).