

# Fonctions, suite

Fabien Delhomme

3 septembre 2018

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Limites d'une fonction</b>	<b>3</b>
1.1	Motivations . . . . .	3
1.1.1	En science . . . . .	3
1.1.2	En mathématiques . . . . .	3
1.1.3	Pour ce cours . . . . .	3
1.2	Définitions . . . . .	3
1.3	Définition propre aux fonctions . . . . .	4
1.4	Pour quelques fonctions classiques . . . . .	4
1.4.1	Les fonctions puissances . . . . .	4
1.4.2	La fonction inverse . . . . .	5
1.5	Règles de calcul . . . . .	5
1.6	Théorèmes portant sur les limites . . . . .	6
1.6.1	Théorème de comparaison . . . . .	6
1.6.2	Théorème des gendarmes . . . . .	6
1.6.3	Exemple typique du théorème des gendarmes . . . . .	6
<b>2</b>	<b>La continuité</b>	<b>7</b>
2.1	Définition . . . . .	7
2.2	Graphiquement parlant . . . . .	7
2.3	Exemples . . . . .	7
2.4	Comment justifier (au bac) qu'une fonction est continue ? . . . . .	7
2.5	Théorème des valeurs intermédiaires . . . . .	8
2.6	Algorithme . . . . .	8
2.6.1	Le contexte . . . . .	8
<b>3</b>	<b>La dérivée</b>	<b>9</b>
3.1	Définition . . . . .	9
3.2	Propriété . . . . .	9
3.2.1	Sur les fonctions, trouver l'extremum . . . . .	9
3.2.2	Implique la continuité . . . . .	9
3.2.3	Toutes fonctions n'est pas forcément dérivables . . . . .	9
3.3	Règles de calculs . . . . .	9

3.3.1	Linéarité . . . . .	9
3.3.2	La formule de la triche . . . . .	9
3.3.3	Autres règles . . . . .	9
3.4	Exemples . . . . .	9

# 1 Limites d'une fonction

## 1.1 Motivations

### 1.1.1 En science

Souvent, on utilise le concept de limite pour **prédire** le comportement d'un système. En physique notamment, on calcule la limite d'une fonction en plus l'infini pour déterminer le comportement dit *asymptotique* d'un phénomène. Par exemple, si on regarde la température d'une tasse de thé chaude, on se rend bien compte que si on la laisse suffisamment à l'air libre, la température de la tasse va décroître, et se stabiliser autour de la température extérieure. On pourrait donc voir la limite comme le comportement de la température après avoir attendu suffisamment longtemps.

### 1.1.2 En mathématiques

(à lire peut-être plus tard) Pour comparer la croissance de deux fonctions, on veut savoir qui le «remportera» sur l'autre au bout d'un certain temps. Et le concept de limite est idéal pour cela

### 1.1.3 Pour ce cours

Ce chapitre remplit trois objectifs :

- C'est, tel quel, un chapitre qui fait partie de la liste du programme officiel de terminal S.
- Je l'introduis avec des fonctions, mais sachez que l'on retrouvera *exactement* la même chose pour les *suites*, mais en plus simple. Donc si vous l'avez compris ici, vous l'avez compris pour les suites (mais je redonnerai quelques précisions, évidemment)
- Enfin, je veux introduire la notion de dérivée après ce chapitre. Notion qui repose sur les limites, donc c'est dans le thème !

## 1.2 Définitions

Une limite d'une fonction  $f$  au point  $a$  (un point au sens large, pour éviter d'écrire plusieurs définitions pour le même concept, j'autorise **exceptionnellement** le point  $a$  d'être égal à  $\pm\infty$ ) est la *valeur* vers quoi tend  $f(x)$  pour  $x$  qui s'approche de plus en plus de  $a$ .

**Exemples:** - si on prend la fonction  $f(x) = x + 1$ . Quelle est sa limite en 0 ? Et bien, plus  $x$  s'approche de 0, plus  $x + 1$  s'approche de 1, donc on note :

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$$

- Si maintenant, on prend  $f(x) = \frac{1}{x}$ , quelle est sa limite en  $+\infty$  ? Et bien, plus  $x$  est grand, plus  $\frac{1}{x}$  s'approche de 0.

**Remarques:** - le calcul de limite est très présent au bac. - certaines limites de fonctions doivent être connues, mais la plupart se retrouvent sur le graphe des fonctions. Pour les autres, je vous donnerai des interprétations pour mieux les mémoriser.

### 1.3 Définition propre aux fonctions

Il faut néanmoins distinguer deux types de limite. Cette distinction n'a lieu *que pour les fonctions* (cela veut dire, pas pour les suites). On a donc :

- Les limites dites à gauche, notée :  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ , voire  $f(a^+)$
- Les limites dites à droite, notée :  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ , voire  $f(a^-)$ , pour aller plus vite.

Intuitivement, la limite à gauche d'un point  $a$  est la valeur de  $f(x)$  pour  $x$  qui s'approche de  $a$  avec la condition  $x < a$ . On arrive vers  $a$  graphiquement vers la gauche.

De même pour la limite à droite.

Il peut arriver qu'une fonction ait une limite à gauche et une limite à droite différente en un même point. Par exemple la fonction qui à  $x$  associe 1 pour les nombre positifs, et  $-1$  pour les nombre négatifs, et n'est pas définie pour  $x = 0$ , admet :

- Une limite à gauche en 0 qui est de  $-1$
- Une limite à droite en 0 qui est de 1

Autre subtilité par exemple, soit  $f = \frac{1}{x}$  :

- $f$  admet  $+\infty$  pour limite en 0 à droite
- $f$  admet  $-\infty$  pour limite en 0 à gauche

C'est aussi pour cela que l'on doit distinguer les deux limites

### 1.4 Pour quelques fonctions classiques

#### 1.4.1 Les fonctions puissances

Pour tous les fonctions puissances,  $f : x \longrightarrow x^n$ , on a, suivant la parité de  $n$  :

- Si  $n$  est pair,  $\lim_{\pm\infty} f(x) = \pm\infty$
- Si  $n$  est impair  $\lim_{\pm\infty} f(x) = \mp\infty$  le signe est inversé

### 1.4.2 La fonction inverse

Très pratique, car elle va nous permettre de calculer plus largement les limites pour les fonctions du style  $\frac{1}{f(x)}$  et par extension, quelques limites pour  $\frac{u}{v}$  grâce au tableau sur le produit.

## 1.5 Règles de calcul

Intuitivement, on peut se convaincre des règles de calcul suivantes. On va présenter les règles dans un tableau récapitulatif. On présente tous les cas possibles de limites de deux fonctions  $u$ , et  $v$ . Le résultat de leur limite est indiquée dans la cellule correspondante.

Les ?? signifient que l'on ne peut pas conclure dans le cas général, c'est donc du cas par cas. Nous verrons des exemples à la section suivante.

Pour le produit :

*	$v = \infty$	$v = -\infty$	$v = l \neq 0$	$v = 0$
$u = \infty$	$\infty$	$-\infty$	$\infty$	??
$u = -\infty$	$-\infty$	$\infty$	$-\infty$	??
$u = l' \neq 0$	$\infty$	$-\infty$	$ll'$	0
$u = 0$	??	??	0	0

Pour la somme :

+	$v = \infty$	$v = -\infty$	$v = l$
$u = \infty$	$\infty$	??	$\infty$
$u = -\infty$	??	$-\infty$	$-\infty$
$u = l'$	$\infty$	$-\infty$	$ll'$

Pour le quotient, il suffit juste de connaître les limites en tout les points possibles de la fonction  $\frac{1}{x}$ , et d'appliquer ensuite le produit. Par exemple, pour  $\frac{\infty}{0^+} = \infty * (+\infty) = \infty$ .

## 1.6 Théorèmes portant sur les limites

### 1.6.1 Théorème de comparaison

Celui-là est très intuitif, mais très utilisé. Supposons que nous avons deux fonctions, telles que :

$$f(x) \leq g(x)$$

Alors, si  $f(x)$  tend vers  $\infty$  en  $a$ , alors  $g(x)$  aussi.

On peut alors imaginer toutes les variations possibles, avec moins l'infini, ou une inégalité dans l'autre sens.

### 1.6.2 Théorème des gendarmes

Aussi appelé théorème d'encadrement<sup>1</sup>, celui-là est **vraiment** utilisé massivement en mathématiques (en particulier en analyse).

Supposons que l'on ait :

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x)$$

Alors, si

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = l$$

Par conséquent :

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = l$$

Très simple, mais souvent **redoutablement efficace**<sup>2</sup> ! Il est très utilisé en particulier pour le calcul de limite de *suite*, notion que nous verrons plus tard. Au bac, il apparaît souvent dans les dernières questions, pour conclure sur la limite que l'on cherchait dans l'exercice.

### 1.6.3 Exemple typique du théorème des gendarmes

C'est pas un exemple impressionnant, certes, mais cela permet d'illustrer une manière d'utiliser le théorème des gendarmes très connues. En effet, souvent le terme de gauche est simplement nul, et le terme de droite tend vers 0, ce qui force la fonction ainsi encadrée de tendre vers 0. Démonstration.

Pour  $x > 1$ , on a (à voir sur un graphique)

$$0 \leq \frac{1}{x^2} \leq \frac{1}{x}$$

---

1. plus classe, mais moins fun..

2. ça veut dire qu'il faut le garder en tête, mais avec un nom pareil, je ne doute pas que vous allez vous en rappeler !

Donc, puisque l'on sait que  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$ , on en déduit par le théorème des gendarmes :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} = 0$$

## 2 La continuité

### 2.1 Définition

On dit qu'une fonction  $f$  est continue au point  $a$  lorsque :

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a) \in \mathbb{R}$$

On dit encore qu'une fonction est *continue sur un intervalle* si elle est continue en tout point de cet intervalle. Dans la *définition même de la continuité* il **faut** préciser où la fonction est continue. Car cette propriété **dépend** de la fonction bien sûr, mais aussi de l'intervalle considéré (par exemple, prenez la fonction inverse).

### 2.2 Graphiquement parlant

C'est très facile de repérer une fonction continue à l'aide de sa courbe représentative : il suffit qu'elle n'est pas de «coupure» dans son graphe.

### 2.3 Exemples

Toutes les fonctions de bases présentées plus haut (fonctions puissances, polynôme, inverse, affine et linéaire) sont continues sur leur intervalle de définition (mais il faut préciser pour la fonction inverse, comment ?).

### 2.4 Comment justifier (au bac) qu'en fonction est continue ?

Au bac, lorsqu'il faut justifier qu'une fonction est continue, souvent il suffit de dire :

- qu'elle est somme / produit de fonctions continues
- (ou) que c'est un polynôme,
- (ou) que c'est une composition de fonctions continues

Et normalement vous avez tous les cas possibles.

## 2.5 Théorème des valeurs intermédiaires

Le théorème des valeurs intermédiaires fait partie des théorèmes sur lesquels vous êtes sûr de tomber le jour du bac. Il est heureusement pour nous assez simple et plutôt intuitif là encore.

Supposons  $f$  une fonction *continue* sur un intervalle  $[a, b]$ . Supposons par ailleurs que  $f(a) > 0$  et  $f(b) < 0$ . Alors le théorème des valeurs intermédiaires affirme qu'il existe un nombre  $c$  compris entre  $a$  et  $b$  tel que :

$$f(c) = 0$$

### Commentaires :

- Bien sûr, le théorème marche si  $f(a) < 0$  et  $f(b) > 0$ . En somme, il suffit que  $f(a)f(b) < 0$  (c'est à dire que les deux nombres  $f(a)$  et  $f(b)$  sont de signes différents).
- De même, vous pouvez remplacer les 0 dans le théorème par n'importe quel valeur. Mais c'est souvent en 0 que l'on énonce le théorème.
- L'hypothèse de la continuité de la fonction est évidemment totalement nécessaire. Une fonction discontinue peut totalement être positive, puis négative sans passer par 0.
- Attention, le théorème nous dit qu'il existe un tel nombre  $c$ , mais ne nous dit pas s'il est unique (il peut très bien en avoir plusieurs, par exemple la fonction sinus ou cosinus croise plusieurs fois l'axe des abscisses). Néanmoins si vous avez *besoin* de prouver l'unicité d'un nombre  $c$ , vous le pouvez ! Il suffit de prouver que la fonction est strictement croissante (vous verrez un exemple dans la section suivante).
- Le théorème ne nous dit pas non plus où où il se trouve ! Le prochain paragraphe sera justement consacré à la recherche de ce fameux  $c$ .

## 2.6 Algorithme

Et hop ! Un petit détour par l'algorithme !! On peut difficilement passer à côté, vu que il y a de très forte chance que vous tombiez sur un exercice du style au bac.

Dans ce paragraphe, nous illustrerons un algorithme basé sur la méthode de la *dichotomie* (qui veut littéralement dire « couper en deux », vous comprendrez vite pourquoi ).

### 2.6.1 Le contexte

Le théorème



## 3 La dérivée

### 3.1 Définition

### 3.2 Propriété

#### 3.2.1 Sur les fonctions, trouver l'extremum

#### 3.2.2 Implique la continuité

#### 3.2.3 Toutes fonctions n'est pas forcément dérivables

### 3.3 Règles de calculs

#### 3.3.1 Linéarité

#### 3.3.2 La formule de la triche

#### 3.3.3 Autres règles

### 3.4 Exemples