Exercices sur les dérivées

Delhomme Fabien

4 septembre 2018

1 Limites de fonctions usuelles

1.1 Limite de polynômes

Déterminez la limite en $+\infty$ de la fonction f définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$f(x) = 5x^2 + 2.$$

Déterminez la limite en $-\infty$ de la fonction f définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$f(x) = -6x^5 + 8x^4 + 8x^3 - 7x^2 + 2x + 3.$$

Déterminez la limite en $+\infty$ de la fonction f définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$f(x) = -8x^2 - 4x - 9.$$

Déterminez la limite en $-\infty$ de la fonction f définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$f(x) = 9x^5 + 3x^4 + 7x^3 - 2x^2 - x.$$

Déterminez la limite en $-\infty$ de la fonction f définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$f(x) = -6x^5 + 8x^4 - 2x^3 + 6x^2 + 9x.$$

1.2 Limite de fonctions rationnelles

Pour toutes les fonctions suivantes, déterminez la limite au point indiqué, et prenez soin de déterminer l'intervalle de définition de chaque fonction.

$$f(x) = \frac{4x + 5}{3(x - 3)^2}.$$

Déterminez la limite de f en $+\infty$.

$$f(x) = \frac{2x^4 + 3x^3 + x^2 + 2x + 4}{4x - 3}.$$

Déterminez la limite de f en $+\infty$.

$$f(x) = \frac{2-5x}{3x^2}.$$

Déterminez la limite de f en $-\infty$.

$$f(x) = \frac{-2x^4+3x^3+x^2+4x-1}{2\left(x^2+10x+27\right)}.$$

Déterminez la limite de f en $-\infty$.

$$f(x) = \frac{-5x^3-2x^2-5x-2}{2x-3}.$$

Déterminez la limite de f en $+\infty$.

2 Le point sur la composée, et les fonctions puissances

2.1 Échauffements sur la composée

Décomposez les fonctions suivantes en la composée de deux fonctions (il existe plusieurs solutions correctes !)

Exemple : Soit la fonction :

$$f : x \to \frac{1}{x^2+1}$$

On peut décomposer f, en disant que

$$f : x \xrightarrow{g} x^2+1 \xrightarrow{h} \frac{1}{x^2+1}$$

Où la fonction g envoie x sur x^2+1, la fonction h (attention, piège !) envoie x sur $\frac{1}{x}$

On a bien ainsi (attention à l'ordre !) :

$$h(g(x)) = h(x^2+1) = \frac{1}{x^2+1} = f(x)$$

Donc on peut écrire $f = h \circ g$

À vous de jouer !

- $x \to \frac{1}{x^3+2}$
- $x \to \sqrt{x^2+1}$
- $x \to \frac{1}{\sqrt{x+1}}$
- $x \to \sqrt{\frac{x}{x+1}}$

Plusieurs solutions sont possibles !

2.2 Échauffements sur les puissances

Pour utiliser la dérivée des fonctions puissances, il y a quelques formules qu'il faut connaître. Vous travaillerez dans un même temps les propriétés de l'exponentielle !

Attention, les paragraphes qui suivent sont à prendre au sens formel, c'est-à-dire que les formules ne marchent pas pour tout $x \in \mathbb{R}$. Je détaille pas, mais par exemple il faudrait faire attention au domaine de définition des fonctions ci-dessous. Ici, on se concentre juste sur la forme du calcul (qui seront justes dans tous les cas au bac), mais il faudrait préciser les conditions de validité de telles formules.

2.2.1 Puissances entières

Premierèment, simplifier les exepressions suivantes :

— $\frac{x^2}{x^3}$
— $x^2 * x^9$
— $(x^3)^4$

Ces deux exemple faciles montrent que les formules sont du types :

$$\begin{aligned} \frac{x^p}{x^q} &= x^{p-q} && \text{Quotient} \\ x^p * x^q &= x^{p+q} && \text{Produit} \\ (x^p)^q &= x^{p*q} && \text{Composée de puissances} \end{aligned}$$

Les même formules vont s'appliquer pour les puissances qui ne sont pas entières ! Notons la formule qui ressemble presque plus à une convention qu'autre chose :

$$x^0 = 1$$

2.2.2 Puissances non entières

Elles doivent être connues comme le loup blanc ! Nous avons déjà rencontrée $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$. En effet, en appliquant la formule de composée de puissances, on obtient, $\$(\mathrm{x}^{\{\mathrm{frac}\{1\}\{2\}\})}2 = \mathrm{x}\ \$$, ce qui permet de conclure (Même si ceci n'est pas vraiment une preuve, c'est plus pour vous convaincre).

De même, si on regarde $\frac{1}{x}$, on peut la réécrire comme $\frac{x^0}{x^1} = x^{0-1} = x^{-1}$

On peut maintenant, par exemple, calculer :

$$\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{x^0}{x^{\frac{1}{2}}} = x^{-\frac{1}{2}}$$

Vous devez savoir passer de l'une à l'autre de ce types d'égalités.

2.3 Exercices

Simplifiez :

$$\begin{array}{ccc} \dfrac{x}{x^2} & , & \dfrac{\sqrt{x}}{x^2} \\ x\sqrt{x} & , & \sqrt[3]{x} \\ \dfrac{x}{\sqrt{x}} & & \end{array}$$

Où $\sqrt[3]{x}$ désigne la racine cubique de x, c'est à dire le nombre y tel que $y^3 = x$.

3 Dérivée

3.1 Dérivée de fonctions usuelles.

Avec les formules du cours (en particulier pour les deux premières la formule sur les fonctions puissances) , dérivez les fonctions suivantes :

— $f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$
— $f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$
— $f(x) = 3x + 7$

3.2 Dérivée de polynôme de second degré

Dérivez les fonctions suivantes :

— $f : x \longmapsto -10x^2 - 8x - 10.$
— $f : x \longmapsto -4x^2 - 5x + 1.$
— $f : x \longmapsto 10x^2 - 3x + 10.$
— $f : x \longmapsto 8x^2 - 6.$

3.3 Dérivée de fonctions

En utilisant les formules du cours (formule du produit, du quotient, de la somme), dérivez les fonctions suivantes :

$$
\begin{aligned}
f(x) &= x^3 - 2x^2 - 4 \\
f(x) &= \frac{x}{4} - 2 * \sqrt{2} \\
f(x) &= (5x^2+1)(4x-x^2) \\
f(x) &= \frac{4}{2x-1} - \frac{1}{x} \\
f(x) &= \frac{2x-3}{3x+4} \\
f(x) &= \frac{-x^2+3x-2}{4x}
\end{aligned}
$$

On ne se préoccupera pas de l'ensemble de définition et de dérivabilité des fonctions.

3.4 Dérivée de fractions rationnelles

Dérivez les fonctions suivantes :

- $f(x) = \frac{8x+5}{7x+1}$.
- $f(x) = \frac{-2x-7}{2x-1}$.
- $f(x) = \frac{5-7x}{8x-2}$.
- $f(x) = \frac{3x-1}{x-4}$.
- $f(x) = \frac{9x+3}{10x-8}$.

Plus difficile :)

- $f(x) = \frac{-8x^2-144x-136}{x-9}$.
- $f(x) = \frac{-9x^2-162x-648}{x+4}$.
- $f(x) = \frac{2x^2-28x+130}{x-1}$.
- $f(x) = \frac{-7x^2+140x-252}{4x-7}$.
- $f(x) = \frac{5x^2+10x-15}{x+10}$.

Quel est l'ensemble de définition de chacune de ces fonctions ?

3.5 Dérivée avec des racines

Pour chacune de ces fonctions, donner l'ensemble de définition, justifier pourquoi elles sont dérivables, et calculer leur dérivée

- $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{4x^2-8x+104}$.
- $f(x) = \frac{4x-4}{\sqrt{x}}$.
- $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{-8x^2+80x-200}$.
- $f(x) = \frac{-5x-3}{\sqrt{x}}$.
- $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{-8x^2+80x+312}$.

3.6 Dérivée de composée de fonctions

Calculez le domaine de définition, puis dériver les fonctions suivantes :

- $f : x \longmapsto -(15x-25)^4$
- $f : x \longmapsto -5(16x-12)^3$
- $f : x \longmapsto 2\left(\frac{4x^2}{5}-8x+20\right)^4$
- $f : x \longmapsto 4\sqrt{2-x}$
- $f : x \longmapsto 5\sqrt{-8x-4}$
- $f : x \longmapsto 5\sqrt{5x^2+3}$
- $f : x \longmapsto -4\sqrt{12-3x}$
- $f : x \longmapsto \sqrt{3}\sqrt{x^2+10x+24}$

3.7 Problèmes

3.7.1 Exercice qui mêle tout

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[\frac{1}{2};+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x^3+x^2+4}{x^2}$$

Et soit $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère.

Trouver trois réels a,b et c tels que $f(x) = ax+b+\frac{c}{x^2}$

Montrer que $f'(x) = \frac{x^3-8}{x^3}$, puis étudier le signe de l'expression x^3-8. En déduire le signe de $f'(x)$ selon les valeurs de x. Puis donner le tableau de variation de la fonction f.

Montrer que la fonction f admet un minimum.

- Déterminer l'équation de la tangente au point A d'abscisse 2 de la courbe $\mathcal{C}_f$
- Déterminer l'équation réduite de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point B d'abscisse 1

On se donne la courbe $\mathcal{C}_f$ dans un repère (1cm pour une unité pour les deux axes).

- Tracer les deux tangentes obtenues à la question précédente.
- Tracer dans le même repère la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = x+1$.

Étudier le signe de la différence $f(x)-(x+1)$, puis interpréter graphiquement le résultat. Peut-on dire que la droite $\mathcal{D}$ est une tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$?

3.7.2 Étude de la croissance d'une population

La population d'un village est donnée par $f(t) = \frac{8t+12}{t^2+4}$ où t est le nombre d'années écoulée depuis 2018 et $f(t)$ le nombre d'habitants en milliers. On admet que le rythme de croissance de la population est donné par $f'(t)$, la dérivée de la fonction population. Il est exprimé en milliers d'habitants par an.

Calculer la population en $t = 4$ puis en $t = 5$. En déduire la variation absolue de la population entre ces deux années.

Calculer $f'(t)$, étudier son signe et en déduire le sens de variation de la population.

Dresser le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0, 20]$. En quelle année la population a-t-elle atteint son maximum depuis 2018 ?

Calculer $f'(4)$ et $f'(5)$, et donner une valeur approchée à 0.001 millier près. Comparer à la variation absolue calculée précédemment.

Résoudre par calcul l'inéquation $f(t) < 0.8$. En déduire en quelle année la population du village passera sous le seuil de 800 habitants. Préciser alors le rythme de croissance de la population.

3.8 Tangente à une courbe

3.8.1 Exercice 1

Déterminer une équation de la tangente à l'hyperbole d'équation :

$$y = \frac{4}{x - 1}$$

au point d'absicce 3.

3.8.2 Exercice 2, instant contemplatif

Regardez sur un logiciel (ou calculatrice) la courbe représentative de la fonction

$$f(x) = |x^2 - 1|$$

(La notation $||$ représente la valeur absolue. Afficher la fonction $x \to |x|$ pour bien comprendre à quoi elle correspond).

Cette fonction est-elle dérivable en 1 ? Donner une justification *graphique* (pas de calculs !).

3.8.3 Exercice 3, ou quand le développement, c'est une mauvaise idée

Calculez la dérivée de la fonction $f(x) = (7x - 3)^{2018}$. Calculer l'équation de la tangente à cette courbe en 3.

4 Algorithmie

4.1 Échauffement

Écrire un algorithme, sous AlgoBox, ou sur papier, qui :

- Pour a, et b entrés par l'utilisateur, l'algorithme renvoie la moyenne de a et de b.
- Pour n un entier entré par l'utilisateur, l'algorithme affiche

  ```
  Je sais faire une boucle avec un Pour, ligne 1
  Je sais faire une boucle avec un Pour, ligne 2
  ...
  Je sais faire une boucle, ligne n.
  ```

  Par exemple, pour $n = 3$, l'algorithme affichera :

  ```
  Je sais faire une boucle avec un Pour, ligne 1
  Je sais faire une boucle avec un Pour, ligne 2
  Je sais faire une boucle avec un Pour, ligne 3
  ```

  Conseil : pour cet algorithme, vous pouvez utiliser l'instruction `TANT QUE`, mais je pense que l'instruction `POUR ... ALLANT DE ... À ...` est plus adaptée (pourquoi ?) !

4.2 Entrainement

Écrire un algorithme, sous AlgoBox, ou sur papier, qui :

- Calcule k tel que la somme $1^2+2^2+3^2+...+k^2$ dépasse 5000 mais $1^1+2^2+...+(k-1)^2$ soit en dessous de 5000. Donc l'algorithme ne demande aucune variable, mais déclare la variable k, qui va être la sortie de l'algorithme, et la variable s qui va contenir la somme dans la boucle. Dans cet exercice, vous **devrez** utiliser l'instruction `WHILE` (ou `TANT QUE` en bon français).