Point méthode : le raisonnement par récurrence

Delhomme Fabien

Table des matières

1 Comment reconnaitre ?

On a besoin d'un raisonnement par récurrence dès que l'on a une propriété que l'on doit prouver pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par exemple, ce genre de raisonnement ne marche pas du tout pour une propriété portant sur $x \in \mathbb{R}$.

2 Comment le rédiger ?

Il faut bien proprement montrer la propriété que l'on veut démontrer. Imaginons que l'on veuille montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$
$\{0\}$, on a l'égalité suivante :

$$\sum_{1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Alors, on identifie la propriété *au premier rang* qu'il faut démontrer. Ici la propriété porte sur n, donc le premier rang, et le rang $n = 1$ (puisque pour $n = 0$, la somme n'est pas définie). Donc, pour le rang $n = 1$, il faut montrer que

$$\sum 1^n k = \frac{1 * 2}{2}$$

. Ce qui est bien le cas !

Donc on écrit

Montrons par récurrence sur n, un entier naturel non nul la propriété

$$P(n) = \text{´} \sum_{1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \text{ˇ}$$

Initialisation :

La propriété est vraie au rang $n = 1$. Donc l'initialisation est vérifiée.

Ensuite, il faut vérifier que $P(n) \implies P(n+1)$ pour tout n non nul ici. C'est la propriété d'hérédité. Attention, la rédaction est très importante et délicate pour ce point particulier ! Toute la magie de la récurrence a lieu ici !

Le **plus souvent**, il faut partir de la propriété au rang $n+1$, puis développer, et tomber sur la propriété $P(n)$ qui est donc vraie, et conclure !

Hérédité :

Soit n un entier naturel non nul. Supposons alors que $P(n)$ est vérifiée, et montrons alors que $P(n+1)$ est vraie.

On calcule :

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \sum_{k=1}^{n} k + (n+1)$$

Or, puisque $P(n)$ est vérifiée :

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Donc

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k &= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \\ &= (n+1)\left(\frac{n}{2} + 1\right) \\ \sum_{k=1}^{n+1} k &= \frac{(n+1)(n+2)}{2}\end{aligned}$$

Donc, $P(n+1)$ est vraie.

On peut maintenant conclure :

Conclusion :

La propriété $P(n)$ est donc démontrée, pour tout entier naturel n non nul

Et pouf, plein de points au bac !