

Les nombres complexes

Delhomme Fabien

Table des matières

1	Introduction	1
1.1	Motivation	1
1.2	Portes d'entrées	2
2	Les nombres complexes : définition	2
2.1	Soit i un nombre tel que...	2
2.2	Opérations dans les complexes	2
2.2.1	Multiplier i par un réel	2
2.2.2	Additionner avec i	3
2.2.3	Multiplions sans complexes !	3
2.2.4	Trouver les racines de n'importe quel polynôme de second degré.	4
2.3	Définition du plan complexe	4
2.3.1	Le plan complexe, et premières notions	4
2.3.2	Deux moyens de représenter les nombres complexes.	6
2.3.3	La forme trigonométrique	6
3	L'exponentielle complexe	8
3.1	Définition formelle de l'exponentielle pour les complexes (hors programme)	8
3.2	Définition au programme	8
3.3	Conséquence de la formule d'Euler	8
3.3.1	La multiplication entre deux complexes	8

1 Introduction

1.1 Motivation

Les complexes, un des chapitres les plus compliqués à introduire peut-être. Pour commencer, sachez que les complexes ont été d'abord appelés les *imaginaires*, car on pensait qu'ils n'étaient pas *réels*.

Or, rien de plus faux (on n'avait pas assez de recul à l'époque). Les complexes sont présents, et incontournables dans de nombreux domaines :

- Physique (électronique, mécanique)
- Ingénierie (conception de machine, étude de vibrations d'un véhicule etc)
- Mathématique (évidemment) : les complexes jouent un rôle plus que centrale !
- Informatique : nous verrons que les complexes servent à encoder les rotations, et donc par exemple de faire des rotations d'images
- Et tellement d'autres !!

Le grand paradoxe, c'est que pour découvrir les complexes, on passe nécessairement par une incompréhension totale, devant des « nombres » qui sortent de nulle part, etc. Mais nous verrons tranquillement pourquoi les complexes sont presque naturels (même s'il a fallu du temps avant de les découvrir).

1.2 Portes d'entrées

Comme souvent en mathématiques, il existe plusieurs portes d'entrée pour comprendre les complexes :

- Les polynômes
- La géométrie
- Les matrices

Nous verrons dans ce cours les deux premiers, peut-être que je parlerai en deux mots de la troisième porte d'entrée lors des cours de mathématique spécialisée.

Je vous propose donc d'entrer dans le monde des complexes par la grande porte : les polynômes !

2 Les nombres complexes : définition

2.1 Soit i un nombre tel que...

Nous avons vu dans le chapitre sur les polynômes, que certain polynôme n'admettait pas de racine réelle. C'est-à-dire qu'il existe aucun nombre réel qui annule ce polynôme. Prenons un exemple et c'est un des exemples le plus simple que l'on peut imaginer :

$$P(x) = x^2 + 1$$

Et effectivement ce polynôme n'a pas de racine réelle puisque $x^2 \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, et ainsi $x^2 + 1 > 0$.

Mais imaginez un peu, (et vous comprenez peut-être pourquoi historiquement, les premiers mathématiciens qui ont osé, étaient un peu fébrile à ce moment là), que l'on *rajoute* une racine à ce polynôme. C'est-à-dire que, puisque P n'a pas de racine, on va lui en *ajouter* une !!

C'est-à-dire que l'on va *définir* i comme étant un nombre, tel que $i^2 = -1$ (et donc $P(i) = 0$). Attention, i n'est pas un nombre réel, vous l'aurez bien compris !

Nous avons donc défini, ou plutôt imaginé, un nombre i tel que :

$$\boxed{i^2 = -1}$$

Remarquons alors dès à présent que notre polynôme de départ $P(x) = x^2 + 1$, admet à présent deux racines (complexes donc). En effet, on a créé la première avec $x = i$ mais on remarque, par analogie avec la multiplication que l'on connaît depuis la tendre enfance que :

$$(-i)^2 = (-1 * i)^2 = (-1)^2 * i^2 = 1 * (-1) = -1$$

On a donc une autre racine de P avec $x = -i$.

2.2 Opérations dans les complexes

2.2.1 Multiplier i par un réel

Nous allons maintenant présenter les opérations possibles que l'on peut faire avec ce nouveau nombre i .

Dans les calculs que l'on vient de faire, implicitement on a envie de considérer que i admet les mêmes calculs qu'un nombre normal. C'est-à-dire (et on vient de le faire) qu'on a envie de définir la multiplication de i par un réel quelconque $a \in \mathbb{R}$ par le nombre (complexe) $a * i$ noté souvent ai . Noter alors que $ai = ia$, comme d'habitude.

Par exemple, si on veut multiplier 3 par i , alors on écrit tout simplement $3i$. Maintenant une petite question :

Question 1 Donner les racines complexes du polynôme $x^2 + 3$ (Essayer de calculer $(3 * i)^2$, et donner l'autre racine par la même remarque que celle décrite au paragraphe ci-dessus).

2.2.2 Additionner avec i

On peut aussi définir une opération « plus » avec i et un réel. Par exemple, si on veut ajouter 4 à i , alors on écrira $4 + i$.

Allons un peu plus loin, que vaut :

$$z = 4 + i + 3 - 2i$$

Déjà, on peut commencer par voir que notre 4 et notre 3 sont des nombres réels, donc on sait les additionner :

$$z = 7 + i - 2i$$

Maintenant, si on veut être cohérent, on devrait pouvoir s'autoriser à factoriser par i :

$$z = 7 + (1 - 2)i$$

Ou, cela revient au même, on doit s'autoriser à compter le nombre de i et à faire l'addition. Ici on obtient finalement

$$z = 7 - i$$

Remarquez encore que l'on peut additionner un réel avec i et multiplier le tout par un nombre réel. Considérez l'expression complexe suivante :

$$z = (2 + 4i) * 7$$

On distribue comme dans les réels :

$$z = 14 + 28i$$

Et on obtient le résultat !

Question 2 Que vaut $(2 + 4i - 2 - 2i) * 4$?

2.2.3 Multiplions sans complexes !

Nous avons vu comment on pouvait multiplier un nombre i par un nombre réel. Maintenant, imaginons que nous ayons deux nombres $z_1 = 3 + 7i$ et $z_2 = -1 + 3i$. Est-ce qu'on peut définir $z_1 * z_2$? Essayons, et commençons par distribuer le produit, comme on sait le faire depuis le collège, puis utilisons les règles vues plus haut pour simplifier l'expression. On obtient alors successivement :

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (3 + 7i)(-1 + 3i) \\ &= -3 + 9i - 7i + (7i) * (3i) \\ &= -3 + 2i + (7 * 3) * (i * i) \\ &= -3 + 2i + 21 * (-1) \\ z_1 z_2 &= -24 + 2i \end{aligned}$$

Vous avez vu ce qui s'est passé ? Le produit des deux nombres (complexes) $7i$ et $3i$ a redonné un nombre réel, qui s'est additionné normalement avec le nombre -3 !

Essayez par vous même maintenant :

Question 3 Que vaut $(1 - 2i)(3 - 5i)$. Que vaut $(5 - 4i)(5 + 4i)$. Des remarques concernant ce dernier ?

Question 4 Est-ce que les identités remarquables vues (et connues ?) depuis le collège fonctionnent avec des complexes ?

2.2.4 Trouver les racines de n'importe quel polynôme de second degré.

Allons un peu plus loin, et tâchons de comprendre ce qui se passe pour les autres polynômes de second degré. Par exemple, si on prend un autre polynôme qui n'a pas de racine réelle, est-ce que je peux, avec mon nouveau nombre i lui trouver des racines complexes ? La réponse est **OUI** (et c'est même une des propriétés les plus importantes des complexes).

Donnons un exemple. Si je prends le polynôme $Q(x) = x^2 + x + 1$, vérifions que ce polynôme n'admet pas de racines réelles.

$$\Delta = 1^2 - 4 * 1 * 1 = -3$$

Δ est strictement négatif, ainsi les formules que l'on connaît ne marche plus, à cause du $\sqrt{\Delta}$ qui ne serait pas du tout défini, puisque $\Delta < 0$. Il faudrait donc, pour trouver les racines de mon polynôme, pouvoir définir un nombre tel que son carré vaille Δ . Hum, essayons $\sqrt{-\Delta} * i = \sqrt{3} * i$ (forcément, ce nombre ne peut pas être réel, car aucun nombre réel ne peut, une fois élevé au carré, être négatif !).

Qu'est-ce que cela nous donne ?

$$(\sqrt{3} * i)^2 = \sqrt{3}^2 * i^2 = 3 * (-1) = -3$$

Trouvé ! Donc je peux continuer les formules que nous avons vues en cours, pour obtenir deux nouvelles racines, complexes, de mon polynôme Q :

$$x_1 = \frac{1 + i * \sqrt{3}}{2}$$
$$x_2 = \frac{1 - i * \sqrt{3}}{2}$$

On peut même vérifier que $Q(x_1) = Q(x_2) = 0$! Nous avons donc¹ rajouté des racines à tous les polynômes !!!

Question 5 Pour un polynôme $az^2 + bz + c$ à discriminant strictement négatif, quelles sont les formules qui nous donne les racines de ce polynôme, en vous aidant de la discussion ci-dessus ?

2.3 Définition du plan complexe

2.3.1 Le plan complexe, et premières notions

D'après ce que l'on vient de voir, l'addition et la multiplication de deux nombres complexes nous redonne toujours un nombre de la forme $a + ib$ avec a et b des nombres réels. D'après les calculs effectués plus haut, on voit que les réels et les nombres ib avec $b \in \mathbb{R}$ ne se «mélagent» jamais. On pourra interpréter cela géographiquement comme une sorte d'indépendance, si bien que l'on a envie d'associer un complexe $z = a + ib$ avec un **point du plan** (a, b) . On peut donc définir les complexes par :

$$\mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

Pour un nombre complexe $z = a + ib$ avec a, b qui sont des nombres réels, on appelle :

- a la *partie réelle* de z , on la note $\text{Re}(z)$
- b la *partie imaginaire* de z , on la note $\text{Im}(z)$

Nous avons ainsi deux notions qui se dégagent :

- Un nombre est réel si et seulement si sa partie imaginaire est nulle
- Un nombre est dit *imaginaire pur* si et seulement si sa partie réelle est nulle.

1. noter que nous l'avons réellement fait que pour un seul polynôme. Ceci ne constitue donc pas vraiment une « preuve ».



FIGURE 1 – Le plan complexe, avec quelques points tracés dessus

Remarque Les parties imaginaires et réelles sont *toujours* des nombres réels.

Une notion très importante est la notion de conjugué d'un complexe. Soit un complexe z de partie réelle a et de partie imaginaire b . On définit alors le *conjugué* de z , qui est noté \bar{z} par :

$$\bar{z} = a + \bar{i}b = a - ib$$

Question 6 Dans le plan complexe, que dire d'un point z et de son conjugué \bar{z} (on attend une interprétation géométrique).

Question 7 Quelle est la partie imaginaire du nombre $z\bar{z}$?

Question 8 Quelles sont les parties réelle et imaginaire de $(2+i)(\sqrt{2}-5i)$?

Question 9 Si je me donne un nombre complexe z de partie réelle a et de partie imaginaire b . Essayez d'exprimer a en fonction de z et \bar{z} (Indication, que donne la somme $z + \bar{z}$?). Essayez d'exprimer b en fonction de z et \bar{z} (Indication, que donne la différence $z - \bar{z}$?)

2.3.2 Deux moyens de représenter les nombres complexes.

Au paragraphe précédent, nous avons montré pourquoi les complexes sont représentés par un plan. Mais comme tous points dans un plan munit d'un repère, on peut les représenter par deux moyens :

- Soit on lit les coordonnées par rapport au repère du point, et on sait ainsi où se trouve le point. Exemple : Dans mon plan complexe, mon repère est formé par les points $(0, 1, i)$, ainsi le nombre $3 + 2i$ admet 3 «pour abscisse» et 2 «pour ordonné» dans le plan.
- Soit on donne la distance du point au centre du repère, et l'angle formé entre la droite qui passe par le point et le centre, avec l'abscisse. Exemple : Pour le point $3 + 2i$, d'après le théorème de pythagore, la distance entre $3 + 2i$ et 0 est $\sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$. Et on peut ensuite soit trouver graphiquement l'angle entre $3 + 2i$ et l'axe des abscisses, soit s'aider des fonctions trigonométriques pour trouver l'angle. Nous verrons comment faire en détail dans le chapitre qui suit (vous pouvez d'ore et déjà regarder la figure 2).

La deuxième manière de représenter un nombre complexe s'appelle la *forme trigonométrique* (puisque cette forme est définie à partir d'angle).

Le chapitre suivant nous introduira donc la notion d'exponentielle complexe, qui montre la puissance de la représentation trigonométrique d'un complexe.

Question 10 Placer dans le plan complexe $\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}$ et $5 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)$, $6 \left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} \right)$.
Calculer la distance de chacun de ces nombres avec le centre.

2.3.3 La forme trigonométrique

Vous comprendrez dans le chapitre 3 suivant pourquoi on donne le nom de « forme trigonométrique » (même si vous vous en doutez déjà un peu pourquoi).

Si je reprends les remarques du paragraphe suivante, on a en fait une définition de la distance d'un point à l'origine, et de l'angle que forme le point avec l'abscisse² :

- La distance entre le point complexe z et l'origine s'appelle la *norme* de z et se note $|z|$.
- L'angle formé avec l'axe des abscisses s'appelle *l'argument* du nombre complexe, et se note $\arg(z)$.

2. cette phrase est fautive écrite telle quelle, mais je ne voulais pas préciser pour éviter de l'alourdir.

2.3.3.1 Calculer la norme d'un complexe

Pour calculer la norme d'un nombre complexe $z = a + ib$, rien de plus simple, il suffit de calculer :

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Question 11 D'où vient cette formule ? Retrouver la à l'aide du théorème de Pythagore (et un dessin !)

Pour éviter de vous parachuter un résultat venu de nulle part, essayer réellement de répondre à la question suivante :

Question 12 Calculer $z * \bar{z}$, avec $z = a + ib$. (Je rappelle que \bar{z} correspond au conjugué de z)

Donc, cette question vous permet de calculer la norme d'un nombre complexe d'une autre manière (qui est en fait très utile !) :

$$|z|^2 = z\bar{z}$$

2.3.3.2 Calculer l'argument d'un nombre complexe

Cette partie est plus délicate. Pour calculer l'angle formé par le point z et l'axe des abscisses, nous devons *d'abord* calculer la norme de ce complexe.

En effet, si je prend un point complexe $z = a + ib$ que je suppose non nul (cela revient à dire que $\bar{z} \neq 0$), alors je peux faire cette manipulation :

$$\begin{aligned} z &= (a + ib) \\ z &= |z| \left(\frac{a}{|z|} + i \frac{b}{|z|} \right) \end{aligned}$$

Question 13 Montrer alors que $\left(\frac{a}{|z|} + i \frac{b}{|z|} \right)$ est de norme 1.

Or, dans ce cas, puisque $\left(\frac{a}{|z|} \right)^2 + \left(\frac{b}{|z|} \right)^2 = 1$, il existe un nombre θ (qui sera l'argument de z), tel que :

$$\begin{cases} \frac{a}{|z|} = \cos(\theta) \\ \frac{b}{|z|} = \sin(\theta) \end{cases}$$

Et ce nombre est unique si on demande $\theta \in [0, 2\pi[$, et cela donne l'argument de notre nombre complexe.

Question 14 Ce paragraphe est difficile, essayer de le comprendre avec un dessin. En pratique, le jour du bac, il reste très simple de calculer l'argument d'un nombre complexe.

2.3.3.3 Calculer la forme trigonométrique

Une fois que vous avez calculer la norme et l'argument d'un nombre complexe z , vous pouvez alors donner sa ³ forme trigonométrique :

$$z = |z| (\cos(\theta) + i \sin(\theta))$$

3. On dit donc « la » forme trigonométrique, puisqu'elle est unique. Nous l'avons en fait prouvé, mais sans mettre le doigt sur les passages qui mettent en évidence que si deux complexes ont la même forme trigonométrique, avec leur argument qui est un nombre de l'intervalle $[0, 2\pi[$, alors ces deux complexes sont en fait égaux.

3 L'exponentielle complexe

Certaines fonctions définies sur les réels (donc pas toutes, loin de là) gardent un sens (voire même en admettent un plus fort !) lorsqu'on les définit sur les complexes. C'est le cas de l'exponentielle.

3.1 Définition formelle de l'exponentielle pour les complexes (hors programme)

Pour définir l'exponentielle sur les nombres complexes, nous avons vu la formule suivante dans le cours de l'exponentielle (qui est hors programme) :

$$\exp(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!}$$

En effet, nous savons comment multiplier et additionner les complexes, donc si cette formule a bien un sens (ce que nous admettrons) alors cette formule fonctionne aussi avec les complexes.

Question 15 (difficile) Pourquoi la définition à l'aide de l'équation différentielle de l'exponentielle est-elle plus délicate pour définir cette fonction dans les complexes ? (Disons que ce n'est pas impossible, mais j'aimerais porter votre attention sur ce qui a changé implicitement).

3.2 Définition au programme

En fait l'exponentielle d'un nombre complexe $z = a + ib \in \mathbb{C}$, où $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ est définie comme il suit :

$$\exp(z) = \exp(a + ib) = \exp(a) * \exp(ib)$$

On essaie effectivement de conserver l'équation fonctionnelle de l'exponentielle, pour l'étendre au complexe. Mais comment est donc définie l'exponentielle d'un nombre imaginaire pur (c'est-à-dire qui admet une partie réelle nulle, comme le nombre $ib \in \mathbb{C}$). Et bien comme il suit :

$$\exp(ib) = \cos(b) + i \sin(b)$$

Cette formule s'appelle la *formule d'Euler* !

Il faut voir cette formule comme une rotation d'angle b . En effet, si j'ai un vecteur dans le plan, et que je veux lui appliquer une rotation d'angle b , je vais multiplier sa première coordonnée par $\cos(b)$ et sa deuxième par $\sin(b)$ (ceci se comprend mieux avec un schéma).

3.3 Conséquence de la formule d'Euler


Nous pouvons ainsi réécrire la forme trigonométrique d'un nombre complexe z de module r et d'argument θ par :

$$z = r * e^{i\theta}$$

3.3.1 La multiplication entre deux complexes

Supposons que l'on veuille regarder la multiplication du complexe $a \in \mathbb{C}$ par le nombre $z \in \mathbb{C}$. On note alors θ_a l'argument de a , et r_a le module de a . De même pour z . Alors, on remarque que :

$$\begin{aligned} z * a &= r_z * e^{i\theta_z} * r_a * e^{i\theta_a} \\ &= r_z r_a e^{i(\theta_z + \theta_a)} \quad \text{Grâce à la formule d'Euler !} \end{aligned}$$



./tex2pdf.-f3db3c027a10cfa0/b1b84afdeb0628e8781108a420181e25a6e607ed.png

FIGURE 2 – Exemple de complexe avec d’autres coordonnées dans le plan

Donc, multiplier par a par z a eu pour effet vis à vis de a de :

- *multiplier* son module par celui de z
- *ajouter* à son argument celui de z

Question Comment faire maintenant pour faire effectuer à a une rotation d’angle 90 degrés ? (Autrement dit, en radian, $\frac{\pi}{2}$ radians).