Exercice sur les fonctions

Delhomme Fabien

3 septembre 2017

1 Fonctions linéaires et affines

1.1 Représentation de fonctions, échauffement

Représenter les fonctions suivante :

- $f(x) = 3x + 2$
- $g(x) = -4x + 5$
- $h(x) = -x - 3$

Quels sont les points d'intersections entre les droites de la fonction f, g, et h ?

Trouver deux fonctions affines qui ne se croisent pas. Que pouvez vous en conclure ? Prouver ce résultat

Soient deux points, $A = (x_a, y_a)$ et $B = (x_b, y_b)$. Quelle est l'unique (pourquoi unique ?) droite qui passe par ces deux points ? (On cherche la fonction dont la courbe représentative est une droite qui passe par ces deux points.)

Dans quels cas dans la question précédente, la droite en question n'est pas une fonction ?

1.2 Entrainement

On donne $A = -(-4\,x + 7)\,(-6\,x - 2) - 56\,x + 49 + 16\,x^2$

- Développer et réduire A
- Factoriser A
- Calculer A pour $x = -10$
- Résoudre l'équation $A = 0$

On donne $A = (8\,x + 3)\,(x - 1) - (8\,x + 3)\,(5\,x - 3)$

- Développer et réduire A
- Factoriser A
- Calculer A pour $x = -2$
- Résoudre l'équation $A = 0$

On donne $A = -(6\,x - 2)\,(-6\,x - 6) + (6\,x - 2)$

— Développer et réduire A
— Factoriser A
— Calculer A pour $x = -1$
— Résoudre l'équation $A = 0$

Résoudre l'équation :

$$\frac{-2\,x-5}{6} - \frac{7\,x+3}{3} = \frac{6\,x+9}{8}$$

Résoudre l'équation :

$$\frac{x+5}{3} + \frac{x-8}{2} = \frac{-10\,x-4}{4}$$

Résoudre l'équation :

$$\frac{8\,x-1}{6} - \frac{x-7}{3} = \frac{-4\,x+7}{8}$$

Résoudre le système d'équations suivant : $\left\{\begin{array}{rcrcr} 4\,x & - & 6\,y & = & 22 \\ 7\,x & + & 7\,y & = & 21 \end{array}\right.$

Résoudre le système d'équations suivant : $\left\{\begin{array}{rcrcr} -10\,x & + & 6\,y & = & -130 \\ -6\,x & + & 2\,y & = & -62 \end{array}\right.$

Résoudre le système d'équations suivant : $\left\{\begin{array}{rcrcr} -9\,x & + & 2\,y & = & -85 \\ -5\,x & - & 8\,y & = & -29 \end{array}\right.$

2 Fonction carré

2.1 Factorisations/développements

2.1.1 Forme canonique

Soit f définie par $f(x) = -x^2 + 7x - 12$.

Vérifiez que la factorisation de cette fonction est $(x-4)(-x-3)$

Vérifier que la forme canonique de f est :

$$f(x) = -(x - \frac{7}{2})^2 + \frac{1}{4}$$

Utilisez la forme la plus adaptée pour :

— Calculer $f(0)$
— Calculer $f(\frac{7}{2})$
— Résoudre l'équation $f(x) = 0$
— Résoudre l'équation $f(x) = \frac{1}{4}$

2.1.2 Développements

Développer les expressions :

- $-3(x+1)^2+4$
- $-\frac{1}{2}(x-8)^2-2$
- $\sqrt(2)(x-\sqrt(6))^2+1$
- $(x-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}})^2$
- $(2+\frac{1}{x})(1+2x)$

2.1.3 Résoudre des équations simples

Résoudre les équations, et inéquations suivantes :

- $x^2-7=0$
- $x^2+7=0$
- $x^2+2x+1=0$
- $6x^2+4x+2=-3x^2\ -8x-2$
- $x^2-\frac{x}{2}+\frac{3}{2}=3*x^2\ +x-\frac{3}{4}$

Petit problème

Soit un train et une voiture qui roulent tous les deux à une vitesse constante de respectivement 300 k/m et 133 k/m en ligne droite, de direction opposée (il se rejoignent donc), sur deux routes qui sont parallèles (on va éviter la collision). Sachant que la distance qui les sépare est de 1000 km, au moment $t=0$ heure, calculer au bout de combien de temps les deux véhiculent se croisent.

3 Fonction classiques

Représenter, à l'aide d'un grapheur ou de votre stylo et papier, la fonction inverse, la fonction carrée, la fonction x^2-3x+1, la fonction racine carrée, et enfin la fonction $\frac{x}{\sqrt{x}}$

Pour toutes ces fonctions, quelles sont les domaines de définition ? Les intervalles de croissance ? De décroissance ?

Établir le sens de variation, et un tableau de variation pour chacune de ces fonctions.

4 Polynômes

4.1 Échauffements

Trouver les racines (réelles) des polynômes suivants, et déterminer leur tableau de variation, et de signe:

- $A(x) = x^2 - 2x + 3$
- $B(x) = x^2 + 2x - 3$
- $C(x) = 3x^2 - \sqrt{5}x + 2$
- $D(x) = 2x^2 - 4x + \sqrt{2}$ [1]
- $E(x) = -4x^2 + 3x^2 - x + 3$
- $F(x) = x^2 - x - 1$, pour une petite référence à Fibonacci (on y reviendra)

Tracer la courbe représentative des fonctions A et F.

4.2 Entrainement

4.2.1 Résolution d'équation du 2nd degré

Donner la forme canonique de chaque polynôme, ainsi que son tableau de variation, et ses racines (c'est à dire les nombres x tel que $P(x) = 0$)

- $P(x) = x^2 + 4x + 3 = 0$
- $P(x) = 12y^2 - 16y + 5 = 0$
- $P(x) = -x^2 + 8x - 1 = 0$

Même consigne : (juste pour vous y habituez, parfois on note la variable autrement que x, par exemple, t ou z. C'est juste un symbole différent, ça ne change rien au principe).

- $Q(t) = t^2 - 4t + 4$
- $S(y) = 12y^2 + 8y + 1$
- $R(x) = -x^2 + 3x - 4$
- $Q(t) = t^2 - 7t - 30$
- $Q(z) = 7z^2 + 9z + 2$
- $S(x) = x^2 + 6x - 8$
- $P(t) = -t^2 - 10t + 24$
- $Q(x) = 14x^2 + 5x - 24$
- $S(t) = -t^2 + 6t + 4$

Pour tous les polynômes qui s'appellent S, tracer sa représentation graphique sur Geogebra.

4.2.2 Factorisation 3eme degré

Soit $E = x^3 - 22x^2 + 161x - 392$, et soit $F = 6x^3 + 13x^2 + 9x + 2$

Vérifier que 7 est une racine de E. Factoriser E.

Vérifier si F possède une racine évidente. Factoriser F.

4.2.3 Signe de polynômes

Étudier les signes des polynômes :

1. Discriminant nul ? Et bien, on avait pas vu l'identité remarquable ?

- $P = x^2 - 10x + 9$ sur $I = [0\ ;\ 5]$.
- $P = x^2 - x - 6$ sur $I = [-5\ ;\ 5]$.
- $P = -x^2 + x + 1$ sur $I = \mathbb{R}$.
- $P = x^2 + 6x + 5$ sur $I = [0\ ;\ 5]$.
- $P = -6x^2 - 23x - 10$ sur $I = [-5\ ;\ 5]$.
- $P = x^2 + 4x + 9$ sur $I = \mathbb{R}$.

4.3 Petit problème

Une usine fabrique et vend des vélos à 87€ l'unité. Le coût de fabrication $C(x)$ d'un vélo est fonction de la quantité x de vélos fabriqués. Ce coût s'exprime en euros par :

$$C(x) = 0.1x^2 + 10x + 1500$$

Pour $x \in [10, 1000]$. Soit la fonction f définie par $f(x) = 87x - C(x)$

- Préciser ce que représente concrètement $f(x)$
- En quelles valeurs a-t-on : $f(x) = 0$? En donner une interprétation concrète.
- Résoudre $f(x) \geq 2100$. Interpréter le résultat.

4.4 Utiliser au mieux la forme canonique d'un polyôme de second degré

Soit f la fonction définie pour tout réel x par :

$$f(x) = -x^2 + 7x - 12$$

- Trouver la forme factorisée de $f(x)$
- Trouver la forme canonique de f

Puis, utiliser la forme la plus adaptée pour :

- calculer $f(0)$
- calculer $f(\frac{7}{2})$
- résoudre l'équation $f(x) = 0$
- résoudre l'équation $f(x) = \frac{1}{4}$

4.5 Inéquations

4.5.1 Échauffements

Résoudre les inéquations suivantes :

- $x^2 - 1.4x + 0.49 > 0$
- $-x^2 + 3x \leq 10$
- $3x(2 - 3x) \geq 1$

4.5.2 Entrainement

Résoudre les inéquations suivantes :

- $\left(2-6x^2\right)\left(2x^2+16x+22\right)<0$.
- $\left(-7x^2+98x-337\right)\left(-x^2-14x-41\right)>0$.
- $\left(-7x^2+112x-438\right)\left(-6x^2-48x-96\right)<0$.
- $\left(-7x^2+42x-59\right)\left(5x^2+5\right)\leq 0$.
- $\left(-2x^2-16x-39\right)\left(8x^2+6\right)\leq 0$.

4.6 Relations coefficients racines [2]

Imaginons que l'on ait trouver les racines x_1 et x_2 d'un polynôme ax^2+bx+c. On sait donc que :

$$a(x-x_1)(x-x_2)=ax^2+bx+c$$

- Retrouver les relations entre les coefficients et les racines, en développant le membre de droite.

5 Calcul de limites, domaine de définition.

5.1 Pour les polynômes ?

Quelles sont les limites possibles pour un polynôme de second degré [3] en plus et moins l'infini, en fonction du signe son coefficient dominant a.

5.2 Limite étrange

Tracer la fonction $\frac{\sin(x)}{x}$ sur un grapheur. À priori, quel est le domaine de définition de cette fonction ? Que remarque t on sur le graphique en 0 ?

2. c'est le vrai nom de ces formules, aussi appelés somme de Newton.
3. mais ça marche pour tous les degrés