

Fonctions, suite

Fabien Delhomme

3 septembre 2018

Table des matières

1	Limites d'une fonction	3
1.1	Motivations	3
1.1.1	En science	3
1.1.2	En mathématiques	3
1.1.3	Pour ce cours	3
1.2	Définitions	3
1.3	Définition propre aux fonctions	4
1.4	Pour quelques fonctions classiques	4
1.4.1	Les fonctions puissances	4
1.4.2	La fonction inverse	5
1.5	Règles de calcul	5
1.6	Théorèmes portant sur les limites	6
1.6.1	Théorème de comparaison	6
1.6.2	Théorème des gendarmes	6
1.6.3	Exemple typique du théorème des gendarmes	6
2	La continuité	7
2.1	Définition	7
2.2	Graphiquement parlant	7
2.3	Exemples	7
2.4	Comment justifier (au bac) qu'une fonction est continue ?	7
2.5	Théorème des valeurs intermédiaires	8
2.6	Algorithme	8
2.6.1	Le contexte	8
2.6.2	Présentation de la méthode	9
3	La dérivée	10
3.1	Définition	10
3.1.1	Pourquoi c'est génial ?	11
3.1.2	Équation de la tangente d'une courbe	12
3.2	Propriétés	14
3.2.1	Dérivée d'une somme	14

3.2.2	Dérivée d'un produit	14
3.2.3	Dérivée d'un quotient	14
3.2.4	Dérivée d'une puissance	15
3.2.5	Dérivée d'une composée	15
3.3	Dérivée de fonctions usuelles	15
3.3.1	Sur les fonctions, trouver l'extremum	15

1 Limites d'une fonction

1.1 Motivations

1.1.1 En science

Souvent, on utilise le concept de limite pour **prédire** le comportement d'un système. En physique notamment, on calcule la limite d'une fonction en plus l'infini pour déterminer le comportement dit *asymptotique* d'un phénomène. Par exemple, si on regarde la température d'une tasse de thé chaude, on se rend bien compte que si on la laisse suffisamment à l'air libre, la température de la tasse va décroître, et se stabiliser autour de la température extérieure. On pourrait donc voir la limite comme le comportement de la température après avoir attendu suffisamment longtemps.

1.1.2 En mathématiques

(à lire peut-être plus tard) Pour comparer la croissance de deux fonctions, on veut savoir qui le «remportera» sur l'autre au bout d'un certain temps. Et le concept de limite est idéal pour cela

1.1.3 Pour ce cours

Ce chapitre remplit trois objectifs :

- C'est, tel quel, un chapitre qui fait partie de la liste du programme officiel de terminal S.
- Je l'introduis avec des fonctions, mais sachez que l'on retrouvera *exactement* la même chose pour les *suites*, mais en plus simple. Donc si vous l'avez compris ici, vous l'avez compris pour les suites (mais je redonnerai quelques précisions, évidemment)
- Enfin, je veux introduire la notion de dérivée après ce chapitre. Notion qui repose sur les limites, donc c'est dans le thème !

1.2 Définitions

Une limite d'une fonction f au point a (un point au sens large, pour éviter d'écrire plusieurs définitions pour le même concept, j'autorise **exceptionnellement** le point a d'être égal à $\pm\infty$) est la *valeur* vers quoi tend $f(x)$ pour x qui s'approche de plus en plus de a .

Exemples: - si on prend la fonction $f(x) = x + 1$. Quelle est sa limite en 0 ? Et bien, plus x s'approche de 0, plus $x + 1$ s'approche de 1, donc on note :

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$$

- Si maintenant, on prend $f(x) = \frac{1}{x}$, quelle est sa limite en $+\infty$? Et bien, plus x est grand, plus $\frac{1}{x}$ s'approche de 0.

Remarques: - le calcul de limite est très présent au bac. - certaines limites de fonctions doivent être connues, mais la plupart se retrouvent sur le graphe des fonctions. Pour les autres, je vous donnerai des interprétations pour mieux les mémoriser.

1.3 Définition propre aux fonctions

Il faut néanmoins distinguer deux types de limite. Cette distinction n'a lieu *que pour les fonctions* (cela veut dire, pas pour les suites). On a donc :

- Les limites dites à gauche, notée : $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$, voire $f(a^+)$
- Les limites dites à droite, notée : $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$, voire $f(a^-)$, pour aller plus vite.

Intuitivement, la limite à gauche d'un point a est la valeur de $f(x)$ pour x qui s'approche de a avec la condition $x < a$. On arrive vers a graphiquement vers la gauche.

De même pour la limite à droite.

Il peut arriver qu'une fonction ait une limite à gauche et une limite à droite différente en un même point. Par exemple la fonction qui à x associe 1 pour les nombre positifs, et -1 pour les nombre négatifs, et n'est pas définie pour $x = 0$, admet :

- Une limite à gauche en 0 qui est de -1
- Une limite à droite en 0 qui est de 1

Autre subtilité par exemple, soit $f = \frac{1}{x}$:

- f admet $+\infty$ pour limite en 0 à droite
- f admet $-\infty$ pour limite en 0 à gauche

C'est aussi pour cela que l'on doit distinguer les deux limites

1.4 Pour quelques fonctions classiques

1.4.1 Les fonctions puissances

Pour tous les fonctions puissances, $f : x \longrightarrow x^n$, on a, suivant la parité de n :

- Si n est pair, $\lim_{\pm\infty} f(x) = \pm\infty$
- Si n est impair $\lim_{\pm\infty} f(x) = \mp\infty$ le signe est inversé

1.4.2 La fonction inverse

Très pratique, car elle va nous permettre de calculer plus largement les limites pour les fonctions du style $\frac{1}{f(x)}$ et par extension, quelques limites pour $\frac{u}{v}$ grâce au tableau sur le produit.

1.5 Règles de calcul

Intuitivement, on peut se convaincre des règles de calcul suivantes. On va présenter les règles dans un tableau récapitulatif. On présente tous les cas possibles de limites de deux fonctions u , et v . Le résultat de leur limite est indiquée dans la cellule correspondante.

Les ?? signifient que l'on ne peut pas conclure dans le cas général, c'est donc du cas par cas. Nous verrons des exemples à la section suivante.

Pour le produit :

*	$v = \infty$	$v = -\infty$	$v = l \neq 0$	$v = 0$
$u = \infty$	∞	$-\infty$	(signe de l) * ∞	??
$u = -\infty$	$-\infty$	∞	-(signe de l) * ∞	??
$u = l' \neq 0$	(signe de l) ∞	-(signe de l) ∞	ll'	0
$u = 0$??	??	0	0

Pour la somme :

+	$v = \infty$	$v = -\infty$	$v = l$
$u = \infty$	∞	??	∞
$u = -\infty$??	$-\infty$	$-\infty$
$u = l'$	∞	$-\infty$	ll'

Pour le quotient, il suffit juste de connaître les limites en tout les points possibles de la fonction $\frac{1}{x}$, et d'appliquer ensuite le produit. Par exemple, pour $\frac{\infty}{0^+} = \infty * (+\infty) = \infty$.

1.6 Théorèmes portant sur les limites

1.6.1 Théorème de comparaison

Celui-là est très intuitif, mais très utilisé. Supposons que nous avons deux fonctions, telles que :

$$f(x) \leq g(x)$$

Alors, si $f(x)$ tend vers ∞ en a , alors $g(x)$ aussi.

On peut alors imaginer toutes les variations possibles, avec moins l'infini, ou une inégalité dans l'autre sens.

1.6.2 Théorème des gendarmes

Aussi appelé théorème d'encadrement¹, celui-là est **vraiment** utilisé massivement en mathématiques (en particulier en analyse).

Supposons que l'on ait :

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x)$$

Alors, si

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = l$$

Par conséquent :

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = l$$

Très simple, mais souvent **redoutablement efficace**² ! Il est très utilisé en particulier pour le calcul de limite de *suite*, notion que nous verrons plus tard. Au bac, il apparaît souvent dans les dernières questions, pour conclure sur la limite que l'on cherchait dans l'exercice.

1.6.3 Exemple typique du théorème des gendarmes

C'est pas un exemple impressionnant, certes, mais cela permet d'illustrer une manière d'utiliser le théorème des gendarmes très connues. En effet, souvent le terme de gauche est simplement nul, et le terme de droite tend vers 0, ce qui force la fonction ainsi encadrée de tendre vers 0. Démonstration.

Pour $x > 1$, on a (à voir sur un graphique)

$$0 \leq \frac{1}{x^2} \leq \frac{1}{x}$$

1. plus classe, mais moins fun..

2. ça veut dire qu'il faut le garder en tête, mais avec un nom pareil, je ne doute pas que vous allez vous en rappeler !

Donc, puisque l'on sait que $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$, on en déduit par le théorème des gendarmes :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} = 0$$

2 La continuité

2.1 Définition

On dit qu'une fonction f est continue au point a lorsque :

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a) \in \mathbb{R}$$

On dit encore qu'une fonction est *continue sur un intervalle* si elle est continue en tout point de cet intervalle. Dans la *définition même de la continuité* il **faut** préciser où la fonction est continue. Car cette propriété **dépend** de la fonction bien sûr, mais aussi de l'intervalle considéré (par exemple, prenez la fonction inverse).

2.2 Graphiquement parlant

C'est très facile de repérer une fonction continue à l'aide de sa courbe représentative : il suffit qu'elle n'est pas de « coupure » dans son graphe.

2.3 Exemples

Toutes les fonctions de bases présentées plus haut (fonctions puissances, polynôme, inverse, affine et linéaire) sont continues sur leur intervalle de définition (mais il faut préciser pour la fonction inverse, comment ?).

2.4 Comment justifier (au bac) qu'en fonction est continue ?

Au bac, lorsqu'il faut justifier qu'une fonction est continue, souvent il suffit de dire :

- qu'elle est somme / produit de fonctions continues
- (ou) que c'est un polynôme,
- (ou) que c'est une composition de fonctions continues

Et normalement vous avez tous les cas possibles.

2.5 Théorème des valeurs intermédiaires

Le théorème des valeurs intermédiaires fait partie des théorèmes sur lesquels vous êtes sûr de tomber le jour du bac. Il est heureusement pour nous assez simple et plutôt intuitif là encore.

Supposons f une fonction *continue* sur un intervalle $[a, b]$. Supposons par ailleurs que $f(a) > 0$ et $f(b) < 0$. Alors le théorème des valeurs intermédiaires affirme qu'il existe un nombre c compris entre a et b tel que :

$$f(c) = 0$$

Commentaires :

- Bien sûr, le théorème marche si $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$. En somme, il suffit que $f(a)f(b) < 0$ (c'est à dire que les deux nombres $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes différents).
- De même, vous pouvez remplacer les 0 dans le théorème par n'importe quel valeur. Mais c'est souvent en 0 que l'on énonce le théorème.
- L'hypothèse de la continuité de la fonction est évidemment totalement nécessaire. Une fonction discontinue peut totalement être positive, puis négative sans passer par 0.
- Attention, le théorème nous dit qu'il existe un tel nombre c , mais ne nous dit pas s'il est unique (il peut très bien en avoir plusieurs, par exemple la fonction sinus ou cosinus croise plusieurs fois l'axe des abscisses). Néanmoins si vous avez *besoin* de prouver l'unicité d'un nombre c , vous le pouvez ! Il suffit de prouver que la fonction est strictement croissante (vous verrez un exemple dans la section suivante).
- Le théorème ne nous dit pas non plus où où il se trouve ! Le prochain paragraphe sera justement consacré à la recherche de ce fameux c .

2.6 Algorithme

Et hop ! Un petit détour par l'algorithmie !! On peut difficilement passer à côté, vu que il y a de très forte chance que vous tombiez sur un exercice du style au bac.

Dans ce paragraphe, nous illustrerons un algorithme basé sur la méthode de la *dichotomie* (qui veut littéralement dire « couper en deux », vous comprendrez vite pourquoi).

2.6.1 Le contexte

Le théorème des valeurs intermédiaires ne nous donnent pas la *localisation* des nombres x qui sont solution d'une equation $f(x) = 0$. C'est bien dommage, et on essaie donc de calculer une *approximation* de la solution.

2.6.2 Présentation de la méthode

Prenons une fonction f qui est strictement croissante et continue, et a et b tel que $a < b$ et $f(a)f(b) < 0$. Nous sommes bien dans les hypothèses du théorème des valeurs intermédiaires, et puisque la fonction est strictement croissante, nous pouvons en déduire qu'il existe un unique nombre $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = 0$.

Disons que l'on sait que la solution c est dans l'intervalle $[a, b]$. Donc on peut diviser cet intervalle en deux. Prenons m le milieu de cet intervalle. C'est-à-dire :

$$m = \frac{a + b}{2}$$

Alors, deux options sont possibles :

- Soit, le nombre c se trouve dans l'intervalle $[a, m]$ Soit le nombre c
- se trouve dans l'intervalle $[m, b]$

Voilà, nous avons coupé en deux notre problème. Comment décider dans quelle option nous sommes ? Et bien, il faut voir ce que donne la fonction f , et invoquer en particulier sa croissance.

- Si $f(m) < 0$, puisque f est croissante, cela veut dire que c est après m , et donc c est dans l'intervalle $[m, b]$
- Si $f(m) > 0$, puisque f est croissante, cela veut dire que c est avant m , et donc c est dans l'intervalle $[a, m]$
- Si jamais (cas très rare) $f(m) = 0$, alors on a trouvé notre nombre c , puisque $c = m$ dans ce cas.

Ensuite, une fois que l'on a réduit notre intervalle par deux, on peut continuer exactement de la même manière mais sur un intervalle plus réduit. Cela nous permet donc de *localiser* le nombre c en réduisant pas à pas l'intervalle qui encadre c .

Sous forme d'algorithme, cela peut donner :

```
SOIT a un NOMBRE
SOIT b un NOMBRE
SOIT f une FONCTION
SOIT epsilon un NOMBRE # C'est la précision de notre encadrement

TANT QUE | a - b | < epsilon
ALORS
    m = (a + b) / 2

    SI f(m) > 0
    ALORS
        a = a #Ligne inutile
```

```

    b = m
    SINON, si f(m) < 0
    a = m
    b = b #Ligne inutile

```

RETOURNER a,b

Je vous laisse deviner comment implémenter cette méthode pour calculer $\sqrt{2} \dots$

3 La dérivée

3.1 Définition

Voilà, on y est ! Le merveilleux concept de la dérivée ! Je vous conseille de lire en parallèle de ce cours, le super bouquin, gratuit et fait par des talentueux mathématiciens passionnés par la vulgarisation accessible ici ³ ! Je vous recommande tout le livre si vous avez le temps, mais vous pouvez vous attarder en particulier sur le chapitre « La dérivation » qui est très bien fait !

Donc, qu'est-ce que la dérivée ? C'est tout d'abord une espèce d'opération, qui transformée une fonction en une autre fonction.

Pour mieux comprendre la dérivée, prenons un exemple concret, d'une fonction f représentant la position d'une voiture par rapport à un repère quelconque. Et bien la dérivée, serait une autre fonction, qui donnerait en tout point la vitesse (instantanée) de votre voiture. Oui, en fait, lorsque vous conduisez ⁴, l'aiguille qui se tient dans le cadran en face de vous calcule en quelque sorte la dérivée de votre position !

Comment on fait pour calculer la vitesse instantanée de notre position ?

Eh bien, il faut mesurer la distance Δd que l'on parcourt en une fraction de temps Δt , et calculer le rapport :

$$v = \frac{\Delta d}{\Delta t}$$

Bien sûr, dans la vraie vie, pas besoin de prendre une échelle de temps « infiniment petite ». Mais en mathématiques, on peut le faire, donc on va pas se gêner !

Ainsi, pour calculer la dérivée d'une fonction, en un point x , on va poser :

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

3. c'est encore un lien cliquable !

4. si vous avez le permis bien sûr !

C'est exactement la même formule que plus haut, mais adaptée aux fonctions.

Premières remarques :

- Cette limite n'existe pas forcément pour toutes les fonctions, ou pour tout les points x possibles. On reconnaît d'ailleurs une « forme indéterminée » de limite.
- Il **ne suffit absolument pas** d'être continue pour être dérivable (dans le sens où il existe des fonctions continues partout, mais dérivable nulle part). Mais une fonction dérivable est nécessairement continue
- Heureusement pour nous, nous utiliserons *très rarement* cette formule pour calculer la dérivée. Nous verrons des règles de calculs qui nous permettent de calculer la dérivée des fonctions usuelles. *Parfois* la formule de la dérivée permet de calculer des limites comme par exemple :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x}$$

Si on résume, une fonction f est dérivable sur intervalle I si le calcul de limite encadré plus haut a un sens pour tout x dans I . Certaines fonctions ne sont pas dérivables, soit en un point particulier, soit carrément sur tout leur ensemble de définition (ce qui est plutôt rare avec les fonctions usuels).

3.1.1 Pourquoi c'est génial ?

Donnons dès maintenant une explication sur la puissance de la dérivée. Reprenons notre voiture du début. On remarque que la vitesse de notre voiture nous donne des informations sur la manière dont sa *position* varie. En effet :

- Si la vitesse de la voiture est négative, alors la voiture recule
- Si la vitesse de la voiture est positive, alors la voiture avance
- Si la vitesse de la voiture est nulle, alors la voiture fait du surplace (attention, dit comme cela c'est faux, mais nous y reviendrons plus tard)

Que donne cette interprétation pour les fonctions ?

- Si $f'(x) > 0$, alors, localement, la fonction est croissante !
- Si $f'(x) < 0$, alors, localement, la fonction est décroissante !
- Si $f'(x) = 0$, alors, localement, la fonction est constante !

Ce critère est très pratique pour établir le *sens de variation* d'une fonction, et qui est ramené grâce aux dérivées à établir un *tableau de signe* de la fonction dérivée, ce qui est généralement beaucoup plus simple !

En sachant le tableau de variation d'une fonction, on peut en déduire en particulier (si elle est en a) les extremums de cette fonction, c'est-à-dire les points où cette fonction est maximale ou minimale. C'est extrêmement utile pour *optimiser* une quantité (imaginez optimiser une fonction qui représente le coût de production, par rapport à la production, etc..)

3.1.2 Équation de la tangente d'une courbe

Maintenant que vous connaissez la définition, disons calculatoire, de la notion de dérivée, nous pouvons attaquer la définition géométrique de la dérivée. Tout d'abord, je vous propose un détour par le *taux d'accroissement*⁵. La section consacrée au taux d'accroissement est facultative, vous pourrez la lire plus tard.

3.1.2.1 Le taux d'accroissement

Comme son nom l'indique, le taux d'accroissement est un nombre qui quantifie la croissance d'une fonction f entre deux points *distincts*. Ce taux existe toujours sur l'intervalle de définition de f .

Comment le calculer ?

Considérons deux points x, y tel que $x < y$. Pour comparer de combien la fonction est passée de x à y on peut calculer :

$$f(x) - f(y)$$

C'est la variation de f entre x et y . Maintenant, pour avoir un taux, je veux prendre en compte la distance entre x et y . Parce qu'il est difficile de comparer par exemple $f(1) - f(3)$ avec $f(1) - f(25)$. Peut être que la fonction est croissante, mais je ne quantifie pas à quel point elle est rapidement croissante !

Donc, on aboutit à la formule :

$$\tau(f)_{x,y} = \frac{f(x) - f(y)}{x - y}$$

Et donc, on voit que la dérivée est la limite du taux d'accroissement lorsque la distance entre les deux points x et y sont infiniment proches !

Graphiquement, comment tracer le taux d'accroissement ?

Comme je le disais, le taux d'accroissement est un nombre, donc techniquement, on ne peut pas le tracer sur un repère. Mais on peut le mettre en évidence tout simplement en reliant les points $(x, f(x))$ et $(y, f(y))$ par une droite (affine dans la plupart des cas) de la courbe représentative de la fonction f . Vous avez un exemple dans la figure 1.

3.1.2.2 Calculer une telle droite

Il suffit de se rappeler qu'une droite affine est la courbe représentative d'une fonction affine.

Donc, il nous faut une droite qui passe par deux points, $(x, f(x))$ et $(y, f(y))$, avec x et y qui sont distincts. On cherche donc a et b deux réels tel que :

5. rien que le nom devrait vous évoquer le lien avec la dérivée !

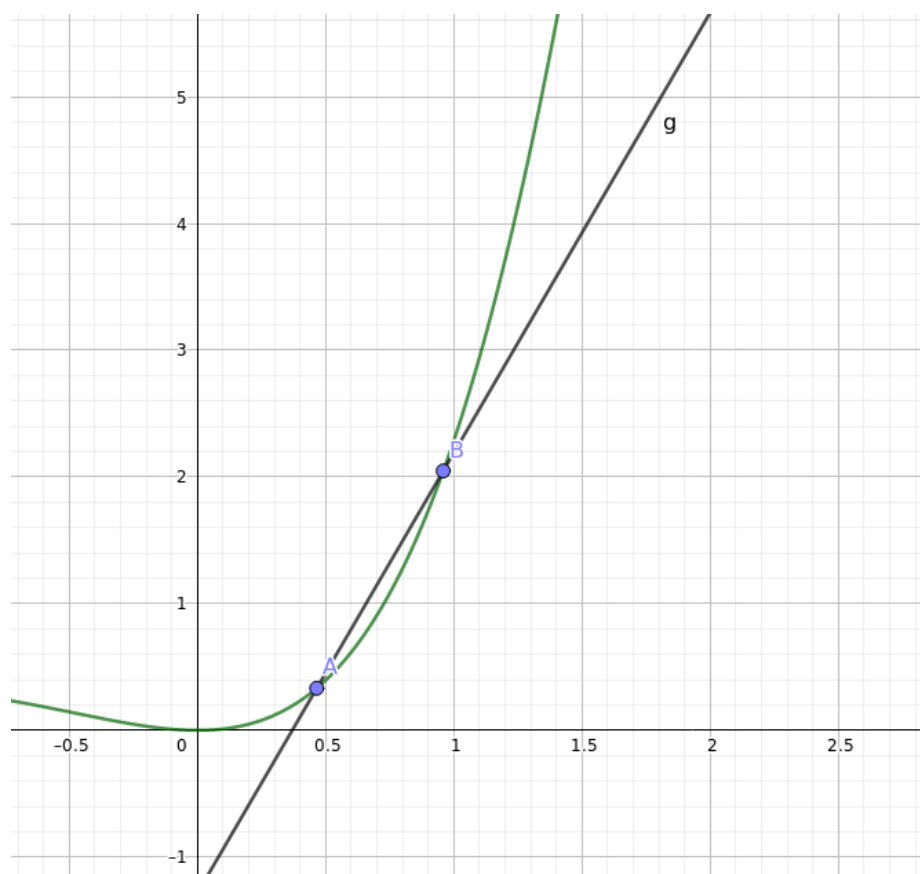


FIGURE 1 – Exemple pour une fonction quelconque au point A et B

$$\begin{cases} a * x + b &= f(x) \\ a * y + b &= f(y) \end{cases}$$

Si on résout ce système, on obtient :

$$\begin{cases} a &= \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \\ b &= f(y) - \frac{f(y)-f(x)}{y-x} * y = \frac{f(y)(y-x)-yf(y)+yf(x)}{y-x} \\ &= \frac{yf(x)-xf(y)}{y-x} \end{cases}$$

Finalement, la droite τ qui passe par $(x, f(x))$ et $(y, f(y))$ s'écrit :

$$\tau(t) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x} * t + \frac{yf(x) - xf(y)}{y - x}$$

3.2 Propriétés

3.2.1 Dérivée d'une somme

On l'a vu, la limite d'une somme est la somme des limites, de là, on en tire notre première propriété, avec f et g deux fonctions :

$$(f + g)' = f' + g'$$

Cela signifie que, si f et g sont dérivables sur un intervalle I , alors :

$$(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$$

Autrement dit, *la dérivée de la somme est la somme des dérivées*

3.2.2 Dérivée d'un produit

Première formule plus difficile, la dérivée du produit de deux fonctions f et g se calcule comme il suit:

$$(fg)' = f'g + g'f$$

En cours, j'ai donnée une interprétation de cette formule à l'aide d'un rectangle de longueur $f(x)$ et de largeur $g(x)$.

3.2.3 Dérivée d'un quotient

Autre formule délicate, la dérivée d'un quotient de deux fonctions :

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - g'f}{g^2}$$

3.2.4 Dérivée d'une puissance

Une des formules les plus puissante que je connaisse ! Elle récapitule bon nombre de règle que l'on peut trouver dans d'autres cours !

$$(f^n)' = n f' f^{n-1}$$

3.2.5 Dérivée d'une composée

Voici la dernière formule que je vous recommande de connaître, la dérivée d'une composée. On appelle *composée* de deux fonctions f et g la fonction $x \rightarrow f(g(x))$

$$(f(g(x)))' = g'(x) * f'(g(x))$$

3.3 Dérivée de fonctions usuelles

Avec toutes les règles vues plus haut, vous pouvez en déduire que :

- $(x^2)' = 2x$
- $(x^3)' = 3x^2$
- $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
- $(\frac{1}{x})' = -\frac{1}{x^2}$

Vous savez donc calculer la dérivée d'un polynôme, d'un quotient de polynôme, d'une composée par exemple $\sqrt{x^2 - 7x + 2}$ etc.. Maintenant, c'est qu'une question d'entraînement !⁶

3.3.1 Sur les fonctions, trouver l'extremum

Pour trouver l'extremum d'une fonction, il faut donc :

- Vérifier qu'elle est dérivable
- Calculer sa dérivée
- En déduire les points où elle est nulle
- Vérifier que ces points sont des extremaux. C'est-à-dire que la fonction est décroissante avant, puis croissante après dans le cas d'un minimum, et vice et versa dans le cas d'un maximum.

6. ça tombe bien, y'a justement une feuille d'exercice qui vous attend !