Les fonctions, propriétés de base et exemples

Fabien Delhomme

Disclaimer

Bonjour à tous !

Vous avez sous les yeux le premier document d'une longue série qui représente le cours que je vais vous dispenser pendant cette année de 2018–2019, avec pour objectif d'avoir le bac S.

Il est **très important** de retenir que ce document est encore en construction, c'est-à-dire qu'il subsiste des fautes de typo, ou mathématiques. Si vous en voyez, **il faut le signaler** pour que je puisse le corriger au plus vite.

Voici mon adresse mail pour signaler les erreurs, ou si vous avez des questions :

fdelhomme@gmail.com

Trêve de paroles, commençons !

1 Qu'est-ce qu'une fonction ?

1.1 Motivations

Les fonctions permettent de modéliser au mieux des phénomènes physiques. C'est un formalisme très utilisé en physique, biologie, et en mathématiques.

Les fonctions sont aussi présentes au bac: il y a forcément au moins un exercice qui porte sur les variations d'une fonction.

1.2 Définition

Une fonction associe quelque chose avec quelque chose. Ici, on s'intéresse uniquement aux *fonctions numériques*. C'est-à-dire à des fonctions qui associent des nombres réels à des nombres réels. On verra dans un second temps quelques fonctions définies sur les *complexes* (notion que l'on verra plus tard).

2 Représentation d'une fonction numériques

On peut donc représenter une fonctions dans un repère orthonormé. Cela permet de visualiser les fonctions, et surtout :

— De retenir certaines de leurs propriétés
— D'avoir un sens intuitif de leur croissance

On reparlera de cela prochainement, mais retenez qu'il est *essentiel* d'avoir en tête les principales fonctions qui sont au programme pour avoir une intuition correcte.

2.1 Comment représenter une fonction ?

Il suffit de représenter tous les couples de points de la forme

$$(x, f(x))$$

avec $x \in \mathbb{R}$.

3 Les fonctions de base

3.1 Motivations

Pour mieux appréhender le concept de fonction, il faut avoir en tête ces exemples.

3.2 Les fonctions linéaires et affines

Ce sont les deux types de fonctions les plus simples qui existent ! Ces fonctions sont très importantes, comme on le verra par la suite.

Ce sont les fonctions du type :

$$f(x) = a * x$$

Où a est une constante, comme par exemple

$$f(x) = 3 * x$$

où ici a vaut 3.

Ce genre de fonctions permet de modéliser des phénomènes dits linéaires. Un exemple très concret peut être donné par les soldes, ou par la modélisation du prix d'un abonnement :

Imaginons qu'une entreprise propose un abonnement de ce type :

— Tout nouvel abonnement coûte 10 euros
— Puis, le client paye 3 euros par mois

Comment modéliser le prix en fonction du mois que coute cet abonnement ? Et bien, la réponse est donnée par la fonction $f(x) = 3x + 10$.

Remarques : Attention à la notation, normalement (c'est-à-dire techniquement parlant), $f(x)$ représente un nombre. De façon abusive je noterai parfois dans ce cours $f(x)$ pour parler d'une fonction. Je vous dirai les endroits où il est important de faire la distinction (surtout lors de la rédaction des copies).

La représentation graphique de cette fonction (c'est-à-dire sa *courbe représentative*) est une *droite*! (cf exercices).

3.3 Fonction carré

Un pas vers une fonction plus compliquée ! C'est la fonction suivante :

$$f \ : x \longrightarrow x * x = x^2$$

Par exemple:

- $f(1) = 1$
- $f(2) = 2 * 2 = 4$

3.4 Interlude : fonction réciproque

On parle de réciproque g, d'une fonction f, une fonction telle que, si :

$$y = f(x)$$

Alors :

$$x = g(y)$$

.

Les prochaines sections montrent des exemples de fonctions réciproques.

3.5 Fonction racine carrée

C'est la fonction réciproque de la fonction racine carré. Attention, ici, j'ai omis par soucis de rapidité une tonne de détails techniques, mais en gros, et nous y reviendrons plus tard de toutes façons, la fonction racine marche comme il suit :

- $3^2 = 9$, donc $\sqrt{9} = 3$
- $4^2 = 16$, donc $\sqrt{16} = 4$
- $\sqrt{x}$ pour x négatif n'a pas vraiment de sens (pour l'instant !)
- $\sqrt{2}$ est un nombre bien mystérieux.. (Que nous essaierons de calculer, et voir quelques propriétés).

3.6 Fonction inverse

Fonction qui associe un nombre à son inverse, tout simplement. Par exemple, $f(3) = \frac{1}{3}$. On peut remarquer que f est sa propre réciproque.

3.7 Les polynômes

Les polynômes sont les premières constructions à partir des briques de fonctions élémentaires. On parle de polynôme dès que l'on a une fonction du type

$$f(x) = a_n * x^n + \cdots + a_1 * x + a_0$$

Autrement dit, dès que l'on a une somme de puissances de x multipliées par des nombres $a_n, \ldots, a_0$, c'est que l'on a affaire à des polynômes.

Les polynômes sont **très** importants pour le mathématicien, car en un certain sens, ils permettent de tester des théorèmes (et même d'en prouver) facilement, puis d'étendre la véracité de ces théorèmes à toutes les fonctions possibles !

Faisons le point dès maintenant sur quelque chose qu'il faut à tout prix maîtriser : la recherche de racines d'un polynôme.

Vocabulaire: une *racine* d'un polynôme P est un nombre x tel que $P(x) = 0$.

Au lycée, vous ne verrez jamais de polynôme de degré supérieur à 3. C'est-à-dire que vous serez confrontés, au pire, à des x^3 dans vos calculs (et heureusement !)

On peut remarquer au passage que les fonctions affines, les fonctions linéaires, et les fonctions constantes, sont des polynômes !

3.7.1 Trouver les racines d'un polynôme de second degré

Voici un paragraphe du type « formulaire », que je déteste faire car il ne donne pas d'explication sur ce qui se passe, mais uniquement des formules à retenir. La section suivante vous indiquera comment ces formules ont été trouvées.

On se donne un polynôme de second degré :

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Où a, b et c sont des nombres quelconques.

Premier réflexe pour trouver les racines: (tous en chœur !) *trouver le discriminant !* Pour un polynôme de second degré, on a la formule

$$\boxed{\Delta = b^2 - 4ac}$$

Et les racines sont données par les formules (magiques !)

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

Conclusion:

— Si Δ est négatif, il *n'y a pas de racines réelles* (ceux qui ont vu les complexes comprennent pourquoi j'insiste sur le mot « réel »)
— Si Δ est nul, alors "vous vous êtes fait avoir", car il n'y a qu'une seule racine, et c'était une simple identité remarquable qui permettait de conclure. Ne vous inquiétez pas, cela arrive aux meilleurs.
— Si Δ est positif, on obtient deux racines distinctes.

Astuce de pro:

— Parfois, lorsque $a = 1$, on a un critère qui permet de trouver les racines d'un polynôme de second degré (voir exercice). En effet, il se trouve que si on note x_1 et x_2 les deux racines d'un polynôme, et que $a = 1$, alors :

$$x_1 x_2 = c$$

$$x_1 + x_2 = b$$

Donc, à votre avis, quelles sont les racines du polynôme $x^2 + 3x + 2$?

3.7.2 Le sens de variation d'un polynôme de second degré

Dans ce paragraphe, j'empiète un peu sur les notions présentées au suivant. Mais je pense qu'il est important de tout mettre au même endroit. Si vous ne savez plus ce que représente un tableau de variations, alors regardez **la section consacrée**[1].

On peut donc en déduire le sens de variation facilement. Il y a deux cas.

— Soit a est positif, et alors f décroît de $-\infty$ à $\frac{b}{2a}$ et croît de $\frac{b}{2a}$ à $+\infty$.
— Soit a est négatif, et c'est l'inverse..

Ce qui donne pour a positif :

x	$]-\infty$	$-\frac{b}{2a}]$	$[-\frac{b}{2a}$	$\infty[$
P(x)	$\searrow$		$\nearrow$	

Astuce de mémorisation: On retrouvera ces résultats rapidement grâce à la dérivée, ou en ayant en tête la représentation graphique d'un polynôme.

1. c'est un lien cliquable !

3.7.3 Tableau de signe d'un polynôme de second degré.

Plus important, le tableau de signe d'un polynôme de second degré peut *toujours* être trouvé rapidement, avec un peu d'entrainement. Il ne doit donc pas vous poser de grandes difficultés.

Même remarque que pour la section précédente, j'empiète sur le chapitre suivant, donc veuillez vous rapporter à la section un peu plus loin pour plus de détails.

Là encore, il y a deux cas, selon le signe de a.

Dans le cas où a est positif :

x	$]-\infty, x_2]$	$[x_2, x_1]$	$[x_1, +\infty[$
P(x)	$+$	$-$	$+$

Et c'est l'inverse quand a est négatif.

Astuce de mémorisation : Là encore, n'essayez pas de retenir ce tableau par cœur, mais à la place, ayez en tête la courbe représentative d'une fonction polynômiale simple comme $x^2 - 1$, qui a pour racine $x_1 = -1$ et $x_2 = 1$ [2], qui vous permet de retrouver tous les résultats ci-dessus !

3.8 Mais d'où viennent ces formules ?

Reprenons notre polynôme :

$$P(x) = ax^2 + bx + c$$

En utilisant quelques tours de passe passe, voici ce que l'on peut obtenir :

$$\begin{aligned}
P(x) &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) \\
&= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) \\
&= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right) \\
&= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} \\
P(x) &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}
\end{aligned}$$

2. c'est une identité remarquable !

La dernière ligne est une forme particulièrement utile pour trouver les racines du polynôme, mais aussi son minimun. Elle s'appelle la *forme canonique*. Donc cette forme est

$$\text{bidule} * (x + \text{truc})^2 + \text{machin}$$

En fait, les calculs fait plus haut vous donnent les formules pour calculer bidule, truc et machin. En particulier, bidule est toujours égale à a. Mais, retenir ces formules par coeur ne sert *à rien* au bac, et ce, pour plusieurs raisons :

— Le correcteur préfère voir comment vous avez fait les calculs
— Ces formules sont vraiment très rarement utiles avec les outils comme la dérivée, que l'on utilisera intensivement dans les prochains chapitres
— On préfère vous demander de déterminer les racines. Et ce sont d'autres formules, qu'il est beaucoup plus rentable d'apprendre par rapport à celle de la forme canonique !

On peut aller plus loin, uniquement avec la condition $\Delta > 0$, si on reprend nos calculs :

$$\begin{aligned}
P(x) &= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right) \\
&= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2\right) \\
&= a\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right) \\
&= a\left(x + \frac{b - \sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x + \frac{b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right)
\end{aligned}$$

Et nous pouvons conclure sur la ou les racines, et le sens de variation etc. En particulier, si $\Delta < 0$, alors le polynôme n'a pas de racine réelle.

4 Propriétés des fonctions

Maintenant que l'on a toutes ces fonctions en tête, regardons les principales propriétés de ces fonctions

4.1 Croissance, décroissance

Une fonction est dite *croissante* (resp. *décroissante*) sur un intervalle I si et seulement si :

$$\forall x, y \in I \quad x \geq y \iff f(x) \geq f(y)$$

resp:

$$\forall x, y \in I \quad x \leq y \iff f(x) \geq f(y)$$

On parle de *stricte* croissante (resp. *stricte* décroissance) lorsque les propriétés énoncées plus haut sont vraies en remplaçant une inégalité large par une inégalité stricte..

Pour résumer :

— Une fonction croissante conserve l'ordre des antécédents. C'est-à-dire que l'ordre des images et des antécédents est le même.
— Au contraire, une fonction décroissante renverse cet ordre.

Concrètement si j'ai par exemple envie de démontrer que $\frac{1}{3} < \frac{1}{2}$, alors je pars de :

$$2 < 3$$

Puis, en invoquant la décroissance de la fonction inverse sur l'intervalle $]0; +\infty[$, j'obtiens :

$$\frac{1}{2} > \frac{1}{3}$$

J'inverse le sens des inégalités, car la fonction est *décroissante*.

Points de vocabulaire :

— Le symbole $\forall$ signifie "pour tout". Ce n'est pas dans au programme du bac, mais c'est sacrément pratique ! (Ça veut dire qu'il ne faut pas l'utiliser dans les copies).
— L'image d'un point x par la fonction f est simplement $f(x)$.
— L'antécédent d'un point y par la fonction f est **un** (il est possible qu'il y en ait plusieurs) nombre x tel que $f(x) = y$

Souvent (au bac, dans la vie d'un mathématicien, d'un physicien, d'un ingénieur etc..) ou veut connaître le **sens de variation** d'une fonction. Cela revient à construire un tableau qui résume les endroits (ensembles de nombres) où la fonction croît, notée avec une flèche vers le haut, ou lorsque la fonction décroît, notée avec une flèche vers le bas. Nous verrons la construction de tableaux de variations en exercice.

4.2 Signe d'une fonction

Un *tableau de signe* d'une fonction désigne un tableau où sont notées par des plus les endroits (les ensembles de nombres, réunions d'intervalles) où la fonction est positive, et par des moins les endroits où la fonction est négative.

Souvent, le tableau de signe est plus simple à établir que le tableau de variation. (Cela explique la puissance de la dérivée, qui comme nous allons bientôt le voir, permet de ramener l'étude d'un tableau de variation à un tableau de signe !!).

4.3 Domaine de définition

Un domaine de définition d'une fonction f est l'ensemble des nombres sur lequel la fonction f est définie.

Exemple: la fonction inverse admet pour domaine de définition $]-\infty;0[\cup]0;\infty[$, car il n'existe pas d'inverse pour 0 (la division par 0 n'a pas de sens !!).

Notes: il faut **toujours** commencer par se demander, même si cela n'est pas écrit explicitement dans l'énoncé, quel est le domaine de définition d'une fonction que l'on a sous les yeux. Cela permet d'éviter bien des problèmes !

Remarques: (à relire plus tard) Vous pouvez maintenant comprendre ce que j'ai passé sous silence avec les fonctions réciproques. En effet, pour calculer la réciproque d'une fonction, il faut toujours considérer son domaine de définition, et surtout son domaine image. La réciproque de f aura comme ensemble de départ le domaine image de f. C'est pourquoi par exemple la fonction racine carrée n'est pas définie pour des nombres réels négatifs (et pour les petits malins du fond qui connaissent les complexes, notion au programme de terminal S, sachez qu'on y reviendra !)