Exercice sur les suites

Delhomme Fabien

Table des matières

1 Définitions

1.1 Minorant, majorant

Déterminer un majorant et un minorant pour les suites suivantes :

— $u_n = \frac{-1}{n+1}$
— $u_n = \frac{n}{n+1}$
— $u_n = -\left(\frac{-1}{2}\right)^n$
— $u_n = \sin(n)$, vous pouvez vous aider en regardant à la calculatrice quelques valeurs de la suite

2 Étude des variations d'une suite

Étudier les variations de la suite $u_n = n^3 - 9n^2$, et de la suite $u_n = n^2 - 10n + 1$.

3 Calculs de limites

Déterminer les limites de :

— $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$
— $u_n = \sqrt{n^4 + 3}$
— $u_n = 2 * n + (-1)^n$
— $u_n = n - \sqrt{4n^2 + 1}$
— $u_n = \frac{\cos n}{n^2}$
— $u_n = \frac{n^5}{n^2 - 7}$

Soit u la suite $n \mapsto \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.

1. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$
2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$0 < u_n < \frac{1}{2\sqrt{n}}$$
3. Quelle est la limite de la suite u ? Donner de tête un rang à partir duquel :
$$0 < u_n < 5 * 10^{-5}$$

4 Problèmes

4.1 Suites imbriquées

On définit les suite (u_n) et (v_n) par :

$$\begin{aligned} u_0 &= 1 \quad & v_0 &= 2 \\ u_{n+1} &= \frac{u_n + 2v_n}{3} \quad & v_{n+1} &= \frac{u_n + 4v_n}{5} \end{aligned}$$

1. Écrire un algorithme qui prend en entrée un entier naturel n non nul et donne en sortie les valeurs u_1, v_1, …, u_n, v_n. Programmer cet algorithme sur la calculatrice. Quelle conjecture est on amené à formuler sur le comportement de (u_n) et de (v_n) quand n tend vers $+\infty$?
2. On pose pour tout entier naturel n, $w_n = v_n - u_n$. Démontrer que la suite (w_n) est géométrique. Préciser la limite de (w_n) et exprimer w_n en fonction de l'entier naturel n.

3. On pose pour tout entier naturel n, $t_n = 3u_n + 10v_n$. Démontrer que la suite t_n est constante.
4. Exprimer u_n et v_n en fonction de l'entier naturel n, puis préciser la limite de chacune des suites (u_n) et (v_n).

4.2 La série harmonique

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

1. Quel est le sens de variation de la suite (u_n) ?
2. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

   $$u_{2n} - u_n \leq \frac{1}{2}$$

   En déduire que la suite (u_n) est divergente.
3. Quelle est la limite de la suite (u_n) ?
4. Écrire un programme qui détermine le plus petit entier naturel n tel que $u_n \geq 10$.