Exercices sur les dérivées

Delhomme Fabien

4 septembre 2018

Table des matières

1 Limites de fonctions usuelles

1.1 Limite de polynômes

Déterminez la limite en $+\infty$ de la fonction f définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$f(x) = 5x^2 + 2.$$

Déterminez la limite en $-\infty$ de la fonction f définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$f(x) = -6x^5 + 8x^4 + 8x^3 - 7x^2 + 2x + 3.$$

Déterminez la limite en $+\infty$ de la fonction f définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$f(x) = -8x^2 - 4x - 9.$$

Déterminez la limite en $-\infty$ de la fonction f définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$f(x) = 9x^5 + 3x^4 + 7x^3 - 2x^2 - x.$$

Déterminez la limite en $-\infty$ de la fonction f définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$f(x) = -6x^5 + 8x^4 - 2x^3 + 6x^2 + 9x.$$

1.2 Limite de fonctions rationnelles

Pour toutes les fonctions suivantes, déterminez la limite au point indiqué, et prenez soin de déterminer l'intervalle de définition de chaque fonction.

$$f(x) = \frac{4x + 5}{3(x - 3)^2}.$$

Déterminez la limite de f en $+\infty$.

$$f(x) = \frac{2x^4 + 3x^3 + x^2 + 2x + 4}{4x - 3}.$$

Déterminez la limite de f en $+\infty$.

$$f(x) = \frac{2 - 5x}{3x^2}.$$

Déterminez la limite de f en $-\infty$.

$$f(x) = \frac{-2x^4 + 3x^3 + x^2 + 4x - 1}{2\left(x^2 + 10x + 27\right)}.$$

Déterminez la limite de f en $-\infty$.

$$f(x) = \frac{-5x^3 - 2x^2 - 5x - 2}{2x - 3}.$$

Déterminez la limite de f en $+\infty$.

2 Dérivée

2.1 Dérivée de fonctions usuelles.

Avec les formules du cours (en particulier pour les deux premières la formule sur les fonctions puissances) , dérivez les fonctions suivantes :

- $f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$
- $f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$
- $f(x) = 3x + 7$

2.2 Dérivée de polynôme de second degré

Dérivez les fonctions suivantes :

- $f : x \longmapsto -10x^2 - 8x - 10.$
- $f : x \longmapsto -4x^2 - 5x + 1.$
- $f : x \longmapsto 10x^2 - 3x + 10.$
- $f : x \longmapsto 8x^2 - 6.$

2.3 Dérivée de fonctions

En utilisant les formules du cours (formule du produit, du quotient, de la somme), dérivez les fonctions suivantes :

$$f(x) = x^3 - 2x^2 - 4$$
$$f(x) = \frac{x}{4} - 2 * \sqrt{2}$$
$$f(x) = (5x^2 + 1)(4x - x^2)$$
$$f(x) = \frac{4}{2x - 1} - \frac{1}{x}$$
$$f(x) = \frac{2x - 3}{3x + 4}$$
$$f(x) = \frac{-x^2 + 3x - 2}{4x}$$

On ne se préoccupera pas de l'ensemble de définition et de dérivabilité des fonctions.

2.4 Dérivée de fractions rationnelles

Dérivez les fonctions suivantes :

- $f(x) = \frac{8x+5}{7x+1}$.
- $f(x) = \frac{-2x-7}{2x-1}$.
- $f(x) = \frac{5-7x}{8x-2}$.
- $f(x) = \frac{3x-1}{x-4}$.
- $f(x) = \frac{9x+3}{10x-8}$.

Plus difficile :)

- $f(x) = \frac{-8x^2-144x-136}{x-9}$.
- $f(x) = \frac{-9x^2-162x-648}{x+4}$.
- $f(x) = \frac{2x^2-28x+130}{x-1}$.
- $f(x) = \frac{-7x^2+140x-252}{4x-7}$.
- $f(x) = \frac{5x^2+10x-15}{x+10}$.

Quel est l'ensemble de définition de chacune de ces fonctions ?

2.5 Dérivée avec des racines

Pour chacune de ces fonctions, donner l'ensemble de définition, justifier pourquoi elles sont dérivables, et calculer leur dérivée

- $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{4x^2-8x+104}$.
- $f(x) = \frac{4x-4}{\sqrt{x}}$.
- $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{-8x^2+80x-200}$.
- $f(x) = \frac{-5x-3}{\sqrt{x}}$.
- $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{-8x^2+80x+312}$.

2.6 Dérivée de composée de fonctions

Calculez le domaine de définition, puis dériver les fonctions suivantes :

- $f : x \longmapsto -(15x-25)^4$
- $f : x \longmapsto -5(16x-12)^3$
- $f : x \longmapsto 2\left(\frac{4x^2}{5} - 8x + 20\right)^4$
- $f : x \longmapsto 4\sqrt{2-x}$
- $f : x \longmapsto 5\sqrt{-8x-4}$
- $f : x \longmapsto 5\sqrt{5x^2+3}$
- $f : x \longmapsto -4\sqrt{12-3x}$
- $f : x \longmapsto \sqrt{3}\sqrt{x^2+10x+24}$

2.7 Problèmes

2.7.1 Exercice qui mêle tout

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[\frac{1}{2}; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x^3 + x^2 + 4}{x^2}$$

Et soit $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère.

Trouver trois réels a,b et c tels que $f(x) = ax + b + \frac{c}{x^2}$

Montrer que $f'(x) = \frac{x^3-8}{x^3}$, puis étudier le signe de l'expression $x^3 - 8$. En déduire le signe de $f'(x)$ selon les valeurs de x. Puis donner le tableau de variation de la fonction f.

Montrer que la fonction f admet un minimum.

- Déterminer l'équation de la tangente au point A d'abscisse 2 de la courbe $\mathcal{C}_f$
- Déterminer l'équation réduite de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point B d'abscisse 1

On se donne la courbe $\mathcal{C}_f$ dans un repère (1cm pour une unité pour les deux axes).

- Tracer les deux tangentes obtenues à la question précédente.
- Tracer dans le même repère la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = x + 1$.

Étudier le signe de la différence $f(x) - (x + 1)$, puis interpréter graphiquement le résultat. Peut-on dire que la droite $\mathcal{D}$ est une tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$?

2.7.2 Étude de la croissance d'une population

La population d'un village est donnée par $f(t) = \frac{8t+12}{t^2+4}$ où t est le nombre d'années écoulée depuis 2018 et $f(t)$ le nombre d'habitants en milliers. On admet que le rythme de croissance de la population est donné par $f'(t)$, la dérivée de la fonction population. Il est exprimé en milliers d'habitants par an.

Calculer la population en $t = 4$ puis en $t = 5$. En déduire la variation absolue de la population entre ces deux années.

Calculer $f'(t)$, étudier son signe et en déduire le sens de variation de la population.

Dresser le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0, 20]$. En quelle année la population a-t-elle atteint son maximum depuis 2018 ?

Calculer $f'(4)$ et $f'(5)$, et donner une valeur approchée à 0.001 millier près. Comparer à la variation absolue calculée précédemment.

Résoudre par calcul l'inéquation $f(t) < 0.8$. En déduire en quelle année la population du village passera sous le seuil de 800 habitants. Préciser alors le rythme de croissance de la population.