Exercice sur les suites

Delhomme Fabien

Table des matières

1 Définitions

1.1 Minorant, majorant

Déterminer un majorant et un minorant pour les suites suivantes :

— $u_n = \frac{-1}{n+1}$
— $u_n = \frac{n}{n+1}$
— $u_n = -\left(\frac{-1}{2}\right)^n$
— $u_n = \sin(n)$, vous pouvez vous aider en regardant à la calculatrice quelques valeurs de la suite

2 Étude des variations d'une suite

Étudier les variations de la suite $u_n = n^3 - 9n^2$, et de la suite $u_n = n^2 - 10n + 1$.

3 Calculs de limites

Déterminer les limites de :

— $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$
— $u_n = \sqrt{n^4 + 3}$
— $u_n = 2 * n + (-1)^n$
— $u_n = n - \sqrt{4n^2 + 1}$
— $u_n = \frac{\cos n}{n^2}$
— $u_n = \frac{n^5}{n^2 - 7}$

Soit u la suite $n \mapsto \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.

1. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$0 < u_n < \frac{1}{2\sqrt{n}}$$

3. Quelle est la limite de la suite u ? Donner de tête un rang à partir duquel :

$$0 < u_n < 5 * 10^{-5}$$

4 Raisonnements par récurrence

4.1 Exercice 1

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$, et $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n < 2$

4.2 Exercice 2

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$, et

$$u_{n+1} = \frac{1 + 2u_n}{2 + u_n}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n < 1$.

4.3 Exercice 3

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$, et

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{1 + u_n}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$u_n = \frac{2}{2u_n + 1}$$

5 Problèmes

5.1 Suites imbriquées

On définit les suite (u_n) et (v_n) par :

$$\begin{array}{rr} u_0 = 1 & v_0 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n + 2v_n}{3} & v_{n+1} = \dfrac{u_n + 4v_n}{5} \end{array}$$

1. Écrire un algorithme qui prend en entrée un entier naturel n non nul et donne en sortie les valeurs u_1, v_1, $\ldots$, u_n, v_n. Programmer cet algorithme sur la calculatrice. Quelle conjecture est on amené à formuler sur le comportement de (u_n) et de (v_n) quand n tend vers $+\infty$?
2. On pose pour tout entier naturel n, $w_n = v_n - u_n$. Démontrer que la suite (w_n) est géométrique. Préciser la limite de (w_n) et exprimer w_n en fonction de l'entier naturel n.
3. On pose pour tout entier naturel n, $t_n = 3u_n + 10v_n$. Démontrer que la suite t_n est constante.
4. Exprimer u_n et v_n en fonction de l'entier naturel n, puis préciser la limite de chacune des suites (u_n) et (v_n).

5.2 La série harmonique

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

1. Quel est le sens de variation de la suite (u_n) ?
2. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

   $$u_{2n} - u_n \leq \frac{1}{2}$$

   En déduire que la suite (u_n) est divergente.
3. Quelle est la limite de la suite (u_n) ?
4. Écrire un programme qui détermine le plus petit entier naturel n tel que $u_n \geq 10$.

5.3 Bibliothèque municipale

La bibliothèque municipale étant devenue trop petite, une commune a décidé d'ouvrir une médiathèque qui pourra contenir 100000 ouvrages au total. Pour l'ouverture prévue le 1er janvier 2013, la médiathèque dispose du stock de 35000 ouvrages de l'ancienne bibliothèque augmenté de 7000 ouvrages supplémentaires neufs offerts par la commune.

Chaque année, la bibliothécaire est chargée de supprimer 5% des ouvrages, trop vieux ou abîmés, et d'acheter 6000 ouvrages neufs. On appelle u_n le nombre, en milliers, d'ouvrages disponibles le 1er janvier de l'année $(2013 + n)$ On donne $u_0 = 42$.

1. Justifier que, pour tout entier naturel n, on a :

   $$u_{n+1} = u_n * (0.95) + 6$$

2. On propose ci-dessus un algorithme en langage naturel. Expliquer ce que permet de calculer cet algorithme :

```
Variables :
  U, N
Initialisation :
  Mettre 42 dans U
  Mettre 0 dans N
Traitement :
  Tant que U < 100
    U prend la valeur
    U * 0,95 + 6
```

```
    N prend la valeur N + 1
  Fin du Tant que
Sortie
Afficher N.
```

3. À l'aide de sa calculatrice, déterminer le résultat obtenu grâce à cet algorithme.

La commune doit finalement revoir ses dépenses à la baisse, elle ne pourra financer que 4000 nouveaux ouvrages par an au lieu des 6000 prévus.

On appelle v_n le nombre, en milliers, d'ouvrages disponibles le 1er janvier de l'année $(2013 + n)$.

1. Identifier et écrire la ligne qu'il faut modifier dans l'algorithme pour prendre en compte ce changement.
2. On admet que $v_{n+1} = v_n * 0.95 + 4$ avec $v_0 = 42$. On considère la suite (w_n) définie, pour tout entier n, par $w_n = v_n - 80$. Montrer que (w_n) est une suite géométrique de raison $q = 0.95$, et préciser son premier terme w_0.
3. On admet que, pour tout entier naturel n, $w_n = -38 * (0.95)^n$
   — Déterminer la limite W de (w_n). On en déduit que la limite de (v_n) est égale à $80 + W$.
   — Interpréter ce résultat.