Intégration de fonctions réelles

DELHOMME Fabien

1 Motivation

Ce cour présente le dernier outil de l'arsenal du mathématicien, et il s'agit, avec la dérivée, d'un des outils sans doute les plus puissants : l'intégration. Là encore, ce procédé est utilisé *dans quasiment toutes les sciences* comme la physique, la chimie, mais aussi l'économie, l'ingénieurie et bien bien d'autres encore.

Un mot sur le concept d'intégration en mathématiques. Vous apprendrez ici ce qu'on appelle l'intégration de Riemann. Pour une multitude de raisons, cette manière d'intégrer n'est pas très efficace (mais cela va être suffisamment puissant pour nous !). C'est pourquoi en troisième année de licence vous serez sensibiliser (si vous suivez un cursus universitaire) une autre intégration, plus générale et abstraite, l'intégration de Lesbegue. Pour ceux d'entre vous qui continue à faire des maths, sachez que le *principe* est presque le même, donc concentrez vous sur la démarche de la définition de l'intégrale, votre apprentissage n'en sera que facilité.

Tout commence par une question assez simpliste au premier abord : comment calculer l'aire sous la courbe d'une fonction positive ?

C'est-à-dire, regardez la figure **??**, comment calculer l'aire nommée I pour une fonction f qui est définie entre a et b deux nombres réels ?

Nous verrons que cette question a des liens très profond avec la notion de dérivation, et qu'elle permet aussi (entre autre) d'approximer des fonctions comme les fonctions trigonométriques, exponentielle, ou logarithmique.

Enfin, beaucoup (si ce n'est tous) d'énoncé au bac portent sur ces fameuses *intégrales*.

2 Définition

2.1 Contexte

On souhaite donc définir l'aire sous la courbe d'une fonction. Pour plus de simplicité, nous allons supposer que la fonction est *positive* et *continue* sur un intervalle $[a, b]$ où $a, b \in \mathbb{R}$. Nous verrons comment étendre ce cas à d'autres fonctions (par exemple des fonctions négatives).

Le problème, c'est qu'il n'existe pas vraiment de formule toute faite pour donner exactement l'aire sous la courbe d'une fonction. La preuve, si vous regarder la figure **??**, vous pouvez vous convaincre qu'il est très difficile, si on imagine une fonction qui varie beaucoup, de définir la notion d'aire sous la courbe.

C'est pourquoi, l'idée de ce cours est de vous montrer une démarche fondamentale en mathématiques, qui est :

— En premier, définir la notion que l'on souhaite sur une classe de fonction restreinte, où l'on peut définir facilement cette fonction
— Deuxièmement, étendre cette définition à toutes les autres fonctions que l'on peut *approximer* au moyen de la définition suivante.

2.2 Première étape : calculer l'aire sous la courbe de fonctions constantes

Pour la première étape, considérons l'ensemble des fonctions constantes définie sur un intervalle $[a, b]$, avec a et b des nombres réels. Il est très facile de calculer l'aire sous la courbe de telle fonction.

Vous pouvez vous convaincre que c'est exactement l'aire d'un *rectangle*, et il suffit de multiplier la largeur par la longueur pour obtenir l'aire sous la courbe. Notons $I(f)$ l'aire sous la courbe d'une fonction f [1]

On aboutit donc à la formule suivante :

$$I(f) = f(a)(b-a) = f(b)(b-a)$$

. La fonction f est constante sur $[a, b]$, donc $f(a) = f(b)$.

2.3 Deuxième étape : approximer toutes les fonctions positives par des fonctions constantes

Décrivons pourquoi une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$ peut être approximée par plusieurs fonctions constantes.

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$, positive. On va supposer de plus que f est croissante. Alors, on peut *découper* l'intervalle $[a, b]$ en plusieurs sous intervalle. Vous trouverez dans les figures suivantes **??**, des schémas avec un découpage en deux, trois et dix parties.

Ensuite, sur chaque sous intervalle, on approxime l'expression de f par sa valeur au début du sous intervalle. Certes, on fait une erreur, mais on peut dire que cette erreur n'est pas trop grande si on prend des sous intervalles très petits, puisque pour x compris entre a et $a + h$ (avec h un nombre strictement positif mais petit), alors $f(x)$ est proche de $f(a)$. Si vous réfléchissez, vous trouverez que c'est exactement l'idée de la définition d'une fonction continue.

Ainsi, on peut approximer l'aire sous la courbe de f par la somme des rectangles qui sont en dessous de la courbe f. L'idée est donc d'obtenir une équation du style :

$$I(f) \approx \sum_{k=0}^{n} \text{aire du rectangle de l'intervalle } k$$
$$I(f) \approx \sum_{k=0}^{n} \text{valeur de f au début du sous intervalle } k * \text{taille du sous intervalle}$$

Avec n le nombre de sous intervalles qui découpent notre intervalle $[a, b]$.

1. Spoiler alert, plus tard dans le cours, nous noterons $\int_a^b f$ l'aire sous la courbe de f entre a et b.

Maintenant, précisons une manière de découper notre intervalle. On souhaite donc découper en n morceaux notre intervalle $[a, b]$. Cela nous donne des morceaux d'intervalle de taille $\frac{b-a}{n}$. Ensuite, il nous faut un moyen de sauter de début de sous intervalle à début de sous intervalle suivant.

Pour cela, imaginons que nous sommes au 4eme sous intervalle en partant de la gauche. Cela veut dire que nous sommes séparée de 4 sous intervalles du point de départ, a. Donc, nous sommes au point $a + 4 * \frac{b-a}{n}$. Finalement, le k-ième intervalle I_k peut donc se définir comme :

$$I_k = [a + k\frac{b-a}{n}, a + (k+1)\frac{b-a}{n}]$$

Exercice Vérifiez que b appartient bien à l'intervalle I_n. Vérifiez que chaque intervalle est de longueur $\frac{1}{n}$ (Indication, pour trouver la longueur d'un intervalle $[c, d]$, il suffit de calculer $d - c$).

Ensuite, sur chaque sous intervalle I_k, nous approximons $f(x)$ par le nombre $f(a + k\frac{b-a}{n})$.

Ainsi, on aboutit à l'expression suivante :

$$I(f) \approx \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) * \frac{1}{n}$$
$$I(f) \approx \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)$$

En effet, le terme $\frac{1}{n}$ est donc présent dans chaque terme de la somme, et ne change pas de terme en terme. La deuxième ligne est donc une simple factorisation par ce terme.

Il s'agit donc de montrer que $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)$ converge vers quelque chose, et nous noterons ensuite :

$$\boxed{\int_a^b f = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)}$$

2.4 Troisième étape : vérification de la convergence

Pour montrer que cette convergence a bien lieu, il faut être un peu plus fin. On va d'une part surestimer et d'autre part sous-estimer l'aire d'une fonction sous la courbe. En effet, si on regarde bien ce que l'on a fait, avec une fonction croissante, si on calcule la somme décrite plus haut, pour un n très grand par exemple, nous *sous-estimons* la véritable valeur de l'aire de la courbe. En effet, f est croissante, donc, pour tout k compris entre 0 et $n - 1$ $x \in \left[a + k\frac{b-a}{n}, a + (k+1)\frac{b-a}{n}\right]$:

$$f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) \leq f(x) \leq f\left(a + (k+1)\frac{b-a}{n}\right)$$

Alors, nous allons encadrer la véritable valeur de l'intégrale de f par :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) \leq \int_a^b f \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) \tag{1}$$

D'où finalement :

$$0 \leq \int_a^b f - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) \leq \frac{f(a)-f(b)}{n} \tag{2}$$

Donc, par le théorème des gendarmes, le membre de droite tend vers 0 quand n tend vers l'infini, donc :

$$\boxed{\int_a^b f = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)}$$

3 Lien avec la dérivée

4 Propriété de l'intégrale

5 Applications de l'intégration

6 Bonus : l'intégration par partie (hors programme)

Dans ce paragraphe, je vous présenterai une technique qui n'est plus enseignée au bac (mais qui l'était il n'y a pas si longtemps), et qui est très puissante (on pourrait presque dire que des domaines entiers des mathématiques sont construits autour de cette technique).

Tout commence avec la simple formule de la dérivée d'un produit de fonction :

$$(uv)' = u'v + v'u$$

Si on intégre entre a et b, on obtient

$$\int_a^b (uv)' = \int_a^b u'v + \int_a^b v'u$$

Finalement :

$$\boxed{\int_a^b u'v = [uv]_{x=a}^{x=b} - \int_a^b v'u}$$