La méthode de Newton

Delhomme Fabien

1 Présentation de la méthode de Newton

Ce chapitre est consacré à une notion au programme, qui est à la croisée des chemins entre :

- L'algorithmie
- La dérivation (on ne s'étonnera pas que le nom de Newton soit associé à cette méthode)
- Les suites.

1.1 Contexte

Dans ce paragraphe, il s'agit donc de déterminer numériquement la solution de l'équation :

$$f(x) = 0$$

Pour $x \in I$, où I est un intervalle de $\mathbb{R}$. On imagine en effet que la fonction f ne s'annule qu'en un seul x de I.

1.2 La dichotomie

Nous connaissons déjà un algorithme pour résoudre ce problème. En effet, la dichotomie marche très bien, et s'approche au fur et à mesure de la solution.

Le problème est que cette convergence s'effectue *lentement* (nous y reviendrons plus tard). Nous avons vu par exemple que pour approcher la racine carrée de 2, il fallait environ 20 itérations pour avoir une précision de 2 à 3 chiffres après la virgule.

Pour récapituler, la dichotomie ne demande seulement que la fonction f soit continue mais en contrepartie cet algorithme converge lentement.

1.3 Méthode de Newton

1.3.1 Explication de la méthode

Ici, on va donc demander plus fort pour notre fonction. On va supposer que f est continue, dérivable, et de dérivée continue. De plus, on va demander que f' ne soit jamais nulle. Ce ne sont **pas** des conditions suffisantes pour que la méthode marche à coup sûr, mais au moins les formules que nous écrirons seront correctes.

L'idée, c'est de se rapprocher du moment ou la courbe vaut zéro, en considérant la tangente de la fonction au lieu de la courbe elle-même.

On part d'un point x_0, pas très loin de la racine de f, et pour s'approcher de notre zéro, on va suivre la tangente de la courbe de f au point x_0 (regarder la figure 1). Lorsque cette tangente passe par 0, alors on a trouvé notre deuxième point de la suite, x_1. Et on peut alors recommencer !

On espère ainsi que l'on s'approche de notre zéro de f. Il peut arriver que cela ne soit pas le cas, mais on va imaginer que ces cas n'existent pas.

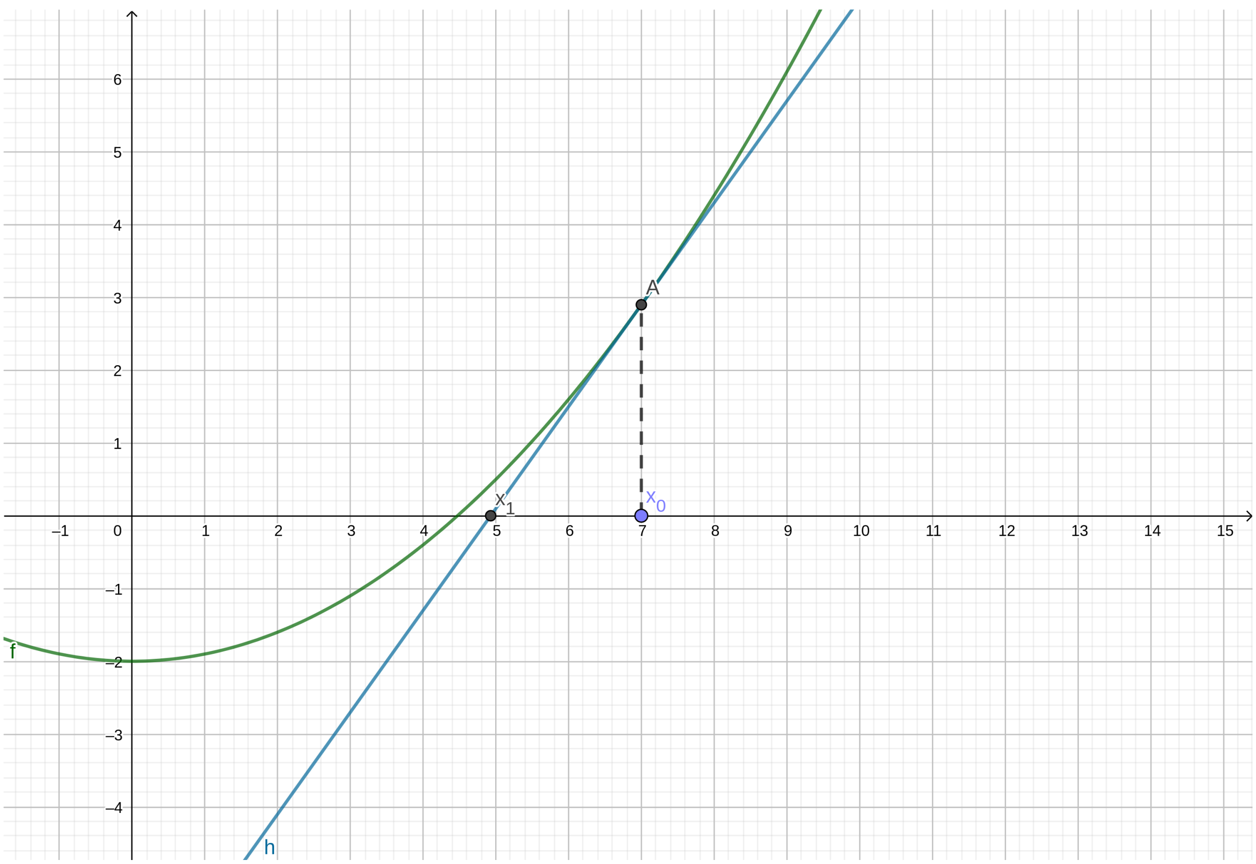

Figure 1 – La méthode de Newton pour une fonction f. On voit que le point x_1 est plus proche du zéro de f que le point x_0

1.3.2 Mise en équation

On cherche donc le moment ou la tangente au point x_0 s'annule. Mais quelle est l'équation de la tangente de f au point x_0 ? On se rappelle son cours, et on a :

$$T_{x_0,f}(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

Question Justifier brièvement pourquoi cette formule est bonne (se souvenir des caractéristiques d'une tangente à la courbe de f au point x_0) ?

Donc, le moment x_1 où s'annule la fonction $T_{x_0,f}$ respecte donc l'équation $T_{x_0,f}(x_1) = 0$. C'est à dire :

$$\begin{aligned} f'(x_0)(x_1 - x_0) + f(x_0) &= 0 \\ x_1 - x_0 &= \frac{-f(x_0)}{f'(x_0)} \\ x_1 &= x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \end{aligned}$$

1.4 À faire en devoir maison

En se basant sur les calculs menés précédemment :

- Quelle est la formule qui nous permet de trouver x_2 *sachant* x_1 ?
- Quelle est la formule qui nous permet de trouver x_{n+1} *sachant* x_n, pour $n \in \mathbb{N}$? (Cette formule ne se prouve *pas* par récurrence ! Il faut juste faire comme la question d'avant).
- Pourquoi nous demandons à la fonction f d'avoir une dérivée f' jamais nulle ? Que se passerait-il géométriquement dans ce cas ?
- Prenez une fonction f de votre choix (ni affine, ni linéaire), qui admet un point $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $f(\alpha) = 0$, puis tracer (sur Geogebra) les premiers points obtenus par la méthode de Newton, avec comme terme initial x_0 un point qui ne soit pas trop loin de α.

2 Étude de l'exemple pour approximer $\sqrt{2}$

On reprend notre fonction qui s'annule en $\sqrt{2}$, la brave fonction [1] :

$$f : x \mapsto x^2 - 2$$

1. notez que nous avions une infinité de choix pour la fonction f. Mais autant prendre la plus simple.

Appliquons notre formule donnée plus haut. On a $f'(x) = 2x$, donc :

$$u_{n+1} = u_n - \frac{u_n^2 - 2}{2u_n}$$

Finalement, on trouve :

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{1}{u_n}$$

2.1 À faire en devoirs maison

Premiers calculs

- Les calculs ne sont pas très détaillés pour trouver u_{n+1} en fonction de u_n. Donner les lignes de calculs intermédiaires.
- Que devient la formule pour trouver la racine carrée de 3 ? (Indice, quelle fonction dois-je appliquer ? Cette fonction est telle que $f(\sqrt{3}) = 0$).
- Puis-je appliquer cette formule en commençant par $u_0 = 0$?

Analyse de cette suite

On regarde donc la suite :

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{1}{u_n}, \quad u_0 = 4$$

- Calculer à la main les termes u_1, u_2 et u_3.
- Tracer les premiers termes de cette suite avec *Geogebra*.
- À votre avis (pour cette question, et cette question seulement, pas besoin de justification), la suite est :
  - Croissante ? Décroissante ? (quelle est son sens de variation ?)
  - Positive, négative ?
  - Majorée ? Minorée ? Bornée ? (Pour chaque question, donner un majorant ou un minorant s'ils existent)
  - Convergente ? Qu'elle semble être sa limite ? (Justifier à l'aide du point fixe de la fonction $x \mapsto \frac{x}{2} + \frac{1}{x}$
- Prouver par récurrence (si besoin est) *toutes* les conjectures donner plus haut (qui peuvent surement être prouvées en un seul raisonnement par récurrence, mais vous faites comme vous voulez).

Algorithmie

- Programmer cette suite dans AlgoBox.
- Combien vaut u_3, u_4, u_7 ?
- Donner la valeur de $|u_7 - \sqrt{2}|$.

Reprenez l'algorithme de dichotomie utilisé pour approcher la racine de 2. On prend $a = 0$ et $b = 2$.

— Combien faut-il d'itérations pour l'algorithme de la dichotomie pour tomber sur la même précision que la méthode de Newton avec 7 itérations ? (C'est-à-dire, combien faut-il d'itérations pour que la méthode de la dichotomie ait une précision inférieure à $|u_7 - \sqrt{2}|$?) La réponse sera donnée sous forme d'algorithme qui retournera ce nombre d'itérations.

3 En pratique, quelles sont les limitations de la méthode de Newton ?

Dans un cadre très générale, il faut, pour que Newton marche bien, que les conditions suivantes soient remplies :

— Il faut avoir x_0 qui soit proche du zéro de f. Ce qui peut être embêtant, vu que parfois on a aucune idée du zéro de f.
— Il faut que la fonction soit suffisamment régulière (pas trop méchante) pour que cela fonctionne correctement
— Il faut pouvoir calculer la dérivée de la fonction.

En pratique, c'est parfois le dernier critère qui ne permet pas d'obtenir une méthode efficace, à cause du nombre de calculs trop élevés. Mais, pour résoudre une équation polynomiale, par exemple pour calculer les racines carrées, voire cubiques, la méthode de Newton converge exceptionnellement vite !

Elle est notamment utilisée pour calculer rapidement la distance qui sépare deux joueurs dans un jeu vidéo en trois dimensions (type *FPS*), mais elle a bien d'autres applications théoriques, ou pratiques que ce soit pour résoudre des équations, trouver le minimum d'une fonction, etc.

Ultime question : comment trouver la racine cubique de 2, c'est-à-dire le nombre qui élevé à la puissance 3 donne 2, notée $\sqrt[3]{2}$. Comment trouver une approximation du nombre d'or ? Donner une approximation pour ces deux nombres par la méthode de Newton, et par la méthode de la dichotomie qui soit juste pour les 4 premières décimales ! (Votre réponse sera écrite sous forme d'algorithme).