Les nombres complexes

Delhomme Fabien

1 Introduction

1.1 Motivation

Les complexes, un des chapitres les plus compliqués à introduire peut-être. Pour commencer, sachez que les complexes ont été d'abord appelés les *imaginaires*, car on pensait qu'ils n'étaient pas *réels*.

Or, rien de plus faux (on n'avait pas assez de recul à l'époque). Les complexes sont présents, et incontournables dans de nombreux domaines :

- Physique (électronique, mécanique)
- Ingénierie (conception de machine, étude de vibrations d'un véhicule etc)
- Mathématique (évidemment) : les complexes jouent un rôle plus que centrale !
- Informatique : nous verrons que les complexes servent à encoder les rotations, et donc par exemple de faire des rotations d'images
- Et tellement d'autres !!

Le grand paradoxe, c'est que pour découvrir les complexes, on passe nécessairement par une incompréhension totale, devant des « nombres » qui sortent de nulle part, etc. Mais nous verrons tranquillement pourquoi les complexes sont presque naturels (même s'il a fallu du temps avant de les découvrir).

1.2 Portes d'entrées

Comme souvent en mathématiques, il existe plusieurs portes d'entrée pour comprendre les complexes :

- Les polynômes
- La géométrie
- Les matrices

Nous verrons dans ce cours les deux premiers, peut-être que je parlerai en deux mots de la troisième porte d'entrée lors des cours de mathématique spécialisée.

Je vous propose donc d'entrer dans le monde des complexes par la grande porte : les polynômes !

2 Les nombres complexes : définition.

2.1 Soit i un nombre tel que...

Nous avons vu dans le chapitre sur les polynômes, que certain polynôme n'admettait pas de racine réelle. C'est-à-dire qu'il existe aucun nombre réel qui annule ce polynôme. Prenons un exemple et c'est un des exemples le plus simple que l'on peut imaginer :

$$P(x) = x^2 + 1$$

Et effectivement ce polynôme n'a pas de racine réelle puisque $x^2 \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, et ainsi $x^2 + 1 > 0$.

Mais imaginez un peu, (et vous comprenez peut-être pourquoi historiquement, les premiers mathématiciens qui ont osé, étaient un peu fébrile à ce moment là), que l'on *rajoute* une racine à ce polynôme. C'est-à-dire que, puisque P n'a pas de racine, on va lui en *ajouter* une !!
C'est-à-dire que l'on va *définir* i comme étant un nombre, tel que $i^2 = -1$ (et donc $P(i) = 0$). Attention, i n'est pas un nombre réel, vous l'aurez bien compris !

Nous avons donc définit, ou plutôt imaginé, un nombre i tel que :

$$\boxed{i^2 = -1}$$

Remarquons alors dès à présent que notre polynôme de départ $P(x) = x^2 + 1$, admet à présent deux racines (complexes donc). En effet, on a crée la première avec $x = i$ mais on remarque, par analogie avec la multiplication que l'on connait depuis la tendre enfance que :

$$(-i)^2 = (-1 * i)^2 = (-1)^2 * i^2 = 1 * (-1) = -1$$

On a donc une autre racine de P avec $x = -i$.

2.2 Opérations dans les complexes

2.2.1 Multiplier i par un réel

Nous allons maintenant présenter les opérations possibles que l'on peut faire avec ce nouveau nombre i.

Dans les calculs que l'on vient de faire, implicitement on a envie de considérer que i admet les mêmes calculs qu'un nombre normal. C'est-à-dire (et on vient de le faire) qu'on a envie de définir la multiplication de i par un réel quelconque $a \in \mathbb{R}$ par le nombre (complexe) $a * i$ noté souvent ai. Noter alors que $ai = ia$, comme d'habitude.

Par exemple, si on veut multiplier 3 par i, alors on écrit tout simplement $3i$. Maintenant une petite question :

Question 1 Donner les racines complexes du polynôme $x^2 + 3$ (Essayer de calculer $(3 * i)^2$, et donner l'autre racine par la même remarque que celle décrite au paragraphe ci-dessus).

2.2.2 Additionner avec i

On peut aussi définir une opération « plus » avec i et un réel. Par exemple, si on veut ajouter 4 à i, alors on écrira $4 + i$.

Allons un peu plus loin, que vaut :

$$z = 4 + i + 3 - 2i$$

Déjà, on peut commencer par voir que notre 4 et notre 3 sont des nombres réels, donc on sait les additionner :

$$z = 7 + i - 2i$$

Maintenant, si on veut être cohérent, on devrait pouvoir s'autoriser à factoriser par i :

$$z = 7 + (1 - 2)i$$

Ou, cela revient au même, on doit s'autoriser à compter le nombre de i et à faire l'addition. Ici on obtient finalement

$$z = 7 - i$$

Remarquez encore que l'on peut additionner un réel avec i et multiplier le tout par un nombre réel. Considérez l'expression complexe suivante :

$$z = (2 + 4i) * 7$$

On distribue comme dans les réels :

$$z = 14 + 28i$$

Et on obtient le résultat !

Question 2 Que vaut $(2 + 4i - 2 - 2i) * 4$?

2.2.3 Multiplions sans complexes !

Nous avons vu comment on pouvait multiplier un nombre i par un nombre réel. Maintenant, imaginons que nous ayons deux nombres $z_1 = 3 + 7i$ et $z_2 = -1 + 3i$. Est-ce qu'on peut définir $z_1 * z_2$? Essayons, et commençons par distribuer le produit, comme on sait le faire depuis le collège, puis utilisons les règles vues plus haut pour simplifier l'expression. On obtient alors successivement :

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (3 + 7i)(-1 + 3i) \\ &= -3 + 9i - 7i + (7i) * (3i) \\ &= -3 + 2i + (7 * 3) * (i * i) \\ &= -3 + 2i + 21 * (-1) \\ z_1 z_1 &= -24 + 2i \end{aligned}$$

Vous avez vu ce qui s'est passé ? Le produit des deux nombres (complexes) $7i$ et $3i$ a redonné un nombre réel, qui s'est additionné normalement avec le nombre -3 !

Essayez par vous même maintenant :

Question 3 Que vaut $(1 - 2i)(3 - 5i)$. Que vaut $(5 - 4i)(5 + 4i)$. Des remarques concernant ce dernier ?

Question 4 Est-ce que les identités remarquables vues (et connues ?) depuis le collège fonctionne avec des complexes ?

2.3 Définition du plan complexe

D'après ce que l'on vient de voir, l'addition et la multiplication de deux nombres complexes nous redonne toujours un nombre de la forme $a + ib$ avec a et b des nombres réels. On peut donc définir les complexes par :

$$\mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

Pour l'instant, tout cela peut paraître mystique, et c'est bien normal. Mais maintenant que nous avons découvert un nouveau nombre, autant découvrir de nouvelles propriétés qui le caractérise !

Par exemple, si on prend un autre polynôme qui n'a pas de racine réelle, est-ce que je peux, avec mon nouveau nombre i lui trouver des racines complexes ? La réponse et **OUI** (et c'est même une des propriétés les plus importantes des complexes).

Donnons un exemple. Si je prends le polynôme $Q(x) = x^2 + x + 1$ (essayez de votre côté avec un polynôme à discriminant strictement négatif). Alors, je peux calculer Δ :

$$\Delta = 1^2 - 4 * 1 * 1 = -3$$

./tex2pdf.-8416ad9b1353bbef/de929da3f8002addf01f36cda29a84b192cba507.png

FIGURE 1 – Le plan complexe, avec quelques points tracés dessus

Δ donc est strictement négatif. Il faudrait, pour trouver les racines de mon polynôme, pouvoir définir un nombre tel que son carré vaille Δ. Hum, essayons $\sqrt{3} * i$ (forcément, ce nombre ne peut pas être réel, car aucun nombre réel ne peut, une fois élevé au carré, être négatif !).

Qu'est-ce que cela nous donne ?

$$(\sqrt{3} * i)^2 = \sqrt{3}^2 * i^2 = 3 * (-1) = 3$$

Trouvé ! Donc je peux continuer les formules que nous avons vues en cours, pour obtenir deux nouvelles racines, complexes, de mon polynôme Q :

$$x_1 = \frac{1 + i * \sqrt{3}}{2}$$
$$x_2 = \frac{1 - i * \sqrt{3}}{2}$$

On peut même vérifier que $Q(x_1) = Q(x_2) = 0$! Nous avons donc [1] rajouté des racines à tous les polynômes !!!

2.4 À quoi ressemble $\mathbb{C}$?

Nous avons donc un nouvel ensemble, $\mathbb{C}$, mais à quoi ressemble-t-il ?

En fait, on peut représenter $\mathbb{C}$ comme un plan, comme un ensemble qui admet deux coordonnées :

- Une réelle
- Une appelée imaginaire

Par exemple, $3 + 5i$ a une partie réelle qui vaut 3, et une partie imaginaire qui vaut 5.

3 L'exponentielle complexe

Certaines fonctions définie sur les réels (donc pas toute, loin de là) garde un sens (voire même en admette un plus fort !) lorsqu'on les définit sur les complexes. C'est le cas de l'exponentielle.

3.1 Définition formelle de l'exponentielle pour les complexes (hors programme)

On peut utiliser la formule suivante, qui marche aussi dans les complexes, pour définir l'exponentielle :

$$\exp(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!}$$

Il y aurait beaucoup à dire sur cette formule, on y reviendra en temps voulu.

3.2 Définition au programme

En fait l'exponentielle d'un nombre complexe $z = a + ib \in \mathbb{C}$, où $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ est définie comme il suit :

$$\exp(z) = \exp(a + ib) = \exp(a) * \exp(ib)$$

1. cela reste à montrer tout de même !

On essai effectivement de conserver l'équation fonctionnelle de l'exponentielle, pour l'étendre au complexe. Mais comment est donc définie l'exponentielle d'un nombre imaginaire pur (c'est-à-dire qui admet une partie réelle nulle, comme le nombre $ib \in \mathbb{C}$). Et bien comme il suit :

$$\exp(ib) = \cos(b) + i\sin(b)$$

Cette formule s'appelle la *formule d'Euler* !

Il faut voir cette formule comme une rotation d'angle b. En effet, si j'ai un vecteur dans le plan, et que je veux lui appliquer une rotation d'angle b, je vais multiplier sa première coordonné par $\cos(b)$ et sa deuxième par $\sin(b)$ (ceci se comprend mieux avec un schéma).

3.3 Conséquence de la formule d'Euler

Il existe donc deux moyens de regarder un même nombre complexe. Soit avec ses coordonnées réelle $a \in \mathbb{R}$ et imaginaire $b \in \mathbb{R}$ pour obtenir $z = a + ib \in \mathbb{C}$. Mais deux autres nombres peuvent aussi repérer ce nombre complexe dans le plan. En effet, on peut trouver (voir la figure 2) r et θ tels que :

$$z = r * (\cos(\theta) + i\sin(\theta)) = re^{i\theta}$$

./tex2pdf.-8416ad9b1353bbef/b1b84afdeb0628e8781108a420181e25a6e607ed.png

FIGURE 2 – Exemple de complexe avec d'autres coordonnées dans le plan

Avec :

— r la « longueur » du nombre z. Ce nombre est appelé le *module* de z.
— θ l'angle entre la droite qui passe par z et l'axe des abscisses, appelé *argument*.

C'est en jouant sur ces deux écritures que l'on obtient beaucoup de résultat. Par exemple, on peut mieux comprendre la multiplication entre deux complexes.

3.3.1 La multiplication entre deux complexes

Supposons que l'on veuille regarder la multiplication du complexe $a \in \mathbb{C}$ par le nombre $z \in \mathbb{C}$. On note alors θ_a l'argument de a, et r_a le module de a. De même pour z. Alors, on remarque que :

$$\begin{aligned} z * a &= r_z * e^{i\theta_z} * r_a * e^{i\theta_a} \\ &= r_z r_a e^{i(\theta_z + \theta_a)} \quad \text{Grâce à la formule d'Euler !} \end{aligned}$$

Donc, multiplier par a par z a eu pour effet vis à vis de a de :

- *multiplier* son module par celui de z
- *ajouter* à son argument celui de z

Question Comment faire maintenant pour faire effectuer à a une rotation d'angle 90 degrés ? (Autrement dit, en radian, $\frac{\pi}{2}$ radians).