# La méthode de Newton

Delhomme Fabien

## 1 Présentation de la méthode de Newton

Ce chapitre est consacrée à une notion au programme, qui est à la croisée des chemins entre :

— L'algorithmie
— La dérivation (on ne s'étonnera pas que le nom de Newton soit associé à cette méthode)
— Les suites.

### 1.1 Contexte

Dans ce paragraphe, il s'agit donc de déterminer numériquement la solution de l'équation :

$$f(x) = 0$$

Pour $x \in I$, où $I$ est un intervalle. On imagine en effet que la fonction $f$ ne s'annule qu'en un seul $x$ de $I$.

### 1.2 La dichotomie

Nous connaissons déjà un algorithme pour résoudre ce problème. En effet, la dichotomie marche très bien, et s'approche au fur et à mesure de la solution.

Le problème c'est que cette convergence s'effectue lentement. Nous avons vu par exemple que pour approcher racine de 2, il fallait environ 20 itérations pour avoir une précision de 2 à 3 chiffres après la virgule.

Avec la dichotomie, on a seulement besoin que la fonction soit continue au voisinage de son zéro, mais par contre l'algorithme converge lentement.

Donc on demande pas beaucoup, mais par contre on a pas un algorithme très rapide.

## 1.3 Méthode de Newton

Ici, on va donc demander plus fort pour notre fonction. On va supposer que $f$ est continue, et dérivable, et de dérivée continue. De plus, on va demander que $f'$ ne soit jamais nulle. Ce ne sont **pas** des conditions suffisantes pour que la méthode marche à coup sûr, mais au moins les formules que nous écrirons seront correctes.

L'idée, c'est de se rapprocher du moment ou la courbe vaut zéro, en considérant la tangente au lieu de la courbe elle même.

On part d'un point $x_0$, pas très loin de la racine de $f$, et pour s'approcher de notre zéro, on va suivre la tangente de la courbe de $f$ au point $x_0$ (regarder la figure 1). Lorsque cette tangente passe par 0, alors on a trouvé notre deuxième point de la suite, $x_1$. Et on peut recommencer !

On espère ainsi que l'on s'approche de notre zéro de $f$. Il peut arriver que cela ne soit pas le cas, nous reviendrons sur les limitations de la méthode de Newton dans la partie suivante.

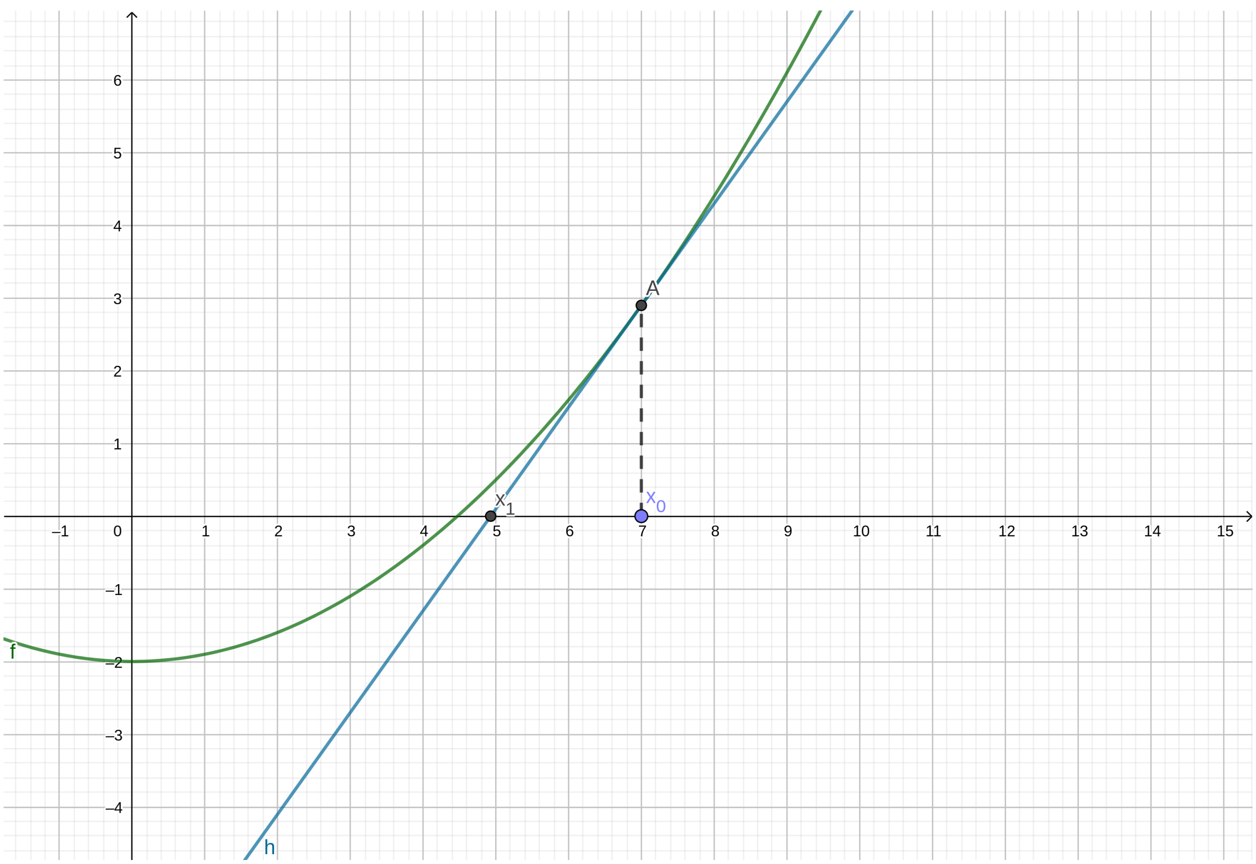


FIGURE 1 – La méthode de Newton pour une fonction $f$. On voit que le point $x_1$ est plus proche du zéro de $f$ que le point $x_0$

On cherche donc le moment ou la tangente au point $x_0$ s'annule. Mais quelle est l'équation de la tangente de $f$ au point $x_0$ ? On se rapelle de son cours, et on a :

$$T_{x_0,f}(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

Donc, le moment $x_1$ ou s'annule la fonction $T_{x_0,f}$ respecte donc l'équation $T_{x_0,f}(x_1) = 0$. C'est à dire :

$$f'(x_0)(x_1 - x_0) + f(x_0) = 0$$
$$x_1 - x_0 = \frac{-f(x_0)}{f'(x_0)}$$
$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

### 1.4 À faire en devoir maison

- Quelle est la formule qui nous permet de trouver $x_2$ *sachant* $x_1$ ?
- Quelle est la formule qui nous permet de trouver $x_{n+1}$ *sachant* $x_n$, pour $n \in \mathbb{N}$ ? (Cette formule ne se prouve *pas* par récurrence ! Il faut juste faire comme la question d'avant).
- Pourquoi nous demandons à la fonction $f$ d'avoir une dérivée $f'$ jamais nulle ?

## 2 Étude de l'exemple pour approximer $\sqrt{2}$

On reprend notre fonction qui s'annule en $\sqrt{2}$, la fonction [1]

$$f : x \mapsto x^2 - 2$$

Appliquons notre formule donnée plus haut. On a $f'(x) = 2 * x$, donc :

$$u_{n+1} = u_n - \frac{u_n^2 - 2}{2 * u_n}$$

Finalement, on trouve :

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{1}{u_n}$$

### 2.1 À faire en devoirs maison

**Premiers calculs**

- Les calculs ne sont pas très détaillés pour trouver $u_{n+1}$ en fonction de $u_n$. Donner les lignes de calculs intermédiares.
- Que devient la formule pour trouver la racine carrée de 3 ? (Indice, quelle fonction dois-je appliquer ? Cette fonction est telle que $f(\sqrt{3}) = 0$).

1. notez que nous avions une infinité de choix pour la fonction $f$. Mais autant prendre la plus simple.

— Puis-je appliquer cette formule en commençant par $u_0 = 0$ ?

**Analyse de cette suite**

On regarde donc la suite :

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{1}{u_n}, \quad u_0 = 4$$

— Calculer à la main les termes $u_1, u_2$ et $u_3$.
— Tracer les premiers termes de la suite avec Geogebra.
— À votre avis (dans cette question, pas besoin de justifier), la suite est :
  — Croissante ? Décroissante ? (quelle est son sens de variation ?)
  — Positive, négative ?
  — Majorée ? Minorée ? Bornée ? (Pour chaque question, donner un majorant ou un minorant s'ils existent)
  — Convergente ? Qu'elle semble être sa limite ? (Justifier à l'aide du point fixe de la fonction $x \mapsto \frac{x}{2} + \frac{1}{x}$
— Prouver par récurrence les conjectures donner plus haut.

**Algorithmie**

— Programmer cette suite dans AlgoBox.
— Combien vaut $u_3$, $u_4$, $u_7$ ?
— Donner la valeur de $|u_7 - \sqrt{2}|$.

Reprenez l'algorithme de dichotomie utilisé pour approcher la racine de 2. On prend $a = 0$ et $b = 2$.

— Combien faut-il d'itérations pour l'algorithme de la dichotomie pour tomber sur la meme précision que la méthode de Newton avec 7 itération ? (C'est-à-dire, combien d'itérations pour la méthode de la dichotomie pour avoir une précision inférieure à $|u_7 - \sqrt{2}|$ ?) La réponse sera donnée sous forme d'algorithme qui retournera ce nombre d'itérations.

# 3 En pratique, quelles sont les limitation de la méthode de Newton ?

Dans un cadre très générale, il faut, pour que Newton marche bien, que les conditions suivantes soient remplies :

— Il faut avoir $x_0$ qui soit proche du zéro de $f$. Ce qui peut être embêtant, vu que parfois on a aucune idée du zéro de $f$.
— Il faut que la fonction soit suffisamment régulière (pas trop méchante) pour que cela fonctionne correctement
— Il faut pouvoir calculer la dérivée de la fonction.

En pratique, c'est parfois le dernière critère qui ne permet pas d'obtenir une méthode efficace, à cause d'un nombre de calculs trop élevé. Mais, pour résoudre une équation polynomiale, par exemple pour calculer les racines carrées, voire cubique, la méthode de Newton converge exceptionnellement vite !

**Question**: comment trouver la racine cubique de 2, c'est à dire le nombre qui élevé à la puissance 3 donne 2, notée $\sqrt[3]{2}$. Donner une approximation par la méthode de Newton qui soit juste pour les 4 premières décimales ! (Votre réponse sera écrite sous forme d'algorithme).