Les nombres complexes

Delhomme Fabien

Table des matières

1 Introduction

1.1 Motivation

Les complexes, un des chapitres les plus compliqués à introduire peut-être. Pour commencer, sachez que les complexes ont été d'abord appelés les *imaginaires*, car on pensait qu'ils n'étaient pas *réels*.

Or, rien de plus faux (on n'avait pas assez de recul à l'époque). Les complexes sont présents, et incontournables dans de nombreux domaines :

- Physique (électronique, mécanique)
- Ingénierie (conception de machine, étude de vibrations d'un véhicule etc)
- Mathématique (évidemment) : les complexes jouent un rôle plus que centrale ! Et contrairement au nom, ils sont plus *simples* d'une certaine manière, que les réels par exemple.
- Informatique : nous verrons que les complexes servent à encoder les rotations, et donc par exemple de faire des rotations d'images
- Et tellement d'autres !!

Le grand paradoxe, c'est que pour découvrir les complexes, on passe nécessairement par un mode d'incompréhension total, devant des «nombres» qui sortent de nulle part, etc. Mais nous verrons tranquillement pourquoi les complexes sont presque naturels (même s'il a fallu du temps avant de les découvrir).

1.2 Porte d'entrée

Comme souvent en mathématiques, il existe plusieurs portes d'entrée pour comprendre les complexes :

- Les polynômes
- La géométrie
- Les matrices

Nous verrons dans ce cours les deux premiers, peut-être que je toucherai deux mots sur la troisième porte d'entrée lors des cours de mathématique spécialisée.

2 Définition

Bon, allez, c'est partit, on y va !

2.1 Soit i un nombre tel que

Nous avons vu dans le chapitre sur les polynômes, que certain polynôme n'admettait pas de racine. Par, exemple, et c'est un des exemples le plus simple que l'on peut imaginer :

$$P(x) = x^2 + 1$$

Je rappelle que ce polynôme n'a pas de racine réelle puisque $x^2 \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Donc $x^2 + 1 > 0$.

Mais imaginez un peu, (et vous comprenez peut-être pourquoi historiquement, les premiers mathématiciens qui ont osé, étaient un peu fébrile à ce moment là), que l'on *rajoute* une racine à ce polynôme. C'est-à-dire que, puisque P n'a pas de racine, on va lui en *ajouter* une !!

C'est-à-dire que l'on va *définir* i comme étant un nombre, tel que $i^2 = -1$ (et donc $P(i) = 0$)

Alors, évidemment, i n'est **pas** réel. Donc, il «habite» dans une autre ensemble. Mais quel ensemble ? L'ensemble des *complexes*.

Qu'est-ce qu'on peut faire avec i ? Le multiplier par un réel ? C'est-à-dire que je peux définir $3i = i + i + i$. L'ajouter à un réel (Soyons fou !), d'accord, alors cela donnera $2 + 2i$.

On peut donc définir les complexes par :

$$\mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

Pour l'instant, tout cela peut paraître mystique, et c'est bien normal. Mais maintenant que nous avons découvert un nouveau nombre, autant découvrir de nouvelles propriétés qui le caractérise !

Par exemple, si on prend un autre polynôme qui n'a pas de racine réelle, est-ce que je peux, avec mon nouveau nombre i lui trouver des racines complexes ? La réponse et **OUI** (et c'est même une des propriétés les plus importantes des complexes).

Donnons un exemple. Si je prends le polynôme $Q(x) = x^2 + x + 1$ (essayez de votre côté avec un polynôme à discriminant strictement négatif). Alors, je peux calculer Δ :

$$\Delta = 1^2 - 4 * 1 * 1 = -3$$

Δ donc est strictement négatif. Il faudrait, pour trouver les racines de mon polynôme, pouvoir définir un nombre tel que son carré vaille Δ. Hum, essayons $\sqrt{3} * i$ (forcément, ce nombre ne peut pas être réel, car aucun nombre réel ne peut, une fois élevé au carré, être négatif !).

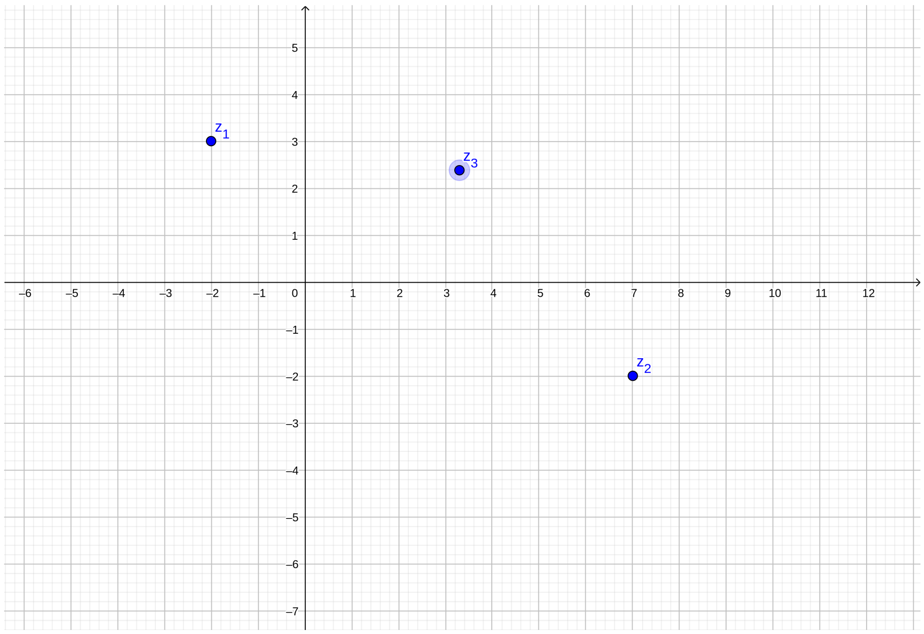

FIGURE 1 – Le plan complexe, avec quelques points tracés dessus

Qu'est-ce que cela nous donne ?

$$(\sqrt{3} * i)^2 = \sqrt{3}^2 * i^2 = 3 * (-1) = 3$$

Trouvé ! Donc je peux continuer les formules que nous avons vues en cours, pour obtenir deux nouvelles racines, complexes, de mon polynôme Q :

$$x_1 = \frac{1 + i * \sqrt{3}}{2}$$
$$x_2 = \frac{1 - i * \sqrt{3}}{2}$$

On peut même vérifier que $Q(x_1) = Q(x_2) = 0$! Nous avons donc [1] rajouté des racines à tous les polynômes !!!

2.2 À quoi ressemble $\mathbb{C}$

Nous avons donc un nouvel ensemble, $\mathbb{C}$, mais à quoi ressemble-t-il ?

1. cela reste à montrer tout de même !

En fait, on peut représenter $\mathbb{C}$ comme un plan, comme un ensemble qui admet deux coordonnées :

- Une réelle
- Une appelé imaginaire

Par exemple, $3 + 5i$ a une partie réelle qui vaut 3, et une partie imaginaire qui vaut 5.

3 L'exponentielle complexe

Certaines fonctions définie sur les réels (donc pas toute, loin de là) garde un sens (voire même en admette un plus fort !) lorsqu'on les définit sur les complexes. C'est le cas de l'exponentielle.

3.1 Définition formelle de l'exponentielle pour les complexes (hors programme)

On peut utiliser la formule suivante, qui marche aussi dans les complexes, pour définir l'exponentielle :

$$\exp(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!}$$

Il y aurait beaucoup à dire sur cette formule, on y reviendra en temps voulu.

3.2 Définition au programme

En fait l'exponentielle d'un nombre complexe $z = a + ib \in \mathbb{C}$, où $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ est définie comme il suit :

$$\exp(z) = \exp(a + ib) = \exp(a) * \exp(ib)$$

On essai effectivement de conserver l'équation fonctionnelle de l'exponentielle, pour l'étendre au complexe. Mais comment est donc définie l'exponentielle d'un nombre imaginaire pur (c'est-à-dire qui admet une partie réelle nulle, comme le nombre $ib \in \mathbb{C}$). Et bien comme il suit :

$$\exp(ib) = \cos(b) + i \sin(b)$$

Cette formule s'appelle la *formule d'Euler* !

Il faut voir cette formule comme une rotation d'angle b. En effet, si j'ai un vecteur dans le plan, et que je veux lui appliquer une rotation d'angle b, je vais multiplier sa première coordonné par $\cos(b)$ et sa deuxième par $\sin(b)$ (ceci se comprend mieux avec un schéma).

3.3 Conséquence de la formule d'Euler

Il existe donc deux moyens de regarder un même nombre complexe. Soit avec ses coordonnées réelle $a \in \mathbb{R}$ et imaginaire $b \in \mathbb{R}$ pour obtenir $z = a + ib \in \mathbb{C}$. Mais deux autres nombres peuvent aussi repérer ce nombre complexe dans le plan. En effet, on peut trouver (voir la figure 2) r et θ tels que :

$$z = r * (\cos(\theta) + i \sin(\theta)) = re^{i\theta}$$

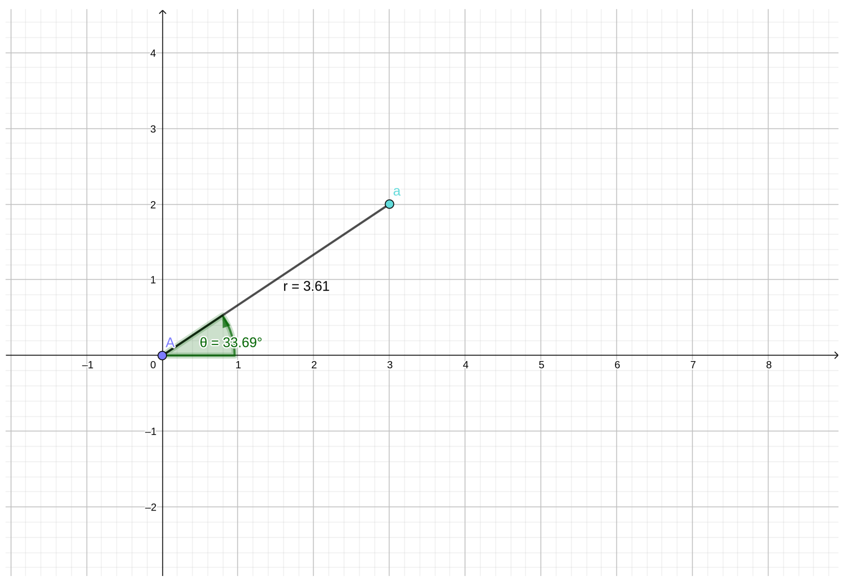

FIGURE 2 – Exemple de complexe avec d'autres coordonnées dans le plan

Avec :

— r la « longueur » du nombre z. Ce nombre est appelé le *module* de z.
— θ l'angle entre la droite qui passe par z et l'axe des abscisses, appelé *argument*.

C'est en jouant sur ces deux écritures que l'on obtient beaucoup de résultat. Par exemple, on peut mieux comprendre la multiplication entre deux complexes.

3.3.1 La multiplication entre deux complexes

Supposons que l'on veuille regarder la multiplication du complexe $a \in \mathbb{C}$ par le nombre $z \in \mathbb{C}$. On note alors θ_a l'argument de a, et r_a le module de a. De même pour z. Alors, on remarque que :

$$\begin{aligned} z * a &= r_z * e^{i\theta_z} * r_a * e^{i\theta_a} \\ &= r_z r_a e^{i(\theta_z + \theta_a)} \quad \text{Grâce à la formule d'Euler !} \end{aligned}$$

Donc, multiplier par a par z a eu pour effet vis à vis de a de :

— *multiplier* son module par celui de z
— *ajouter* à son argument celui de z

Question Comment faire maintenant pour faire effectuer à a une rotation d'angle 90 degrés ? (Autrement dit, en radian, $\frac{\pi}{2}$ radians).