Les nombres complexes

Delhomme Fabien

Table des matières

1 Introduction

1.1 Motivation

Les complexes, un des chapitres les plus compliqués à introduire peut-être. Pour commencer, sachez que les complexes ont été d'abord appelés les *imaginaires*, car on pensait qu'ils n'étaient pas *réels*.

Or, rien de plus faux (on n'avais pas assez de recul à l'époque). Les complexes sont présent, et incontournables dans de nombreux domaines :

— Physique (éléctronique, mécanique)
— Ingénieurie (conception de machine, étude de vibrations d'un véhicule etc)
— Mathématique (évidemment) : les complexes jouent un rôle plus que centrale ! Et contrairement au nom, ils sont plus *simples* d'une certaine manière, que les réels par exemple.
— Informatique : nous verrons que les complexes servent à encoder les rotations, et donc par exemple de faire des rotations d'images
— Et tellement d'autres !!

Le grand paradoxe, c'est que pour découvrir les complexes, on passe nécessairement par un mode d'incompréhension total, devant des «nombres» qui sortent de nul part, etc. Mais nous verrons tranquillement pourquoi les complexes sont presques naturels (même s'il a fallu du temps avant de les découvrir).

1.2 Porte d'entrée

Comme souvent en mathématiques, il existe plusieurs porte d'entrée pour comprendre les complexes :

— Les polynômes
— La géométrie
— Les matrices

Nous verrons dans ce cours les deux premiers, peut-être que je toucherai deux mots sur la troisième porte d'entrée lors des cours de mathématique spécialisée.

2 Définition

Bon, allez, c'est partit, on y va !

2.1 Soit i un nombre tel que

Nous avons vu dans le chapitre sur les polynômes, que certain polynôme n'admettait pas de racine. Par, exemple, et c'est un des exemples le plus simple que l'on peut imaginer :

$$P(x) = x^2 + 1$$

Je rappelle que ce polynôme n'a pas de racine réelle puisque $x^2 \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Donc $x^2 + 1 > 0$.

Mais imaginez un peu, (et vous comprenez peut être pourquoi historiquement, les premiers mathématiciens qui ont osé, étaient un peu fébrile à ce moment là), que l'on *rajoute* une racine à ce polynôme. C'est-à-dire que, puisque P n'a pas de racine, on va lui en *ajouter* une !!

C'est-à-dire que l'on va *définir* i comme étant un nombre, tel que $i^2 = -1$ (et donc $P(i) = 0$)

Alors, évidemment, i n'est **pas** réel. Donc, il «habite» dans une autre ensemble. Mais quel ensemble ? L'ensemble des *complexes*.

Qu'est-ce qu'on peut faire avec i ? Le multiplier par un réel ? C'est à dire que je peux définir $3i = i + i + i$. L'ajouter à un réel (Soyons fou !), d'accord, alors cela donnera $2 + 2i$.

On peut donc définir les complexes par :

$$\mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

Pour l'instant, tout cela peut paraître mystique, et c'est bien normal. Mais maintenant que nous avons découvert un nouveau nombre, autant découvrir de nouvelles propriétés qui le caractérise !

Par exemple, si on prend un autre polynôme qui n'a pas de racine réelle, est-ce que je peux, avec mon nouveau nombre i lui trouver des racines complexes ? La réponse et **OUI** (et c'est même une des propriétés les plus importantes des complexes).

Donnons un exemple. Si je prend le polynôme $Q(x) = x^2 + x + 1$ (essayez de votre coté avec un polynôme à discriminant strictement négatif). Alors, je peux calculer Δ :

$$\Delta = 1^2 - 4 * 1 * 1 = -3$$

Ok, Δ est strictement négatif. Il faudrait, pour trouver les racines de mon polynôme, pouvoir définir un nombre tel que son carré vaille Δ. Hum, essayons $\sqrt{3} * i$ (forcément, ce nombre ne peut pas être réel, car aucun nombre réel ne peut, une fois élevé au carré, être négatif !).

Qu'est -ce que cela nous donne ?

$$(\sqrt{3} * i)^2 = \sqrt{3}^2 * i^2 = 3 * (-1) = 3$$

Trouvé ! Donc je peux continuer les formules que nous avons vues en cours, pour obtenir deux nouvelles racines, complexes, de mon polynôme Q :

$$x_1 = \frac{1 + i * \sqrt{3}}{2}$$
$$x_2 = \frac{1 - i * \sqrt{3}}{2}$$

On peut même vérifier que $Q(x_1) = Q(x_2) = 0$! Nous avons donc rajouté des racines à tous les polynômes !!!