

# Exercice sur les fonctions

Delhomme Fabien

3 septembre 2017

## Table des matières

<b>1 Fonctions linéaires et affines</b>	<b>2</b>
1.1 Représentation de fonctions, échauffement . . . . .	2
1.2 Entraînement . . . . .	2
<b>2 Fonction carré</b>	<b>3</b>
2.1 Factorisations/développements . . . . .	3
2.1.1 Forme canonique . . . . .	3
2.1.2 Développements . . . . .	3
2.1.3 Résoudre des équations simples . . . . .	4
<b>3 Fonction classiques</b>	<b>4</b>
<b>4 Polynômes</b>	<b>4</b>
4.1 Échauffements . . . . .	4
4.2 Entraînement . . . . .	5
4.2.1 Résolution d'équation du 2nd degré . . . . .	5
4.2.2 Factorisation 2nd degré . . . . .	5
4.2.3 Factorisation 3eme degré . . . . .	5
4.2.4 Signe de polynômes . . . . .	6
4.3 Petit problème . . . . .	6
4.4 Relations coefficients racines . . . . .	6
<b>5 Calcul de limites, domaine de définition.</b>	<b>6</b>
5.1 Pour les polynômes ? . . . . .	6
5.2 Limite étrange . . . . .	7

# 1 Fonctions linéaires et affines

## 1.1 Représentation de fonctions, échauffement

Représenter les fonctions suivante :

- $f(x) = 3x + 2$
- $g(x) = -4x + 5$
- $h(x) = -x - 3$

Quels sont les points d'intersections entre les droites de la fonction  $f$ ,  $g$ , et  $h$  ?

Trouver deux fonctions affines qui ne se croisent pas. Que pouvez vous en conclure ? Prouver ce résultat

Soient deux points,  $A = (x_a, y_a)$  et  $B = (x_b, y_b)$ . Quelle est l'unique (pourquoi unique ?) droite qui passe par ces deux points ? (On cherche la fonction dont la courbe représentative est une droite qui passe par ces deux points.)

Dans quels cas dans la question précédente, la droite en question n'est pas une fonction ?

## 1.2 Entraînement

On donne  $A = -(-4x + 7)(-6x - 2) - 56x + 49 + 16x^2$

- Développer et réduire  $A$
- Factoriser  $A$
- Calculer  $A$  pour  $x = -10$
- Résoudre l'équation  $A = 0$

On donne  $A = (8x + 3)(x - 1) - (8x + 3)(5x - 3)$

- Développer et réduire  $A$
- Factoriser  $A$
- Calculer  $A$  pour  $x = -2$
- Résoudre l'équation  $A = 0$

On donne  $A = -(6x - 2)(-6x - 6) + (6x - 2)$

- Développer et réduire  $A$
- Factoriser  $A$
- Calculer  $A$  pour  $x = -1$
- Résoudre l'équation  $A = 0$

Résoudre l'équation :

$$\frac{-2x - 5}{6} - \frac{7x + 3}{3} = \frac{6x + 9}{8}$$

Résoudre l'équation :

$$\frac{x+5}{3} + \frac{x-8}{2} = \frac{-10x-4}{4}$$

Résoudre l'équation :

$$\frac{8x-1}{6} - \frac{x-7}{3} = \frac{-4x+7}{8}$$

Résoudre le système d'équations suivant :  $\begin{cases} 4x - 6y = 22 \\ 7x + 7y = 21 \end{cases}$

Résoudre le système d'équations suivant :  $\begin{cases} -10x + 6y = -130 \\ -6x + 2y = -62 \end{cases}$

Résoudre le système d'équations suivant :  $\begin{cases} -9x + 2y = -85 \\ -5x - 8y = -29 \end{cases}$

## 2 Fonction carré

### 2.1 Factorisations/développements

#### 2.1.1 Forme canonique

Soit  $f$  définie par  $f(x) = -x^2 + 7x - 12$ .

Vérifiez que la factorisation de cette fonction est  $(x-4)(-x-3)$

Vérifier que la forme canonique de  $f$  est :

$$f(x) = -(x - \frac{7}{2})^2 + \frac{1}{4}$$

Utilisez la forme la plus adaptée pour :

- Calculer  $f(0)$
- Calculer  $f(\frac{7}{2})$
- Résoudre l'équation  $f(x) = 0$
- Résoudre l'équation  $f(x) = \frac{1}{4}$

#### 2.1.2 Développements

Développer les expressions :

- $-3(x+1)^2 + 4$
- $-\frac{1}{2}(x-8)^2 - 2$

- $\sqrt{2}(x - \sqrt{6})^2 + 1$
- $(x - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}})^2$
- $(2 + \frac{1}{x})(1 + 2x)$

### 2.1.3 Résoudre des équations simples

Résoudre les équations, et inéquations suivantes :

- $x^2 - 7 = 0$
- $x^2 + 7 = 0$
- $x^2 + 2x + 1 = 0$
- $6x^2 + 4x + 2 = -3x^2 - 8x - 2$
- $x^2 - \frac{x}{2} + \frac{3}{2} = 3 * x^2 + x - \frac{3}{4}$

#### Petit problème

Soit un train et une voiture qui roulent tous les deux à une vitesse constante de respectivement 300 k/m et 133 k/m en ligne droite, de direction opposée (il se rejoignent donc), sur deux routes qui sont parallèles (on va éviter la collision). Sachant que la distance qui les sépare est de 1000 km, au moment  $t = 0$  heure, calculer au bout de combien de temps les deux véhiculent se croisent.

## 3 Fonction classiques

Représenter, à l'aide d'un grapheur ou de votre stylo et papier, la fonction inverse, la fonction carrée, la fonction  $x^2 - 3x + 1$ , la fonction racine carrée, et enfin la fonction  $\frac{x}{\sqrt{x}}$

Pour toutes ces fonctions, quelles sont les domaines de définition ? Les intervalles de croissance ? De décroissance ?

Établir le sens de variation, et un tableau de variation pour chacune de ces fonctions.

## 4 Polynômes

### 4.1 Échauffements

Trouver les racines (réelles) des polynômes suivants, et déterminer leur tableau de variation, et de signe:

- $A(x) = x^2 - 2x + 3$
- $B(x) = x^2 + 2x - 3$
- $C(x) = 3x^2 - \sqrt{5}x + 2$

- $D(x) = 2x^2 - 4x + \sqrt{2}$ <sup>1</sup>
- $E(x) = -4x^2 + 3x^2 - x + 3$
- $F(x) = x^2 - x - 1$ , pour une petite référence à Fibonacci (on y reviendra)

Tracer la courbe représentative des fonctions  $A$  et  $F$ .

## 4.2 Entraînement

### 4.2.1 Résolution d'équation du 2nd degré

Résoudre les équations suivantes :

- $t^2 + 4t + 3 = 0$
- $12y^2 - 16y + 5 = 0$
- $-t^2 + 8t - 1 = 0$

### 4.2.2 Factorisation 2nd degré

Factoriser les polynômes suivants

Factoriser  $P(y) = 648y^2 - 144y + 8$  à l'aide d'une identité remarquable.

- $Q(t) = t^2 - 4t + 4$
- $S(y) = 12y^2 + 8y + 1$
- $R(x) = -x^2 + 3x - 4$

Factoriser  $Q(y) = 32y^2 - 32y + 8$  à l'aide d'une identité remarquable.

- $Q(t) = t^2 + 7t - 30$
- $Q(z) = 7z^2 + 9z + 2$
- $S(x) = x^2 + 6x - 8$

Factoriser  $Q(y) = 8y^2 - 72$  à l'aide d'une identité remarquable.

- $P(t) = t^2 - 10t + 24$
- $Q(x) = 14x^2 + 5x - 24$
- $S(t) = -t^2 + 6t + 4$

### 4.2.3 Factorisation 3eme degré

Soit  $E = x^3 - 22x^2 + 161x - 392$ , et soit  $F = 6x^3 + 13x^2 + 9x + 2$

Vérifier que 7 est une racine de  $E$ . Factoriser  $E$ .

Vérifier si  $F$  possède une racine évidente. Factoriser  $F$ .

---

1. Discriminant nul ? Et bien, on avait pas vu l'identité remarquable ?

#### 4.2.4 Signe de polynômes

Étudier les signes des polynômes :

- $P = x^2 - 10x + 9$  sur  $I = [0 ; 5]$ .
- $P = x^2 - x - 6$  sur  $I = [-5 ; 5]$ .
- $P = -x^2 + x + 1$  sur  $I = \mathbb{R}$ .
- $P = x^2 + 6x + 5$  sur  $I = [0 ; 5]$ .
- $P = -6x^2 - 23x - 10$  sur  $I = [-5 ; 5]$ .
- $P = x^2 + 4x + 9$  sur  $I = \mathbb{R}$ .

#### 4.3 Petit problème

Une usine fabrique et vend des vélos à 87€ l'unité. Le coût de fabrication  $C(x)$  d'un vélo est fonction de la quantité  $x$  de vélos fabriqués. Ce coût s'exprime en euros par :

$$C(x) = 0.1x^2 + 10x + 1500$$

Pour  $x \in [10, 1000]$ . Soit la fonction  $f$  définie par  $f(x) = 87x - C(x)$

- Préciser ce que représente concrètement  $f(x)$
- En quelles valeurs a-t-on :  $f(x) = 0$  ? En donner une interprétation concrète.
- Résoudre  $f(x) \geq 2100$ . Interpréter le résultat.

#### 4.4 Relations coefficients racines<sup>2</sup>

Imaginons que l'on ait trouver les racines  $x_1$  et  $x_2$  d'un polynôme  $ax^2 + bx + c$ . On sait donc que :

$$a(x - x_1)(x - x_2) = ax^2 + bx + c$$

- Retrouver les relations entre les coefficients et les racines, en développant le membre de droite.

### 5 Calcul de limites, domaine de définition.

#### 5.1 Pour les polynômes ?

Quelles sont les limites possibles pour un polynôme de second degré<sup>3</sup> en plus et moins l'infini, en fonction du signe son coefficient dominant  $a$ .

---

2. c'est le vrai nom de ces formules, aussi appelés somme de Newton.

3. mais ça marche pour tous les degrés

## 5.2 Limite étrange

Tracer la fonction  $\frac{\sin(x)}{x}$  sur un grapheur. À priori, quel est le domaine de définition de cette fonction ? Que remarque t on sur le graphique en 0 ?