La transformée de GELFAND

Lien avec la physique, et théorie des algèbres de Banach

Fabien DELHOMME [1]

2 mai 2018

1. sous les précieux conseils de Vilmos KOMORNIK

Sommaire

Qu'est-ce qu'une algèbre de Banach ?

Définition

Une algèbre de Banach A est un espace vectoriel complexe normé complet, tel que :

$$
\begin{aligned}
x(yz) &= (xy)z \\
(x+y)z &= xz + yz \\
x(y+z) &= xy + yz \\
\alpha(xy) &= (\alpha x)y = x(\alpha y)
\end{aligned}
$$

Et munit d'une norme d'algèbre :

$$\forall x, y \in A \quad \|xy\| \leq \|x\|\|y\|$$

Exemples

Exemple

Quelques exemples d'algèbres de Banach :

- *L'espace des matrices complexes muni de la multiplication usuelle et d'une norme subordonnée.*
- *L'ensemble des fonctions* L^1 *munies de la convolution. On voit en particulier qu'on ne demande pas l'existence d'un élément neutre pour la loi multiplicative.*

Ajout d'une unité

On peut toujours ajouter une unité dans une algèbre de Banach. Soit A une telle Algèbre. On pose : $\hat{A} = \{(x, \alpha) \mid x \in A, \alpha \in \mathbb{C}\}$. On définit :

$$(x, \alpha)(y, \beta) = (xy + \alpha y + \beta x, \alpha\beta)$$

et

$$\|(x, \alpha)\| = \|x\| + |\alpha|$$

Finalement, on pose $e = (0, 1)$

Theorème

$\hat{A}$ est une algèbre de Banach munit d'un élément neutre, et isomorphe à A par l'application $x \to (x, 0)$.

Spectres, et premières propriétés

Définition

Le spectre d'un élément $x \in A$ est défini par :

$$\sigma(x) := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda e - x \textit{ n'est pas inversible}\}$$

On définit aussi $\rho(x) := \sup\{|\lambda|, \lambda \in \sigma(x)\}$
On a les premières propriétés :

Theorème

- *Le spectre est compact et non vide.*
- $\rho(x) = \lim_{n \longrightarrow \infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}} = \inf_{n \geq 1} \|x^n\|^{\frac{1}{n}}$

Donc en particulier $\rho(x) \leq \|x\|$.

Théorème de Gelfand-Mazur

Que peut-on dire d'une algèbre où tous les éléments non nulles sont inversibles ?

Theorème (Gelfand-Mazur)

Si A est une algèbre de Banach, telle que tous les éléments non nulles sont inversibles, alors A est isomorphe à $\mathbb{C}$. De plus, l'isomorphisme est une isométrie.

Les idéaux

Définition (Idéal)

Soit $J \subset A$ un sous espace vectoriel de A. J est un idéal de A si

$$\forall x, y \in A * J \quad x * y \in J$$

Si $J \neq A$ et $J \neq \{0\}$ alors J est un idéal propre de A. Les idéaux maximaux sont des idéaux propres qui ne sont contenus dans aucun autre idéal propre.

Merveilleux théorème

Voici l'outil fondamental de la théorie des Algèbres de Banach commutative.

Theorème (Caractérisation des inversibles)

Notons Δ l'ensemble des homomorphismes de A. Alors :

- *Tout idéal maximal est le noyau d'un homomorphismes de Δ, et vice versa.*

L'ensemble Δ gardera cette signification jusqu'à la fin du document.

Merveilleux théorème

Voici l'outil fondamental de la théorie des Algèbres de Banach commutative.

Theorème (Caractérisation des inversibles)

Notons Δ l'ensemble des homomorphismes de A. Alors :

- *Tout idéal maximal est le noyau d'un homomorphismes de Δ, et vice versa.*
- *$x \in A$ est inversible si et seulement si $h(x) \neq 0$ pour tout $h \in \Delta$*

L'ensemble Δ gardera cette signification jusqu'à la fin du document.

Merveilleux théorème

Voici l'outil fondamental de la théorie des Algèbres de Banach commutative.

Theorème (Caractérisation des inversibles)

Notons Δ l'ensemble des homomorphismes de A. Alors :

- *Tout idéal maximal est le noyau d'un homomorphismes de Δ, et vice versa.*
- *$x \in A$ est inversible si et seulement si $h(x) \neq 0$ pour tout $h \in \Delta$*
- *$x \in A$ est inversible si et seulement si x n'appartient à aucun idéal propre de A.*

L'ensemble Δ gardera cette signification jusqu'à la fin du document.

Merveilleux théorème

Voici l'outil fondamental de la théorie des Algèbres de Banach commutative.

Theorème (Caractérisation des inversibles)

Notons Δ l'ensemble des homomorphismes de A. Alors :

- *Tout idéal maximal est le noyau d'un homomorphismes de Δ, et vice versa.*
- *$x \in A$ est inversible si et seulement si $h(x) \neq 0$ pour tout $h \in \Delta$*
- *$x \in A$ est inversible si et seulement si x n'appartient à aucun idéal propre de A.*
- *$\lambda \in \sigma(x)$ si et seulement si $h(x) = \lambda$ pour un $h \in \Delta$*

L'ensemble Δ gardera cette signification jusqu'à la fin du document.

Lemme de Wiener - Énoncé

Theorème

Soit f *une fonction de* $\mathbb{R}^n$*, et soit* $(a_m)_{m\in\mathbb{Z}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ *telle que*

$$f(x) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} a_m e^{im*x} \quad , \quad \sum_{m\in\mathbb{Z}} |a_m| < \infty$$

Si f *ne s'annule jamais sur* $\mathbb{R}^n$*, alors il existe* $(b_m)_{m\in\mathbb{Z}}$ *telle que :*

$$\frac{1}{f(x)} = \sum_{m\in\mathbb{Z}} b_m e^{im*x} \quad , \quad \sum_{m\in\mathbb{Z}} |b_m| < \infty$$

Lemme de Wiener - Preuve

La transformée de Gelfand

On définit la transformée de Gelfand par :

Définition

$$\hat{x} : h \in \Delta \longrightarrow h(x) \in \mathbb{C}$$

Et on note $\hat{A} = \{\hat{x} \mid x \in A\}$

Theorème

Propriétés de la transformée de GELFAND

- *La transformée de* GELFAND *est un homomorphisme de A vers $\hat{A}$, de noyau le radical de A.*
- *La transformée de* GELFAND *est donc un isomorphisme si A est semi simple !*
- *On a aussi la comparaison :*

$$\|\hat{x}\|_\infty = \rho(x) \leq \|x\|$$

- *Et* $\rho(x) = 0 \iff x \in \mathrm{rad}(A)$

Avec :

Définition

$$\|\hat{x}\|_\infty = \sup_{h \in \Delta} |\hat{x}(h)|$$

Involution

Définition (Involution)

Une involution est une fonction $x \in A \longrightarrow x^* \in A$ qui a les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned}(x+y)^* &= x^* + y^* \\ (\lambda x)^* &= \overline{\lambda} * x^* \\ (x * y)^* &= y^* * x^* \\ (x^*)^* &= x\end{aligned}$$

Et l'algèbre A n'a pas besoin d'être commutative dans cette définition. On dit que $x \in A$ est hermitien si et seulement si $x^* = x$.

Les $\mathcal{C}^*$-algèbres

Définition (Les $\mathcal{C}^*$-algèbres)

Une $\mathcal{C}^*$-algèbre est une algèbre de Banach munie d'une involution telle que :

$$\|x^* * x\| = \|x\|^2 \quad \forall x \in A$$

Cela implique aussi que :

$$\|x^*\| = \|x\|$$

Et ainsi :

$$\|xx^*\| = \|x\|\|x^*\|$$

Théorème de GELFAND-NAIMARK

Theorème (Théorème de GELFAND-NAIMARK)

Si A est une $\mathcal{C}^*$-algèbre commutative, et en notant Δ un idéal maximum , alors la transformée de Gelfand est une isométrie de A vers $\mathcal{C}(\Delta)$ avec la propriété :

$$h(x^*) = \overline{h(x)}$$

En particulier : x est hermitien si et seulement si $\hat{x}$ est une fonction réelle.