La transformée de Gelfand

Lien avec la physique, et théorie des algèbres de Banach

Fabien Delhomme [1]

2 mai 2018

1. sous les précieux conseils de Vilmos Komornik

Sommaire

Qu'est-ce qu'une algèbre de Banach ?

Définition

Une algèbre de Banach A est un espace vectoriel complexe normé complet, tel que :

$$\begin{aligned} x(yz) &= (xy)z \\ (x+y)z &= xz + yz \\ x(y+z) &= xy + yz \\ \alpha(xy) &= (\alpha x)y = x(\alpha y) \end{aligned}$$

Et munit d'une norme d'algèbre :

$$\forall x, y \in A \quad \|xy\| \leq \|x\| \|y\|$$

Exemples

Exemple

Quelques exemples d'algèbres de Banach :

- *L'espace des matrices complexes muni de la multiplication usuelle et d'une norme subordonnée.*
- *L'ensemble des fonctions* L^1 *munies de la convolution. On voit en particulier qu'on ne demande pas l'existence d'un élément neutre pour la loi multiplicative.*

Ajout d'une unité

On peut toujours ajouter une unité dans une algèbre de Banach. Soit A une telle Algèbre. On pose : $\hat{A} = \{(x, \alpha) \mid x \in A, \alpha \in \mathbb{C}\}$. On définit :

$$(x, \alpha)(y, \beta) = (xy + \alpha y + \beta x, \alpha\beta)$$

et

$$\|(x, \alpha)\| = \|x\| + |\alpha|$$

Finalement, on pose $e = (0, 1)$

Theorème

$\hat{A}$ est une algèbre de Banach munit d'un élément neutre, et isomorphe à A par l'application $x \to (x, 0)$.

Spectres, et premières propriétés

Définition

Le spectre d'un élément $x \in A$ est défini par :

$$\sigma(x) := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda e - x \textit{ n'est pas inversible}\}$$

On définit aussi $\rho(x) := \sup\{|\lambda|, \lambda \in \sigma(x)\}$
On a les premières propriétés :

Theorème

- *Le spectre est compact et non vide.*
- $\rho(x) = \lim_{n \longrightarrow \infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}} = \inf_{n \geq 1} \|x^n\|^{\frac{1}{n}}$

Donc en particulier $\rho(x) \leq \|x\|$.

Que peut-on dire d'une algèbre où tous les éléments non nulles sont inversibles ?

Theorème (GELFAND-MAZUR)

Si A est une algèbre de Banach, telle que tous les éléments non nulles sont inversibles, alors A est isomorphe à $\mathbb{C}$. De plus, l'isomorphisme est une isométrie.

Les idéaux

Définition (Idéal)

Soit $J \subset A$ un sous espace vectoriel de A. J est un idéal de A si

$$\forall x, y \in A * J \quad x * y \in J$$

Si $J \neq A$ et $J \neq \{0\}$ alors J est un idéal propre de A. Les idéaux maximaux sont des idéaux propres qui ne sont contenus dans aucun autre idéal propre.

Merveilleux théorème

Voici l'outil fondamental de la théorie des Algèbres de Banach commutative.

Theorème (Caractérisation des inversibles)

Notons Δ l'ensemble des homomorphismes de A. Alors :

- *Tout idéal maximal est le noyau d'un homomorphismes de Δ, et vice versa.*

L'ensemble Δ gardera cette signification jusqu'à la fin du document.

Merveilleux théorème

Voici l'outil fondamental de la théorie des Algèbres de Banach commutative.

Theorème (Caractérisation des inversibles)

Notons Δ l'ensemble des homomorphismes de A. Alors :

- *Tout idéal maximal est le noyau d'un homomorphismes de Δ, et vice versa.*
- *$x \in A$ est inversible si et seulement si $h(x) \neq 0$ pour tout $h \in \Delta$*

L'ensemble Δ gardera cette signification jusqu'à la fin du document.

Merveilleux théorème

Voici l'outil fondamental de la théorie des Algèbres de Banach commutative.

Theorème (Caractérisation des inversibles)

Notons Δ l'ensemble des homomorphismes de A. Alors :

- *Tout idéal maximal est le noyau d'un homomorphismes de Δ, et vice versa.*
- *$x \in A$ est inversible si et seulement si $h(x) \neq 0$ pour tout $h \in \Delta$*
- *$x \in A$ est inversible si et seulement si x n'appartient à aucun idéal propre de A.*

L'ensemble Δ gardera cette signification jusqu'à la fin du document.

Voici l'outil fondamental de la théorie des Algèbres de Banach commutative.

Theorème (Caractérisation des inversibles)

Notons Δ l'ensemble des homomorphismes de A. Alors :

- *Tout idéal maximal est le noyau d'un homomorphismes de Δ, et vice versa.*
- *$x \in A$ est inversible si et seulement si $h(x) \neq 0$ pour tout $h \in \Delta$*
- *$x \in A$ est inversible si et seulement si x n'appartient à aucun idéal propre de A.*
- *$\lambda \in \sigma(x)$ si et seulement si $h(x) = \lambda$ pour un $h \in \Delta$*

L'ensemble Δ gardera cette signification jusqu'à la fin du document.

Lemme de Wiener - Énoncé

Theorème

Soit f une fonction de $\mathbb{R}^n$, et soit $(a_m)_{m\in\mathbb{Z}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ telle que

$$f(x) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} a_m e^{im*x} \quad , \quad \sum_{m\in\mathbb{Z}} |a_m| < \infty$$

Si f ne s'annule jamais sur $\mathbb{R}^n$, alors il existe $(b_m)_{m\in\mathbb{Z}}$ telle que :

$$\frac{1}{f(x)} = \sum_{m\in\mathbb{Z}} b_m e^{im*x} \quad , \quad \sum_{m\in\mathbb{Z}} |b_m| < \infty$$

Lemme de Wiener - Preuve

La transformée de Gelfand

On définit la transformée de Gelfand par :

Définition

$$\hat{x} : h \in \Delta \longrightarrow h(x) \in \mathbb{C}$$

Et on note $\hat{A} = \{\hat{x} \mid x \in A\}$

Theorème

Propriétés de la transformée de GELFAND

- *La transformée de* GELFAND *est un homomorphisme de A vers $\hat{A}$, de noyau le radical de A.*
- *La transformée de* GELFAND *est donc un isomorphisme si A est semi simple !*
- *On a aussi la comparaison :*

$$\|\hat{x}\|_\infty = \rho(x) \leq \|x\|$$

- *Et* $\rho(x) = 0 \iff x \in \mathrm{rad}(A)$

Avec :

Définition

$$\|\hat{x}\|_\infty = \sup_{h \in \Delta} |\hat{x}(h)|$$

Involution

Définition (Involution)

Une involution est une fonction $x \in A \longrightarrow x^* \in A$ qui a les propriétés suivantes :

$$(x+y)^* = x^* + y^*$$
$$(\lambda x)^* = \overline{\lambda} * x^*$$
$$(x*y)^* = y^* * x^*$$
$$(x^*)^* = x$$

Et l'algèbre A n'a pas besoin d'être commutative dans cette définition. On dit que $x \in A$ est hermitien si et seulement si $x^* = x$.

Les $\mathcal{C}^*$-algèbres

Définition (Les $\mathcal{C}^*$-algèbres)

Une $\mathcal{C}^*$-algèbre est une algèbre de Banach munie d'une involution telle que :

$$\|x^* * x\| = \|x\|^2 \quad \forall x \in A$$

Cela implique aussi que :

$$\|x^*\| = \|x\|$$

Et ainsi :

$$\|xx^*\| = \|x\|\|x^*\|$$

Théorème de Gelfand-Naimark

Theorème (Théorème de Gelfand-Naimark)

Si A est une $\mathcal{C}^*$-algèbre commutative, et en notant Δ un idéal maximum , alors la transformée de Gelfand est une isométrie de A vers $\mathcal{C}(\Delta)$ avec la propriété :

$$h(x^*) = \overline{h(x)}$$

En particulier : x est hermitien si et seulement si $\hat{x}$ est une fonction réelle.

Sommaire

On doit les fondations de la physique quantique, à partir de 1925, à :

Sommaire

Formaliser le monde microscopique

Définition

Un système physique S *est la collection d'ensembles* Σ *d'états* ω *obtenus après une préparation adéquate.*
Une observable $A \in S$ *est définie par les protocoles expérimentaux qui la mesure.*
La moyenne des mesures d'une observable A *dans un état* ω *est appelée l'espérance* $\omega(A)$
On note $\mathcal{O}$ *l'ensemble des observables.*

Relation d'équivalence

Theorème

Deux états ω_1, ω_2 *tel que :*

$$\omega_1(A) = \omega_2(A) \quad \forall A \in \mathcal{O}$$

Ne peuvent pas être différenciés, et sont donc identifiés.
De même, si la mesure de deux observables A_1 *et* A_2 *sont identiques quelque soit les états, c'est-à-dire :*

$$\omega(A_1) = \omega(A_2) \quad \forall \omega \in \Sigma$$

Alors $A_1 = A_2$.

Opérations sur les observables

Opérations

On peut toujours définir :

$$\lambda * A^n \in \mathcal{O} \quad \forall A \in \mathcal{O}, n \in \mathrm{N}$$

On a donc toujours l'existence d'une algèbre commutative formée de polynôme en A.
On peut définir l'identité de $\mathcal{O}$ par $A^0 = 1_A$. Et cette identité coïncide avec l'identité de $\mathcal{O}$.

On a automatiquement une involution sur $\mathcal{O}$:

Définition

$$(\alpha A + \mu B)^* = \overline{\alpha} A + \overline{\mu} B \quad \lambda, \mu \in \mathbb{C}$$

Interprétation des homomorphismes

Les homomorphismes ...

L'application $A \longrightarrow m^{\omega}(A) \in \mathbb{C}$ est un homomorphisme

On définit donc la norme

Définition

$$\|A\| = \sup_{\omega \in \Sigma} |\omega(A)|$$

En effet, les mesures d'une observables sont toujours bornées.

Propriétés de la norme

Theorème

On a les propriétés voulues de la norme définie précédemment :

$$
\begin{aligned}
\|A+B\| &\leq \|A\| + \|B\| \\
\|A^*\| &= \|A\| \\
\|AA^*\| &\geq \|A\|^2 \quad \textit{Avec égalité si } A \textit{ est hermitien} \\
\|AB\| &\leq \|A\|\|B\| \\
\|A\| = 0 &\implies A = 0
\end{aligned}
$$

Retour sur la positivité

Nous avons étendu les observables dans un espace vectoriel complexe. Mais en fait :

Theorème

Les propositions suivantes sont équivalentes :

- *Le spectre de A est contenu dans $\mathbb{R}^+$*
- *Il existe $B \in \mathcal{O}$ telle que $B = AA^*$*
- *Pour tout ω, $\omega(A) \geq 0$*

Limitations de cette description classique

Plusieurs limitations :

- Il est très difficile de préparer $A \in \mathcal{O}$ de façon identique pour le mesurer
- Les mesures ont forcément un écart type non nul.
- **En physique quantique, mesurer une observable va perturber la prochaine mesure.**

On perd donc la notion de commutativité !

Récapitulatif de la traduction physique mathématique

On obtient le tableau de correspondances suivant :

Tableau récapitulatif

Mathématique	**Physique**
Espace vectoriel munit de propriétés, A	Ensemble des observables, $\mathcal{O}$
Tous les homomorphismes de A, $h \in \Delta$	L'ensemble des états, $\omega \in \Sigma$
Commutativité	Physique classique
Non commutativité	Physique quantique
Transformée de Gelfand	Mesure d'une observable

Gelfand and Neumark.
On the imbedding of normed rings into the ring of operators in Hilbert space.
Mat. Sb., Nov. Ser., 12 :197–213, 1943.

Izrail Moiseevich Gelfand, Dimitiri AM Raikov, and Georgi E Shilov.
Commutative Normed Rings.
Chelsea, 1964.

Walter Rudin.
Functional Analysis. International Series in Pure and Applied Mathematics.
McGraw-Hill, Inc., New York, 1991.

Franco Strocchi.
An Introduction to the Mathematical Structure of Quantum Mechanics : a Short Course for Mathematicians, volume 28.
World Scientific, 2008.