MathDaily

编辑部发表专用

MathDaily 编辑部

Pulchritudo in virtute est

MathDaily 期刊

第 1 卷第 51 期 • 模法集结号出品

问题

Solve

设函数 $f(x)$ 在区间 I 上二阶可微，$f''(x)<0$，则对任意 $x_1,\cdots,x_n\in I$，有

$$f\left(\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right)\geqslant\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f(x_i),$$

当且仅当 $x_1=\cdots=x_n$ 时等号成立。(提示：记 $x_0=\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}$，证明 $f(x_i)\leqslant f(x_0)+f'(x_0)(x_i-x_0)$, $i=1,\cdots,n$.)

特别地，取 $f(x)=\ln x$，$I=(0,+\infty)$，就得到了著名的算术-几何平均不等式：对任意正数 $x_1,\cdots,x_n$，有

$$\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\geqslant\sqrt[n]{x_1\cdots x_n},$$

当且仅当 $x_1=\cdots=x_n$ 时等号成立。[1]

证明

步骤 *1*：利用泰勒公式推导局部不等式

记 $x_0=\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}$，因 $f(x)$ 二阶可微，对任意 $x_i\in I$，由**一阶泰勒公式（拉格朗日余项）**，存在 $\xi_i\in(x_0,x_i)$（或 (x_i,x_0)），使得：

$$f(x_i)=f(x_0)+f'(x_0)(x_i-x_0)+\frac{1}{2}f''(\xi_i)(x_i-x_0)^2.$$

由 $f''(x)<0$ 且 $(x_i-x_0)^2\geqslant 0$，余项 $\frac{1}{2}f''(\xi_i)(x_i-x_0)^2\leqslant 0$，故：

$$f(x_i)\leqslant f(x_0)+f'(x_0)(x_i-x_0),\quad i=1,\ldots,n.$$

步骤 *2*：求和证全局不等式

对上述不等式求和：

$$\sum_{i=1}^{n}f(x_i)\leqslant nf(x_0)+f'(x_0)\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_0).$$

由 $x_0 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$，得 $\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_0) = 0$，因此：

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \leqslant nf\left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\right).$$

两边除以 n，即得：

$$f\left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\right) \geqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i).$$

步骤 3：等号成立条件

等号成立当且仅当每个余项为 0，即 $(x_i - x_0)^2 = 0$，故 $x_i = x_0$（即 $x_1 = \cdots = x_n$）。

特例：算术-几何平均不等式

取 $f(x) = \ln x$（$f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$），代入不等式得：

$$\ln\left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\right) \geqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln x_i = \ln\left(\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n}\right).$$

因 $\ln x$ 严格递增，两边取指数得：

$$\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n}.$$

参考文献

[1] 中国科学技术大学. 中科大少年班数学分析讲义[M]. 2009.

声 明

声明一 本期刊发布唯一目的是练习 LaTex 排版能力，对于所选题目，均已在“参考文献”处标注来源。如有侵权，请联系 email:<mathdaily1@outlook.com> 删除。

声明二 本期刊发布时间：周一至周五晚上 8 点，周末及节假日不发布，其它发布时间敬请关注公众号：MFJJH

声明三 我们欢迎任何人与我们交流数学与 LaTex 排版相关的内容，欢迎指正错误，请联系 email:<mathdaily1@outlook.com> 或在公众号‘MFJJH’后台留言。