MathDaily

编辑部发表专用

MathDaily 编辑部

Pulchritudo in virtute est

MathDaily 期刊

第 1 卷第 54 期 • 模法集结号出品

问题

Solve

设 $a_1 \in \mathbb{R}, a_{n+1} = \arctan a_n\ (n \geqslant 1)$. 求极限 $\lim_{n\to\infty} na_n^2$.[1]

证明

步骤 *1*：证明 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

若 $a_1 = 0$，则 $a_n = 0$ 对所有 n 成立，此时极限无意义（需 $a_1 \neq 0$）；

若 $a_1 \neq 0$，由 $|\arctan x| < |x|$（$x \neq 0$），得 $|a_{n+1}| = |\arctan a_n| < |a_n|$，故 $\{|a_n|\}$ 单调递减且有下界 0，由单调有界定理，$\lim_{n\to\infty} |a_n| = L$。

对 $a_{n+1} = \arctan a_n$ 取绝对值极限，得 $L = \arctan L$，唯一解为 $L = 0$，故 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$。

步骤 *2*：用 *Stolz* 定理求 $\lim_{n\to\infty} na_n^2$

令 $b_n = \frac{1}{a_n^2}$，$c_n = n$，则 $\lim_{n\to\infty} c_n = \infty$，由 **Stolz 定理（$\frac{\infty}{\infty}$ 型）**：

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{c_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{b_{n+1} - b_n}{c_{n+1} - c_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{a_{n+1}^2} - \frac{1}{a_n^2} \right).$$

步骤 *3*：泰勒展开计算极限

因 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$，对 $\arctan x$ 在 $x = 0$ 处泰勒展开：

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + o(x^3) \quad (x \to 0).$$

代入 $a_{n+1} = \arctan a_n$，得：

$$a_{n+1} = a_n - \frac{a_n^3}{3} + o(a_n^3).$$

计算 $\frac{1}{a_{n+1}^2} - \frac{1}{a_n^2} = \frac{a_n^2 - a_{n+1}^2}{a_n^2 a_{n+1}^2}$，展开分子：

$$a_n^2 - a_{n+1}^2 = a_n^2 - \left(a_n - \frac{a_n^3}{3} + o(a_n^3) \right)^2 = \frac{2a_n^4}{3} + o(a_n^4).$$

分母满足 $a_n^2 a_{n+1}^2 = a_n^2 \cdot (a_n^2 + o(a_n^2)) = a_n^4 + o(a_n^4)$，因此：

$$\frac{1}{a_{n+1}^2} - \frac{1}{a_n^2} = \frac{\frac{2a_n^4}{3} + o(a_n^4)}{a_n^4 + o(a_n^4)} \to \frac{2}{3} \quad (n \to \infty).$$

结论

由 Stolz 定理，$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{na_n^2}=\frac{2}{3}$，故：

$$\lim_{n\to\infty} na_n^2=\frac{3}{2}.$$

参考文献

[1] 梅加强. 梅加强数学分析讲义[M]. 2006-2010.

声　明

声明一 本期刊发布唯一目的是练习 LaTex 排版能力，对于所选题目，均已在“参考文献”处标注来源。如有侵权，请联系 email:<mathdaily1@outlook.com> 删除。

声明二 本期刊发布时间：周一至周五晚上 8 点，周末及节假日不发布，其它发布时间敬请关注公众号：MFJJH

声明三 我们欢迎任何人与我们交流数学与 LaTex 排版相关的内容，欢迎指正错误，请联系 email:<mathdaily1@outlook.com> 或在公众号‘MFJJH’后台留言。