MathDaily

编辑部发表专用

MathDaily 编辑部

Pulchritudo in virtute est

MathDaily 期刊

第 1 卷第 60 期 • 模法集结号出品

问题

Solve

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上满足 $f''(x)>0$，试证：对于 $[a,b]$ 上任意两个不同的点 x_1,x_2，有[1]

$$\frac{1}{2}\left[f(x_1)+f(x_2)\right]>f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$$

证明

不妨设 $x_1<x_2$，记 $x_0=\frac{x_1+x_2}{2}$，则 $h=x_2-x_0=x_0-x_1>0$，即 $x_1=x_0-h$，$x_2=x_0+h$。

对 $f(x)$ 在 x_0 处作一阶泰勒展开（拉格朗日余项）：

对 $x_1=x_0-h$，存在 $\xi_1\in(x_0-h,x_0)$，使得：

$$f(x_1)=f(x_0)+f'(x_0)(-h)+\frac{1}{2}f''(\xi_1)h^2.$$

对 $x_2=x_0+h$，存在 $\xi_2\in(x_0,x_0+h)$，使得：

$$f(x_2)=f(x_0)+f'(x_0)h+\frac{1}{2}f''(\xi_2)h^2.$$

将两式相加，消去含 $f'(x_0)$ 的项：

$$f(x_1)+f(x_2)=2f(x_0)+\frac{1}{2}\left[f''(\xi_1)+f''(\xi_2)\right]h^2.$$

由题设 $f''(x)>0$，得 $f''(\xi_1)+f''(\xi_2)>0$，因此：

$$f(x_1)+f(x_2)>2f(x_0)\implies\frac{1}{2}\left[f(x_1)+f(x_2)\right]>f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right).$$

注（凸函数视角）：

由 $f''(x)>0$ 可知 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的严格凸函数，而原式正是严格凸函数的定义（对任意两点，函数值的算术平均大于中点的函数值），因此结论直接成立。

参考文献

[1] 裴礼文. 数学分析中的典型问题与方法[M]. 2021.

声　明

声明一 本期刊发布唯一目的是练习 LaTex 排版能力，对于所选题目，均已在“参考文献”处标注来源。如有侵权，请联系 email:<mathdaily1@outlook.com> 删除。

声明二 本期刊发布时间：周一至周五晚上 8 点，周末及节假日不发布，其它发布时间敬请关注公众号：MFJJH

声明三 我们欢迎任何人与我们交流数学与 LaTex 排版相关的内容，欢迎指正错误，请联系 email:<mathdaily1@outlook.com> 或在公众号‘MFJJH’后台留言。