MathDaily

编辑部发表专用

MathDaily 编辑部

Pulchritudo in virtute est

MathDaily 期刊

第 1 卷第 49 期 • 模法集结号出品

概念补充

定理 0.1 (行列式求导法则). *[1]* 设 $A(x) = [a_{ij}(x)]$ 是 $n \times n$ 矩阵，其元素 $a_{ij}(x)$ 在区间 I 上可导，则行列式 $\det A(x)$ 的导数为：

$$\frac{d}{dx}\det A(x) = \sum_{k=1}^{n} \det A_k(x)$$

其中 $A_k(x)$ 是将 $A(x)$ 的第 k 行替换为其导函数而得到的矩阵。

证明. 根据行列式的定义：

$$\det A(x) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}(x)$$

其中 S_n 是 n 阶对称群，$\operatorname{sgn}(\sigma)$ 是排列 σ 的符号。

对两边求导，利用乘积求导法则：

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\det A(x) &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \frac{d}{dx}\left(\prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}(x)\right) \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \sum_{k=1}^{n} \left(a'_{k,\sigma(k)}(x) \prod_{\substack{i=1 \\ i\neq k}}^{n} a_{i,\sigma(i)}(x) \right)\end{aligned}$$

交换求和顺序：

$$\frac{d}{dx}\det A(x) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a'_{k,\sigma(k)}(x) \prod_{\substack{i=1 \\ i\neq k}}^{n} a_{i,\sigma(i)}(x)$$

对固定的 k，内层求和：

$$\sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a'_{k,\sigma(k)}(x) \prod_{\substack{i=1 \\ i\neq k}}^{n} a_{i,\sigma(i)}(x)$$

这正是行列式 $\det A_k(x)$ 的展开式,其中 $A_k(x)$ 是将 $A(x)$ 的第 k 行替换为 $[a'_{k1}(x), a'_{k2}(x), \ldots, a'_{kn}(x)]$ 后得到的矩阵。

因此：

$$\frac{d}{dx}\det A(x) = \sum_{k=1}^{n} \det A_k(x)$$

□

问题

Prove

设 $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ 是区间 I 上的 n 个 n 阶可导函数，其 Wronskian 行列式：

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \cdots & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

在 I 上恒不为零。则：

1. 存在唯一的一组连续函数 $a_0(x), a_1(x), \ldots, a_{n-1}(x)$，使得 $y_1, y_2, \ldots, y_n$ 都是微分方程

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$$

的解。

2. 系数 $a_0(x), a_1(x), \ldots, a_{n-1}(x)$ 可由以下公式给出：

$$a_k(x) = (-1)^{n-k}\frac{W_k(x)}{W(x)}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1$$

其中 $W_k(x)$ 是将 $W(x)$ 的第 n 行替换为 $[y_1^{(k)}(x), y_2^{(k)}(x), \ldots, y_n^{(k)}(x)]$ 得到的行列式（这里约定 $y^{(0)} = y$）。

解:

步骤 1：转化为矩阵方程。

令

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \cdots & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}$$

则 $\det \Phi(x) = W(x) \neq 0$，故 $\Phi(x)$ 可逆。

步骤 2：构造系数矩阵。

由行列式求导法则，$\Phi'(x)$ 存在且：

$$\Phi'(x) = \begin{pmatrix} y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ y_1'' & y_2'' & \cdots & y_n'' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \cdots & y_n^{(n)} \end{pmatrix}$$

由于 $y_1, \ldots, y_n$ 线性无关（因 $W(x) \neq 0$），它们的 n 阶导数可由前 n 阶导数线性表示：

$$y_j^{(n)}(x) = -\sum_{k=0}^{n-1} a_k(x) y_j^{(k)}(x), \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

其中 $a_0(x), \ldots, a_{n-1}(x)$ 待定。

步骤 3：建立矩阵关系。

上式可写为矩阵形式：

$$\Phi'(x) = \Phi(x)A(x)$$

其中

$$A(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0(x) & -a_1(x) & -a_2(x) & \cdots & -a_{n-1}(x) \end{pmatrix}$$

步骤 4：求解系数。

由 $\Phi(x)$ 可逆得：

$$A(x) = \Phi(x)^{-1}\Phi'(x)$$

设 $e_n = (0, 0, \ldots, 0, 1)^T$，则：

$$(-a_0(x), -a_1(x), \ldots, -a_{n-1}(x)) = e_n^T A(x) = e_n^T \Phi(x)^{-1}\Phi'(x)$$

步骤 5：利用伴随矩阵。

由 $\Phi(x)^{-1} = \frac{1}{\det\Phi(x)}\operatorname{adj}(\Phi(x))$，且 $e_n^T\operatorname{adj}(\Phi(x))$ 的第 j 分量为 $(-1)^{n+j}M_{nj}(x)$，其中 $M_{nj}(x)$ 是 $\Phi(x)$ 的 (n,j)-余子式。

于是：

$$-a_k(x) = \frac{1}{W(x)}\sum_{j=1}^{n}(-1)^{n+j}M_{nj}(x)\cdot y_j^{(k+1)}(x)$$

经符号调整得：

$$a_k(x) = (-1)^{n-k}\frac{W_k(x)}{W(x)}$$

步骤 6：易证唯一性。

由于 $\Phi(x)$ 可逆，$A(x) = \Phi(x)^{-1}\Phi'(x)$ 唯一确定，从而系数 $a_k(x)$ 唯一确定。

步骤 7：验证。

由 $A(x)$ 的构造，对每个 j：

$$\begin{pmatrix} y_j^{(n)}(x) \\ \text{（其他导数）} \end{pmatrix} = A(x)\begin{pmatrix} y_j(x) \\ y_j'(x) \\ \vdots \\ y_j^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}$$

特别地，最后一个分量给出：

$$y_j^{(n)}(x) = -\sum_{k=0}^{n-1}a_k(x)y_j^{(k)}(x)$$

即 y_j 满足所述微分方程。 $\square$

参考文献

[1] 谢惠民. 吉米多维奇数学分析习题集学习指引（第 1 册）[M]. 北京: 高等教育出版社, 2010: 196.

声　　明

声明一　本期刊发布唯一目的是练习 LaTex 排版能力，对于所选题目，均已在“参考文献”处标注来源。如有侵权，请联系 email:<mathdaily1@outlook.com> 删除。

声明二　本期刊发布时间：周一至周五晚上 8 点，周末及节假日不发布，其它发布时间敬请关注公众号：MFJJH

声明三　我们欢迎任何人与我们交流数学与 LaTex 排版相关的内容，欢迎指正错误，请联系 email:<mathdaily1@outlook.com> 或在公众号‘MFJJH’后台留言。