MathDaily

编辑部发表专用

MathDaily 编辑部

Pulchritudo in virtute est

MathDaily 期刊

第 1 卷第 55 期 • 模法集结号出品

Extended Bertrand's test 证明

设 $\{a_n\}$ 是正实数序列。定义：

$$L_n = \frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{1}{n} + \frac{b_n}{n\ln n}.$$

那么：

1. 如果 $\liminf_{n\to\infty} b_n > 1$，则级数 $\sum a_n$ 收敛。
2. 如果 $\limsup_{n\to\infty} b_n < 1$，则级数 $\sum a_n$ 发散。

证明. 我们通过比较法证明，将 a_n 与已知的 Bertrand 级数的通项进行比较。

收敛性证明

假设 $\liminf b_n > 1$，则存在 $\delta > 0$ 和 $N \in \mathbb{N}$，使得对于所有 $n \geq N$：

$$b_n \geq 1 + \delta.$$

因此，

$$L_n \geq 1 + \frac{1}{n} + \frac{1+\delta}{n\ln n}.$$

考虑辅助序列 $\{x_n\}$，定义为 $x_n = n(\ln n)^{1+\delta}$。计算比值：

$$\frac{x_n}{x_{n+1}} = \frac{n(\ln n)^{1+\delta}}{(n+1)[\ln(n+1)]^{1+\delta}}$$

使用渐近展开：

$$\ln(n+1) = \ln n + \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right),$$

$$[\ln(n+1)]^{1+\delta} = (\ln n)^{1+\delta}\left[1 + \frac{1+\delta}{n\ln n} + O\left(\frac{1}{n^2\ln n}\right)\right]$$

因此，

$$\begin{aligned}\frac{x_n}{x_{n+1}} &= \frac{n}{n+1}\left[1 - \frac{1+\delta}{n\ln n} + O\left(\frac{1}{n^2\ln n}\right)\right] \\ &= \left(1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \cdots\right)\left[1 - \frac{1+\delta}{n\ln n} + O\left(\frac{1}{n^2\ln n}\right)\right] \\ &= 1 - \frac{1}{n} - \frac{1+\delta}{n\ln n} + O\left(\frac{1}{n^2\ln n}\right)\end{aligned}$$

于是，对于充分大的 n，

$$\frac{x_n}{x_{n+1}} \leq 1 + \frac{1}{n} + \frac{1+\delta}{n\ln n} \leq L_n$$

从而，

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{x_{n+1}}{x_n},$$

这意味着序列 $\{a_n/x_n\}$ 最终单调递减（当 n 充分大时）。因此，存在常数 $C > 0$ 使得 $a_n \leq Cx_n = Cn(\ln n)^{1+\delta}$。由于级数 $\sum \frac{1}{n(\ln n)^{1+\delta}}$ 收敛（当 $\delta > 0$ 时，由积分判别法可知），根据比较判别法，$\sum a_n$ 收敛。

发散性证明

假设 $\limsup b_n < 1$，则存在 $\delta > 0$ 和 $N \in \mathbb{N}$，使得对于所有 $n \geq N$：

$$b_n \leq 1 - \delta$$

因此，

$$L_n \leq 1 + \frac{1}{n} + \frac{1-\delta}{n\ln n}$$

考虑辅助序列 $\{y_n\}$，定义为 $y_n = n\ln n$。计算比值：

$$\frac{y_n}{y_{n+1}} = \frac{n\ln n}{(n+1)\ln(n+1)} = \frac{n}{n+1} \cdot \frac{\ln n}{\ln(n+1)}$$

使用渐近展开：

$$\frac{y_n}{y_{n+1}} = \left(1 - \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\left(1 - \frac{1}{n\ln n} + O\left(\frac{1}{n^2\ln n}\right)\right) = 1 - \frac{1}{n} - \frac{1}{n\ln n} + O\left(\frac{1}{n^2\ln n}\right)$$

于是，对于充分大的 n，

$$\frac{y_n}{y_{n+1}} \geq 1 + \frac{1}{n} + \frac{1-\delta}{n\ln n} \geq L_n.$$

从而，

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \frac{y_{n+1}}{y_n},$$

这意味着序列 $\{a_n/y_n\}$ 最终单调递增。因此，存在常数 $c > 0$ 使得 $a_n \geq cy_n = cn\ln n$。由于级数 $\sum \frac{1}{n\ln n}$ 发散（由积分判别法可知），根据比较判别法，$\sum a_n$ 发散。

综上，Extended Bertrand’s test 得证。

问题

Prove

数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 满足 $a_n > 0$，且

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} \le 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n\ln n} + \frac{1}{n^2},$$

判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的收敛性。[1]

注：我们可以借鉴 Extended Bertrand's test 的证明思想来解决问题

构造比较序列（仿照 Extended Bertrand's test 的证明技巧）

定义 $\{c_n\}_{n\ge 2}$ 满足

$$\frac{c_n}{c_{n+1}} = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n\ln n} + \frac{1}{n^2},$$

取 $c_2 = a_2$。由条件，对 $n \ge 2$：

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} \le \frac{c_n}{c_{n+1}} \implies \frac{a_{n+1}}{c_{n+1}} \ge \frac{a_n}{c_n}.$$

所以 $\left\{\frac{a_n}{c_n}\right\}$ 单调递增，存在 $K = \frac{a_2}{c_2} > 0$ 使 $a_n \ge K c_n$。

估计 c_n 的阶

取对数递推：

$$\ln c_{n+1} = \ln c_n - \ln\left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n\ln n} + \frac{1}{n^2}\right).$$

利用 Taylor 展开：

$$\ln\left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n\ln n} + \frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{n} + \frac{1}{n\ln n} + \frac{1}{2n^2} + O\left(\frac{1}{n^2\ln n}\right).$$

求和得：

$$\ln c_n = -\ln n - \ln\ln n + C + o(1),$$

即 $c_n \sim \frac{e^C}{n\ln n}$。因此 $\sum_{n=2}^{\infty} c_n$ 发散（因 $\sum \frac{1}{n\ln n}$ 发散）。

比较判别法

由 $a_n \geq Kc_n$ 及 $\sum c_n$ 发散，得 $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$ 发散，故原级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散。

结论

级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散。 $\square$

是否可以直接利用 Extended Bertrand’s test 呢?

参考文献

[1] 省身班动态进出考试数学分析 *III*. 天津: 南开大学, 2024 春: 三.

声　　明

声明一　本期刊发布唯一目的是练习 LaTex 排版能力，对于所选题目，均已在“参考文献”处标注来源。如有侵权，请联系 email:<mathdaily1@outlook.com> 删除。

声明二　本期刊发布时间：周一至周五晚上 8 点，周末及节假日不发布，其它发布时间敬请关注公众号：MFJJH

声明三　我们欢迎任何人与我们交流数学与 LaTex 排版相关的内容，欢迎指正错误，请联系 email:<mathdaily1@outlook.com> 或在公众号‘MFJJH’后台留言。