MathDaily

编辑部发表专用

MathDaily 编辑部

Pulchritudo in virtute est

MathDaily 期刊

第 1 卷第 57 期 • 模法集结号出品

问题

Solve

设 f 为 $(-\infty,+\infty)$ 中的连续函数，如果对任意 $x \in \mathbb{R}$，均有

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h^2}=0,$$

证明 $f(x)$ 为线性函数。[1]

证明

步骤 *1*：构造辅助函数

定义 $g(x)=f(x)-f(0)-kx$，其中 $k=f(1)-f(0)$。显然 $g(x)$ 是连续函数，且满足：$g(0)=0$，$g(1)=0$；对任意 $x\in\mathbb{R}$，$g(x)$ 继承原条件：

$$\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)+g(x-h)-2g(x)}{h^2}=0.$$

步骤 *2*：证明 $g(x)\equiv 0$

假设 $g(x)\not\equiv 0$，则 $g(x)$ 在 $[0,1]$ 上的最大值 $M>0$（或最小值 $m<0$，不妨设为最大值），设最大值在 $c\in(0,1)$ 处取得（因 $g(0)=g(1)=0$）。

对 c 应用题设条件：当 $h\to 0$ 时，

$$g(c+h)+g(c-h)=2g(c)+o(h^2)=2M+o(h^2).$$

但 M 是 $g(x)$ 在 $[0,1]$ 上的最大值，故 $g(c+h)\le M$、$g(c-h)\le M$，因此 $g(c+h)+g(c-h)\le 2M$。结合上式，当 h 充分小时，必有 $g(c+h)=g(c-h)=M$（否则 $g(c+h)+g(c-h)<2M$，与 $2M+o(h^2)\ge 2M$ 矛盾）。

步骤 *3*：导出矛盾

由 $g(c+h)=M$ 对充分小的 $h>0$ 成立，结合 $g(x)$ 的连续性，可知 $g(x)\equiv M$ 在 $[c-\delta,c+\delta]$ 上（$\delta>0$）。

重复上述过程，可将 M 的取值区间扩展至 $[0,1]$，但 $g(0)=0$，与 $M>0$ 矛盾。故假设不成立，即 $g(x)\equiv 0$。

因此 $f(x)=f(0)+kx$，其中 $k=f(1)-f(0)$，即 $f(x)$ 为线性函数.

参考文献

[1] 梅加强. 梅加强数学分析讲义[M]. 2006-2010.

声　　明

声明一 本期刊发布唯一目的是练习 LaTex 排版能力，对于所选题目，均已在“参考文献”处标注来源。如有侵权，请联系 email:<mathdaily1@outlook.com> 删除。

声明二 本期刊发布时间：周一至周五晚上 8 点，周末及节假日不发布，其它发布时间敬请关注公众号：MFJJH

声明三 我们欢迎任何人与我们交流数学与 LaTex 排版相关的内容，欢迎指正错误，请联系 email:<mathdaily1@outlook.com> 或在公众号‘MFJJH’后台留言。