MathDaily

编辑部发表专用

MathDaily 编辑部

Pulchritudo in virtute est

MathDaily 期刊

第 1 卷第 58 期 • 模法集结号出品

问题

Solve

设函数 $z=f(x,y)$ 具有二阶连续偏导数，且满足

$$4\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+12\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+5\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0.$$

确定常数 b 的值，使上式在变换 $u=x-2y, v=x+by$ 下，可简化为

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=0.$$

解:

将 z 视为 u,v 的函数，利用链式法则计算偏导数：

一阶偏导数：

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-2\frac{\partial z}{\partial u}+b\frac{\partial z}{\partial v}.$$

二阶偏导数（记 $z_{uu}=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}, z_{uv}=\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}, z_{vv}=\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$）：

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}&=z_{uu}+2z_{uv}+z_{vv},\\ \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}&=-2z_{uu}+(b-2)z_{uv}+bz_{vv},\\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}&=4z_{uu}-4bz_{uv}+b^2z_{vv}.\end{aligned}$$

代入原方程：

$$4(z_{uu}+2z_{uv}+z_{vv})+12\left(-2z_{uu}+(b-2)z_{uv}+bz_{vv}\right)+5\left(4z_{uu}-4bz_{uv}+b^2z_{vv}\right)=0.$$

合并同类项得：

$$(-16-8b)z_{uv}+(4+12b+5b^2)z_{vv}=0.$$

要使方程简化为 $z_{uv}=0$，需

$$\begin{cases}4+12b+5b^2=0,\\ -16-8b\neq 0.\end{cases}$$

$$5b^2+12b+4=0$$

得

$$b=-\frac{2}{5}$$

或

$$b=-2$$

当 $b=-2$ 时，$-16-8b=0$，不满足条件；
当 $b=-\frac{2}{5}$ 时，$-16-8b=-\frac{64}{5}\neq 0$，满足条件。

故所求常数为

$$\boxed{b=-\frac{2}{5}}.$$

□

声 明

声明一 本期刊发布唯一目的是练习 LaTex 排版能力，对于所选题目，均已在“参考文献”处标注来源。如有侵权，请联系 email:<mathdaily1@outlook.com> 删除。

声明二 本期刊发布时间：周一至周五晚上 8 点，周末及节假日不发布，其它发布时间敬请关注公众号：MFJJH

声明三 我们欢迎任何人与我们交流数学与 LaTex 排版相关的内容，欢迎指正错误，请联系 email:<mathdaily1@outlook.com> 或在公众号‘MFJJH’后台留言。