MathDaily

编辑部发表专用

MathDaily 编辑部

Pulchritudo in virtute est

MathDaily 期刊

第 1 卷第 52 期 • 模法集结号出品

问题

Prove

假设 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上黎曼可积，定义

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx, \quad n \geq 1.$$

需要证明 [1]

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} xf(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n+1}b_n}{n}.$$

解:

首先，设 $B_n = 2b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx$，则 B_n 是 f 的正弦傅里叶系数。考虑 f 的傅里叶正弦级数部分和

$$S_N(x) = \sum_{n=1}^{N} B_n \sin(nx).$$

由于 f 在 $[0,\pi]$ 上黎曼可积，故 f 平方可积，且函数系 $\{\sin(nx)\}_{n=1}^{\infty}$ 构成 $L^2[0,\pi]$ 中的完备正交系。因此，S_N 在 L^2 范数下收敛到 f，即

$$\lim_{N\to\infty}\int_0^{\pi} |f(x)-S_N(x)|^2\,dx = 0.$$

考虑函数 $g(x)=x$，显然 $g \in L^2[0,\pi]$。

由 Cauchy-Schwarz 不等式，

$$\left|\int_0^{\pi} f(x)g(x)\,dx - \int_0^{\pi} S_N(x)g(x)\,dx\right| \leq \left(\int_0^{\pi} |f(x)-S_N(x)|^2\,dx\right)^{1/2}\left(\int_0^{\pi} |g(x)|^2\,dx\right)^{1/2} \to 0$$

故

$$\int_0^{\pi} f(x)g(x)\,dx = \lim_{N\to\infty}\int_0^{\pi} S_N(x)g(x)\,dx.$$

计算积分 $\int_0^{\pi} S_N(x)g(x)\,dx$：

$$\int_0^{\pi} S_N(x)g(x)\,dx = \sum_{n=1}^{N} B_n \int_0^{\pi} x\sin(nx)\,dx.$$

其中

$$\int_0^\pi x\sin(nx)\,dx=\left[-\frac{x\cos(nx)}{n}\right]_0^\pi+\int_0^\pi\frac{\cos(nx)}{n}\,dx=-\frac{\pi\cos(n\pi)}{n}+\left[\frac{\sin(nx)}{n^2}\right]_0^\pi=\frac{\pi(-1)^{n+1}}{n}.$$

因此，

$$\int_0^\pi S_N(x)g(x)\,dx=\pi\sum_{n=1}^N\frac{(-1)^{n+1}B_n}{n}.$$

令 $N\to\infty$，得

$$\int_0^\pi f(x)x\,dx=\pi\sum_{n=1}^\infty\frac{(-1)^{n+1}B_n}{n}.$$

两边除以 π，并代入 $B_n=2b_n$，即得

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi xf(x)\,dx=\sum_{n=1}^\infty\frac{2(-1)^{n+1}b_n}{n}.$$

□

参考文献

[1] 本题改编自: 数学分析 *3-3*（伯苓班）期末考试. 天津: 南开大学, 2023-2024 学年: 三.

声　明

声明一 本期刊发布唯一目的是练习 LaTex 排版能力，对于所选题目，均已在“参考文献”处标注来源。如有侵权，请联系 email:<mathdaily1@outlook.com> 删除。

声明二 本期刊发布时间：周一至周五晚上 8 点，周末及节假日不发布，其它发布时间敬请关注公众号：MFJJH

声明三 我们欢迎任何人与我们交流数学与 LaTex 排版相关的内容，欢迎指正错误，请联系 email:<mathdaily1@outlook.com> 或在公众号‘MFJJH’后台留言。