Categorías Abelianas

Matemáticas UCM
Trabajo de GST
Daniel Moreno Casares

Índice

Abstract

En este trabajo se hará una pequeña introducción a la teoría de categorías abelianas, centrándonos en sus buenas propiedades, en los tipos que Grothendieck distinguió en el paper de Tohoku y por último haremos una aproximación al álgebra homológica. El objetivo es entender el uso de este tipo de categorías para construir las teorías homológicas y cohomológicas que conocemos, y unificarlas desde el punto de vista categorial. La estructura principal de este trabajo es la del paper de Grothendieck, utilizando para mayor aclaración el libro de Popescu en la segunda sección, y los de Hartshorne y Kato en la tercera.

1. Introducción

En lo que sigue notaremos como $\mathscr{C}$ a una categoría, por X, Y y demás letras a elementos de la clase $Ob(\mathscr{C})$ de objetos de dicha categoría y por $Hom(X, Y)$ al conjunto de morfismos que van de X a Y. La composición de dos morfismos $f \in Hom(X, Y)$ y $g \in Hom(Y, Z)$ se denotará por gf. Me saltaré las definiciones básicas en categorías y sólo mencionaré aquellas que más vaya a utilizar.

Definición 1.1.

- *Un objeto X se dirá que es inicial en la categoría cuando para todo objeto Y el conjunto $Hom(X, Y)$ tiene un solo elemento.*
- *Un objeto X se dirá que es final en la categoría cuando para todo objeto Y el conjunto $Hom(Y, X)$ tiene un solo elemento.*
- *Llamaremos objeto nulo a un objeto que sea final e inicial.*
- *Dos objetos diremos que son isomorfos cuando exista un isomorfismo entre ellos. La clase de objetos que son isomorfos a un objeto X dado se denotará por $[X]$ y la llamaremos clase de X.*
- *Sea X un objeto de la categoría $\mathscr{C}$. Llamamos $M(X)$ a la categoría formada por los objetos (Y, f) donde $f \in Hom(Y, X)$ es un monomorfismo, y un $h : (Y, f) \to (Z, g)$ es el morfimo $h : Y \to Z$ de $\mathscr{C}$ tal que $gh = f$. Definimos un sub-objeto de X como una clase de un objeto de $M(X)$.*
- *Un conjunto de objetos $\{U_i\}_{i \in I}$ diremos que es un conjunto de generadores de la categoría si para cualquier par (X, Y) y para cualesquiera $f, g \in Hom(X, Y)$ existe un índice i_0 y un $h \in Hom(U_{i_0}, X)$ tal que $fh \neq gh$.*

Otro concepto que se usará constantemente será el de categoría dual:

Definición 1.2. *Dada una categoría $\mathscr{C}$ definimos su categoría dual $\mathscr{C}^*$ como la categoría cuyos objetos son los mismos que $Ob(\mathscr{C})$, se denota X^* como el objeto asociado a X en la categoría dual. Y cuyos morfismos $Hom(X^*, Y^*)$ son por definición los mismos que $Hom(Y, X)$.*

Ahora vamos a introducir los conceptos de kernel, cokernel, imagen y coimagen. El desarrollo y la explicación es lo más detallada posible aunque se puede abreviar, sin embargo, para ver todas las equivalencias y significados es mejor dar este punto de vista. Sean $\mathscr{C}$ y $\mathscr{D}$ dos categorías y sea $X \in Ob(\mathscr{C})$. Podemos crear el functor constante asociado a X, $X_{\mathscr{D}} : \mathscr{D} \to \mathscr{C}$ de la siguiente manera:

- Para todo $j \in Ob(\mathscr{D})$ tendremos que $X_{\mathscr{D}}(j) = X$.
- Para todo morfismo $f : j \to i$ ocurrirá que $X_{\mathscr{D}}(f) = 1_X$.

Si $F : \mathscr{D} \to \mathscr{C}$ es un functor (supongamos covariante aunque es indiferente) entonces un morfismo functorial de la forma $u : F \to X_{\mathscr{D}}$ se dirá que es un cono inductivo. Dar este morfismo functorial significa dar unos morfismos $u_j : F(j) \to X$ para todo $j \in Ob(\mathscr{D})$ tales que si $f : j \to i$ entonces $u_i F(f) = u_j$.

Denotaremos por $F/\mathscr{C}$ a la categoría cuyos objetos son los conos inductivos, es decir, pares de la forma $(u, X_{\mathscr{D}})$ y cuyos morfismos $f : (u, X_{\mathscr{D}}) \to (u', X'_{\mathscr{D}})$ son los morfimos asociados $f : X \to X'$ de $\mathscr{C}$ tales que $fu = u'$. Diremos que F tiene un límite inductivo si la categoría $F/\mathscr{C}$ tiene un objeto inicial. Lo denotaremos como $(u, \underrightarrow{lim}F)$. Diremos que u es el morfismo estructural del límite inductivo y que los u_j son los morfismos estructurales asociados.

Análogamente, partiendo de un morfismo functorial $v : X_{\mathscr{D}} \to F$ y continuando con los conceptos duales se obtienen el cono proyectivo $(X_{\mathscr{D}}, v)$, la categoría $\mathscr{C}/F$ que forman y el límite proyectivo $(\underleftarrow{lim}F, v)$ cuando existe un objeto final.

Tomando la categoría $\mathscr{P}$ cuyos únicos objetos son 1 y 2, y los únicos morfismos son $h, h' : 1 \to 2$ y los morfismos identidad, podemos hacer la construcción de arriba para una categoría $\mathscr{C}$. Entonces un functor de $\mathscr{P}$ a nuestra categoría $\mathscr{C}$ consistirá en un par de objetos $X, Y \in Ob(\mathscr{C})$ y un par de morfismos $f, g \in Hom(X, Y)$.

Definición 1.3. *Se define el kernel de un par de morfismos (f, g) como el límite proyectivo del functor que generan. Como un kernel es un objeto final, es único salvo isomorfismo. Dualmente, se obtiene el cokernel con el límite inductivo.* 1.000

El kernel de (f, g) es un objeto final de la forma $(Z_{\mathscr{P}}, v)$ con

$$\begin{array}{rcc} v : Z_{\mathscr{P}} & \to & (f, g) \\ v_1 : Z & \to & X \\ v_2 : Z & \to & Y \end{array}$$

con un objeto $Z \in Ob(\mathscr{C})$ y un morfismo $v_1 : Z \to X$ tal que $fv_1 = gv_1$. Esto es debido a que si h, h' son los morfismos en $\mathscr{P}$ ocurre que

$$v_2 = (f, g)(h)v_1 = fv_1$$

$$v_2 = (f, g)(h')v_1 = gv_1.$$

Además para cualquier objeto T tal que $w_1 : T \to X$ con $fw_1 = gw_1$ existirá un único morfismo $h : T \to Z$ tal que $v_1 h = w_1$.

$$\begin{tikzcd} T \arrow[d, dotted] \arrow[dr, "w_1"] & & \\ Z \arrow[r, "v_1"] & X \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & Y \end{tikzcd}$$

Esto es debido a que, con la notación anterior, dado w_1 se puede definir $w_2 = fw_1 = gw_1$ y esto nos da un único morfismo $w : T_{\mathscr{P}} \to (f, g)$. Entonces al ser $(Z_{\mathscr{P}}, v)$ un objeto final existe un único morfismo $h : (T_{\mathscr{P}}, w) \to (Z_{\mathscr{P}}, v)$ asociado a un único morfismo $h : T \to Z$ tal que $v_1 h = w_1$.

En algunos libros al morfismo v_1 que hace que que para todo T, w_1 (con $fw_1 = gw_1$) exista ese único h y conmute el diagrama se le llama ecualizador (equalizer) y se dice que un kernel de dos morfismos es un ecualizador. Dualmente se obtiene el coecualizador:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & Y \arrow[r, "u_2"] \arrow[dr, "\omega_1"'] & Z \arrow[d, dotted] \\ & & T \end{tikzcd}$$

Y se argumenta de la misma forma. Una propiedad inmediata es que todo ecualizador es un monomorfismo (un coequalizador será un epimorfismo).

Definición 1.4. *Podemos definir un kernel (cokernel) de un morfismo f como un kernel (cokernel) del par de morfismos $(f, 0)$. Es necesario que exista el morfismo nulo en el conjunto de morfismos donde está f.*

Observaciones 1.5. *Podemos considerar lo siguiente: sea I una categoría pequeña (los objetos y los $Hom(i, j)$ son conjuntos y no clases propias) que sea además discreta (los únicos morfismos son los morfismos identidad). Se obtiene naturalmente un functor $F : I \to \mathscr{C}$ mediante un conjunto $\{X_i\}_{i\in I}$ de objetos de $\mathscr{C}$ indexados por el conjunto de objetos de I.*

Un límite inductivo de ese functor será una suma directa de los $\{X_i\}_{i\in I}$ denotado por $\coprod_{i\in I} X_i$. Con el límite proyectivo se obtiene un producto $\prod_{i\in I} X_i$.

Lo vemos en el caso inicial cuando $F(Ob(I)) = \{X, Y\}$. Tenemos el functor F y un límite inductivo que es un objeto inicial (u, Z_I) tal que:

$$\begin{array}{rcc} u : F & \to & Z_I \\ u_1 : X & \to & Z \\ u_2 : Y & \to & Z \end{array}$$

Así pues sea $T \in Ob(\mathscr{C})$ con el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
& T & \\
X \arrow[ur, "w_1"] \arrow[r, "u_1"'] & Z \arrow[u, dotted] & Y \arrow[ul, "w_2"'] \arrow[l, "u_2"]
\end{tikzcd}$$

Entonces existe un único morfismo $h : (u, Z_I) \to (w, T_I)$ tal que su morfismo asociado $h : Z \to T$ cumple $hu = w$ (es decir, $hu_j = w_j$ para $j = \{1, 2\}$), hace conmutativo el diagrama. Esto es, Z es una suma directa de X, Y. La extensión a más elementos es rutinaria y su dualización también.

Diremos que una categoría tiene límites inductivos si para todo functor pequeño (su dominio es una categoría pequeña), existe un límite inductivo. Ídem con límites proyectivos. Igualmente una categoría tiene sumas directas cuando existen para todo conjunto de elementos de la categoría. Y tendrá cokernels cuando para todo par de morfismos exista un cokernel (ídem kernels).

Teorema 1.6. *Una categoría $\mathscr{C}$ tiene límites inductivos si y sólo si la categoría tiene sumas directas y cokernels. (Ídem dualmente).*

Demostración. La implicación $\Rightarrow$ ya la hemos visto en la construcción y la observación anteriores. La otra implicación no es directa, se puede encontrar en [Kashiwara, 2.2.11].

$\square$

2. Categorías abelianas

Definición 2.1. *$\mathscr{C}$ es una categoría preaditiva si para cualquier par de objetos (X,Y), el conjunto $Hom(X,Y)$ tiene estructura de grupo abeliano con la siguiente aplicación de composición: si $f,f' \in Hom(X,Y)$ y $g,g' \in Hom(Y,Z)$ entonces*

- $(f+f')\circ g = f\circ g + f'\circ g$.
- $f\circ (g+g') = f\circ g + f\circ g'$.

En una categoría preaditiva se puede definir el kernel de un morfismo.

Proposición 2.2. *Sean $f,g : X \to Y$ un par de morfismos de una categoría $\mathscr{C}$ preaditiva. Entonces son equivalentes:*

- *El par (f,g) tiene kernel (resp. cokernel).*
- *El morfismo $f-g$ tiene kernel (resp. cokernel).*
- *El morfismo $g-f$ tiene kernel (resp. cokernel).*

Demostración. Con ver la equivalencia de los dos primeros es suficiente, veremos la existencia de ecualizadores. Si (f,g) tiene un ecualizador $v : Z \to X$ entonces v también es un ecualizador para $(f-g,0)$ trivialmente. (El dual es análogo con el coecualizador).

□

Corolario 2.3. *Si en una categoría preaditiva todos los morfismos tienen kernel (resp. cokernel) entonces todos los pares de morfismos tienen kernel (resp. cokernel).*

Proposición 2.4. *Una categoría preaditiva con objeto nulo tiene productos finitos si y sólo si tiene sumas directas finitas.*

Demostración. Lo demostraremos para el caso inicial. Sea $A_1 \xleftarrow{p_1} A \xrightarrow{p_2} A_2$ un producto de A_1 y A_2, entonces se tiene el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
& A_1 \arrow[dl, bend right, "Id"'] \arrow[dr, bend left, "0"] \arrow[d, "i_1"'] & \\
A_1 & A \arrow[l, "p_1"] \arrow[r, "p_2"] & A_2 \\
& A_2 \arrow[ul, bend left, "0"] \arrow[ur, bend right, "Id"'] \arrow[u, "i_2"'] &
\end{tikzcd}$$

Como la categoría es preaditiva existen los morfismos nulos y además se tienen las siguientes igualdades

$$p_1(i_1p_1 + i_2p_2) = p_1i_1p_1 + p_1i_2p_2 = p_1$$

$$p_2(i_1p_1 + i_2p_2) = p_2i_1p_1 + p_2i_2p_2 = p_2.$$

Esto quiere decir que $i_1p_1 + i_2p_2 = 1_A$. Ahora sean B, g_1, g_2 de la forma:

$$\begin{tikzcd} & B & \\ A_1 \arrow[ur, "g_1"] \arrow[r, "i_1"] & A \arrow[u, dotted, "?"'] & A_2 \arrow[ul, "g_2"'] \arrow[l, "i_2"] \end{tikzcd}$$

Veamos que existe un $g \in Hom(A, B)$ que hace conmutativo el diagrama. Si llamamos $g = g_1p_1 + g_2p_2$ ocurrirá que

$$gi_1 = g_1p_1i_1 + g_2 + p_2i_1 = g_1$$

$$gi_2 = g_1p_1i_2 + g_2 + p_2i_2 = g_2.$$

Para la unicidad basta ver que

$$g = g(i_1p_1 + i_2p_2) = g_1p_1 + g_2p_2 = wi_1p_1 + wi_2p_2 = w(i_1p_1 + i_2p_2) = w$$

□

Definición 2.5. *Una categoría preaditiva es aditiva si para cualquier par de objetos* (X, Y), *existe la suma directa* $X \coprod Y$. *Además asumiremos que una categoría aditiva tiene un objeto nulo.*

Definición 2.6. *Una categoría aditiva será preabeliana si para cualquier morfismo* f *existe un kernel y un cokernel.*

Esto no quiere decir que existan límites inductivos o proyectivos ya que aunque en una categoría abeliana se pueden hacer el producto y coproducto finitos no podemos asegurar el caso arbitrario.

Sea $i : X' \to X$ el morfismo asociado al kernel de f (resp. $q : Y \to Y'$ el del cokernel). Decimos que la coimagen (imagen) de f es el cokernel (kernel) de i (de q). En general se notará como $ker(f), coker(f), im(f), coim(f)$ a los objetos asociados al kernel, cokernel, imagen, coimagen respectivamente.

Proposición 2.7. *Sea* $\mathscr{C}$ *una categoría preabeliana y* $f : X \to Y$ *un morfismo suyo. Suponiendo que existen el kernel, cokernel, imagen y coimagen de* f *entonces existe un único morfismo* $\overline{f} : coim(f) \to im(f)$ *tal que* f *es la composición de los siguientes morfismos*

$$X \xrightarrow{\quad p \quad} coim(f) \xrightarrow{\quad \overline{f} \quad} im(f) \xrightarrow{\quad j \quad} Y$$

con p, j *definidos canónicamente.*

Demostración. Consideramos el diagrama:

$$\begin{tikzcd} T^1 \arrow[d, dotted] \arrow[dr] & & im(f) \arrow[d, "j"] & T^4 \arrow[l, dotted, shift right, "s"'] \arrow[l, dotted, shift left, "r"] \arrow[dl] \\ ker(f) \arrow[r, tail, "i"] & X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"] \arrow[dl] & Y \arrow[r, "q"] \arrow[dr] & coker(f) \arrow[d, dotted] \\ T^2 & coim(f) \arrow[l, dotted, shift right, "w"'] \arrow[l, dotted, shift left, "h"] & & T^3 \end{tikzcd}$$

Sean $r, s : T^4 \to im(f)$ con $jr = js$. Vamos a ver que j es monomorfismo. Tenemos que $jr : T^4 \to Y$ y que $qj = 0j = 0$, luego $qjr = 0r = 0 = 0jr$. Entonces como j es el morfismo asociado al kernel de q se tiene que existe un único morfismo de T^4 a $im(f)$ que hace conmutativo el diagrama, y necesariamente $r = s$.

Sean $h, w : coim(f) \to T^2$ con $hp = wp$. Vamos a ver que p es epimorfismo. Como p es el morfismo asociado al $coker(i)$ se tiene que $pi = p0 = 0$. Dado $hp : X \to T^2$, se cumple que $hpi = h0 = 0 = hp0$ y por lo tanto existirá un único morfismo de $coim(f)$ a T^2 que haga conmutativo el diagrama, necesariamente $h = w$.

Así si $j\overline{f}p = j\overline{\overline{f}}p$, como j es un monomorfismo y p es un epimorfismo se obtiene directamente que $\overline{f} = \overline{\overline{f}}$. Luego la unicidad es clara.

Ahora fijándonos en el siguiente diagrama obtendremos la existencia:

$$\begin{tikzcd}
T^1 \arrow[d, dotted] \arrow[dr] & & im(f) \arrow[d, "j"] & coim(f) \arrow[l, dotted, "\overline{f}"'] \arrow[dl, "f'"'] \\
ker(f) \arrow[r, "i"] & X \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "0"'] \arrow[dl] \arrow[d, "p"] & Y \arrow[r, shift left, "q"] \arrow[r, shift right, "0"'] \arrow[dr] & coker(f) \arrow[d, dotted] \\
T^2 & coim(f) \arrow[l, dotted] \arrow[ur, bend right, "f'"'] & & T^3
\end{tikzcd}$$

Como $fi = 0$, entonces (llamando Y a T^2) existe un morfismo $f' : coim(f) \to Y$ tal que $f'p = f$. Como p es un epimorfismo y $qf'p = qf = 0$, ocurre que $qf' = 0$. Entonces existe una $\overline{f} : coim(f) \to Y$ tal que $j\overline{f} = f'$.

$\square$

A este morfismo $\overline{f}$ se le llama morfismo paralelo.

Definición 2.8. *Una categoría preabeliana es abeliana si para todo morfismo $f : X \to Y$, el morfismo paralelo $\overline{f} : coim(f) \to im(f)$ es un isomorfismo.*

En particular, en una categoría abeliana todo bimorfismo es un isomorfismo. Esto es debido a que si f es bimorfismo $i = 0 = q$ y de aquí se puede suponer que $p = 1_X$ y que $j = 1_Y$ ya que cumplen el diagrama. Entonces se tiene que $f = j\overline{f}p = \overline{f}$.

Proposición 2.9. *Sea X un objeto de una categoría $\mathscr{C}$ abeliana y sea (X', i) un sub-objeto de X (trabajaremos salvo isomorfismos, como si fuera un objeto de la categoría $M(X)$). Supongamos que $(coker(i), q)$ es el cokernel del monomorfismo i, con q el epimorfismo canónico. Entonces el kernel de q es (X', i).*

Dualmente, si (q, X'') es un objeto cociente de X y $(ker(p), i)$ es su kernel (con i el monomorfismo canónico) entonces (q, X'') es el cokernel de i.

Demostración. Por definición el kernel del cokernel de i es la imagen de i. Sea $j : im(i) \to X$ el morfismo canónico que se define por hipótesis. Veamos que existe un isomorfismo $f : X' \to im(i)$ tal que $jf = i$. Factorizamos i canónicamente:

$$i : X' \xrightarrow{\quad p \quad} coim(i) \xrightarrow{\quad \bar{i} \quad} im(i) \xrightarrow{\quad j \quad} X.$$

Como i es un monomorfismo, argumentando como antes, $coim(i) = X'$ y $p = 1_{X'}$. Como la categoría es abeliana $\bar{i}$ es un isomorfismo, así $i = j\bar{i}$ y se obtiene el resultado.

En el caso dual definimos primero objeto cociente: es un sub-objeto del objeto dual, (q, X'') representa un epimorfismo $q : X \to X''$. El cokernel del kernel de q es la coimagen de q. Sea $p : X \to coim(q)$ el morfismo canónico, veamos otra vez que existe un isomorfismo $g : coim(q) \to X''$ tal que $gp = q$. Se factoriza canónicamente q:

$$q : X \xrightarrow{\quad p \quad} coim(q) \xrightarrow{\quad \overline{q} \quad} im(q) \xrightarrow{\quad j \quad} X''.$$

Como q es epimorfismo $im(q) = X''$ y $j = 1_{X''}$. Al ser la categoría abeliana, $\overline{q}$ es un isomorfismo y $\overline{q}p = q$.

□

Hemos probado que un monomorfismo arbitrario i en una categoría abeliana es el kernel de algún morfismo q de la categoría, en concreto el cokernel de i. Las categorías que cumplan esto se llamarán normales. Dualmente se obtiene que un epimorfismo es el cokernel de algún morfismo (dualmente conormales).

Definición 2.10. *Si X_i es un sub-objeto de X podemos asociarle biyectivamente un objeto cociente mediante la relación arriba descrita, lo denotaremos como X/X_i.*

El enunciado recíproco de la anterior proposición no es totalmente inmediato. La prueba se puede ver en el libro de Mitchell del siguiente teorema, que además sintetiza perfectamente qué propiedades caracterizan a una categoría abeliana:

Teorema 2.11. *Los siguientes enunciados son equivalentes:*

- *$\mathscr{C}$ es una categoría abeliana.*
- *$\mathscr{C}$ tiene kernels, cokernels, productos finitos, coproductos finitos, y es normal y conormal.*
- *$\mathscr{C}$ tiene pushouts y pullbacks, y es normal y conormal.*

Demostración. [Mitchell, 20.1] □

Su demostración es sencilla pero llevaría su tiempo ya que la notación entre los distintos autores es totalmente diferente. Por último también merecen ser al menos mencionados los teoremas isomorfía de Noether en categorías exactas, los cuales confirman la buena estructura de una categoría abeliana [Mitchell, I.16] [Popescu, 2.6].

2.1. Tipos de categorías abelianas

Antes de clasificar las categorías abelianas introduciremos unos conceptos. Supongamos que en nuestra categoría abeliana $\mathscr{C}$ existen productos $\prod_j X_j$ y coproductos $\coprod_j X_j$.

Sean $p_s : \prod_j X_j \to X_s$ los morfismos estructurales de $\prod_j X_j$ (proyecciones canónicas). Por la propiedad universal del producto existen $u_s : X_s \to \prod_j X_j$ tales que $p_s u_s = 1_{X_s}$ y $p_s u_z = 0$ con $z \neq s$, y de igual forma en el dual con $i_r : X_r \to \coprod_j X_j$ (inyecciones canónicas) existen morfismos $v_r : \coprod_j X_j \to X_r$ con $v_r i_r = 1_{X_r}$ y $v_z i_r = 0$ para $z \neq r$. Con estos morfismos se puede definir un único morfismo canónico:

$$t : \coprod_j X_j \to \prod_j X_j$$

tal que $p_j t = v_j$ para todo $j \in J$. Este morfismo es un isomorfismo en el caso finito.

Definición 2.12. *Supongamos que estamos en una categoría abeliana con productos y coproductos, y sea $\{X_j\}$ un conjunto de sub-objetos de un objeto X de la categoría. Se comprueba fácilmente que existe un único morfismo $s : \coprod_j X_j \to X$ tal que $s i_j = r_j$ con $r_j : X_j \to X$ los monomorfismos canónicos. Denotamos por $\sum_j X_j$ al sub-objeto imagen de s, y lo llamamos suma de los sub-objetos.*

De igual modo pero con objetos cocientes obtenemos un único morfismo $g : X \to \prod_j X/X_j$ tal que $p_j g = h_j$ con $h_j : X \to X/X_j$ los epimorfismos canónicos. Denotamos por $\cap_j X_j$ al sub-objeto kernel de g, la intersección de los sub-objetos.

Ahora ya podemos introducir los tipos de categorías abelianas que dio Grothendieck:

Axiomas de Grothendieck 2.13.

- *Una Ab 3-categoría es una categoría abeliana que tiene sumas directas arbitrarias.*
- *Una Ab 3^*-categoría es una categoría abeliana cuyo dual es una Ab 3-categoría, es decir, la categoría tiene productos arbitrarios.*
- *Una Ab 4-categoría es una Ab 3-categoría que para todo conjunto de monomorfismos $\{f_i : X_i \to X_i'\}$, la suma directa $\coprod f_i$ es también un monomorfismo. Es decir, cuando las sumas directas son exactas por la izquierda.*
- *Una Ab 4^*-categoría es una Ab 3^*-categoría que para todo conjunto de epimorfismos $\{f_i : X_i \to X_i'\}$, el producto $\prod f_i$ es también un epimorfismo. Es decir, cuando los productos son exactos por la derecha.*
- *Una Ab 5-categoría es una Ab 3-categoría tal que para todo objeto X, cualquier conjunto dirigido $\{X_i\}$ de sub-objetos y cualquier sub-objeto X' se tiene:*

$$\sum_i (X_i \cap X') = (\sum_i X_i) \cap X'.$$

- *Una Ab 5^*-categoría es el dual de la de arriba.*
- *Una Ab 6-categoría es una Ab 3-categoría tal que para todo objeto X de la categoría, para todo conjunto J y para todo $j \in J$, el conjunto dirigido $\{X_{j(i)}\}_{i \in I_j}$ de sub-objetos de X cumple:*

$$\cap_{j \in J}(\sum_{i \in I_j} X_{j(i)}) = \sum_{(j(i)) \in \prod_{j \in J} I_j} (\cap_{(j(i))} X_{j(i)}).$$

- *$Ab\,6^*$ es la condición dual de la anterior.*

En particular $Ab\,3$ implica que existen límites inductivos en la categoría, dualmente, $Ab\,3^*$ implica que existen límites proyectivos. Esto es debido a que si todos los morfismos tienen cokernel y existen sumas directas arbitrarias entonces, por el teorema 1.6, se tiene el resultado.

Otra observación directa es que una $Ab\,6$-categoría es una $Ab\,5$-categoría.

Sea $\{f_j : X_j \to Y_j\}_{j\in J}$ un conjunto de morfismos de $\mathscr{C}$. Denotamos por

$$\coprod_j f_j : \coprod_j X_j \to \coprod_j Y_j$$

al único morfismo que $(\coprod f_j)i_j = \bar{i}_j f_j$ siendo $\bar{i}_j$ los morfismos estructurales de $\coprod_j Y_j$ (las inyecciones canónicas). Dualmente se obtiene el producto de morfismos.

Proposición 2.14. *Sea $\mathscr{C}$ una categoría $Ab\,3$ y $Ab\,3^*$. Supongamos que para cualquier conjunto $\{X_j\}_{j\in J}$ de objetos de la categoría, el morfismo canónico $t : \coprod_j X_j \to \prod_j X_j$ es un monomorfismo. Entonces $\mathscr{C}$ es una $Ab\,4$-categoría.*

Demostración. Primero, sea $\{f_j : X'_j \to X_j\}_{j\in J}$ un conjunto de monomofismos. Consideramos una sucesión exacta de la forma (X'_j, X_j, X''_j) y el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[rr] & & X'_j \arrow[r, "f_j"] & X_j \arrow[r, "g_j"] & X''_j \\
& Z \arrow[ur, "h_j"] \arrow[dr, "h"'] & & & \\
0 \arrow[rr] & & \prod_j X'_j \arrow[r, "\prod f_j = f"] \arrow[uu, "p'_j"] & \prod_j X_j \arrow[r, "\prod g_j = g"] \arrow[uu, "p_j"] & \prod_j X''_j \arrow[uu, "p''_j"]
\end{tikzcd}$$

Fácilmente obtenemos que $p''_j gf = g_j f_j p'_j = 0$ para todo j, luego $gf = 0$. Queremos ver que la sucesión de abajo es exacta y nos falta ver que $\prod f_j$ es monomorfismo. Sea $h : Z \to \prod_j X'_j$ un morfismo, y existirán unos únicos $h_j : Z \to X'_j$ tal que $h_j = p'_j h$. Supongamos que existe otro morfismo $\bar{h}$ con $fh = f\bar{h}$, entonces $p_j fh = p_j f\bar{h} = f_j h_j = f_j \bar{h}_j$. Pero como los f_j son monomorfismos obtenemos que $h_j = \bar{h}_j$ para todo j y por lo tanto $h = \bar{h}$. Nos fijamos ahora en el diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
\coprod_j X'_j \arrow[r, "\coprod f_j"] \arrow[d, "t'"] & \coprod_j X_j \arrow[d, "t"] \\
\prod_j X'_j \arrow[r, "\prod f_j"] & \prod_j X_j
\end{tikzcd}$$

Como $\prod f_j t'$ es monomorfismo y es igual a $t \coprod f_j$ con t monomorfismo, necesariamente $\coprod f_j$ es monomorfismo.

$\square$

Una categoría que cumpla las condiciones de arriba se dirá que es una C_2-categoría [Mitchell, III.1].

Antes de la siguiente proposición necesitamos definir lo siguiente: sea $f : X \to Y$ un morfismo y (Y'', q) un objeto cociente de Y, definimos $f^{-1}(Y'') = coim(qf)$ que es un objeto cociente de X.

Proposición 2.15. *Una Ab 5-categoría es una Ab 4-categoría.*

Demostración. Sea $\{f_j : X'_j \to X_j\}_{j\in J}$ un conjunto de monomorfismos de la categoría y consideremos f el morfismo suma. Sea ahora T el conjunto de subconjuntos de J y sea $F \in T$, denotaremos por X'_F a la imagen canónica de la inclusión natural de $\coprod_{j\in F} X_j$ en $\coprod_j X_j$.

Entonces $\{X'_F\}_{F\in T}$ es un conjunto dirigido de sub-objetos y $\sum_F X'_F = \coprod_j X'_j$. Denotamos por K al objeto asociado al kernel de f. Así, $K = (\sum_F X'_F) \cap K = \sum_F (X'_F \cap K)$ por ser *Ab* 5. Si $K \neq 0$ entonces $X'_F \cap K \neq 0$ para algún F. Vamos a denotar por

$$u_F : \coprod_{j\in F} X'_j \to \coprod_j X'_j$$

al monomorfismo canónico. Se tiene que $u_F^{-1}(X'_F \cap K) \neq 0$ y además si consideramos los monomorfismos canónicos

$$v_F : \coprod_{j\in F} X_j \to \coprod_j X_j \qquad f_F : \coprod_{j\in F} X'_j \to \coprod_{j\in F} X_j$$

obtenemos que $fu_F = v_F f_F$ y que $ker(fu_F) = ker(v_F f_F) = 0$. Como $u_F^{-1}(X'_F \cap K)$ es un sub-objeto de $ker(fu_F)$ no le queda más remedio que ser cero, pero esto es una contradicción y f es entonces un monomorfismo.

□

Proposición 2.16. *Sea $\mathscr{C}$ una categoría abeliana que cumpla las condiciones Ab 5 y Ab 3^*. Entonces es una C_2-categoría.*

Demostración. Sea $\{X_j\}_{j\in J}$ un conjunto de objetos de la categoría. Sea T el conjunto de subconjuntos finitos de J, y $F \in T$, denotamos $X_F = im(u_F)$ con $u_F : \coprod_{j\in F} X_j \to \coprod_j X_j$. Ahora, si $K = ker(t) \neq 0$ con $t : \coprod_j X_j \to \prod_j X_j$, entonces para algún F ocurrirá que $K \cap X_F \neq 0$. Esto quiere decir que $0 \neq u_F^{-1}(K \cap X_F) = ker(tu_f) = 0$, por ser tu_F un monomorfismo, luego hemos llegado a contradicción. $K = 0$.

□

Mencionar quizá por último la definición de categoría de Grothendieck, se puede encontrar un desarrollo de este tipo de categorías en las referencias [Popescu, Schubert].

Definición 2.17. *Una categoría de Grothendieck es una categoría abeliana Ab5 con generador.*

3. Álgebra Homológica

El objetivo de esta sección es llegar a comprender categorialmente la cohomología. Para ello me he apoyado principalmente en el paper de Tohoku de Grothendieck pero utilizando las nociones de Hartshorne. Aquí estudiaremos en detalle los functores que podemos definir entre categorías abelianas, desde los aditivos hasta los derivados pasando por los exactos. Los teoremas que se mencionan no estarán demostrados ya que sólo nublarían el objetivo de esta sección, pero se darán todas las referencias a las distintas demostraciones.

Definición 3.1. *Sean $\mathscr{C}, \mathscr{C}'$ dos categorías preaditivas y $F : \mathscr{C} \to \mathscr{C}'$ un functor. F será aditivo si para cualquier par de morfismos $f, g \in Hom_{\mathscr{C}}(X, Y)$ se cumple que $F(f + g) = F(f) + F(g)$. Dicho de otra forma, F es aditivo si y sólo si para cualquier par de objetos $X, Y \in Ob(\mathscr{C})$, la aplicación $F(Hom(X, Y))$ es un morfismo entre grupos abelianos.*

Necesitamos la noción de *complejo* que definiremos en una categoría abeliana aunque puede definirse en una aditiva. Sea $\mathscr{C}$ dicha categoría abeliana definimos la categoría $Co(\mathscr{C})$ como sigue:

Definición 3.2. *Un objeto en la categoría $Co(\mathscr{C})$ es una secuencia de objetos $A_i \in Ob(\mathscr{C})$ tal que existen unos morfismos $d^i : A^i \to A^{i+1}$ con $d^{i+1} \circ d^i = 0$ para todo i.*

$$\cdots \xrightarrow{d^{i-2}} A^{i-1} \xrightarrow{d^{i-1}} A^i \xrightarrow{d^i} A^{i+1} \xrightarrow{d^{i+1}} \cdots$$

Notaremos un objeto de esa forma como $A^\bullet$. Ahora, un morfismo $f^\bullet : A^\bullet \to B^\bullet$ es una colección de morfismos $f^i : A^i \to B^i$ tales que

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "d^{i-2}"] & A^{i-1} \arrow[r, "d^{i-1}"] \arrow[d, "f^{i-1}"] & A^i \arrow[r, "d^i"] \arrow[d, "f^i"] & A^{i+1} \arrow[r, "d^{i+1}"] \arrow[d, "f^{i+1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r, "'d^{i-2}"] & B^{i-1} \arrow[r, "'d^{i-1}"] & B^i \arrow[r, "'d^i"] & B^{i+1} \arrow[r, "'d^{i+1}"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

conmuta. $Co(\mathscr{C})$ es una categoría abeliana.

Ahora definimos el objeto i-ésimo de cohomología como el objeto cociente $ker(d^i)/im(d^{i-1})$. Esto se puede hacer ya que existe el kernel de d^i y además como $d^i \circ d^{i-1} = 0$ la imagen $im(d^{i-1})$ es un sub-objeto de $ker(d^i)$. Obviamente depende del complejo que se considere, lo notaremos como $h^i(A^\bullet)$. Si $f^\bullet : A^\bullet \to B^\bullet$ es un morfismo entre complejos induce de forma natural un morfismo $h^i(f^\bullet) : h^i(A^\bullet) \to h^i(B^\bullet)$.

Dado el concepto de categoría abeliana surge instantáneamente la idea de sucesión corta exacta, esto es una cadena de la forma:

$$0 \longrightarrow A' \xrightarrow{f} A \xrightarrow{g} A'' \longrightarrow 0$$

tal que $ker(g) = im(f)$ como sub-objetos de A, 0 sea kernel de f (por lo que es monomorfismo) y $im(g) = A''$ (por lo que g es epimorfismo). Basta notar las propiedades de normalidad, conormalidad y de existencia de kernels y cokernels para darse cuenta que son las categorías abelianas donde estas sucesiones tienen sentido y merece la pena estudiarlas. Así como nos interesan, también lo harán todos los functores entre categorías abelianas que de alguna forma u otra preserven estas cadenas.

Definición 3.3. *Un functor aditivo entre categorías abelianas (haremos el caso covariante) se dice que es exacto por la izquierda si para toda sucesión corta exacta $0 \to X' \to X \to X'' \to 0$ su imagen nos da una sucesión corta exacta de la forma:*

$$0 \to F(X') \to F(X) \to F(X'')$$

Se dirá que es exacta por la derecha si su imagen es una sucesión corta exacta de la forma:

$$F(X') \to F(X) \to F(X'') \to 0$$

Y se dirá que es exacta si es exacta por los dos lados.

Un objeto $I \in Ob(\mathscr{C})$ se dice que es inyectivo si el functor contravariante $Hom(\cdot, I)$ asociado es exacto. Esto es que el siguiente diagrama conmute:

$$\begin{tikzcd}
 & & I & & \\
0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "f"] \arrow[ur] & A \arrow[r, "g"] \arrow[u] & A'' \arrow[r] \arrow[ul] & 0
\end{tikzcd}$$

Una resolución inyectiva de un objeto A es un complejo $I^\bullet$ definido en grados $i \geq 0$ y un morfismo $\varepsilon : A \to I^0$ tal que I^i son objetos inyectivos y la sucesión:

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\ \varepsilon\ } I^0 \longrightarrow I^1 \longrightarrow \cdots$$

es exacta. Se dirá que una categoría tiene suficientes objetos inyectivos si todo objeto tiene un monomorfismo a un objeto inyectivo. Es fácil ver además que en este tipo de categorías todo objeto tiene resolución inyectiva. Con esto ya podemos definir el concepto de functor derivado.

Definición 3.4. *Sea $F : \mathscr{C} \to \mathscr{C}'$ un functor covariante exacto por la izquierda con $\mathscr{C}$ abeliana. El functor derivado de F por la derecha de grado $i \geq 0$, R^iF, se construye de la siguiente forma: para cada objeto $A \in Ob(\mathscr{C})$ se elige una resolución inyectiva $I^\bullet$ de A, y se define $R^iF(A) = h^i(F(I^\bullet))$.*

Teorema 3.5. *Sea $F : \mathscr{C} \to \mathscr{C}'$ un functor covariante exacto por la izquierda entre categorías abelianas. Y sea $\mathscr{C}$ una categoría con suficientes objetos inyectivos, entonces:*

1. *El functor derivado por la derecha R^iF es aditivo para todo i y no depende de las elecciones de las resoluciones inyectivas, es decir, cambiando dichas resoluciones se obtienen functores isomorfos.*

2. *$F \cong R^0F$.*

3. *Para cada sucesión corta exacta $0 \to A' \to A \to A'' \to 0$ y para cada i existe un morfismo natural $\delta^i : R^iF(A'') \to R^{i+1}F(A')$, tal que se obtiene la sucesión exacta*

$$\cdots \longrightarrow R^iF(A') \longrightarrow R^iF(A) \longrightarrow R^iF(A'') \xrightarrow{\ \delta^i\ } R^{i+1}F(A') \longrightarrow \cdots$$

4. *Dado un morfismo entre dos sucesiones cortas exactas, el morfismo δ^i nos da el siguiente diagrama conmutativo:*

$$\begin{tikzcd}
R^iF(A'') \arrow[r, "\delta^i"] \arrow[d] & R^{i+1}F(A') \arrow[d] \\
R^iF(B'') \arrow[r, "\delta^i"] & R^{i+1}F(B')
\end{tikzcd}$$

5. *Para cada objeto inyectivo I y para $i > 0$ se tiene que $R^iF(I) = 0$.*

Demostración. La demostración son construcciones directas por las definiciones. □

Este teorema dice mucho más de lo que parece, incluida una versión de Mayer-Vietoris más general. Nos quedaremos con la primera parte para este trabajo: el functor derivado no depende de la resolución inyectiva escogida. Esto nos da un colchón muy amplio de invarianza con el que trabajar. Más generalmente, se define un $\delta-$functor como una colección de functores T^i con $i \geq 0$ tales que cumplen las condiciones 3 y 4, para profundizar acerca de estos consultar las referencias [Grothendieck, Hartshorne].

3.1. Cohomología de Haces

Sea X un espacio topológico y sea $\mathscr{T}$ la categoría de conjuntos abiertos de X. Denotamos por $\tilde{\mathscr{T}}$ a la categoría de haces sobre $\mathscr{T}$ a una categoría abeliana $\mathscr{C}$. Ahora sea $F \in \tilde{\mathscr{T}}$ y sea U un abierto de X, entonces tenemos un objeto FU de $\mathscr{C}$, es decir, un functor

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\mathscr{T}} \times \mathscr{T} & \rightsquigarrow & \mathscr{C} \\ (F, U) & \rightsquigarrow & FU \end{array}$$

que es covariante en $\tilde{\mathscr{T}}$ y contravariante en $\mathscr{T}$.

Definición 3.6. *Dado un abierto U, definimos el functor de secciones globales como el functor covariante $\Gamma(U, \cdot)$ tal que $\Gamma(U, F) = FU$*

Los siguientes teoremas probarán que estamos en las condiciones idóneas para definir una cohomología. Son enunciados sencillos pero no triviales, me remitiré a las referencias.

Teorema 3.7. *La categoría de haces de $\mathcal{O}_X$-modulos de un espacio anillado $(X, \mathcal{O}_X)$ es una categoría abeliana.*

Demostración. [Kashiwara, 18.1.6] □

El libro de Kato da una explicación del caso general: la categoría de haces sobre $\mathscr{T}$ a una categoría abeliana $\mathscr{C}$ es abeliana. Sin embargo no he podido encontrar una demostración completa de este resultado, supondremos entonces que dicha categoría $\mathscr{C} = Ab$ es la categoría de grupos abelianos.

Teorema 3.8. *La categoría de haces de $\mathcal{O}_X$-modulos de un espacio anillado $(X, \mathcal{O}_X)$ tiene suficientes objetos inyectivos*

Demostración. [Hartshorne, III, 2.2] □

Ahora podemos reducir fácilmente estos teoremas a nuestro caso particular: suponiendo que $\mathcal{O}_X$ es el haz constante $\mathbb{Z}$, $(X, \mathcal{O}_X)$ sigue siendo un espacio anillado. Así que la categoría de haces de $\mathbb{Z}-$módulos del espacio anillado $(X, \mathbb{Z})$ es abeliano y tiene suficientes objetos inyectivos. Y como además la noción de $\mathbb{Z}-$módulo coincide con la de grupo abeliano obtenemos que la categoría de haces de grupos abelianos sobre un espacio topológico X es abeliana y tiene suficientes objetos inyectivos.

Tiene sentido ahora estudiar la exactitud del functor de secciones globales. Utilizaremos técnicas básicas de haces que se pueden consultar en cualquier libro que los mencione, el de [Kato] mismamente. Para cualquier sucesión exacta de la forma

$$0 \longrightarrow F' \xrightarrow{\phi} F \xrightarrow{\psi} F'' \longrightarrow 0$$

el functor $\Gamma(U, \cdot)$ la transforma en una sucesión

$$F'U \xrightarrow{\phi_U} FU \xrightarrow{\psi_U} F''U$$

en la categoría $\mathscr{C} = Ab$ de grupos abelianos. Tomando el límite directo de $x \in U$ de la sucesión de arriba obtenemos una de las espigas en x.

$$0 \longrightarrow F'_x \xrightarrow{\phi_x} F_x \xrightarrow{\psi_x} F''_x \longrightarrow 0$$

En [Kato, 3.4] se demuestra la exactitud de esta sucesión. Suponiendo esto, consideramos

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \Gamma(U,F') & \xrightarrow{\phi_U} & \Gamma(U,F) & \xrightarrow{\psi_U} & \Gamma(U,F'') \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & F'_x & \xrightarrow{\phi_x} & F_x & \xrightarrow{\psi_x} & F''_x \end{array}$$

que es un diagrama conmutativo para todo $x \in U$. Como ϕ es un monomorfismo de haces, entonces ϕ_U también es monomorfismo luego sólo nos queda comprobar que $im(\phi_U) = ker(\psi_U)$. Sea $s \in \Gamma(U, F')$, fácilmente $0 = \psi_x(\phi_x(s_x)) = \psi_U(\phi_U(s))_x$ para todo s, entonces $\psi_U(\phi_U) = 0$. Ahora, sea $g \in ker(\psi_U)$. Entonces $\psi_x(g_x) = 0$, luego $g_x \in im(\phi_x)$, sea $\phi_x(h_x) = g_x$. Así, ese germen dará lugar a una sección $h \in \Gamma(U, F')$ tal que $(h)_x = h_x$, y entonces $\phi_U(h)_x = \phi_x(h_x) = g_x$. Luego $\phi_U(h) = g$ y se tiene el resultado. Con lo cual el functor de secciones globales es exacto por la izuierda.

Recapitulando tenemos que la categoría de haces de grupos abelianos sobre X es abeliana, tiene suficientes objetos inyectivos y $\Gamma(U, \cdot)$ es exacto por la izquierda por lo que podemos obtener sus functores derivados por la derecha. Entonces se definen los grupos de cohomología tal cual los dio Grothendieck como sigue:

Definición 3.9. *Sea X un espacio topológico, $\mathscr{C}^X$ la categoría abeliana de haces de grupos abelianos sobre $\mathscr{T}$. Tenemos entonces que $\Gamma(X, \cdot)$ es un functor exacto por la izquierda sobre $\mathscr{C}^X$ cuyos valores van a parar a la categoría de grupos abelianos. Podemos entonces considerar sus functores derivados por la derecha y notarlos como $H^i(X, \cdot)$. Así, para cualquier haz $\mathcal{F}$, los grupos $H^i(X, \mathcal{F})$ son los grupos de cohomología de $\mathcal{F}$.*

Observaciones 3.10.

- *En el caso general de haces de functores de una categoría abeliana $\mathscr{C}$ sobre X se definen de igual forma los objetos cohomológicos $H^i(X, \mathcal{F})$.*
- *Dualizando todo este proceso se puede definir la homotopía de cohaces de espacios topológicos.*
- *En el curso de la asignatura hemos utilizado la cohomología de De Rham la cual, en una variedad smooth M, se definía mediante la composición de dos functores:*

$$H^k_{DR} : DMan \xrightarrow{\Omega^\bullet(-)} coCh_{Vect_{\mathbb{R}}} \xrightarrow{H^k} Vect_{\mathbb{R}}$$

Utilizando la notación de [Muñoz], donde $coCh$ es el complejo de cocadenas (aquí definido simplemente como complejo) de formas diferenciales de órdenes k sobre la variedad, y H^k el functor cohomológico del complejo (notado aquí como h^k). Podemos ahora utilizar la categoría de haces de gérmenes de formas diferenciales (más generalmente la categoría de haces de $\mathbb{R}$-espacios vectoriales) para definir la cohomología de De Rham en los términos de este trabajo. Así, si se considera el haz constante $\mathbb{R}$ y su resolución inyectiva:

$$0 \longrightarrow R \longrightarrow \Omega^0 \longrightarrow \Omega^1 \longrightarrow \cdots$$

Y aplicamos el functor derivado por la derecha del functor de secciones globales $\Gamma(M, \cdot)$:

$$0 \longrightarrow R \longrightarrow \Omega^0(M) \longrightarrow \Omega^1(M) \longrightarrow \cdots$$

Obtenemos exactamente la misma sucesión y por lo tanto $H^k_{DR}(M) = h^k(\Gamma(M, \mathbb{R}^\bullet))$.

- *Por último, esta teoría se puede seguir ampliando para ver que esta cohomología coincide con la análoga en espacios anillados $(X, \mathcal{O}_X)$ con haces de $\mathcal{O}_X-$módulos. E igualmente con la cohomología de Čech [Hartshorne].*

Referencias

[1] **Grothendieck, Alexandre**, *Sur quelques points d'algèbre homologique*, Tohoku Math J.9 (1957), 119-221.

[2] **Hartshorne, Robin**, *Algebraic Geometry*, Springer-Verlag, 1977.

[3] **Kashiwara, M. y Schapira, P.**, *Categories and Sheaves*, Springer, 2006.

[4] **Kato, Goro**, *The Heart of Cohomology*, Springer, 2006.

[5] **Mitchell, Barry**, *Theory of Categories*, Academic Press, 1965.

[6] **Muñoz, Vicente**, *Geometry and Topology of Surfaces*, Apuntes/notas, 2018.

[7] **Popescu, Nicolae**, *Abelian Categories with Applications to Rings and Modules*, Academic Press, 1973.

[8] **Schubert, Horst**, *Categories*, Springer-Verlag, 1970.